



TESIS DOCTORAL

**La Bóveda Extremeña.
Geometría.**

Autor:

Fernando Pariente Lorenzo

Programa:

Desarrollo Territorial Sostenible

Año: 2019



TESIS DOCTORAL

**La Bóveda Extremeña.
Geometría.**

Autor:

Fernando Pariente Lorenzo

Programa:

Desarrollo Territorial Sostenible

Director:

La conformidad del director de la tesis consta
en el original en papel de esta Tesis Doctoral

Manuel Fortea Luna

(Dr. Arquitecto)

Año: **2019**

Resumen.

La disertación que se presenta tiene por objetivo la identificación de la forma de una bóveda de aristas de fábrica de ladrillo, construida sin cimbrar —algunas con varios siglos de antigüedad— que es singular por el aspecto a la vista de las superficies combadas que la conforman: La Bóveda Extremeña.

A partir de la base de datos construida con los levantamientos topográficos de esta bóveda en distintos lugares de la región de Extremadura —área del territorio peninsular junto al Bajo Alentejo donde se localizan—, se analiza la forma mediante la identificación de los elementos generadores de las superficies: líneas generatriz y directriz. Se busca la conformidad de esas líneas con curvas geométricas conocidas y se investigan los parámetros que definen dichas figuras geométricas y las posibles relaciones de proporción que pudieran existir entre ellos.

Si —como parece probable— la forma de esta bóveda procede de un diseño primitivo, se comprueba que éste puede ser realizable mediante procedimientos gráficos «euclidianos» con solo los útiles clásicos de la antigüedad para el dibujo y resoluciones geométricas: «la regla y el compás».

Por último, se exploran las posibilidades de cálculo del empuje de los arcos de fábrica que conforman cada una de las superficies de la Bóveda Extremeña mediante resoluciones gráficas con solo los útiles «euclidianos».

Abstract.

The aim of the present dissertation is to identify the shape of a brickwork groin vault, built without centring —some of them being several centuries old—, which is unique due to the appearance of its warped surfaces: the Extremaduran vault.

Thanks to the database made from the surveys of this vault in different locations of the region of Extremadura —area of the peninsular territory next to Lower Alentejo— we'll analyze the shape by identifying the surface generating elements: the generatrix and the directrix. We'll look for the accordance of those lines with known geometrical curves and the possible proportional relations that might exist between them.

If —as it seems— the shape of this vault comes from a primitive design, we'll verify that it can be made through «euclidean» graphic procedures with only the classical tools available in antiquity: the ruler and the compass.

Lastly, we'll explore the calculation possibilities of the thrust of the masonry arches that make up each of the surfaces of the Extremaduran vault through graphic resolutions with only the «euclidean» tools.

Agradecimientos.

Son muchas las personas a quienes agradecer el ánimo que me infundieron y los consejos para la realización de esta tesis. De todos ellos, especial reconocimiento a mi director Manuel Fortea Luna por haberme abierto las puertas, con ilusión, al conocimiento de las estructuras de fábrica que transmitió en las clases de máster en la Escuela Politécnica de la Universidad de Extremadura en Cáceres.

A todas las que nos han permitido entrar en sus casas particulares para la realización de los levantamientos topográficos de las bóvedas.

Agradecemos también la información facilitada generosamente por maestros de obra, con los que hemos podido hablar, sobre el replanteo, los materiales, medios utilizados y la ejecución, realizada por ellos mismos, de este tipo de abovedamiento sin cimbrar con la técnica transmitida y aprendida de sus maestros. Por su inestimable aportación, a: Claudio Bravo López, en Navas del Madroño (Cáceres); Antonio Acedo Aldeano, en Brozas (Cáceres); Ángel Gil Gaspar, en San Vicente de Alcántara (Badajoz); Fabián Fanco Garrido, en Burguillos del Cerro (Badajoz).

Por la escrupulosa atención y competencia a M. Montero Romero por las correcciones a la elaboración final del texto de esta tesis que se presenta.

... y simplemente por placer, nunca por el beneficio.

Índice

1. Introducción.	1
1.1. Antecedentes.	1
1.2. Objetivo.	3
1.3. Planteamiento.	4
1.4. Contenido.	5
2. Antecedentes.	11
2.1. Forma de los abovedamientos.	11
2.2. Generación y definición de la forma.	14
2.3. Construcción de bóvedas sin cimbrar.	19
2.3.1. Justificación mecánica.	21
2.3.2. Construcción.	25
2.3.3. La Bóveda Extremeña. Antecedentes.	30
Francisco Javier Boguerín.	30
Pedro Celestino Espinosa.	31
Florencio Ger y Lóbez.	31
Vicente Paredes Guillén.	32
José Albarrán.	34
Fortea Luna y López Bernal.	35
2.3.4. Forma de la Bóveda Extremeña.	37
Florencio Ger y Lóbez.	37
Vicente Paredes Guillén.	39
Fortea Luna y López Bernal.	43
3. La Bóveda Extremeña. Levantamiento.	45
3.1. Identificación de la BEx.	45
3.2. Muestreo. Localización.	46
3.3. Medición de la forma.	48

3.3.1.	Toma de datos.	48
3.3.2.	Registro de datos.	50
3.4.	Confección de planos.	51
4.	Análisis de los datos del levantamiento.	53
4.1.	Introducción.	53
4.2.	Metodología.	54
4.2.1.	Procedimiento del análisis.	57
4.2.2.	Resultados.	60
4.3.	Relaciones entre los parámetros de la bóveda.	60
4.4.	Proporciones entre los parámetros de la bóveda.	63
4.5.	Trazado geométrico con regla y compás.	67
4.5.1.	Secciones entre muros.	69
4.5.2.	Aristas en muro.	76
4.5.3.	Resolución gráfica de una elipse <i>dupla</i>	93
4.6.	Resumen.	96
5.	Empujes en arco elíptico <i>dupla</i> con regla y compás.	99
5.1.	Introducción.	99
5.2.	Empujes en arco elíptico <i>dupla</i>	100
5.3.	Propiedades físicas del arco: área, peso y centro de gravedad.	101
5.3.1.	Área de la sección de fábrica.	101
5.3.2.	Peso de la fábrica.	102
5.3.3.	Centro de gravedad.	102
5.4.	Empujes sin Coeficiente de Seguridad Geométrico (CSG).	103
5.4.1.	Empuje horizontal mínimo y total en el muro.	104
5.4.2.	Puntos de la línea de empujes tangentes al borde de la fábrica.	108
5.5.	Empujes con Coeficiente de Seguridad Geométrico (CSG).	109
5.5.1.	Empuje horizontal mínimo en clave y total en el muro.	110
5.5.2.	Puntos de la línea de empujes tangentes al borde de la fábrica.	111
5.6.	Comprobación de la resolución gráfica de los empujes.	112
5.7.	Empujes en arco elíptico « <i>dupla</i> » rebajado.	116
5.8.	Proporción entre empujes en arcos elípticos « <i>dupla</i> ».	120

6. Conclusiones.	121
6.1. Forma de la Bóveda Extremeña.	121
6.2. Conclusiones.	124
Anexos	135
A. Datos de los levantamientos.	137
A.1. Localización geográfica de las bóvedas.	137
A.2. Datos catastrales de los inmuebles.	138
A.3. Datos levantamiento de las bóvedas	141
B. Ajuste de curvas.	147
B.1. Introducción.	147
B.2. Ajuste de las aristas en muro.	149
B.3. Ajuste de las secciones entre muros.	154
C. Relaciones entre parámetros de la bóveda.	157
C.1. Estadística. Procedimiento.	157
C.1.1. Semiejes y lado de las aristas en muro.	158
C.1.2. Semiejes mayor y menor de las aristas en muro.	159
C.1.3. Retumbo y flecha de las aristas en muro.	160
C.1.4. Retumbo y lado de las bóvedas.	161
C.1.5. Secciones entre muros y vano.	162
D. Estadística de empujes: método gráfico <i>vs</i> analítico	163
D.1. Introducción.	163
D.2. Diferencias entre el método gráfico y analítico.	163
E. Planos.	173
E.1. Bóveda Extremeña: planos de planta con curvas de nivel.	173
F. Fotografías	187
Notas	214
Bibliografía	215

1

Introducción.

1.1. Antecedentes.

Desde la antigüedad y a lo largo de la historia, la ordenación, distribución y composición de un diseño arquitectónico se ha desarrollado, principalmente, en base a la geometría. Con esta herramienta gráfica y matemática se ha podido pasar del campo de la imaginación al real, al físico, plasmando en un dibujo el proyecto de una edificación. A partir del diseño original, definido y representado gráficamente, se puede interpretar una idea arquitectónica y hacerla realidad: se puede construir.

Una de las partes de la construcción en una edificación es la cubrición de los espacios abiertos: de los vanos entre muros, entre pilares o entre ambos. Con funciones distintas —cerramiento de un habitáculo, apoyo de la cubierta o sostén de un piso superior— se han desarrollado desde la antigüedad sistemas de cerramiento de fábrica en forma de bóvedas y/o cúpulas y en todas ha sido necesaria la participación de la geometría en su diseño, pues es en la geometría donde reside el equilibrio y estabilidad de las obras de fábrica.

Entre todos los sistemas de cubrición de un espacio abierto, el tipo de bóveda conocido como «de rosca», ejecutada sin cimbra, ha tenido gran difusión y aceptación en la técnica constructiva del abovedamiento desde el tercer milenio a.C. hasta tiempos recientes.¹ A partir de pequeñas piezas utilizables a mano, con forma geométrica sencilla, fáciles de fabricar y económicas, se puede construir una bóveda disponiendo estas pequeñas piezas de una manera ordenada y precisa, unidas o sujetas entre sí con argamasa, hasta formar una superficie espacial. La manera de colocación de estas pequeñas piezas, ladrillos o adobes, y la forma final de las superficies generadas

ha dado lugar a los distintos tipos en que se clasifican, desde diferentes aspectos técnicos y formales, los abovedamientos.

De entre los tipos de bóvedas de fábrica, uno de ellos, las bóvedas de aristas sobre planta cuadrada o cuadrangular, que se construye con los medios y de la manera dicha, tiene una singularidad que la hace notable: las cuatro superficies que la conforman son abombadas. Por un lado, se construye al aire, sin el auxilio de cimbra, lo que requiere de operaciones de ejecución especializada y precisa de los elementos constituyentes para conseguir la estabilidad de la fábrica en cada fase de su construcción desde su inicio en los arcos formeros hasta su conclusión en la clave y, por otro lado, la más sobresaliente en nuestra opinión, resulta de la pericia del albañil, pues la forma abombada de las superficies de la bóveda se realiza a estima, «a ojo», sin guías provisionales que dirijan la orientación de las hiladas de ladrillo, apoyándose visualmente únicamente en las curvas marcadas en los muros y teniendo como referencia final el punto central o clave de la bóveda: punto de mayor cota de toda la fábrica. Las superficies así construidas forman una bóveda en equilibrio y solidez contrastada, es la: «Bóveda Extremeña».

La implantación geográfica de la Bóveda Extremeña (en adelante se dirá, abreviadamente, BEx) se sitúa en la parte occidental de la península Ibérica y más concretamente en Extremadura (España) y el Alentejo (Portugal). Son bóvedas sobre planta cuadrada —o cuadrangular con ángulos cercanos al recto— formadas por cuatro paños iguales de doble curvatura resultado de la intersección de dos superficies iguales y perpendiculares entre sí que se desarrollan entre dos muros opuestos y con arranques a la misma altura. Son de ladrillo cocido y argamasa —generalmente de cal— colocados a tabla y formando hiladas inclinadas, en cada paño, sobre los muros verticales de apoyo de la bóveda. Las hiladas se construyen «a rosca», es decir, la hilada de un paño se continúa con otra hilada del paño adyacente y que a partir de los muros, como si de una espiral se tratase, acaban en la clave. Cada paño queda marcado por aristas claramente visibles; unas, entre dos paños consecutivos que son entrantes (hacia el interior del espacio cubierto por el intradós) y que se prolongan dos a dos, entre rincones enfrentados, formando las: ‘aristas diagonales’, y otras, en la intersección de cada paño con los muros delimitadores y apoyo de la bóveda son las: ‘aristas en muro’ (aristas salientes hacia el exterior por el trasdós).

1.2. Objetivo.

Es, principalmente, un estudio sobre la forma —el aspecto interior por el intradós— que presentan las superficies que conforman la BEx conforme al método y reglas de la geometría analítica y obtener, si es factible, las propiedades de las líneas definidoras de las superficies mediante ecuaciones matemáticas.

En una primera observación de esta bóveda, se aprecia claramente que no es la clásica bóveda de aristas romana: la formada por la intersección de dos bóvedas de cañón recto iguales, ambos a la misma altura, de sección semicircular y con puntos de arranque en los rincones a la misma altura (en adelante simplemente bóveda de aristas o bóveda de aristas clásica). En la bóveda de arista que hemos denominado clásica, la arista en los muros es un semicírculo y la clave de esta bóveda está a la misma altura que la clave de los arcos formeros o aristas en los muros. Por el contrario, en la Bóveda Extremeña se observa claramente que las cuatro aristas en los muros, aunque iguales entre sí y a la misma altura, no son, de manera clara, arcos de círculo.

Las aristas en muro —los arcos formeros— que se aprecian en la BEx son líneas curvadas, simétricas por mitad del muro, en las que se percibe visualmente variaciones de curvatura: mas suave en mitad del muro y más pronunciada hacia los rincones o arranques de la bóveda. También se puede apreciar, con algo de detenimiento, que las claves de esas aristas en los muros no están a la misma altura que la clave de la bóveda: la fábrica en la clave de la BEx está más alta que las claves de las aristas en los muros.

El objetivo de este trabajo es el conocimiento de la forma de la Bóveda Extremeña a partir del análisis de casos reales de estos abovedamientos mediante el exámen de la geometría que la define: de las curvas —geométricas— que conforman las superficies que se desarrollan en el espacio y sus parámetros definidores, de las magnitudes de los diferentes parámetros de las curvas, las proporciones entre esas magnitudes, así como la posición espacial relativa entre curvas.

Una vez conocida la forma de la bóveda —líneas directrices y generatrices que forman las superficies, sus dimensiones, sus posiciones relativas, etc.—, este trabajo tiene como propósito el investigar mediante el exámen de su forma si existe alguna relación con los cánones clásicos de la arquitectura: proporciones entre los elementos constituyentes de su forma y las simetrías.

También se tiene como objetivo, una vez identificada la forma de la BEx, determinar si pudo existir un modelo, un patrón, posible de diseño de esta bóveda realizable con solo los útiles clásicos de dibujo «la regla y el compás» mediante resoluciones de geometría euclidiana, y si es factible el replanteo de la obra por alarifes,² con solo cuerdas y plomada, siguiendo ese supuesto modelo originario.

1.3. Planteamiento.

Lo que se presenta desarrollado en este trabajo es una aproximación, un «acercamiento», a partir de la forma visual, a la configuración de la Bóveda Extremeña mediante resoluciones gráficas de dibujo y los fundamentos matemáticos en los que se basa para conocer la geometría de las superficies, su generación mediante líneas directrices y generatrices, sus propiedades y proporciones, que dio origen a este singular diseño, pues, como es sabido, la producción arquitectónica es inicialmente creativa —es artística— y seguidamente se desarrolla en base a la geometría. A partir de un boceto, la geometría y las matemáticas en que se funda el diseño arquitectónico —y esta interacción se ha mantenido durante siglos—, son las que posibilitan fabricar un edificio; y es su forma visual la que lo caracteriza y en el caso de la Bóveda Extremeña la que hace de ella una singularidad.

En el planteamiento, aunque enfocado fundamentalmente a la obtención del diseño geométrico en el plano y en el espacio —que suponemos proviene de uno original— no se ha olvidado que la bóveda Extremeña pertenece a ese tipo de construcciones en las que prima el aprovechamiento de los materiales locales, comúnmente conocidas como arquitectura popular y más concretamente, tomando palabras prestadas, a las edificaciones de «arquitectura sin arquitectos»³. Ejecutadas por maestros albañiles, en la que las técnicas de replanteo inicial y de comprobación, los sistemas de ejecución y el resultado final no son precisamente las de obras refinadas, al menos formalmente. La Bóveda Extremeña pertenece a esa clase de construcciones con limitados recursos materiales y económicos realizadas por maestros alarifes, herederos originalmente de un profundo conocimiento técnico, de materiales y procesos constructivos y cuyo resultado estético es de una inusual belleza y de eficacia y solidez probada por la pervivencia de esta bóveda durante siglos en edificaciones antiguas y aún en uso.

1.4. Contenido.

El trabajo que se presenta se desarrolla sobre la idea de que en todo diseño arquitectónico, y en nuestro caso las bóvedas, están implicadas las matemáticas en cuanto a las medidas, las relaciones entre las dimensiones y las formas expresables con medidas; esta parte de las matemáticas es la geometría.

A lo largo de la Historia de la Arquitectura han sido muchas y variadas las opiniones sobre la forma más adecuada de los elementos arquitectónicos para alcanzar la armonía y ritmo de las partes —*euritmia*— y se han establecido cánones de belleza basados en la razón y proporción —y simetría— entre las partes de una cosa y su conjunto. Estos conceptos quedaron establecidos por Euclides en Elementos: «Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas» y «Llámesese proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón»⁴

Inicialmente, en el capítulo 2 se hace un repaso histórico (tratados que surgen a partir del Renacimiento) a las formas geométricas de los distintos tipos de abovedamientos para su adecuada implantación en el habitáculo según la geometría de la planta a cubrir.

La forma geométrica de las distintas superficies espaciales que conforman los abovedamientos se interpreta, a través de esos textos, desde el punto de vista de su generación, engendrada por elementos geométricos simples: líneas ‘generatrices’, rectas o curvas planas —ambas finitas—, que se desplazan por el espacio apoyadas y/o siguiendo un itinerario marcado a través de otras líneas ‘directrices’, también rectas o curvas planas —igualmente finitas—, formando una o varias superficies. Las características de unas y otras y su número en el espacio a cubrir constituyen la definición geométrica de la bóveda. En base a las características, el número de elementos de generación de las superficies y su organización o distribución espacial, se puede hacer, en primer lugar, una clasificación de las distintas formas de los abovedamientos por la geometría resultante de sus elementos definidores.

Otro sistema de clasificación, que toma como criterio los materiales constituyentes de la fábrica de la bóveda (piezas de pequeño tamaño pétreas o cerámicas), permite agrupar los abovedamientos según dos sistemas constructivos diferentes: con y sin armadura o cimbra sobre la que se construye la bóveda hasta su completa finalización; y es uno de ellos, la construcción de bóvedas sin el auxilio de cimbras, realizadas con ladrillos y argamasa, el que es motivo de nuestro interés.

En la construcción sin cimbra es la disposición ordenada —una determinada orientación espacial— de las piezas constituyentes, los ladrillos, y el tipo de argamasa los factores que posibilitan la ejecución sin cimbra. Se expone la justificación mecánica del equilibrio que se obtiene mediante la orientación de las piezas al ir formando hiladas sucesivas, en forma de arcos, verticales o inclinadas, sentando los ladrillos de una hilada sobre los de la anterior a *tabla* o de plano en unos casos o bien a *canto* o panderete en otros.

A este grupo de bóvedas de ladrillos construidas sin cimbrar pertenece la Bóveda Extremeña. Se hace una revisión historiográfica de las fuentes bibliográficas que hacen mención a esa bóveda localizada únicamente, según distintos autores, en el suroeste de la península Ibérica; autores —ingerieros y arquitectos— que dan cuenta de la singularidad de esta bóveda: de la pericia y maestría de los alarifes en su ejecución, la economía de medios materiales para su construcción y de la solidez resultante de su estructura. En esa revisión historiográfica ya aparece y se describe la singularidad de esas bóvedas de aristas, que se construyen sin cimbra, que presentan una diferencia de cota entre las aristas en muro y la clave central —punto más alto de la fábrica—, característica conocida como ‘retumbo’ de la bóveda. Se describe en esos textos la manera de generación de distintas bóvedas de aristas mediante los conceptos geométricos de líneas generatrices y directrices que produce la forma de las bóvedas.

En el siguiente capítulo 3 «La Bóveda Extremeña. Levantamiento» se describe el método seguido para estudiar la forma concreta de las superficies constituyentes de la BEx.

Un primer trabajo, de campo, consistió en identificar (principalmente por la forma visual de las aristas en muro) esta bóveda en distintas poblaciones de la región. En cada una de ellas se realizó un levantamiento topográfico de distintas secciones verticales de la fábrica por el intradós agrupadas según tres orientaciones verticales: de las cuatro aristas en los muros, de las dos aristas diagonales —entre rincones opuestos— y de dos secciones por mitad entre dos muros opuestos. De cada bóveda y las secciones de ella levantadas se confeccionó una base de datos con los puntos topográficos (coordenadas x , y , z) de cada sección referidos a un sistema de referencia general. A partir del registro de cada bóveda se realizó un dibujo tridimensional de cada una de ellas con la planta y las secciones verticales del levantamiento.

A partir de esta representación individual se confeccionó el plano de planta de curvas de nivel de la superficie de la bóveda por el intradós (presentados en el anexo E). En todos los planos realizados se puede apreciar, ya a primera vista, que la forma de la superficie de la Bóveda Extremeña dista sensiblemente de la bóveda de aristas por intersección de cañones rectos. Se intuye el retumbo de la bóveda.

Las secciones verticales por los muros, con los puntos del levantamiento de cada arista unidos por una poligonal, se utilizaron para estudiar la curva geométrica que mejor se ajusta a todos los puntos. Con la misma intención, hallar una curva ajustada a los puntos del levantamiento, fueron tratadas las secciones por mitad entre dos muros opuestos.

El método de ajuste de las curvas a las aristas en muro y secciones entre muros y sus resultados se tratan en el siguiente capítulo 4 «Análisis de los datos del levantamiento». A partir de los planos confeccionados para cada bóveda se estableció, en cada una de las ocho secciones del levantamiento por bóveda, un sistema de referencia particular con origen en el eje vertical de simetría de la poligonal que une los puntos de las aristas en muro, las diagonales y secciones entre muros de cada una de las secciones del levantamiento en cada bóveda. A la vista de los planos de las secciones, por la distribución de los puntos del levantamiento en cada una de ellas —de su curva envolvente—, se apreció, a simple vista, que la distribución de los puntos no responde claramente a una curva de radio constante: el radio de curvatura disminuye desde la clave de la bóveda hacia los muros de apoyo; la variación de curvatura es más perceptible en las aristas en muro y en las diagonales que en las secciones entre muros opuestos.

Se probó ajustar una curva cónica: una elipse, figura factible de trazado en obra con útiles sencillos, los utilizados en estas construcciones por los alarifes, como son la cuerda y la plomada. Establecido previamente un límite o restricción a las diferencias entre los puntos del levantamiento y la curva elíptica a ajustar, se llegó a la conclusión de que la curva que mejor se adapta a los puntos de cada sección, de las aristas en muro y las secciones entre muros, es la elipse; los parámetros de las elipses ajustadas, semiejes mayor y menor, se presentan en el anejo B «Ajuste de curvas». En las aristas diagonales no pudo ajustarse una elipse satisfactoriamente: presentaron, en todos los casos, diferencias mayores que los límites establecidos para el ajuste (diferencias medidas por los residuos del ajuste por el método de los mínimos cuadrados).

Con los resultados de los ajustes de las curvas elípticas a las distintas secciones,

con las dimensiones, deducidas de los planos, de las luces de cada vano o muro y el retumbo de la bóveda se realizó un análisis estadístico de regresión lineal para estudiar la relación de las distintas variables para desarrollar una ecuación lineal con fines predictivos: entre semiejes mayor y menor, entre semiejes y luz o vano de las aristas en muro y secciones entre muros, entre retumbo y luz de la bóveda, etcétera (anexo C «Relaciones entre parámetros de la bóveda»). Las ecuaciones resultantes fueron transformadas —adaptadas— a la manera que se sabe eran utilizadas las medidas de las partes de un edificio de fábrica desde tiempos remotos: a partir de una medida, que se toma como módulo o base unitaria, las dimensiones de los distintos elementos constructivos son una parte, una proporción, de la medida tomada como base; y estas relaciones entre las dimensiones de dos o más cosas se pueden expresar mediante números racionales (fracciones simples).

Se pudo comprobar que los parámetros de las elipses ajustadas en los muros, entre las secciones por mitad de muros opuestos, sus posiciones espaciales relativas, las flechas, los retumbos, etc., responden a una determinada proporción que toma como medida base —como módulo— el lado de la planta cubierta por la bóveda.

Con las proporciones resultantes pudieron identificarse los elementos que generan y definen geoméricamente la superficie de la BEx, es decir, las líneas —curvas elípticas en nuestro caso— generatriz y directriz de las que resulta una superficie abombada entre cada dos muros opuestos. Entre los límites de la planta a cubrir, las dos superficies formadas entre los dos pares de muros opuestos se cortan entre sí, formando entre ellas ángulo abierto, y marcando las aristas diagonales entre cada dos rincones opuestos. La intersección entre las dos aristas diagonales formadas se produce en la clave de la bóveda, punto central del abovedamiento y de mayor cota de las dos superficies. Las partes de las superficies comunes de mayor cota constituyen la superficie de fábrica de la Bóveda Extremeña.

Para probar si esta forma de bóveda pudo ser resultado de un diseño primitivo —de tiempos lejanos en la Historia de la Construcción, o más específicamente, en el asunto que aquí se trata: Historia de la Técnica de Construcción⁵—, se procedió a realizar los dibujos correspondientes a las distintas figuras geométricas implicadas, sus posiciones espaciales relativas y proporciones entre ellas, de la forma de la BEx con solo útiles básicos utilizados en la antigüedad como son «La regla y el compás», tomando como referencia las resoluciones y procedimiento de construcciones geométricas que fueron dadas a conocer por Euclides de Alejandría (300 a. C.)

en su tratado de elementos matematico-geométricos: *Elementos*. Se pudo constatar que las figuras, sus dimensiones, sus posiciones relativas, etcétera, de las distintas líneas que definen geoméricamente en el espacio la forma de la BEx son factibles de representar gráficamente, con solo la regla y el compás, mediante la aplicación de distintas proposiciones Euclidianas.

En el capítulo 5 «Empujes en arco elíptico *dupla* con regla y compás» se exploran las posibilidades de la utilización de los métodos Euclidianos más allá de lo puramente gráfico del diseño de la forma obtenida de la Bóveda Extremeña.

Sin intención alguna de que lo expuesto en este tema fuera desarrollado y aplicado por los antiguos diseñadores o constructores de la BEx, se expone un método, una manera, de calcular gráficamente, con solo la regla y el compás, los esfuerzos mecánicos que se producen en un arco elíptico de fábrica de ladrillo —arco generatriz— que en su desarrollo espacial entre dos muros opuestos —por la línea directriz— constituye cada uno de los cuatro paños iguales de que consta esta bóveda. Con la forma del arco generatriz obtenido para la BEx, que resultó una semielipse de ejes mayor y menor en proporción *dupla*, se puede obtener el valor del empuje del arco en sus apoyos, con el arco de fábrica completo o rebajado entre dos aristas diagonales, con la condición —ineludible— de que la línea de empujes se desarrolle íntegramente entre los límites de la fábrica y ello, sin o con un determinado Coeficiente de Seguridad Geométrico.

Por último, en el capítulo 6 «Conclusiones», se presentan las conclusiones de este estudio sobre la BEx resultado de la investigación sobre su forma, de las relaciones y proporciones entre los elementos geométricos definidores: generatriz y directriz de las superficies de la bóveda; curvas elípticas en determinada proporción entre ellas y todas en función del lado abovedado tomado como módulo.

Resuelta la forma genérica de la BEx, constituida por superficies de doble curvatura que la posibilita descansar como una bóveda de aristas —de cañones rectos con claves a la misma altura— o bien a la manera de una cúpula, se concluye que esta bóveda, la BEx, es la consecuencia de la deformación, de una transformación geométrica de la forma —de la directriz y generatriz— de una bóveda cupuliforme esférica: la bóveda vaída.

El trabajo se complementa con las notas que creemos aportan aclaraciones e ideas, algunas tomadas de textos existentes —referenciados todos los utilizados en la «Bibliografía»—, que ayudan a la comprensión de las exposiciones y razonamientos expuestos a lo largo del texto. Se acompaña finalmente de distintos anexos donde se resuelven cuestiones geométricas, matemáticas, estadísticas, etc., que dan apoyo a lo expuesto en los distintos capítulos.

2

Antecedentes.

Un arco simple de fábrica es una estructura en forma de arco —porción de un curva geométrica— que cubre un vano entre pilares, entre puntos fijos o esribos y también entre unos y otros. La repetición paralela de arcos bidimensionales crean una superficie: una bóveda (de cañón, con una forma geométrica continua). Cuando dos cañones se cortan perpendicularmente crean una bóveda tridimensional, con formas y curvaturas discontinuas. Las innumerables maneras de componer distintas superficies creadas por arcos simples da lugar a multitud de formas de bóvedas.

2.1. Forma de los abovedamientos.

Una manera de estudiar las numerosas y variadas bóvedas que pueden encontrarse en edificaciones de todas las épocas es su organización en tipos con características comunes y diferenciables, y la conformación, el aspecto exterior, es una manera de organización que distingue unas de otras por la vista.

Desde antiguo se ha tenido interés en agrupar los abovedamientos por su forma basado en el análisis de las superficies que las conforman y que son generadas por elementos geométricos simples: líneas rectas o curvadas que se desarrollan en el espacio a cubrir a través de otras líneas rectas o curvas, formando así una o varias superficies geométricas, generalmente iguales y con predominio de la simetría y la proporción.⁶

Aunque las descripciones que podemos encontrar en textos antiguos están un tanto alejadas de las de la moderna geometría descriptiva, en esencia, han tratado de describir su forma, en el lenguaje de la época, por la combinación de esos dos

elementos geométricos simples para describir las superficies espaciales que conforman una bóveda, las más simples o básicas, y que por agregación de ellas o por modificaciones en su orientación, se expliquen formas más complejas.

En un texto de referencia clásico como es el de Vitruvio⁷ ya encontramos referencias a los abovedamientos, pero solo en cuanto a normas para su utilización en diferentes espacios arquitectónicos y una sola referencia a los arcos.⁸

Transcurre la Edad Media y es a partir del Renacimiento cuando aparecen textos —tratados— de arquitectura en los que se aborda, entre otros, la cubrición de espacios mediante bóvedas con descripciones y clasificaciones basadas en su forma.

Una descripción y organización de las formas de abovedamiento las encontramos en el siglo XV en Leon Battista Alberti⁹ que señala que los distintos tipos de bóvedas resultan de tres formas básicas: «fornix», «camera» y «recta fpherica», y añade que otras formas son resultantes de estas o parte de ellas. Da recetas para su implantación: la «recta fpherica» o media naranja es adecuada solo para superficies circulares; las «fornix» o de cañon seguido para plantas cuadrangulares y cuando dos de éstas se cruzan forman una boveda «camera» o de aristas indicadas para plantas cuadradas.¹⁰ A partir de estas tres formas, que Leon Battista entiende elementales, explica la obtención de otras bóvedas como resultado de partes de ellas: al dividir la «recta fpherica» por un plano vertical en dos partes iguales se tiene la bóveda de horno o cuarto de esfera y al cortar la semiesfera por cuatro planos verticales la vaída, que llama «vela». Cuando se utilizan varias partes de una bóveda de cañon se pueden abovedar superficies poligonales, exagonales u octogonales, constituyendo las bóvedas cupuliformes.

(Con Alberti aparece el concepto de «esqueleto» de una obra de fábrica, concepto de gran influencia en arquitectos posteriores en la comprensión del funcionamiento mecánico de las bóvedas. Esta idea del esqueleto como principal elemento resistente la expone como: «La razon de componer las bovedas, guardarse há la misma que en los muros porque se han de levantar los huesos [arcos cruceros o diagonales] enteros hasta lo alto de la boveda desde los huesos [arcos formeros] de la pared, y puestos allí se guiará segun la manera de ellos, y entresí distarán por alguna parte quota. pero de huesos a huesos se estenderán ligaduras y replenarán los cumplimentos [plementería] de un medio».¹¹)

En el siglo XVI, Andrea de Palladio,¹² quizás un poco parco en explicaciones, en el capítulo dedicado a las formas de las bóvedas las clasifica en seis: 1 «à crociera», de crucero por aristas, intersección de dos cañones; 2 «à fafcia» o vaída, que puede ser también rebajada; 3 «à remenato», rebajadas menor que un semicírculo; 4 «ritondi» o de media naranja; 5 «á lunette» con lunetos; y finalmente 6 «á conca», de cuenco o artesa. En el dibujo que Palladio acompaña a esta clasificación, fig. 2.1, aparece una forma que Palladio no nombra, parece que representa a la de medio cañón.¹³

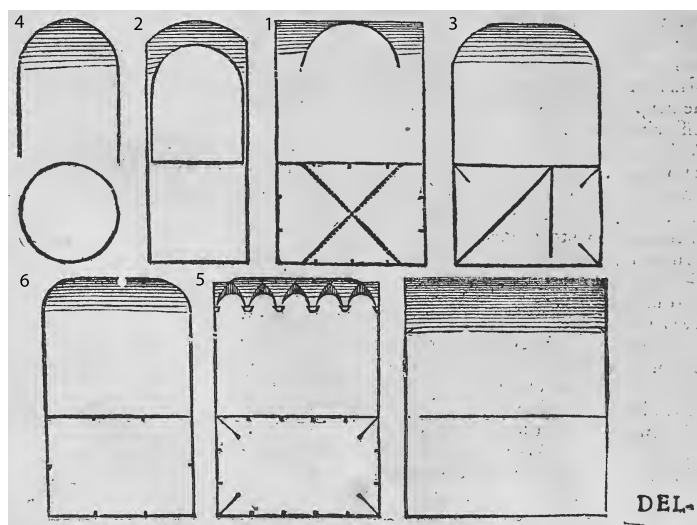


Figura 2.1: Clases de bóvedas según Andrea Palladio
(Imagen de: *Il quattro libri dell'Architettura Di Andrea Palladio*¹⁴)

Es con Fr. Lorenzo de San Nicolás,¹⁵ a mediados del s. XVII, cuando encontramos una descripción más concisa de las formas con explicaciones detalladas y dibujos descriptivos sobre la manera de ejecución de las bóvedas. Los tipos los reduce a cinco: «cañón de bóveda», recto de medio punto indicado para cuerpos de iglesias y espacios alargados; la «media naranja», para templos y plantas redondas; la «Capilla baidá», sobre plantas cuadradas; de «Capilla esquilfada», también para plantas cuadradas y , la última, «Capilla por arista».

Los textos con la descripción sobre la forma de los abovedamientos referidos anteriormente son los más antiguos conocidos y, a nuestro juicio, entendemos suficientemente autorizados. Numerosos autores han seguido en los siglos sucesivos publicando tratados de construcción arquitectónica (muchas veces son recopilación

de tratados anteriores) en los que no faltan referencias a las bóvedas; con más o menos amplitud de detalles y claridad en las explicaciones, las exposiciones de los modelos en cuanto a su forma no varían mucho de los casos anteriores.¹⁶

2.2. Generación y definición de la forma.

Las bóvedas, como elementos constructivos compuestos por superficies combadas que cubren un espacio, están compuestas por una o varias superficies que son generadas por elementos geométricos simples: por una línea, recta o curvada, al desplazarse por el espacio por una trayectoria, otra línea recta o curva. Son las líneas definidoras de la forma. A la primera, que genera la superficie en su desplazamiento, se la denomina línea «generatriz» y la segunda, el camino o trayectoria seguida línea «directriz». Por la disposición y forma de los dos elementos lineales constitutivos, la superficie resultante puede resultar de simple o doble curvatura.¹⁷

Asumiendo el riesgo que supone la simplificación de una definición geométrica de estas formas constructivas, diremos, con carácter general, que una bóveda es una superficie, simple o compuesta —y delimitada—, generada por la traslación de una línea generatriz por una línea directriz y ambas generalmente perpendiculares entre sí. En ocasiones, la directriz es el resultado del giro de un punto alrededor de una línea recta y en este caso la forma resulta de una línea generatriz que gira alrededor de un eje. Entre todas las posibles combinaciones entre los dos elementos geométricos constitutivos, la forma más sencilla en la cubrición de espacios abiertos son las que generan superficies de simple curvatura. Cuando la línea o líneas generatrices se trasladan por el espacio girando alrededor de un eje vertical se forman superficies arquitectónicas conocidas como bóvedas cupuliformes, o simplemente cúpulas, que son todas de doble curvatura.

Otro tipo de superficies cubiertas que se pueden formar por combinación de directriz y generatriz, de una o varias rectas y/o curvas, son las superficies regladas; superficies de doble curvatura y con esfuerzos mecánicos en dos sentidos: de tracción y compresión.

Dada la naturaleza del abovedamiento que nos ocupa, el realizado con fábrica de ladrillo con mortero de unión, solo se hará referencia a aquellas formas en la que

los esfuerzos mecánicos a que están sometidas las superficies constituyentes sean esencialmente compresivos.

En general, los abovedamientos se pueden estudiar desde distintos puntos de vista y por tanto clasificarlos en grupos según diversos criterios. Los grupos o clases no son excluyentes unos de otros, es más, las bóvedas que pudieran ser clasificadas en un grupo están o pueden estar también en otro. Cada una de las agrupaciones principales se pueden subdividir a su vez en otras según las subdivisiones que el criterio preestablecido admita.

Son numerosas las clasificaciones realizadas en base a distintos criterios: según el modo de transmisión de los esfuerzos, la forma geométrica, el material constituyente, la técnica o procedimiento constructivo, etcétera. Con la intención, y solo con ella, de fijar un léxico uniforme en lo que se dirá en adelante, proponemos una categorización —básica, que toma como referencia a Leon Battista— de las formas de los abovedamientos a partir de la simplicidad y/o complejidad de las líneas definidoras de la forma que intervienen en la geometría espacial resultante.

$$Bóvedas \rightarrow \text{por geometría} \left\{ \begin{array}{l} \text{simple} \left\{ \begin{array}{l} \text{cañón} \\ \text{esféricas} \\ \text{(variantes)} \end{array} \right. \\ \text{compuesta} \left\{ \begin{array}{l} \text{básicas} \\ \text{complejas} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La superficie de las bóvedas de geometría simple, sobre plantas cuadradas o rectangulares y circulares, resulta de la interacción de líneas definidoras sencillas y fáciles de trazar con útiles sencillos como la regla y el compás. La de cañón, recto o seguido de medio punto, resulta del desarrollo generado por una semicircunferencia que se desplaza perpendicular a la directriz que es una recta horizontal. La esférica, o media naranja, resulta de una generatriz que también es una semicircunferencia pero su trayectoria o directriz resulta del giro de esa generatriz alrededor de un eje horizontal que es la recta que contiene su diámetro, o bien que su generatriz sea un cuarto de circunferencia que gire alrededor de un eje vertical y en este caso la

directriz será una circunferencia con centro en ese eje y radio el de la generatriz.

Modificaciones en las líneas definidoras de esas bóvedas o tomando una parte, dan como resultado bóvedas similares, simples, que son variantes de ellas. Por ejemplo, en la de cañón seguido se puede trazar como generatriz un arco menor que una semicircunferencia —o una semielipse con su eje mayor en la horizontal e igual al diámetro de la semicircunferencia—, resultando una bóveda de cañón seguido rebajado; con una generatriz de un arco apuntado —o una semielipse con el eje mayor en vertical—, resulta una de cañón seguido peraltada; con una línea generatriz compuesta de dos arcos de circunferencia, una de cañón seguido apuntada, etcétera. También se forman bóvedas simples variantes modificando la directriz de un cañón seguido inclinándola, desarrollando la generatriz de una de cañón de manera que aumente gradualmente su dimensión según avanza por la trayectoria o directriz y otras modificaciones y combinaciones, variantes de aquellas, que dan lugar a múltiples denominaciones de las bóvedas de cañón. Las bóvedas simples esféricas también son susceptibles de modificaciones en sus líneas generadoras; si la generatriz curvada que gira alrededor de un eje vertical es un arco de circunferencia de radio mayor que el de su planta circular, se obtienen bóvedas o cúpulas apuntadas y cuando la generatriz que gira alrededor de un eje horizontal tiene un radio mayor que el de la planta circular a cubrir, se tiene una bóveda en forma de casquete esférico; sobre una planta cuadrada una semiesfera puede dar una bóveda vaída si su radio es el del círculo circunscrito a la planta y una bóveda vaída rebajada o bohemia si su radio es mayor. Una variante que da una bóveda singular resulta cuando la generatriz es una recta horizontal que se traslada por la directriz que es otra recta horizontal, perpendiculares entre sí, resultando una superficie plana y horizontal: una bóveda adintelada. Estos ejemplos son solo una pequeña muestra —entre otros muchos que se pudieran poner— de la variabilidad de formas similares que se pueden encontrar en los abovedamientos que hemos agrupado en la categoría de bóvedas geoméricamente simples.

Las bóvedas compuestas resultan de la combinación, por adición o sustracción, de partes de las superficies simples anteriores. La bóveda de aristas o de crucero por aristas resulta de la intersección normal y a la misma altura de dos bóvedas idénticas de cañón seguido de las que se toman las superficies no comunes o exteriores a su intersección, y si se toman las partes comunes de esa intersección se tiene una bóveda de rincón de claustro; y estas formas compuestas pueden, a su vez, estar afectadas de las variantes anteriormente comentadas.¹⁸

La descripción e identificación de los elementos básicos generadores o definidores, líneas directriz y generatriz, no es unívoca. Ambas denominaciones pueden ser intercambiables —en determinados casos— y dar como resultado la misma forma, es decir, se puede obtener la misma superficie intercambiando la asignación de cual es la línea directriz y cual la generatriz. En la figura 2.2 está representada la forma de una bóveda de cañón de medio punto generada por los mismos elementos tomados de dos maneras diferentes. En (a), la directriz, que resulta de girar un punto alrededor de un eje, es un aro circular vertical sobre el que desliza, tangente y perpendicular, una línea recta horizontal: la directriz es un semicírculo y la generatriz es la línea recta. En (b), la directriz es la línea recta señalada en la figura —o la del eje, que une los sucesivos centros de los arcos—, sobre la que se traslada, tangente y perpendicularmente, un arco de medio punto que es la generatriz. En ambos casos la superficie resultante es la misma. Si una superficie se considera el resultado de la interacción de dos líneas, una sobre otra, en determinadas formas sencillas o simples, la interacción de esas líneas se puede alterar: de la otra sobre la primera.

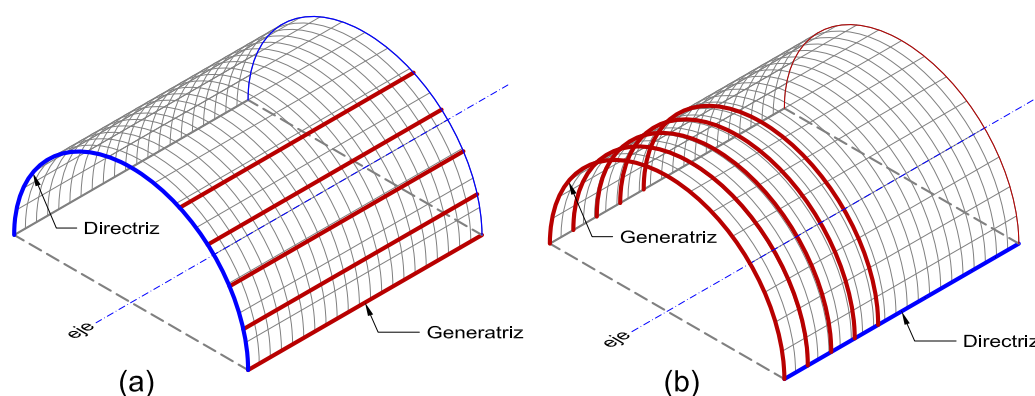


Figura 2.2: Bóveda de cañón seguido. Distintas disposiciones de las líneas directriz y generatriz de las que resulta la misma forma abovedada.

Otro caso de asignación de directriz y generatriz es el de las cúpulas esféricas (de media naranja, en casquete esférico y otras). En la fig. 2.3a la generatriz es una curva correspondiente a un cuarto de circunferencia que situada en un plano vertical gira alrededor de un eje vertical; y también ese cuarto de circunferencia se desplaza por uno de sus extremos tangente y perpendicular a una circunferencia de igual radio situada en un plano horizontal.

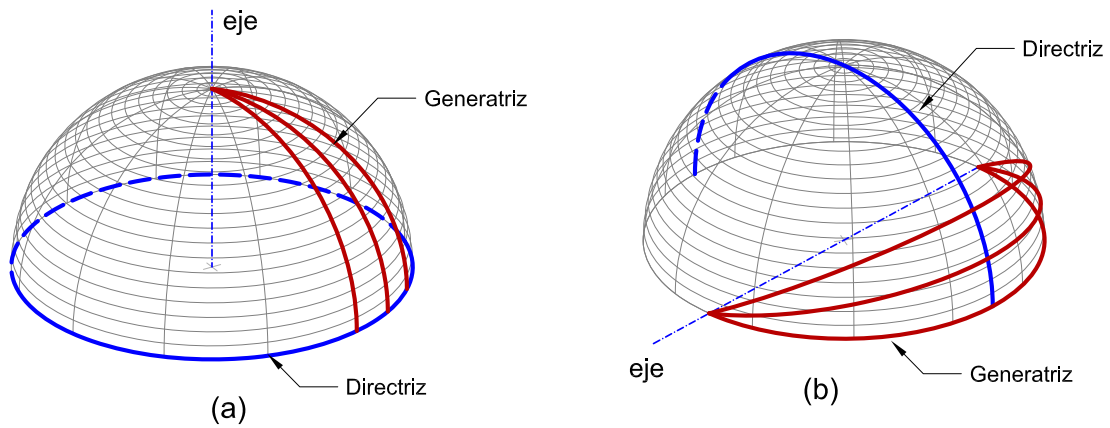


Figura 2.3: Cúpula esférica. Distintas disposiciones de las líneas directriz y generatriz de las que resulta la misma forma abovedada.

Idéntica superficie se obtiene al considerar otra directriz y generatriz. En la fig. 2.3b, la generatriz es una semicircunferencia en un plano horizontal que gira alrededor de un eje que es el diámetro que une sus extremos; y también, la generatriz puede seguir la trayectoria de una curva idéntica y vertical tangente por su punto medio y perpendicular a esta directriz.

Otros casos de bóvedas complejas que se pueden citar a modo de ejemplo — omitiendo su descripción que pudiera resultar innecesariamente tediosa— son las cupuliformes de claustro sobre plantas exagonales u octogonales, superficies semi-esféricas sobre bóvedas vaídas rebajadas originan una cúpula bizantina, y un largo etcétera de diferentes formas compuestas al conjugar superficies simples mediante el uso de pechinas.¹⁹

En definitiva, todos los tipos de bóvedas de fábrica resultan, en cuanto a su forma, del giro alrededor de un eje o de la traslación por una trayectoria, de una o varias líneas rectas o de curvas planas. La combinación de distintas y diversas líneas directrices y generatrices y su disposición o desarrollo espacial dará como resultado tantas formas de abovedamientos tan complejas como se quieran diseñar.

Todas las formas simples y compuestas están condicionadas por el tipo de construcción usado desde la antigüedad:²⁰ la obra de fábrica, consistente en la utilización, disposición y colocación ordenada de materiales como la piedra o el ladrillo unido con argamasa²¹ para formar una estructura que sirva a su objetivo y que sea sólida. Las posibilidades de utilizar multitud de formas geométricas para las líneas

definidoras, directrices y generatrices, con orientaciones diferentes en el espacio, son innumerables, pertenecen al campo de la imaginación. Sin embargo el diseño de abovedamientos está limitado a cuestiones que pertenecen al ámbito de la construcción arquitectónica: la estabilidad —solidez— de la obra con los medios y materiales disponibles.

El criterio general de la clasificación por su forma, que se comentó más arriba, se basa exclusivamente en la descripción de la organización y desarrollo espacial de elementos geométricos, líneas, rectas o curvadas, que definen la superficie o superficies que constituyen la bóveda y que son expresables mediante las matemáticas en cuanto a las medidas de las dimensiones y las relaciones entre esas líneas. Otro criterio de clasificación es el sistema constructivo utilizado en la realización de la fábrica del abovedamiento. El procedimiento de construcción de bóvedas de fábrica, que es el que nos ocupa, con cualquier forma y dimensiones, nos lleva a agrupar éstas en dos tipos según dos maneras de construirlas bien diferenciadas: las bóvedas que se ejecutan sostenidas sobre una armadura y que hace de molde, una cimbra, y las que se ejecutan al aire o sin cimbrar.

$$Bóvedas \rightarrow \text{por el procedimiento constructivo} \begin{cases} \text{con cimbras} \\ \text{sin cimbras} \end{cases}$$

Al primer grupo, con cimbras, pertenecen la mayoría de las construcciones abovedadas con materiales pétreos, cantería y sillería, y de ladrillo cuando se emplean como mampuesto de pequeño tamaño;²² al segundo, exclusivamente los formados con ladrillo o adobe y argamasa.

Con el criterio de clasificación según el procedimiento constructivo, el grupo que es de nuestro interés es el de las bóvedas que se construyen sin cimbrar.

2.3. Construcción de bóvedas sin cimbrar.

La construcción de bóvedas sin cimbrar, sistema consistente en la colocación y disposición ordenada de las piezas constituyentes, ya era conocida en la antigüedad en algunas formas, como en las bóvedas esféricas y cúpulas apuntadas de cantería por lechos horizontales,²³ las bóvedas esféricas de ladrillo realizadas por lechos con-

secutivos con una ligera inclinación hacia el interior de la bóveda o lechos anulares cónicos constituyendo anillos de compresión, y bóvedas de cañón seguido formadas por hojas —tendeles de adobe— verticales o ligeramente inclinados,²⁴ que se pueden encontrar en los restos arqueológicos de las primeras civilizaciones surgidas en Egipto y Mesopotamia.²⁵

Aunque el origen de este sistema constructivo se sitúa histórica y geográficamente en esos territorios que formaban el denominado *Creciente Fértil* o *Media Luna Fértil*, es en el periodo bizantino²⁶ cuando este sistema constructivo se perfecciona —llegando a la excelencia— y se amplía a otras formas de bóvedas mediante esa ingeniosa ordenación de los materiales constituyentes: por la disposición de los ladrillos y la orientación de las sucesivas hiladas que conforman el abovedamiento.²⁷

(La transmisión y difusión de esta técnica desde aquellos territorios es incierta. Desde tiempos remotos han llegado a las costas mediterráneas de la Península muchas gentes de origen oriental —desde el s. IX a.C. comerciantes fenicios y cartagineses, que posteriormente, a partir del s. VIII a.C., crearon asentamientos en Iberia, y comerciantes griegos, fueron atraídos por el comercio metalífero del «reino de Tartessos»²⁸— antes de que las tropas de Justiniano reconquistaran esos territorios de Iberia a mediados del s. VI d.C. y se mantuvieran menos de un siglo,²⁹ tiempo en que no hay constancia de la llegada masiva de gentes de otro oficio que no fuera el militar, circunstancia que sí se dió en el norte de África y en el sur de Itálica.³⁰ Sin embargo, poco tiempo después, sí acuden gentes orientales de origen siríaco y egipcio a partir del s. VIII d.C. con la conquista por tropas islámicas de la Península, hecho con el que se inicia un proceso de aculturación paulatina de los nativos hispanos a la nueva cultura procedente de Oriente Medio³¹; y si, como está probado, existió un importante aporte filosófico, literario, de organización política... de esos pueblos, también debieron existir aportaciones no solo en las formas arquitectónicas, que son claramente visibles hoy, sino también en las técnicas y procedimientos de construcción.³²)

Este sistema constructivo se utiliza principalmente para los abovedamientos realizados con fábrica de ladrillos unidos con argamasa, sentando los ladrillos de cada hilada por su cara mayor, formando una rosca, un aro, sobre otra anterior igualmente construida, formando la bóveda sucesivas hiladas o roscas dispuestas en hojas verticales o ligeramente inclinadas.³³ La estructura así formada es estable en cada una de las fases —en cada rosca— de su construcción.

2.3.1. Justificación mecánica.

El principio de la construcción de bóvedas sin cimbra se basa en la adopción de un sistema de colocación y ordenación de los ladrillos en hiladas por hojas verticales, fig. 2.4b, o con una ligera inclinación —ladrillos «dormidos»— y que pueden ser curvadas como en la fig. 2.4c y d; que una vez cerrada una hilera constituye un arco de fábrica de ladrillo autosostenido y capaz de soportar cargas externas que son transmitidas hacia los apoyos de los extremos de los arcos. Sucesivos arcos contruidos de esta manera y unidos entre sí por la argamasa formarán una bóveda —en la figura 2.4, de cañón seguido de medio punto.³⁴

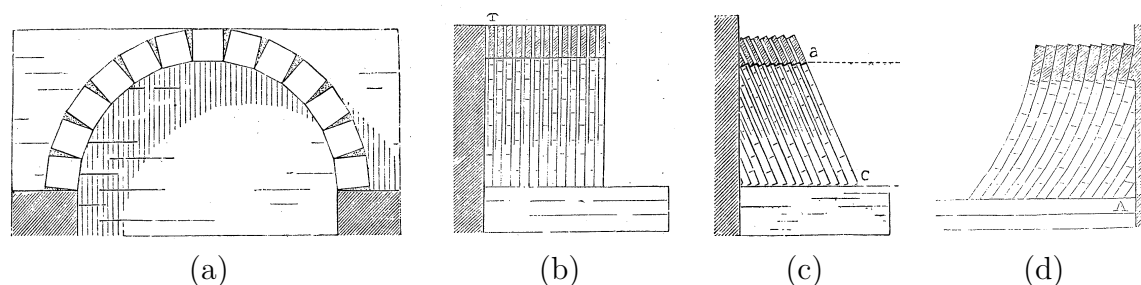


Figura 2.4: Disposición de las hiladas en la construcción de una bóveda de cañón sin cimbrar. (a) sección transversal. Secciones longitudinales: (b) hojas verticales (c) hojas inclinadas (d) hojas inclinadas y curvadas. (Imagen de Auguste Choisy en *L'art de bâtir chez les byzantins*)

La explicación y justificación mecánica de esta manera de construir una bóveda de cañón sin cimbrar por sucesivas hiladas de arcos por el procedimiento de hojas verticales o ligeramente inclinadas, ha sido descrita por Vicente Paredes Guillén — en manuscrito inacabado de 1883—³⁵ como el resultado de la combinación de tres factores que contribuyen a la estabilidad de una hoja en su proceso constructivo. Sobre cada pieza colocada y unida a otra con mortero: a) la resistencia cohesiva del mortero en los inicios del fraguado;³⁶ b) la inclinación de esa pieza colocada —que influye notablemente sobre el factor anterior—; y c) el acodalamiento o «dovelaje» de la pieza colocada contra la anterior de su hoja, y con la posterior una vez terminada la hilera de ladrillos de cada hoja.³⁷

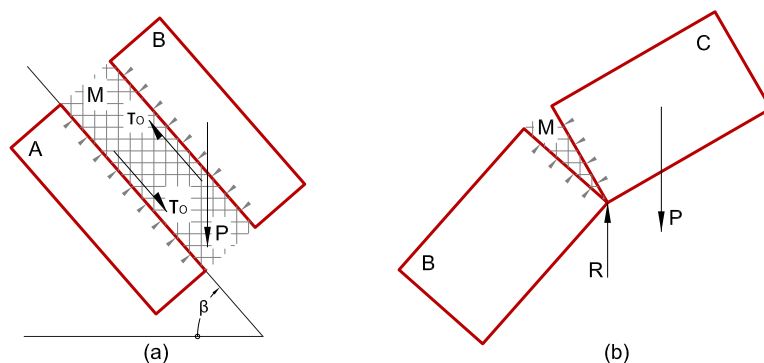


Figura 2.5: Esquema de las fuerzas que actúan en el sostenimiento de una pieza sentada a tabla en una hoja inclinada. En a) sección longitudinal, fig.2.4c y d; y en b) sección transversal de la bóveda, fig.2.4a.

En la figura 2.5 están representados el efecto conjunto de los tres factores que hacen posible la colocación en equilibrio de dos piezas consecutivas, ladrillos B y C, de una misma hilada inclinada, sentadas a tabla sobre la anterior hilada A, antes del fraguado del mortero M. En (a), una sección longitudinal, sobre una hilada A anteriormente construida con una inclinación β , se coloca una nueva pieza B con mortero de unión M entre ambas. El mortero aplicado, con consistencia inicialmente plástica, se pega, adhiriéndose, a ambas caras de los ladrillos enfrentados por su cara mayor: la tabla. El peso P de la pieza B, fuerza vertical, se puede descomponer en dos magnitudes vectoriales: una paralela al plano de las caras enfrentadas que tiende a deslizar B sobre el plano y otra perpendicular a ese plano que tiende a apretar la pieza B contra el mortero M y a su vez contra la pieza de la hilada anterior A. En estado de equilibrio, el deslizamiento de B sobre el plano inclinado está impedido por la resistencia a cortante $\tau_{o,ini}$ del mortero.³⁸ En (b), sección transversal, a ese impedimento al deslizamiento de B se suma la reacción R que resulta del acodalamiento —apoyo parcial de dovelaje— de C sobre B. Piezas colocadas a continuación de C formarán una hilada inclinada que una vez terminada y apoyada en sus extremos constituirá un arco cerrado. La superficie resultante por sucesivas hiladas completas será la de una pared de espesor la testa del ladrillo.

El procedimiento para construir sin cimbrar una bóveda de cañón por sucesivas hiladas inclinadas o inclinadas y curvadas está forzado cuando la argamasa de unión entre las distintas piezas tiene una cohesión baja o débil, al menos en los momentos iniciales de endurecimiento (fraguado lento), y que influye notablemente en el

primer «factor» mencionado: resistencia cohesiva del mortero; es por ello que se utilizan ladrillos de grueso o espesor reducido. Entre estos morteros de baja resistencia cohesiva inicial y fraguado lento están: los de cal —mezcla de cal apagada, arena y agua—, los más simples y económicos, conocidos desde la antigüedad³⁹ —y que actualmente se siguen utilizando en algunas construcciones—; y también los morteros más antiguos que se conocen y de los que hay constancia: los de tierra arcillosa amasada con agua.⁴⁰

Esta manera de construir una bóveda de cañón por sucesivas hiladas verticales o inclinadas —con el ladrillo de la hilada que se ejecuta colocado a tabla (a «bofetón») sobre un lecho anterior igualmente construido— formando una rosca de ladrillo que no necesita de cimbras, no es única. La disposición de las piezas que conforman las sucesivas hiladas puede tener otra orientación. Esta otra disposición de los ladrillos la posibilita la utilización de un mortero de alta energía y rápido fraguado: el yeso.

Esta otra manera ingeniosa de construir una bóveda sin cimbrar es formar cada hilada vertical colocando el ladrillo sentado sobre el anterior de su misma hoja a testa y con los de la hoja precedente a canto, es decir, formando una hilada curva de tabique a panderete.

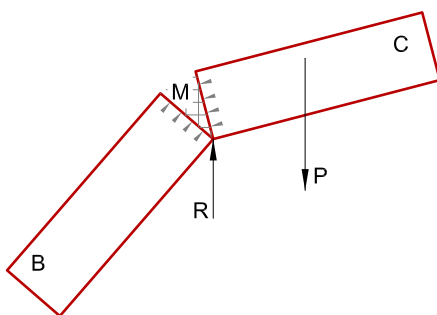


Figura 2.6: Esquema de las fuerzas que actúan en el sostenimiento de una pieza C sentada a testa sobre otra B de la misma hilada vertical y a canto sobre las piezas de la hilada anterior. Sección transversal de la bóveda, fig. 2.4a.

En esta disposición, representada en la figura 2.6, el mortero adherido a las caras menores del ladrillo C queda pegado adhiriéndose a la pieza B de la misma hilada a testa, y a la pieza de la anterior hilada construida, a canto. Los «factores» que actúan en la estabilidad de la pieza C son los mismos que en el caso anterior pero, dada la posición del peso de C respecto de la pieza B, la resistencia a esfuerzo

cortante del mortero, por sí misma, no sería suficiente para sujetar la pieza cuando el mortero es energéticamente pobre y de fraguado lento como los de cal. La pieza puede quedar fijada en su posición cuando se dispone de un mortero que por su cualidad de alto poder energético y gran velocidad de fraguado, sea capaz de soportar, por las dos caras del ladrillo untadas de argamasa, el esfuerzo de tracción y cizalla que provoca la posición del peso P de la pieza C recién colocada sobre B —de su misma hilada— y sobre la hilada anterior a canto. La pieza C puede quedar fijada en su posición definitiva con la utilización de morteros a base de yeso. Al efecto de quedar suficientemente pegada la pieza C se añade la oposición de R, acodamiento o descanso parcial de C sobre B, al peso P de la pieza recién colocada. Otras piezas a continuación de C constituirán una hilada que tendrá sus apoyos en los extremos de dicha hilada, resultando un arco cerrado. La superficie resultante de sucesivas hiladas, en la que los ladrillos quedan unidos por sus cuatro caras menores, será la de una pared delgada, de espesor el del ladrillo, como la de un tabique de panderete.

En la formación de estas hiladas a panderete se pueden utilizar ladrillos macizos o huecos, aunque el peso y las dimensiones de los primeros puede ser limitativo en este sistema. Cuando las piezas y el mortero permiten esta disposición a panderete de una hilada, ésta no tiene que ser inclinada: se construye por hojas verticales.

Para los ladrillos usados comúnmente en los abovedamientos, con tamaños y pesos no muy diferentes,⁴¹ el factor determinante en la elección de la disposición de ladrillo son las propiedades mecánicas del mortero: el poder energético de éste y por tanto la resistencia a cortante inicial inmediata al amasado —directamente relacionado con la plasticidad y/o consistencia—,⁴² la velocidad de fraguado, y el ángulo de inclinación de la hoja.⁴³

En el primer sistema de hiladas verticales o ligeramente inclinadas y ladrillos colocados a bofetón, pueden utilizarse indistintamente morteros de cal o de yeso; el segundo, por hiladas verticales a modo de panderete, es exclusivo de morteros de yeso, al ser este un aglomerante muy energético y de rápido fraguado.⁴⁴

A la clasificación de bóvedas por el procedimiento constructivo sin cimbras se puede añadir un subgrupo según la disposición del ladrillo en la formación de la hoja:

$$Bóvedas \rightarrow \text{por procedimiento constructivo} \begin{cases} \text{con cimbras} \\ \text{sin cimbras} \end{cases} \begin{cases} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{a tabla (a rosca)} \\ \text{a panderete (tabicada)} \end{array} \right. \end{cases}$$

2.3.2. Construcción.

A partir del conocimiento de la técnica de construcción sin cimbra de una bóveda de geometría *simple* o sencilla, como la descrita para la de cañón recto de medio punto, se puede construir cualquier forma de bóveda que se antoje de geometría *compuesta*, básica o compleja, siempre que se puedan adoptar las condiciones de equilibrio expuestas más arriba para sus elementos constituyentes, es decir, la colocación ordenada —a rosca o a panderete— de los ladrillos con mortero —de cal o yeso— formando una hilada con orientación vertical o inclinada y cerrando cada hilada para constituir un arco, completo o rebajado, que descansa en sus extremos: en los muros que delimitan el espacio cubierto o bien las aristas diagonales de una bóveda de geometría *compuesta*.

(Se puede construir una bóveda esférica, de media naranja o rebajada, sin cimbrar mediante la disposición en hiladas horizontales formando anillos sucesivos; y una cúpula poligonal.⁴⁵ También se puede construir una bóveda cupuliforme sin necesidad de cimbrar sustituyendo el primer efecto, la resistencia a cortante inicial de la argamasa, por la resistencia al deslizamiento por fricción o rozamiento entre las caras o superficies de elementos pétreos como la Tumba de Atreo o Agamenón del s. XIII a.C.⁴⁶ y en algunos paños de la plementería entre nervios de catedrales construidas en la Edad Media.⁴⁷)

En la figura 2.7 están representadas una bóveda *simple* de cañón recto y una bóveda de aristas, de planta cuadrada y geometría *compuesta*, resultado de la intersección de dos cañones, perpendiculares entre sí y a la misma altura, en la que se conservan solamente las partes de las superficies de cada cañón no comunes o exteriores a la intersección, construidas ambas con el mismo procedimiento por hojas verticales inclinadas. En la bóveda de cañón, los arcos formados por las hojas verticales descansan sobre los muros, hacia los que transmiten los esfuerzos haciendo estos muros de contrarresto. En la de aristas de cañón recto la transmisión de

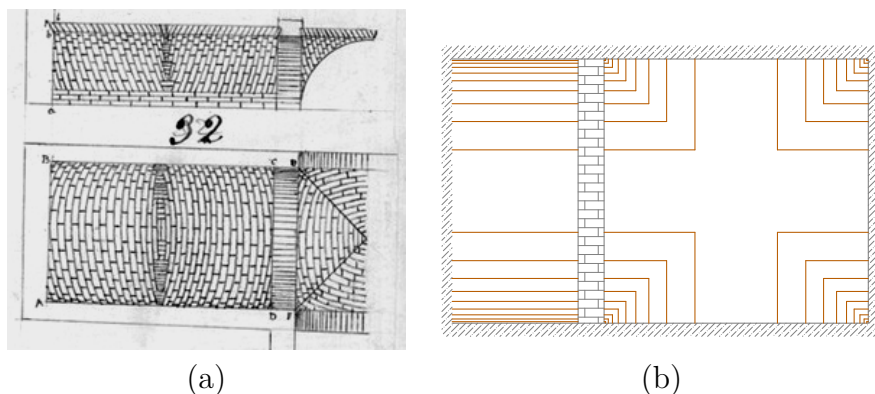


Figura 2.7: Construcción de bóvedas sin cimbra por hojas inclinadas: (a) de cañón de medio punto y bóveda de aristas; arriba sección longitudinal, abajo planta. (Imagen de Paredes Guillén en *Tratado de bóvedas sin cimbra*). (b) Planta de curvas de nivel.

esfuerzos difiere sensiblemente: los arcos verticales de cada una de las cuatro superficies descansan sus extremos sobre los de los arcos enfrentados de las superficies contiguas, se apoyan mutuamente en la arista intersección de esas superficies: las diagonales —que van desde la clave hasta cada uno de los rincones—, la fábrica en torno a esas diagonales, actúan como nervios en la bóveda y son las encargadas de transmitir los esfuerzos por los rincones al contrarresto.⁴⁸

El conocimiento y el dominio en el uso de esta técnica constructiva por los alarifes permite cubrir espacios que no sean estrictamente de planta cuadrada mediante adaptaciones, distintas según los casos y la pericia o costumbre del albañil y que no suponen problemas de estabilidad ni dificultad constructiva para sus ejecutores. Fijada la altura total de la bóveda, entre el inicio o arranque en los rincones y su final en la clave en mitad del habitáculo, la construcción de la bóveda de aristas se realiza forzando el trazado de las curvas generatrices en los muros hasta encajarlas entre los puntos fijados.

En el caso que venimos tratando, de las bóvedas de aristas de cañón recto, con plantas rectangulares o cuadrangulares, teniendo como puntos fijos el mismo arranque en los rincones y la misma clave del arco formero, el ajuste consiste en trazar en cada pared distintas curvas que partiendo de sus dos rincones alcance la clave marcada, con lo que resultan arcos de circunferencia con distintos radios, con sus cuerdas ajustadas a cada lado del habitáculo y todos los arcos con la misma flecha. En las plantas de la figura 2.8, sobre el lado de menor dimensión se replantea un arco de semicircunferencia de diámetro ajustado al lado y que pasa por la clave fijada, y

el resto de las aristas en los muros se trazan con arcos rebajados con cuerdas iguales a sus lados y flechas iguales al radio de la primera curva replanteada; en definitiva es rebajar los arcos hasta igualar su flecha al menor.⁴⁹

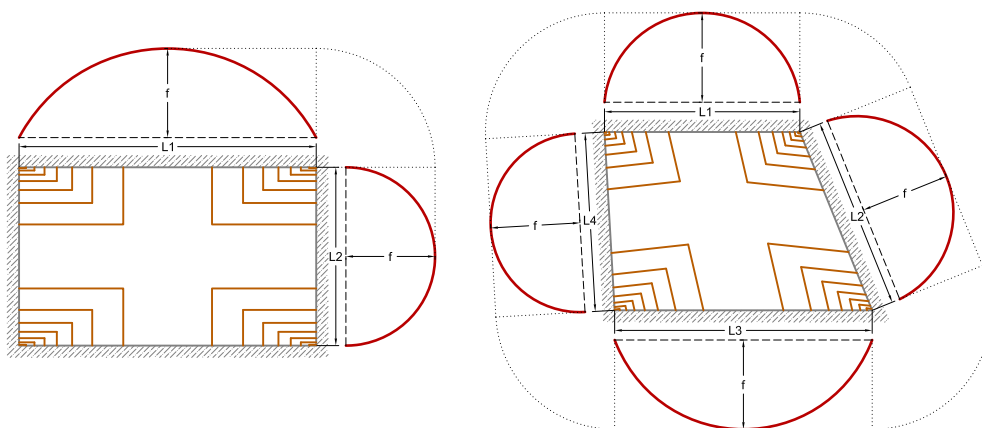


Figura 2.8: Ajuste de una bóveda, de geometría *compuesta*, a planta irregular por modificación de la curva generatriz, la arista en muro, adaptada entre sus extremos en los rincones y la flecha f fijada. En planta rectangular y en cualquier otra figura cuadrangular.

Otra manera de adaptar una bóveda, como la que venimos comentando de cruce-ro por aristas, a una planta rectangular o cualquier cuadrilátero, consiste en encajar la bóveda de cruce-ro de planta cuadrada inscrita en esas figuras, de manera que prolongando cada cañón, manteniendo su radio, hasta su muro correspondiente se cubre toda esa superficie irregular como se muestra en la figura 2.9. Con la ampliación de la fábrica de los cañones las aristas de la bóveda conservan su función transmisora de esfuerzos y el «prolongo» se puede considerar un arco que descansa en sus apoyos en la parte de los muros que excede del cuadrado inscrito.⁵⁰

Con el sistema de construcción por hojas verticales o inclinadas comentado para bóvedas de cañón y de aristas, se pueden realizar otros tipos con formas diferentes: de geometría *simple* o *compuesta*. Por ejemplo, para una bóveda de cañón recto —en la que la generatriz es una semicircunferencia y la directriz la línea recta perpendicular que hace de trayectoria—, se puede tomar como generatriz un arco de esa semicircunferencia y se obtiene una bóveda de cañón seguido rebajada; si la generatriz está formada por dos arcos iguales de esa circunferencia con sus centros desplazados u otras curvas con flecha mayor que su cuerda, se tiene una bóveda de cañón peraltada; también se puede tomar la directriz como una línea recta inclinada, dando las

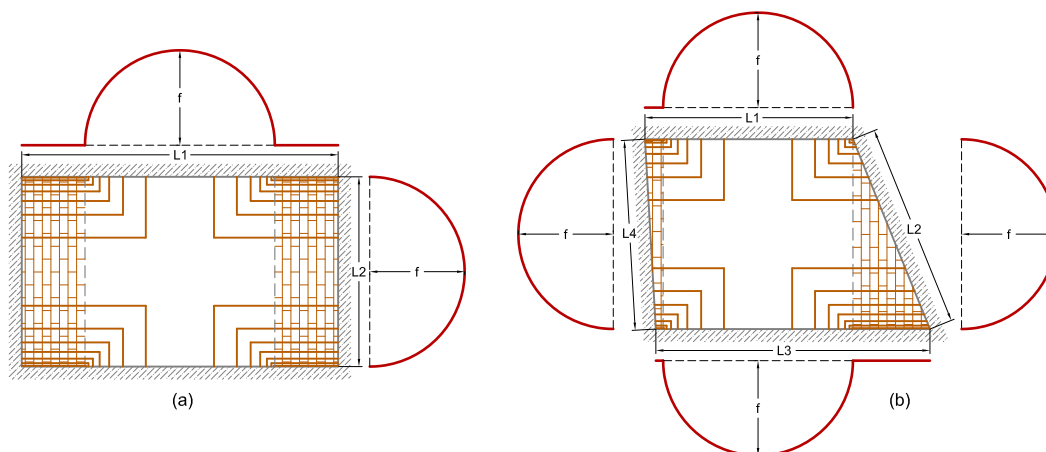


Figura 2.9: Ajuste de una bóveda, de geometría *compuesta*, a planta irregular por prolongación desigual de la fábrica de uno de los cañones hasta cubrir todo el espacio: a) en planta rectangular y b) en cualquier otra figura cuadrangular.

bóvedas de escalera, o de forma circular constituyendo una bóveda de cañon anular. Otros ejemplos se pueden poner, como las bóvedas en que la curva generadora de la superficie es igualmente una semicircunferencia pero su trayectoria resulta del giro alrededor de una línea recta; se puede variar la posición de la cota del eje y obtener, a partir de una bóveda esférica o de media naranja, una de media naranja rebajada; y con la modificación de ese mismo eje, en plantas cuadradas, desde bóvedas vaídas a vaídas rebajadas.

De la misma manera que en los ejemplos anteriores, las bóvedas de aristas pueden tomar otras formas, desde las más *básicas*, como la descrita por intersección de dos cañones rectos, hasta otras más *complejas*, con la adopción de distintas líneas generatrices y directrices, rectas o curvadas, de distintas dimensiones y con posiciones relativas entre ellas diferentes. Una de las múltiples formas geométricas *compuesta* y *compleja* resultado de la interacción de la generatriz y la directriz para definir una superficie se verá más adelante al tratar la forma de la bóveda objeto de este trabajo: la Bóveda Extremeña.

Son tantas y tan variadas las formas posibles de abovedamiento con fábrica de ladrillo y argamasa de unión, que sería inacabable su descripción. Resumimos este punto repitiendo lo que se dijo más arriba: cualquier tipo de bóveda, es posible su construcción —con esos materiales— sin necesidad de cimbrado, si es factible la colocación de los elementos constituyentes de forma ordenada que satisfagan los

tres factores que contribuyen a la estabilidad de una hoja, vertical o inclinada. La disposición de los ladrillos de cada hilada con la anterior puede ser de dos maneras: a panderete o a tabla; la elección entre una y otra está condicionada por el tipo de aglomerante de la argamasa disponible, para la primera exclusivamente el yeso y para la segunda el yeso y, predominantemente, la cal.

En la Península Ibérica, hasta tiempos recientes, la primera mitad del siglo XIX en que se desarrolla el sistema de transporte ferroviario, la utilización de uno u otro aglomerante estaba limitado geográficamente por la disponibilidad de canteras para su extracción a las regiones con abundancia litológica de las rocas de origen. Es por ello que los dos tipos de abovedamientos sin cimbrar que venimos comentando —a tabla y a panderete— estén prácticamente limitados, hasta esas fechas, a zonas geográficas específicas.⁵¹

Las zonas del territorio con mayor número de minas para la extracción de aljez — piedra de yeso— están distribuidas sobre el amplio territorio que constituye la mitad oriental de la península,⁵² y por ello es en esas regiones donde se ha desarrollado en todo tiempo y con intensidad la construcción de bóvedas sin cimbrar con las piezas cerámicas colocadas a panderete: las bóvedas tabicadas.⁵³

En la otra mitad peninsular, la occidental, también se encuentran ejemplos de construcción de bóvedas de ladrillo sin cimbrar. Están realizadas por el método de ordenación de las piezas que se ha nombrado más arriba de rosca de ladrillo tomadas con cal, de forma mayoritaria, aunque no se excluye la localización de bóvedas con la misma forma realizadas a panderete⁵⁴. En este área geográfica se localizan suelos calizos dispersos, con potencia y buena calidad: en el oeste peninsular, en Portugal en una amplia franja costera al norte del río Tajo y en el sur, en la región del Algarve; en España se localiza el área calcárea, principalmente, en torno al río Guadiana a su paso por la provincia de Badajoz. Existen, en esta mitad occidental de la Península, otras zonas en las que aflora esta roca con carácter puntual y menos extensas.⁵⁵

La construcción de una bóveda de fábrica de ladrillos y argamasa sin cimbrar con la forma singular de la Bex —que se dirá más adelante— es tradicional en el área del suroeste peninsular. Independientemente de su presumible origen en oriente medio —un asunto a explorar en el campo de la Historia de la Construcción—, ha sido durante siglos un ejercicio constructivo usual y extendido en la arquitectura popular en esos territorios; es por ello que vemos acertado la denominación toponímica de

Bóveda Extremeña —por la concentración en esta región— pues «La atribución de un objeto a una cultura y a unas gentes puede hacerse según el emisor o según el receptor, pues también quien recibe ese objeto y lo hace suyo tiene que ver con él».⁵⁶

Al ser objeto de nuestro estudio una bóveda que ha tomado el nombre topónimo de Bóveda Extremeña, nos ceñiremos en adelante, a los abovedamientos de fábrica de ladrillo sin cimbrar en el área del suroeste de la península Ibérica.

2.3.3. La Bóveda Extremeña. Antecedentes.

Diferentes autores, en publicaciones de ingeniería y arquitectura, han hecho mención a abovedamientos, ejecutados sin cimbrar a rosca y a panderete, que han localizado específicamente en la región española de Extremadura —y por extensión en áreas limítrofes: al sur y al este en Portugal— que han llamado su atención por la singularidad de su construcción, que como venimos diciendo, es de ladrillos tomados con argamasa y sin la utilización de cimbras, heredada de aquella, de tradición, desarrollo y transmisión Bizantina —comúnmente aceptado y compartido por los historiadores de la construcción— y que se ha preservado circunscrita aisladamente en esas regiones geográficas naturales: Extremadura y el Baixo Alentejo.

De las fuentes escritas destacamos, por su relevancia, distintos autores que hacen referencia a la BEx, todos ellos con sus respectivos méritos:

Francisco Javier Boguerín.

Fechado a principios de 1855, el ingeniero Francisco Javier Boguerín publica un artículo bajo el título de «Construcción de bóvedas de ladrillo sin auxilio de cimbras ni yeso»⁵⁷ en el que describe sus observaciones «en las provincias de Estremadura, y señaladamente en la de Badajoz» sobre una manera de construir bóvedas «de todas clases» sin necesidad de cimbras, mediante la adopción de «un método distinto del que enseñan los tratados de construcción» realizadas solo por alarifes (personal conocedor del oficio con pocos o sin conocimientos técnico-académicos, pero que construye con lógica y basado en razonamiento) consistente en la formación de la fábrica de ladrillos, tomados con cal, por lechos de hiladas verticales con una ligera inclinación que «no esceda del ángulo de rebalamiento» del ladrillo recién asentado sobre la hilada anterior (factor condicionante necesario, como se vió más arriba, para

el equilibrio de la pieza recién colocada). Finaliza la exposición de su *descubrimiento*, después de la descripción de los detalles observados en ese «método distinto»,⁵⁸ convencido de la bondad del sistema constructivo que ha encontrado en esa región y quedando sorprendido por el nulo interés académico, al menos que Boguerín tenga referencia, de esta técnica: «...no vacilo en dar preferencia á este sistema expresando mi deseo de que su uso no se concrete como hasta aquí á la arquitectura civil sino que se estienda á las obras del instituto del ingeniero de caminos donde tanto debe mirarse la economía».

Pedro Celestino Espinosa.

El también ingeniero Pedro Celestino Espinosa, en su Manual de Construcciones de Albañilería, de 1859, hace referencia al abundante uso de esta técnica de abovedar: «En Estremadura se construyen bóvedas sin cimbra con bastante frecuencia, empleando mezcla de cal...»⁵⁹, sin embargo, no parece que haya comprobado él mismo esas bóvedas pues se remite a lo publicado en la Revista de Obras Públicas por su colega Boguerín.

Florencio Ger y Lóbez.

Una década más tarde, en 1869, el maestro de Obras, Director de Caminos Vecinales y Ayudante de Obras Públicas Florencio Ger y Lóbez, publica su «Tratado de Construcción Civil» dividido en dos secciones, con explicaciones claras y detalladas, sobre: los materiales y medios empleados, y las normas o reglas de la ejecución de las obras. En la parte dedicada a las bóvedas de ladrillo hace mención al sistema constructivo que venimos tratando cuando describe la formación de bóvedas por hojas: «Se hacen bóvedas con ladrillos dispuestos de canto por hiladas verticales ó inclinadas de modo que el canto vaya formando un polígono circunscrito a la curva del intradós.» y después de una explicación sobre la colocación de los ladrillos en esas hojas verticales —que se entiende necesitan de cimbra— añade: «En Extremadura se construyen estas bóvedas sin cimbra, pero por hojas inclinadas cuyos ladrillos se sostienen perfectamente por la adherencia de sus excelentes cales que son algo hidráulicas. Pudieran hacerse también con yeso ó con cemento.»⁶⁰

Vicente Paredes Guillén.

A finales del s. XIX, en 1883, en un manuscrito inédito hasta 2004,⁶¹ el arquitecto Vicente Paredes Guillén redacta, con el título de «Construcción sin cimbra de las bóvedas de ladrillo con toda clase de morteros», un tratado que nos sorprende por la claridad y acierto de la exposición de este tipo constructivo exponiendo los factores que intervienen en la construcción sin cimbra, la descripción de los procesos constructivos y abundancia de explicaciones, con profusión de dibujos, de la manera de ordenar las «piezas» de las hiladas para construir una bóveda autosostenida sin cimbrar.

Comienza el tratado situando los abovamientos sin otros medios que el ladrillo recibido con argamasa, en Extremadura, prologando al lector «Varios han sido los medios que en España y en otros países se han propuesto para edificar sin el auxilio de la cimbra las bóvedas de ladrillo, pero todos fundados en el empleo de morteros que fraguen pronto: el que vamos a esponer es independiente de la energía de la cal, le practican rutinariamente los albañiles extremeños» y continúa de seguido «y nadie se ha ocupado en estudiarle. Algunos autores de tratados de construcción han indicado su existencia; pero ninguno conozco que haya espuesto sus principios», asunto éste, sus principios, el de más relevancia por su originalidad en aquellas fechas y su acertada exposición técnica sobre la construcción de bóvedas sin cimbrar.⁶²

Comenta la paulatina desaparición de este método constructivo en Extremadura, a rosca con mortero de cal, por la reciente aparición en la región de un nuevo aglomerante: el yeso; con cierto desasosiego escribe: «pero próximo a desaparecer este método, por que el yeso en esta comarca va sustituyendo a la cal, y los albañiles dedicándose a imitar esta clase de bóveda con las tabicadas, y por que no vemos lejano el día en que no sepan hacerlas como no se hacen en parte alguna y las sustituyan, por las que, colocando los ladrillos pegados por sus cantos con yeso se construyen en todas partes, no ofreciendo otra dificultad ni más mérito que el saber templar el mortero»; esta predicción, la lenta —e inexorable, que hoy podemos verificar— desaparición del método parece ser el motivo que impulsa sus escritos. Finaliza ese prólogo reiterando la localización geográfica: «Los que quieran ver esta clase de bóvedas pueden dirigirse a las comarcas de Extremadura en que abunda la cal y escasea la madera» y halagando el aspecto estético de esas bóvedas cuando su trazado en las estancias está proporcionado: «el buen aspecto que presentan

cuando los alvañiles han acertado a dar a las havitaciones que cubren una altura proporcionada...».

Merece especial atención en este manuscrito la parte que dedicada a la «Teoría de la construcción sin cimbra y con toda clase de morteros de las bóvedas de ladrillo o adove». Para introducir su teoría describe las causas para que los componentes de la fábrica, las piezas, se mantengan en su sitio sin necesidad de cimbrar, causas que se derivan «De la fuerza aherente del mortero», «De las fuerzas auxiliares de la adherencia» y la «Disminución del tamaño de los miembros», que se vieron más arriba al tratar los factores que contribuyen a la estabilidad de una hoja, vertical o inclinada, en su proceso constructivo. En la explicación de su teoría nos *descubre* el fenómeno físico —que vimos en el apartado anterior— que explica la colocación de «piezas pegadas», que se mantienen unidas a otras en su lugar sin necesidad de «la paciente auxiliar o cimbra»⁶³. Parte de la idea, pensamos nosotros, expuesta ya en Fray Lorenzo que al referirse a la media naranja dice que «...cerrando qualquier hilada empeçada, eftà fegura, por hazer el empujo contra fi mifma»⁶⁴, y con lo expuesto también en Benito Bails lo que éste denomina «conos tuncados» en forma de «cucuruchos»⁶⁵, con la que Paredes Guillén explica su teoría en base a la disposición de los ladrillos y orientación o forma de las hiladas que denomina: lechos cónicos. Al generalizar esa idea razona que se podrían construir toda clase de bóvedas si se encuentra la manera de «construirlas con hiladas cerradas, y de colocar en ellas las piezas de tal manera que permanecieran inmóviles en sus sitios durante el tiem(po) que tardáramos en construirlas», y para lograr una «hilada cerrada no es preciso se cierre así misma» como en las esféricas, pues basta que los extremos de la hilada estén apoyados, descansando, y a través de esos apoyos —que hacen el efecto de hilada cerrada— transmitan los esfuerzos hacia el contrarresto; y encuentra aplicación directa de ese sistema constructivo no solo a las formas relatadas de cañon seguido y de aristas de cañon recto, sino también a las de «arista truncada», a las de «arista cumplida» y a las «bóvedas cojas».⁶⁶

Es destacable el apartado que dedica a la «Práctica de la construcción sin cimbra» de las bóvedas de cañon y de aristas, y sus variedades, en el que describe con detalladas y sencillas explicaciones el proceso constructivo, paso a paso, acompañado de abundantes figuras ilustrativas. En definitiva, la obra de Paredes Guillén, por los aspectos teóricos que trata —los primeros que encontramos justificativos desde la física-mecánica— y las descripciones de la ejecución práctica de las bóvedas sin cimbrar, es lo que, a nuestro juicio, merece su enunciado de «Tratado» en su título.

José Albarrán.

En 1885, el ingeniero José Albarrán⁶⁷ publica en la revista *Memorial de Ingenieros del Ejército* un artículo —presentado por el autor en 1883— repartido en cuatro números, con el título «Bóvedas de ladrillo que se ejecutan sin cimbra» que comienza con un preliminar sobre el objeto de la «memoria» que presenta en el que se lee: «dar á conocer el aparejo y ejecución de las bóvedas de ladrillo y sin cimbra que se construyen en la provincia de Extremadura».⁶⁸

Albarrán describe las bóvedas encontradas en esa región según las dos maneras que vimos de aparejar los ladrillos en hiladas: en hojas verticales a panderete e inclinadas a rosca. Sobre las bóvedas tabicadas, simples de cañon seguido, se extiende en descripciones sobre el proceso constructivo y los distintos aparejos, siempre recibidos con yeso, que se pueden disponer para formar la fábrica a panderete, con las ventajas e inconvenientes de cada uno. Señala Albarrán —y es un apunte que pudimos leer en *Paredes Guillén*— que «los albañiles expertos ejecutan toda la bóveda a ojo» con el solo apoyo de algunas cuerdas «que marcando la generatriz del cilindro registre la construcción»;⁶⁹ observa que «Tienen aplicación las bóvedas tabicadas cuando sobre ellas no ha de cargarse mucho peso», recomendando doblarlas, mediante dos hileras superpuestas —tabicado doble— en caso necesario y las explicaciones que da sobre estas bóvedas de cañon las hace extensibles a otras básicas como las esféricas y compuestas como las de aristas de cañon. Describe detalladamente la otra manera de formar las hiladas de las bóvedas de cañon seguido a rosca por hojas verticales e inclinadas, tomadas con yeso, que deben estar comprendidas, las últimas, entre 40° y 45° de la horizontal y aclara, sobre la utilización del yeso, que «Las cales de Badajoz gozan de excelentes cualidades y merced á ellas las hiladas curvilíneas (cada rosca o hilada) pueden ponerse algún tanto verticales» y añade sobre este sistema constructivo que «En Extremadura todas las bóvedas se ejecutan del modo indicado, cubriéndose con ellas los sótanos, aljibes, habitaciones de los pisos bajos y todas las casas de labor, en las que pisos altos se destinan á graneros».

Describe, así mismo, las bóvedas de arista de cañon seguido y las de rincón de claustro, el aparejo y la manera de ejecutarlas con solo la ayuda de unas cuerdas guía entre las claves de los arcos formeros enfrentados y otras verticales, una en el centro

intersección de las anteriores para la primera y ésta en el centro, y una cerca de cada rincón para la de rincón de claustro, para sacar la dirección de las aristas y con la ayuda de los cordeles a la fábrica da «su verdadera forma el ojo del operario», que comienza construyendo en cada muro hasta formar una rosca completa en cada uno y a partir de esto continúa formando roscas consecutivamente en un muro primero, luego en el contiguo y así sucesivamente hasta terminar la cuarta rosca que descansa contra la primera; el proceso continúa, llevando siempre el mismo número de roscas en cada muro, hasta alcanzar el cierre en la clave, señalada por la cuerda a plomo instalada en el replanteo.

Por último, cita numerosos edificios en Badajoz con bóvedas como las descritas, admirado por su solidez y el estado de conservación que presentan algunas con cierta antigüedad. Merece resaltar en esta memoria de Albarrán, sobre las ventajas de la construcción sin cimbra, el desglose que hace del «Precio del metro cuadrado de bóveda de medio punto y 0,14 de espesor» y que pondera diciendo «Compárense estos precios con el de una cimbra por insignificante que sea, y se verá que en la mayoría de los casos la cimbra cuesta más que la bóveda».

Fortea Luna y López Bernal.

Transcurre casi un siglo, después de ese artículo o «memoria» de Albarrán y del Tratado de Paredes Guillén, cuando volvemos a encontrar publicaciones, que merezcan ser destacadas, sobre la ya antigua construcción sin cimbra; prácticamente abandonada por la atención que dedican los técnicos a las posibilidades constructivas que ofrecen las nuevas tecnologías que han aparecido con la Revolución Industrial y se desarrollan profusamente en todo el siglo XX: el hierro, el acero y el hormigón armado, con los que se desarrolla la arquitectura moderna. (Es, a mediados del s. XX, por el interés que despierta en profesionales el estudio para la conservación del patrimonio arquitectónico y la recuperación de técnicas y sistemas constructivos —prácticamente desaparecidos, en los que el oficio de maestro albañil ha perdido, si no toda, gran parte de la creatividad y saber hacer que ha demostrado durante siglos—, cuando aparecen publicaciones que analizan con un enfoque científico esas construcciones antiguas de fábrica dirigidas principalmente a las grandes obras arquitectónicas del pasado).⁷⁰

A finales del pasado s. XX, aparece una publicación que es de nuestro interés al tratar esa técnica constructiva que venimos relatando: la construcción de abovedamientos sin cimbra, que se localizan exclusivamente en el suroeste de la Península. Fortea Luna y López Bernal publican en 1998 con el título «Bóvedas Extremeñas. Proceso constructivo y análisis estructural de bóvedas de arista»,⁷¹ un libro que recoge las características propias de esas estructuras de cubrición que se realizan en «Extremadura, parte de Castilla, parte de Andalucía, y por todo el Alentejo Portugués» y que las hace únicas, distintas a las encontradas en otros lugares con las que solo tienen una cosa en común: se construyen sin cimbra. La característica diferenciadora la encuentran al observar que esos abovedamientos —sin cimbra y ladrillos a rosca, mayoritariamente, o a panderete— presentan una singularidad geométrica que las hace diferentes: son bóvedas de arista, sí, pero formadas por superficies combadas que se inclinan desde sus arranques en los muros hacia arriba, hasta la clave; y estas superficies de geometría compuesta son de doble curvatura lo que provoca que los esfuerzos en la fábrica puedan estar dirigidos o repartidos en varias direcciones, circunstancia que no se había considerado en las bóvedas de arista hasta la publicación de esta investigación sobre los abovedamientos singulares que se encuentran en esa región y que les confiere —por esa singularidad derivada de su forma—, con criterio fundado, la denominación específica de Bóvedas Extremeñas.

La forma singular de las superficies de la que se derivan los efectos de la doble curvatura, se debe a que son el resultado de «la intersección de dos toroides de generatrices elípticas» que junto a esa otra característica, la que resulta de estar más alta la clave central de la bóveda que las claves de los arcos en los muros, el «retumbo», le confiere a la Bóveda Extremeña la singularidad mecánica de estar —según puede leerse— «más próxima a una cúpula, o una bóveda baída, que a una bóveda de arista propiamente dicha»;⁷² y prueba de que esto no es una afirmación gratuita es el conocimiento de los esfuerzos que se originan en una bóveda y su cálculo físico —esfuerzos mecánicos— del que se hace exposición en el apéndice «Tablas de empujes para bóvedas y cúpulas» en el que analizando comparativamente los empujes de los distintos abovedamientos resueltos se puede inferir dicha afirmación.⁷³

2.3.4. Forma de la Bóveda Extremeña.

En las bóvedas que se pueden observar hoy, a las que se refieren los autores más arriba citados, se aprecia que el abovedado —sobre plantas sensiblemente cuadrangulares—, la fábrica, compuesta por cuatro lienzos, comienza en los muros marcando aristas claramente curvas que pudieran ser arcos rebajados, y esta fábrica se desarrolla hacia la clave de la bóveda —situada en el punto medio del espacio cubierto—, formando superficies combadas e inclinadas suavemente hacia arriba, ganando progresivamente en altura desde su inicio en los muros; tienen: «retumbo». Las superficies, en número de cuatro, no son continuas entre sí, la unión de unas con otras está marcada claramente por dos aristas salientes —hacia el interior del espacio cubierto— que discurren linealmente curvadas entre dos rincones opuestos y se cortan en la clave; el abovedamiento está formado, visualmente, por cuatro superficies triangulares con un vértice común en la clave y los lados opuestos a esos vértices en cada uno de los muros de apoyo.

Existen claras evidencias de simetrías entre esos elementos visibles: a ambos lados de cada arista que une dos rincones opuestos; también, a ambos lados de una línea imaginaria entre dos muros opuestos trazada entre sus mitades; y las aristas en los muros, a los lados de esta línea entre ellos, son aparentemente iguales y cuando el espacio cubierto es rectangular lo son dos a dos, las enfrentadas entre sí.

Al ser las bóvedas construcciones formadas por figuras generadas por elementos geométricos elementales, como se vió más arriba, se buscó qué tipo de líneas directrices y generatrices pudieran dar la forma que presenta la Bóveda Extremeña. Se buscó, primeramente, en los textos de los autores que hacen referencia a esta bóveda por si pudiéramos encontrar alguna descripción de su forma que hiciera referencia a esos elementos geométricos constitutivos, bien directamente o a través de alguna explicación de la que se pudieran deducir dichos elementos: directrices y generatrices.

Florencio Ger y Lóbez.

Ger y Lóbez describe superficies abovedadas con formas abombadas en que la clave de la bóveda está por encima, a mayor cota, que la clave de los arcos o aristas en los muros, tienen retumbo (aunque no se refiere específicamente a las bóvedas observadas por él «en las provincias de Extremadura»). En la descripción que hace de las bóvedas compuestas describe la bóveda *por arista* o de *capilla* como intersección

de dos cañones de igual altura y que en sus encuentros forman aristas salientes o *aristones*: «Cuando la recta tirada del vértice v de uno de esos arcos al x del opuesto toca en el punto C' de encuentro de las aristas, la bóveda por arista es *truncada*» (dibujo 249 de la fig. 2.10) y se puede interpretar como que las generatrices son semicircunferencias verticales y las directrices rectas horizontales, normales a las generatrices, y las de ambos cañones a la misma cota.

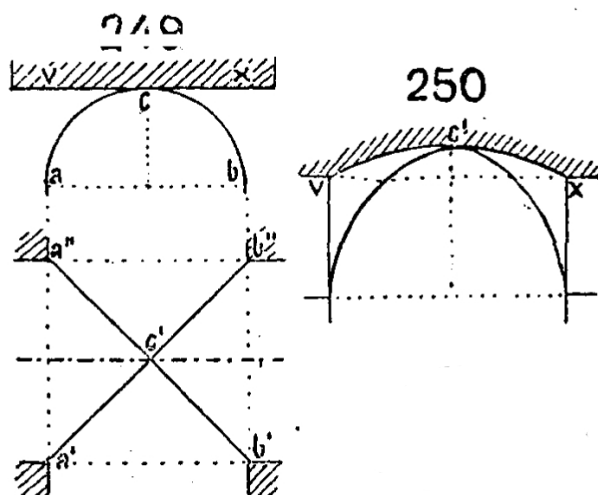


Figura 2.10: Dibujo 249: planta y sección de una bóveda por intersección de dos cañones rectos a la misma altura; dibujo 250: sección de una bóveda formada por la intersección de dos *semi-eliptoides* (Imágenes de Ger y Lóbez, *Manual de Construcción Civil*, lámina 7^a).

A partir de esta bóveda de crucero por aristas, describe una forma de bóveda que presenta retumbo, una característica de las bóvedas que nos ocupan, y dice: «pero cuando este punto se halla más alto que dicha línea la bóveda se llama *cumplida ó empinada*, estando formada por la intersección de semi-esferoides, de semi-eliptoides ó de unos con otros.» (dibujo 250 de la fig. 2.10); se puede interpretar (no podemos asegurarlo con veracidad a partir del dibujo) que la figura generadora es una línea elipsoidal, con el diámetro menor —de dimensión mayor que el vano— en posición horizontal, y este diámetro menor situado en mitad de la planta entre dos muros opuestos es la directriz o eje de revolución del elipsoide; en su giro, el extremo del diámetro mayor —también de dimensión mayor que el vano— describiría el arco señalado en el dibujo 250 como $VC'X$. Las superficies resultantes serían cuatro, con formas abombadas e iguales, con aristas salientes, y con retumbo: la diferencia de altura entre la recta horizontal VX y el punto C' de la clave.⁷⁴

Esta identificación de la forma de *semi-eliptoides* puede, en principio, ajustarse

a una primera observación que podamos realizar de una Bóveda Extremeña con una pequeña modificación en la disposición del elipsoide, con el intercambio de sus diámetros: que la línea generatriz sea esa misma figura elipsoidal pero con el diámetro mayor situado en el plano horizontal por mitad de dos muros opuestos y este diámetro hiciera de directriz o eje de revolución sobre el que gira la generatriz.

Vicente Paredes Guillén.

Una descripción más detallada de las formas de abovedamiento se encuentra en el Tratado de Paredes Guillén, en las bóvedas estudiadas por él y localizadas «en las provincias de Extremadura». Describe tres formas distintas encontradas para «las bóvedas más comúnmente construidas en Extremadura»; bóvedas de aristas, dos formas con superficies abombadas y todas con retumbo.⁷⁵

La primera, que llama «por arista truncada» (en las láminas del Tratado está dibujada con los números: 17, 33, 34 y 35) está representada en la fig. 2.11.

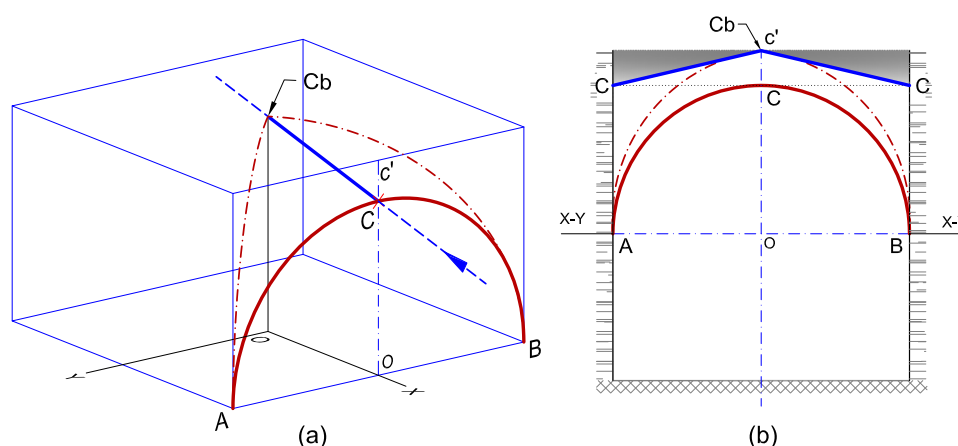


Figura 2.11: Primera forma de bóveda encontrada en Extremadura por Paredes Guillén. Elementos geométricos que definen una bóveda de aristas con retumbo. a) posición espacial y b) sección por mitad de muros opuestos

La línea generatriz corresponde a una semicircunferencia con centro en mitad del muro y con diámetro horizontal AB entre los rincones. La directriz que marca el desarrollo de esa curva es una línea recta e inclinada sobre la horizontal que pasa por el punto más alto de la arista en el muro, punto C , y por la clave, señalada como C_b . La orientación del plano que contiene a la curva generatriz no es exactamente perpendicular a la línea directriz, sin embargo, dada la pequeña inclinación de ésta,

considerarse que se realiza, a efectos prácticos, perpendicularmente por C entre los dos elementos. De las dos superficies creadas entre los dos pares de muros opuestos solo se conservan de las partes comunes las de menor cota. Las superficies resultantes son abombadas —de doble curvatura—, con el extremo común C_b a mayor cota que cualquier punto de las aristas en los muros, lo que posibilita la transmisión de esfuerzos tanto hacia las diagonales como hacia los muros de apoyo de la bóveda.⁷⁸

La tercera forma de bóvedas que encuentra Paredes Guillén en Extremadura está interpretada en la figura 2.13 (en el Tratado, en las láminas, está dibujada bajo los números 19, 20 y 21). En este tercer caso pueden darse dos construcciones geométricas que con distintas curvas generatrices producen resultados prácticamente iguales, imperceptibles a la observación de un abovedamiento.

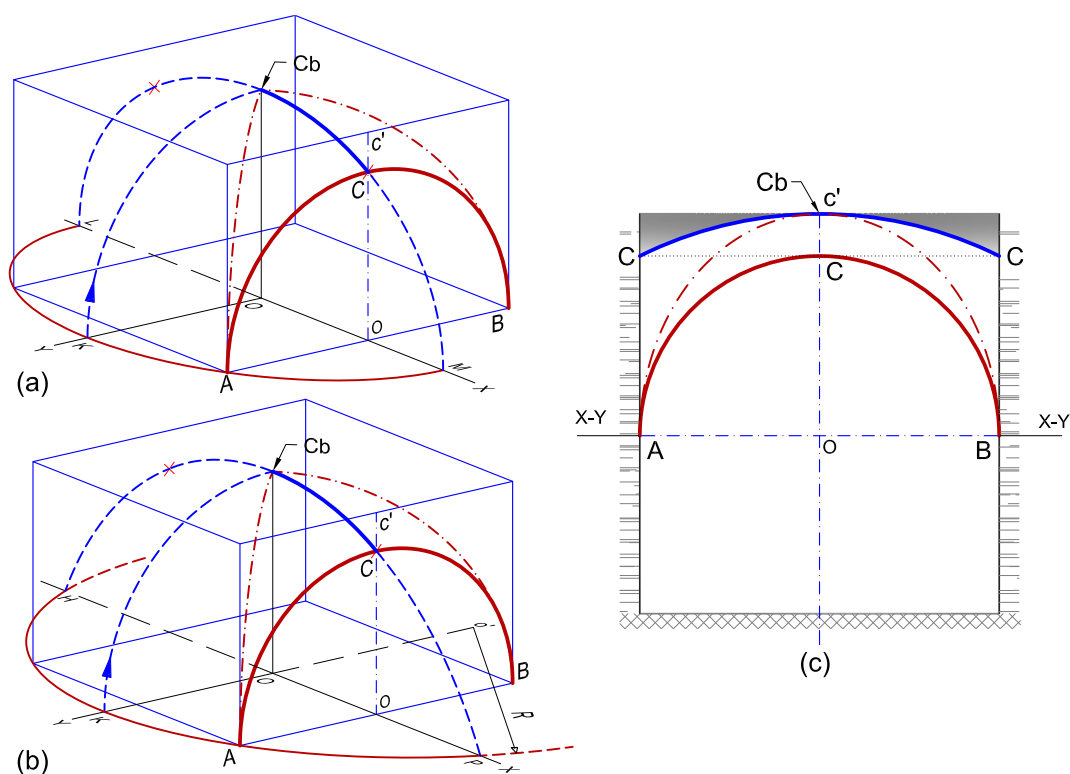


Figura 2.13: Tercera forma de bóveda encontrada en Extremadura por Paredes Guillén. Elementos geométricos que definen una bóveda de aristas con retumbo. a) y b) posición espacial y c) sección por mitad de muros opuestos

En la figura 2.13 a), la línea generatriz es una curva elíptica situada en un plano horizontal XOY , con centro en O en mitad del habitáculo y ejes perpendiculares a los muros. En la figura, el eje mayor de la elipse es LM y el semieje menor de dicha

elipse es OK ; la directriz, que hace de eje de giro es este caso, es el propio eje mayor LM . La semielipse generatriz LKM , al girar alrededor de su eje mayor y directriz, describe en el plano de los muros verticales una línea curva ACB que resulta ser un arco de circunferencia, con radio la mitad del lado, y que produce la arista en los muros; en ese giro, el punto K de la generatriz alcanza el punto C_b , la clave de la bóveda, describiendo en su recorrido un arco de circunferencia de radio OK .

Otra variante de este tercer caso está representada en la figura 2.13 b). La generatriz es un arco de circunferencia, de radio R , situado en un plano horizontal con su centro sobre el eje Y de la figura y señalado con o' . Una cuerda de esa circunferencia HP coincidente con el eje X , se toma como directriz o eje de giro del arco HKP ; este arco, en su giro alrededor de HP cortará al plano del muro vertical según la semicircunferencia ACB , de radio igual a la mitad del lado. De la misma manera, el punto K de la generatriz, en su giro se situará en el punto C_b —clave de la bóveda—, punto éste más elevado que la clave C del arco en el muro y cuya diferencia de cotas constituye el retumbo de la bóveda de aristas.

Las superficies formadas en el interior del recinto por dos generatrices situadas una con su eje de giro sobre X y otra sobre Y , de cualquiera de las dos variantes descritas —que giran cada una de ellas alrededor de directrices: el eje mayor para una y la cuerda para la otra—, se cortan entre sí y tomando de las partes comunes las de menor cota entre las intersecciones queda formada una bóveda de aristas —marcadas hacia el interior las diagonales—, con superficies iguales y abombadas, y con retumbo, lo que posibilita la descarga de esfuerzos de iguales maneras que en los dos casos anteriores.

En cualquiera de las dos variantes descritas el resultado es prácticamente idéntico. En el arco formado en los muros, las aristas ACB , son iguales geoméricamente en ambos casos; el arco que dibuja la fábrica por las secciones entre muros opuestos, representados en la figura 2.13 c) por la curva $Cc'C$, son, tanto para la generatriz elíptica como para la circular, indistinguibles a la vista (solo tienen una pequeña diferencia geométrica detectable matemáticamente).

La forma de la curva generadora de estas dos bóvedas de aristas con retumbo es utilizada por Paredes Guillén para nombrarlas y definir las como las superficies resultantes de la intersección de dos «esferoides» o dos «elipsoides» en cada variante de este tercer caso.

Fortea Luna y López Bernal.

Otra descripción de la forma —de la geometría— de las bóvedas que venimos tratando y que se localizan particularmente en Extremadura se encuentra en el libro de Fortea Luna y López Bernal.⁷⁹ En éste se describe, con precisión, la forma de esta bóveda que, como dijimos más arriba, en una primera inspección visual se aprecia claramente que las aristas en los muros no son curvas de circunferencia; su radio de curvatura disminuye gradualmente desde la clave, a ambos lados, hasta los rincones.

Fortea Luna y López Bernal describen la forma de las bóvedas Extremeñas como: «La bóveda de arista con retumbo es algebraicamente la intersección de dos toroides de generatrices elípticas» y estas superficies están generadas por «cuatro arcos elípticos con un peralte de flecha aproximadamente $1/5$ de la luz»; las superficies, en su intersección, marcan aristas diagonales entrantes entre rincones opuestos «también (arcos) elípticos» y su intersección, en el centro del abovedamiento, la clave central, está más elevada que las claves de los arcos laterales: la bóveda tiene retumbo y por tanto tienen la dualidad de transmitir los esfuerzos en varias direcciones; y esta forma resultante es independiente de la fábrica: que se construyan a rosca por hiladas inclinadas o a panderete por hiladas verticales.

En este último texto que se ha comentado parece quedar definida la geometría de la bóveda Extremeña. Nosotros, en los capítulos sucesivos, pretendemos averiguar, bien sea para confirmar o matizar lo ya descrito, la forma de esa bóveda identificando, si es posible, sus elementos definidores: la generatriz y la directriz. Para ello se realizó un levantamiento topográfico de bóvedas encontradas en Extremadura con esa forma característica, se analizaron matemáticamente las distintas aristas visibles, se buscó una posible definición geométrica de las superficies mediante líneas generatrices y directrices que mejor se ajustan a la forma de las superficies levantadas; y posteriormente, si los resultados fueran satisfactorios, buscar si existe alguna razón o proporción entre los elementos geométricos definidores encontrados.

3

La Bóveda Extremeña. Levantamiento.

En este apartado se identifica la forma física, geométrica, obtenida mediante medidas topográficas realizadas *in situ* de la obra de fábrica por su intradós, resultado del levantamiento y registro de datos, para una posterior averiguación de la geometría que mejor se adapta a la forma de la Bóveda Extremeña (BEx).

3.1. Identificación de la BEx.

El resultado de una primera observación de la bóveda extremeña es que está formada por cuatro superficies triangulares abombadas convexas, unidas entre sí formando un cuadrángulo, que se desarrollan por el espacio cubierto desde los cuatro muros verticales que lo delimitan y hacia arriba, ganando en altura, hasta el punto medio y más elevado de ese espacio cubierto, punto común de las cuatro superficies y clave de la bóveda.⁸⁰ Las superficies, que se inician todas con la misma forma y a la misma altura en los muros,⁸¹ claramente no son planas ni de geometría simple,⁸² presentan combadura; cuando la planta es sensiblemente cuadrada, las superficies son iguales y cuando es rectangular lo son dos a dos.

La unión de las cuatro superficies entre sí, no es continua, es quebrada y marca dos aristas claramente visibles, señaladas hacia el interior del habitáculo marcando esquinas, llamadas «aristones»,⁸³ que se desarrollan entre cada dos rincones opuestos y marcando las diagonales del espacio cuadrangular,⁸⁴ fuertemente marcadas en los rincones y desvaneciéndose gradualmente hacia la clave donde prácticamente desaparecen; esta apreciación de los aristones se observa más intensamente cuando el intradós está enlucido. La intersección de dichas superficies con los muros delimitan

otras aristas —cuatro, una en cada muro—, también claramente visibles y marcadas hacia el exterior. Todas las aristas visibles son curvilíneas y contenidas en planos verticales; y en esa primera observación que se realiza es fácil detectar que las aristas que aparecen en los muros no son geoméricamente una semicircunferencia, es algún arco curvilíneo rebajado (fig. 3.1).

En adelante nos referiremos a estos elementos detectados como: aristas diagonales, las que se observan entre dos rincones opuestos y aristas laterales o en muro las que aparecen en el arranque de la bóveda en los muros verticales en que ésta descansa.

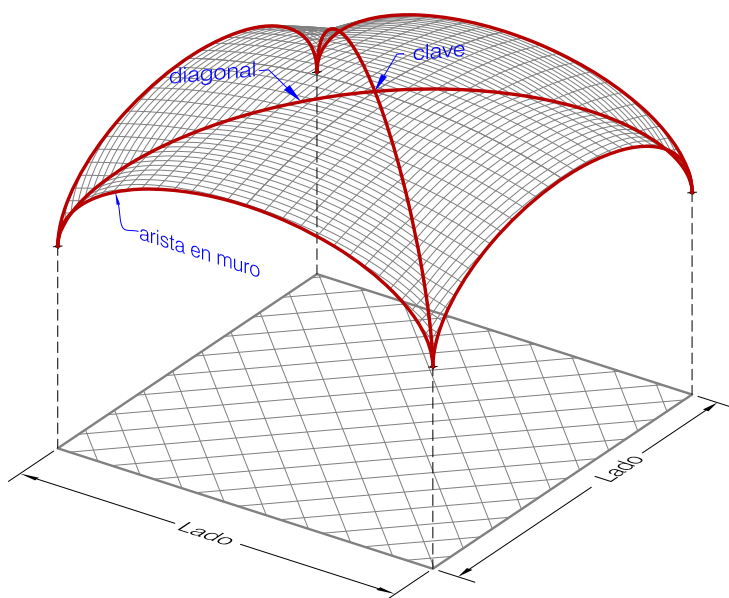


Figura 3.1: Forma genérica de la bóveda extremeña. Elementos visibles: cuatro aristas en los muros y dos aristas diagonales que se cortan en el punto más alto, clave de la bóveda

3.2. Muestreo. Localización.

La distribución geográfica de este tipo de bóveda ha sido localizada —como quedó dicho en el capítulo anterior— por diversos autores: Francisco Javier Boguerín⁸⁵ las sitúa «En las provincias de Estremadura... y cuya principal ventaja consiste en economizar las cimbras... Redúcese a colocar el ladrillo sobre lechos...»; José Albarrán⁸⁶, en las consideraciones preliminares a su memoria describe «... el aparejo y ejecución de las bóvedas de ladrillo y sin cimbra que se construyen en la provincia

que se realizan sobre plantas raramente cuadradas y que su fábrica se ejecuta a estima, el albañil no dispone de planos a seguir que pudieran estar en algún manual de albañilería (cada maestro albañil tiene su propio *librillo*)—, por lo que, como decimos, el muestreo lo consideramos suficiente para averiguar, estadísticamente, con el número y distribución de los levantamientos realizados (en anejo A.1, pág. 137), si las bóvedas Extremeñas pudieran tener elementos definidores, directrices y generatrices, comunes a todas ellas, de los que resulta esa forma característica; y si así fuera, definirlos, si ello es posible, mediante figuras geométricas —líneas rectas o curvas planas—, con sus dimensiones y deducir las relaciones algebraicas que puedan existir entre esos elementos definidores de la forma.

3.3. Medición de la forma.

Al no existir documentación gráfica —planos, croquis, etc.— sobre la forma este tipo de construcciones se optó por confeccionar una base de datos descriptiva basada en mediciones *in situ* mediante levantamientos topográficos y establecer un registro documental en el que se describe la configuración física —geométrica— de los elementos que identifican y definen esta bóveda.⁸⁹

3.3.1. Toma de datos.

Para establecer el registro documental que represente la configuración física de las bóvedas se realizó un levantamiento, con instrumento topográfico, de los elementos identificativos visibles por el intradós, fig. 3.3: las dos aristas diagonales (d1, d2) y las cuatro aristas en muro (F, A, I, D); además, para definir la forma alabeada de las superficies entre las aristas anteriores, se levantó el intradós de las cuatro superficies por líneas que unen por mitad dos muros opuestos (FA, ID). Todas las secciones están contenidas en planos verticales. El número de puntos del levantamiento en cada sección es variable según las dimensiones de la bóveda. La separación entre ellos es menor en el entorno del arranque en los muros para las secciones entre muros y en los rincones para las aristas y las diagonales, donde, en estas últimas, claramente se aprecia una disminución pronunciada de la curvatura; hacia la clave de los tres tipos de arcos, donde aumenta la curvatura —en las diagonales lo hace considerablemente y en las secciones entre muros prácticamente desaparece—, la separación entre los puntos del levantamiento es mayor.

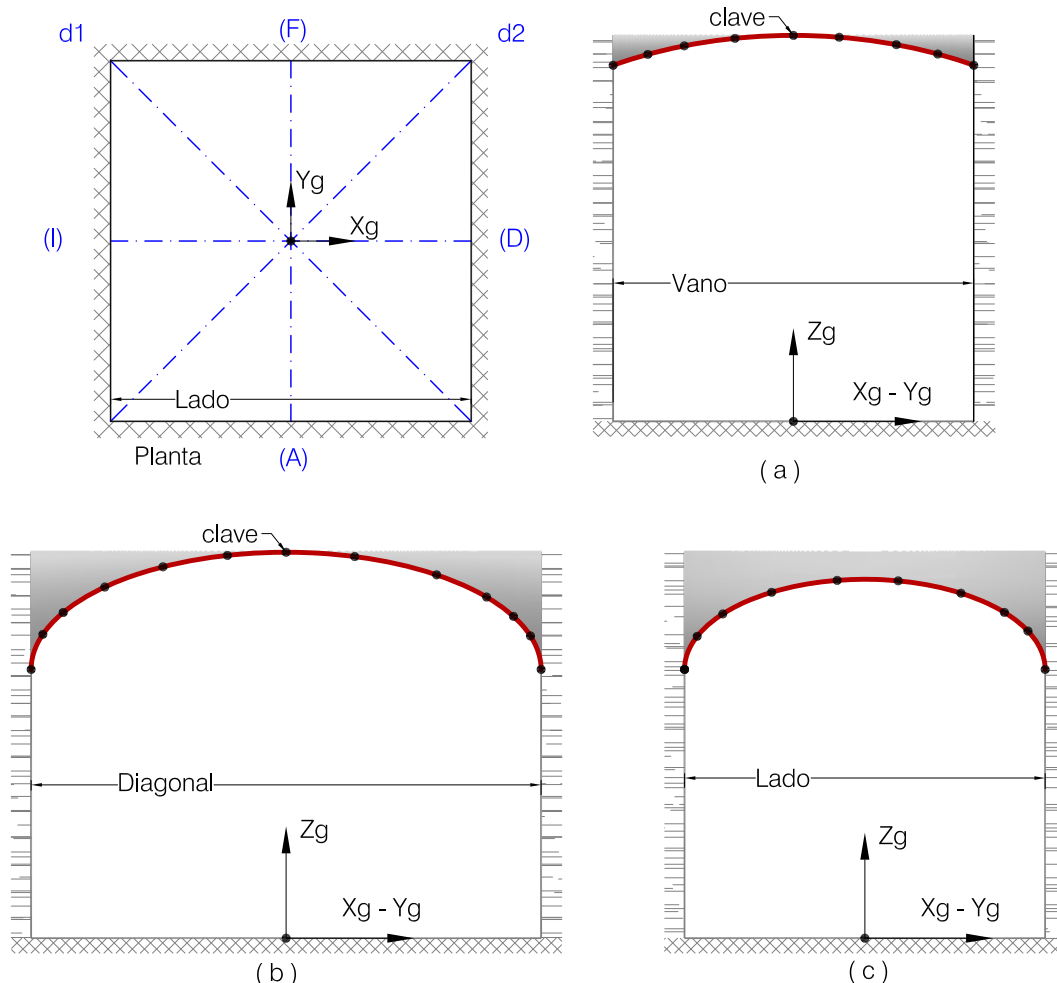


Figura 3.3: Puntos del levantamiento topográfico y situación del sistema general de referencia en planta. Secciones (a) entre muros opuestos: FA, ID; (b) en aristas diagonales: d1, d2; (c) en aristas en los muros: F, A, I, D.

El instrumento utilizado consiste en la utilización de un distanciómetro láser manual montado sobre un trípode que dispone de una plataforma móvil, en la que se acopla el distanciómetro, que permite movimientos verticales y horizontales de dicha plataforma sobre el trípode fijo estacionado (imágen en pág. 141). Con los giros verticales, el distanciómetro proporciona, desde el punto estacionado, distancias reales a los puntos observados de las distintas aristas y secciones y sus correspondientes ángulos verticales. Mediante un disco graduado y fijado al trípode, un índice que insertado en la plataforma móvil, en los giros horizontales de ésta, señala el ángulo horizontal de la visual que se realiza.⁹⁰

De las mediciones de campo realizadas resulta, para cada bóveda, una libreta manuscrita con los datos de las distintas visuales en cada arista y sección —ocho por cada bóveda— por el intradós en el formato:

Nombre bóveda (...)

Sección(...) [n° punto, distancia real, ángulo vertical , ángulo horizontal]

3.3.2. Registro de datos.

Para el almacenamiento de datos —que se utilizarán para la representación gráfica de la bóveda y posterior análisis de las posibles relaciones geométricas de las secciones del levantamiento— se realizó una transformación trigonométrica de los datos de campo, puntos con sus ángulos y distancias, en coordenadas cartesianas referidas al sistema general X_g, Y_g, Z_g utilizado en el levantamiento. De esta forma se obtiene, para cada bóveda, un conjunto de puntos para cada sección en el formato:

Nombre bóveda (...)

Sección(...) [(x_1, y_1, z_1), ... , (x_n, y_n, z_n)]

Con la transformación realizada se contruye un registro general de datos, para cada bóveda, con su nombre identificativo, en el que se incluyen los puntos correspondientes a cada una de las ocho secciones del levantamiento topográfico. Este registro general se almacena en un fichero informático de fomato:

Nombre bóveda [sección(F), sección(A), ...]

Este registro, almacenado en un fichero, posibilita el intercambio de datos con un programa informático CAD para la representación gráfica de la bóveda en el espacio, en sus tres dimensiones, conservando íntegramente las magnitudes medidas en campo y permite y facilita la posterior consulta y manipulación de datos pertenecientes a cada bóveda para analizar matemáticamente las posibles relaciones geométricas entre los puntos que definen cada sección —su posible pertenencia a una curva geométrica conocida— y las relaciones o proporciones, caso de existir, entre las dimensiones de la planta cubierta y las distintas formas de las secciones de una misma bóveda.

3.4. Confección de planos.

A partir de este registro general de cada bóveda se realiza un dibujo, en formato CAD, con todos los puntos del levantamiento y que unidos consecutivamente entre sí por secciones individuales, queda representada en el espacio la bóveda por sus elementos definidores: las aristas diagonales, las aristas en muros y los intradós entre muros opuestos. A partir del modelo creado en 3D y para facilitar observación de los elementos que lo definen, se realizan abatimientos de los planos verticales que contienen las distintas secciones con todos los puntos obtenidos en el levantamiento. Se obtiene así una representación gráfica en planta, figura 3.4, de todas las aristas, cada una con los puntos del levantamiento, conservando las relaciones geométricas espaciales de cada una y las existentes entre todas ellas.

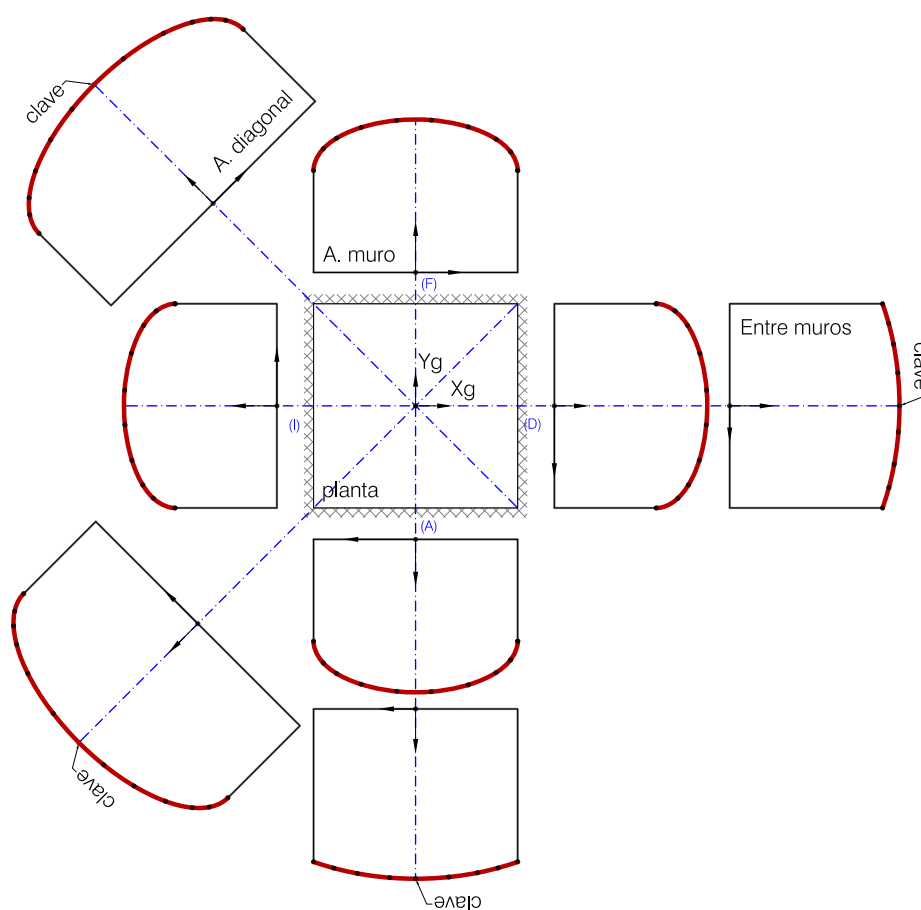


Figura 3.4: Plano general de los elementos geométricos definidores —de las secciones del levantamiento— de la forma de la bóveda: aristas en muros, diagonales y secciones entre muros abatidos sobre el plano de planta.

Con esta representación de la planta y las secciones abatidas, se realizó un plano representativo de la forma de la superficie de la bóveda, por el intradós, mediante el sistema de curvas de nivel equidistantes cada 0,10 m; la forma de la superficie de la bóveda queda visualmente más patente (fig. 3.5).

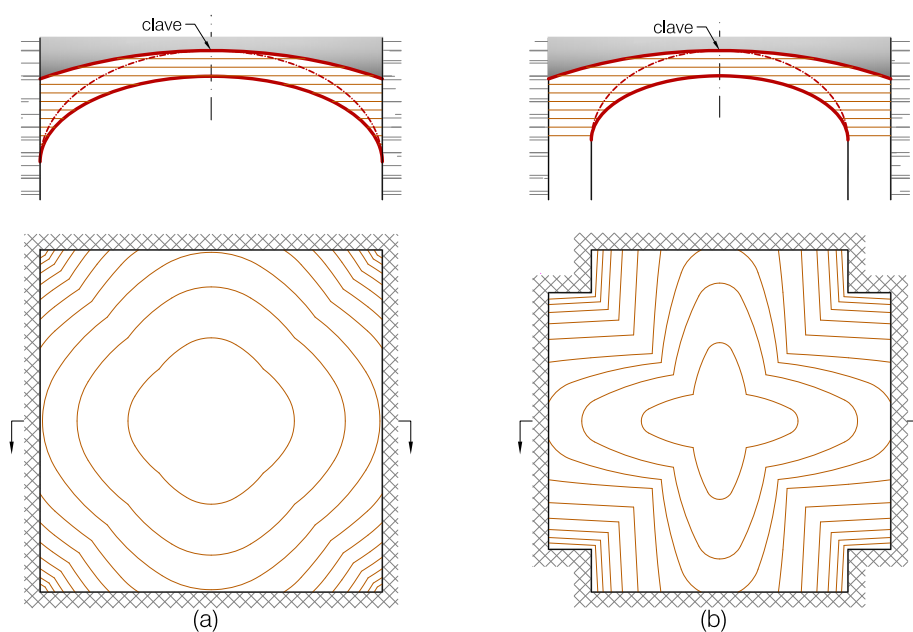


Figura 3.5: Plano de curvas de nivel de una Bóveda Extremeña genérica con arranque en los rincones: a) en forma de hoja de palmera o sobre pechina y b) sobre pilastras.

En todos los casos que se analizaron se observa claramente que, en las distintas secciones verticales realizadas en las bóvedas estudiadas, las aristas son curvadas, y como pudo observarse a primera vista, las aristas en los muros no son arcos circulares; y en el plano de curvas de nivel se comprueba claramente que el intradós no está formado por superficies planas, son claramente combadas —de doble curvatura— como puede comprobarse en los planos de planta de curvas de nivel de las bóvedas levantadas que se acompañan en el anejo E (pág. 173).

A partir de los planos realizados, para el estudio pormenorizado de las distintas aristas se realizó un análisis de los puntos del levantamiento de las distintas secciones de cada bóveda, consistente en averiguar la curva geométrica, obtenida analíticamente, que mejor se ajusta a todos los puntos de una misma sección.

4

Análisis de los datos del levantamiento.

Se expone en este capítulo el método y la resolución para la obtención de las figuras geométricas que mejor puedan adaptarse a los puntos de las distintas secciones del levantamiento que se realizó en cada bóveda. Si estas figuras o curvas geométricas se adaptan aceptablemente a las distintas secciones del levantamiento realizado se podrá averiguar la forma geométrica de cada bóveda, y si todas las estudiadas resultaran con la misma forma —resultaría un subgrupo en la clasificación geométrica de bóvedas compuestas complejas— se podrá averiguar que elementos geométricos definidores, las directrices y generatrices, producen la forma característica de la Bóveda Extremeña.

4.1. Introducción.

Una identificación y clasificación de las distintas bóvedas que podamos encontrar se basa en su forma, es decir: en la manera de estar distribuida la o las partes materiales que constituyen el cuerpo del abovedamiento y que son distinguibles a la vista. La forma se puede explicar mediante la geometría y ésta, en el tema que nos ocupa, por la interacción de líneas que definen la superficie cubierta. Las partes de la superficie de una bóveda están generadas, en su forma simple o compuesta que dijimos, por el desarrollo de una línea recta o curva en el espacio: la generatriz, que gira alrededor de un eje o se desplaza a través de una trayectoria: la directriz. En general, la línea generatriz es una porción de una curva plana y la línea directriz es, comúnmente, una línea recta y cuando esta directriz es curvada es plana.

La forma de una bóveda no es un mero capricho estético. La geometría de una obra de fábrica es la razón que nos ayuda a entender el comportamiento y la soli-

dez de estas construcciones. La estabilidad de una estructura depende de la forma de sus elementos constituyentes, y no tanto de la resistencia de éstos: «Para que una estructura sea estable sus elementos estructurales deben tener unas dimensiones estructurales que dependen, fundamentalmente, de la forma geométrica de la estructura».⁹¹

Por tanto, para definir la forma geométrica de la Bóveda Extremeña y comprender su diseño —dejando a un lado la influencia que la geometría tiene en la estabilidad, demostrada por la pervivencia de estos abovedamientos y que no es nuestro objetivo— es necesario determinar, si los tiene, sus elementos geométricos definidores: sus generatrices y sus directrices; y averiguar si existe alguna “razón” (en sentido euclidiano)⁹² entre esos elementos que le dan esa forma distintiva.

4.2. Metodología.

A partir de los planos de planta con las secciones abatidas, fig. 3.4, se estudiaron las curvas matemáticas que mejor se ajustan a las distintas secciones representadas y que definen geoméricamente la bóveda.

Visualmente, en las secciones abatidas, todas las curvas son arcos rebajados (flecha menor que el semilado) y simétricos respecto a un eje vertical que pasa por su punto medio y que corresponde al de mayor cota en cada sección. A ambos lados de este eje las curvas se desarrollan, suavemente en un principio, con un determinado radio de curvatura y según se alejan del eje el radio disminuye sensible y claramente hacia los rincones; esto se aprecia en las aristas en los muros y en las diagonales y no tanto en las secciones entre muros que arrancan desde éstos con un ángulo suave e inclinado sobre la horizontal. Las curvas que describen las secciones entre muros se inician tangentes a la horizontal en su punto más elevado, la clave, punto del eje de simetría, y el radio de curvatura disminuye, gradual e imperceptible a simple vista, en su desarrollo hacia muros delimitadores. Las líneas de las aristas diagonales y las aristas en muro acaban tangentes, verticalmente, a los muros de apoyo de la bóveda en los rincones, no así, como se ha dicho, las secciones entre muros.

Para analizar geoméricamente cada sección se estableció un sistema de referencia particular $X_p Y_p$, en el plano vertical que contiene a la curva, con el origen inicialmente cercano en torno al eje de simetría (fig. 4.1). El origen de este sistema se

irá modificando, horizontal y verticalmente, en la búsqueda de la curva geométrica que coincida lo más exacto posible con los puntos —con la línea poligonal curvada que los une— de la sección correspondiente.

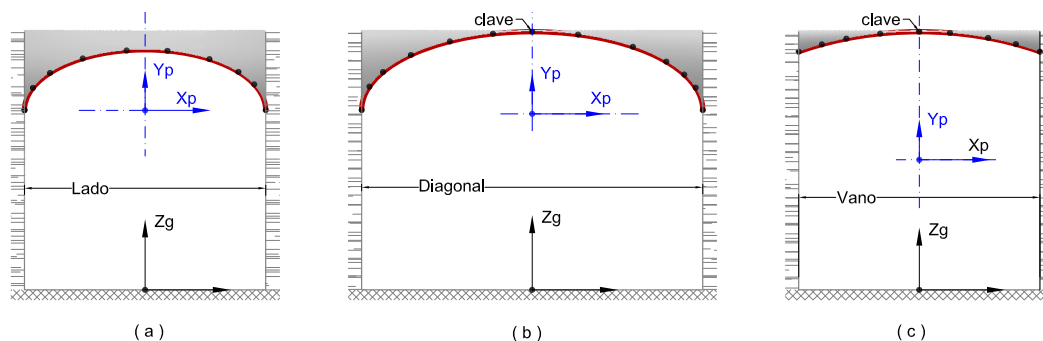


Figura 4.1: Sistema de referencia particular $X_p Y_p$ en las distintas secciones del levantamiento: a) en aristas en los muros, b) en las diagonales y c) en las secciones entre muros.

Conocido que el proceso constructivo de las bóvedas de rosca comienza en los muros de apoyo entre dos rincones consecutivos —y que es necesario el replanteo previo sobre dichos muros—, se comenzó por buscar la geometría de las aristas en muro.

En los planos de secciones abatidas se aprecia con toda claridad que las aristas en los muros no son líneas curvas pertenecientes a una circunferencia. Inicialmente se pensó en una curva formada por varios arcos de circunferencia, un arco carpanel, con un arco circular central, el de mayor radio y con centro en el eje de simetría, y tangente a los dos extremos de este arco central, otros dos arcos de circunferencia de menor radio e iguales. Como es sabido, el replanteo de estas obras se realiza solo con los medios básicos de la albañilería: la cinta, el cordel y la plomada; y por tanto esta posibilidad de que la arista en muro fuese un arco carpanel fue tajantemente desechada ya que su replanteo en los muros exigiría situar un extremo del cordel en el centro de la circunferencia del arco central y éste queda por debajo —en la mayoría de los casos estudiados— del suelo de habitáculo cubierto, para lo que habría que realizar una excavación bajo este. Es evidente lo poco práctico y antieconómico que resulta el realizar una excavación bajo el suelo tan solo para instalar el clavo de sujeción del extremo del cordel para el replanteo del arco central y posteriormente rellenarla. Resulta más improbable la utilización de una curva carpanel cuando la bóveda se realiza en plantas superiores de una edificación en las que se tendría que demoler parte del suelo en los cuatro lados del habitáculo y reconstruirlos posteriormente.

Otras alternativas ofrecen las curvas cónicas. Un arco de circunferencia no podría envolver la poligonal formada por los puntos de una arista en muro ya que, como quedó dicho, el radio de curvatura de ésta aumenta gradualmente desde la clave del arco formero hasta su terminación en los rincones. La parábola o la hipérbola, que tendrían que replantearse, una u otra, por pares simétricos con vértices en los rincones y ramas tangentes en la clave, y nos parece excesivamente complicado, en este tipo de obras, obtener puntos del desarrollo de sus ramas y posteriormente trasladarlos al muro.

De entre todas las cónicas, la única que parece factible de replanteo por métodos simples y sin complicaciones técnicas de cálculos para su replanteo es: la elipse. Con una «cinta y cordel» y una plomada, incluso prescindiendo de la cinta, se puede trazar una elipse o un arco elíptico con cualquier proporción entre sus ejes, sobre cualquier superficie plana —como la de un muro vertical—, con el sencillo y eficaz: *método del jardinero*.

Este método de replanteo, conocido desde antiguo, se basa en la propiedad geométrica de la elipse de que cualquiera de sus puntos cumple que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos, los focos, es constante. La facilidad para dibujar o replantar una elipse por este método se basa en la propiedad geométrica que Euclides, hacia 300 a.C., estableció en la proposición 9 del libro V de su tratado *Elementos*: «Las [magnitudes] que guardan con una misma [magnitud] la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma [magnitud] guarda la misma razón, son iguales»⁹³.

En la figura 4.2 señalados los dos puntos A, a nivel en los extremos de un muro —luz entre dos rincones consecutivos— elegidos como arranque de la arista en muro (vértices de la elipse), se marca en la pared una línea AA (eje mayor y luz del arco) y se señala su punto medio O (centro de la elipse). Desde este punto y en la vertical hacia arriba se señala otro punto C que será la clave de la arista en muro; esta línea OC será la flecha elegida para el arco formero. Tomando con el cordel la medida $R=OA$, la mitad de la luz del lado, y con un extremo fijado en el punto C de la clave anteriormente marcada, se traza un arco circular que corte a la primitiva línea AA entre los arranques y en los dos puntos de corte resultantes F y F se colocan sendos clavos, quedando replanteados en el muro los dos focos de la elipse. Haciendo pasar el cordel alrededor de los dos clavos instalados y por el punto de la clave C —formando el triángulo FCF de la figura—, con un útil para marcar y manteniendo

ajustada a los puntos del levantamiento.

Modificando la posición del centro del sistema de referencia (X_p Y_p en la fig. 4.1) se obtienen sucesivos parámetros de las elipses con sus correspondientes residuos. Cuando estos residuos son todos del mismo orden de magnitud, sin sobrepasar individualmente 0,05 cm, y la suma de dichos residuos es inferior a 0,01 m, admitimos la bondad del ajuste y se toma esta elipse como la que mejor se adapta a los puntos observados y se tomará definitivamente como la curva ajustada.⁹⁷

El resultado del ajuste de curvas elípticas obtenido para las aristas en muro de las distintas bóvedas, semiejes a_{mur} y b_{mur} , está reflejado en el anejo B.2 (pág. 149).

Para las secciones entre muros opuestos, en las que no se aprecia una clara variación del radio de curvatura, se realizó primeramente un ajuste —en las bóvedas con retumbo marcado— mediante una curva circular con centro en el eje vertical de simetría. Modificando la posición del centro de esa curva (sobre el eje Y_p de la figura 4.1c) se probó ajustar un arco de circunferencia a la poligonal formada por los puntos de la sección. Aunque visualmente pareciera aceptable ese ajuste, el resultado de los residuos obtenidos superaba el límite impuesto de que la suma de estos fuera inferior a 0,01 m; y los residuos individuales, hacia los extremos de la curva, resultaron en la mayoría de los casos superiores al límite establecido de 0,05 cm. Además, en los resultados de los radios obtenidos para una misma bóveda se observó la desigualdad patente entre los obtenidos para una y otra sección de una misma bóveda. (En muchos casos la posición del centro de la circunferencia resultó a una distancia vertical bajo la clave de la bóveda doble, incluso mayor, que la longitud del vano. Esta posición del centro, que pudiera ser el eje de giro de una curva generatriz o el centro de una curva directriz por la que se desarrollara una generatriz, nos pareció poco probable debido a la dificultad que entrañaría un diseño —caso de existir— de las superficies de la bóveda en que sus elementos definidores, la generatriz y la directriz, estuvieran tan alejados, horizontal y verticalmente, de los muros entre los que se pretende el abovedamiento).

El resultado de las curvas circulares probadas y rechazadas por el incumplimiento de las restricciones impuestas al ajuste de las secciones entre muros, radios R_{sec} , se indican en el anejo B.3 (pág. 154).

Esto nos llevó a probar otro tipo de curva para las secciones entre muros: la elipse. Ésta, que también tiene su centro entre los dos muros opuestos, sin embargo su origen se sitúa a una distancia vertical desde la clave que en ningún caso estaría

tan alejado de la clave de la bóveda que el de una curva circular. Circunstancia que parece más favorable para concebir gráficamente —en un supuesto diseño— una forma superficial resultado de la interacción entre elementos definidores: directriz y generatriz.

Para las curvas del intradós por las secciones del levantamiento entre muros opuestos, no pudo hallarse, para la totalidad de las bóvedas estudiadas, una curva elíptica ajustada satisfactoria con las mismas restricciones impuestas para el ajuste de las aristas en muro (residuos simétricos respecto del eje vertical y menores de 0,01 m). Aunque en los planos de secciones abatidas se observa que la poligonal curvada presenta una curvatura de mayor radio, incluso a veces es plana, en el entorno de la clave que en los apoyos en los muros laterales, el ajuste de curvas elípticas en algunas bóvedas con las restricciones impuestas daban unos resultados con residuos que superan el límite que establecimos. Además estos residuos son, en esos casos, diferentes a ambos lados del eje vertical de simetría que pasa por la clave (esto se debe, pensamos, a la manera de construcción de los paños de la bóveda que se inician todos a partir de una curva previamente replanteada en los muros y se continúa la fábrica, de forma abombada y ganando en altura, a la estima del operario, sin apoyo de replanteo o guía colocada que seguir, hasta concluir en la clave, que sí es un punto previamente fijado y señalado en la obra mediante cuerdas por replanteo). En estos casos se amplió en margen del límite impuesto. A excepción de estos casos, en la mayoría pudo realizarse el ajuste de una curva elíptica con las restricciones impuestas.

El resultado de las curvas elípticas ajustadas a las secciones entre muros, semiejes A_{sec} y B_{sec} , se indican en el anejo B.3 (pág. 154).

Los intentos de ajustar una curva elíptica a las aristas diagonales resultó infructuoso. Aparentemente, a la vista de los planos de estas secciones, las diagonales tienen una forma elíptica, pero con las restricciones impuestas a los residuos en el ajuste de una curva de este tipo, incluso aumentando sensiblemente esas limitaciones, no se encontró una curva elíptica satisfactoria. No obstante, la forma de las diagonales que se aprecia en los planos de estas secciones es siempre ovalada o elipsoidal.⁹⁸

Las dos aristas diagonales de cada bóveda fueron utilizadas exclusivamente para la construcción de los planos de planta de curvas de nivel, por el intradós, que se presentan en el anejo E: «Planos de planta con curvas de nivel», (pág. 173).

4.2.2. Resultados.

Con la metodología y los criterios expuestos para la aceptación de los ajustes de curvas geométricas elípticas, dichos más arriba, se realizaron los cálculos necesarios —para las cuatro aristas en los muros y en las dos secciones entre muros de cada bóveda— cuyos resultados están reflejados en los distintos apartados del anejo B.

Se realizó posteriormente un estudio estadístico descriptivo para establecer, si ello es posible, una función lineal que relacione los distintos parámetros que definen la geometría de las secciones y la planta del espacio cubierto por las bóvedas, función que relacione geoméricamente: a) los semiejes y el lado de las aristas en los muros, b) los semiejes mayor y menor de esas aristas, c) el retumbo y la flecha de las aristas en muro, d) entre el retumbo y el lado o luz, y e) las secciones entre muros opuestos y el vano.

Los resultados de estas relaciones entre los parámetros de las curvas elípticas ajustadas y la planta abovedada están expuestos en el anejo C (pág. 157).

A partir de estas relaciones estadísticas, que se exponen a continuación, se podrá comprobar si existe alguna relación —cánon de proporción— entre los parámetros de las curvas definidoras de la BEx: directriz y generatriz y la planta correspondiente. De confirmarse, se estudiará, más adelante, si la forma resultante con las relaciones obtenidas pudo ser resultado de un diseño primigenio.

4.3. Relaciones entre los parámetros de la bóveda.

Una vez realizado el ajuste de las curvas a las distintas secciones del levantamiento —por el procedimiento descrito más arriba— se trató de averiguar la existencia de una relación geométrica entre los distintos parámetros obtenidos: a) entre los semiejes y el lado correspondiente a las aristas en muro, b) entre los propios semiejes mayor y menor de esas aristas, c) entre el retumbo de la bóveda y el semieje menor —flecha— de las aristas, d) entre el retumbo y el vano de la bóveda y finalmente e) entre los semiejes de la elipse en las secciones entre muros y el vano correspondiente.

Para obtener una posible relación entre las dimensiones de la bóveda y los parámetros de las curvas que definen geoméricamente las distintas secciones del levantamiento se realizó un análisis de regresión lineal y si este resultara aceptable cuantificar las relaciones mediante una ecuación lineal con fines predictivos.

Las relaciones que se obtuvieron fueron:

a) Semiejes y lado de las aristas en muro.

(Véase diagrama de dispersión, recta de regresión y coeficientes de la bondad del ajuste lineal en anexo C.1.1, pág. 158)

Semieje mayor a_{mur} y lado L:

$$a_{mur} = 0,50 \times L; \quad (coef. \text{ correl.} = 99,7\%)$$

Semieje menor b_{mur} y lado L:

$$b_{mur} = 0,24 \times L + 0,11; \quad (coef. \text{ correl.} = 89,5\%)$$

b) Semiejes mayor y menor de las aristas en muro.

(Véase diagrama de dispersión, recta de regresión y coeficientes de la bondad del ajuste lineal en anexo C.1.2, pág. 159)

Semiejes mayor a_{mur} y menor b_{mur} :

$$b_{mur} = 0,47 \times a_{mur} + 0,12 \quad (coef. \text{ correl.} = 89,1\%)$$

c) Retumbo y flecha de las aristas en muro.

(Véase diagrama de dispersión, recta de regresión y coeficientes de la bondad del ajuste lineal en anexo C.1.3, pág. 160)

Retumbo R y flecha f:

$$R = 0,20 \times f + 0,06 \quad (coef. \text{ correl.} = 46,1\%)$$

d) Retumbo y luz de las bóvedas.

(Véase diagrama de dispersión, recta de regresión y coeficientes de la bondad del ajuste lineal en anexo C.1.4, pág. 161)

Retumbo R y luz L:

$$Ret = 0,066 \times L \quad (\text{coef. correl.} = 55,8\%)$$

e) Secciones entre muros y vano.

(Véase diagrama de dispersión, recta de regresión y coeficientes de la bondad del ajuste lineal en anexo C.1.5, pág. 162)

Semieje mayor A_{sec} y vano (lado) L:

$$A_{sec} = 0,93 \times L + 0,37 \quad (\text{coef. correl.} = 95,6\%)$$

Semieje menor B_{sec} y vano (lado) L:

$$B_{sec} = 0,51 \times L - 0,24 \quad (\text{coef. correl.} = 71,5\%)$$

Por el tipo de abovedamiento que tratamos —el realizado por alarifes— y por la antigüedad de los edificios en que se realizaron los abovedamientos, en algunos casos se ha podido comprobar de varios siglos, podemos asegurar que en el trazado de la obra no pudieron utilizarse las relaciones geométricas obtenidas tal y como se exponen en las ecuaciones algebraicas anteriores; especialmente resulta impensable el replanteo, a partir de esas ecuaciones, con los útiles clásicos del alarife. Es necesaria una interpretación de las ecuaciones acorde con los útiles de trazado y replanteo de aquellas épocas.

Además, en esa interpretación, hay que tener en cuenta las imperfecciones propias de estas construcciones de fábrica de ladrillo —las bóvedas, que se ejecutan sin cimbra que sirva de molde— que pueden ser del orden de centímetros. También los datos obtenidos en los levantamientos topográficos de la fábrica están afectados por el lucido final que presentan la mayoría de las bóvedas estudiadas, lucido que acentúa, alterando, la forma y dimensiones de las aristas: en los arranques en los rincones prolongando la pechina, en las aristas diagonales forzando su marcado hacia el interior y en el punto de la clave que resulta también marcado —a veces resaltado

de forma muy notoria— hacia el interior. Por ello, la interpretación que debe darse a la forma de la fábrica a partir de esas expresiones —para el trazado de un plano y fundamentalmente para el método de replanteo— tiene que ser más sencilla, con pocas complicaciones y dificultades técnicas de acuerdo con el tipo de obra de que se trata: debe ser un procedimiento sencillo adaptado a los métodos y reglas empleados por los alarifes con solo la cinta, el cordel y la plomada.

4.4. Proporciones entre los parámetros de la bóveda.

En el apartado anterior se mostró la definición geométrica, en base a unos resultados estadísticos, de las curvas que en el espacio forman y/o delimitan las superficies de la Bóveda Extremeña. Una primera interpretación es la que procede de la propia ecuación, y otra segunda interpretación es la que se obtiene del significado, del sentido de representación de cierta idea u objeto, de esas relaciones a través de las ecuaciones púramente matemáticas.

En este apartado se dirán esos resultados obtenidos analíticamente interpretados, según nuestro entender, conforme a los métodos de trazado antiguos basados en la regla y el compás como útiles de dibujo, y a la manera de replanteo de las obras de abovedamiento que se realizan solamente con la intervención del gremio de albañilería, en el que el replanteo de la obra se realiza exclusivamente con los medios habituales: la cinta, el cordel y la plomada.

Para trazar y posteriormente replantear las distintas partes de una obra con cinta y cordel se utilizan, desde antiguo,⁹⁹ reglas aritméticas-geométricas de construcción basadas en la medida de un elemento respecto de otro —proporción o relación entre dimensiones de una misma cosa— tomado como base o patrón.¹⁰⁰ Así, creemos adecuado transformar aquellas ecuaciones algebraicas a estas reglas y tomando como medida base el lado del habitáculo a cubrir, de planta cuadrada, a partir de este lado, expresar las medidas de los elementos que definen la bóveda como partes o proporciones de dicha medida base o patrón: el lado L .

La transformación de aquellas ecuaciones algebraicas congruentes con relaciones de proporción entre los parámetros de las curvas definidoras a números racionales (cociente entre dos enteros positivos) y apoyándonos en que las medias resultantes tienen el mismo significado que las ecuaciones, resultó:¹⁰¹

a) **Semiejes y luz de las aristas en muro.** (fig. 4.3)

Semieje mayor a_{mur} y lado L: $a_{mur} \approx \frac{1}{2} \times L$

Semieje menor b_{mur} y lado L: $b_{mur} \approx \frac{1}{4} \times L$ ⁽¹⁰²⁾

b) **Semiejes mayor y menor de las aristas en muro.** (fig. 4.3)

Semiejes mayor a_{mur} y menor b_{mur} : $b_{mur} \approx \frac{1}{2} \times a_{mur}$

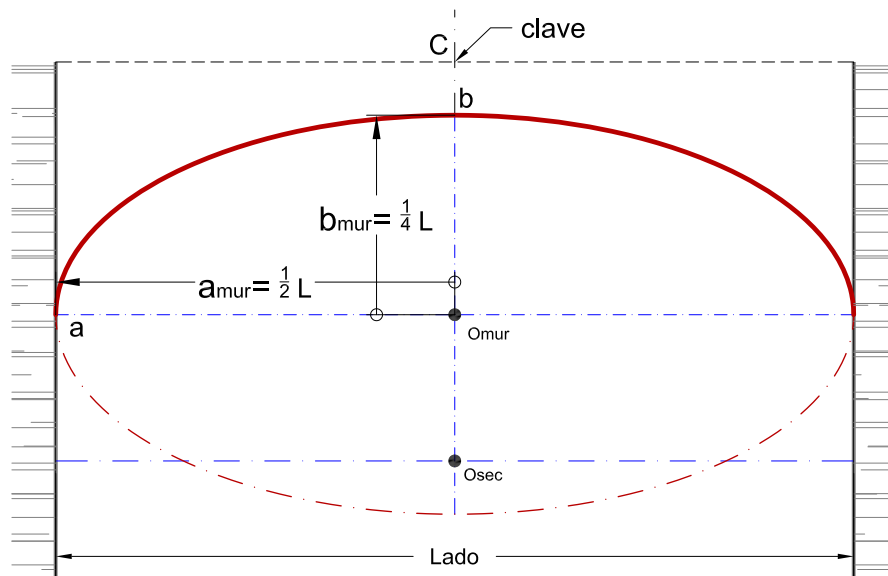


Figura 4.3: Proporciones entre los semiejes de la arista en muro y el lado

c) **Retumbo y flecha de las aristas en muro.** (fig. 4.4)

Retumbo R y flecha f: $R \approx \frac{1}{4} \times f$

d) **Retumbo y luz de las bóvedas.** (fig. 4.4)

Retumbo R y luz L: $R \approx \frac{1}{15} \times L$ ⁽¹⁰³⁾

En puntos anteriores se obtuvo que: $R \approx 1/4$ de f , y $b_{mur} \approx 1/4$ de L ; como la flecha y el semieje menor son lo mismo, resulta: $R \approx 1/16$ de L ; con lo que podemos

evaluar como proporción más probable, promediando los dos valores del retumbo —por defecto—, que:

$$\text{Retumbo } R \text{ y luz } L: \quad R \approx \frac{1}{15} \times L$$

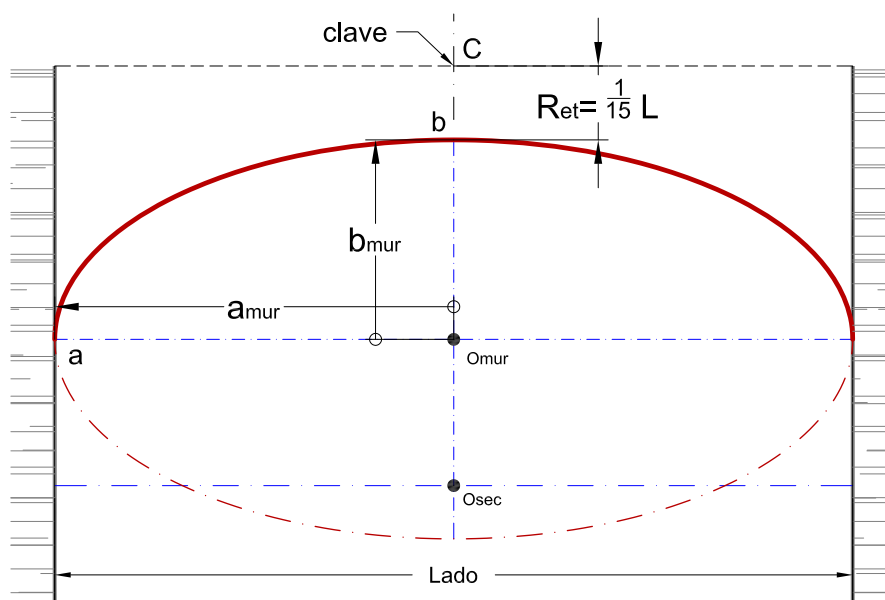


Figura 4.4: Proporción entre el retumbo y la luz de la bóveda

e) Secciones entre muros y vano. (fig. 4.5)

$$\text{Semieje mayor } A_{sec} \text{ y vano (lado) } L: \quad A_{sec} \approx L$$

$$\text{Semieje menor } B_{sec} \text{ y vano (lado) } L: \quad B_{sec} \approx \frac{1}{2} \times L$$

Si, como más arriba se vió, el retumbo resultó: $R \approx 1/15$ de L y el semieje menor de la arista en muro: $b_{mur} \approx 1/4$ de L , la diferencia de alturas, HO_{mur} , entre el centro de la arista en muro O_{mur} y el centro de la sección entre muros O_{sec} será (figura 4.5:

$$HO_{mur} = B_{sec} - (Ret + b_{mur});$$

$$HO_{mur} \approx \frac{L}{2} - \left(\frac{L}{15} + \frac{L}{4} \right), \text{ que resulta: } HO_{mur} \approx \frac{11}{60} L$$

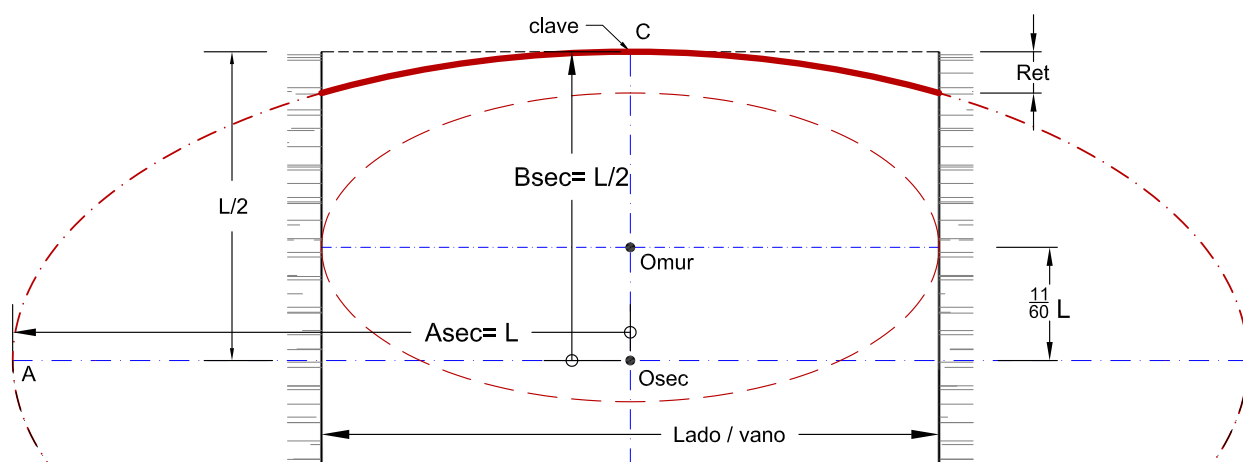


Figura 4.5: Proporción entre semiejes de las secciones por mitad de muros opuestos

Como se dijo, la configuración del diseño de los abovedamientos que tratamos se basa en formas generadas por geometrías derivadas de la combinación de elementos simples —curvas generatriz y directriz—, con una determinada proporción entre ellos, y cada uno, en proporción también, con el lado de la bóveda.

Las proporciones obtenidas en los elementos geométricos definidores, tanto el de las aristas en los muros como el de las secciones entre muros —ejes mayor y menor de las elipses ajustadas—, resultaron ser de 2 a 1. Estas elipses quedan inscritas en un rectángulo con un lado doble del otro, o lo que es igual, en dos cuadrados iguales unidos por uno de los lados —proporción *compuesta* o *dupla*¹⁰⁴—; esto es, formado por simetría,¹⁰⁵ por dos partes o figuras exactamente iguales con respecto a una recta —el lado común— por lo que se puede tomar como figura geométrica base, en la que se inscriben las curvas generatrices y directrices, el cuadrado —figura patrón por excelencia—, figura ésta que coincide con la forma de la superficie cubierta por la bóveda.¹⁰⁶

Consecuencia:

La forma de las curvas generatriz y directriz encontradas para la BEx —curvas elípticas— no son usuales en abovedamientos, como la particularidad del retumbo, en bóvedas de aristas. Aunque la construcción de la BEx haya sido una tarea específica de alarifes, expertos y conocedores del oficio, nos resulta difícil pensar que esta forma de bóvedas de arista sea fruto de la imaginación de estos maestros de obra. Creemos que en algún momento de la Historia, conocida la técnica de construcción de bóvedas sin necesidad de cimbrar, pudo haber una idea, un pensamiento, y su

diseño fuera plasmado en un dibujo, un croquis, que tomado como modelo o prototipo, a partir de él, la forma aprendida se fuera transmitiendo a través del tiempo en el gremio de los alarifes.

4.5. Trazado geométrico con regla y compás.

Para que la Bóveda Extremeña, su forma, con las figuras y proporciones obtenidas en el apartado anterior, pudiera ser el resultado de un diseño primigenio y arquetípico de los primeros tiempos de la Historia de la Construcción —una imagen o dibujo que represente un objeto— es necesario que pueda ser realizado con instrumentos y métodos —de la antigüedad— de los que haya constancia de su existencia y utilización generalizada tanto para resolver el dibujo propiamente dicho como para establecer las medidas y proporciones entre los elementos que conforman el diseño, paso previo para tener una idea de como será en la realidad una cosa, un objeto, que en principio es solo un pensamiento, una idea.¹⁰⁷

(Desde épocas remotas, el hombre ha tenido un especial interés por la geometría llegando a considerarla un arte en el campo de la ciencia. El primer estudio sistemático y con un riguroso método demostrativo de la geometría se debe a Euclides de Alejandría (c. 300 a.C.) —a quien «le precedieron Pitágoras y una ciencia de los *algoritmos* de origen indio y mesopotámico [...] chino y egipcio»¹⁰⁸—; su obra «Elementos», compuesta por trece libros en los que se codifican los conocimientos anteriores, se considera el primer y más influyente tratado en toda la Historia, considerado básico para las ciencias matemáticas —hasta mediados del s. XIX en que aparece la geometría descriptiva¹⁰⁹—; en los libros que lo componen se exponen ideas, mediante un conjunto de definiciones, postulados, axiomas y proposiciones en el campo de la geometría y la aritmética.¹¹⁰ En las demostraciones de las proposiciones se utiliza un procedimiento elemental de construcción de líneas y figuras, de las que se extraerán conclusiones, basado únicamente en los útiles sencillos de dibujo de la época: la «regla y compás»¹¹¹)

Para comprobar la factibilidad de ese diseño con solo la regla y el compás, se trató de probar la posibilidad de realizar un dibujo que represente fielmente la forma de la Bóveda Extremeña mediante la representación de los elementos definidores

—líneas generatriz y directriz— resueltos más arriba, con las proporciones obtenidas y las posiciones relativas entre ellos. Para ello se siguió el proceso de resolución gráfico euclidiano (expuesto en la versión de la editorial Gredos de «Elementos») para las distintas partes del trazado que se exponen a continuación, denotando con números romanos el libro seguido del número correspondiente a la proposición euclidiana utilizada. A las construcciones geométricas habrá que añadir el método de representación de la figura elipse (que no fué tratada específicamente su resolución gráfica por Euclides aunque sí el concepto geométrico de la propiedad fundamental de la elipse: V, prop. 9)¹¹² con las proporciones que se dijo más arriba.

En primer lugar, en el interior de un espacio de planta cuadrada¹¹³ a abovedar, de dimensiones: *Lado* \times *Lado*, se establece el sistema general de referencia $X_g(Y_g) Z_g$ en mitad y por mitad de dos muros opuestos M separados la magnitud L correspondiente al lado o vano abovedado.

En la figura 4.6:

- Se traza una línea recta R, que se tomará como eje horizontal $X_g(Y_g)$ y un punto O de ella como origen del sistema general de referencia.
- el eje vertical Z_g deberá ser perpendicular a la recta R por el punto O. Para ello se construye un triángulo equilátero sobre la recta R mediante: I, prop. 1 «Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada».
- para ello, con centro en O y radio cualesquiera se traza un círculo que corta a la recta R en los puntos a y b (fig. 4.6a).
- tomando como abertura del compás la medida ab —u otra cualquiera mayor que ese radio— se trazan círculos con centros en a y en b. Éstos se cortan entre sí en el punto C.
- El triángulo equilátero resultará de unir con líneas rectas finitas los pares de puntos: ab, bc y ca.
- trazando una línea recta por C y por O se tiene el eje Z_g que resulta perpendicular en O a la recta R que representa los ejes $X_g(Y_g)$.

y puede comprobarse que el triángulo construido es rectángulo en O porque «el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto [cb o ca] es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto [Oc y Ob o Oa]»: I, prop. 47.¹¹⁴

(Idéntico resultado puede obtenerse en la construcción de la figura 4.6a si se toma un punto C que no esté en R y mediante: I, prop. 12 «Trazar una línea recta

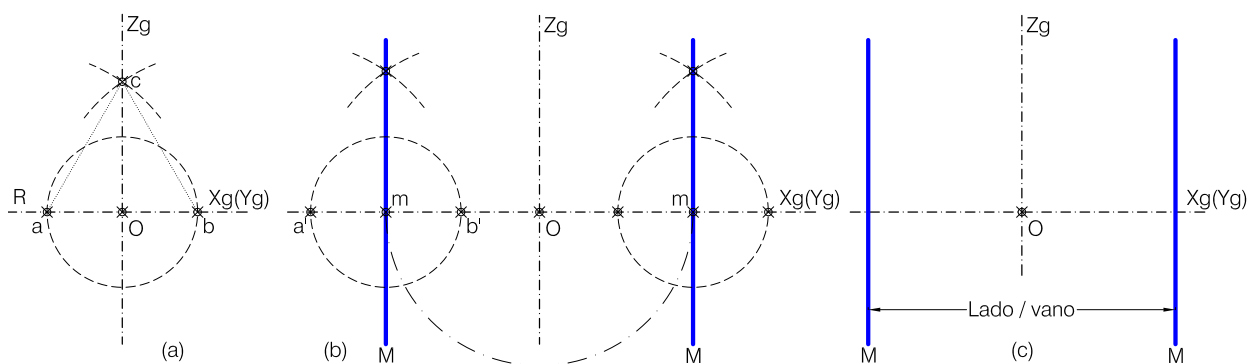


Figura 4.6: Trazado de los ejes del sistema de referencia centrado entre muros enfrentados —sistema general— y delimitación del espacio entre muros M.

perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella» y se obtienen los ejes ortonormales $X_g(Y_g)$ y Z_g

Para el trazado de las líneas que representen a los muros verticales M a ambos lados del eje Z_g anteriormente trazado, se llevará sobre la primitiva recta R, desde O, y a ambos lados de éste, con el compás, una magnitud igual a la mitad del lado. Para ello:

- según: I, prop. 10 «Dividir en dos partes iguales una recta finita dada», con centro en O se traza un círculo de radio la mitad del lado dividido que corta a la recta R en dos puntos m y n (figura 4.6b).
- por éstos puntos se trazan rectas perpendiculares a R como se vió más arriba, construyendo triángulos equiláteros por: I, prop. 1.
- o bien, por cada punto m «Trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una recta dada, desde un punto dado de ella» según: I, prop. 11.

De esta manera queda dibujado el sistema de referencia general en la sección por mitad entre dos muros M opuestos, representación que es coincidente a la sección vertical por un muro donde las líneas M representan a los rincones (figura 4.6c).

4.5.1. Secciones entre muros.

Centrada en el sistema general de referencia establecido O_{sec} , se puede trazar la figura elíptica de las secciones entre muros que resultó en el apartado 4.4e con las proporciones entre sus ejes y la luz del vano: semieje mayor $A_{sec} \approx L$ y semieje menor $B_{sec} \approx 1/2$ de L con solo los instrumentos y métodos euclidianos.

En la figura 4.7:

- A partir del sistema general de referencia y la delimitación del vano L entre muros opuestos —fig. 4.6(c).
- se toma con el compás la medida del vano entre los muros M sobre el eje horizontal de referencia $X_g(Y_g)$.
- con centro en el origen O_{sec} se traza un círculo con ese radio, que cortará a Z_g en los puntos a y g —diámetro vertical del círculo—, y al eje $X_g(Y_g)$ en los dos puntos A y A' —diámetro horizontal del círculo— de la figura.
- Se construye un exágono inscrito en el círculo trazado, con lados paralelos al eje vertical y por tanto a los muros, por la: IV, prop 15 «inscribir un exágono equilátero y equiángulo en un círculo dado».
- con la abertura del compás igual al vano se trazan círculos con centros en el eje vertical de simetría Z_g : uno con centro en el punto a, que corta al círculo anterior en los puntos k y d, y otro, en el extremo opuesto, con centro en g, que corta al círculo primitivo en los puntos h y e.
- con la regla se trazan rectas finitas entre cada dos puntos consecutivos quedando dibujado el exágono de vértices: a, d, e, g, h, y finalmente k.
- el exágono resultante tiene sus lados iguales al radio del círculo y por tanto iguales al vano (corolario de: Libro I, prop. 15).

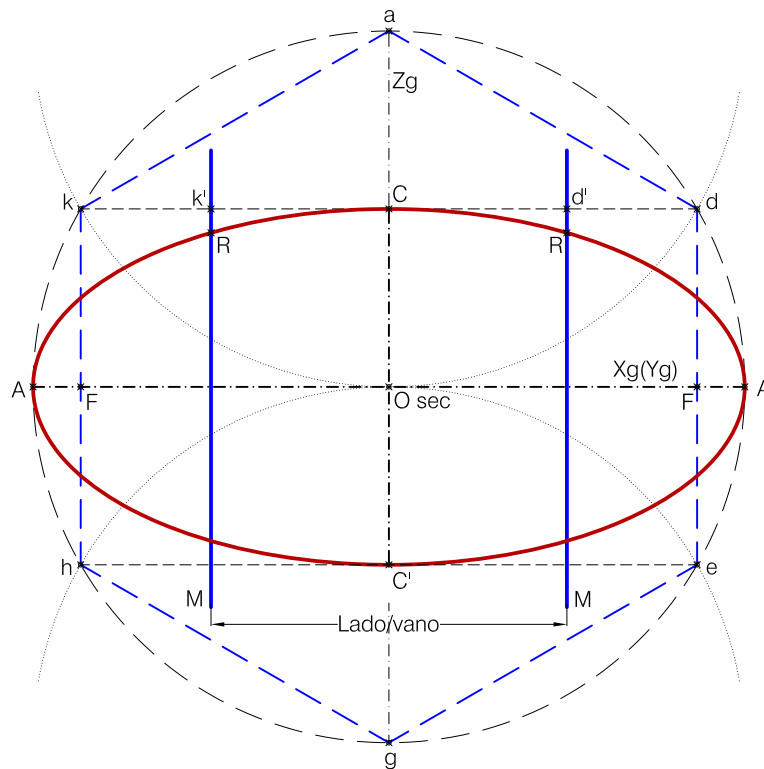


Figura 4.7: Secciones entre muros. Trazado de la elipse y localización de los focos

De la figura del exágono equilátero y equángulo¹¹⁵ construido resultan los parámetros —ejes mayor y menor— que definen la elipse resultante por las secciones entre muros. El centro O_{sec} estará situado en el punto medio entre muros opuestos. El eje mayor de la elipse corresponde al diámetro horizontal entre A y A' del círculo primeramente trazado. El eje menor de la elipse es el lado del exágono: trazando rectas entre los vértices k y d, y entre h y e, éstas cortan al eje vertical Z_g en C y C' que son los extremos del eje menor de la elipse.

Con esta contrucción gráfica realizada con regla y compás, cuya unidad básica es L lado o vano del habitáculo a cubrir, se tienen los dos parámetros que definen la elipse: el semieje mayor $A_{sec} = O_{sec}A$, de dimensión igual al lado, y el semieje menor $B_{sec} = O_{sec}C$, igual a la mitad del lado. El centro de dicha elipse estará en O_{sec} .

Para trazar una elipse con esos semiejes es necesario localizar los focos, que, como es conocido, basta con tomar con el compás la medida del radio del círculo primitivo, el semieje $O_{sec}A$, y con centro en C marcar su intersección con la recta AA' —eje mayor—, resultando los puntos F, focos de la elipse (semidistancia focal $C_{sec} = O_{sec}F$). Señalados los focos y mediante el método del jardinero (fig. 4.2), formando un triángulo con una guita que rodee los dos focos y con un marcador en C, manteniendo tensa la cuerda y deslizando el marcador a ambos lados del eje vertical, puede dibujarse la elipse buscada.

Este procedimiento del método del jardinero para la obtención de los focos puede eludirse. La localización de los focos necesarios para el trazado de la elipse ya quedó resuelta en la construcción del exágono de la figura 4.7 trazada. El par de lados opuestos del exágono y paralelos a la dirección del eje vertical Z_g , lados kh y de, cortan al diámetro del círculo primitivo AA' en sendos puntos F que son precisamente los de los focos buscados.

La elipse así trazada resulta con unos parámetros que están relacionados con el vano del abovedamiento en proporción *dupla*. Contenida en un plano vertical, su centro se sitúa en mitad del vano —punto intersección de las diagonales—, y a una distancia de 1/2 de L entre dos muros opuestos; en la elipse, el semieje mayor es: $A_{sec} = O_{sec}A = L$ y el semieje menor: $B_{sec} = O_{sec}C = 1/2$ de L. Esta elipse queda inscrita en un rectángulo de lados: 2L y L (proporción *dupla*), o lo que es igual, en un rectángulo formado por la duplicación —por simetría— de un cuadrado de lado L, el mismo que el de la planta del abovedamiento.

El arco representado en la figura 4.7 por ACA' corresponde a la línea directriz de la generación de la forma, que es la trayectoria que sigue la generatriz —que se verá más abajo— que en su desarrollo entre los muros y siguiendo el camino de esa directriz forma la superficie de la bóveda: la fábrica entre cada dos muros opuestos señaladas como RCR' ; en la que C corresponde al punto más elevado: la clave de la bóveda y los puntos R y R' el arranque de la fábrica en mitad de los muros.

Estos puntos de intersección de la directriz ACA' con los muros M , los puntos R y R' , pueden obtenerse gráficamente, con solo la regla y el compás, mediante distintas construcciones:

a) Primer método. Figura 4.8. A partir del exágono inscrito en el círculo de radio igual al vano, realizado anteriormente, y centrado en el origen general O_{sec} :

- con la abertura del compás igual al lado o vano —que coincide con el lado del exágono— se trazan círculos desde los vértices h , con radio hk , y desde e , con radio ed , del exágono inicial.
- cada uno de estos círculos corta a las líneas verticales M , que representan a los muros, en sendos puntos R y R' .

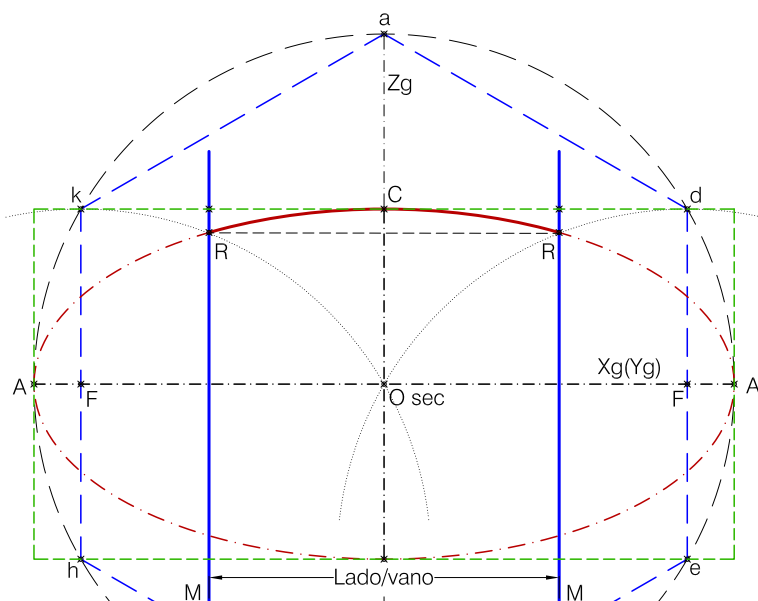


Figura 4.8: Primer método de obtención de los puntos R y R'
Intersección de la directriz ACA' con los muros M

La fábrica por la sección entre dos muros opuestos se desarrolla por el arco elíptico RCR' de la curva directriz ACA' .

b) Segundo método. Figura 4.9.

- el eje horizontal del sistema general $X_g (Y_g)$ corta a los muros verticales M en los puntos s y s'.
- con centro en el origen O_{sec} se traza un círculo con radio igual a $O_{sec} s (s')$ (apertura del compás igual a la mitar del lado: $L/2$).
- se inscribe en este círculo un exágono —Libro IV, prop. 15— con dos vértices diametralmente opuestos en la horizontal (puntos s y s' sobre el eje $X_g (Y_g)$).
- prolongando la recta de uno de los lados horizontales del exágono —el superior en la figura— esta recta corta a los muros M en R y R'.

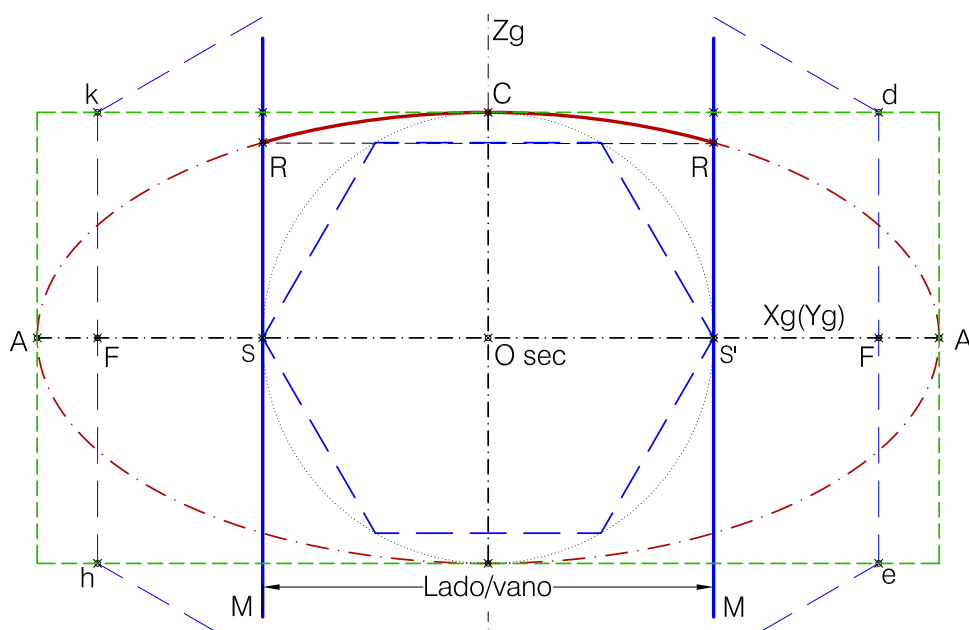


Figura 4.9: Segundo método de obtención de los puntos R y R'
Intersección de la directriz ACA' con los muros M

La fábrica por la sección entre dos muros opuestos se desarrolla por el arco elíptico RCR' de la curva directriz ACA'.

c) Tercer método. Figura 4.10.

- el eje horizontal $X_g (Y_g)$ corta a los muros M en s y s', y a los lados del exágono primitivo en F y F', que resultaron los focos de la elipse de las secciones entre muros.
- con centro en el origen O_{sec} se traza un círculo con radio igual a $O_{sec} F$ (semidistancia focal de la elipse).
- este círculo corta al eje vertical Z_g en el punto p.

- trazando rectas desde p por s y por s', éstas cortan al círculo anterior en los puntos señalados como r y u.
- trazando rectas entre los pares de puntos p y r, r y u, y entre u y p, se tiene la figura de un triángulo equilátero inscrito en el círculo.
- el lado horizontal ru del triángulo dibujado —el opuesto al vértice P— corta a los muros M en los puntos R y R'.

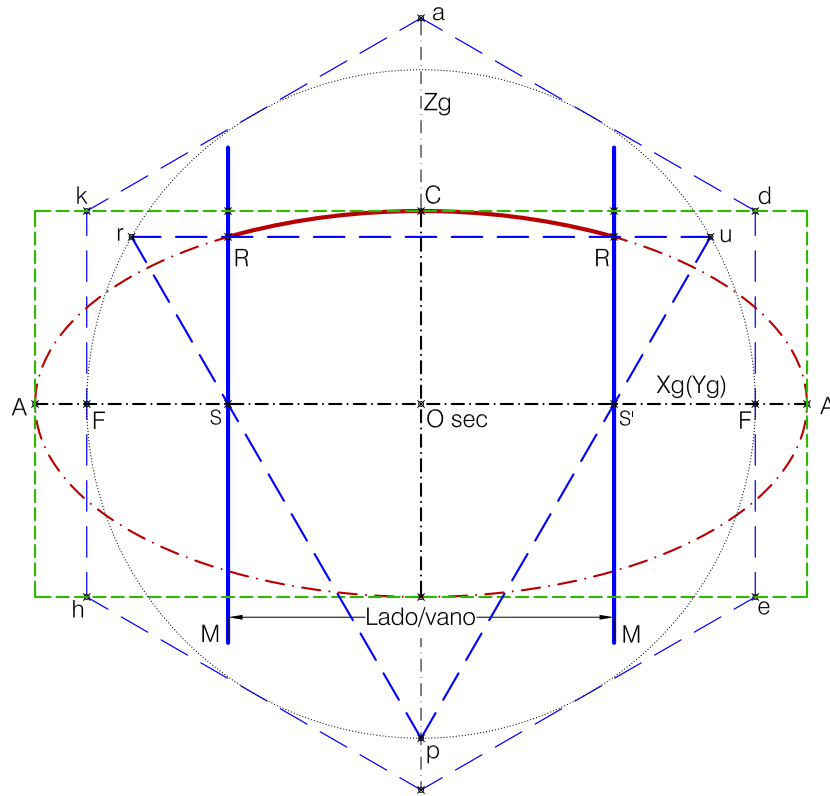


Figura 4.10: Tercer método de obtención de los puntos R y R'
Intersección de la directriz ACA' con los muros M

La fábrica por la sección entre dos muros opuestos se desarrolla por el arco elíptico RCR' de la curva directriz ACA'.

(El triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio O_{sec} F es el formado por las rectas que unen, de manera consecutiva, los puntos: r, u y p; los dos triángulos equiláteros cuyos vértices forman un exágono inscrito en ese círculo son el anterior y otro simétrico de este, bien por giro alrededor de O_{sec} o bien por simetría respecto del eje horizontal X_g (Y_g); construcción derivada de *Elementos*, Libro IV, prop. 15, «Inscribir un hexágono equilátero y equiángulo en un círculo dado».)

Otro método que se puede utilizar para la obtención de los puntos R y R' es posible con la utilización parcial de la manera de inscribir un exágono en un círculo, con regla y compás, descrita en *Elementos* en el libro IV, prop. 15: «Inscribir un hexágono equilátero y equiángulo en un círculo dado» (utilizada más arriba en el trazado de la elipse por las secciones entre muros, figura 4.7). El exágono se forma al unir consecutivamente los vértices de dos triángulos equiláteros iguales inscritos en un mismo círculo; uno por simetría de otro respecto del giro de un triángulo por el centro del círculo que los circunscribe. El lado del exágono formado es igual al radio del círculo en el que está inscrito.

d) Cuarto método. Figura 4.11.

- se traza un círculo inscrito en el primitivo exágono $adeghk$; la abertura del compás será la semidistancia focal obtenida anteriormente $O_{sec} F$.
- el círculo trazado corta al eje vertical Z_g en los puntos p y g.
- con centro en g y con la misma abertura del compás, es decir $O_{sec} F$, se traza un arco, que corta al círculo inscrito anterior en r y en u.
- por r y u se traza una recta, que corta a los muros verticales M en R y R'.

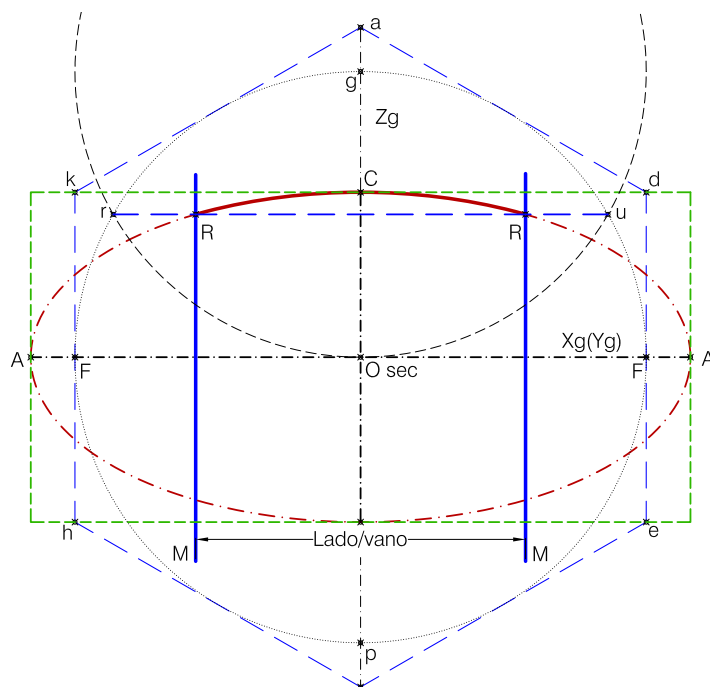


Figura 4.11: Cuarto método de obtención de los puntos R y R'.
Intersección de la directriz ACA' con los muros M

Con cualquiera de los procedimientos gráficos descritos se pueden obtener los puntos donde la directriz ACA' corta a los muros que sostienen el abovedamiento —entre cada dos muros enfrentados— que en las figuras anteriores están señalados como R y R' ; puntos que serán la clave de los arcos laterales —clave de las aristas en los muros—, y cuya diferencia de cota de éstos con el punto más elevado C —clave de la bóveda— constituye el retumbo de la Bóveda Extremeña.

4.5.2. Aristas en muro.

Con el mismo procedimiento que para las secciones entre muros y con las mismas proposiciones Euclidianas, se puede obtener, también con solo la regla y compás y un trozo de guita, la curva elíptica que represente la arista en muro.

Como se vió en la sección anterior, la clave del arco de la arista en el muro estará en los puntos de éste marcados como R en las figuras 4.7 a 4.11 (intersección de la elipse de la sección entre muros opuestos y por mitad con los muros M), y que corresponde al extremo superior del eje menor de la elipse ajustada.

A partir de la construcción del apartado anterior, se puede localizar y situar el centro de la elipse O_{mur} correspondiente a las aristas en los muros y los ejes del sistema de referencia particular en los muros $X_p Y_p$. Esto se puede realizar por varios procedimientos gráficos, con idéntico resultado, con solo la regla y el compás y tomando como unidad básica de medida el lado del espacio a abovedar.

a) Primer método. Figura 4.12:

- se traza una línea recta entre los puntos R y R' . En su punto medio, situado en la intersección de esta recta con el eje Y_g , estará la clave, punto b , del arco elíptico de la arista en el muro.
- el eje mayor de la elipse por las secciones entre muros AA' —coincidente con el eje del sistema general $X_g(Y_g)$ — corta a las líneas que representan a los muros M en los puntos S y S' .
- utilizando el exágono construido en la fig. 4.7, se trazan rectas desde estos puntos a vértices del exágono: desde S hasta d y desde S' hasta k .
- ambas rectas se cortan entre sí en un punto que está sobre el eje vertical Y_p .
- este punto intersección será el centro O_{mur} de la elipse de la arista en el muro.

- tomando con el compás la magnitud $O_{sec}O_{mur}$ se trazan sendos círculos con centro en los puntos de los muros señalados como S y S', que cortan a dichos muros en los puntos a y a'.
- o bien con la prop. 31, libro I «Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada», siendo el punto O_{mur} y la recta dada AA'.
- trazando una línea recta entre esos puntos, que necesariamente contiene a O_{mur} , se tiene el eje horizontal del sistema de referencia particular en los muros X_p .

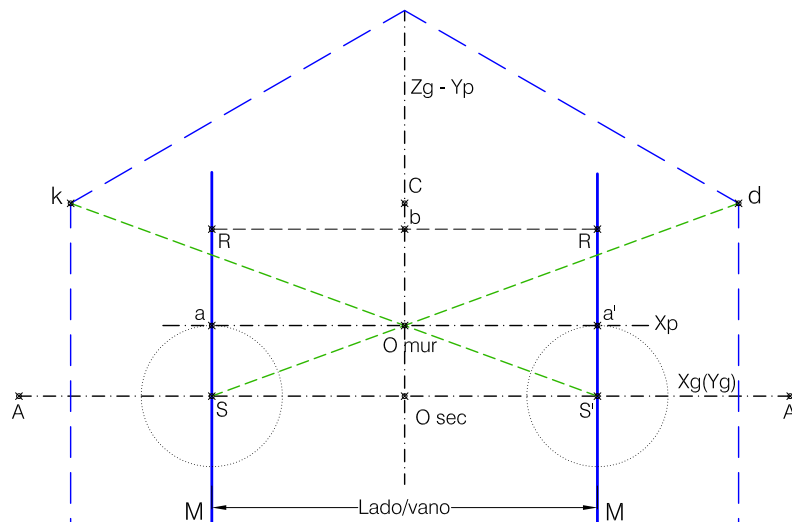


Figura 4.12: Primer método de posicionamiento del sistema de referencia particular $X_p Y_p$ de la elipse de la arista en muro respecto del sistema general $X_g (Y_g) Z_g$.

El eje vertical Y_p de este sistema particular será la recta perpendicular a X_p por O_{mur} , que resulta coincidente con el eje Y_g , anteriormente dibujado.

La elipse, con centro en O_{mur} , tendrá su eje mayor horizontal sobre X_p y su eje menor vertical sobre Y_p , y las magnitudes de sus semiejes serán: el mayor $a_{mur} = O_{mur} a$, y el menor $b_{mur} = O_{mur} b$.

b) Segundo método. Figura 4.13:

- se traza una línea recta finita entre los puntos R y R'. En su punto medio, situado en la intersección de esta recta con el eje Y_g , estará la clave b del arco de la arista en el muro.
- por los puntos F —focos de la elipse de las secciones entre muros situados en el eje general X_g — se trazan sendas rectas al punto b.
- estas rectas Fb y F'b cortan a los muros M en los puntos a y a'.

- la línea recta trazada entre a y a' , que resulta horizontal, corresponderá al eje del sistema particular X_p .
- esta recta trazada por aa' corta al eje vertical general Y_g en el punto de éste O_{mur} .

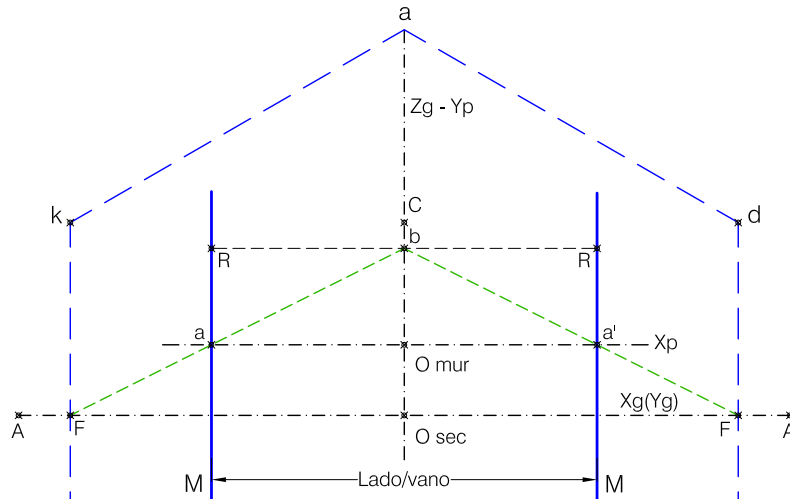


Figura 4.13: Segundo método de posicionamiento del sistema de referencia particular $X_p Y_p$ de la elipse de la arista en muro respecto del sistema general $X_g(Y_g) Z_g$.

La posición del eje particular X_p de la arista en muro se puede obtener por otro procedimiento gráfico Euclidiano. Las líneas rectas Fb y $F'b$ se pueden trazar de otra manera: por I, prop. 31 «por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada». Por el punto b se trazan rectas paralelas a los lados del exágono, una al lado ak y otra al lado ad ; éstas, que cortan al eje general $X_g(Y_g)$ en F y F' —focos de la elipse de la sección entre muros—, cortan también a los muros M en los puntos a y a' . La recta trazada por éstos puntos será el eje X_p de la arista en el muro. Con el mismo procedimiento de construcción —Libro I, prop. 31— las rectas Fb y $F'b$ se pueden obtener como líneas paralelas a las rectas por AC y $A'C$ trazadas por los puntos F y F' .

En las dos construcciones de este segundo método, la altura de la clave b de la arista en el muro: $O_{sec} b$ es la mitad de la semidistancia focal $O_{sec} F$ de la curva directriz.

La línea recta perpendicular a X_p por O_{mur} , será el eje particular Y_p , vertical y eje de simetría coincidente con Y_g . La elipse, con centro en O_{mur} , tendrá su eje mayor horizontal sobre X_p y su eje menor vertical sobre Y_p , y las magnitudes de sus semiejes serán: el mayor $a_{mur} = O_{mur} a$, y el menor $b_{mur} = O_{mur} b$.

c) Tercer método. Figura 4.14:

- se traza una línea recta finita entre los puntos R y R'. En su punto medio, situado en la intersección de esta recta con el eje Y_g , estará la clave b del arco de la arista en el muro.
- el eje general X_g corta a los muros M en los puntos S y S' y sobre este mismo eje están localizados los focos F de la elipse directriz de las secciones entre muros.
- por F y por S se trazan círculos iguales —de radio cualesquiera—; uniendo con una recta las intersecciones de ambos círculos ésta corta al eje X_g en el punto T, punto medio entre S y F.
- tomando como abertura del compás la medida ST, se trazan círculos con centros en S y en S'.
- estos círculos cortan a los muros M en puntos marcados como a y a'.
- la línea recta trazada entre a y a' corresponderá al eje horizontal X_p del sistema particular establecido en cada muro.
- la recta trazada por a y a' corta al eje vertical general Y_g en el punto de éste O_{mur} , que corresponde al centro de la elipse de la arista en los muros.

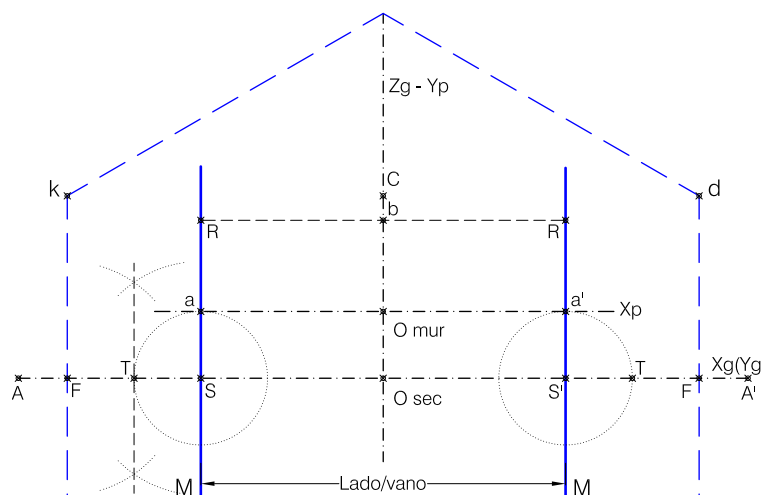


Figura 4.14: Tercer método de posicionamiento del sistema de referencia particular $X_p Y_p$ de la elipse de la arista en muro respecto del sistema general $X_g(Y_g) Z_g$.

La línea recta perpendicular a X_p por O_{mur} , será el eje particular Y_p , vertical y eje de simetría coincidente con Z_g .

La elipse, con centro en O_{mur} , tendrá su eje mayor horizontal sobre X_p y su eje menor vertical sobre Y_p , y las magnitudes de sus semiejes serán: el mayor $a_{mur} = O_{mur} a$, y el menor $b_{mur} = O_{mur} b$.

d) Cuarto método. Figura 4.15:

- se traza una línea recta entre los puntos R y R'. En su punto medio, situado en la intersección de esta recta con el eje Y_g , estará la clave b del arco de la arista en el muro.
- el eje general X_g corta a los muros M en los puntos S y S'.
- los lados verticales del exágono primitivo, lados kh y de, cortan al eje del sistema general X_g en los puntos F, focos de la elipse por las secciones entre muros.
- la cuerda vertical de esta elipse trazada por sus focos —coincidentes con los lados del exágono— es el *latus rectum* de dicha elipse.¹¹⁶
- los lados del exágono cortan a la elipse de las secciones entre muros en L y L', que son justamente el extremo de cada *latus rectum* de dicha elipse.
- trazando rectas entre los puntos S y L' y entre S' y L, éstas cortan a los muros M en los puntos a y a'.
- la línea recta trazada entre a y a', que resulta horizontal, corresponderá al eje del sistema particular X_p de la arista en el muro.
- la recta trazada por aa' corta al eje vertical general Y_g en el punto de éste O_{mur} , centro de la elipse de la arista en el muro.

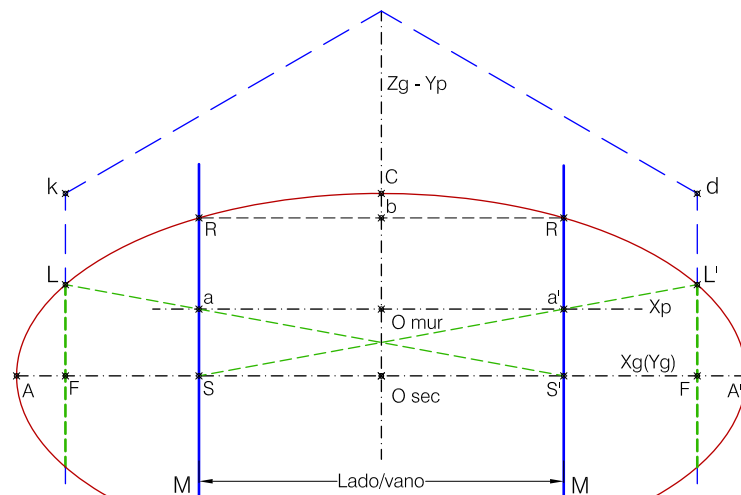


Figura 4.15: Cuarto método de posicionamiento del sistema de referencia particular $X_p Y_p$ de la elipse de la arista en muro respecto del sistema general $X_g(Y_g) Z_g$.

La línea recta perpendicular al eje X_p por el punto O_{mur} o por O_{sec} , será el eje particular Y_p , vertical y eje de simetría de la arista en el muro —coincidente con Y_g —.

La localización gráfica del sistema de referencia particular $X_p(Y_p)$ y Z_p en el que se localiza la elipse que describe las aristas en los muros, puede obtenerse, también, mediante construcciones con solo «regla y compás» basadas en las propiedades que se derivan de dividir un segmento en dos partes y que resulte entre el segmento y las partes divididas una proporción geométrica continua que Euclides de Alejandría (c. 300 a.C.) en su tratado *Elementos -de geometría-* denominó: «media y extrema razón».

A partir de un cuadrado se puede construir un rectángulo cuyos lados estén en dicha proporción: *media y extrema razón*.¹¹⁷ Al dividir este cuadrado en dos rectángulos iguales y al abatir la diagonal de uno de ellos sobre un lado del cuadrado se obtiene el lado mayor de un rectángulo: el *auron*.¹¹⁸ La construcción gráfica de este rectángulo áureo puede realizarse fácilmente con solo la regla y el compás. El cuadrado ABCD de la figura 4.16 puede dividirse en dos figuras idénticas: basta con trazar una línea recta entre los puntos medios de dos lados opuestos y el cuadrado queda dividido en dos rectángulos iguales. Con el compás, con centro en T —vértice común de los dos rectángulos y punto medio de los lados del cuadrado original— y abertura la diagonal TB de uno de los rectángulos, se traza un arco de círculo y prolongando el lado DC hasta el arco trazado se obtiene en la intersección el punto E; el segmento DE constituirá el el lado mayor del rectángulo áureo y el original AD el lado menor. Cerrando el rectángulo con la misma construcción sobre el lado AB del cuadrado original se obtiene el punto F. La figura AFED así construida resulta un rectángulo áureo en el que sus lados mayor y menor están en la razón euclidiana de *media y extrema razón*, o simplemente en razón áurea.¹¹⁹

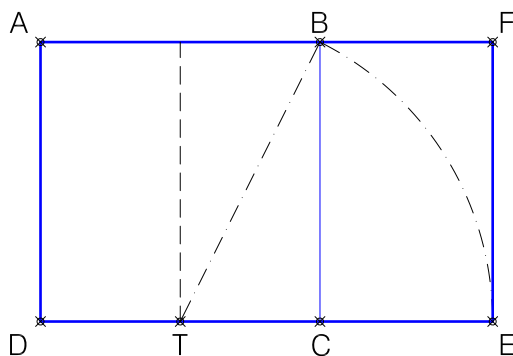


Figura 4.16: Construcción de un rectángulo áureo (*auron*).

Esta descripción geométrica euclidiana —en la que las proposiciones, lo que se busca probar, se muestran como cuestiones púramente geométricas que mediante un proceso demostrativo conducen a la conclusión— se pueden expresar algebraicamente mediante la ecuación de una proporción geométrica continua.¹²⁰

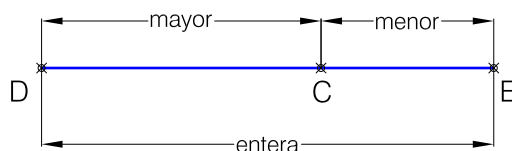


Figura 4.17: Segmento de magnitud DE dividido por C en *media y extrema razón*.

Dadas dos magnitudes homogéneas DC y CE —cantidades dadas por números que representan las longitudes o tamaños de los segmentos y ellos tanto conmensurables (número racional positivo) como inconmensurables (número irracional positivo)—, y entre ellas DC mayor que CE, representadas en la figura 4.17, denominaremos en adelante a la magnitud total DE —suma de DC y CE— como la parte «*entera*», a la magnitud DC como la parte «*mayor*» y a la CE como la «*menor*»; las dos magnitudes DC y CE están en una proporción geométrica continua si entre ellas se verifica la igualdad de razones:

$$\frac{DC + CE}{DC} = \frac{DC}{CE} ; \quad \text{o lo que es igual:} \quad \frac{\text{entera}(DE)}{\text{mayor}(DC)} = \frac{\text{mayor}(DC)}{\text{menor}(CE)}$$

La partición del segmento o magnitud DE en dos partes que verifican la igualdad anterior se conoce como: «*media y extrema razón*» (Los segmentos DC y CE en que queda dividido la parte *entera* DE son de tamaño tal que el área del rectángulo formado por la parte *entera* y la *menor* es igual al área del cuadrado de lado la parte *mayor*).

Esta proporción entre razones se puede calcular matemáticamente y resulta el número inconmensurable: 1,618... (número *áureo*), proporción inconmensurable o dinámica¹²¹ a la que tradicionalmente se la denota con la letra griega Φ .¹²² (El número *áureo* se encuentra en la estructura del pentágono: representa la razón entre la diagonal y el lado de un pentágono regular cualquiera). Las proporciones en *media y extrema razón* obtenidas sobre objetos o magnitudes, realizadas de forma sencilla con regla y compás, fueron recogidas¹²³ y expuestas en el s. III a.C. por Euclides en *Elementos*, libro VI, prop. 30.

Utilizando esta proposición Euclidiana se puede obtener la posición del centro del sistema de referencia particular de la elipse que define la arista en el muro, y a partir de éste los ejes mayor y menor de dicha arista.

e) Quinto método. Se basa en la construcción de un rectángulo áureo a partir de un cuadrado dado. En la figura 4.18:

- En la figura se toma el cuadrado de vértices C, S, S' y Osec (cuadrado de lado igual a L/2).
- en el lado horizontal Osec S' se localiza el punto medio X de ese segmento (por I, prop. 10).
- con centro en X y abertura del compás la línea finita XS se traza un círculo desde S hasta cortar al eje general Xg(Yg): punto k'.
- por k' se traza una paralela al eje vertical de simetría (I, prop. 31).
- esta recta corta al rectángulo en que se inscribe la elipse de las secciones entre muros opuestos en el punto k.
- el rectángulo definido entre C, k, k' y Osec es un rectángulo áureo. Sus lados mayor C k y menor C Osec, sus dimensiones, están en razón áurea.
- la diagonal de ese rectángulo áureo, la línea de C a k', corta a la recta vertical que representa al muro o rincón en el punto señalado como a'.
- repitiendo la construcción al otro lado del eje vertical de simetría Y_p se obtiene el punto a en el muro o rincón opuesto.
- la recta trazada por a y a' será el eje de abscisas del sistema particular X_p ; y la recta finita por a y a' corresponderá al eje mayor de la elipse de la arista en cada uno de los muros.
- la intersección de la recta por aa' con el eje vertical Y_p corresponde al centro Omur de la elipse de la arista en el muro.

En el rectángulo áureo construido de vértices C, k, k' y Osec, la razón entre sus lados es:

$$\frac{\text{mayor}(\text{Osec } k')}{\text{menor}(\text{Osec } C)} = \phi ;$$

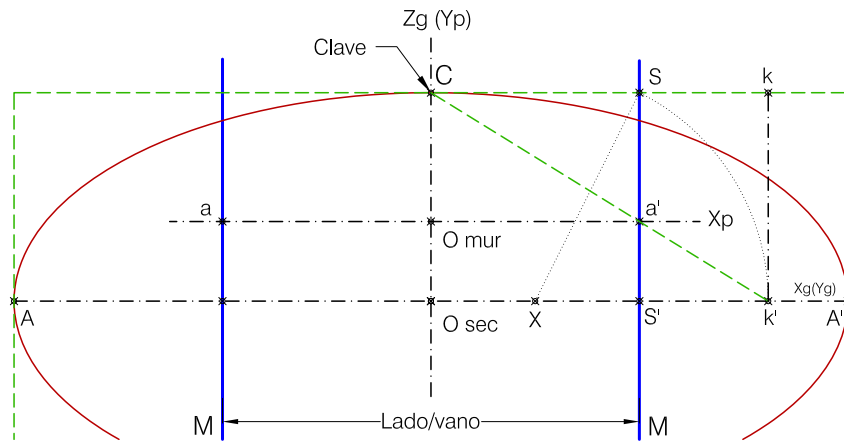


Figura 4.18: Quinto método de posicionamiento del sistema de referencia particular $X_p Y_p$ de la elipse de la arista en muro respecto del sistema general $X_g(Y_g) Z_g$.

y en la diagonal $C k'$ que corta al muro en a' , queda dividida por a' en *media y extrema razón* en las partes:

$$\textit{entera} = C k'$$

$$\textit{mayor} = C a'$$

$$\textit{menor} = a' k'$$

que verifican la proporción euclidiana entre razones:

$$\frac{\textit{entera}(C k')}{\textit{mayor}(C a')} = \frac{\textit{mayor}(C a')}{\textit{menorr}(a' k')}$$

Otro método, el sexto que proponemos de trazado gráfico con regla y compás para situar el origen O_{mur} de la elipse de las aristas en los muros, consiste en dividir el segmento —la recta finita— entre el origen del sistema general de referencia O_{sec} y la clave C de la bóveda (semieje menor de la elipse de las secciones entre muros) en dos partes, de tal manera que dicho segmento quede dividido en *media y extrema razón* y el punto que verifica esta división será el centro O_{mur} de la arista en el muro buscado.

f) sexto método. En la figura 4.19:

- con centro en O_{sec} —origen del sistema de referencia general— y abertura del compás la mitad del segmento sobre la vertical entre O_{sec} y C se traza un círculo.
- este círculo corta al eje horizontal $X_g(Y_g)$ en dos puntos.

- tomando uno cualquiera de los puntos de corte, el punto K de la figura, se traza una recta finita entre los puntos K y C.
- con el compás, con centro en K y abertura KO_{sec} se traza un arco de círculo hasta que corte a la línea KC, trazada anteriormente, en el punto señalado como S.
- con centro en C y abertura del compás el segmento CS se dibujó un arco que corte al eje vertical general Z_g en un punto.
- ese punto sobre Z_g corresponde a la posición del centro O_{mur} —centro del sistema de referencia particular $X_p Y_p$ — de la elipse correspondiente a la arista en los muros.

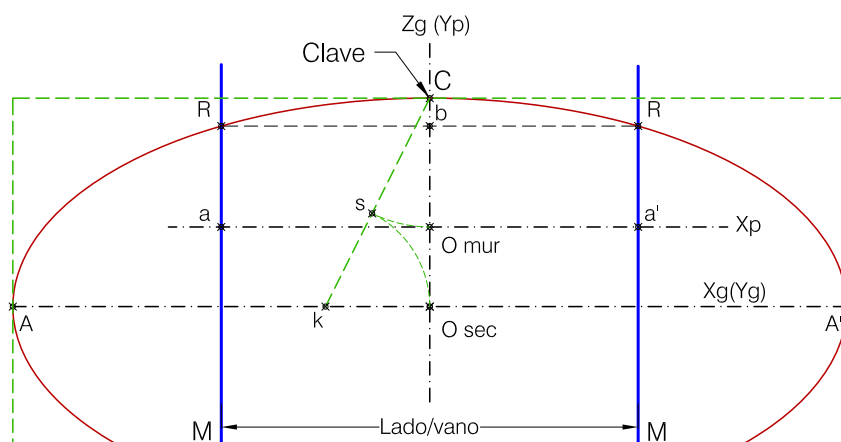


Figura 4.19: Sexto método de posicionamiento del sistema de referencia particular $X_p Y_p$ de la elipse de la arista en muro respecto del sistema general $X_g(Y_g) Z_g$.

Y la construcción gráfica realizada, la división del segmento CO_{sec} , se puede expresar en términos euclidianos como:

$$entera(CO_{sec}) = mayor(CO_{mur}) + menor(O_{mur}O_{sec});$$

siendo las partes:

$$entera(CO_{sec}) = B_{dir} = \frac{L}{2}$$

$$mayor(CO_{mur}) = \frac{L}{2\Phi}$$

$$menor(O_{mur}O_{sec}) = \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{\Phi}\right)$$

Siendo esta parte *menor* la correspondiente a la altura HO_{mur} —distancia vertical medida por el muro desde el origen del sistema de referencia general al centro de la elipse de la arista en el muro— obtenida en el apartado 4.4.¹²⁴

g) séptimo método. En la figura 4.20.

A partir del rectángulo *dupla*: PTNQ, en el que se inscribe la elipse *dupla* de las secciones entre muros (apartado anterior 4.5.1):

- se divide uno de los lados menores TN del rectángulo en *media y extrema razón* según Libro VI, prop. 30 de *Elementos*.
- en la división del lado TN por el punto señalado en la figura como I, la parte *entera* es TN; la parte *mayor* TI y la parte *menor* IN.

Siendo cada una de las partes:

$$\textit{entera}(TN) = L \quad (\text{lado del abovedamiento});$$

$$\textit{mayor}(TI) = \frac{L}{\Phi};$$

$$\textit{menor}(IN) = L\left(1 - \frac{1}{\Phi}\right);$$

En esta construcción para la obtención del centro Omur y el eje horizontal sobre Xp de la arista en el muro se forma un triángulo rectángulo con catetos en razón áurea; en el triángulo de vértices CTI se tiene que:

$$\textit{mayor} = C T ;$$

$$\textit{menor} = T I ;$$

y se verifica la razón áurea entre las partes:

$$\frac{\textit{mayor}(C T)}{\textit{menor}(T I)} = \phi$$

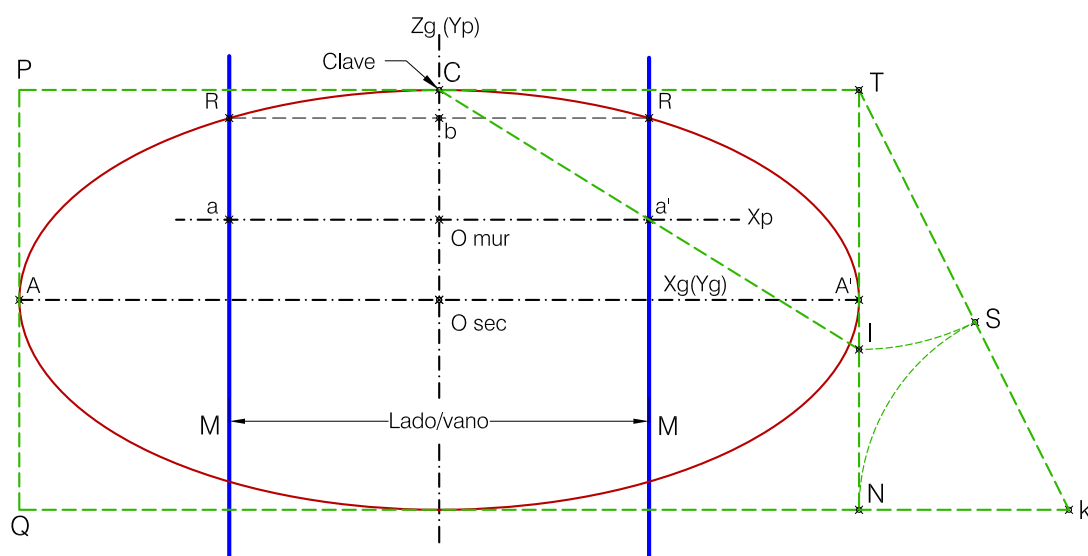


Figura 4.20: Séptimo método de posicionamiento del sistema de referencia particular $X_p Y_p$ de la elipse de la arista en muro respecto del sistema general $X_g(Y_g) Z_g$.

El octavo método que se propone para situar el sistema de referencia particular $X_p Y_p$, su origen y por tanto el de la elipse en los muros, respecto del sistema general, se basa en la propiedad del pentágono equilátero inscrito en un círculo, de que dos de las cuerdas trazadas entre los extremos —vértices— de tres lados consecutivos, dos «cuerdas pentagonales»,¹²⁵ al cortarse entre sí, cada cuerda queda dividida en la proporción *media y extrema razón* de Euclides.

Además de la construcción euclidiana sobre la división de una recta finita —la DE, resuelta en la figura 4.16 a partir de un cuadrado— en que las partes estén en *media y extrema razón*, Luca Pacioli, en *La Divina Proporción*, muestra un método para la obtención de esta proporción a partir de otra figura: el pentágono regular o equilátero y equiángulo. En el capítulo XVIII, en el que describe *De su noveno efecto, el más excelso de todos*, expone: «Si en el círculo se forma el pentágono equilátero y se trazan dos líneas rectas opuestas a dos de sus ángulos próximos, desde los extremos de sus lados, éstas, necesariamente aquellas se dividirán entre sí según nuestra proporción, y cada una de sus partes mayores será siempre el lado de dicho pentágono», dicho de otro modo: las diagonales de un pentágono se cortan en *media y extrema razón*.

La figura del pentágono tiene la propiedad geométrica de que si se prolongan sus lados alternativamente hasta que se corten entre sí, se forma una estrella de cinco puntas conocida como: Pentagrama ¹²⁶; y que al trazar rectas entre las puntas consecutivamente se obtiene otro pentágono regular. El Pentagrama, o el pentágono, se construye en base a un triángulo por simetría al girar alrededor del centro del círculo en el que se inscribe; es un triángulo isósceles en el que los dos ángulos iguales tienen una amplitud doble que el ángulo desigual y el lado menor de ese triángulo tiene una magnitud que corresponde a la parte *mayor* resultante de dividir cualquiera de los lados iguales en la proporción de *media y extrema razón*: es el llamado «triángulo áureo», descrito por Euclides en el libro IV, proposición 11.

La distancia vertical entre el punto de intersección de dos cuerdas trazadas entre lados contiguos y el centro del círculo en el que se inscribe el pentágono corresponde a la posición del centro O_{mur} de la elipse en los muros respecto del centro O_{sec} del sistema general de referencia.

h) Octavo método. Figura 4.21:

- con centro O_{sec} y abertura del compás la mitad del lado o vano, se traza un círculo.
- en este círculo se inscribe un pentágono —Libro IV, prop. 11, «Inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en un círculo dado»— de tal manera que un vértice cualquiera, el p en la figura, quede situado sobre el eje vertical Z_g .
- mediante rectas, se trazan cuerdas del círculo entre vértices de los dos pares de lados opuestos al vértice p; las rectas entre los vértices son: hd y ke.
- ambas cuerdas se cortan entre sí, quedando dividida cada cuerda en *media y extrema razón*.
- este punto de intersección, su posición respecto del plano horizontal $X_g Y_g$, corresponde al centro O_{mur} de la elipse de la arista en los muros.
- la recta trazada por O_{mur} paralela al eje horizontal $X_g(Y_g)$ —Libro I, prop. 31, «Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada»—, será el eje particular X_p , y la recta por O_{mur} coincidente con Z_g será el eje particular Y_p .

La elipse en los muros, con centro en O_{mur} , obtenido por este octavo método tendrá, al igual que en los anteriores, su eje mayor horizontal sobre X_p —paralelo al general $X_g(Y_g)$ — y su eje menor vertical sobre Y_p —coincidente con Z_g —, y las magnitudes de sus semiejes serán: el mayor $a_{mur} = O_{mur} a (= L/2)$, y el menor $b_{mur} = O_{mur} b (= L/4)$.¹²⁷

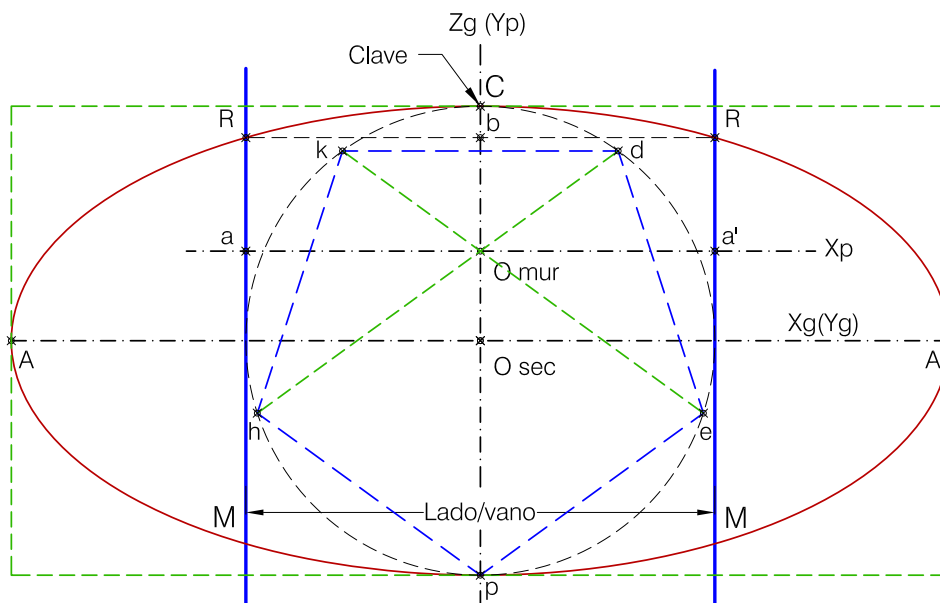


Figura 4.21: Octavo método de posicionamiento del sistema de referencia particular $X_p Y_p$ de la elipse de la arista en muro respecto del sistema general $X_g(Y_g) Z_g$.

Mediante las resoluciones gráficas expuestas —que probablemente no son las únicas posibles— para obtener la posición de los ejes de la elipse en los muros respecto de la elipse directriz por las secciones entre muros, se puede trazar la forma de las aristas en los muros, una elipse, a partir de los semiejes que son función del lado L del recinto cuadrado a abovedar: $a_{mur} = L/2$, y $b_{mur} = L/4$ (proporción *dupla*).

Para trazar la elipse con centro en O_{mur} correspondiente a estos semiejes bastará localizar sus focos, que como se vió se pueden obtener de dos maneras (figura 4.22): bien tomando con el compás la magnitud $O_{mur} a$ (semieje mayor a_{mur}) como radio de un círculo que con centro en b corta al eje horizontal X_p en los dos puntos marcados como f (método del jardinero), o bien, como también se dijo más arriba, trazando un exágono inscrito en un círculo de radio $O_{mur} a$, con dos lados paralelos al eje vertical, y estos lados cortan al eje horizontal aa' en los puntos f . Con los dos focos fijados y el punto b (extremo del semieje menor b_{mur}) resulta fácil trazar un arco de elipse con el método del jardinero.

El arco aba' de la figura 4.22, corresponde a la arista en muro. La elipse trazada por esos puntos resulta con unos parámetros que son proporcionales al lado o vano del abovedamiento. El centro se sitúa en mitad del muro, entre dos rincones conse-

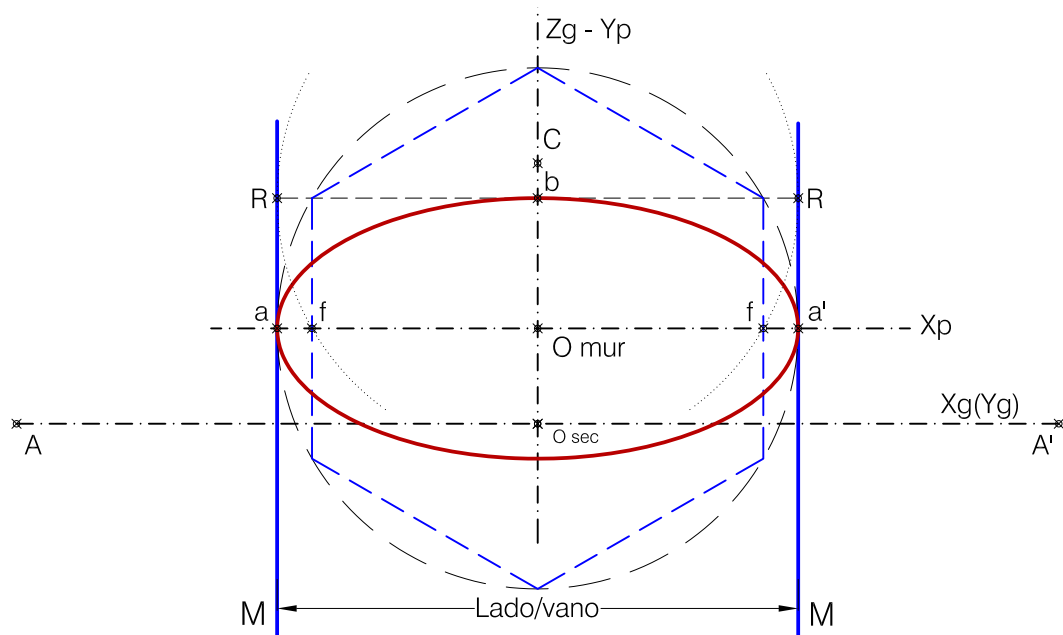


Figura 4.22: Trazado de la elipse de la arista en muro. Localización de los focos

cutivos y a una distancia de éstos de: $1/2$ de L ; el semieje mayor es: $a_{mur} = 1/2$ de L ; el semieje menor es: $b_{mur} = 1/4$ de L . Esta elipse queda inscrita en un rectángulo de lados: L y $1/2$ de L (proporción *duple* del cuadrado de lado: $1/2$ de L).

Formación de la arista en el muro:

La arista en el muro es el resultado de la intersección de una superficie —la generada por la generatriz, que se desplaza por su punto medio perpendicularmente a la directriz— y un plano vertical, el plano que representa a los muros M . La superficie está formada por el desarrollo de una curva elíptica situada en el plano horizontal $X_g Y_g$, con centro y eje menor b_{gen} sobre el eje general $X_g(Y_g)$ y con el extremo de ese eje menor b_{gen} coincidente y tangente con el extremo del eje mayor de la directriz $A'(A)$ (figura 4.23). La generatriz y la directriz están contenidas en planos perpendiculares entre sí, con O_{dir} como punto común. La curva generatriz, en su desarrollo, se mantiene perpendicular al plano vertical que contiene a la directriz; en todos los puntos de la directriz —desde A , por C y hasta A' —, el extremo del eje b_{gen} se mantiene en ella, y este eje b_{gen} —la recta que lo contiene— está orientado hacia el centro de curvatura de la directriz en esos puntos comunes (perpendicular a la tangente de la directriz por esos puntos).

El centro O_{gen} de la generatriz, en su camino por la trayectoria marcada por la directriz, se situará en el plano vertical de los muros —puntos señalados como $a(a')$ en los muros M de la figura 4.23— cuando el extremo b_{gen} alcance el punto $m(m')$ de la directriz. Este punto $m(m')$ de la directriz se puede localizar, con solo la regla y el compás, por varios procedimientos gráficos:

a) Trazando un círculo con centro en O_{dir} y como abertura del compás la magnitud $O_{dir} k'$ ($O_{dir} d'$), puntos estos, el k' y el d' , anteriormente obtenidos por la intersección del rectángulo que inscribe a la elipse directriz con las líneas verticales M de los muros. Este círculo cortará a la directriz en $m(m')$.

b) También, al trazar un círculo con centro en los puntos F —focos de la directriz— con radio igual a la mitad del lado L, es decir, con radio Fk o Fd —magnitud del semieje menor de la directriz—, este círculo cortará a la directriz y al círculo anteriormente trazado en los puntos m y m' .

Esta posición del plano que contiene a la curva generatriz —cuando su centro O_{gen} en su recorrido alcanza el punto $a(a')$ del muro— se verifica cuando la recta que contiene a su eje menor b_{gen} corta al eje general $Xg(Yg)$ en un punto $t(t')$; trazando rectas por estos puntos t y t' , y por los señalados en los muros como a y a' —extremos del eje mayor de la arista en el muro—, estas rectas cortan a la curva directriz en m y m' . Estos puntos t y t' se pueden localizar gráficamente, con solo la ayuda de la regla y el compás, por varios métodos (figura 4.23):

a) el punto $t(t')$ dista de O_{dir} lo mismo que la clave de la arista en el muro b de ese centro O_{dir} (magnitud que coincide con la mitad de la semidistancia focal de la directriz C_{dir} , es decir, que $O_{dir}b$ es igual a $1/2$ de $O_{dir}F$) y trazando rectas desde $t(t')$ por $a(a')$ cortarán a la directriz en m y m' .

b) a partir del exágono primeramente representado para el trazado de la directriz, figura 4.7, al trazar desde sus vértices denotados como h y e sendas rectas hasta la clave C de la bóveda, dichas rectas cortan al eje $X_g(Y_g)$ en los puntos t y t' (estas rectas se pueden trazar con idéntico resultado desde los vértices k y d del exágono al punto C' situado sobre el eje Z_g).

c) los puntos $t(t')$ también resultan de la intersección de los lados del exágono utilizado para hallar los focos de la elipse en los muros, figura 4.22 con el eje general $X_g(Y_g)$; y se puede concluir que la posición de $t(t')$ respecto de O_{dir} es igual a la semidistancia focal c_{mur} de la elipse de la arista en el muro.

d) y también, a partir de esta última, la posición de $t(t')$ respecto de O_{dir} es igual a la semidistancia focal c_{mur} de la elipse de la arista en el muro.

La curva generatriz, en su desarrollo, conforma la superficie de la Bóveda Extremeña entre dos muros opuestos; esta superficie al ser cortada por los muros —planos verticales— resulta en ellos una arista marcada hacia el exterior: una curva elíptica de semiejes $a_{mur} = 1/2$ de L , y $b_{mur} = 1/4$ de L . Dicha generatriz, es una semielipse en el plano general $X_g Y_g$ —plano horizontal—, tangente en su punto medio a la curva directriz y perpendicular a ésta, con semiejes $a_{gen} = 1/2$ de L , y $b_{gen} = 5/21$ de L (fracción que puede tomarse como $b_{gen} = 1/4$ de L).¹²⁸

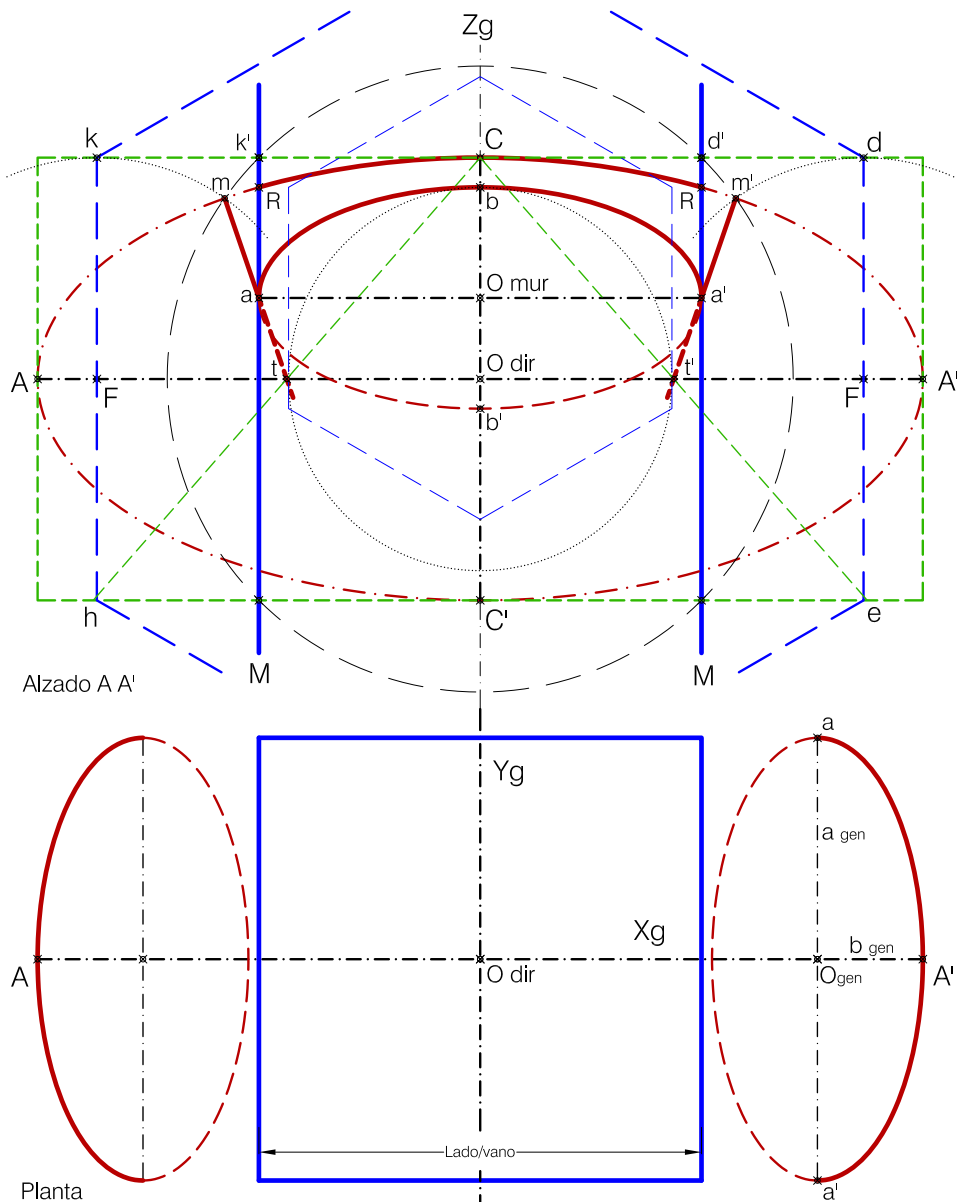


Figura 4.23: Elipse generatriz. Situación en planta y posición en su trayectoria a través de la directriz para que la intersección de la superficie generada con los muros resulte la arista en muros.

4.5.3. Resolución gráfica de una elipse *dupla*.

Como es sabido la elipse pertenece al grupo de las figuras geométricas planas, denominadas cónicas, que resultan de la intersección de un plano con la superficie de un cono circular recto. El cono recto resulta de la superficie generada por la hipotenusa de un triángulo rectángulo (línea generatriz) que gira alrededor de uno de los catetos (directriz o eje de revolución). La elipse se produce cuando el plano forma con el eje de simetría o revolución del cono un ángulo menor que el formado por la generatriz de dicho cono con su eje, resultando una curva cerrada.¹²⁹

Al trazar un cono circular recto con vértice V, figura 4.24, cuya generatriz (VC o VD) esté inclinada del eje vertical por V un determinado ángulo de tal manera que cualquier sección perpendicular a ese eje vertical produzca una circunferencia cuyo diámetro sea igual a la distancia de esa sección al vértice V, es decir, que el diámetro DC sea igual a la altura VZ, se forma un cono recto que, en la sección representada en la figura, queda inscrito en un cuadrado, el representado por ABCD.

Esta forma, el cuadrado, solo o por duplicación, es el módulo¹³⁰ o figura geométrica básica que resultó en la construcción de las figuras —directriz y generatriz— que constituyen la forma de la Bóveda Extremeña.

Cualquier plano inclinado sobre el eje vertical por V que corte al cono en dos rectas de su contorno —dos generatrices— diametralmente opuestas formará en su intersección una elipse, pero solo existe un plano con una determinada inclinación sobre ese eje vertical por V que produzca una elipse cuyos parámetros definidores, ejes mayor y menor, estén en relación de 2 a 1, proporción *dupla* que resultó de las curvas de las aristas en muros y secciones entre muros, resueltas más arriba, de la forma de la BEx.

Se puede obtener, con solo la regla y el compás, una elipse —con cualesquiera ejes mayor y menor— trazando un plano PP' que corte a un cono dado de vértice V y a dos generatrices VD y VC opuestas, por aplicación del teorema de Dandelin: los focos de una curva cónica, una elipse en nuestro caso, se encuentran en los puntos de tangencia de un plano secante al cono y a dos esferas inscritas en la superficie cónica.¹³¹

Esta disposición única del plano inclinado PP' respecto del cuadrado en que se inscribe la sección dibujada del cono en la figura 4.24, está relacionada geoméricamente con el lado del cuadrado —con su magnitud— de tal manera que la elipse intersección, su posición espacial dentro del cuadrado, sus ejes y su centro, están en «proporción áurea» con la magnitud del lado del cuadrado ABCD.

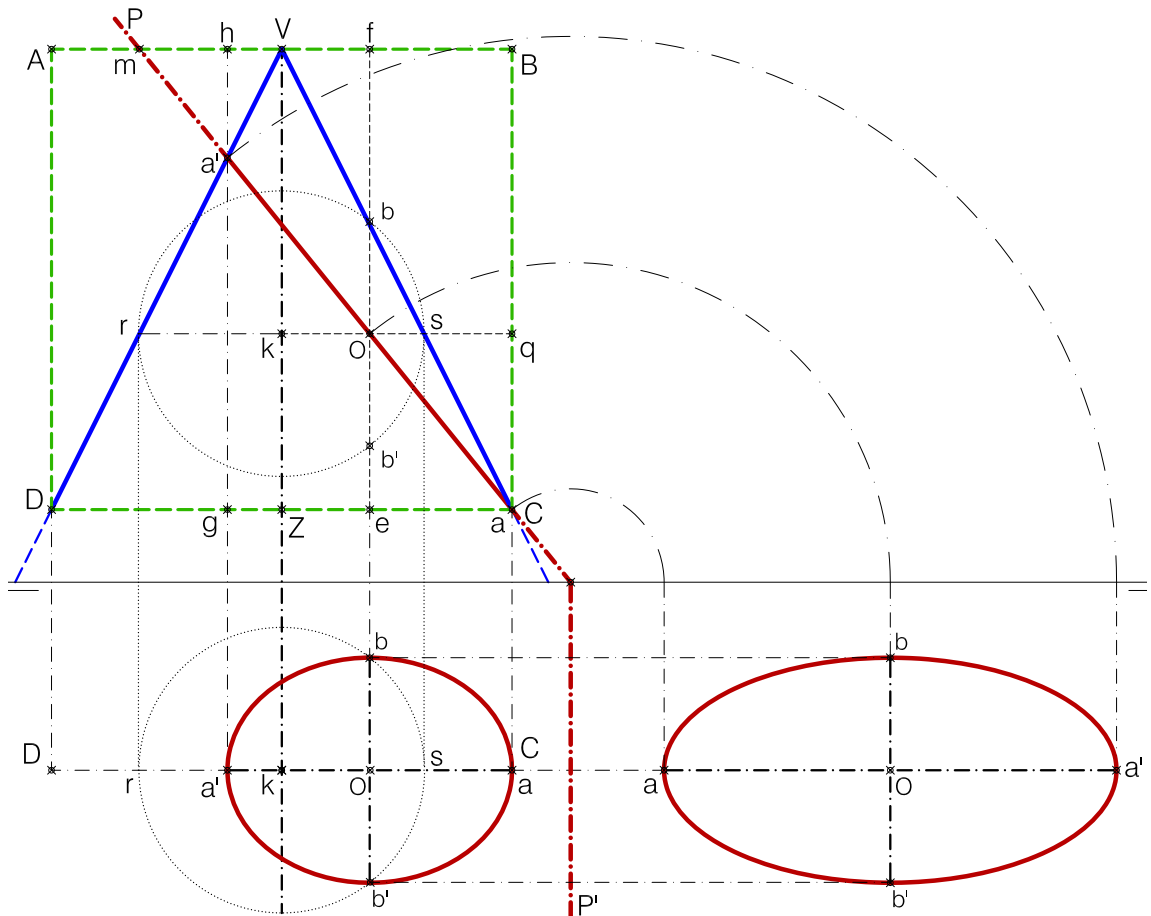


Figura 4.24: Sección producida por un plano PP' a un cono recto inscrito en un cuadrado ABCD (altura VZ sobre el eje del cono igual al diámetro de la base circular DC).

La orientación del plano seccionante PP' respecto del eje vertical VZ del cono es la recta que pasa por los puntos del cuadrado C y m; el punto C es un vértice del cuadrado y el m es un punto sobre el lado AB en el que se verifica que:

$$entera(VA) = mayor(Vm) + menor(mA)$$

La intersección del plano PP' con la generatriz VD del cono es el punto a' y este punto tiene una posición relativa en cuadrado $ABCD$, sobre una recta vertical y paralela al eje del cono, recta hg , en la que:

$$entera(BA) = mayor(Bh) + menor(hA)$$

$$entera(CD) = mayor(Cg) + menor(gD)$$

La intersección del plano PP' con la generatriz VC —la opuesta diametralmente del cono a la VD — es el punto a , coincidente con el vértice C del cuadrado. La recta finita entre a' y a constituye el eje mayor de la elipse resultado de la intersección del plano en el cono inscrito en el cuadrado.

El centro O de la elipse intersección —punto medio entre los extremos del eje mayor $a'a$ — está situado en el cuadrado $ABCD$ sobre la recta vertical fe , paralela al eje del cono, en la que:

$$entera(BV) = mayor(Bf) + menor(fV)$$

$$entera(CZ) = mayor(Ce) + menor(eZ)$$

y este centro O está sobre una recta qk , perpendicular al eje del cono, en la que:

$$entera(BC) = mayor(Bq) + menor(qC)$$

$$entera(VZ) = mayor(Vk) + menor(kZ)$$

La elipse que se obtiene mediante la construcción gráfica descrita, con solo regla y compás, tendrá siempre un eje mayor $a'a$ y un eje menor $b'b$ que están en la razón de 2 a 1, proporción *dupla*, cualesquiera que sea el lado L del cuadrado $ABCD$ en el que se inscribe el cono circular recto.

(Las proporciones obtenidas gráficamente en la intersección del plano inclinado con el cono recto inscrito en un cuadrado de lado L no son rigurosamente exactas. Sin embargo, la diferencia que se obtiene entre el método gráfico descrito y un cálculo matemático —que sí es exacto— nos parece insignificante.)¹³²

4.6. Resumen.

La forma de la Bóveda Extremeña resulta de dos superficies, combadas e iguales —una entre cada dos muros opuestos— y a la misma altura, delimitadas entre los muros de la superficie cuadrada cubierta de lado L . Cada superficie está generada por una curva plana, una semielipse, situada en un plano horizontal con semiejes mayor —paralelo al lado— igual a $1/2$ de L y menor $1/4$ de L . Esta generatriz se desplaza a través del espacio por otra curva plana contenida en un plano vertical —que corta por mitad a dos muros opuestos— que hace de directriz. Esta directriz es también una semielipse de semiejes mayor igual a L y menor $1/2$ de L . La generatriz, en su desarrollo, se mantiene tangente y perpendicular por su punto medio a la directriz.

Las dos superficies se cortan entre sí sobre los dos planos verticales que unen rincones opuestos —constituyendo las aristas diagonales que son entrantes— quedando cada superficie dividida en cuatro porciones o paños de forma triangular en planta. Al descartar de las porciones comunes de las dos superficies superpuestas aquellas que tienen menor cota, resulta la superficie completa de la Bóveda Extremeña.

Con las construcciones gráficas realizadas con solo la regla y el compás a partir de una planta cuadrada de lado L , figura que se toma como módulo geométrico básico, las secciones entre muros opuestos —la directriz— y las aristas en los muros —la generatriz¹³³—, resultado de la interpretación de los ajustes de curvas a los puntos de los levantamientos topográficos, presentan la disposición espacial entre ellas y unas magnitudes respecto del lado de la planta cubierta representadas en el esquema de la figura 4.25.

En un espacio cubierto cuadrado delimitado por los muros M , las distintas líneas que representan la directriz y la arista en el muro o generatriz, las proporciones entre sus ejes y las posiciones espaciales relativas de unas respecto de otras se pueden resumir aritméticamente como proporciones del lado L :¹³⁴

– Directriz ACA':

$$\text{semieje mayor } O_{dir} A(A'): \quad A_{dir} \approx L$$

$$\text{semieje menor } O_{dir} C(C'): \quad B_{dir} \approx \frac{1}{2} \times L$$

$$\text{semidist. focal } O_{dir} F(F'): \quad C_{dir} \approx \frac{13}{15} \times L$$

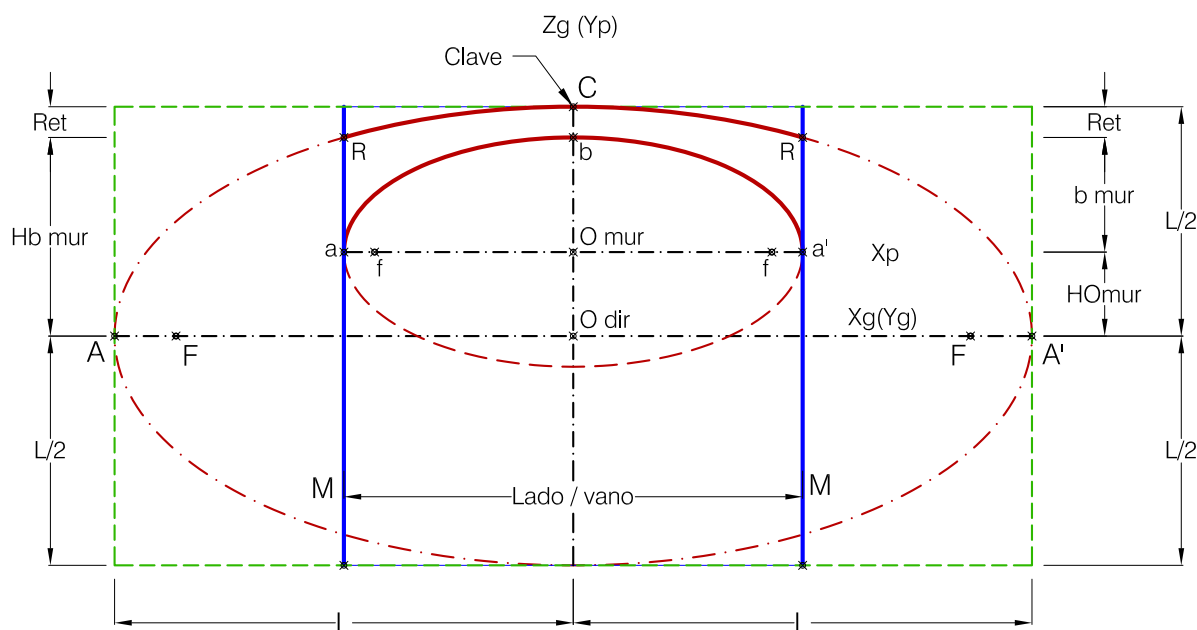


Figura 4.25: Posición espacial relativa de la arista en muro aba' (generatriz) y la curva directriz ACA'.

– Arista en muro aba':

$$\text{semieje mayor } O_{mur} a(a'): \quad a_{mur} \approx \frac{1}{2} \times L$$

$$\text{semieje menor } O_{mur} b: \quad b_{mur} \approx \frac{1}{4} \times L$$

$$\text{semidist. focal } O_{mur} f(f'): \quad c_{mur} \approx \frac{13}{30} \times L$$

– Altura Hb_{mur} ($O_{dir} b$) de la clave b de la arista en muro respecto de O_{dir} :

$$\text{altura } O_{dir} b: \quad Hb_{mur} = c_{mur} \approx \frac{13}{30} \times L$$

$$\text{también:} \quad Hb_{mur} = \frac{1}{2} C_{dir} \approx \left(\frac{1}{2} \times \frac{13}{15}\right) \times L \approx \frac{13}{30} \times L$$

$$\text{y también:} \quad Hb_{mur} = C_{dir} - c_{mur} \approx \left(\frac{13}{15} - \frac{13}{30}\right) \times L \approx \frac{13}{30} \times L$$

$$\text{y también:} \quad Hb_{mur} = c_{mur} \approx \frac{13}{30} \times L$$

– Altura RC (=bC) del retumbo Ret. de la bóveda:

altura RC: $Ret. = B_{dir} - Hb_{mur} \approx \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{30}\right) \times L \approx \frac{1}{15} \times L$

también: $Ret. = a_{mur} - c_{mur} \approx \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{30}\right) \times L \approx \frac{1}{15} \times L$

y también: $Ret. = \frac{L}{2} - Hb_{mur} = \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{30}\right) \times L \approx \frac{1}{15} \times L$

y también: $Ret. = \frac{L}{2} - c_{mur} = \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{30}\right) \times L \approx \frac{1}{15} \times L$

– Altura HO_{mur} del origen de la arista en muro respecto del plano X_gY_g :

altura HO_{mur} : $HO_{mur} = B_{dir} - Ret - b_{mur} \approx \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{15} - \frac{1}{4}\right) \times L \approx \frac{11}{60} \times L$

también: $HO_{mur} = c_{mur} - b_{mur} \approx \left(\frac{13}{30} - \frac{1}{4}\right) \times L \approx \frac{11}{60} \times L$

y también: $HO_{mur} = b_{mur} - Ret \approx \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{15}\right) \times L \approx \frac{11}{60} \times L$

y también: $HO_{mur} = \frac{1}{2}(C_{dir} - B_{dir}) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{13}{15} - \frac{1}{2}\right) \times L \approx \frac{11}{60} \times L$

5

Empujes en arco elíptico *dupla* con regla y compás.

«De las tres condiciones que debe cumplir una estructura, resistencia, deformación y estabilidad, esta última es la más crítica para las estructuras [de arco] de fábrica. Para que un arco sea estable debe tener una forma que permita que las posibles líneas de empujes estén contenidos en su interior. La estabilidad de las fábricas es, pues, un problema de geometría. . . », ¹³⁵ y es por ello que «la primera de las tres cosas que han de concurrir en el Ingeniero, es la Geometría». ¹³⁶

Mediante el análisis gráfico —que se propone a continuación— de la geometría de un arco de fábrica elíptico de proporciones *dupla*, como son los sucesivos arcos que conforman cada una de las superficies de la Bóveda Extremeña, se puede dilucidar sobre la estabilidad del arco, completo o rebajado, con solo los utensilios euclidianos de la regla y el compás y una guita para el trazado del arco: se pueden obtener los valores mínimos de los empujes horizontal y vertical en el apoyo del arco con la condición satisfecha de que la línea de empujes esté contenida entre los límites de la fábrica, con o sin la aplicación de un coeficiente de seguridad geométrico (CSG). ¹³⁷

5.1. Introducción.

Como es sabido, una bóveda de aristas con retumbo —como la Bóveda Extremeña— puede descansar sobre los muros en que se apoya: como una cúpula, o como una bóveda de nervios (ocultos en sus aristas). ¹³⁸

Los esfuerzos mayores se producen cuando trabaja como una bóveda de aristas, transmitiendo los esfuerzos —peso propio y sobrecargas— hacia los muros en los rincones del habitáculo abovedado, por las aristas diagonales que hacen la función de nervios. ¹³⁹ Cada una de las superficies de fábrica a ambos lados de una arista diagonal, se pueden considerar formadas por sucesivos arcos elípticos verticales en-

frentados perpendicularmente que descansan sobre la diagonal y a través de ésta los esfuerzos se dirigen hacia los muros de apoyo en los rincones.

La Bóveda Extremeña está formada, como se vió, por la unión de dos superficies, iguales, a la misma altura y perpendiculares entre sí y delimitadas por muros de planta cuadrada, engendradas por una curva generatriz elíptica de proporción *dupla* que se desarrolla a través de una curva directriz, también elíptica, de proporciones igualmente *dupla*; y ambas, entre ellas, también están en proporción *dupla*. La trayectoria que sigue la directriz desde los muros que atraviesa hasta la clave es ascendente, lo que provoca que la cota de la clave de la arista en el muro esté más baja, a menor cota, que la clave central de la bóveda, punto intersección de las directrices. Esta diferencia de cota desde los muros hasta la clave es el retumbo de la bóveda.

Cada uno de los cuatro paños resultantes entre las aristas diagonales y los muros son superficies de doble curvatura, y esta curvatura es más acentuada en la dirección paralela a los muros y menor en la dirección perpendicular. Los esfuerzos «actúan principalmente en las direcciones curvas [más curvadas] de las superficies y son muy pequeños en las direcciones 'planas' [menos curvadas]»; y por ello, el empuje de cada paño puede entenderse como la suma por acumulación de esfuerzos sobre las diagonales de una serie de arcos paralelos entre sí y a los muros que es la dirección de máxima curvatura.¹⁴⁰

La BEx, bóveda con retumbo, cuando trabaja como una bóveda de aristas — en la que las aristas diagonales trabajan como nervios ocultos—, los esfuerzos que transmite cada arco generatriz sobre la diagonal en que descansa se pueden obtener de forma gráfica con solo regla y compás, y una guita para el trazado del arco generatriz.

5.2. Empujes en arco elíptico *dupla*.

El cálculo gráfico que se expone a continuación analiza los esfuerzos verticales y horizontales producidos por un arco de fábrica sometido a su propio peso y con forma elíptica, de espesor y densidad aparente constante y longitud la unidad; el arco, con semieje mayor $a_{mur}=L/2$ y menor $b_{mur}=L/4$, puede ser completo o rebajado. La luz máxima considerada es aquella para la que el arco no necesita relleno de riñones.

En el método gráfico que se propone la línea de empujes¹⁴¹ se desarrolla íntegramente en el interior de la masa de la fábrica y por tanto los esfuerzos obtenidos aseguran que el arco está en equilibrio. Este equilibrio se puede encontrar de forma estricta o con un determinado coeficiente de seguridad geométrico CSG (relación de la excentricidad del empuje respecto del centro de la sección y el semiespesor de la fábrica del arco).

5.3. Propiedades físicas del arco: área, peso y centro de gravedad.

5.3.1. Área de la sección de fábrica.

Medida del área entre los límites de la fábrica con regla y compás. Construcción gráfica. En la fig. 5.1:

- Se traza por T_e —clave del arco del trasdós— una recta horizontal, paralela al eje de abscisas OX .
- con centro en T_e y abertura del compás la cuerda de la curva del trasdós T_eT_m se traza un círculo; éste corta a la recta horizontal por T_e en el punto T'_m . Se obtiene la recta finita: $T_eT'_m$.
- Se traza por I_e —clave del arco del intradós— una recta horizontal, paralela al eje de abscisas OX .
- con centro en I_e y abertura del compás la cuerda del intradós I_eI_m se traza un arco; éste corta a la recta horizontal por I_e en el punto I'_m . Se obtiene la recta finita: $I_eI'_m$.

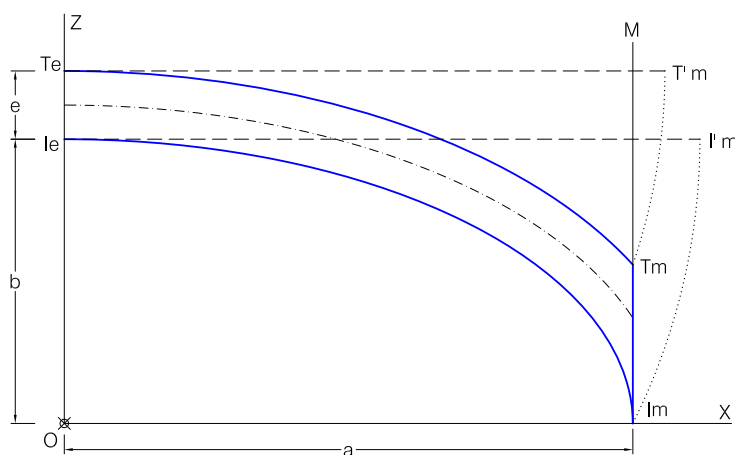


Figura 5.1: Construcción gráfica: área de la fábrica.

El área A de la fábrica por unidad de longitud es la del trapecio construido:

$$A = \frac{T_eT'_m + I_eI'_m}{2} \times e$$

5.3.2. Peso de la fábrica.

Es fuerza gravitacional que actúa sobre toda la masa del arco de fábrica, de densidad aparente γ_{ap} , área A , y longitud del arco la unidad. La magnitud del peso total P de la fábrica por unidad de longitud será:

$$P = A \times \gamma_{ap}$$

La línea de acción de la fuerza P es vertical y el vector representativo tiene su punto de aplicación en el centro de gravedad (CG).

5.3.3. Centro de gravedad.

El punto de aplicación del peso P de la fábrica es el centro de gravedad (CG), que es fijo, es decir, independiente de la orientación del cuerpo.

Construcción gráfica. En la fig. 5.2:

- utilizando la recta finita horizontal $T_e T'_m$ obtenida más arriba.
- se traza por E_e —clave del arco que representa el eje de la fábrica— una recta horizontal $E_e E'_m$ paralela al eje OX .
- con centro en E_e y abertura del compás la cuerda del eje de la fábrica $E_e E_m$ se traza un círculo; éste corta a la recta horizontal trazada por E_e en el punto E'_m . Se obtiene la recta finita horizontal: $E_e E'_m$.

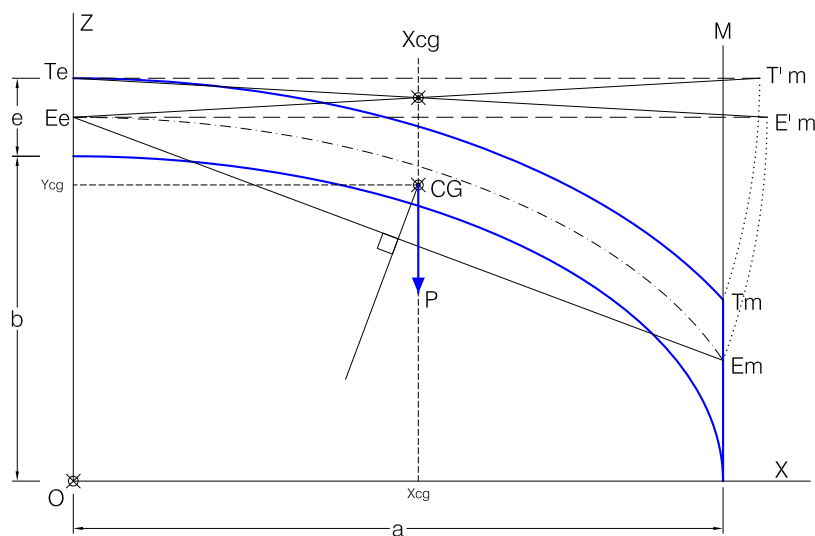


Figura 5.2: Construcción gráfica: centro de gravedad CG de la fábrica.

La abscisa del centro de gravedad del arco coincide con la del centro de gravedad del trapecio de vértices: T_e , T'_m , E'_m y E_e . Trazando rectas entre vértices opuestos, éstas diagonales se cortan en un punto —centro de gravedad del trapecio—. En una recta vertical trazada por ese punto estará el centro de gravedad de la fábrica (CG) y por lo tanto la abscisa de esa recta será la correspondiente a la del CG de la fábrica.

La ordenada del CG de la fábrica se obtiene gráficamente mediante la siguiente construcción, en la fig. 5.2:

- se traza una línea finita entre los puntos E_e y E_m —cuerda del arco del eje de la fábrica entre sus extremos—.
- se traza una recta perpendicular a la anterior por su punto medio.
- esta perpendicular corta a la recta vertical anterior de abscisa X_{cg} en un punto que resulta la ordenada Y_{cg} del centro de gravedad de la fábrica.

La posición del centro de gravedad del arco de fábrica mediante esta construcción será: $CG_{(X_{cg}, Y_{cg})}$ —indistinto para cualquier valor de γ_{ap} — y en la recta vertical por este punto CG, estará la línea de acción del peso total P de la fábrica.

5.4. Empujes sin Coeficiente de Seguridad Geométrico (CSG).

La línea de empujes debe estar contenida íntegramente entre los extremos físicos del arco de fábrica, es decir, entre los límites marcados por las curvas del trasdós y del intradós. Con esta condición la estructura de fábrica puede resistir «cómodamente» esfuerzos de compresión.¹⁴²

En todos los casos que se exponen en adelante, en que la fábrica es un arco elíptico *dupla*, simétrico por la clave respecto del eje vertical del sistema de referencia OZ , se pueden obtener los empujes horizontal y vertical en los apoyos del arco analizando solamente la mitad de dicho arco: la parte comprendida entre el eje OZ de simetría y el apoyo en el muro. En este apoyo en el muro que hace de contrarresto, el empuje vertical es el correspondiente al peso del semiarco y el horizontal es la fuerza necesaria aplicada en la zona delimitada por el espesor de la clave del arco para que la línea de empuje se inscriba entre los límites de la fábrica.

Con esta simplificación, cuando la línea de empujes contenida en el espesor del arco sea tangente a los bordes de la fábrica en solo dos puntos, uno en la clave del

trasdós y otro en cualquier punto del intradós cercano al apoyo, el semi-arco estará en equilibrio estricto.

Al considerar ahora el arco completo, la línea de empujes será tangente en tres puntos formando tres «rótulas», que al presentarse alternativamente en el intradós y el trasdós constituirán un arco triarticulado, estructura que si no cambian las condiciones iniciales es estable.¹⁴³

5.4.1. Empuje horizontal mínimo y total en el muro.

La línea de acción de la fuerza E_h —mínima, por unidad de longitud del arco— será una recta horizontal por T_e hasta su intersección en O' con la vertical trazada por CG , punto de paso de la línea de acción de la fuerza P del peso total.

La línea de acción de la resultante E_{tot} de las fuerzas actuantes E_h y P será una recta inclinada que a partir de O' corta al eje horizontal del sistema de referencia OX en un punto señalado en las siguientes figuras como: XE_{tot} , punto que se puede obtener gráficamente con solo regla y compás mediante las tres construcciones que se proponen.

A partir de la obtención del peso total de la fábrica y de la posición de su línea de acción según los apartados anteriores, los métodos gráficos propuestos son:

1º Graf-1: Construcción gráfica. En la fig. 5.3:

- por T_e —clave del arco por el trasdós— se traza una recta horizontal hasta la intersección en O' con la recta vertical trazada por CG .
- con centro en el eje de abscisas en el punto X_{cg} y abertura del compás igual a la distancia de O a CG —diagonal del rectángulo de lados: OX_{cg} y OY_{cg} — se traza un círculo; éste corta al eje OX en un punto.
- con centro en este punto y abertura del compás igual al espesor e de la fábrica se traza un nuevo círculo que corta al eje horizontal del sistema de referencia en XE_{tot} .
- este punto sobre OX se produce en: $XE_{tot} = X_{cg} + diagonal_{(O\ CG)} - e$.
- se traza una línea recta desde O' que pase por XE_{tot} ; línea de acción de la resultante E_{tot} de las dos fuerzas implicadas.

La línea recta así trazada representa la orientación de la resultante o cierre del polígono de fuerzas coplanarias que representa a las fuerzas actuantes E_h y P en el arco de fábrica. A una escala conveniente, el polígono se puede resolver trazando, fig. 5.3 dcha.: sobre una línea vertical el vector que representa la fuerza P ; por el extremo

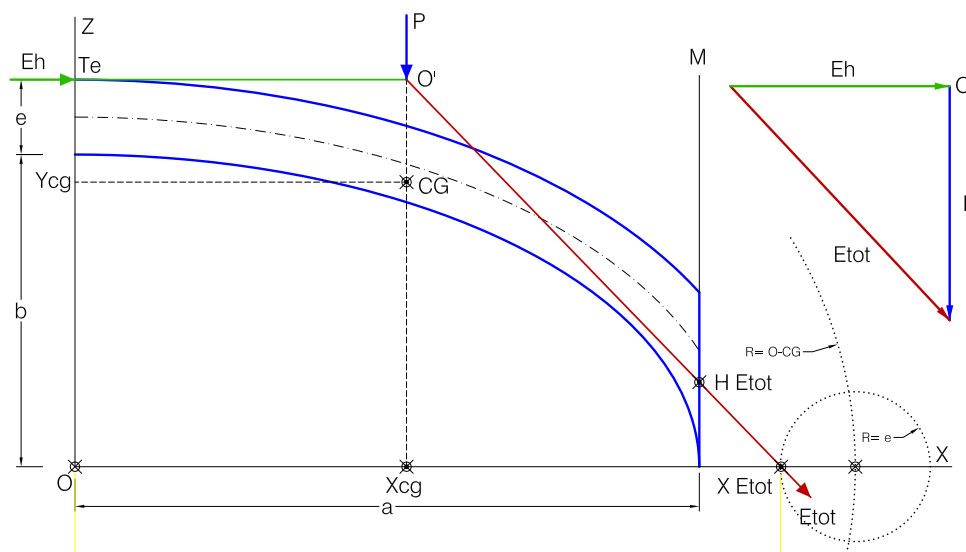


Figura 5.3: Método Graf-1: empuje horizontal E_h en clave y total E_{tot} en el muro sin CSG.

del vector P , se traza una recta paralela a E_{tot} —obtenida en la resolución gráfica anterior—; por el otro extremo del vector P , por O' , se traza una línea horizontal —paralela a $T_e O'$, línea de acción del empuje E_h .

El punto intersección de las rectas trazadas por los dos extremos de P es la solución, la orientación y la magnitud —a la escala elegida—, del polígono de fuerzas coplanario para el empuje horizontal mínimo E_h , el peso P y el empuje total inclinado E_{tot} .

2º Graf-2: Construcción gráfica. En la fig. 5.4:

- Por I_e , clave del arco por el intradós, se traza una recta paralela al eje de abscisas OX . Esta recta corta al muro representado por M en: $I'e$.
- se traza una recta desde el origen O del sistema de referencia hasta el punto $I'e$ del muro.
- la recta trazada corta a la línea de acción del peso P en: I .
- se traza una nueva recta desde I_e —clave del intradós— que pase por el punto anterior I .
- prolongando esta recta hasta su intersección con el eje de referencia OX se obtiene sobre éste el punto señalado como $X E_{tot}$.
- la línea recta inclinada que pasa por O' y por $X E_{tot}$ es la línea de acción de la resultante E_{tot} .

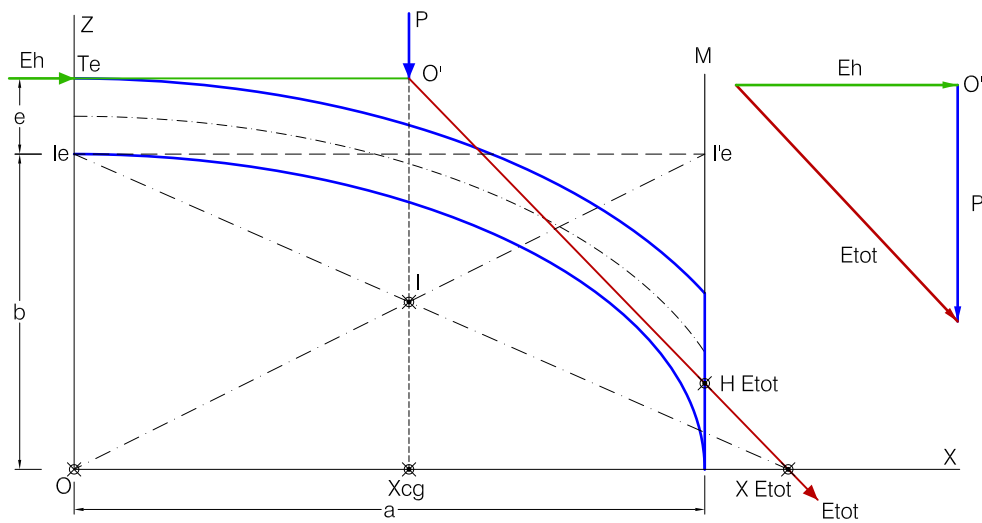


Figura 5.4: Método Graf-2: empuje horizontal Eh en clave y total $Etot$ en el muro sin CSG.

La obtención del módulo y sentido del empuje horizontal Eh y del total E_{tot} se resuelve, como en el caso anterior, construyendo el correspondiente polígono de fuerzas (fig. 5.4 dcha.).

3º Método: Graf-3

Conocida la intersección O' de las líneas de acción del empuje horizontal en la clave y la vertical del peso de la fábrica, como se vió mas arriba, la línea de acción del empuje total será una línea inclinada hacia el eje X del sistema de referencia.

La distancia desde O' a esa intersección, punto $XEtot$, es una magnitud tal que si se considera la abscisa de centro de gravedad Xcg como la parte «menor» de un segmento dividido en media y extrema razón, dicha magnitud buscada será la parte «mayor» del segmento.

A partir de un cuadrado de lado igual a la abscisa Xcg , en la fig. 5.5, el lado DC se toma como la parte «menor». Con origen en el punto medio m de ese lado DC se toma como la parte «menor». Con origen en el punto medio m de ese lado DC y abertura del compás hasta un vértice del lado opuesto, el B en la figura, se traza un arco que corte a la prolongación del lado DC ; resulta el punto E ; la magnitud medida de D a E corresponde a la parte «mayor».

Con la orientación de la línea de E_{tot} resultante se puede construir el polígono de fuerzas actuantes (fig. 5.6dcha.), y como en los casos anteriores obtener el módulo del empuje horizontal E_h .

En las resoluciones expuestas, la línea de empuje se desarrolla entre los límites de la fábrica y el empuje total en el muro estará a una altura —medible gráficamente— señalada en las figuras como HE_{tot} .

5.4.2. Puntos de la línea de empujes tangentes al borde de la fábrica.

La línea de empujes para el estado de fuerzas E_h y E_{tot} obtenidas anteriormente, es una curva que se desarrolla en el interior de la sección de la fábrica; comienza en el punto de aplicación de E_H y finaliza en la intersección de la línea de acción de la resultante E_{tot} con el muro, punto a una altura sobre el eje horizontal de referencia de HE_{tot} .

Esa línea de empujes es tangente en dos puntos a los bordes o límites de la fábrica: uno el punto de aplicación de E_h , clave del trasdós (de localización inmediata: $x = 0$ y $z = b + e$), y otro en la curva del intradós próximo al muro vertical sobre el que descansa el arco. Este segundo punto se puede obtener gráficamente con regla y compás.

Construcción gráfica. En la fig. 5.7:

- Se resuelve la posición y orientación de la línea de acción de E_{tot} por cualquiera de los procedimientos gráficos anteriores: Graf-1, Graf-2 o Graf-3.
- desde el punto X_{cg} del eje de las abscisas se traza una recta perpendicular a la línea de acción de la resultante E_{tot} .
- esta recta se prolonga hasta cortar a la curva $E_e E_m$ —eje del arco de la fábrica—.
- por el punto de corte con el eje $E_e E_m$ se traza una línea vertical paralela al eje OZ .
- la línea vertical trazada corta a la curva del intradós en un punto.

Y éste punto, marcado en la figura como tg , es el de tangencia de la línea de empujes con el intradós de la fábrica (tangente que es indiferente a la γ_{ap} de una misma sección).

en el eje del arco queda a ambos lados de éste una porción de fábrica: el espesor de resguardo e_{resg} .¹⁴⁴

Un coeficiente de seguridad geométrico igual a 1 (uno) implica un resguardo nulo y por tanto el espesor útil —la sección de trabajo de la fábrica— es la totalidad, el 100 %, del espesor real; al disminuir la sección real e del arco en una determinada cantidad o porcentaje hasta $e_{útil}$, el coeficiente de seguridad aplicado resulta del cociente: $e/e_{útil}$; y el resguardo será la diferencia —porcentual— entre el espesor real y la reducción aplicada a la sección de trabajo.

5.5.1. Empuje horizontal mínimo en clave y total en el muro.

Al aplicar un coeficiente de seguridad geométrico a la estructura del arco elíptico *dupla* de la fiura 5.8, la fuerza horizontal Eh aplicada en el extremo superior de $e_{útil}$ tiene su línea de acción —horizontal— que corta a la línea de acción vertical del peso P en el punto señalado como O' . A partir de ese punto O' , la resultante E_{tot} de las fuerzas implicadas estará sobre una recta inclinada que corta al eje de abscisas en XE_{tot} .

Construcción gráfica. En la fig. 5.8:

- con centro en el punto X_{cg} del eje de abscisas y abertura del compás tomada desde el origen O del sistema de referencia hasta el centro de gravedad CG , se traza un arco de círculo que corte al eje OX .
- con centro en este punto de corte y abertura del compás igual al espesor útil $e_{útil}$ se traza un círculo que corta al eje OX en otro punto.
- con centro en este último punto y abertura del compás igual a la magnitud del espesor de resguardo e_{resg} se traza un nuevo círculo.
- este nuevo círculo corta al eje horizontal de referencia OX en el punto señalado en la figura como XE_{tot} .
- (la intersección de la recta inclinada por O' con el eje horizontal de referencia OX corresponde a: $XE_{tot} = X_{cg} + diagonal_{(O\ CG)} - e_{útil} + e_{resg}$).

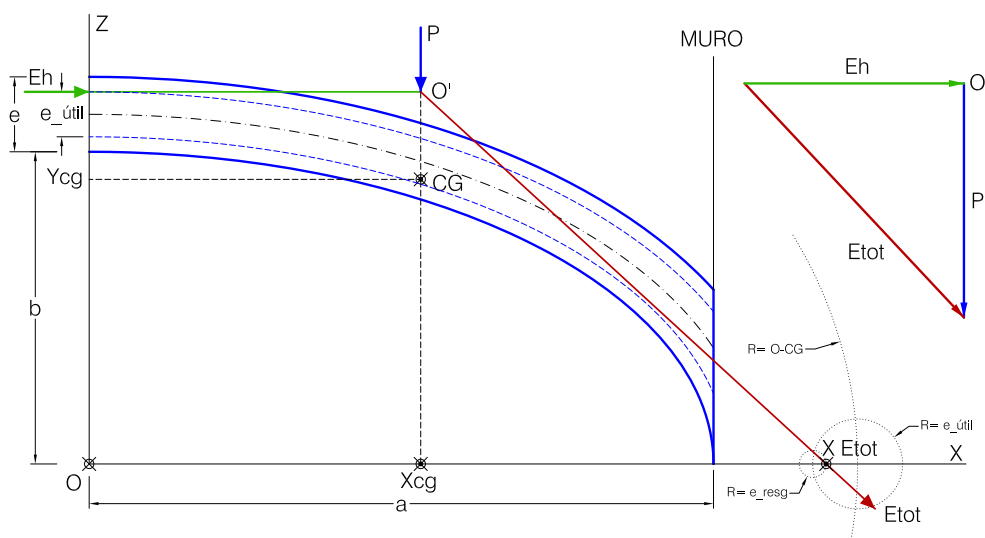


Figura 5.8: Empuje horizontal en clave y total en el muro con CSG.

La línea de acción de la resultante E_{tot} en el muro M tendrá la orientación de la recta inclinada trazada por O' y $XEtot$, la del vector peso, de magnitud conocida, es vertical y la del empuje aplicado es horizontal; la resolución del sistema de fuerzas —polígono funicular— es idéntica a la expuesta en el apartado anterior 5.4.1.

Igual resultado para $Etot$, su orientación y módulo, se obtiene utilizando cualquiera de los otros métodos Graf-2 o Graf-3.

5.5.2. Puntos de la línea de empujes tangentes al borde de la fábrica.

Los puntos más cercanos de la línea de presiones al intradós y al trasdós de la fábrica son aquellos en que esa línea de presiones es tangente a las curvas paralelas a los límites de la fábrica afectados por el CSG adoptado (líneas de trazos en la fig.5.9). Uno es el punto de aplicación de Eh , que está a una altura en el eje OZ de: $b + e_{resg} + e_{útil}$, y otro, en la curva del intradós con CSG, cercano al apoyo sobre el muro, se puede obtener gráficamente con regla y compás.

Construcción gráfica. En la fig. 5.9:

- Por cualquiera de los métodos Graf-1, Graf-2 o Graf-3, se obtiene la línea de acción de la resultante $Etot$.
- desde el punto X_{cg} sobre el eje de referencia OX se traza una recta perpendicular a la línea de acción de la resultante E_{tot} .

- esta recta se prolonga hasta cortar al eje del arco de la fábrica.
- por el punto de corte se traza una línea vertical paralela al eje OZ .
- la línea vertical trazada corta a la curva del intradós afectada por el CSG —línea de trazos discontinuos— en un punto señalado como tg .

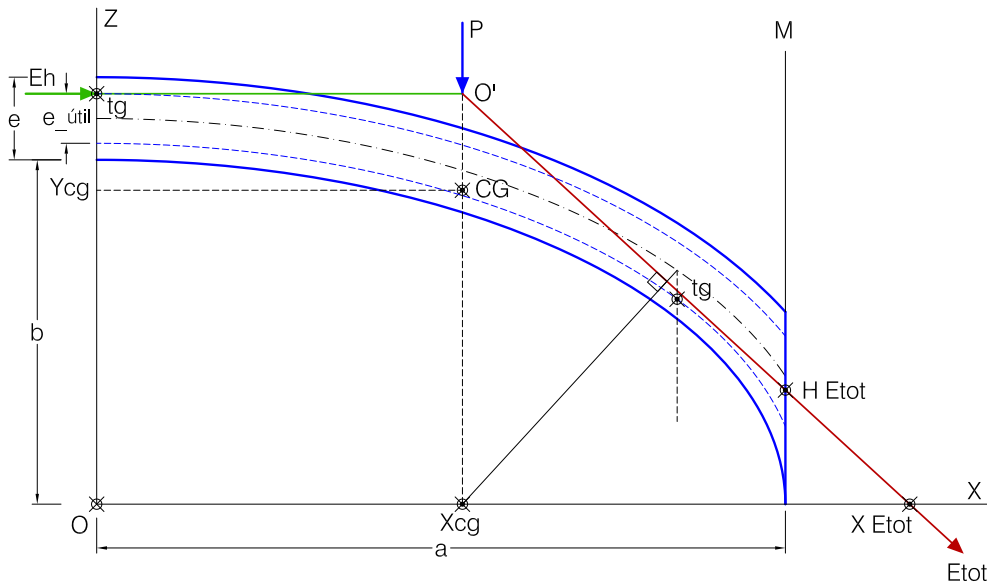


Figura 5.9: Tangentes de la línea de empujes a los bordes de la fábrica con CSG.

El punto tg obtenido es el de tangencia de la línea de empujes con la curva del intradós con CSG (tangente que es indiferente a la γ_{ap} de una misma sección). La línea de empujes se desarrolla íntegramente por el interior de la fábrica desde el punto de aplicación de E_h , pasando por tg hasta el muro en HE_{tot} .

5.6. Comprobación de la resolución gráfica de los empujes.

En todas las líneas de empujes de equilibrio del arco, con o sin CSG, la línea de acción del empuje horizontal E_h en la clave y la de acción de la resultante E_{tot} —inclinada hacia el muro de apoyo—, deben coincidir en la de acción vertical del peso total E_v de la fábrica.

Se puede comprobar la bondad de los resultados que se obtienen mediante el procedimiento gráfico descrito al verificarse la condición de equilibrio de fuerzas que en cualquier punto de la línea de acción del empuje total $La_{Etot}(X_{La}, Y_{La})$ se verifica: ¹⁴⁵

$$Eh \times (H_{Eh} - Y_{La}) = Ev \times (X_{La} - X_{cg})$$

y empuje horizontal:

$$Eh = \frac{Ev \times (X_{cg} - X_{La})}{Y_{La} - H_{Eh}};$$

con la abscisa $X_{La} = \frac{L}{2}$ para la altura H_{Etot} de la resultante en el muro M.

Cualquier punto de la línea de acción $P_{La}(X_{La}, Y_{La})$ de la resultante $Etot$ tiene una altura Y_{La} sobre el eje OX , igual a:

$$Y_{La} = \frac{Ev \times (X_{cg} - X_{La}) + Eh \times H_{Eh}}{Eh};$$

y la intersección X_{Etot} de la línea de acción de la resultante $Etot$ con el eje OX :

$$X_{Etot} = \frac{Ev \times X_{cg} + Eh \times H_{Eh}}{Ev}$$

Para comprobar la bondad de los resultados de los empujes obtenidos mediante el método gráfico descrito frente a los cálculos analíticos, se muestran dos ejemplos de arcos de fábrica elípticos *dupla*, $f/L=1/4$, peso específico aparente $\gamma_{ap}=18 \text{ kN/m}^3$ y espesores de 0,24 y 0,12 metros; ambos con coeficiente de seguridad geométrico CSG de 1,0 y 1,10 (expuestos en el anexo D) y en todos los casos sin necesidad de relleno de riñones. Las diferencias entre uno y otro método se muestran en forma de gráfica de diagrama de *caja y bigotes* como manera de presentar estadísticamente la distribución de las diferencias obtenidas entre los valores de los empujes Ev y Eh gráfica y analíticamente.

I. Diagramas de caja de las diferencias entre el valor calculado analíticamente y el obtenido por el método gráfico en arco elíptico $f/L=1/4$, y espesor $e=0,24$ m.

Ia) en la fig.5.10:

con $CSG=1,0$ y luz desde 3,0 m hasta el máximo de 10,55 m.

(Resultados numéricos en el cuadro D.1 en pág. 165)

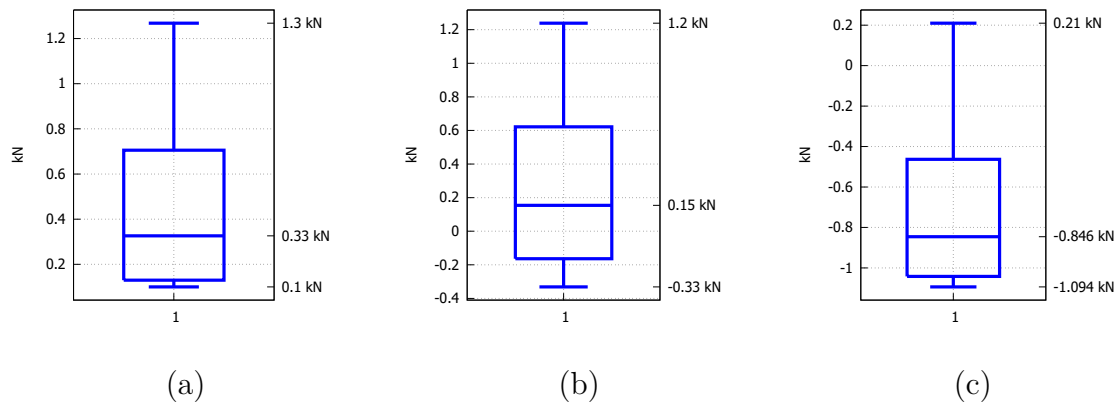


Figura 5.10: Caso Ia. Diferencias de empuje horizontal entre el cálculo analítico y los métodos gráficos: a) graf-1, b) graf-2 y c) graf-3.

Ib) en la fig.5.11:

con $CSG=1,10$ y luz desde 3,0 m hasta el máximo de 8,80 m.

(Resultados numéricos en el cuadro D.2 en pág. 167)

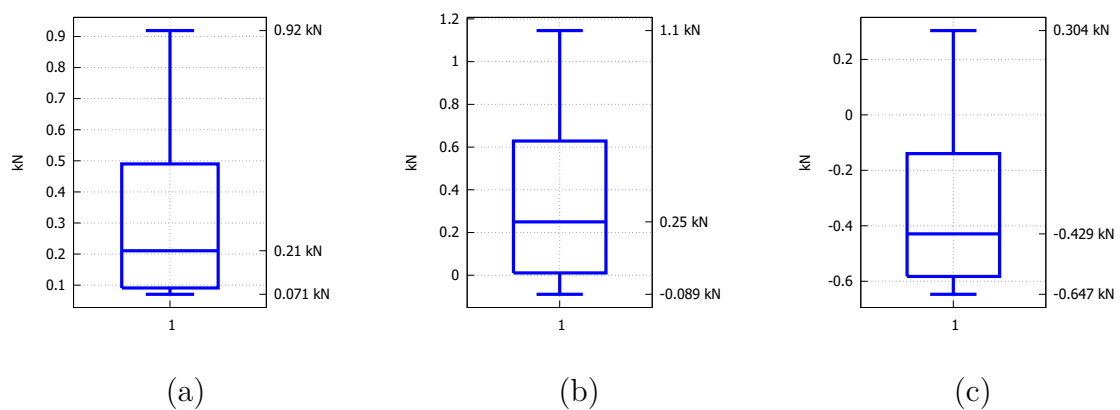


Figura 5.11: Caso Ib. Diferencias de empuje horizontal entre el cálculo analítico y los métodos gráficos: a) graf-1, b) graf-2 y c) graf-3.

II. Diagramas de caja de las diferencias entre el valor calculado analíticamente y el obtenido por el método gráfico en arco elíptico $f/L=1/4$, y espesor $e= 0,12$ m.

IIa) en la fig.5.12:

con $CSG= 1,0$ y luz desde 2,0 m hasta el máximo de 5,25 m.

(Resultados numéricos en el cuadro D.3 en pág. 169)

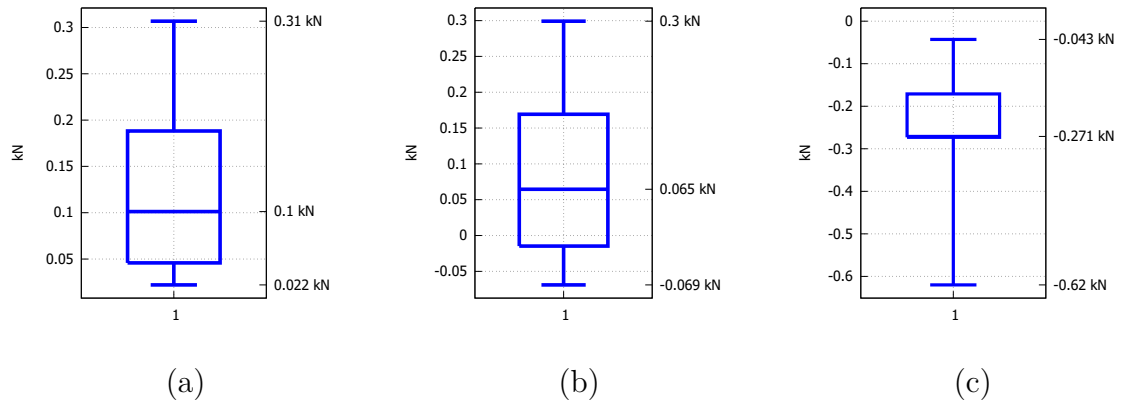


Figura 5.12: Caso IIa. Diferencias de empuje horizontal entre el cálculo analítico y los métodos gráficos: a) graf-1, b) graf-2 y graf-3.

IIb) en la fig.5.13:

con $CSG= 1,10$ y luz desde 2,0 m hasta el máximo de 4,45 m.

(Resultados numéricos en el cuadro D.4 en pág. 171)

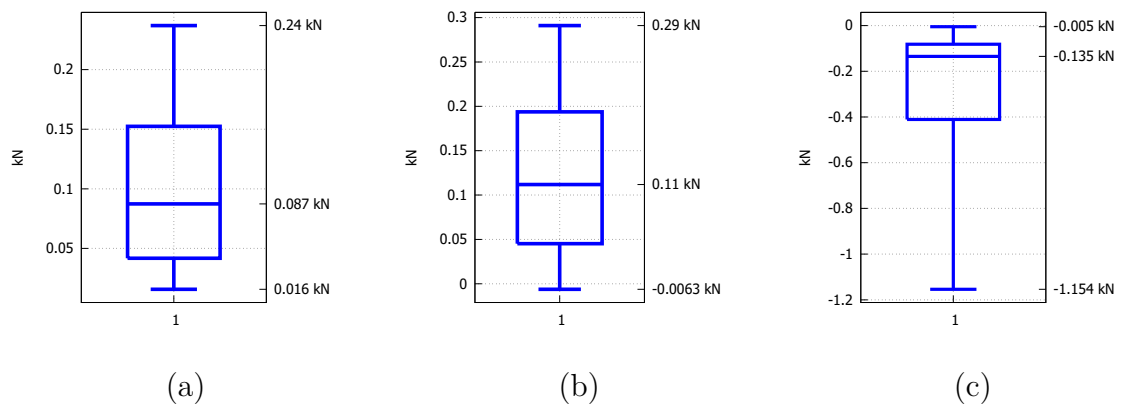


Figura 5.13: Caso IIb. Diferencias de empuje horizontal entre el cálculo analítico y los métodos gráficos: a) graf-1 y b) graf-2.

En los cuatro casos expuestos, figuras 5.10 a 5.13, las medianas no presentan valores, en kN, que sean sensiblemente diferentes en las resoluciones analítica, gráfica-1, gráfica-2 y gráfica-3 (aunque las cajas presentan distribuciones sesgadas positivas y negativas). En los esfuerzos horizontales, en las figuras las cajas (a), (b) y (c), la mediana está más cerca del lado inferior de la caja, hacia las diferencias más pequeñas (sesgo positivo); los bigotes superiores son más largos, lo que indica una mayor dispersión de las diferencias obtenidas hacia los valores más altos de éstas (que corresponden a las luces mayores en cada caso).

En los ejemplos comparativos realizados se aprecian pequeñas diferencias entre los métodos de cálculo de los esfuerzos; en ellos, la diferencia encontrada, el diagrama de la figura 5.10a, corresponde a un arco de 10,55 m de luz —dimensión poco habitual— y esta diferencia entre el empuje analítico horizontal ($Eh_{ana} = 29,986kN$) y el empuje gráfico ($Eh_{graf1} = 28,715kN$) resulta tan solo de 1,271 kN, diferencia ésta que, a nuestro juicio, nos parece asumible por lo poco significativa al haber considerado un arco de dimensiones excepcionales: espesor $e = 0,24$ m y una luz, sin relleno de riñones, de 10,55 m.

En todos de los casos, las diferencias representadas por el segundo cuartil o mediana, se pueden considerar —a nuestro juicio— poco significativas.

5.7. Empujes en arco elíptico «dupla» rebajado.

Con solo la regla y el compás también se pueden obtener, con suficiente precisión, los esfuerzos que sobre sus apoyos produce un arco elíptico *dupla* rebajado, es decir, que la luz del arco sea menor que el semieje mayor a de la elipse, y por lo tanto la flecha f también menor que el semieje menor b de dicha elipse.

Como se vió más arriba —en 5.4 y 5.5— en un arco de fábrica elíptico *dupla* completo, en el que el eje mayor es igual a la luz y el semieje menor es la flecha, se pueden obtener el empuje total E_{tot} gráficamente a partir del área y por tanto el peso P de la fábrica, la posición y orientación de la línea de acción de su vector representativo y el punto de tangencia de la línea de empuje con los bordes de la fábrica con o sin C.S.G. De igual manera, gráficamente con solo la regla y el compás, se puede obtener el empuje total sobre un arco elíptico *dupla* rebajado y localizar

los puntos de tangencia tg de la línea de presiones con los bordes de la fábrica con o sin Coeficiente de Seguridad Geométrico.

Tomando como referencia los empujes ya resueltos para un arco elíptico *dupla* completo —con semiejes mayor a y menor b —, en un arco rebajado con igual espesor y con los mismos ejes, se presentan, para la resolución gráfica de los empujes, dos situaciones distintas: 1) que la semiluz del arco rebajado Xm esté comprendida entre el punto de tangencia tg de la línea de presiones en el intradós y el semieje mayor a de la elipse del arco completo; y 2) que la semiluz del arco rebajado Xm sea menor que la abscisa tg de la tangente en el intradós de la línea de presiones del arco completo. En ambos casos, en las resoluciones que se acompañan, el valor del peso P de la fábrica —entre los extremos del arco señalados en las figuras como: Ie Te y Tm Im — y la posición de la línea de acción —vertical— de su vector representativo se obtienen según lo descrito en el apartado 5.3 «Propiedades físicas del arco: área, peso y centro de gravedad».

Caso 1. fig. 5.14

Semiluz Xm del arco rebajado : $Xtg < Xm < a$

- para cualquier la posición de Xm en este intervalo, el valor del empuje horizontal Eh en el arco rebajado es el igual que para el mismo arco elíptico *dupla* completo.
(Este valor del empuje horizontal es constante en el muro —o diagonal— situado en el intervalo entre Xtg y el semieje a de la elipse).
- el peso P del arco rebajado tendrá su línea de acción sobre la recta vertical por O' ; punto intersección de la vertical por Xcg y la recta horizontal por el punto de aplicación de Eh en la clave sobre el eje Z .
- la línea de acción del empuje total E_{tot} será una recta inclinada por O' , hacia abajo, que corta al eje de referencia OX en un punto señalado como $X E_{tot}$.
- la abscisa de este punto es, como se vió: $X E_{tot} = X_{cg} + diag(O CG) - e$.
- se construye el polígono de fuerzas implicadas, a una escala conveniente, a partir de un punto cualesquiera O' (fig. 5.14 dcha.).
- a partir de O' , que se toma como origen, se traza una recta finita vertical que represente el módulo del vector del peso P .
- se traza una recta horizontal por O' —origen de P — que representa la línea de acción del empuje horizontal en la clave Eh .
- por el extremo de P se traza una línea paralela a la de E_{tot} .

- esta línea paralela a E_{tot} corta a la línea horizontal trazada por O' en el diagrama funicular.
- El segmento de la recta horizontal desde ese punto de corte y el origen O' representa el módulo del vector del empuje horizontal E_h .

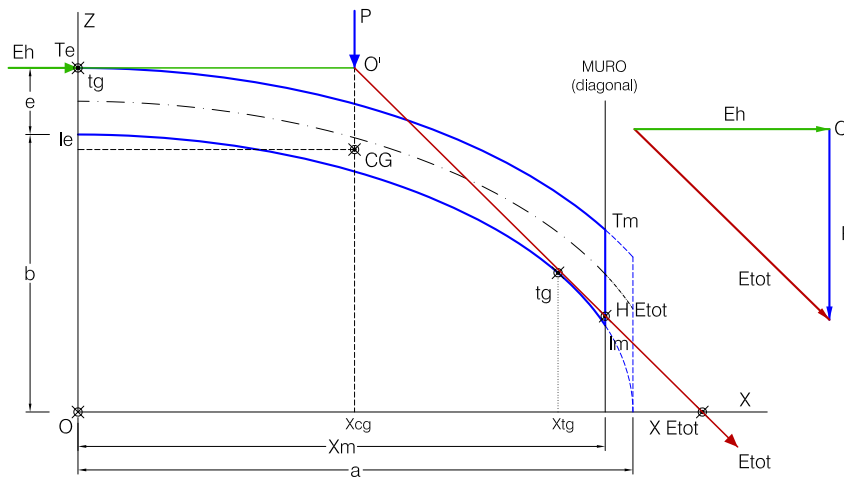


Figura 5.14: Caso 1: $X_{tg} < X_m < a$. Empuje horizontal E_h y total E_{tot} en arco elíptico *dupla* rebajado sin CSG.

En el polígono funicular construido se puede medir, a la escala elegida, la magnitud del empuje total E_{tot} y su inclinación desde la horizontal. En el dibujo del arco rebajado de la fig. 5.14 izda. se puede acotar la altura H_{Etot} del empuje E_{tot} sobre el muro o diagonal. La línea de empujes se inscribe dentro de los límites de la fábrica desde T_e pasando por t_g hasta el muro o arista diagonal a la altura: H_{Etot} .

El procedimiento gráfico descrito para este caso 1 puede realizarse igualmente cuando sobre la estructura se aplica un determinado Coeficiente de Seguridad Geométrico. Con esta restricción a la línea de empuje, el procedimiento gráfico es idéntico al descrito con la salvedad de que la abscisa X_{Etot} de la línea de acción del empuje total es: $X_{E_{tot}} = X_{cg} + diag(O_{CG}) - e_{util} + e_{resg}$.

Caso 2. fig. 5.15

semiluz X_m del arco rebajado: $0 < X_m < X_{tg}$

- se obtiene el peso P de la fábrica entre I_e T_e y T_m I_m y las coordenadas X_{cg} e Y_{cg} del centro de gravedad de la sección considerada, punto por el que pasa la línea de acción vertical del peso (apartado 5.3).
- por el punto de la clave del arco T_e se traza una línea recta y horizontal; línea de acción del empuje E_h que tiene su punto de aplicación en T_e .

- en la intersección de las líneas de acción de Eh y P se marca un punto: O' .
- por ese punto O' se traza una recta inclinada que pase por Im (extremo del arco del intradós con el muro o diagonal).
- la línea trazada corta al eje de referencia OX en el punto señalado con $X Etot$.
- La línea de acción del empuje total será una línea inclinada trazada por O' y por $X Etot$.
- esta recta trazada por O' y $X Etot$ representa la orientación de la línea de acción del vector del empuje total $Etot$ del arco en sus apoyos.

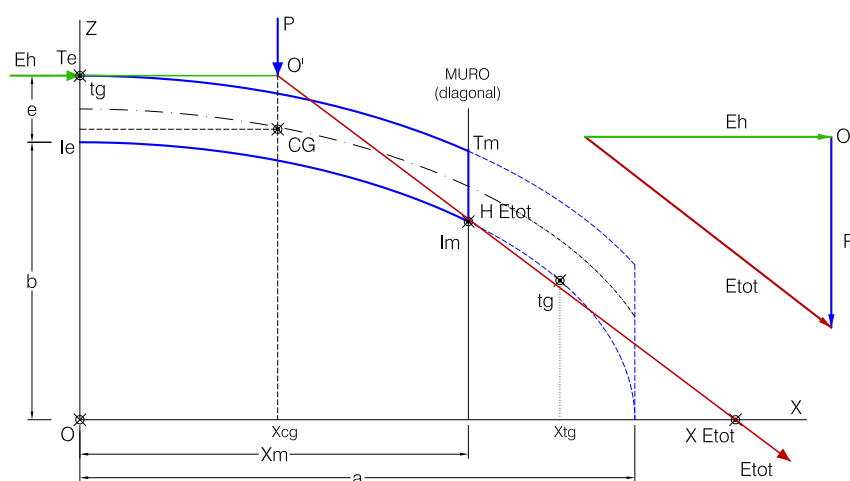


Figura 5.15: Caso 2: $0 < Xm < Xtg$. Empuje horizontal Eh y total $Etot$ en arco elíptico *dupla* rebajado sin CSG.

La magnitud del empuje total $Etot$ se obtiene de la resolución del sistema de fuerzas actuantes.

- en un punto cualquiera del croquis se marca el punto O' (fig. 5.15 dcha.) y se traza una línea vertical por O' que representa la línea de acción del peso P de la fábrica. Se acota, a la escala elegida, el módulo de P a partir de O' .
- se traza una línea recta horizontal por O' ; línea de acción del empuje horizontal en la clave Eh .
- por el extremo del vector P se traza una recta inclinada paralela a la trazada anteriormente por O' y $X Etot$.
- esta recta inclinada corta a la línea de acción horizontal de Eh .
- el módulo del vector del empuje Eh será la magnitud, medida a escala, desde ese punto intersección hasta su extremo situado en O' .

La línea de presiones resultante con los valores de Eh y P (Ev) obtenidos gráficamente, se inscribe dentro de los límites de la fábrica. Los puntos de tangencia de esta línea de presiones con los límites de la fábrica están en Te , en el trasdós en la clave, y en el extremo Im del intrados coincidiendo con el muro o diagonal.

Mediante procedimiento gráfico descrito para este caso 2 puede realizarse, con idénticas construcciones, el cálculo de los empujes de un arco elíptico *dupla* rebajado, cuando sobre la estructura se aplica un determinado C.S.G.

5.8. Proporción entre empujes en arcos elípticos «dupla».

Conocidos en un arco elíptico, con ejes en proporción *dupla*, de luz L y espesor e, los esfuerzos horizontal $Eh_{(L,e)}$ y vertical $Ev_{(L,e)}$ en sus apoyos que verifican un equilibrio estricto o con un determinado coeficiente de seguridad geométrico, otro arco, con idéntica forma y material, y una luz y un espesor doble que los del primero, los esfuerzos en este segundo son cuádruples de los del primero.

$$\text{Empuje horizontal: } \frac{Eh_{(2L,2e)}}{Eh_{(L,e)}} = 4$$

$$\text{Empuje vertical: } \frac{Ev_{(2L,2e)}}{Ev_{(L,e)}} = 4$$

Otro arco, con idéntica forma y material, el mismo espesor e y con luz doble del primero, sus empujes en los apoyos $Eh_{(2L,e)}$ y $Ev_{(2L,e)}$ están en una proporción con el primero que puede expresarse como:

$$\text{Empuje horizontal: } \frac{Eh_{(2L,e)}}{Eh_{(L,e)}} = 2\frac{2}{5}$$

$$\text{Empuje vertical: } \frac{Ev_{(2L,2)}}{Ev_{(L,e)}} = 2$$

Y otro arco, con idéntica forma y material, la misma luz L y espesor doble del primero, sus empujes en los apoyos $Eh_{(L,2e)}$ y $Ev_{(L,2e)}$ están en una proporción con el primero que que corresponden a:

$$\text{Empuje horizontal: } \frac{Eh_{(L,2e)}}{Eh_{(L,e)}} = 1\frac{2}{3}$$

$$\text{Empuje vertical: } \frac{Ev_{(L,2e)}}{Ev_{(L,e)}} = 2$$

(proporciones entre empujes, con y sin CSG, que pueden comprobarse con los valores de los ejemplos numéricos expuestos en el anejo D, pág. 163.)

6

Conclusiones.

Recapitulando, por fin, sobre todo lo dicho de la Bóveda Extremeña —la singularidad de la manera de construcción y principalmente la forma característica de su fábrica que la hace única—, la situación puede resumirse en estos términos:

6.1. Forma de la Bóveda Extremeña.

La forma de la Bóveda Extremeña que diremos se refiere a la de un abovedamiento sobre planta cuadrada, compuesta por cuatro superficies iguales y abombadas que en la intersección entre ellas y entre cada una con los muros en que descansan producen aristas claramente visibles; construida en fábrica de ladrillos y argamasa colocados a rosca —en hileras inclinadas— o a panderete —en hileras verticales—, y en ambos casos sin el auxilio de cimbras.

Entre cada par de muros opuestos se desarrollan sendas superficies, abombadas e iguales, que se atraviesan en ángulo recto y que se cortan entre sí a la misma altura, dando como resultado de dicha intersección dos aristas visibles y marcadas hacia el interior del habitáculo: son las aristas diagonales; éstas son curvas verticales que partiendo de sus extremos en los rincones se cortan en sus puntos medios y que corresponden a los de mayor cota: la clave de la bóveda. Cada una de las superficies entre muros opuestos queda dividida en dos partes iguales, que en una vista cenital tienen forma de triángulos equiláteros. De las dos superficies entre muros opuestos, de las partes comunes de las superficies entre las diagonales y los muros, se descartan de cada una las de menor cota. De esta manera, conservando las partes de las dos superficies entre las diagonales que son exteriores o de mayor

cota, queda el abovedamiento formado por las cuatro superficies seleccionadas y que conforman una bóveda de arista (Al elegir estas superficies triangulares —las externas a la intersección— se obtiene la que se conoce como bóveda de arista, en la que sus aristas diagonales están marcadas hacia el interior del espacio cubierto: son entrantes. La elección de las otras cuatro superficies —las internas a la intersección— darían la forma de la que se conoce como bóveda de rincón de claustro, en la que sus diagonales están marcadas hacia el exterior del espacio abovedado: son aristas salientes).

Las superficies que se desarrollan entre muros opuestos cortan a éstos según curvas planas y verticales, también claramente visibles, una por muro y todas iguales y salientes hacia fuera del espacio cubierto: son las aristas en muro o laterales.

Estas superficies entre muros opuestos se generan por el desarrollo de un arco de curva situada en un plano horizontal: la generatriz, que se extiende a través de una trayectoria contenida en un plano vertical que pasa por la mitad de dos muros opuestos y que también es una curva plana: la directriz (fig. 6.1).

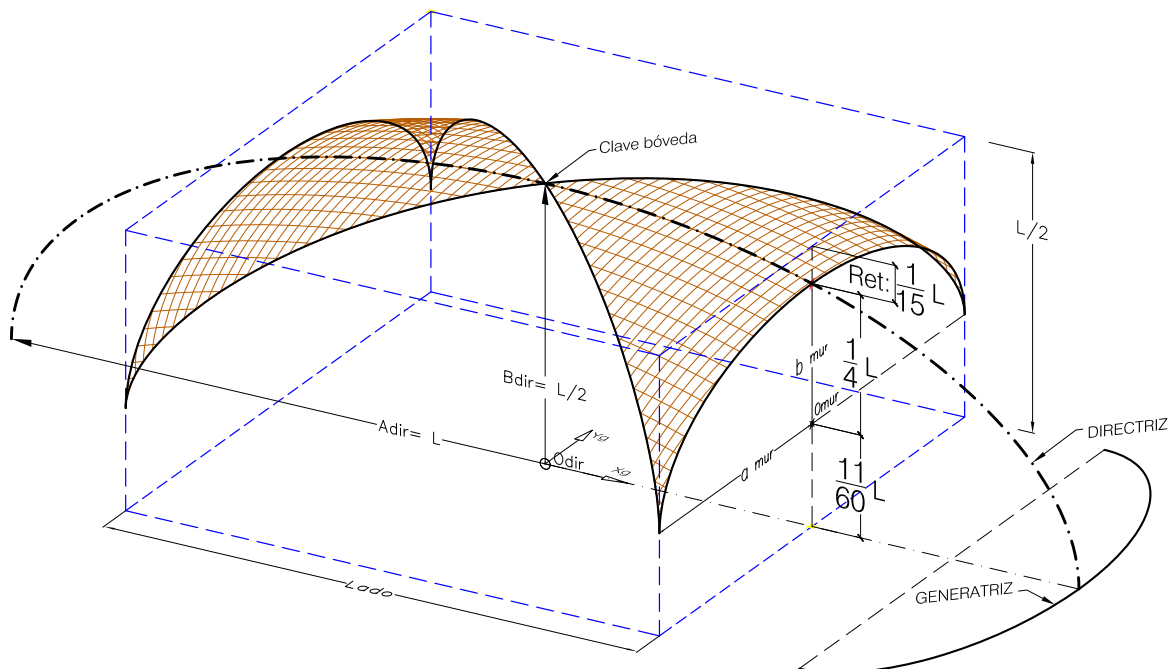


Figura 6.1: Elementos geométricos generadores de las superficies de la Bex, generatriz y trayectoria o directriz y su disposición espacial

Esta directriz es una curva elíptica con centro O_{dir} en mitad del espacio cubierto y a una distancia bajo la clave de la bóveda, en su vertical, igual a la mitad del lado. El semieje mayor de dicha elipse A_{dir} es horizontal y tiene como magnitud la misma longitud que el lado L , y el semieje menor B_{dir} tiene un valor igual a la mitad del lado. La trayectoria o directriz corta a los muros verticales en un punto que está situado más bajo con respecto a la cota de la clave de la bóveda; esa diferencia vertical es: el retumbo de la bóveda de aristas.

La generatriz es también un arco de una curva cónica, una semielipse, situada en el plano horizontal $X_g Y_g$ y tangente por su punto medio a la directriz en ese plano. El semieje mayor a_{gen} , paralelo al lado, es igual a $1/2$ del lado y por tanto igual al de la arista en muro a_{mur} ; y el semieje menor b_{gen} mide $1/4$ de lado y por tanto igual que el semieje de la arista en muro b_{mur} . Cuando la superficie generada por esta curva generatriz —al desarrollarse tangente por su punto medio a la directriz y perpendicular al plano de ésta— es cortada por un plano vertical, un muro a una distancia igual a $L/2$ desde el origen O_{dir} , resulta un arco de elipse en ese plano: es la arista en muro, con los parámetros de semiejes dichos más arriba.

Las aristas en los muros resultan unas semielipses con el eje mayor horizontal. Su origen O_{mur} en el muro está en mitad de éste y a una altura sobre el origen de la directriz O_{dir} —origen del sistema general de referencia— de $11/60$ del lado (arranque de las aristas en los muros e inicio de la fábrica de la bóveda). Por lo tanto, si el semieje menor b_{mur} es $1/4$ del lado, la diferencia de cota entre el punto más elevado de esta arista en muro y la clave de la bóveda, el retumbo, resulta de $1/15$ del lado.

La forma de la Bóveda Extremeña es el resultado de la interacción de líneas definidoras curvadas que son elípticas en un espacio de planta cuadrada delimitada por muros verticales. Esas líneas elípticas, la directriz y la generatriz, tienen cada una sus ejes correspondientes en razón *dupla* y entre ellas, la curva directriz es *dupla* de la generatriz. Ambas curvas definidoras de la superficie de la BEx —sus ejes— están en determinada razón con el lado del espacio cubierto, lo que, a partir de su diseño, simplifica y facilita el replanteo, esencialmente el de las aristas en los muros —que es desde donde se inicia la construcción de la fábrica— con solo los útiles propios del alarife: la cuerda y la plomada; ésta para marcar la dirección vertical, y con la cuerda, por sucesivas dobleces sobre sí misma, se pueden replantear las

aristas en los muros, y por encima de éstas, desde sus puntos medios y en vertical, el retumbo, cuya cota final será la correspondiente a la clave de la bóveda en mitad del abovedamiento.

Fijados los arranques de la bóveda en los rincones —que estarán a nivel— y marcando entre ellos y sobre los muros líneas horizontales, con un trozo de cuerda de longitud igual al lado, el centro de cada arista en el muro se señala, a partir de un rincón, sobre la horizontal trazada doblando sobre sí una vez la cuerda; desde ese centro y a plomo hacia arriba, doblando dos veces la misma cuerda, se marca sobre el muro la clave del arco formero —clave de la arista en el muro—; en cada muro, con los dos puntos de los arranques y el de la clave de la arista en el muro, se puede señalar fácilmente sobre el muro la semi-elipse correspondiente a cada arista por el conocido método del jardinero (replanteo «a vuelta de cordel»).

Tomando una nueva medida con la cuerda desde el centro hasta la clave del arco formero, doblando sobre sí dos veces la cuerda, se marca en el muro y a plomo por encima de la clave de la arista en el muro, la altura que sobre ésta corresponde al retumbo y por tanto la altura que sobre los arranques tendrá, por el intradós, la clave de la Bóveda Extremeña.

El procedimiento de replanteo puede realizarse igualmente con las mismas operaciones: fijando la cota sobre el suelo de la clave central de la bóveda marcada sobre los muros y replanteando en orden inverso al descrito.

6.2. Conclusiones.

De lo resuelto en este trabajo que presentamos, sin pretender agotar la materia de nuestro estudio ni ser absolutamente definitivas, concluimos:

La Bóveda Extremeña, una construcción de fábrica de ladrillo que se realiza sin el auxilio de cimbra, es, como se dijo, un bóveda de aristas con retumbo formada por cuatro superficies iguales y abombadas —de doble curvatura y convexas— generadas por curvas generatrices elípticas que se desarrollan a través de curvas directrices también elípticas; figura geométrica esta, la elipse, infrecuente y rara en bóvedas de fábrica. Esta forma de la BEx admite, dada la doble curvatura de sus superficies, trabajar mecánicamente según dos direcciones: transmitir los esfuerzos mediante y por los arcos de mayor curvatura hacia las aristas diagonales y por éstas a la parte

de los muros en los rincones como una bóveda de aristas clásica romana, y otra, en que la transmisión se realice por y mediante los arcos de menor curvatura, con forma de «gajos» que desde la clave inciden sobre cada uno de los muros a la manera de una cúpula. (ver en anexos fotografía F.10, pág. 192).

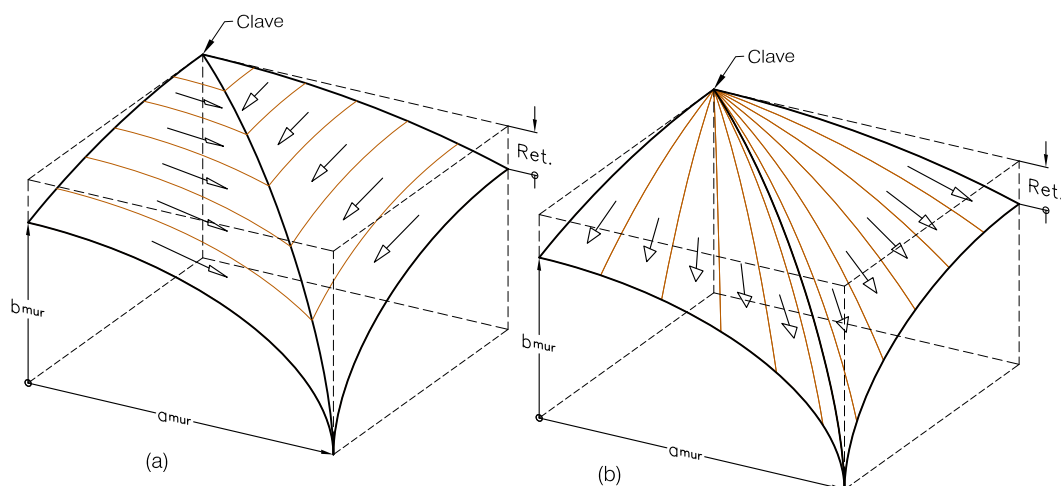


Figura 6.2: Direcciones alternativas de transmisión de esfuerzos en una Bóveda Extremeña: en a) como una bóveda de aristas hacia las diagonales; y en b) como una cúpula hacia los muros laterales.

Esta característica propia de la BEx de trabajar según dos direcciones hace que esta bóveda pueda situarse mecánicamente entre dos bóvedas bien conocidas: entre la de aristas —por intersección de dos cañones iguales a la misma altura— y entre la bóveda o cúpula vaída.

La peculiaridad mecánica distintiva está determinada por su geometría. La BEx parece el resultado de una transformación, de un cambio de forma o aspecto, que la sitúa geoméricamente entre las otras dos bóvedas mencionadas; y esta transformación se basa, esencialmente, en la deformación por la alteración de los parámetros definidores de las curvas directrices de las tres bóvedas.

La superficie de la bóveda vaída sobre una planta cuadrada de lado L puede considerarse formada —de entre varias posibles— por el desarrollo de un arco circular generatriz (de radio $L \times \sqrt{2}$) situado en un plano horizontal, que se desplaza en el espacio a través de una directriz contenida en un plano vertical, también circular y con el mismo radio, y ambas curvas, perpendiculares entre sí, con el mismo centro en el origen del sistema general de referencia. Las superficies de la Bóveda Extremeña —con el mismo sistema de referencia— se forman de la manera y con los parámetros

elípticos más arriba indicados. La bóveda de aristas por intersección de dos cañones rectos, se forma —entre otras maneras— por el desarrollo de una generatriz semicircular (de radio $L/2$) situada en un plano vertical que se desplaza, tangente por su punto medio y perpendicular, por una directriz que es una línea recta horizontal.

La posición de la BEx que se dijo —que la sitúa mecánicamente entre la bóveda vaída y la bóveda de aristas— puede explicarse por un cambio de forma en cada una de ellas, y que están, los parámetros que rigen el cambio, interrelacionados entre la tres bóvedas. Estos cambios en la forma de cada bóveda se producen por una transformación de sus elementos definidores: la directriz y la generatriz.

Este cambio de forma puede explicarse mediante el gráfico representativo de la transformación de líneas curvas circulares, a elípticas y finalmente a rectas finitas mostrado en la figura 6.3 (dibujos sin escala) realizados con solo regla y compás y una guita.

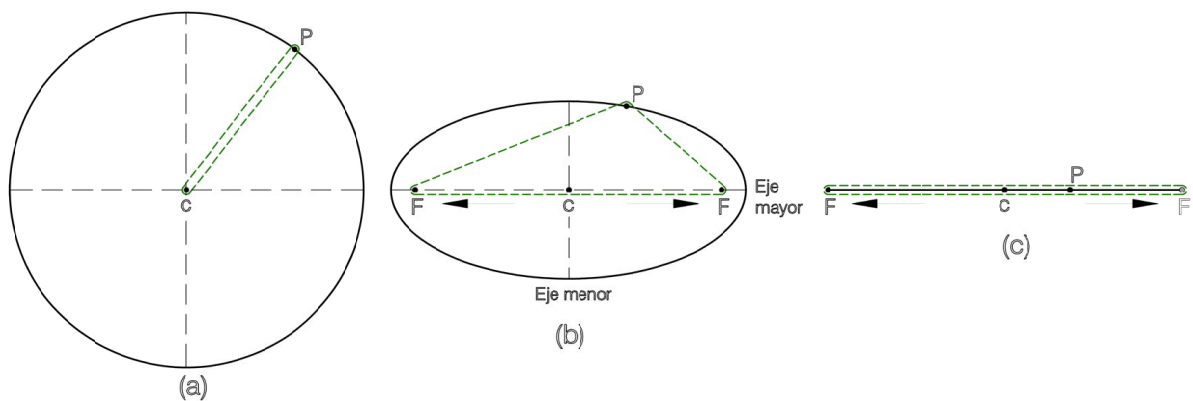


Figura 6.3: Gráfico representativo del cambio de forma por una transformación, por deformación, de una curva circular a una elíptica y a una recta.

La interpretación de la transformación entre formas representadas en la fig.6.3 es la siguiente: En (a), en el centro C de unos ejes coordenados colocamos un pequeño clavo; tomamos una guita de cualquier longitud atada por sus extremos —un bucle cerrado— que rodee al clavo y manteniendo tensa la cuerda doblada, con un marcador rodeado también por la cuerda, manteniendo la tensión y deslizando el marcador se dibuja una figura que es un círculo. En (b), si el clavo situado en C se desdobra en dos clavos y éstos se separan horizontal y gradualmente a una misma distancia del origen C y con la misma longitud de guita se dibuja con el marcador una figura

que es una elipse. En (c), cuando los clavos se separan entre sí una magnitud igual a la máxima que permite la cuerda doblada, con el marcador se dibuja una línea recta —finita y horizontal— entre los dos clavos.

Esta transformación de figuras geométricas con los parámetros fijos: la longitud de la cuerda, y variables: la separación equidistante al eje vertical de los clavos, puede realizarse desde cualquier forma de las mostradas en la fig. 6.3 a otra adyacente. En el caso de la elipse, curva generatriz y directriz que conforman la BEx, cuando los clavos —los focos— se van aproximando al centro C, la elipse se va haciendo menos excéntrica hasta transformarse finalmente en un círculo, figura ésta que corresponde a las curvas directriz y generatriz de una bóveda vaída y a la curva generatriz de una bóveda de cañón. Cuando los clavos o focos de la elipse se separan recíprocamente, la excentricidad de la elipse aumenta hasta degenerar en una recta, que es la forma de la directriz de la bóveda de cañón.

En una planta cuadrada a abovedar con las tres bóvedas mencionadas, el cambio de forma que comentamos, de sus generatrices y directrices, están en unas proporciones constantes, de tal manera que al considerar las figuras cuadriláteras en que se inscribe cada una resulta: 1) el área del cuadrado en que se inscribe la directriz de una bóveda vaída es igual al área del rectángulo *dupla* en que se inscribe la directriz de la BEx; 2) el área del cuadrado en el que se inscribe la generatriz de una bóveda vaída es cuádruple del área del rectángulo *dupla* en que se inscribe la generatriz de la BEx; 3) el área del cuadrado en que se inscriben las aristas en el muro de la bóveda vaída y de la de aristas de cañón recto, son dobles que el área del rectángulo *dupla* en que se inscribe la arista en muro de la BEx.

Para ilustrar lo antedicho, en la figura 6.4 se representa una de las posibles resoluciones gráficas de la transformación de la directriz de una bóveda vaída en la directriz de la BEx, realizado, como venimos haciendo, por métodos euclidianos: con solo la regla y el compás.

Sobre una planta cuadrada abovedada ABCD de lado L, la figura representa una sección vertical por mitad de dos lados opuestos. La directriz de la bóveda vaída es el semicírculo trazado con centro en O_{sec} y abertura del compás la semidiagonal del cuadrado ABCD. Este círculo está inscrito en otro cuadrado señalado como EFGH (de lado $L \times \sqrt{2}$). En el cuadrado que representa la planta se prolongan con rectas los lados AB y CD (líneas de puntos); éstas líneas cortan al lado EH del cuadrado

en el que se inscribe la directriz de la bóveda vaída en puntos señalados en ese lado con a' y d' . Con el compás, con centro en uno de esos puntos, el d' , y abertura el lado L se traza un círculo que corta a la línea de puntos por DC en S . Se traza una recta por E y S . Por el punto medio de EF , punto m , se traza una paralela a la anterior ES ; ésta corta a la prolongación de DC —línea de puntos— en K ($d'S$ es el lado L y SK es el radio de la bóveda vaída). Con idéntica construcción —o simplemente por simetría sobre los ejes generales vertical y horizontal— se obtienen los puntos J , I y L . Al unir consecutivamente estos puntos se tiene un rectángulo *dupla*: el $KJIL$; figura cuadrilátera —de igual área que el cuadrado $EFGH$ — en la que se inscribe la elipse *dupla* que es la directriz de la Bóveda Extremeña.

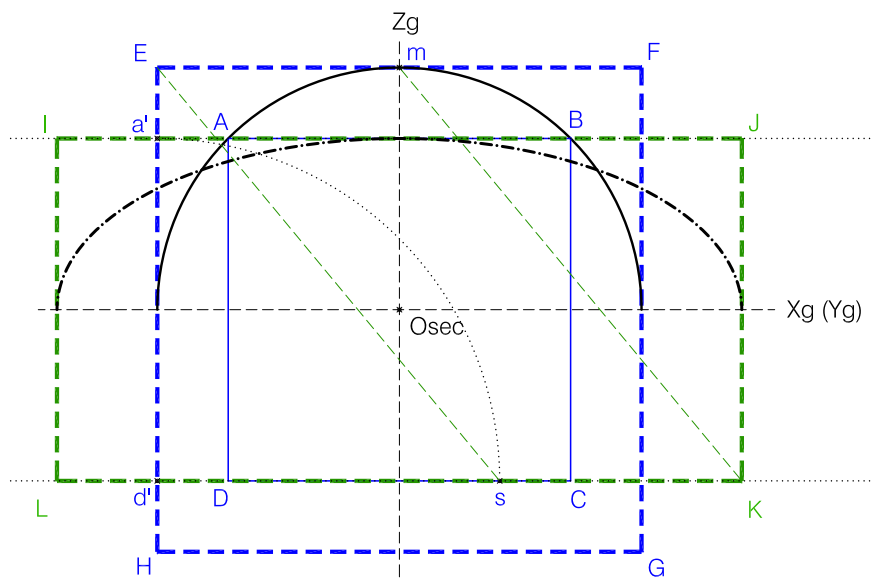


Figura 6.4: Transformación geométrica del cuadrado $EFGH$ en que se inscribe la directriz de una bóveda vaída en el rectángulo $IJKL$ *dupla* en el que se inscribe la directriz de la BEx.

Con esta construcción, a partir del radio $R_{cir} = L/\sqrt{2}$ de la directriz de la bóveda vaída, los parámetros de la elipse directriz de la BEx son:

$$\text{semieje mayor: } A_{dir} = \sqrt{2} \times R_{cir}$$

$$\text{semieje menor: } B_{dir} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times R_{cir}$$

Mediante una construcción similar a la anterior se puede obtener el rectángulo *dupla* en el que se inscribe la generatriz de la Bóveda Extremeña.

En la figura 6.5 la generatriz de la bóveda vaída es el arco circular inscrito en EFGH, arco que pasa por los puntos B y C de la planta del abovedamiento y delimitado por el eje horizontal Yg. Con centro en m —mitad del lado EH— se traza un círculo de radio mitad de la diagonal de EFGH (que es igual al lado L de la planta); éste corta al eje general Xg en el punto P. Al trazar una recta desde el vértice E por P (que corta al lado FG en S siendo FS igual a L), esta recta corta a la prolongación del lado DC (línea de puntos) en el punto señalado como J, y por simetría respecto al eje horizontal Xg se obtiene el punto I. Al unir consecutivamente los puntos J e I con los del cuadrado de la planta B y C se obtiene el rectángulo *dupla* JILK en el que se inscribe la generatriz de la BEx. La superficie del cuadrado EFGH en el que se inscribe la generatriz de la bóveda vaída es cuádruple de la del rectángulo JILK que delimita la generatriz de la BEx.

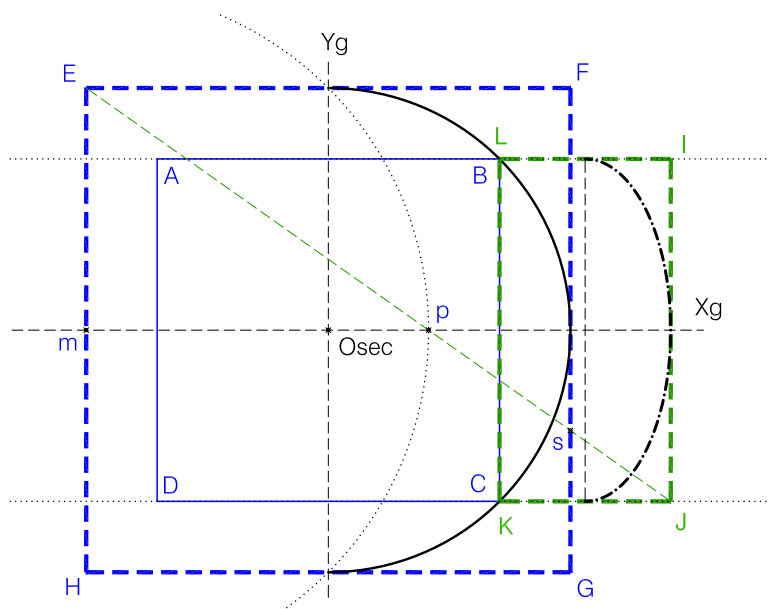


Figura 6.5: Transformación geométrica de la planta del cuadrado EFGH en que se inscribe la generatriz de una bóveda vaída en el rectángulo *dupla* IJKL en el que se inscribe la generatriz de la BEx.

Como resultado de esta construcción, los semiejes de la generatriz de la BEx a partir del radio del círculo de la generatriz de la bóveda vaída son:

$$\text{semieje mayor: } a_{gen} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times R_{cir}$$

$$\text{semieje menor: } b_{gen} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times R_{cir}$$

El cambio de forma por la transformación de las figuras de las líneas definidoras antedichas —de la directriz, y la generatriz en su caso, representada en la fig. 6.3—, implica necesariamente variaciones en el retumbo: en la diferencia de cotas de la clave central de la bóveda y la intersección de la curva directriz con el plano vertical que representa al muro. Las variaciones sufridas son de una magnitud tal que el valor del retumbo de la BEx está situado entre los extremos (a) y (c) de la transformación representada en dicha figura que se puede describir como:

$$\text{bóveda vaída} \rightarrow \text{Bóveda Extremeña} \rightarrow \text{bóveda de aristas}$$

La bóveda de aristas por la disposición horizontal y a la misma altura de las directrices de los cañones constituyentes, tiene retumbo nulo ($R_{aristas} = 0$). En la bóveda vaída, el retumbo —diferencia entre la altura de la clave de la directriz y la clave de su arista en el muro— es: $R_{vaída} = L/\sqrt{2} - L/2$, que puede tomarse con suficiente aproximación como: $R_{vaída} \approx (1/5) \times L$. En la Bóveda Extremeña, como quedó visto, el retumbo resultó: $R_{BEx} \approx (1/15) \times L$.

Con estos valores del retumbo puede establecerse una dirección de la transformación —deformación— de las directrices de las tres bóvedas con el sentido de:

$$R_{vaída} \rightarrow R_{BEx} \rightarrow R_{aristas}$$

siendo: $R_{vaída} > R_{BEx} > R_{aristas}$ y la razón entre los retumbos de la bóveda vaída y la BEx se puede evaluar como:

$$R_{BEx} \approx \frac{1}{3} R_{vaída}$$

En la transformación que comentamos también resultan afectadas las líneas generatrices que en su desarrollo espacial producen aristas —salientes— en su intersección con los muros y por tanto la relación flecha luz de estas aristas se ve afectada. Para una misma planta cuadrada, fig. 6.6, la flecha de la arista en muro de la bóveda vaída es $f_{vaída} = L/2$ (igual que en la bóveda de aristas), y la flecha de esa arista en la Bóveda Extremeña resultó $f_{BEx} = L/4$. La razón que relaciona las flechas de ambas bóvedas es:

$$f_{BEx} = \frac{1}{2} f_{vaída}$$

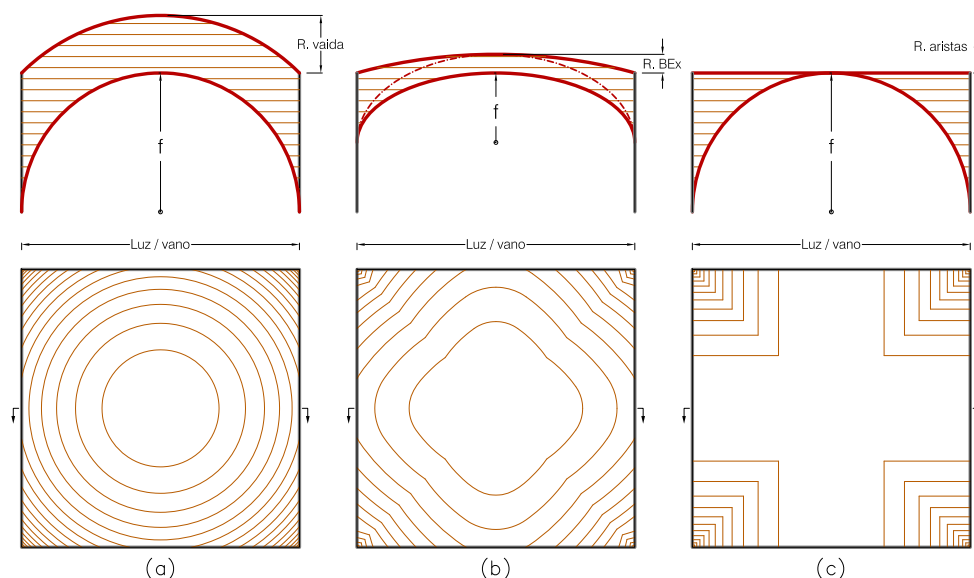


Figura 6.6: Planta con curvas de nivel y seccion vertical por mitad de muros opuestos con su retumbo en bóvedas: a) vaída, b) Extremeña y c) de aristas de cañón recto.

Igualmente, resulta transformada la altura total de la fábrica de la bóveda, desde sus arranques en los rincones hasta la clave central, en la transición de la forma que venimos comentando, desde una bóveda vaída hasta una de aristas, entre las que se encuentra la BEx. En la bóveda vaída, la altura total H de la fábrica, corresponde al radio de su curva directriz: $H_{vaída} = L/\sqrt{2}$, que puede tomarse como $H_{vaída} \approx (12/17) \times L$ (en la bóveda de aristas es $H_{aristas} = L/2$); en la Bóveda Extremeña, esta altura, la suma del semieje menor de la generatriz y el retumbo, quedó como $H_{BEx} \approx (19/60) \times L$. Aproximando valores, la razón puede expresarse como:

$$H_{BEx} \approx \frac{1}{2} H_{vaída}$$

Las resoluciones gráficas realizadas para determinar la forma de la Bóveda Extremeña con solo la regla y el compás van más allá. Como se dijo, los esfuerzos mecánicos en esta bóveda pueden tomar dos direcciones, siempre en el interior de la fábrica, dada la doble curvatura de cada una de sus cuatro superficies: una, con forma de «gajos» dirigida desde la clave hacia los muros de apoyo como lo hace una cúpula (fig. 6.2 b), y otra, con forma de arcos paralelos a los muros, arcos que descansan en las diagonales como una bóveda de aristas romana (fig. 6.2 a).

Como las líneas de esfuerzo tienen *predilección* para transitar por la parte de las superficies de mayor curvatura —en la dirección de mayor pendiente—, si la geometría o los muros de apoyo no varían del modelo expuesto para la BEx, los esfuerzos se dirigirán como en el segundo caso, por multitud de arcos paralelos a los muros y apoyados en las aristas diagonales y a través de estas aristas hacia los muros de los rincones que hacen de contrarresto.

Con esta orientación preeminente de los esfuerzos en la fábrica, en cada uno de los arcos elípticos *dupla* en que se pueden dividir las superficies de la BEx, se puede obtener —como se vió más arriba en «Empujes en arco elíptico *dupla* con regla y compás.»— el valor numérico de los esfuerzos horizontales y verticales de cada arco en su apoyo sobre la arista diagonal en que descansa (con cualquier Coeficiente de Seguridad Geométrico que se quiera establecer), y por esta arista, mediante suma vectorial, los esfuerzos totales de cada superficie sobre el contrarresto en los rincones entre los muros que delimitan el espacio abovedado.

Las consideraciones, valoraciones y conclusiones realizadas en este trabajo sobre la forma de la Bóveda Extremeña son el resultado del análisis de los levantamientos realizados en bóvedas existentes sobre plantas cuadriláteras diversas, que, aunque no abarcan todo el territorio de su implantación, creemos, a nuestro juicio, suficiente para definir —con el análisis estadístico realizado— su geometría con el número (ver anejo A) y variabilidad de plantas abovedadas (ver anejo E) de las muestras elegidas.

Con lo expuesto, creemos acertado situar la Bóveda Extremeña —por su geometría y como consecuencia de ésta su mecánica, es decir, la manera de transmitir las cargas al contrarresto—, entre dos bóvedas de geometría y mecánica bien conocidas desde la antigüedad, corroborando que se sitúa entre la bóveda esférica vaída —una cúpula— y la bóveda de aristas de cañon recto (fig. 6.7).

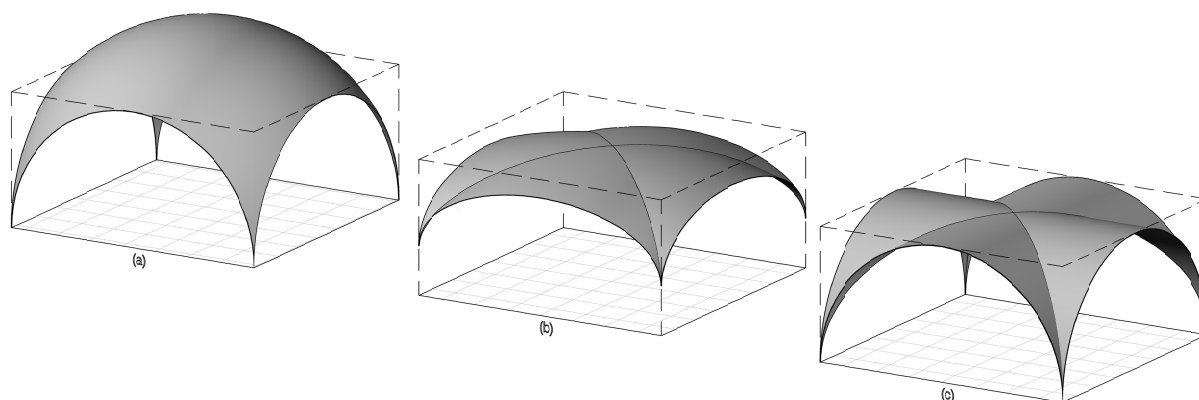


Figura 6.7: Situación intermedia de la Bóveda Extremeña (b), por transformación geométrica y como consecuencia mecánica, entre la bóveda vaída (a) y la bóveda de aristas de cañon recto (c).

La forma de la superficie de la Bóveda Extremeña como resultado de la geometría de sus líneas definidoras directriz y generatriz, de las proporciones de los parámetros de cada una de ellas y entre ellas, y que están todas en determinada razón con el lado del espacio cubierto, entendemos que es singular, y, en comparación con otras formas de abovedamiento, es única y peculiar: su geometría la distingue entre todas.

Esta forma característica y propia de la BEx, y sus consecuencias mecánicas, nos induce a pensar que proviene del desarrollo de una idea —un conocimiento— materializada en un diseño primigenio. Se ha comprobado que este diseño, que presumimos original, es factible de realizar con solo los utensilios de dibujo y dimensionamiento euclidianos (sea por los métodos aquí expuestos u otros posibles) únicos utilizados en la antigüedad; y todo ello creemos que evidencia que esta forma de abovedamiento no es un producto de la casualidad, del azar: es un diseño intencionado; diseño con lógica y basado en un razonamiento, materializado en esa parte peninsular con razón de ser y éxito por generaciones y adaptado a las necesidades, los medios y materiales existentes.

* * *

Anexos

Anexo A

Datos de los levantamientos.

A.1. Localización geográfica de las bóvedas.

En el mapa de la figura A.1 están señaladas las localidades en que se realizaron levantamientos topográficos de las Bóvedas Extremeñas analizadas en este trabajo.

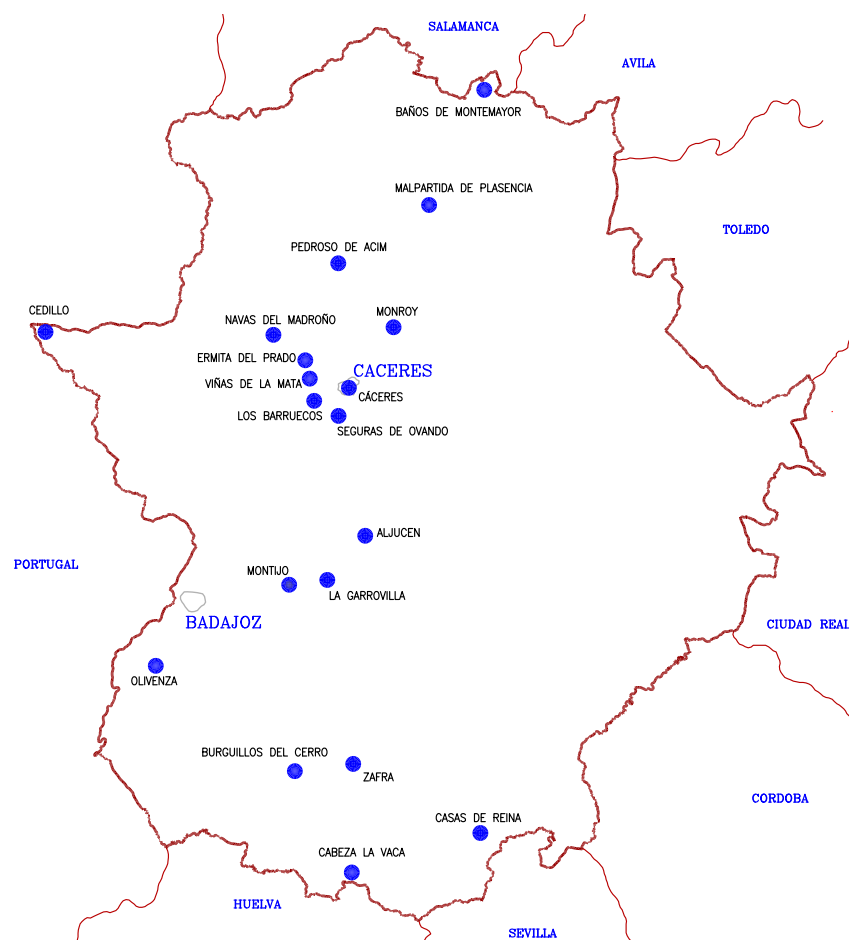


Figura A.1: Mapa de localización de las bóvedas del levantamiento

A.2. Datos catastrales de los inmuebles.

Se acompaña cuadro con la identificación catastral y el número de muestras en cada una de las edificaciones en que se han realizado los levantamientos topográficos de bóvedas. La información catastral del bien inmueble es pública y accesible en el portal: «Sede Electrónica del Catastro».

Cuadro A.1: Nombre y número de bóvedas en cada edificación con identificación catastral de los inmuebles de los levantamientos topográficos.

Nombre bód. localización	nº bód.	provincia	tipo arquitectura	ref. catastral
LosBarruecos Pol. 13 par. 30 (Malpartida de Cáceres)	1	Cáceres	industrial	10118A013000300000PJ
ErmitaPrado_(5 y 4) Pol. 5 par. 37 (Garrovillas de Alconetar)	2	Cáceres	religiosa-ermita	10083A005000370000DT
Seguras_(1 y 2) Pol. 36 par 15 (TM Cáceres)	2	Cáceres	casa-palacio	10900A036000150000MU
Becerra_(1 y 2) Pz. San Jorge 10 (Cáceres)	2	Cáceres	casa-palacio	6428102QD2762G0001KG
CáceresPL Pz. Mayor 5 (Cáceres)	1	Cáceres	casa-vivienda	6129209QD2762G0001XG
LaGarrovilla Cl. Miguel Hernández 10 (La Garrovilla)	1	Badajoz	casa-vivienda	9112102QD1191S0001HH
CasasReina3 Cl. Triana 3 (Casas de Reina)	1	Badajoz	casa-vivienda	9927104TH3392N0001UB
CasasReina13 Cl. Rodríguez Sánchez 13 (Casas de Reina)	1	Badajoz	casa-vivienda	0026316TH4302N0001ML

continúa

Nombre b6v. localizaci6n	n6 b6v.	provincia	tipo arquitectura	ref. catastral
Vi6nasMata Pol. 16 par. 5025 (C6ceres)	1	C6ceres	casa-vivienda	10900A016050250001QQ
Cedillo (I y II) Cl. Casares 5 (Cedillo)	2	C6ceres	industrial	902102PD2980N0001LE
NavasMadro6no(I y II) Cl. Coronel Guill6n 13 (Navas del Madro6no)	2	C6ceres	casa-vivienda	1989107QD0818N0001SE
Aljuc6nExt Av. Extremadura 25 (Aljuc6n)	1	Badajoz	casa-vivienda	1154509QD3215S0001ES
Olivenza Paseo Hern6n Cort6s 2 (Olivenza)	1	Badajoz	casa-vivienda	5437908PC6853N0001YQ
Ba6nosM Avd. las Termas 64 (Ba6nos de Montemayor)	1	C6ceres	balneario ¹⁴⁶	7475011TK5677N0001AB
BurguillosC Avd. de Espa6a 4 (Burguillos del Cerro)	1	Badajoz	casa-vivienda	0511114QC1501S0001SI
Montijo45 Cl. L6pez de Ayala 45 (Montijo)	1	Badajoz	casa-vivienda	7298628QD0079N0001OR
Zafra Pz. Chica 15 (Zafra)	1	Badajoz	casa-vivienda	5363030QC2556S0002BA
Palancar (1, 2 y 3) Palancar (Pedroso de Acim)	3	C6ceres	religiosa	001300200QE21A0001MM
CasasReina6 Pz. Plazuela 6 (Casas de Reina)	1	Badajoz	casa-vivienda	9926613TH3392N0001UB

contin6a

Nombre b6v. localizaci6n	n6 b6v.	provincia	tipo arquitectura	ref. catastral
Monrroy Cl. Tejares 18 (Monrroy)	1	C6ceres	casa-vivienda	9813004QD3991S0001WA
MalparPlasen Cl. La m6sica 11 (Malpartida de Plasencia)	1	C6ceres	casa-vivienda	2600123QE5320B0001ZB
Montijo53 Cl. L6pez de Ayala 53 (Montijo)	1	Badajoz	casa-vivienda	7298657QD0079N0001TR
LaVaca Cl. Ntra. Sra. Guadalupe 1 (Cabeza La Vaca)	1	Badajoz	casa-vivienda	6487416QC2168N0001SB

(fin cuadro A.1)

A.3. Datos levantamiento de las bóvedas

Para el levantamiento topográfico de cada bóveda por las distintas secciones verticales indicadas en la figura 3.3 (pág. 49) se utilizó un taquímetro de construcción propia mostrado en la fig. A.2.



Figura A.2: Instrumento utilizado en el levantamiento topográfico de las bóvedas

El instrumento consiste en un distanciómetro acoplado a la plataforma móvil de la cabeza de un trípode. El distanciómetro, un Leica DISTO X310, en una de las distintas funciones que ofrece, permite la lectura de la distancia real al punto observado con una precisión de $\pm 2,0$ mm, y para cada lectura el ángulo vertical de la visual con precisión de $\pm 0,2^\circ$. El ángulo horizontal de cada visual se obtiene de la lectura de un índice fijado en la cabeza móvil sobre un círculo graduado instalado en la parte fija del trípode. El círculo, con un diámetro de 25 cm, está graduado en fracciones de un grado y entre dos marcas se puede apreciar con el índice divisiones de un cuarto de grado. Los errores que se pueden cometer en la apreciación de esa fracción de grado en una visual horizontal de 5,0 m son como máximo de 0,02 m. Si el aparato se estaciona cercano a la vertical de la clave, este error en la posición ho-

rizontal del punto visado correspondería a una bóveda de vano de unos diez metros, dimensión que no hemos encontrado en ningún caso; como el vano máximo de los levantamientos realizados apenas supera los 6,0 metros consideramos insignificante el posible error de medición.

Transformada la libreta de campo a coordenadas cartesianas en un sistema general de referencia, se realiza la representación gráfica de las ocho secciones consideradas para cada bóveda. En el siguiente cuadro se muestran las dimensiones representativas de cada bóveda estudiada.

Cuadro A.2: Datos generales del levantamiento

Bóveda Nombre (lado)	luz	clave	flecha	ret
LosBarruecos_(F)	4.54	3.94	1.2	0.39
LosBarruecos_(A)	3.9	3.94	1.02	0.38
LosBarruecos_(I)	4.78	3.94	1.38	0.35
LosBarruecos_(D)	4.74	3.94	1.4	0.36
ErmitaPrado5_(F)	4.18	3.82	1.06	0.34
ErmitaPrado5_(A)	4.30	3.82	0.98	0.48
ErmitaPrado5_(I)	4.22	3.82	0.98	0.47
ErmitaPrado5_(D)	3.86	3.82	1.09	0.3
ErmitaPrado4_(F)	4.32	3.92	1.32	0.33
ErmitaPrado4_(A)	3.78	3.92	1.02	0.4
ErmitaPrado4_(I)	3.89	3.92	1.16	0.42
ErmitaPrado4_(D)	4.16	3.92	1.26	0.39
Seguras1_(F)	4.6	4.0	0.87	0.28
Seguras1_(A)	4.6	4.0	0.92	0.25
Seguras1_(I)	4.08	4.0	0.9	0.26
Seguras1_(D)	4.2	4.0	0.91	0.24
Seguras2_(F)	4.6	4.01	0.91	0.28
Seguras2_(A)	4.5	4.01	0.89	0.28
Seguras2_(I)	4.12	4.01	0.9	0.27
Seguras2_(D)	4.08	4.01	0.91	0.24

continúa

Bóveda				
Nombre (lado)	luz	clave	flecha	ret
Becerra1_(F)	6.16	4.17	1.57	0.43
Becerra1_(A)	6.16	4.17	1.38	0.47
Becerra1_(I)	5.56	4.17	1.38	0.48
Becerra1_(D)	4.58	4.17	1.35	0.52
Becerra2_(F)	6.48	3.98	1.34	0.34
Becerra2_(A)	6.3	3.98	1.46	0.36
Becerra2_(I)	5.0	3.98	1.49	0.32
Becerra2_(D)	4.78	3.98	1.34	0.28
CaceresPL_(F)	3.48	3.95	0.84	0.2
CaceresPL_(A)	3.5	3.95	0.92	0.13
CaceresPL_(I)	3.38	3.95	0.89	0.12
CaceresPL_(D)	3.82	3.95	0.9	0.19
LaGarrovilla_(F)	2.4	2.603	0.74	0.12
LaGarrovilla_(A)	2.26	2.603	0.74	0.15
LaGarrovilla_(I)	2.62	2.603	0.79	0.11
LaGarrovilla_(D)	2.58	2.603	0.77	0.1
CasasReina3_(F)	3.18	3.03	0.62	0.24
CasasReina3_(A)	3.22	3.03	0.63	0.27
CasasReina3_(I)	3.26	3.03	0.64	0.25
CasasReina3_(D)	3.24	3.03	0.61	0.28
CasasReina13_(F)	3.4	2.75	0.68	0.25
CasasReina13_(A)	3.34	2.75	0.62	0.33
CasasReina13_(I)	3.36	2.75	0.7	0.23
CasasReina13_(D)	3.58	2.75	0.76	0.2
ViñasMata_(F)	3.28	2.75	0.8	0.19
ViñasMata_(A)	3.42	2.75	0.84	0.17
ViñasMata_(I)	2.88	2.75	0.82	0.19
ViñasMata_(D)	3.1	2.75	0.79	0.26
CedilloI_(F)	4.49	3.1	1.22	0.35
CedilloI_(A)	4.38	3.1	1.24	0.34
CedilloI_(I)	4.08	3.1	1.19	0.39
CedilloI_(D)	4.06	3.1	1.22	0.39

continúa

Bóveda				
Nombre (lado)	luz	clave	flecha	ret
CedilloII_(F)	4.36	2.98	1.17	0.28
CedilloII_(A)	4.28	2.98	1.23	0.25
CedilloII_(I)	4.34	2.98	1.25	0.23
CedilloII_(D)	4.42	2.98	1.24	0.23
NavasMadroñoI_(F)	4.3	3.312	1.0	0.24
NavasMadroñoI_(A)	4.24	3.312	0.98	0.21
NavasMadroñoI_(I)	4.4	3.312	0.98	0.25
NavasMadroñoI_(D)	4.48	3.312	0.97	0.2
NavasMadroñoII_(F)	3.68	2.93	1.06	0.17
NavasMadroñoII_(A)	3.6	2.93	1.09	0.12
NavasMadroñoII_(I)	3.68	2.93	1.09	0.12
NavasMadroñoII_(D)	3.52	2.93	1.1	0.14
AljucenExt_(F)	2.76	2.965	0.91	0.185
AljucenExt_(A)	2.8	2.965	0.85	0.225
AljucenExt_(I)	3.04	2.965	0.86	0.245
AljucenExt_(D)	2.93	2.965	0.89	0.175
Olivenza_(F)	4.17	4.32	1.22	0.157
Olivenza_(A)	4.0	4.32	1.23	0.14
Olivenza_(I)	4.07	4.32	1.21	0.142
Olivenza_(D)	4.0	4.32	1.21	0.15
BañosM_(F)	4.18	2.74	0.82	0.18
BañosM_(A)	4.12	2.74	0.89	0.28
BañosM_(I)	2.31	2.74	0.7	0.31
BañosM_(D)	2.28	2.74	0.6	0.34
BurguillosC_(F)	3.52	3.0	0.88	0.13
BurguillosC_(A)	3.7	3.0	0.92	0.11
BurguillosC_(I)	2.88	3.0	0.82	0.18
BurguillosC_(D)	2.77	3.0	0.79	0.15
Montijo45_(F)	2.88	3.39	0.65	0.21
Montijo45_(A)	2.92	3.39	0.63	0.21
Montijo45_(I)	3.24	3.39	0.75	0.13
Montijo45_(D)	3.36	3.39	0.74	0.13

continúa

Bóveda				
Nombre (lado)	luz	clave	flecha	ret
LaVaca_(F)	2.16	2.8	0.63	0.15
LaVaca_(A)	2.16	2.8	0.6	0.18
LaVaca_(I)	3.14	2.8	0.7	0.11
LaVaca_(D)	3.12	2.8	0.69	0.12

bóvedas con retumbo poco marcado

Zafra_(F)	3.32	3.21	0.82	0.01
Zafra_(A)	3.22	3.21	0.79	0.04
Zafra_(I)	3.08	3.21	0.77	0.05
Zafra_(D)	3.0	3.21	0.82	0.01

Palancar1_(F)	2.14	3.1	0.76	0.04
Palancar1_(A)	2.18	3.1	0.74	0.02
Palancar1_(I)	2.14	3.1	0.76	0.03
Palancar1_(D)	2.14	3.1	0.65	0.06

Palancar2_(F)	2.22	3.1	0.68	0.05
Palancar2_(A)	2.26	3.1	0.55	0.02
Palancar2_(I)	2.12	3.1	0.65	0.02
Palancar2_(D)	2.14	3.1	0.62	0.06

Palancar3_(F)	2.14	3.16	0.65	0.08
Palancar3_(A)	2.16	3.16	0.62	0.07
Palancar3_(I)	2.14	3.16	0.6	0.05
Palancar3_(D)	2.18	3.16	0.63	0.07

CasasReina6_(F)	3.2	2.71	0.75	0.01
CasasReina6_(A)	2.96	2.71	0.77	0.01
CasasReina6_(I)	2.94	2.71	0.71	0.04
CasasReina6_(D)	2.72	2.71	0.7	0.07

Monrroy_(F)	3.04	3.02	0.61	0.06
Monrroy_(A)	2.98	3.02	0.55	0.07
Monrroy_(I)	3.02	3.02	0.56	0.07
Monrroy_(D)	3.08	3.02	0.63	0.04

continúa

Bóveda				
Nombre (lado)	luz	clave	flecha	ret
MalparPlasen (F)	3.84	2.75	0.87	0.07
MalparPlasen (A)	3.84	2.75	0.84	0.09
MalparPlasen (I)	3.42	2.75	0.79	0.15
MalparPlasen (D)	3.52	2.75	0.74	0.19
Montijo53_(F)	3.33	3.21	0.92	0.03
Montijo53_(A)	3.46	3.21	0.88	0.07
Montijo53_(I)	3.8	3.21	0.92	0.05
Montijo53_(D)	3.87	3.21	0.97	0.03

(fin cuadro A.2)

Anexo B

Ajuste de curvas.

Se expone en este anexo el método seguido para la obtención de las curvas geométricas que mejor se adaptan a las distintas superficies entre las aristas que forman las bóvedas Extremeñas que se han estudiado en este trabajo: primero las curvas de las secciones entre muros opuestos y segundo las curvas de las aristas en los muros.

B.1. Introducción.

Para la descripción y análisis de las curvas que forman una bóveda es necesario recurrir a la geometría al ser esta la parte de las matemáticas que trata de la extensión, de la medida, de las relaciones entre sus dimensiones y de las formas expresables con medidas. Con la ayuda de la geometría analítica se puede interpretar, a partir de las coordenadas de puntos en un sistema de referencia cartesiano, la medida de las distancias, las relaciones entre los puntos, las superficies que definen etc. También se pueden obtener las ecuaciones matemáticas de las curvas que describen y relacionan los puntos y otros elementos definidores de la bóveda como ejes de simetría y de revolución, dimensiones y proporciones entre ellos, intersección espacial de superficies y sus formas, etc. A partir de dichas ecuaciones se puede interpretar la *armonía de proporciones* en base a las relaciones entre los distintos elementos constitutivos de la forma de la bóveda mediante sencillos cálculos algebraicos.

Se dice que un conjunto de puntos constituye un lugar geométrico respecto de una cierta propiedad, cuando todo punto del conjunto posee esta propiedad y, recíprocamente, todo punto del plano que posee la propiedad pertenece a dicho conjunto. Los lugares geométricos de las dos curvas planas delimitadoras de las bóvedas y que tienen la misma propiedad, satisfacen la ecuación general de segundo grado.¹⁴⁷

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Esta ecuación general de cónicas representa los lugares geométricos del plano de elipses, parábolas e hipérbolas.

Al observar que las curvas de las aristas en muros y por las secciones entre muros son arcos rebajados, simétricos respecto a un eje vertical que las divide en dos iguales, y que el radio de curvatura disminuye desde la clave de los arcos hasta sus extremos en los rincones, se optó por estudiar las cónicas elípticas como aquellas que mejor se podrían adaptar a los puntos del levantamiento.

Conocida la propiedad de la elipse que es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos, llamados focos, es constante, dicha ecuación representará a una elipse cuando la relación entre los seis parámetros satisfagan las dos condiciones siguientes:

a) $B^2 - 4AC < 0$, con la que se excluyen parábolas e hipérbolas y

b) $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F > 0$, por la que se evitan elipses degeneradas.

Para una elipse¹⁴⁸, referida a un sistema de referencia, con centro en (x_c, y_c) y siendo a el semieje mayor y b el semieje menor, la ecuación general de la cónica que satisface las condiciones anteriores puede expresarse de forma cartesiana como:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1,$$

que describe el lugar geométrico de los puntos (x_e, y_e) de una elipse con eje mayor paralelo al de referencia OX (horizontal), eje menor paralelo al OY (vertical), distancia focal $c < a$ y semiejes mayor y menor con relación $a > b$.

Se comprueba la identidad de las ecuaciones cartesianas con la general de cónicas, con las condiciones impuestas en a) y b), al estar relacionados sus parámetros según:

$$A = b^2, \quad B = 0, \quad C = a^2, \quad D = -2b^2x_c, \quad \text{y} \quad F = b^2x_c^2 + a^2y_c^2 - a^2b^2.$$

Las dimensiones de los parámetros de las curvas teóricas que se dirán en este apartado están referidas a la ecuación cartesiana de la elipse.

Para cada uno de los ajustes realizados, dos curvas en secciones y cuatro en aristas por bóveda levantada, se indican los valores obtenidos en distintos cuadros de resultados que se muestran más abajo.

B.2. Ajuste de las aristas en muro.

El resultado de los ajustes de curvas elípticas en las aristas en muro se exponen en el siguiente cuadro. En cada bóveda, con su nombre, sus cuatro aristas están identificadas con la letra asignada a su posición según los planos de planta; se indica, para cada una de ellas, la luz del lado, el retumbo y los valores de los semiejes mayor y menor de la elipse fijada. Además se incluye los valores medios de la luz y el retumbo así como de los semiejes.

Cuadro B.1: Ajuste de las aristas en muro.

Bóveda Nombre (lado)	elipse			
	luz	ret	a_{mur}	b_{mur}
LosBarruecos_(F)	4.54	0.39	2.213	1.194
LosBarruecos_(A)	3.9	0.38	1.905	1.016
LosBarruecos_(I)	4.78	0.35	2.344	1.338
LosBarruecos_(D)	4.74	0.36	2.323	1.325
	4.49	0.37	2.261	1.218
ErmitaPrado5_(F)	4.18	0.34	2.047	1.143
ErmitaPrado5_(A)	4.3	0.48	2.148	1.012
ErmitaPrado5_(I)	4.22	0.47	2.095	1.192
ErmitaPrado5_(D)	3.86	0.3	1.895	1.089
	4.14	0.397	2.046	1.109
ErmitaPrado4_(F)	4.32	0.33	2.152	1.323
ErmitaPrado4_(A)	3.78	0.4	1.94	1.178
ErmitaPrado4_(I)	3.89	0.42	1.981	1.152
ErmitaPrado4_(D)	4.16	0.39	2.144	1.321
	4.037	0.39	2.054	1.244
Seguras1_(F)	4.6	0.28	2.339	1.066
Seguras1_(A)	4.6	0.25	2.359	1.169
Seguras1_(I)	4.08	0.26	2.131	1.249
Seguras1_(D)	4.2	0.24	2.151	1.158
	4.37	0.26	2.245	1.16

continúa

Bóveda Nombre (lado)	elipse			
	luz	ret	a_{mur}	b_{mur}
Seguras2_(F)	4.6	0.28	2.438	1.354
Seguras2_(A)	4.5	0.28	2.288	1.06
Seguras2_(I)	4.12	0.27	2.229	1.391
Seguras2_(D)	4.08	0.24	2.052	1.051
	4.325	0.27	2.252	1.214
Becerra1_(F)	6.16	0.43	3.077	1.678
Becerra1_(A)	6.16	0.47	3.101	1.511
Becerra1_(I)	5.56	0.48	2.773	1.451
Becerra1_(D)	4.58	0.52	2.287	1.523
	5.615	0.475	2.809	1.541
Becerra2_(F)	6.48	0.34	3.271	1.546
Becerra2_(A)	6.3	0.36	3.199	1.52
Becerra2_(I)	5.0	0.32	2.464	1.478
Becerra2_(D)	4.78	0.28	2.379	1.38
	5.64	0.33	2.828	1.481
CaceresPL_(F)	3.48	0.2	1.739	0.865
CaceresPL_(A)	3.5	0.13	1.732	0.935
CaceresPL_(I)	3.38	0.12	1.674	0.88
CaceresPL_(D)	3.82	0.19	1.9	0.93
	3.545	0.16	1.761	0.9
LaGarrovilla_(F)	2.4	0.12	1.19	0.733
LaGarrovilla_(A)	2.26	0.15	1.13	0.7
LaGarrovilla_(I)	2.62	0.11	1.311	0.787
LaGarrovilla_(D)	2.58	0.1	1.282	0.786
	2.465	0.12	1.228	0.752
CasasReina3_(F)	3.18	0.24	1.63	0.718
CasasReina3_(A)	3.22	0.27	1.643	0.74
CasasReina3_(I)	3.26	0.25	1.649	0.707
CasasReina3_(D)	3.24	0.28	1.661	0.683
	3.225	0.26	1.646	0.712
CasasReina13_(F)	3.4	0.25	1.714	0.756
CasasReina13_(A)	3.34	0.33	1.715	0.69
CasasReina13_(I)	3.36	0.23	1.697	0.71
CasasReina13_(D)	3.58	0.2	1.804	0.765
	3.42	0.25	1.733	0.73

continúa

Bóveda Nombre (lado)	elipse			
	luz	ret	a_{mur}	b_{mur}
ViñasMata_(F)	3.28	0.19	1.651	0.905
ViñasMata_(A)	3.42	0.17	1.707	0.858
ViñasMata_(I)	2.88	0.19	1.431	0.81
ViñasMata_(D)	3.1	0.26	1.56	0.8
	3.17	0.203	1.587	0.84
CedilloI_(F)	4.49	0.35	2.217	1.214
CedilloI_(A)	4.38	0.34	2.172	1.248
CedilloI_(I)	4.08	0.39	2.02	1.177
CedilloI_(D)	4.06	0.39	2.02	1.217
	4.253	0.37	2.107	1.214
CedilloII_(F)	4.36	0.28	2.161	1.17
CedilloII_(A)	4.28	0.25	2.133	1.242
CedilloII_(I)	4.34	0.23	2.172	1.247
CedilloII_(D)	4.42	0.23	2.198	1.242
	4.35	0.25	2.166	1.225
NavasMadroñoI_(F)	4.3	0.24	2.158	1.009
NavasMadroñoI_(A)	4.24	0.21	2.123	0.98
NavasMadroñoI_(I)	4.4	0.25	2.209	1.056
NavasMadroñoI_(D)	4.48	0.2	2.232	1.053
	4.355	0.22	2.181	1.025
NavasMadroñoII_(F)	3.68	0.17	1.846	1.086
NavasMadroñoII_(A)	3.6	0.12	1.793	1.071
NavasMadroñoII_(I)	3.68	0.12	1.835	1.078
NavasMadroñoII_(D)	3.52	0.14	1.763	1.078
	3.62	0.14	1.809	1.078
AljucenExt_(F)	2.76	0.185	1.384	0.864
AljucenExt_(A)	2.8	0.225	1.387	0.845
AljucenExt_(I)	3.04	0.245	1.519	0.85
AljucenExt_(D)	2.93	0.175	1.441	0.841
	2.882	0.208	1.433	0.850

continúa

Bóveda Nombre (lado)	elipse			
	luz	ret	a_{mur}	b_{mur}
Olivenza_(F)	4.17	0.157	2.068	1.15
Olivenza_(A)	4.0	0.14	1.969	1.135
Olivenza_(I)	4.07	0.142	2.014	1.136
Olivenza_(D)	4.0	0.15	1.979	1.178
	4.06	0.147	2.01	1.15
BañosM_(F)	4.18	0.18	2.13	1.033
BañosM_(A)	4.12	0.28	2.149	1.058
BañosM_(I)	2.31	0.31	1.135	0.652
BañosM_(D)	2.28	0.34	1.118	0.603
	3.223	0.277	1.633	0.836
BurguillosC_(F)	3.52	0.13	1.747	0.876
BurguillosC_(A)	3.7	0.11	1.843	0.92
BurguillosC_(I)	2.88	0.18	1.428	0.779
BurguillosC_(D)	2.77	0.15	1.374	0.77
	3.217	0.143	1.598	0.836
Montijo45_(F)	2.88	0.21	1.474	0.682
Montijo45_(A)	2.92	0.21	1.523	0.689
Montijo45_(I)	3.24	0.13	1.654	0.8
Montijo45_(D)	3.36	0.13	1.72	0.808
	3.1	0.17	1.593	0.745
Zafra_(F)	3.32	0.01	1.677	0.906
Zafra_(A)	3.22	0.04	1.628	0.876
Zafra_(I)	3.08	0.05	1.557	0.864
Zafra_(D)	3.0	0.01	1.51	0.859
	3.155	0.028	1.593	0.876
Palancar1_(F)	2.14	0.04	1.07	0.79
Palancar1_(A)	2.18	0.02	1.087	0.753
Palancar1_(I)	2.14	0.03	1.083	0.777
Palancar1_(D)	2.14	0.06	1.077	0.656
	2.15	0.037	1.079	0.744
Palancar2_(F)	2.22	0.05	1.112	0.712
Palancar2_(A)	2.26	0.02	1.134	0.648
Palancar2_(I)	2.12	0.02	1.064	0.664
Palancar2_(D)	2.14	0.06	1.077	0.72
	2.185	0.038	1.097	0.686

continúa

Bóveda Nombre (lado)	elipse			
	luz	ret	a_{mur}	b_{mur}
Palancar3_(F)	2.14	0.08	1.07	0.726
Palancar3_(A)	2.16	0.07	1.096	0.732
Palancar3_(I)	2.14	0.05	1.074	0.702
Palancar3_(D)	2.18	0.07	1.113	0.765
	2.155	0.068	1.088	0.73
CasasReina6_(F)	3.2	0.01	1.644	0.9
CasasReina6_(A)	2.96	0.01	1.472	0.768
CasasReina6_(I)	2.94	0.04	1.465	0.802
CasasReina6_(D)	2.72	0.07	1.349	0.72
	2.955	0.033	1.482	0.797
Monrroy_(F)	3.04	0.06	1.539	0.72
Monrroy_(A)	2.98	0.07	1.51	0.642
Monrroy_(I)	3.02	0.07	1.55	0.688
Monrroy_(D)	3.08	0.04	1.565	0.679
	3.03	0.06	1.532	0.682
MalparPlasen (F)	3.84	0.07	1.927	0.927
MalparPlasen (A)	3.84	0.09	1.928	0.91
MalparPlasen (I)	3.42	0.15	1.69	0.812
MalparPlasen (D)	3.52	0.19	1.768	0.825
	3.655	0.125	1.828	0.869
Montijo53_(F)	3.33	0.03	1.647	0.858
Montijo53_(A)	3.46	0.07	1.699	0.868
Montijo53_(I)	3.8	0.05	1.897	0.929
Montijo53_(D)	3.87	0.03	1.939	0.963
	3.615	0.045	1.795	0.905
LaVaca_(F)	2.16	0.15	1.077	0.609
LaVaca_(A)	2.16	0.18	1.084	0.585
LaVaca_(I)	3.14	0.11	1.567	0.707
LaVaca_(D)	3.12	0.12	1.562	0.717
	2.645	0.14	1.323	0.655

(fin cuadro B.1)

B.3. Ajuste de las secciones entre muros.

El resultado de los ajustes de curvas elípticas en las secciones entre muros se exponen en el siguiente cuadro. En cada bóveda, con su nombre, las dos secciones, están identificadas con la letra asignada a su posición según los planos de planta; se indica, para cada una de ellas, la luz del vano y los valores de los semiejes mayor y menor de la elipse fijada, así como el radio del círculo ajustado. Además se incluyen los valores medios del vano y de los semiejes mayor A_{sec} y menor B_{sec} de la elipse ajustada.

Cuadro B.2: Ajuste de las secciones entre muros.

Nombre (sec)	vano	elipse		círculo
		A_{sec}	B_{sec}	R_{sec}
LosBarruecos_(FA)	5.14	4.642	3.2	6.595 *
LosBarruecos_(ID)	4.66	4.68	2.71	7.189
	4.9	4.661	2.955	
ErmitaPrado5_(FA)	4.28	4.359	2.911	6.503 *
ErmitaPrado5_(ID)	4.26	4.242	2.803	6.346 *
	4.27	4.3	2.857	
ErmitaPrado4_(FA)	4.18	4.171	2.66	6.359 *
ErmitaPrado4_(ID)	4.32	4.202	2.85	6.211 *
	4.25	4.187	2.755	
Seguras1_(FA)	4.14	4.095	1.93	8.153
Seguras1_(ID)	4.6	4.538	1.74	10.94 *
	4.37	4.317	1.835	
Seguras2_(FA)	4.1	3.999	1.98	7.631 *
Seguras2_(ID)	4.54	4.531	1.97	9.773 *
	4.32	4.265	1.975	
Becerra1_(FA)	5.74	5.771	3.47	9.113
Becerra1_(ID)	7.16	6.77	3.57	12.67
	6.45	6.271	3.52	
Becerra2_(FA)	5.36	5.317	2.2	12.24
Becerra2_(ID)	6.62	6.74	2.52	19.5 *
	5.99	6.028	2.36	

continúa

Nombre (sec)	vano	elipse		círculo
		A_{sec}	B_{sec}	R_{sec}
CaceresPL_(FA)	3.6	3.64	1.304	12.04 *
CaceresPL_(ID)	3.46	3.46	1.152	9.811
	3.53	3.55	1.228	
LaGarrovilla_(FA)	3.06	3.384	1.144	9.295 *
LaGarrovilla_(ID)	2.68	2.762	0.738	12.47 *
	2.87	3.073	0.941	
CasasReina3_(FA)	3.37	-	-	-
CasasReina3_(ID)	3.21	-	-	-
	3.29	-	-	-
CasasReina13_(FA)	3.48	-	-	-
CasasReina13_(ID)	3.4	-	-	-
	3.33	-	-	-
ViñasMata_(FA)	3.58	3.755	1.437	9.444 *
ViñasMata_(ID)	3.88	3.981	1.829	7.736 *
	3.73	3.868	1.633	
CedilloI_(FA)	4.08	3.73	2.099	6.251 *
CedilloI_(ID)	4.92	4.69	2.519	8.276 *
	4.5	4.21	2.309	
CedilloII_(FA)	4.36	4.508	1.904	10.12 *
CedilloII_(ID)	4.94	5.238	1.915	13.37 *
	4.65	4.873	1.86	
NavasMadroñoI_(FA)	4.52	4.616	1.89	10.65 *
NavasMadroñoI_(ID)	5.19	5.466	1.767	16.38 *
	4.855	5.041	1.828	
NavasMadroñoII_(FA)	4.4	4.794	1.403	17.46 *
NavasMadroñoII_(ID)	4.4	5.455	1.465	19.53 *
	4.4	5.125	1.434	
AljucenExt_(FA)	3.14	3.676	1.782	7.026 *
AljucenExt_(ID)	2.82	3.024	1.581	5.542 *
	2.98	3.35	1.681	
Olivenza_(FA)	3.96	4.353	1.176	14.08 *

continúa

Nombre (sec)	vano	elipse		círculo
		A_{sec}	B_{sec}	R_{sec}
Olivenza_(ID)	4.18	4.415	1.111	15.81 *
	4.07	4.384	1.144	
BañosM_(FA)	2.31	2.269	1.541	3.287
BañosM_(ID)	4.18	3.506	1.75	6.693 *
	3.245	2.887	1.646	
BurguillosC_(FA)	3.48	3.603	0.983	12.13 *
BurguillosC_(ID)	3.76	3.948	1.394	10.2 *
	3.62	3.776	1.188	
Montijo45_(FA)	3.48	3.489	1.259	12.13 *
Montijo45_(ID)	3.04	3.165	1.14	8.142 *
	3.26	3.327	1.188	
LaVaca_(FA)	3.14	3.194	1.155	6.968*
LaVaca_(ID)	2.34	2.371	0.816	6.317*
	2.74	2.783	0.986	

(fin cuadro B.2)

Notas:

En los parámetros de la elipse señalados con (-) no pudo encontrarse una curva elíptica con las limitaciones impuestas a los residuos del ajuste.

Los radios R_{sec} de la circunferencia ajustada marcados con el símbolo (*) superan claramente los límites establecidos para los residuos del ajuste. El valor para R_{sec} mostrado corresponde al ajuste más cercano a los límites.

Anexo C

Relaciones entre parámetros de la bóveda.

C.1. Estadística. Procedimiento.

De los planos realizados para cada bóveda, resultado del levantamiento topográfico en cada una de ellas, se pudieron medir las luces, las flechas y los retumbos de las distintas secciones consideradas para definir su forma. En cada arista en los muros y en las secciones entre muros opuestos se ajustó la curva geométrica que mejor se adapta a los puntos del levantamiento, curvas que resultaron elípticas definidas por la magnitud de sus ejes mayor y menor.

En este anexo se trató de averiguar la posible relación —la fórmula matemática— que liga las distintas magnitudes consideradas de forma que se adapte lo mejor posible a las medidas observadas y a las deducidas, y obtener, si ello es posible, una determinada relación entre ellas.

Entre cada par de conjuntos de datos elegidos la función matemática que los liga es aquella que la diferencia entre los valores observados —medidos— y los que resultan de la función sean los menores posibles. Para el tipo de función del ajuste se eligió una función lineal $y = f(x) = a_0 + bx$ y para el ajuste el «método de mínimos cuadrados», método que establece que: la suma de los cuadrados de las desviaciones sea mínima; ajuste en que los valores asignados a los parámetros corresponden a la fórmula «más probable», en el sentido de que los valores de y que se deduzcan de la función son los valores más probables de las mediciones obtenidas.¹⁴⁹

Los ajustes de la función lineal fueron realizados en: wxMaxima 16.04.2 (interface gráfica de usuario para el Sistema de Álgebra Simbólica (CAS) Maxima, basado en wxWidgets) con el paquete sobre inferencia estadística y contraste de hipótesis: «stats».

C.1.1. Semiejes y lado de las aristas en muro.

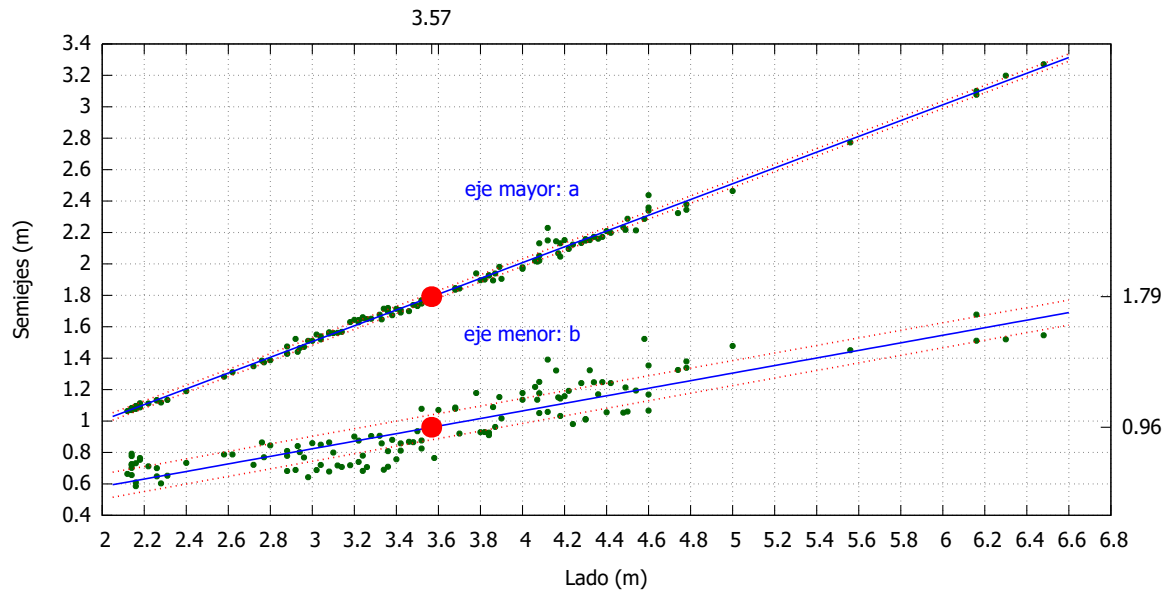


Figura C.1: Diagrama de dispersión y recta de regresión de los semiejes a_{mur} y b_{mur} de las aristas en muro y la longitud L del lado correspondiente a cada arista.

Parámetros	a_{mur}	b_{mur}
num. dates=	120	120
means=	(3.57, 1.79)	(3.57, 0.96)
model=	$0.502 x - 2.47 \cdot 10^{-4}$	$0.241 x + 0.101$
correlation=	0.998	0.897
$V_{estimation}$ =	0.0011	0.0124
b conf int=	[0.496, 0.508]	[0.219, 0.262]
a conf int=	[-0.0237, 0.0232]	[0.0214, 0.181]
hypotheses=	H0: b=0, H1: b≠0	H0: b=0, H1: b≠0
statistic=	$1.56 \cdot 10^2$	22.1
distribution=	[$student_t$, 90]	[$student_t$, 118]
pvalue=	0.0	0.0

Cuadro C.1: Parámetros del ajuste: semiejes y luz de las aristas en muro.

Resumen:

Rel. semieje mayor-lado: $a_{mur} = 0,502 \times Lado$; \rightarrow media: $a_{mur} \approx \frac{1}{2} \times L$

Rel. semieje menor-lado: $b_{mur} = 0,241 \times Lado + 0,101$; \rightarrow media: $b_{mur} \approx \frac{1}{4} \times L$

C.1.2. Semiejes mayor y menor de las aristas en muro.

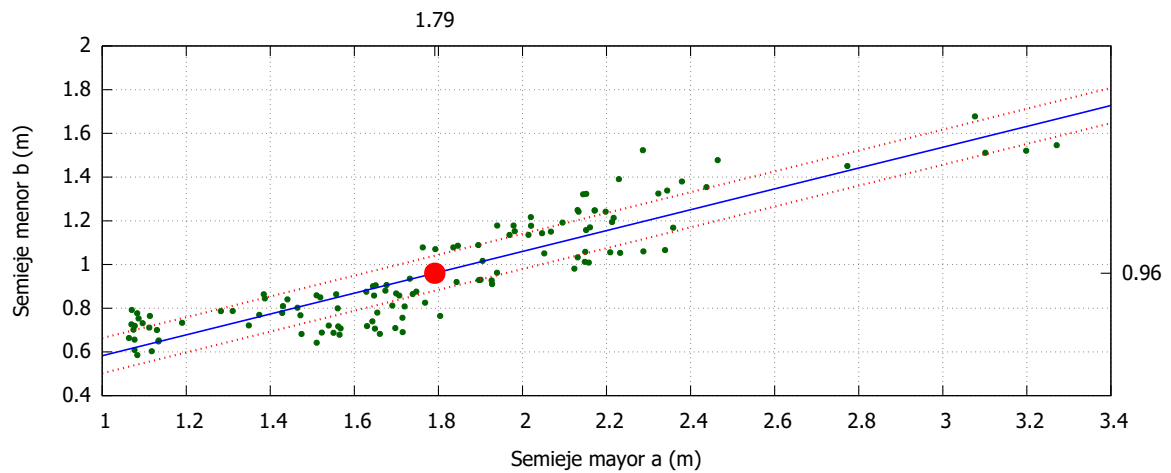


Figura C.2: Diagrama de dispersión y recta de regresión de los semiejes a_{mur} y b_{mur} de las aristas en muro.

Parámetros	b_{mur} a_{mur}
num. dates=	120
means=	(1.79, 0.96)
model=	$0.477 x + 0.106$
correlation=	0.894
$V_{estimation}$ =	0.0127
b conf int=	[0.433, 0.52]
a conf int=	[0.0255, 0.186]
hypotheses=	H0: b=0, H1: b≠0
statistic=	21.7
distribution=	[$student_t$, 118]
$pvalue$ =	0.0

Cuadro C.2: Parámetros del ajuste: semiejes mayor y menor de las aristas en muro

Resumen:

Rel. semieje menor-mayor:

$$b_{mur} = 0,477 \times a_{mur} + 0,106; \quad \rightarrow \quad \text{media: } b_{mur} \approx \frac{1}{2} \times a_{mur}$$

C.1.3. Retumbo y flecha de las aristas en muro.

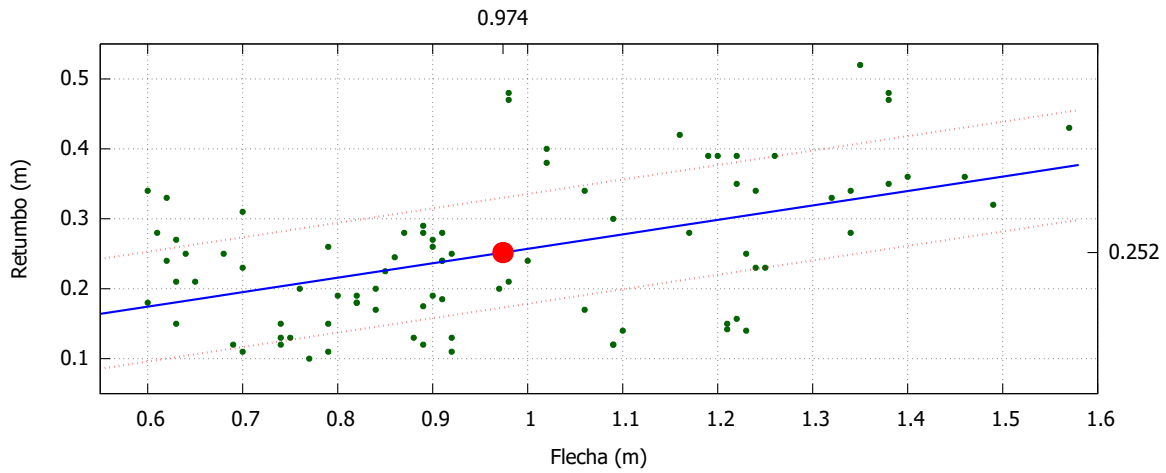


Figura C.3: Diagrama de dispersión y recta de regresión del ajuste del retumbo y la flecha de las aristas en muro.

Parámetros	Retumbo flecha
num. dates=	88
means=	(0.974, 0.252)
model=	$0.207 x + 0.0504$
correlation=	0.493
$V_{estimation}$ =	0.0082
b conf int=	[0.129, 0.285]
a conf int=	[-0.028, 0.129]
hypotheses=	H0: b=0, H1: b#0
statistic=	5.26
distribution=	[<i>student</i> _t , 86]
<i>pvalue</i> =	$1.05 \cdot 10^{-6}$

Cuadro C.3: Parámetros del ajuste: Retumbo y flecha de las aristas en muro

Resumen:

Rel. retumbo-flecha: $Ret = 0,207 \times f + 0,05 \rightarrow$ media: $Ret \approx \frac{1}{4} \times f$

C.1.4. Retumbo y lado de las bóvedas.

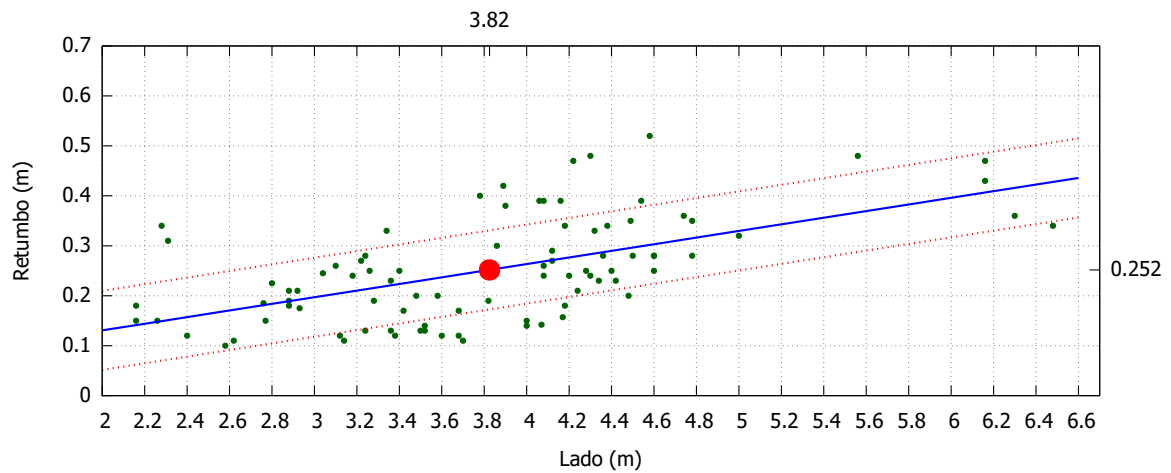


Figura C.4: Diagrama de dispersión y recta de regresión del ajuste del retumbo y el lado de las bóvedas.

Parámetros	Retumbo Lado
num. dates=	88
means=	(3.82, 0.252)
model=	$0.0663 x - 0.002$
correlation=	0.577
$V_{estimation}$ =	0.00724
b conf int=	[0.0462, 0.0865]
a conf int=	[-0.0811, 0.0771]
hypotheses=	H0: b=0, H1: b≠0
statistic=	6.55
distribution=	[$student_t$, 86]
$pvalue$ =	$4.04 \cdot 10^{-9}$

Cuadro C.4: Parámetros del ajuste: retumbo y luz de las bóvedas

Resumen:

$$\text{Rel. retumbo-lado: } Ret = 0,066 \times L - 0,002 \quad \rightarrow \quad \text{media: } Ret \approx \frac{1}{15} \times L$$

C.1.5. Secciones entre muros y vano.

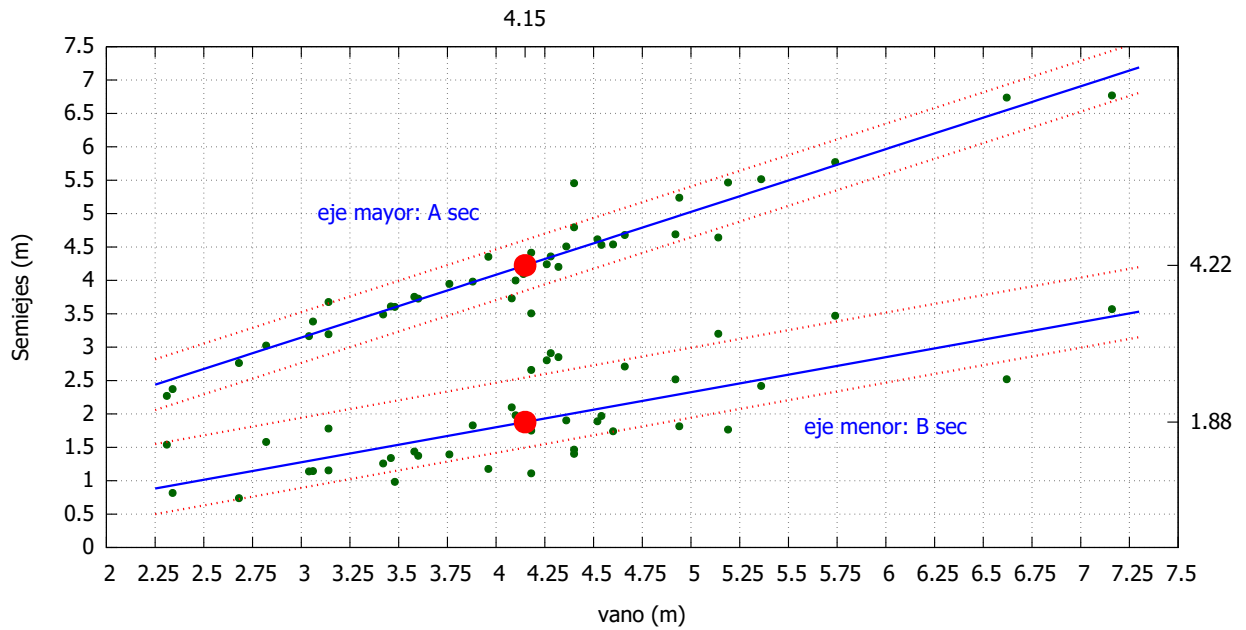


Figura C.5: Diagrama de dispersión y recta de regresión de los semiejes A_{sec} y B_{sec} de las secciones entre muros opuestos y el vano de la bóveda en cada sección.

Parámetros	A_{dir} vano	B_{dir} vano
num. dates=	40	40
means=	(4.15, 4.22)	(4.15, 1.88)
model=	$0.941 x + 0.322$	$0.525 x - 0.298$
correlation=	0.961	0.471
$V_{estimation}$ =	0.079	0.242
b conf int=	[0.852, 1.03]	[0.369, 0.681]
a conf int=	[-0.058, 0.702]	[-0.964, 0.368]
hypotheses=	H0: b=0, H1: b≠0	H0: b=0, H1: b≠0
statistic=	21.4	6.81
distribution=	[$student_t$, 90]	[$student_t$, 38]
pvalue=	0.0	$4.44 \cdot 10^{-8}$

Cuadro C.5: Parámetros del ajuste: semiejes secciones entre muros y vanos

Resumen:

$$\text{Rel. semieje: } A_{sec} = 0,941 \times vano + 0,322 \quad \rightarrow \quad \text{media: } A_{sec} \approx 1 \times vano$$

$$\text{Rel. semieje: } B_{sec} = 0,525 \times vano - 0,298 \quad \rightarrow \quad \text{media: } B_{sec} \approx \frac{1}{2} \times vano$$

Anexo D

Estadística de empujes: método gráfico *vs* analítico

D.1. Introducción.

Los diagramas de *caja y bigotes* son una representación gráfica en la que se visualizan fácilmente las diferencias de los empujes E_h y E_v obtenidas por los métodos gráficos, con solo la regla y el compás, y el cálculo analítico; muestran el resultado medio de las diferencias, de su dispersión y de la simetría de dichas diferencias.

D.2. Diferencias entre el método gráfico y analítico.

Ordenadas de menor a mayor las diferencias —la distribución de éstas—, la caja del diagrama es un rectángulo que incluye el 50 % de las diferencias centrales; la altura de la caja es el rango intercuartílico RIC de la distribución de las diferencias, limitada inferiormente por el primer cuartil C1 y superiormente por el tercer cuartil C3. En el interior de la caja se representa la mediana o segundo cuartil C2. El cuartil C1 es el valor mayor del 25 % de los valores —los más pequeños— de la distribución; C2 es la mediana, es el valor central de la distribución y C3 es el valor que sobrepasa al 75 % de los valores —los mayores— de las diferencias. Los bigotes son las líneas verticales que sobresalen por encima y por debajo de la caja central, sus longitudes representan las diferencias que están fuera, mayores o menores, del 50 % central de la distribución y que no difieren de la mediana en más de vez y media el RIC.

En los cuadros siguientes se muestran los valores resultantes de los cálculos analítico y gráficos para dos arcos elípticos $f/L=1/4$, con diferentes espesores y CSG; todos con el mismo peso específico de la fábrica. En los encabezamientos:

L = luz del vano (m).

área= área de la sección de la fábrica (m^2).

E_v = empuje vertical (kN).

X_{cg} , Y_{cg} = coordenadas del centro de gravedad de la sección (m).

E_h = empuje horizontal mínimo en la clave y en el muro con o sin Coeficiente de Seguridad Geométrico (kN).

H_{Eh} = cota del empuje horizontal en la clave del arco (m).

X_{tg} , Y_{tg} = coordenadas de la línea de empuje tangente al límite de la fábrica con o sin Coeficiente de Seguridad Geométrico (m).

H_{Etot} = altura de la resultante en el muro de apoyo del arco (m).

OX_{Etot} = ordenada de la línea de acción de la resultante en el eje OX (m).

ana. = resultados mediante análisis matemático.

graf-1 = resultados mediante el procedimiento gráfico GRAF-1.

graf-2 = resultados mediante el procedimiento gráfico GRAF-2.

graf-3 = resultados mediante el procedimiento gráfico GRAF-3.

En la figura D.1, el semieje mayor $a = L/2$ y el menor $B = L/4$. (La notación corresponde a las figuras desde la 5.1 a la 5.15 en págs. 101 a 119.)

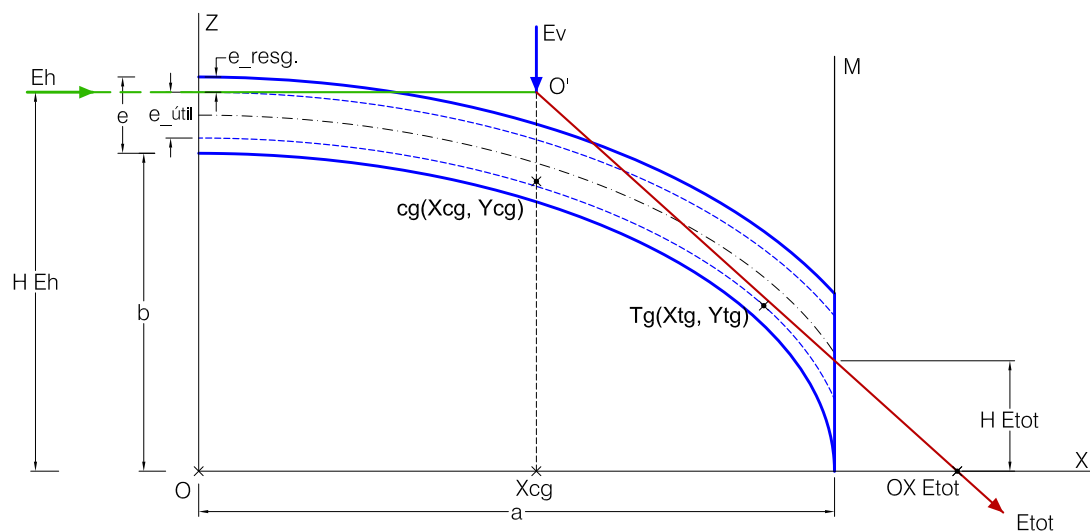


Figura D.1: Notación empleada en los cuadros numéricos.

Caso I: a) arco elíptico $f/L=1/4$, $e= 0,24$ m y $CSG=1,0$

Cuadro D.1: Caso Ia: resultados de cálculo: analítico (ana.)
y gráfico (graf-1, graf-2 y graf-3)

L	área	Ev	Xcg	Ycg	Eh	H_{Eh}	Xtg	Ytg	H_{Etot}	OX_{Etot}	
3,0	0,388	6,982	0,79	0,701	6,007	0,99	1,345	0,332	0,177	1,642	ana.
	0,391	7,03	0,793	0,713	5,87	0,99	1,341	0,337	0,143	1,62	graf-1
	0,391	7,03	0,793	0,713	6,317	0,99	1,338	0,338	0,203	1,683	graf-2
	0,391	7,03	0,793	0,713	5,797	0,99	1,343	0,334	0,133	1,609	graf-3
4,0	0,52	9,367	1,059	0,889	8,841	1,24	1,735	0,497	0,254	2,23	ana.
	0,522	9,394	1,062	0,904	8,747	1,24	1,724	0,507	0,233	2,217	graf-1
	0,522	9,394	1,062	0,904	9,112	1,24	1,730	0,502	0,273	2,265	graf-2
	0,522	9,394	1,062	0,904	9,014	1,24	1,714	0,515	0,263	2,252	graf-3
5,0	0,654	11,766	1,329	1,075	11,832	1,49	2,115	0,666	0,326	2,828	ana.
	0,654	11,709	1,332	1,093	11,709	1,49	2,107	0,673	0,317	2,815	graf-1
	0,654	11,76	1,332	1,093	11,99	1,49	2,121	0,662	0,345	2,852	graf-2
	0,654	11,76	1,332	1,093	12,295	1,49	2,088	0,688	0,373	2,889	graf-3
6,0	0,788	14,176	1,601	1,262	14,939	1,74	2,475	0,848	0,421	3,434	ana.
	0,785	14,134	1,603	1,281	14,72	1,74	2,49	0,836	0,398	3,415	graf-1
	0,785	14,13	1,603	1,281	14,94	1,74	2,512	0,82	0,418	3,442	graf-2
	0,785	14,13	1,603	1,281	15,621	1,74	2,463	0,856	0,476	3,526	graf-3
7,0	0,922	16,595	1,873	1,447	18,135	1,99	2,835	1,026	0,501	4,047	ana.
	0,917	16,508	1,874	1,469	17,764	1,99	2,874	0,999	0,479	4,015	graf-1
	0,917	16,508	1,874	1,469	17,92	1,99	2,903	0,978	0,492	4,034	graf-2
	0,917	16,508	1,874	1,469	18,981	1,99	2,838	1,024	0,576	4,162	graf-3
8,0	1,057	19,021	2,145	1,632	21,403	2,24	3,175	1,216	0,592	4,666	ana.
	1,049	18,885	2,146	1,656	20,83	2,24	3,258	1,16	0,559	4,617	graf-1
	1,049	18,885	2,146	1,656	20,94	2,24	3,294	1,134	0,568	4,63	graf-2
	1,049	18,885	2,146	1,656	22,367	2,24	3,214	1,19	0,675	4,799	graf-3
9,0	1,192	21,453	2,418	1,817	24,73	2,49	3,515	1,405	0,684	5,289	ana.
	1,181	21,264	2,418	1,843	23,913	2,49	3,643	1,321	0,639	5,218	graf-1
	1,181	21,264	2,418	1,843	23,983	2,49	3,685	1,291	0,644	5,227	graf-2
	1,181	21,264	2,418	1,843	25,772	2,49	3,591	1,356	0,772	5,436	graf-3
10,0	1,327	23,891	2,692	2,001	28,109	2,74	3,845	1,598	0,779	5,916	ana.
	1,314	23,644	2,691	2,029	27,008	2,74	4,027	1,482	0,718	5,82	graf-1
	1,314	23,644	2,691	2,029	27,049	2,74	4,076	1,448	0,721	5,825	graf-2
	1,314	23,644	2,691	2,029	29,193	2,74	3,967	1,521	0,869	6,074	graf-3

continúa

L	área	Ev	Xcg	Ycg	Eh	H_{Eh}	Xtg	Ytg	H_{Etot}	OX_{Etot}	
10,55	1,402	25,234	2,843	2,102	29,986	2,877	4,015	1,711	0,835	6,262	ana.
	1,386	24,954	2,841	2,131	28,715	2,877	4,239	1,57	0,762	6,152	graf-1
	1,386	24,954	2,841	2,131	28,743	2,877	4,291	1,534	0,764	6,155	graf-2
	1,386	24,954	2,841	2,131	31,08	2,877	4,175	1,612	0,993	6,452	graf-2

(fin cuadro D.1)

Parámetros de la representación gráfica estadística de la distribución de diferencias entre los esfuerzos *ana.* frente a *graf-1*, *graf-2* y *graf-3* para luces desde 3,0 m hasta 10,55 m (luz máxima sin necesidad de relleno de riñones):

	Ev (kN)	Eh (kN) graf-1	Eh (kN) graf-2	Eh (kN) graf-3
mín.	-0,051	0,1	-0,33	-1,094
1º cuartil	-0,002	0,13	-0,16	-1,042
2º cuartil (mediana)	0,075	0,33	0,15	-0,864
3º cuartil	0,17	0,71	0,62	-0,463
máx.	0,28	1,3	1,2	0,21

Caso I: b) arco elíptico $f/L=1/4$, $e= 0,24$ m y $CSG=1,10$

Cuadro D.2: Caso Ib: resultados de cálculo: analítico (ana.)
y gráfico (graf-1, graf-2 y graf-3)

L	área	Ev	Xcg	Ycg	Eh	H_{Eh}	Xtg	Ytg	H_{Etot}	OX_{Etot}	
3,0	0,388	6,982	0,79	0,701	6,275	0,978	1,335	0,358	0,199	1,669	ana.
	0,391	7,029	0,793	0,713	6,211	0,978	1,33	0,38	0,19	1,678	graf-1.
	0,391	7,029	0,793	0,713	6,395	0,978	1,34	0,37	0,2	1,683	graf-2
	0,391	7,029	0,793	0,713	5,971	0,978	1,337	0,356	0,146	1,624	graf-3
4,0	0,52	9,367	1,059	0,889	9,176	1,228	1,725	0,521	0,278	2,262	ana.
	0,522	9,394	1,062	0,904	9,111	1,228	1,711	0,547	0,273	2,265	graf-1
	0,522	9,394	1,062	0,904	9,201	1,228	1,726	0,535	0,27	2,265	graf-2
	0,522	9,394	1,062	0,904	9,197	1,228	1,708	0,535	0,27	2,264	graf-3
5,0	0,654	11,77	1,329	1,075	12,227	1,478	2,095	0,696	0,352	2,865	ana.
	0,654	11,762	1,332	1,093	12,008	1,478	2,095	0,711	0,354	2,863	graf-1
	0,654	11,762	1,332	1,093	12,09	1,478	2,117	0,694	0,342	2,852	graf-2
6,0	0,788	14,18	1,601	1,262	15,878	1,728	2,41	0,921	0,475	3,523	ana.
	0,785	14,134	1,603	1,281	15,52	1,728	2,466	0,882	0,444	3,487	graf-1
	0,785	14,134	1,603	1,281	15,04	1,728	2,508	0,851	0,415	3,442	graf-2
	0,785	14,134	1,603	1,281	15,818	1,728	2,457	0,875	0,479	3,537	graf-3
7,0	0,922	16,59	1,873	1,447	18,637	1,978	2,795	1,067	0,529	4,094	ana.
	0,917	16,508	1,874	1,469	18,162	1,978	2,862	1,035	0,512	4,063	graf-1
	0,917	16,508	1,874	1,469	18,03	1,978	2,899	1,008	0,489	4,034	graf-2
	0,917	16,508	1,874	1,469	119,183	1,978	2,832	1,042	0,578	4,173	graf-3
8,0	1,057	19,02	2,145	1,632	21,955	2,228	3,135	1,256	0,621	4,717	ana.
	1,049	18,885	2,146	1,656	21,235	2,228	3,247	1,196	0,591	4,665	graf-1
	1,049	18,885	2,146	1,656	21,05	2,228	3,29	1,165	0,565	4,63	graf-2
	1,049	18,885	2,146	1,656	22,574	2,228	3,208	1,208	0,676	4,809	graf-3
8,80	1,165	20,97	2,364	1,78	24,651	2,428	3,395	1,413	0,696	5,218	ana.
	1,155	20,788	2,364	1,806	23,704	2,428	3,554	1,324	0,654	5,146	graf-1
	1,155	20,788	2,364	1,805	23,49	2,428	3,603	1,29	0,626	5,107	graf-2
	1,155	20,788	2,364	1,805	25,298	2,428	3,51	1,34	0,754	5,318	graf-3

(fin cuadro D.2)

Parámetros de la representación gráfica estadística de la distribución de diferencias entre los esfuerzos *ana.* frente a *graf-1*, *graf-2* y *graf-3* para luces desde 3,0 m

hasta 8,80 m (luz máxima sin necesidad de relleno de riñones):

	Ev (kN)	Eh (kN)	Eh (kN)	Eh (kN)
		graf-1	graf-2	graf-3
mín.	-0,048	0,071	-0,089	-0,647
1° cuartil	-0,011	0,091	0,011	-0,583
2° cuartil (mediana)	0,0439	0,21	0,25	-0,429
3° cuartil	0,1	0,49	0,63	-0,139
máx.	0,18	0,92	1,1	0,304

Caso II: a) arco elíptico $f/L=1/4$, $e= 0,12$ m y $CSG=1,0$.

Cuadro D.3: Caso IIa: resultados de cálculo: analítico (ana.)
y gráfico (graf-1, graf-2 y graf-3)

L	área	Ev	Xcg	Ycg	Eh	H_{Eh}	Xtg	Ytg	H_{Etot}	OX_{Etot}	
2,0	0,13	2,342	0,53	0,444	2,21	0,62	0,865	0,251	0,132	1,115	ana.
	0,131	2,349	0,531	0,452	2,187	0,62	0,862	0,254	0,116	1,108	graf-1
	0,131	2,349	0,531	0,452	2,278	0,62	0,865	0,251	0,137	1,132	graf-2
	0,131	2,349	0,531	0,452	2,253	0,62	0,857	0,257	0,131	1,126	graf-3
3,0	0,197	3,544	0,8	0,631	3,734	0,87	1,235	0,426	0,215	1,717	ana.
	0,196	3,534	0,801	0,641	3,68	0,87	1,245	0,418	0,199	1,708	graf-1
	0,196	3,534	0,801	0,641	3,734	0,87	1,256	0,41	0,209	1,721	graf-2
	0,196	3,534	0,801	0,641	3,905	0,87	1,231	0,428	0,237	1,763	graf-3
4,0	0,264	4,755	1,073	0,816	5,531	1,12	1,585	0,61	0,305	2,333	ana.
	0,262	4,721	1,073	0,828	5,208	1,12	1,629	0,58	0,28	2,308	graf-1
	0,262	4,721	1,073	0,828	5,235	1,12	1,647	0,567	0,284	2,415	graf-2
	0,262	4,721	1,073	0,828	5,971	1,12	1,607	0,595	0,337	2,399	graf-3
5,0	0,332	5,973	1,346	1,001	7,027	1,37	1,925	0,798	0,389	2,958	ana.
	0,328	5,911	1,345	1,015	6,752	1,37	2,014	0,741	0,359	2,91	graf-1
	0,328	5,911	1,345	1,015	6,762	1,37	2,038	0,724	0,361	2,913	graf-2
	0,328	5,911	1,345	1,015	7,298	1,37	1,984	0,761	0,435	3,036	graf-3
5,25	0,349	6,278	1,415	1,047	7,455	1,433	2,005	0,847	0,417	3,115	ana.
	0,345	6,209	1,414	1,061	7,14	1,433	2,11	0,781	0,379	3,061	graf-1
	0,345	6,029	1,414	1,061	7,147	1,433	2,136	0,763	0,38	3,063	graf-2
	0,345	6,029	1,414	1,061	7,727	1,433	2,078	0,802	0,459	3,196	graf-3

(fin cuadro D.1)

Parámetros de la representación gráfica estadística de la distribución de diferencias entre los esfuerzos *ana.* frente a *graf-1*, *graf-2* y *graf-3* para luces desde 2,0 m hasta 5,25 m (luz máxima sin necesidad de relleno de riñones):

	Ev (kN)	Eh (kN) graf-1	Eh (kN) graf-2	Eh (kN) graf-3
mín.	-0,0072	0,022	-0,069	-0,62
1° cuartil	-0,0066	0,046	-0,015	-0,273
2° cuartil (mediana)	0,024	0,1	0,065	-0,271
3° cuartil	0,044	0,19	0,17	-0,171
máx.	0,068	0,31	0,3	-0,043

Caso II: b) arco elíptico $f/L=1/4$, $e= 0,12$ m y $CSG=1,10$.

Cuadro D.4: Caso IIb: resultados de cálculo: analítico (ana.)
y gráfico (graf-1, graf-2 y graf-3)

L	área	Ev	Xcg	Ycg	Eh	H_{Eh}	Xtg	Ytg	H_{Etot}	OX_{Etot}	
2,0	0,13	2,342	0,529	0,444	2,294	0,614	0,87	0,26	0,144	1,131	ana.
	0,131	2,349	0,531	0,452	2,278	0,614	0,856	0,274	0,14	1,132	graf-1
	0,131	2,349	0,531	0,452	2,3	0,614	0,86	0,27	0,14	0,132	graf-2
	0,131	2,349	0,531	0,452	2,299	0,614	0,854	0,267	0,135	0,132	graf-3
3,0	0,197	3,544	0,8	0,631	3,847	0,864	1,225	0,44	0,229	1,738	ana.
	0,196	3,534	0,801	0,641	3,778	0,864	1,239	0,437	0,217	1,732	graf-1
	0,196	3,534	0,801	0,641	3,76	0,864	1,254	0,426	0,208	1,721	graf-2
	0,196	3,534	0,801	0,641	3,954	0,864	1,228	0,437	0,239	1,768	graf-3
4,0	0,264	4,755	1,073	0,816	5,489	1,114	1,565	0,629	0,319	2,358	ana.
	0,262	4,721	1,073	0,828	5,309	1,114	1,623	0,598	0,296	2,332	graf-1
	0,262	4,721	1,073	0,828	5,263	1,114	1,645	0,583	0,282	2,315	graf-2
	0,262	4,721	1,073	0,828	5,643	1,114	1,604	0,604	2,338	2,404	graf-3
4,45	0,295	5,302	1,196	0,899	6,247	1,227	1,715	0,715	0,357	2,641	ana.
	0,292	5,256	1,195	0,912	6,003	1,227	1,796	0,67	0,331	2,603	graf-1
	0,292	5,256	1,195	0,912	5,948	1,227	1,821	0,653	0,317	2,583	graf-2
	0,292	5,256	1,195	0,912	6,41	1,227	1,774	0,678	0,382	2,691	graf-3

Parámetros de la representación gráfica estadística de la distribución de diferencias entre los esfuerzos *ana.* frente a *graf-1*, *graf-2* y *graf-2* para luces desde 2,0 m hasta 4,45 m (luz máxima sin necesidad de relleno de riñones):

	Ev (kN) graf-1 = graf-2	Eh (kN) graf-1	Eh (kN) graf-2
mín.	-0,0071	0,016	-0,006
1º cuartil	0,0026	0,042	0,045
2º cuartil (mediana)	0,014	0,87	0,11
3º cuartil	0,028	0,15	0,19
máx.	0,045	0,24	0,29

Anexo E

Planos.

Planos de planta con representación de la superficie de la bóveda por el intrados mediante curvas de nivel equidistantes 10 cm de Bóvedas Extremeñas, con retumbo claramente marcado, de los levantamientos topográficos realizados en este trabajo.

E.1. Bóveda Extremeña: planos de planta con curvas de nivel.

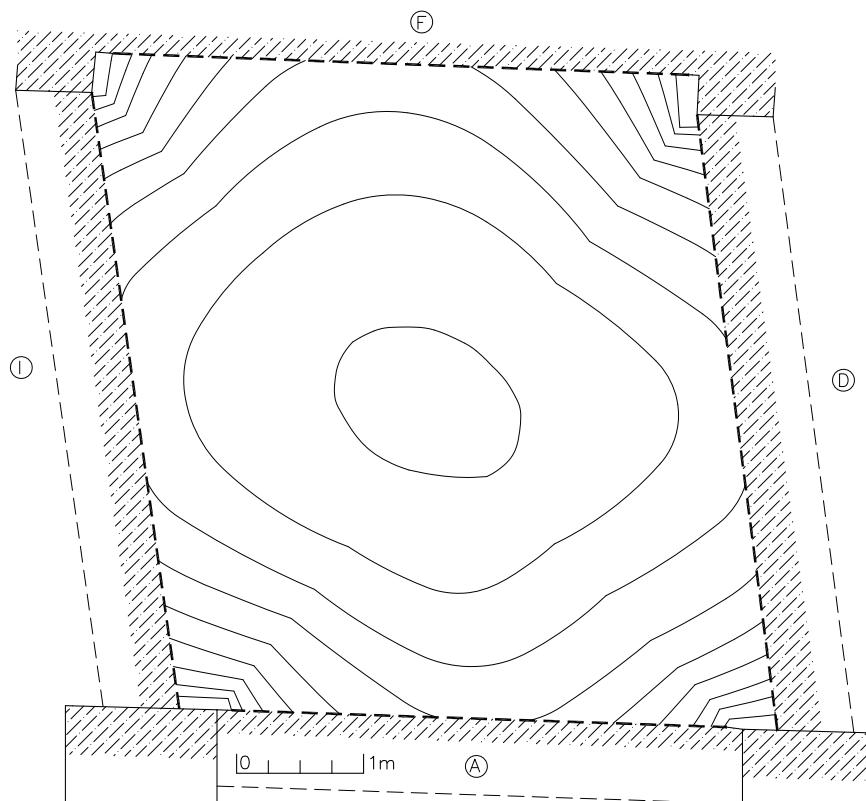


Figura E.1: LosBarruecos. T.M. de Malpartida de Cáceres (Cáceres)

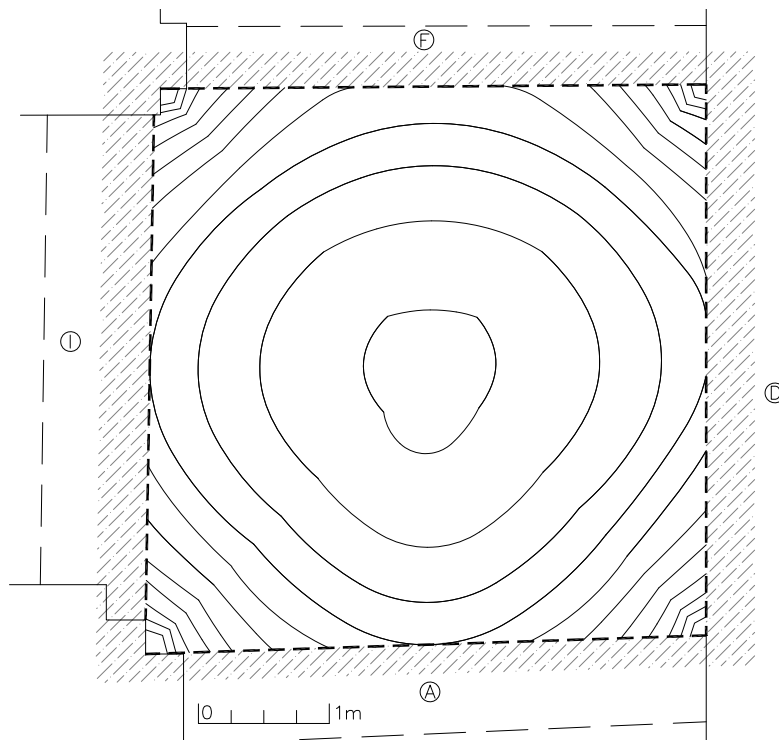


Figura E.2: ErmitaPrado5. T.M. Casar de Cáceres (Cáceres)

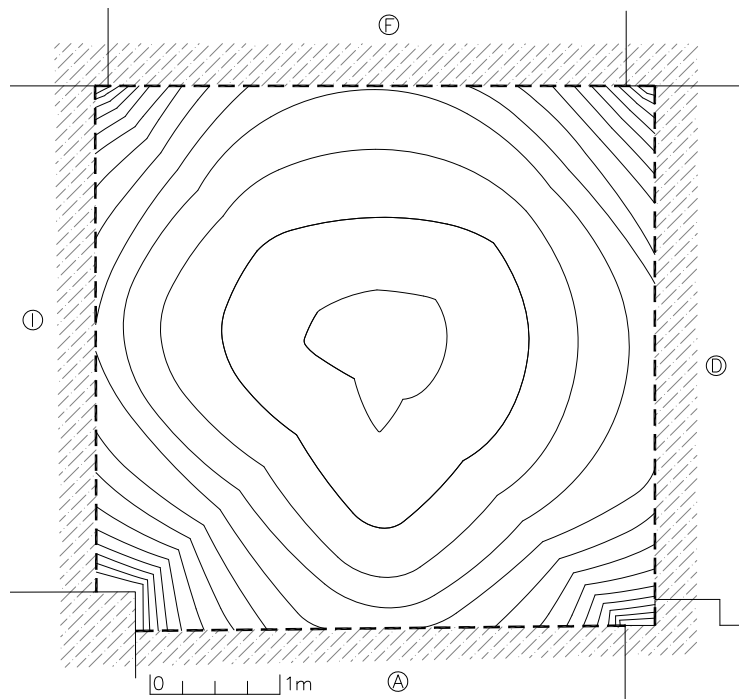


Figura E.3: ErmitaPrado4. T.M. Casar de Cáceres (Cáceres)

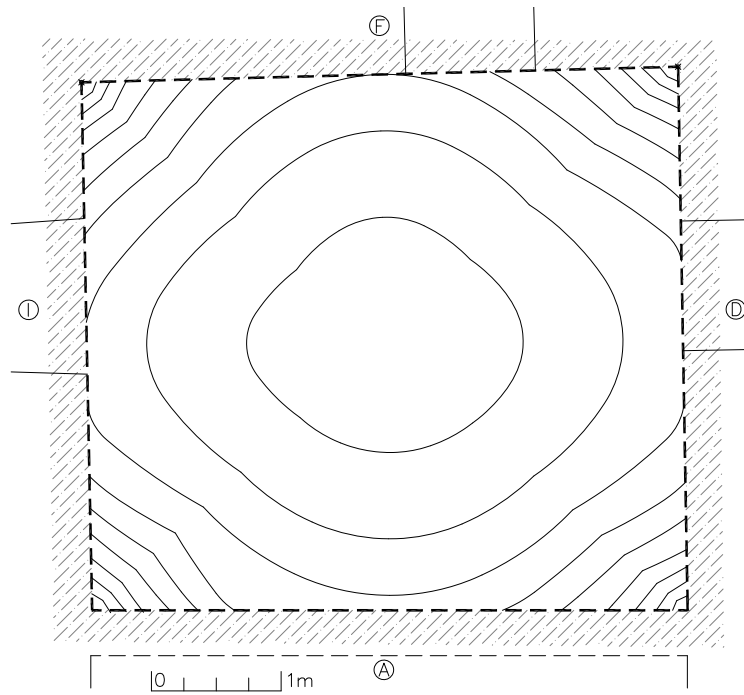


Figura E.4: Seguras1. T.M. Cáceres

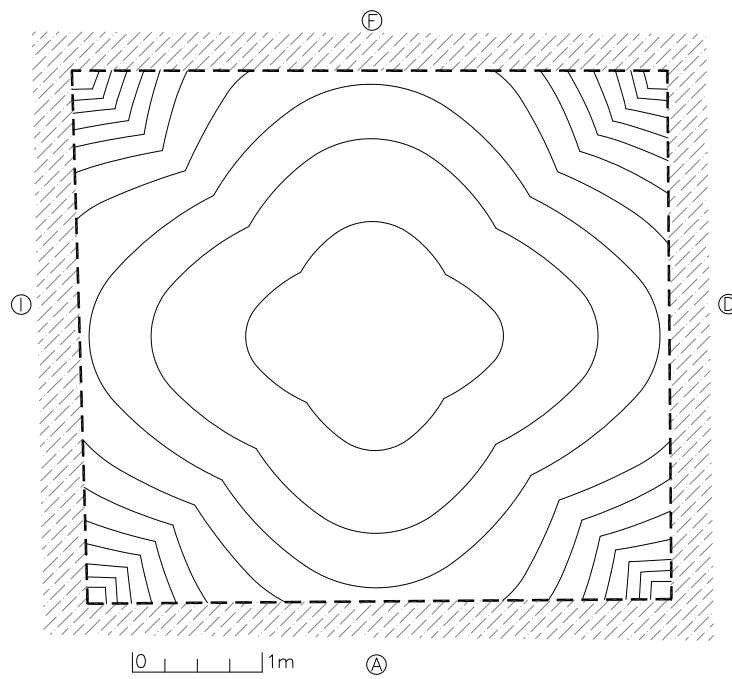


Figura E.5: Seguras2. T.M. Cáceres

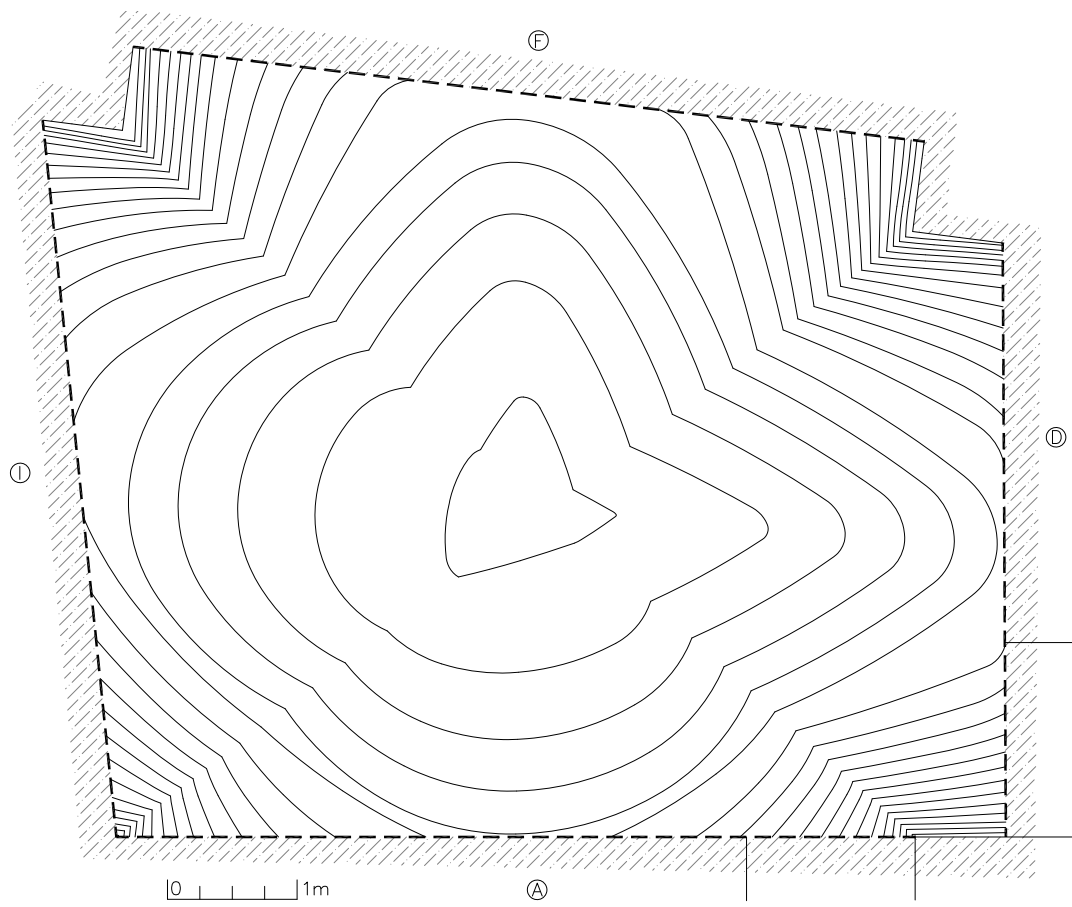


Figura E.6: Becerra1. Plaza de San Jorge n°10 (Cáceres)

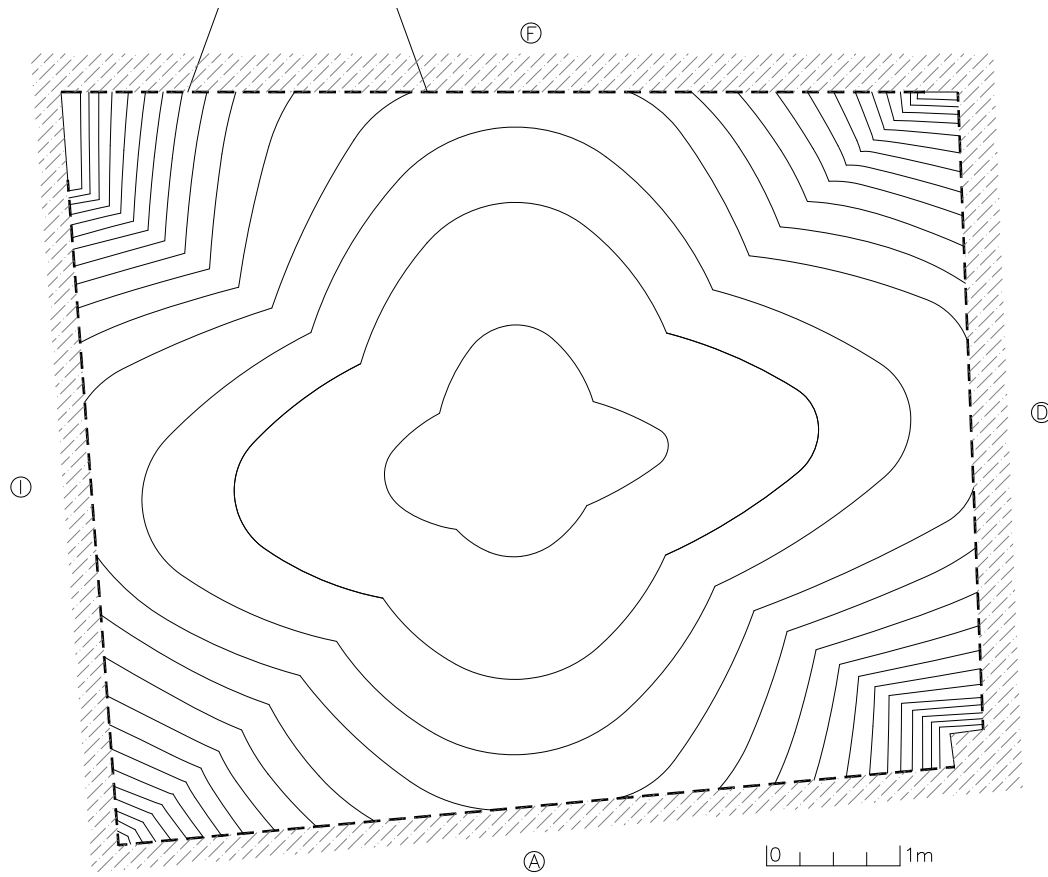


Figura E.7: Becerra2. Plaza de San Jorge nº10 (Cáceres)

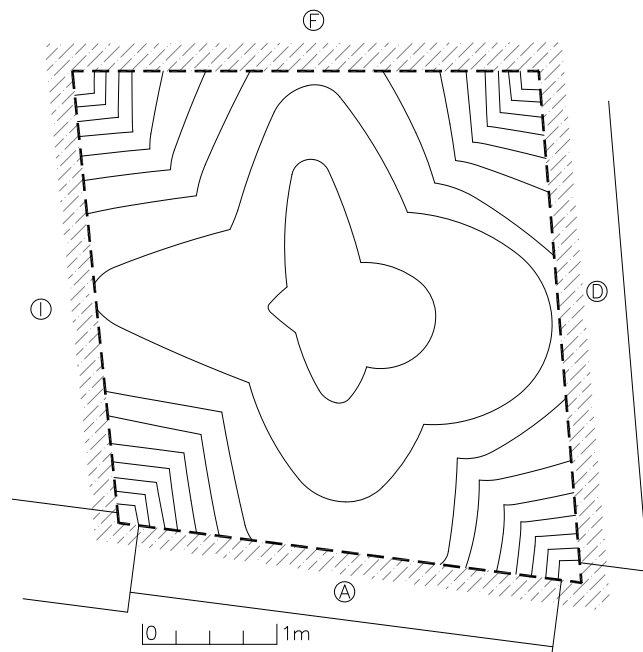


Figura E.8: Plaza Mayor nº28 (Cáceres)

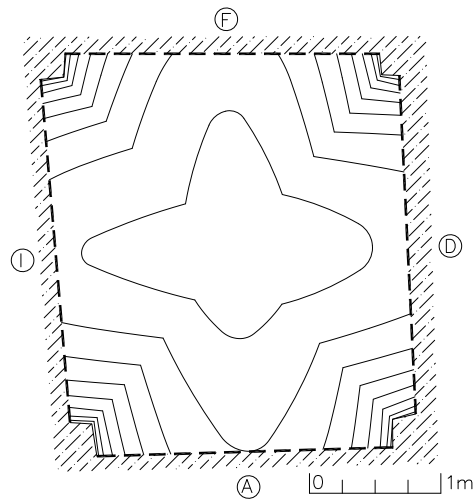


Figura E.9: Cl. Miguel Hernández nº10. La Garrovilla (Badajoz)

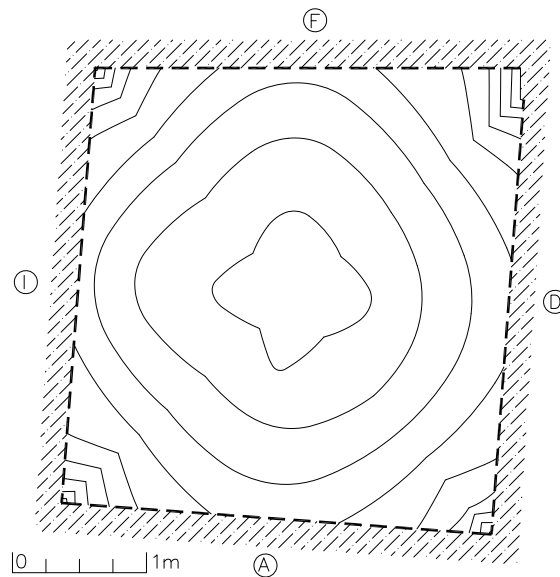


Figura E.10: CasasReina3. Cl. Triana nº3. Casas de Reina (Badajoz)

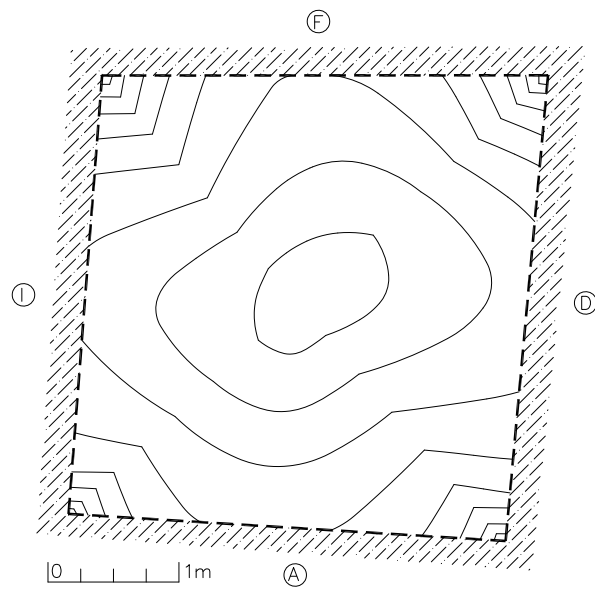


Figura E.11: CasasReina13. Cl. Dr. Rodríguez Sánchez nº13 (Badajoz)

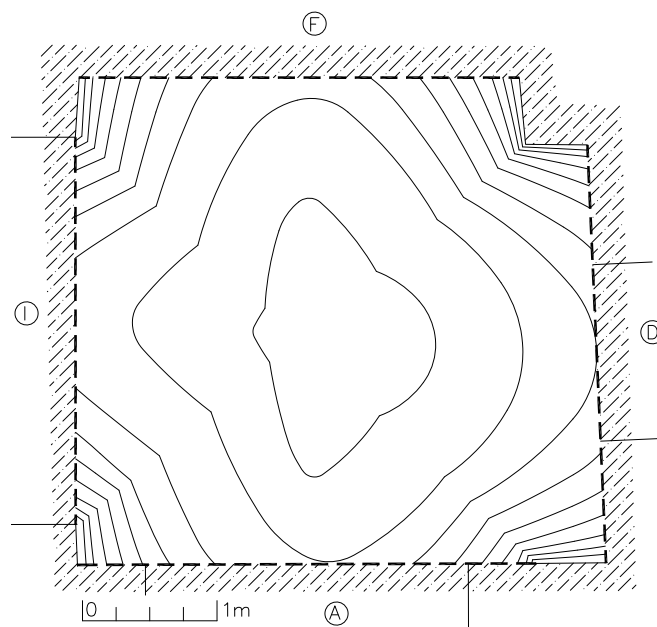


Figura E.12: ViñasMata. (T.M. Cáceres)

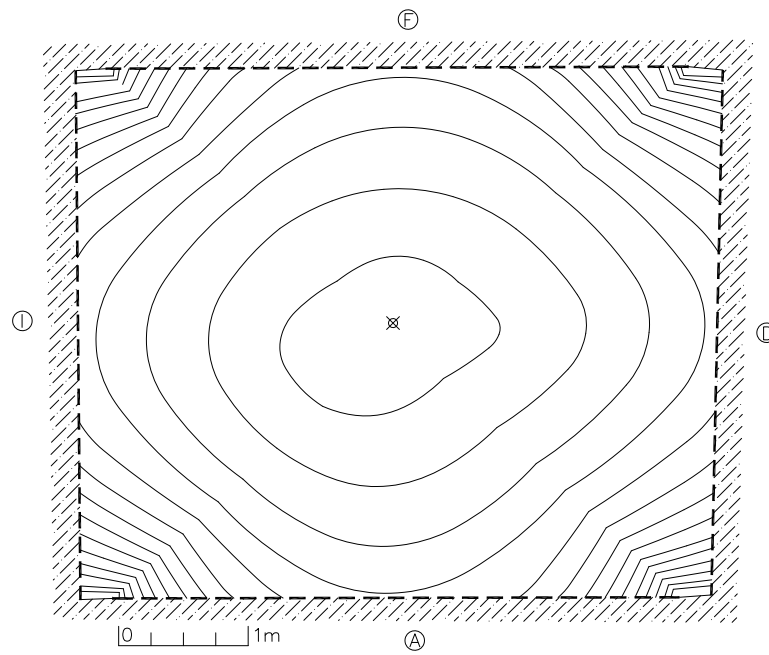


Figura E.13: CedilloI. C/ Casares nº5. Cedillo (Cáceres)

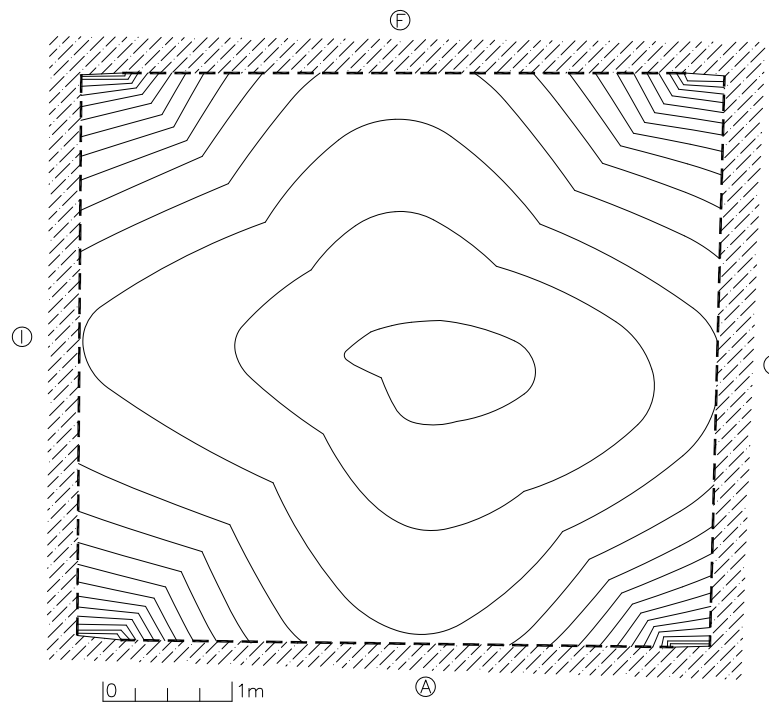


Figura E.14: CedilloII. C/ Casares nº5. Cedillo (Cáceres)

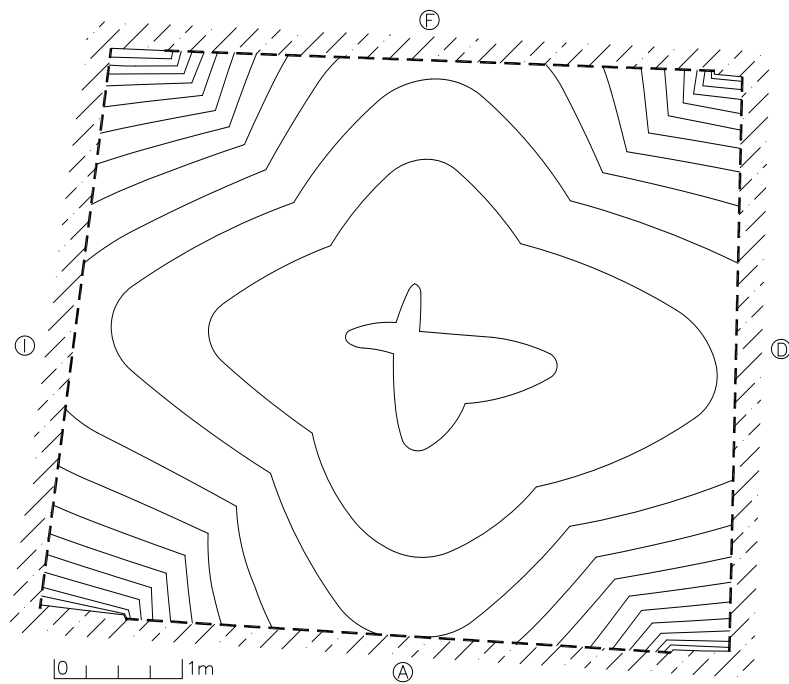


Figura E.15: NavasMadroñoI. C/ Coronel Guillén nº13. Navas del Madroño (Cáceres)

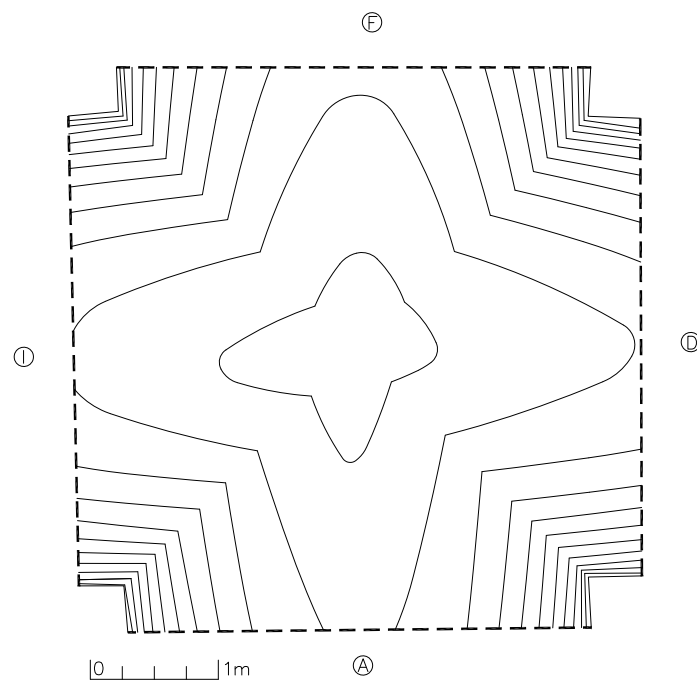


Figura E.16: NavasMadroñoII. C/ Coronel Guillén nº13. Navas del Madroño (Cáceres)

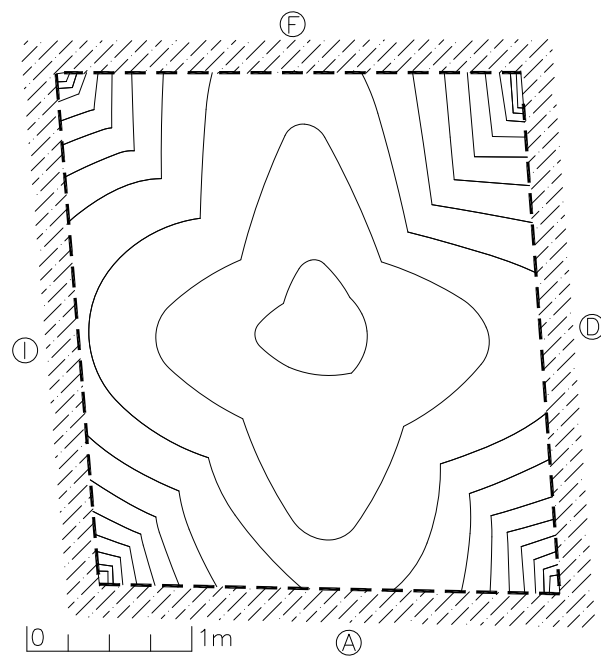


Figura E.17: AljucénExt. Avd. Extremadura nº25. Aljucén (Badajoz)

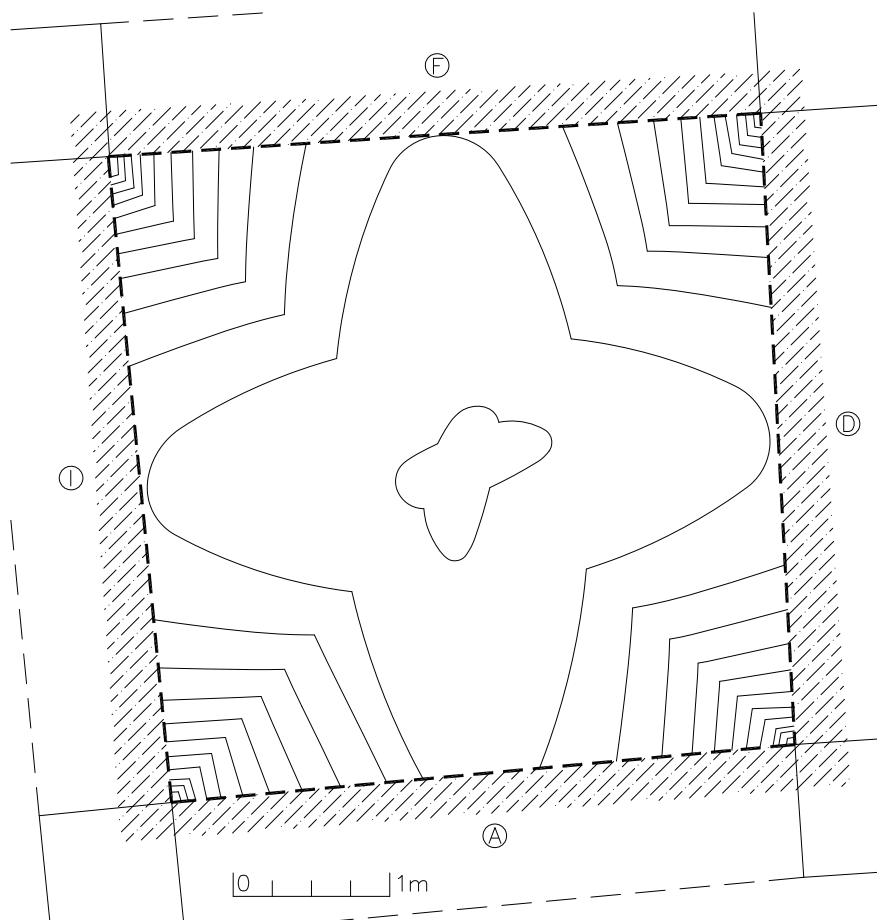


Figura E.18: Olivenza. Paseo Hernán Cortés nº2. Olivenza (Badajoz)

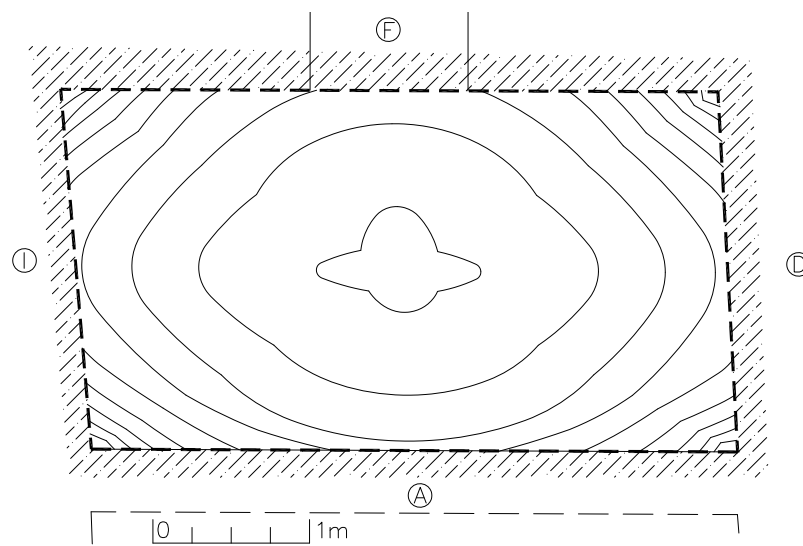


Figura E.19: BañosM. Avd. Las Termas nº2. Baños de Montemayor. (Cáceres).

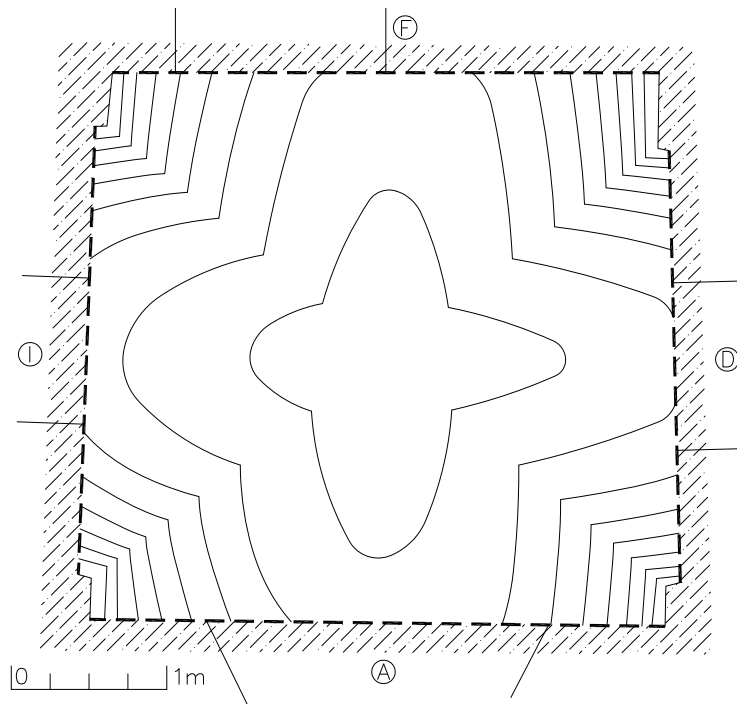


Figura E.20: BurguillosC. Avd. de España nº. Burguillos del Cerro (Badajoz).

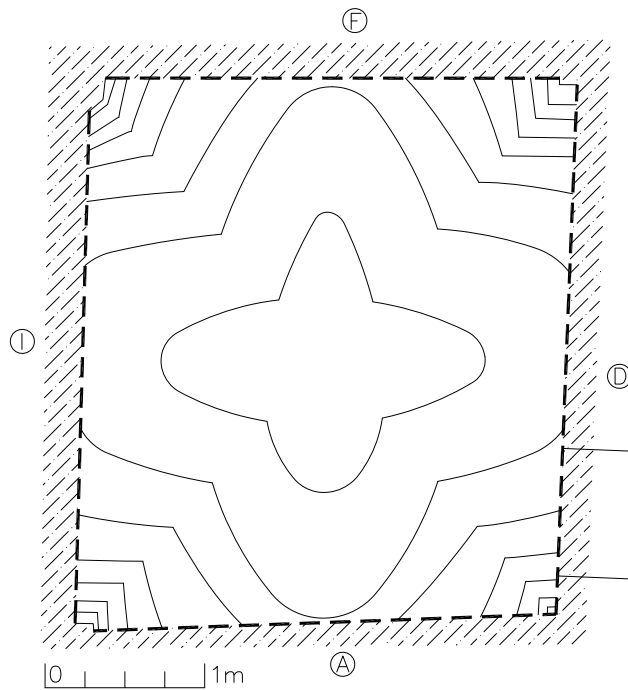


Figura E.21: Montijo54. C/ López de Ayala nº45. Montijo (Badajoz).

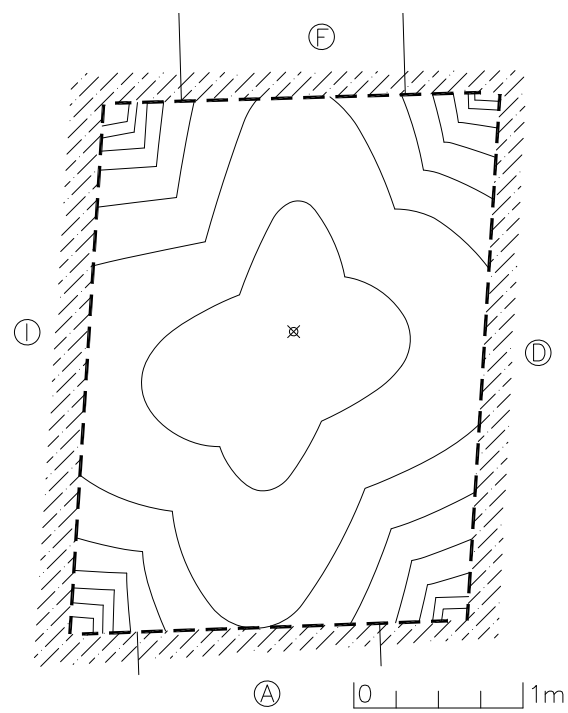


Figura E.22: LaVaca. C/ Ntra. Sra. de Guadalupe nº1. Cabeza La Vaca (Badajoz).

Anexo F

Fotografías



Figura F.1: Bóveda de cañón construida sin cimbrar por hiladas inclinadas.
En c/ Coronel Guillén nº 9 de Navas del Madroño (Caceres)



Figura F.2: Ajuste de la fábrica de la bóveda mediante *prolongo* a plantas irregulares.
Bóveda 1 en Palacio de los B Herrera. (Lado D en la planta E.5 pág. 175)



Figura F.3: Bóveda de aristas por hojas verticales con fábrica a panderete.
En c/ Secretario Ángel Julián nº 24, Aceuche (Cáceres).



Figura F.4: Arranque de bóveda de rosca sobre pechina.
En Torre Bujaco, Plaza Mayor (Cáceres).



Figura F.5: Arranques de bóveda Extremeña sobre pilastras.
En Viñas de la Mata (T. M. de Cáceres).



Figura F.6: Arranque de bóveda con fábrica en forma de hoja de palmera.
En avd. Las Termas. Baños de Montemayor (Cáceres).



Figura F.7: Bóveda Extremeña con fábrica a panderete.
En c/ Rodríguez Sánchez nº 13, Casas de Reina (Badajoz).



Figura F.8: Reconstrucción de una bóveda de rosca con fábrica a panderete. En c/ Francisco Pizarro nº 18, Navas del Madroño (Cáceres).



Figura F.9: Abovedamiento de espacio alargado formado por un bóveda múltiple. Las bóvedas descansan sobre el muro, las columnas y sobre arcos —cimbrados— previamente construidos. En convento del Palancar, T. M. Pedroso de Acim (Cáceres).



Figura F.10: Bóveda Extremeña. Situación en que los esfuerzos de la bóveda se dirigen hacia los muros de apoyo y no hacia las aristas diagonales. En Plaza de España, Burguillos del Cerro (Badajoz).

Notas

¹ Almagro Gorbea expone al tratar las «Bóvedas de ladrillos puestos a bofetón, construidas sin cimbra» que es: «Una técnica muy singular, sin duda de origen oriental y que llegó hasta al-Andalus, es la que permite construir bóvedas de ladrillos sin cimbra ni elemento auxiliar alguno. La técnica consiste en roscar las bóvedas usando ladrillo con las piezas sentadas con yeso y a bofetón sobre la rosca anterior iniciando el proceso a partir de uno de los muros de los testeros. Esta técnica es de origen oriental y muy antigua. Se utilizó ya en el Egipto faraónico y profusamente en la Persia sasánida [...]. Desde allí se difundió por todo el mundo islámico.»; y cita un ejemplo de este tipo de construcción abovedada perteneciente al siglo X. En ALMAGRO GORBEA, ANTONIO: *Un aspecto constructivo de las bóvedas en Al-Andalus*. III Congreso de Historia de la Construcción Sevilla (2000). Al-Qantara, 2001, pág. 152.

² REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (Ed.): *Diccionario de autoridades*. Madrid, 1726-1739 Tomo I (1726), «Alarife: El Maestro que publicamente está señaládo y aprobádo para reconocer, apreciar, ù dirigir las obras que pertenécen à la Architectúra; aunque yá generalmente se toma solo por el Maestro de Albañilería. Es voz Arábiga, que trahe su origen del verbo Aráfa, que significa el que fué señalado y nombrado para reconocer las obras públicas: de el qual se deriva el nombre Arif, que vale reconocedor, al qual añadido el articulo Al, se dixo Alarif.»

³ Cano Ramos, Javier. *Geometría, mecánica y economía: las Bóvedas Extremeñas*, presentación al libro de: FORTEA LUNA, MANUEL y LÓPEZ BERNAL, VICENTE: *Bóvedas Extremeñas. Proceso constructivo y análisis estructural de bóvedas de arista*. Ed. Kantrila SL, Badajoz, 3ª edición, 2012

⁴ En *Elementos* de Euclides. Libro V (que junto al VI tratan la ‘teoría de la proporción’), definiciones 3 y 6. Tomo II, págs. 9 y 12.

⁵ La expresión «Historia de la Técnica de la Construcción» nos parece más adecuada al trabajo que aquí se desarrolla. Tomada de Huerta Fernández, *Diseño Estructural de Arcos, Bóvedas y ...*

⁶ «Las primeras concepciones [en la Grecia clásica] sobre simetría arquitectónica identificaban simetría con la proporción, el equilibrio y la belleza ... Vitruvio [libro I, cap. 2 y 3] la define como “el vínculo armónico de cada uno de los miembros del edificio respecto de la figura global de la obra”»; en sentido estricto, la simetría, desligada de la proporción, es decir, como concepto puramente euclidiano —geométrico—, «engloba como transformaciones a todas las isometrías». En Sanz García y Moratalla de la Hoz, Ascensión, *Simetría*, pág. 2.

⁷ La primera traducción al castellano de la obra de Vitruvio se debe a Lázaro de Velasco y se encuentra disponible en la web de la Biblioteca Pública Rodríguez Moñino de Cáceres. VITRUVIO POLION, MARCO LUCIO: *Los diez libros de Arquitectura*. Trad. Lázaro de Velasco, 1564

⁸ En Vitruvio se encuentra una recomendación en «De la solidez de los edificios» en la que trata de los arcos de fábrica —de descarga— para la abertura de huecos para puertas y ventanas en los muros: «Se procurará aliviar á los maderos [de los dinteles] el peso de las paredes superiores, haciendo arcos con dovelas y tiranteces [juntas] al centro; porque una vez asi cerrados hácia el medio de los referidos maderos, se conseguirá, primeramente, que quitado el peso que habian de tener, no se pandearán; y asi mismo, si por el tiempo se viciare alguna parte, se podrá facilmente mudar sin aparato de apeos». En Vitruvio Polion, *Los diez libros de Arquitectura* (Trad. Joseph Francisco Ortiz y Sanz), cap. XI, págs. 158-159.

⁹ BATTISTA ALBERTI, LEON: *Los Diez libros de Architectura de León Baptista. Traducidos del Latín en Romance*. Trad. por Francisco Lozano. Ed. Alonso Gómez, Madrid, 1582, libro III cap. XIII pág. 86. La obra, presentada en 1452, fue publicada en Florencia en 1484 como *De arte aedificatoria*, después de la muerte del autor.

¹⁰ Fray Lorenzo apuntó que en la denominación del tipo «camera» Leon Baptista incluye las bóvedas esquinadas, las bóvedas por arista y las de capilla vaída. SAN NICOLAS, FRAY LORENZO DE: *Arte y uso de Architectura. Primera parte*. Madrid, 1639, cap. LI, f. 91

¹¹ BATTISTA ALBERTI, LEON: *Los Diez libros de Architectura de León Baptista. Traducidos del Latín en Romance*. Trad. por Francisco Lozano. Ed. Alonso Gómez, Madrid, 1582: *Los diez libros de Arquitectura*, libro III, cap. XIV, pág. 141.

¹² PALLADIO, ANDREA: *Il quattro libri del l'Architettura Di Andrea Palladio*. Ed. Bartolomeo Carampello, Venecia, 1581. En *Il primo libro dell'Architettura. Delle maniere de volti*, cap. XXIII, pág. 54. Obra publicada inicialmente en 1570 en Venecia.

¹³ Esta observación sobre la falta de descripción de la que sería la séptima clase la apunta Ortiz y Sanz en PALLADIO, ANDREA: *Los quatro libros de arquitectura*. Trad. Joseph Francisco Ortiz y Sanz. Imprenta Real, Madrid, 1779, pág. 33; y en las notas al pie hace algunas consideraciones que nos parecen interesantes: «Es excesivamente breve Paladio en asunto de bóvedas: y á la verdad los Italianos han cultivado poco esta bella y precisa parte de la Arquitectura» y más adelante señala: «En este ramo quien da la ley es Francia: España y Alemania saben su parte. Los Godos fueron muy diestros en bóvedas de cantería.»

¹⁴ PALLADIO, ANDREA: *Il quattro libri del l'Architettura Di Andrea Palladio*. Ed. Bartolomeo Carampello, Venecia, 1581. Dibujo perteneciente a: *Il primo libro del l'Architettura*, pág. 54.

¹⁵ SAN NICOLAS, FRAY LORENZO DE: *Arte y uso de Architectura. Primera parte*. Madrid, 1639, Cap. XLVII «Trata de los nombres de las bóvedas, y de dónde se derevaron», pág. 124-138.

¹⁶ Para una resisión histórica extensa y detallada de autores y descripción de sus escritos véase Santiago Huerta Fernández: *Arcos bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*.

¹⁷ Según la composición y orientación de los esfuerzos mecánicos que soporta. En las superficies denominadas de simple curvatura los esfuerzos están contenidos en un plano, esfuerzo bidimensional, y en las de doble curvatura en dos planos o esfuerzo tridimensional.

¹⁸ Para ilustrar la variabilidad de formas de abovedamientos realizados en piedra o ladrillo más frecuentes, pueden verse las láminas 1 y 2 «Tipos de bóvedas» que ilustra Henri Thunnissen en su libro *Bóvedas: su construcción y ...*, págs. 6-7.

¹⁹ Superficie de fábrica que llena el espacio existente entre una superficie y otra sobre la que se estriba.

²⁰ Con el término antigüedad nos referimos desde los tiempos remotos, primeras civilizaciones en Mesopotamia, hasta épocas recientes en las que aparece el acero y el hormigón armado.

²¹ También ha sido utilizado el adobe. Una descripción de los elementos constitutivos de la fábrica se puede leer en HUERTA FERNÁNDEZ, SANTIAGO: *Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 2004, cap. 2, pág. 11-30

²² Las bóvedas en forma esférica de media naranja, de casquete esférico y otras similares se pueden

construir sin cimbrar mediante la ejecución de hileras en forma de anillos circulares horizontales.

²³ Como la Tumba de Atreo o Agamenón en Miceas (Grecia), datadas en torno al s. XIII a.C., cúpula esférica o de media naranja de 14,5 m de diámetro, construida por hileras de sillares en tendeles circulares y horizontales de cantería, formando un anillo, que van disminuyendo de radio desde la base o apoyo de la bóveda hasta la clave.

²⁴ Como las bóvedas de cañón seguido o bóvedas nubias de Ramesseum, en Egipto, datadas hacia el s. XIII a.C.; técnica constructiva que pervive en la actualidad, siglo XX, que puede apreciarse en la bóveda de cañón seguido por hiladas inclinadas mostrada en la fotografía F.1 en pág. 187.

²⁵ Los abovedamientos sin la utilización de cimbras han seguido construyéndose hasta tiempos recientes. En el renacimiento, Leon Baptista nos recuerda que: «Pero entre las bouedas de todas, foavna ay q es la recta fpherica, q no pide cimbras pues ella cierto no cfta folamente de arcos, fino tambien de cornijas.» y más adelante «Tambien podras leuantar fin algunas cimbras la boueda angular fpherica», refiriéndose a la bóveda vaída; en BATTISTA ALBERTI, LEON: *Los Diez libros de Architectura de León Baptista. Traducidos del Latín en Romance*. Trad. por Francisco Lozano. Ed. Alonso Gómez, Madrid, 1582, Libro III, pág 87-88. También encontramos referencias a este sistema en fray Lorenzo —aunque no para los dos tipos: de rosca y tabicadas—, al describir las bóvedas de media naranja: «siendo tabicada no necefsita de cimbra ninguna»; más adelante se puede leer «si la media naranja huuiese de fer de rofca de ladrillo, affentarás cerchones a trechos», y en párrafos siguientes «...en cerrando cualquier hilada empezada, está segura, por hacer el empuje contra si misma» en SAN NICOLAS, FRAY LORENZO DE: *Arte y uso de Architectura. Con el primer libro de Euclides traducido al Castellano*. Primera Parte, ed. Plácido Barco López, Madrid, 4ª edición, 1796. , cap. LIII, f. 93v-95v

²⁶ Denominación del estilo arquitectónico heredado de las culturas mesopotámicas y desarrollado por el Imperio Romano de Oriente a partir de los siglos IV-V en el extremo sureste de Europa y las tierras contiguas de Asia. Auguste Choisy, considerado una autoridad en Historia de la Arquitectura, en un texto complementario a sus trabajos anteriores sobre «L'art de bâtir chez les anciens», sitúa el origen de esta técnica en la Roma de Oriente, posteriormente Bizancio, y que, según él, sus viajes le han permitido: «... d'observer certains types de voûtes byzantines dont la structure essentiellment simple paraît offrir aujourd'hui même un intérêt pratique: ce sont des voûtes exécutées sans aucun support auxiliaire. Les Romains d'Occident s'étaient attachés á réduire les frais de cintrage; les Romains d'Orient, et après eux les Byzantins leurs successeurs directs, ont fait un dernier pas dans cette voie: ils sont parvenus à s'affranchir absolument de tout cintre.»; AUGUSTE CHOISY, FRANCOIS: *Note sur la construction des voutes sans cintrage. Pendant la période Byzantine*. volumen Mémoires et Documents, 5ª série, Tome XII, 2º semestre. Annales des Ponts et Chaussées, París, 1876. Págs. 439-450

²⁷ Auguste Choisy en *El arte de construir en Bizancio* (1883) expone uno de los estudios más completos y difundidos de los procesos y técnicas constructivas que el Imperio Romano de Oriente adoptó y que fueron difundidos por todo el Mediterráneo. AUGUSTE CHOISY, FRANCOIS: *L'art de bâtir chez les byzantins*. Librairie de la Société Anonyme de Publications Périodiques, París, 1883. Choisy, Ingeniero e historiador francés, estudió y publicó en diversas obras, las técnicas constructivas de las edificaciones y principalmente sus estructuras, el empleo de materiales y los sistemas de organización de las construcciones edificadas en los antiguos imperios: *L'art de bâtir*

chez les Romains (1873), *L'art de bâtir chez les Byzantines* (1883) y *L'art de bâtir chez les Egyptiens* (1904), además publicó la extensa obra *L'Histoire de l'architecture* (2 vols. 1883-84) y otra titulada *Vitruve* (4 vols. 1909). En su obra cabe destacar la técnica de representación gráfica de las figuras explicativas.

²⁸ Se conoce por Tartessos la región del suroeste de la península Ibérica, principalmente en los estuarios de los ríos y en la sierra de Huelva. Los comerciantes fenicios, principalmente, que negociaban con esta región desde el s. XI a.C., se asentaron comercialmente hacia el s. VIII a.C. y es a partir de este siglo que la influencia de Tartessos se extiende por los valles del Bajo y Alto Guadalquivir, por Extremadura (región geográfica) y otras áreas periféricas de los asentamientos fenicios en el este peninsular. Los fenicios era un pueblo de las costas mediterráneas del Oriente Próximo. En la época inicial del comercio con Tartessos y en la posterior con la fundación de establecimientos comerciales en el sur y levante de la península Ibérica, las ciudades fenicias del mediterráneo oriental estaban bajo dominio asirio primero y luego babilónico. Fernández Castro, María Cruz: *Los inmigrantes fenicios* y también en: *El aspecto oriental de Tartessos*.

²⁹ Posteriormente a la toma de las Islas Baleares, los bizantinos, al mando del patricio Liberius, hicieron un primer desembarco en la Península en el 552; el fin de la presencia bizantina se sitúa en la toma de Carthago Spartaria por los visigodos entre el 621 y 624. En Ramallo Asensio y Vizcaíno Sánchez: *Bizantinos en Hispania. Un problema recurrente...*, pág. 315.

³⁰ Se puede leer en Vallejo Girvés: *Hispania y Bizancio...* : «Estamos en condiciones de afirmar la llegada de influencias bizantinas a la península; también la llegada de barcos comerciales procedentes de puertos y mercados imperiales, orientales y occidentales. Podemos asegurar que en ellos debieron de arribar gentes de procedencia imperial, latina o griega, copta y siríaca... Pero no parece que aquí llegaran suficientes gentes para dejar huella cultural o epigráfica de calado, algo que está constatado con seguridad para la Italia de la segunda mitad del s. VII [a.C.]», pág. 381.

³¹ RAMÍREZ DEL RÍO, JOSÉ: *La Orientalización de al-Andalus. Los días de los árabes en la Península Ibérica*. Ed. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, Sevilla, 2002, pág. 10.

³² En Cómez Ramos, *Los constructores de...*, pág. 18; sobre un apunte tomado de Sánchez-Albornoz en *El islam de España y el Occidente*, págs. 128-150. Más adelante, en Cómez Ramos, pág. 36, se puede leer: «Por lo tanto, este oficio fue otro de los legados de Oriente a Occidente, que en las fuentes árabes aparece denominado como *urafa al-banna*, o sea, los alarifes de los albañiles, verdaderos arquitectos en el moderno sentido del término».

³³ Sistema constructivo atribuido a los bizantinos por Auguste Choisy, *L'art de bâtir chez les byzantins*, capítulo III "Principes de la construction sans cintrage", pág. 31 y sig. Otros estudiosos señalan su aparición en épocas más tempranas, como Antonio Almagro Gorbea, *Un aspecto constructivo de...*, pág. 152, que al tratar las "bóvedas de ladrillos puestos a bofetón, construidas sin cimbra" apunta, citando, que: «Esta técnica es de origen oriental y muy antigua. Se utilizó ya en el Egipto faraónico y profusamente en la Persia sasánida (mediados del s. III)». En Jacques Heyman, *El esqueleto de piedra...*, pág. 58, se puede leer sobre el método de construcción de una bóveda de cañón sin cimbras: «este método fue desarrollado originalmente en Egipto y Asiria, y se encuentra también en algunas obras bizantinas. Los ladrillos se sientan según planos inclinados (comenzando desde el muro de cabeza vertical), y cada hoja es una cimbra permanente para la siguiente».

³⁴ Se encuentran abovedamientos con curvas más complejas, como en el palacio Taq-i Kisra, en las cercanías de Ctesifonte, atribuido al sasánida Cosroes I (s. VI). El gran *iwán* de entrada es una bóveda, de 50 m de largo, 26 m de ancho y 37 m de alto, apoyada en tres paredes y con forma parabólica. Sobre unos primeros lechos de ladrillos en tendeles horizontales se desarrolla la gran bóveda por sucesivas hiladas verticales.

³⁵ Manuscrito inédito hasta 2004; PAREDES GUILLÉN, VICENTE: *Tratado de bóvedas sin cimbra*. volumen I: Estudio y transcripción de Gómez Pizarro y Sánchez Leal y vol. II: Facsímil. Consejería de Fomento de la Junta de Extremadura, Badajoz, 2004.

³⁶ La cohesión es, mecánicamente —acción que actúa sobre los cuerpos—, la resistencia que presenta un cuerpo a la deformación de cizalla cuando soporta exclusivamente esfuerzos producidos por pares de fuerzas opuestas y paralelas. Es la consecuencia de las fuerzas de atracción electroquímicas que existen en los puntos de contacto de las partículas constituyentes de la masa del material: la argamasa.

³⁷ En su tratado, Paredes Guillén expone que para lograr el equilibrio de las piezas de ladrillo sin ningún tipo de sujeción externa a la fábrica, más que la propia disposición ordenada de las piezas: «Tenemos pues, tres fuerzas que contribuyen a la firmeza de la hilada: 1ª.- la de adherencia del mortero, 2ª.- la dependiente de la inclinación, opuesta a la gravedad, o sea el rozamiento, 3ª.- la de dovelaje, que también podemos llamar de cerramiento pues no obra sin estar cerrada la hilada» y continúa exponiendo la teoría general de este tipo de construcción enunciando como principio: «...en la construcción sin cimbra de las bóvedas de cal y ladrillo, cada pieza ha de estar mantenida en su lugar por las fuerzas 1ª, 2ª y 3ª, o sean, la adherencia o cohesión; la de rozamiento o inclinación; y la de dovelaje, que puede ser doble.», pág. 123.

³⁸ El deslizamiento de B no se producirá siempre que la componente de su peso paralela al plano inclinado sea menor que la cohesión inicial del mortero, es decir, cuando $P \cdot \text{seno}(\beta) < \tau_{o,ini}$. La resistencia a cortante del mortero, en los inicios del fraguado, no está afectada por la componente normal de P al plano inclinado, $P \cdot \text{cos}(\beta)$, al ser la argamasa un cuerpo eminentemente plástico. Paredes Guillén, en su tratado, pág. 115, lo explica diciendo «...las piezas, adhiriéndose por medio del mortero, se conglomeran como si fueran una sola y, además, en que obran dos medios de sustentación: el uno, igual al del primer sistema, y el otro el del mortero, que puede ser su energía superior al peso total de la parte agente, en cuyo caso suple las dos fuerzas necesarias para mantener cada pieza en su lugar y excusarse la paciente auxiliar o cimbra.»

³⁹ Una primera referencia a estos morteros a base de cal se encuentra ya en el siglo I a.C. en «Los diez libros de Architectura» de Marco Vitruvio Polion que en la traducción de Joseph Ortiz y Sanz de 1787, puede leerse, en el Libro Segundo, Cap. V, indicaciones «De la arena, y su elección para el mortero» (pág. 34) y seguidamente en el Cap. V «De la cal, y elección de la piedra para cocerla» (pág. 35). Transcurrido casi un siglo volvemos a encontrar referencias a los morteros de cal en Cayo Plinio Segundo, en el tomo II de «Historia Natural», que en el libro XXXVI dedica el capítulo XXIII a «De las cisternas, y cal, y especies de arena, y de la mezcla de arena, y cal, y de los defectos de edificar, y techumbres, y columnas», y en otro, el XXV, a «De los pavimentos, o terrados, y cuando fueron hechos los primeros en Roma...», págs. 686 y 688, de la versión de Gerónimo de Huerta.

⁴⁰ Como las construcciones de bóvedas de adobe con argamasa de barro en los almacenes y

graneros del Ramesserum, en Luxor (Egipto) datados en el siglo XIII a.C.

⁴¹ Puede leerse una descripción de los tamaños usuales y materiales constituyentes, preparación, cocción, etc, en CELESTINO ESPINOSA, PEDRO: *Manual de construcciones de albañilería*. Imprenta de Severiano Baz, Madrid, 1859, págs. 167-183.

⁴² La plasticidad de un mortero inmediata al amasado es función principalmente de su consistencia, es decir, de su resistencia a deformarse con facilidad, y del contenido de finos de la arena que contenga la mezcla.

⁴³ La inclinación usual está entre 20° y 30°. Es fácil deducir del esquema de fuerzas representado en la figura 2.5 (a) que estos valores aumenten al hacerse más grande el espesor del mortero y también aumenten con la disminución de las dimensiones del ladrillo (cara de la tabla). También, cuando se construye por hojas inclinadas curvadas, el ángulo aumenta en las piezas de la base o inicio del arco. Esa inclinación usual aumenta igualmente en la formación de hojas que Auguste Choisy denomina troncocónicas, bien sean de base recta o de base inclinada, en las que las últimas piezas de cierre del arco en la clave, se fuerza un poco su inclinación; en Auguste Choisy, op. cit., pág. 34-35, y figuras 33, 34 y 35.

⁴⁴ El yeso y la cal son sustancias aptas para aglomerar materiales por su acción química. Existen tres tipos de yeso en la naturaleza: el yeso dihidratado o piedra de aljez —que es el más abundante—, el yeso hemihidratado —el menos abundante— y la anhidrita. El hemihidratado tiene la propiedad de fraguar y endurecer si se amasa con agua y se obtiene calcinando el aljez a 120°-200°C. Cuanto más rico sea un yeso en hemihidrato mayor poder aglomerante tendrá, por lo que los yesos comerciales se clasifican según el contenido de hemihidrato en: escayola (>80%), teso blanco (>66%) y yeso negro (>50%). La cal se obtiene a partir de la piedra caliza que al calcinarla a unos 1100°C se obtiene la cal viva a la que se le añade agua; este hidróxido cálcico o cal apagada cuando se amasa con agua es apta como aglomerante y se conoce como cal aérea porque para fraguar necesita dióxido de carbono atmosférico. Cuando la piedra caliza tiene cierta cantidad de impurezas, en el proceso de calcinación reaccionan con la cal viva y dan aluminatos y silicatos cálcicos y estos tienen la propiedad de fraguar bajo el agua, de ahí el nombre de cal hidráulica. MAYOR GONZÁLEZ, GERARDO: *Materiales de construcción*. McGraw-Hill, México, D.F., 1977, págs. 20-53.

⁴⁵ Leon Battista Alberti contempla esta posibilidad en *Los diez libros de Arquitectura*: «También podrás levantar sin algunas cimbras la bóveda angular spherica [cúpula poligonal], con tal que entretexas por la grosseza de ella misma otra recta spherica: y aqui es muy necesaria la ligadura, con la cual las partes flacas de esta se ligen muy estrechamente á las partes mas firmes de aquella», Libro III, cap. XIV, pág. 142.

⁴⁶ Ver nota 23

⁴⁷ En Robert Willis, *La construcción de las bóvedas ...*, pág. 11 y 12, puede leerse: «La superficie [formada por hiladas inclinadas desde los nervios diagonales hacia los muros verticales] es también ligeramente cóncava o cupuliforme, y puede por ello haber sido ejecutada sin cimbra, ya que cada hilada se soporta a así misma. Estas peculiaridades pueden encontrarse con algunas variaciones en otras bóvedas de la misma época.», y añade a renglón seguido: «No es fácil decir cuál ha podido ser el motivo de esta inclinación de las hiladas hacia abajo, pero es muy común, especialmente en los ejemplos más primitivos [de la Edad Media]».

⁴⁸ Sobre la transmisión de esfuerzos en las bóvedas de crucería puede consultarse HUERTA FERNÁNDEZ, SANTIAGO: *Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 2004, en 3ª parte: Geometría y equilibrio. Bóvedas de crucería y sus estribos, págs. 466-495. También se puede consultar la publicación de HEYMAN, JACQUES: *Teoría, historia y restauración de Estructuras de fábrica*. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 1995, cap. 1 La bóveda nervada, págs. 26-31

⁴⁹ Una explicación, sencilla y fácil, de obtener la misma flecha para distintos arcos en los muros la expone Fray Lorenzo, con el solo uso de la regla y el compás, para adaptar una planta cuadrangular o trapecial, mediante el método gráfico —que se expone para una bóveda «efquifada» y que resuelve satisfactoriamente el de una bóveda de crucero por aristas— se puede ver en el texto del folio 100v al que acompaña una figura descriptiva en el siguiente folio 101. SAN NICOLAS, FRAY LORENZO DE: *Arte y uso de Architectura. Primera parte*. Madrid, 1639

⁵⁰ «prolongo» es la expresión usada por Fray Lorenzo para señalar las dimensiones que exceden de una planta cuadrada y para indicar el aumento de fábrica necesario para abovedar una superficie irregular a partir de una bóveda básica de planta cuadrada. En su tratado propone soluciones de trazado sobre plantas irregulares de los cinco tipos básicos que considera de bóvedas; en el capítulo que trata la bóveda de cañón recto, que dice «llamamos Capilla por arifta», advierte de la existencia de esa circunstancia: «Puede ofrecerfe, que la planta donde ehta bobeda fe ha de labrar, fea prolongada, y fiendo el prolongo moderado...» y describe la solución del ajuste a una planta rectangular mediante un ejemplo, «para que mejor lo entiendas», de un habitáculo con «una planta tiene veinte pies por un lado, y por otro veinte y cinco...». SAN NICOLAS, FRAY LORENZO DE: *Arte y uso de Architectura. Primera parte*. Madrid, 1639, f. 101v.

Para las modificaciones y/o adaptaciones de una bóveda de arista romana a superficies rectangulares o paralelogramos en planta, léase el desarrollo lógico e histórico de las soluciones adoptadas a estas circunstancias en: Violet-le-Duc *La construcción medieval*, capítulo *Principios*, pág. 11 y siguientes.

⁵¹ Decimos que están prácticamente limitados porque la abundancia de uno u otro material, el yeso o la cal, no excluye la utilización de ambos en un mismo territorio como puede comprobarse en el Levante Español que con abundancia de aljez existen obras de carácter defensivo realizadas con cal, por ejemplo: la muralla de Begastri, en Murcia, formada «con sillares, piedras de gran tamaño y relleno de piedras irregulares trabadas con cal...»; la muralla del Cerro de La Almagra, también en Murcia, que «presenta doble paramento de bloques toscamente escuadrados unidos con cal y un relleno de piedras también trabadas con cal y tierra...»; el castillo de la Concepción de Cartagena con «potentes aljibes con mortero hidráulico...», y todas estas construcciones fueron realizadas con posterioridad al s. II. Fortificaciones y descripciones entrecomilladas tomadas de Ramallo Asensio y Vizcaíno Sánchez: *Bizantinos en España. Un problema recurrente...*, págs. 325 y 326

⁵² Este amplio territorio ocupa los del antiguo Al-Andalus, el reino de Valencia y el de Aragón. Existen referencias de la abundancia de este aglomerante y su uso extensivo en edificaciones en textos de principios del s. XII; Al Edrisi, geógrafo, en una de las descripciones que hace de sus viajes por España y el norte de África alude a la abundancia de explotaciones de aljez en la zona de Almería, su comercialización y uso «Las montañas contiguas á Alhama, son en su totalidad formadas por yeso. Se extrae esta roca, se la quema y se transporta á Almería para ser empleada en

la unión de las piedras de los edificios. Se vende muy barata á causa de su abundancia.», en *Al Edrisi Descripción de España*, pág. 40. El uso generalizado del yeso como aglomerante en edificaciones se asegura introducido en la península en el s. VIII. En Antonio Almagro se puede leer: « ... pensamos que hay datos suficientes para considerar que el uso del yeso como material constructivo estructural se implantó en al-Andalus de la mano de los musulmanes, sin duda transmitido desde Mesopotamia y Persia.» en Almagro Gorbea op. cit., pág. 149. En nuestra opinión, las construcciones realizadas en este área con la utilización del yeso en la argamasa, no solo se debe a la cantidad de aljez disponible —existen también zonas calizas— se debe, pensamos, a que la fabricación de yeso es más fácil y sobretodo mucho más económica que la de la cal, pues el yeso se puede obtener calcinando el aljez a unos 200°C y la piedra caliza debe superar los 1000°C para la cal aérea y alcanzar los 1200°C para la hidráulica. Por otra parte, no sabemos de la experiencia de los transmisores de este tipo de construcción —desde oriente medio— con otro material que no fuera el yeso.

⁵³ Sobre los orígenes de estas bóvedas tabicadas puede consultarse, entre la extensa bibliografía existente sobre este asunto, la publicación FORTEA LUNA, MANUEL: *Origen de la bóveda tabicada*. Actas del VI Congreso Nacional de Historia de la Construcción Valencia 2009. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 2009.

⁵⁴ Decimos que la formación de roscas de ladrillo se realiza mayoritariamente con mortero de cal porque en esta parte de la península, donde no existe el aljez con aptitud extractiva y por tanto industrial, la utilización de la cal ha sido el aglomerante comúnmente usado en la edificación hasta la importación masiva, ferroviaria esencialmente, del yeso desde otras regiones. La utilización del yeso en los abovedamientos a panderete que se encuentran en la provincia de Badajoz anteriores a la instalación del ferrocarril, se debe a la cercanía con Sevilla, donde la piedra de aljez era conocida y explotada desde antiguo: canteras de aljez en Morón de la Frontera y otras de menor entidad o *rascaderos* para abastecimiento local (Fuente: Instituto Geológico y Minero de España). La cal tiene la ventaja, frente al yeso, de la durabilidad de sus propiedades aglomerantes en tiempos largos de almacenado: «mientras mas añeja es mejor. Hallafe en las leyes de las obras de cafas antiguas, que el que las tomava a deftajo no pudieffe ufar de cal, que fueffe mas frefca que de tres años.», que puede leerse en Plinio Segundo —Plinio el Viejo— *Historia Natural*, libro II, cap. XXIII, pág. 687.

⁵⁵ Puede verse la dispersión de las principales canteras de extracción de piedra caliza por provincias y comentarios sobre su aptitud en: Celestino Espinosa, op. cit., sec. VI «Noticia de las cales hidráulicas en España...», págs. 133-148; Ramírez del Río en «Pueblos de Sevilla en época Islámica...» hace referencia a la calidad y abundancia de las cales utilizadas en edificaciones en Sevilla —precedentes principalmente de Dos Hermanas y Morón— en el s. XII, comentando: «cuando la extracción de la cal de sus canteras era de gran utilidad para las construcciones de Sevilla», p.16

⁵⁶ Sánchez Ferlosio: *Ensayos*, tomo I: *Altos estudios eclesiásticos*, pág. 244.

⁵⁷ BOGUERÍN ACEDILLO, FRANCISCO JAVIER: *Construcción de bóvedas de ladrillo sin auxilio de cimbras ni yeso*. volumen Tomo I 12 (2) de *Revista de Obras Públicas (Artículo fechado en Badajoz, 16 de Mayo de 1855)*. Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, Madrid, 1855 págs. 135-136. Boguerín, Madrid 1824-1886, Trabajó como Ingeniero Jefe de primera clase del cuerpo de Caminos, Canales y Puertos en el Ministerio de Fomento, participando en numerosos proyectos de trazado y construcción de ferrocarril —el de Orense a Vigo se expuso, por su calidad técnica y buen

gusto en la presentación, en la exposición univeral de París de 1867—, entre ellos el correspondiente a la línea de Cáceres a Assumar, Portugal, país en el que durante cinco años desempeñó el cargo de Ingeniero Jefe de la Real Compañía de los caminos de hierro portugueses (Gaceta de Madrid, 21-XII-1872).

⁵⁸ En la descripción que hace de la construcción de una bóveda de cañon recto, Boguerín toma como línea directriz la curva vertical correspondiente a una semicircunferencia, sobre la que se desarrolla la superficie creada por una línea recta horizontal, tangente y perpendicular a la anterior, que se toma como generatriz.

⁵⁹ En CELESTINO ESPINOSA, PEDRO: *Manual de construcciones de albañilería*. Imprenta de Severiano Baz, Madrid, 1859, pág. 286

⁶⁰ GER Y LÓBEZ, FLORENCIO: *Manual de Construcción Civil*. Imprenta de D. José Santamaría, Badajoz, 2ª edición, 1915, págs. 200-201

⁶¹ Con la referencia: PAREDES GUILLÉN, VICENTE: *Tratado de bóvedas sin cimbra*. volumen I: Estudio y transcripción de Gómez Pizarro y Sánchez Leal y vol. II: Facsímil. Consejería de Fomento de la Junta de Extremadura, Badajoz, 2004, manuscrito conservado en el Legado Paredes en el Archivo Histórico Provincial de Cáceres.

⁶² La fecha de redacción del manuscrito coincide con la del el año de publicación por Auguste Choisy de *L'art de bâtir chez les byzantines*, y no sabemos si este libro habría llegado a las manos de Paredes Guillén; en todo caso Choisy describe la organización y orientación de las hiladas de ladrillo, verticales o inclinadas, y no hace ninguna referencia a los principios mecánicos del sostenimiento de las piezas durante la ejecución de las hiladas, asunto que sí trata profusamente Paredes Guillén.

⁶³ La denominación o referencia a los elementos constituyentes de una edificación que hace Paredes Guillén depende de su función en el equilibrio de la obra: «La solidez del edificio depende pues, del equilibrio de sus partes; la de éstas, del de sus miembros; y estos lo estarán si tienen equilibradas sus propias partes las que, necesitan para ello, que las piezas tengan el peso, forma y colocación apropiadas.»; «Las partes de que se compone cada cada miembro al hacer equilibrio, unas empujan o pesan y otras resisten el empuje o peso de sus contrarias, por lo que, a las unas las podemos llamar agentes y a las otras pacientes del empuje.»

⁶⁴San Nicolas, op. cit., f. 95v

⁶⁵ Benito Bails, al referirse a la disposición de las piezas en las hiladas de la bóveda de media naranja, dice que forman parte de un cono: «conos (que) serán por consiguiente truncados,... Como estos conos truncados han de estar asentados unos encima de otros, su superficie superior ha de ser cóncava, para que con ella cuadre la inferior ó el lecho de la dovela, que es convexo. Formará de todo esto el juicio que corresponde el que se figurare muchos cucuruchos metidos unos dentro de otros», y lo acompaña con un dibujo, muy clarificador, en la figura 204. En BAILS, BENITO: *Diccionario de Arquitectura Civil*. Imprenta de la viuda de Ibarra, Madrid, 1802, pág. 395.

⁶⁶ Paredes Guillén llama bóveda de «arista truncada» a aquella que su curva generatriz se desarrolla desde los muros hacia la clave por una directriz recta e inclinada sobre la horizontal y a ese incremento de altura lo denomina «mira» o «peralte»; de «capilla» o de «arista cumplida» a las bóvedas «originadas por la intersección de dos esferiodes, o de dos elipsoides, o de un elipsoide y un esferiodes» (esquema de la figura 26 del Tratado); y la «bóveda coja» a aquella que los arranques

de las aristas en los muros están a distinta altura. La descripción que hace Pérez Guillén de la bóveda de «arista cumplida» es casi idéntica a la empleada por Ger y Lóbez en *Manual de...*, pág. 191, cuando describe la bóveda «por arista» o «capilla» y al tratar de las variantes de esta, define la bóveda de «capilla cumplida ó empinada» la formada por «la intersección de semi-esferoides, de semi-elipsoides ó de unos con otros».

⁶⁷ ALBARRÁN GARCÍA-MARQUÉS, JOSÉ: *Bóvedas de ladrillo que se ejecutan sin cimbra*. volumen :Revista Quincenal de 15 febrero, 1 marzo, 1 abril y 15 de Abril de 1885. Imprenta del Memorial de Ingenieros del Ejército, Madrid, 1885

⁶⁸ Publicada en 1885, esta memoria fué presentada en 1883, por lo que en el encabezamiento «Consideraciones preliminares», que cita a Boguerín, Espinosa y a Ger y Lobe, tubo que ser añadido o reformado en la fecha de la publicación. Albarran afirma al final de su memoria: «espero sea leida con benevolencia y que se tendrá presente que no habiendo escrito nada sobre las llamadas bóvedas de Extremadura, no me ha sido posible consultar ningún autor, y he tenido que limitarme á emitir mi opinión y á expoer las observaciones que tengo hechas acerca de tan interesante cuestión»

⁶⁹ Albarrán toma para la bóveda de cañón recto como generatriz una recta horizontal que se traslada tangente y perpendicular a un arco de circunferencia que toma como directriz.

⁷⁰ Entre las aportaciones sobre el estudio de las obras de fábrica cabe destacar las publicaciones de: John Fitchen «*The construction of gothic cathedrals. A study of medieval vault erection*», Henri Thunninssen «*Bóvedas. Construcción y aplicación en la arquitectura histórica y en la actual*», y Jacques Heyman «Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica», «La ciencia de las estructuras», «El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de piedra».

⁷¹ FORTEA LUNA, MANUEL y LÓPEZ BERNAL, VICENTE: *Bóvedas Extremeñas. Proceso constructivo y análisis estructural de bóvedas de arista*. Ed. Kantrila SL, Badajoz, 3ª edición, 2012

⁷² Fortea Luna y López Bernal, op. cit., pág. 21.

⁷³ Fortea Luna y López Bernal, págs. 93-147.

⁷⁴ Descripción de Bóvedas compuestas, art. 468, pág 192 y figuras 249 y 250 de la lámina 7ª, tomados de GER Y LÓBEZ, FLORENCIO: *Manual de Construcción Civil*. Imprenta de D. José Santamaría, Badajoz, 2ª edición, 1915

⁷⁵ Paredes Guillén, op. cit. pág. 130-131

⁷⁶ En el tratado de Paredes Guillén, op. cit., en su primera parte: Estudio, Pizarro Gómez y Sánchez Leal establecen que este valor del retumbo «suele ser del 5 % de la luz», lo que equivale a decir que dicho retumbo está en torno a 1/20 de la luz.

⁷⁷ Esta forma de abovedamiento con generatriz circular y directriz recta e inclinada sobre la horizontal —por encima de la clave de la arista el el muro— es descrita por Henri Thunnissen como: «Bóveda de aristas con líneas de clave ascendentes (rampante recto)»; en *Bóvedas: su construcción y empleo...*, representada en la lámina 6, figura 2, pág. 22.

⁷⁸ Enri Thunnissen describe estas bóvedas como: «Bóveda de aristas con líneas de clave o rampantes curvos»; lámina 8, pág. 25.

⁷⁹ Fortea Luna y López Bernal: *Bóvedas Extremeñas, proceso* En cuanto a su forma exponen: «Atendiendo a su geometría las Bóvedas Extremeñas son todas aquellas bóvedas de arista (independiente del número de ellas) con retumbo, independiente de que sean de rosca o panderete», y en cuanto a su localización: «se centra en la cuenca del río Guadiana, limitada al norte por el río

Tajo, al sur por el Guadalquivir, extendiéndose por el este hasta Castilla y penetrando por el oeste en todo el Alentejo portugués», pág. 22.

⁸⁰ Esta particularidad ha sido descrita por M. Fortea « la (bóveda) extremeña es la intersección de dos toroides, provocando que la clave central esté más alta que la clave de los arcos laterales. », en FORTEA LUNA, MANUEL y LÓPEZ BERNAL, VICENTE: *Bóvedas Extremeñas. Proceso constructivo y análisis estructural de bóvedas de arista*. Ed. Kantrila SL, Badajoz, 3ª edición, 2012, pág. 19.

⁸¹ En el sentido de « Cualquiera de los arcos desde donde nacen los tímpanos de una bóveda por arista » en GER Y LÓBEZ, FLORENCIO: *Tratado de Construcción Civil*. Establecimiento tipográfico La Minerva Extremeña, Badajoz, 1898.

⁸² Casos similares de la peculiaridad de la concavidad de los cuatro paños de la bóveda observable en el plano de curvas de nivel ya fué resaltada por Auguste Choisy, op. cit., pág. 54 y ss., al tratar sobre las *Consecuencias del trazado Bizantino*, refiriéndose en su caso a bóvedas de arista peraltadas de superficies esféricas. También, esta peculiaridad se refleja en el libro de Fortea Luna y López Bernal, op. cit., pág. 19, en el que especifica que «Su geometría es compuesta ... cada una de estas figuras o superficies que la componen son de doble curvatura.».

⁸³ Fray Lorenzo de S. Nicolas se refiere a ellas como «forma efquinas por el mifmo diagonal». En San Nicolas, op. cit. , cap. LVI, f. 101.

⁸⁴ Arco de encuentro: «El que es común a dos bóvedas que se encuentran penetrándose una a otra». En BAILS, BENITO: *Diccionario de Arquitectura Civil*. Imprenta de la viuda de Ibarra, Madrid, 1802

⁸⁵ BOGUERÍN ACEDILLO, FRANCISCO JAVIER: *Construcción de bóvedas de ladrillo sin auxilio de cimbras ni yeso*. volumen Tomo I 12 (2) de *Revista de Obras Públicas (Artículo fechado en Badajoz, 16 de Mayo de 1855)*. Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, Madrid, 1855

⁸⁶ ALBARRÁN GARCÍA-MARQUÉS, JOSÉ: *Bóvedas de ladrillo que se ejecutan sin cimbra*. volumen :*Revista Quincenal de 15 febrero, 1 marzo, 1 abril y 15 de Abril de 1885*. Imprenta del Memorial de Ingenieros del Ejército, Madrid, 1885 pág. 41

⁸⁷ GER Y LÓBEZ, FLORENCIO: *Tratado de Construcción Civil*. Establecimiento tipográfico La Minerva Extremeña, Badajoz, 1898, pág. 201

⁸⁸ FORTEA LUNA, MANUEL y LÓPEZ BERNAL, VICENTE: *Bóvedas Extremeñas. Proceso constructivo y análisis estructural de bóvedas de arista*. Ed. Kantrila SL, Badajoz, 3ª edición, 2012, p.17

⁸⁹ Aunque la Bóveda Extremeña no está catalogada como «patrimonio arquitectónico» oficialmente, creemos necesario seguir las indicaciones que marcan entidades internacionales al respecto, pues las entendemos aplicables al asunto de este trabajo sobre una estructura que podemos calificar de histórica. Organismos y distintas asociaciones internacionales destacan la importancia y necesidad del levantamiento topográfico del patrimonio como parte fundamental, junto a la historia, los materiales y otros, para el estudio y conservación de dicho patrimonio. Destacan: la VV. AA.: *Carta de Venecia (Carta Internacional para la Conservación y Restauración de Monumentos y Sitios)*. II Congreso Internacional de Arquitectos y Técnicos de Monumentos Históricos, 1964. Trad. María José Martínez Justicia; la VV. AA.: *Carta del Restauro 1972*. Ministerio de Instrucción Pública, 1972. Trad. María José Martínez Justicia; los VV. AA.: *Principios para la creación de*

archivos documentales. ICOMOS, 1996 y la VV. AA.: *Carta del Levantamiento Arquitectónico 1999*, 1999. trad. Ana Almagro Vidal

⁹⁰ El distanciómetro utilizado ha sido un Leica DISTO X310, con tolerancia en la medición de distancia de $\pm 2,0$ mm y de $\pm 0,2^\circ$ en los ángulos verticales. El disco graduado tiene un diámetro de 25 cm y una graduación de un grado entre las que puede apreciar claramente fracciones de $0,25^\circ$. Con este instrumento se puede tener una precisión del punto observado a distancias de hasta 5 m con errores inferiores a 0,02 m

⁹¹ HUERTA FERNÁNDEZ, SANTIAGO: *Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 2004, pág. 518. Y es el equilibrio que se consigue mediante una adecuada geometría el que proporciona la solidez de una obra de fábrica, como se puede comprobar en el moderno enfoque que basado en los “principios del análisis límite” realiza Jacques Heyman para desarrollar su teoría del equilibrio de las obras de fábrica basada exclusivamente en el diseño geométrico.

⁹² Euclides, s. III a.C., considerado fundador de la geometría y del llamado «método axiomático», en su tratado *Elementos*, en el Libro V, utiliza esta expresión en el sentido de: «Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas» (definición 3^a), y en esta razón se incluyen magnitudes tanto conmensurables como inconmensurables; en el conjunto de *definiciones* que encabezan este libro V puede leerse a continuación: «Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una de otra» (definición 4^a), y «Llámesen proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón» (definición 6^a), págs. 9-11. Para la comprensión de las expresiones literales que se utilizan en *Elementos* es de suma importancia asumir lo que sobre ellas indica Jesús Ruiz Felipe en *El método demostrativo de Euclides en los Elementos*: «... las cantidades están representadas geoméricamente. Los números se reemplazan por segmentos; el producto se transforma en el área del rectángulo; el producto de tres números es un volumen; la suma de dos números se refleja en la prolongación de un segmento en una longitud igual a la del otro, y la resta en cercenar de un segmento la longitud del segundo. La división de un producto (un área) por un tercer número se realiza hallando un rectángulo que tenga como lado a este último y cuya área sea igual al producto dado, siendo entonces el otro lado el cociente buscado».

⁹³ Esta proposición 9 del libro V, tomada de *Elementos* (Ed. Gredos), puede formularse con una expresión más actual: si las distancias respectivas desde un punto de una curva a un punto fijo y a una recta fija están en una razón constante —número real positivo— y esta razón es menor que 1, entonces la curva es una elipse. Várilli, Joseph C., *Elementos de geometría plana*, págs. 153-154.

⁹⁴ Una manera de trazar una elipse fué descrita por Serlio: *Libro primo d'architettura* en el que muestra gráficamente el método de trazado de curvas elípticas, Libro I f. 11v.; el libro forma parte de un tratado de arquitectura de siete libros que comenzó a publicarse en 1537 (En España fué traducido por Francisco Villalpando en 1552). También se encuentra una manera de trazar elipses, con «cinta y cordel» y una plomada, en el libro de Hernán Ruiz (el Joven): *Libro de Arquitectura*, f. 37 reproducido en la lámina XXXVI en esta edición, que propone el mismo método que Serlio. El editor Pedro Navascues Palacio dice, sobre esta coincidencia: «omitió pertinazmente los nombres de los autores cuyos textos y dibujos había utilizado» y nombra entre otros a Sebastiano Serlio (Introducción al manuscrito pág. 3). Nosotros pensamos que el método de Sebastiano Serlio es

demasiado complicado y difícil de resolver fuera de una hoja de papel, especialmente cuando se pretende el replanteo de esta curva en un muro vertical, limitado superiormente y en el que no se puede trazar una figura, un semicírculo, que supere ese límite superior. Por lo que consideramos que la forma más factible de trazar un arco elíptico en un muro vertical es utilizando el método del jardinero que Ger y Lóbez describe como: «Las elipses se trazan con un cordel ó bramante del largo del eje mayor cuyos extremos se fijan en los focos, señalándose la curva con un lápiz ó puntero que se corre cuanto la tirantez de la cuerda permite, pues toma la dirección de los radios vectores que determinan los puntos de la elipse», en Ger y Lóbez: *Manual de ...*, art 251, p.106.

⁹⁵ Esta orientación del eje Xp en la horizontal se debe a que se observa en los planos que todas las secciones del levantamiento se inician —en mitad de los muros y en los rincones— a la misma altura.

⁹⁶ MARTÍNEZ SALAS, JOSÉ: *Elementos de Matemáticas*. Gráficas Andrés Martín S.A., Valladolid, 3ª edición, 1969. pág. 438

⁹⁷ El ajuste de la curva mediante el procedimiento de mínimos cuadrados se realizó mediante un *software* propio desarrollado en wxMaxima; A partir del registro almacenado: *sección(...)* $[(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)]$ de los puntos de una sección, transformados al sistema particular Xp Yp, el paquete «lsquares» estima los valores de los parámetros, semiejes a y b, que mejor se ajustan a la ecuación de la elipse, de variables X e Y, a los datos del registro de la sección por el método de mínimos cuadrados.

⁹⁸ En el intento de encontrar una curva que se adaptase a las secciones diagonales encontramos una que se ajusta con suficiente aproximación; esta definiría la semiarista, desde la clave hasta uno de los rincones, y por simetría a toda la arista diagonal. La curva, con centro en el sistema particular de la sección Xp Yp, con forma ovalada o elipsoidal tiene la expresión: $f(x, y) \equiv y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx$.

⁹⁹ Una referencia del replanteo con cinta y cordel la encontramos en una miniatura que adorna las Cantigas de Santa María (XLV), manuscrito del s. XIII de Alfonso X, en la que se aprecian unos monjes replanteando sobre el terreno con cinta y cordel. Otra referencia con este sistema de replanteo la encontramos en la obra de del s. XIII de Villard de Honnecourt, en el folio 20 v. del manuscrito, donde se representan imágenes de medición y replanteo de las partes de una obra. HONNECOURT, VILLARD DE: *Livre de portraiture (Cuaderno)*. Manuscrito s. XIII, Biblioteca Nacional de París. Trad. Yago Barja de Quiroga. Ed. Akal, Madrid, 2001, lámina 40.

¹⁰⁰ En el *Cuaderno* de Villard de Honnecourt (Ed. Akal), en artículo de presentación que hace Roland Bechmann sobre «Los dibujos técnicos del Cuaderno...» puede leerse sobre la manera como se diseña una idea arquitectónica: «Para las grandes figuras del proyecto, se recurría a la geometría para dar las indicaciones y hacer respetar la concepción [el diseño] ... no existían patrones de medida constante y comúnmente reconocidos; las unidades variaban [de un lugar a otro] ... No era posible acotar los planos ... Sólo las figuras geométricas permitían reproducir con precisión las disposiciones previstas y adaptarse al terreno en el que ciertas disposiciones podían ser resueltas en función de las ya existentes (antiguas fundaciones, edificios vecinos, etc.). Esta geometría, puramente práctica, tenía por objeto el asegurar la concordancia entre la ejecución y la concepción mediante dibujos que representaban figuras sencillas (cuadrados, ángulos rectos, círculos, triángulos equiláteros) fácilmente reproducibles en todas las dimensiones.»

¹⁰¹ En las siguientes expresiones se utiliza el símbolo “ \approx ” en el sentido que indica igualdad por valor.

¹⁰² Fortea Luna y López Bernal se refieren a este parámetro de la elipse en los muros, a su eje menor b_{mur} , como «punto» y lo cuantifican como: «Los valores más normales, o medios, para el punto se sitúan entre un cuarto y un sexto de la luz. Son excepcionales puntos más elevados, pero es fácil encontrarlos más rebajados, ...». En *Bóvedas Extremeñas. Proceso constructivo y análisis ...*, pág. 31.

¹⁰³ El retumbo, según Paredes Guillén, que denomina «mira», depende de la pericia del operario y expone en su tratado que dicha «mira» —o retumbo— su «longitud ha de estar en relación con el tamaño de la bóveda y es la que determina la inclinación de las generatrices de los cañones que la forman; y deve ser mayor esta relación a medida de la poca práctica del operario, fijándose como términos entre los que varía de 1/20 a 1/30 de la luz, por mas que no hay inconveniente hacerlas de 1/10 si los operarios no tienen costumbre de hacer las bóvedas». En *Tratado de bóvedas sin ...*, parte VI Transcripción del manuscrito, pág. 153.

¹⁰⁴ En Palladio, en el libro I, cap. XXI, de *Los cuatro libros de Arquitectura*, p. 31, se puede leer que: «La mas bella proporción para las piezas, y que mejor sale es de siete especies, á saber: *Redondas*, aunque raras veces: *cuadradas: quadrilongas por la diagonal de un cuadrado de su anchura: de un cuadrado y un tercio: de un cuadrado y medio: de un cuadrado y dos tercios; y de dos cuadrados*». Sebastiano Serlio, en su *Libro Primo: Nelquale con facile & breue modo fi tratta de primi principii della Geometria*, p. 15, señala que las proporciones cuadrangulares son muchas, y establece siete como principales: «quadro perfecto», 1:1; «fefquialtera», 1 y 1/4:1; «fefquitercia», 1 y 1/3:1; «diagonea», 1 y 5/12:1; «sesquialtera», 1 y 1/2:1; «superbipartiens tercias», 1 y 2/3:1; y finalmente la «dupla» —simetría del cuadrado—, 2:1. También San Nicolas en *Arte y uso de Arquitectura* (ed. 1639) propone, al igual que Serlio (quizás tomado de éste), cinco formas con diferentes proporciones para figuras cuadrangulares: «cuadrada», 1:1; «diagonea», 1 y 5/12:1; «sexquialtera», 1 y 1/2:1; «superbipartiens tercias», que corresponde a la proporción 5/3 (o bien 1 y 2/3:1) que Fr. Lorenzo la describe como «quatro cõ fiete», que en la edición de Barco López del año 1796, p. 45, aparece con la designación de «superbipartiens cuartas», 1 y 3/4:1, que esta sí corresponde a la proporción «quatro cõ fiete» (coincidiendo los dibujos que acompañan en las dos ediciones citadas, aparentemente, en que ambas están en razón 1 y 3/4:1); y «dupla», 2:1; describiendo esta última, la *dupla*, en los dibujos que acompañan, como aquella en que la razón entre los lados de la figura rectangular es la formada por la duplicación de un cuadrado por uno cualquiera de sus lados (cap. XXIII: *Trata de la disposicion de las piezas Seruiciales, y de Sus proporciones*, f. 29v - 30.)

¹⁰⁵ Vitruvio Polion (ed. Joseph Ortíz y Sanz) establece que una de las claves de la composición —del diseño o proyecto— arquitectónica es la simetría: «La composición de los Templos depende de la simetría cuyas reglas deben tener presentes siempre los Architectos. Esta nace de la proporción, que en Griego llaman *analogía*. La proporción es la conmensuración de las partes y miembros de un edificio con todo el edificio mismo, de la cual procede la razón de simetría. Ni puede ningun edificio estar bien compuesto sin la simetría y proporción ... » (libro III, cap. I, p. 58); y en capítulos más adelante vuelve a la composición simétrica en la disposición de las columnas (libro IV, cap I, p. 85), las formas en los capiteles (libro IV, cap VIII, p. 103) y otros miembros del edificio.

¹⁰⁶ Sobre la figura generadora básica en el diseño arquitectónico puede leerse en San Nicolas,

Arte y uso de Architectura, pág. 41 (ed. 1796), en el capítulo XVII en que «*Trata de algunas cosas necesarias para trazar en el papel cualquier edificio*», sobre esta figura generadora: «Y ante todas cosas harás sobre una línea varios tamaños, como mejor te pareciere; llamados por Vitruvio módulos, y por nosotros comunmente pitipie, gobierno que ha de ser de todo edificio dibuxado, ... ». La referencia a Vitruvio Polion, *Los diez libros de Architectura*, se encuentra en el cap. II, pág. 8 de la ed. 1787, «*De qué cosas conste la Architectura*» que enumera en: *Ordinatio, Dispositio, Eurythmia, Symmetria, Decor, y Distributio*; y continúa sobre *Ordinatio* «*La Ordenacion es una apropiada comodidad de los miembros con la simetría. Regúlase por la Cantidad,...* ; y la Cantidad es una conveniente dimension por módulos de todo el edificio, y de cada uno de sus miembros.»; en una nota —de esta edición— se aclara el concepto de módulo: «Módulo es aquí una cantidad arbitraria, que una vez establecida de la magnitud deseada, dirige todos los miembros de un edificio, y aun de cualquier otro artefacto sujeto a reglas de arte. Del numero mayor o menor de módulos en sus miembros que en otros, segun la naturaleza y esencia de cada uno, nace la simetría ...»

¹⁰⁷ Una breve descripción de la utilización de medios y ejecución de obras —que ya conocían sobradamente los constructores medievales— puede leerse en la introducción de Roland Bechmann al «*Livre de portraiture*» (Cuaderno) de Villard de Honnecourt. Roland Bechmann en «Los dibujos técnicos del Cuaderno ... » al tratar «Los instrumentos y su uso» expone, primeramente, que: «En la fase de la concepción del proyecto y para los dibujos de reducidas dimensiones, ejecutados en la misma fábrica, se hacía uso del compás, la escuadra y la regla. En la fase de ejecución [...], para el control de las dimensiones, las alturas o la verticalidad, se empleaba el cordel, el plomo, el nivel, así como otros instrumentos sencillos de reglaje»; y continúa con una breve descripción de la utilización de esos instrumentos «sencillos». En Villard de Honnecourt: *Livre de portraiture (Cuaderno)*, Introducción, págs. 50-51.

¹⁰⁸ Paolo Zellini: *Número y «logos»*, pág. 107 y 101.

¹⁰⁹ En la antigüedad, en la Grecia clásica, se conocían sistemas de representación en el espacio: la perspectiva. Es en el Renacimiento cuando se desarrollan estos sistemas de representación —fruto de la colaboración entre artistas y científicos— apareciendo tratados de perspectiva que basados en la geometría plana desembocan en las perspectivas caballerías o axonométricas, entre otras, que representan el espacio tridimensional. A partir de la geometría Euclidiana se desarrolla la geometría proyectiva, basada en la proyección y la sección. A partir del S.XIX, los desarrollos se hacen de una manera más científica y forman, de manera oficial, parte de la ciencia: la geometría descriptiva. Apunte tomado de Navarro de Zuvillaga: *Imágenes de la perspectiva*, págs. 15-29.

¹¹⁰ La obra, compuesta por trece libros, con multitud de versiones y ediciones, fué traducida —parcialmente— al castellano por Rodrigo Zamorano en 1576: *EUCLIDES: Los seis libros primeros de la Geometría de Euclides*. Trad. Rodrigo Zamorano. Impresor Alonso de la Barrera, Sevilla, 1576. En este trabajo que presentamos, la edición que manejamos es la de la editorial Gredos: *EUCLIDES: Elementos*. volumen tomo I: libros I-V, tomo II: libros V-IX y tomo III: libros X-XIII. Trad. y notas de María Luisa Puertas Castaño. Gredos S.A., Madrid, 1ª edición, 1991. Los trece libros están agrupados por su temática: libros I-IV, teoría elemental de la geometría plana; libros V-VI, teoría generalizada de la proporción; libros VII-IX, teoría de la aritmética; libro X, teoría generalizada de la proporción y motivos aritméticos; y libros XI-XIII, geometría del espacio.

¹¹¹ La utilización principal del compás era la de trasladar medidas y posteriormente, a partir de

ellas, marcar círculos o arcos circulares. El profesor Joseph C. Várilli, en *Elementos de Geometría plana* aclara que: «La regla y el compás usados por Platón y Euclides difieren de los instrumentos modernos en dos aspectos importantes. En primer lugar, “la regla no es una regla milimétrica”, es decir, no posee calibraciones ni graduaciones de ningún tipo para cumplir la función secundaria de medir distancias: es simplemente un instrumento que permite trazar una línea recta entre dos puntos dados... En segundo lugar, el compás de Euclides puede trazar un círculo cuyo centro es un punto dado y que pasa por un segundo punto dado. El compás “moderno”, confeccionado de metal (con o sin un travesaño para mayor rigidez) permite fijar el radio antes de aplicar su punto al centro del círculo deseado: con este compás podemos trazar un círculo con “un centro dado y un radio dado”. Sin embargo, esta distinción es de menor importancia, ya que las primeras tres proposiciones del libro I de Euclides establecen la equivalencia entre los dos tipos de compás». La utilización principal del compás era la de trasladar medidas y posteriormente, a partir de ellas, marcar círculos o arcos circulares.

¹¹² Ver nota 93

¹¹³ El cuadrado es la figura cuadrilátera que es equilátera y rectangular. Euclides: *Elementos*, Libro I, definición 22.

¹¹⁴ Esta proposición 47 del primer Libro se debe a Pitágoras y es conocido universalmente como «teorema de Pitágoras», pero es Euclides, en *Elementos*, el que lo queda definitivamente lo establece mediante una clara demostración que hoy conocemos como método científico; y una prueba más general —científica— quedó establecida por Euclides en: I, prop. 47 « En los triángulos rectángulos, la figura (construida) a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construida de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto». Euclides, Ed. Gredos, nota págs. 262-263. Este teorema aparece en Vitruvio, en el prefacio al libro IX, como la regla de tres, cuatro y cinco: «sí se toman tres reglas, una de tres pies de longitud, otra de cuatro pies y la tercera de cinco pies y si las colocamos de manera que queden en contacto sus extremos, lograremos una figura triangular y formarán una escuadra perfecta »

¹¹⁵ En las civilizaciones conocidas en todos los continentes, los números han servido para expresar conceptos, ideas, que el hombre ha tenido necesidad de expresar y entre ellos el seis ha estado presente en esos rituales enunciativos. Vitruvio afirma que los números perfectos son el 10 y el 6; «A Platón le pareció perfecto el número diez. . . Los matemáticos, por el contrario, afirmaron que el número perfecto es el seis, pues posee unas divisiones que suman seis», es decir, el seis es igual a la suma de sus divisores: $6=3+2+1$. Marco Vitruvio Polion: *Los diez libros de arquitectura*, Ed. Alianza Forma, págs. 82-83. El filósofo y matemático Nicómano de Gerasa, s.I, llamaba al número seis —también al cinco— y a los terminados en seis: «esféricos o apocatastáticos» (que retornan a su punto de partida), por que al multiplicarlo por sí mismo resultan números que acaban en seis ($6 \times 6 = 36$, $16 \times 16 = 256$), y también, por que sus potencias acaban en el mismo número seis ($6^1 = 6$, $6^2 = 36$). Paolo Zellini: *Número y «logos»*, pág. 199.

¹¹⁶ La cuerda vertical trazada por los focos de una elipse, *latus rectum*, tiene una magnitud referida a los semiejes de la elipse de: $2b^2/a$; en la figura 4.15, el semi-*latus rectum* FL y el F'L' tienen un valor de: b^2/a .

¹¹⁷ «De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo es la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide

la que tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y llámese trapecios las demás figuras cuadriláteras», en Euclides, *Elementos* (ed. Gredos), libro I, definición 22, p. 195.

¹¹⁸Se encuentran aplicaciones arquitectónicas con esta proporción desde tiempos remotos. La Gran pirámide de Guiza (Keops), construida hacia 2700 a.C., presenta la proporción en la geometría de la forma exterior —la altura y la base que la contiene— y en salas interiores, lo que hace pensar que sus constructores conocían de alguna manera la proporción *auron*. Se piensa que de Egipto pasó a Grecia; Pitágoras tomó la figura del pentágono como distintivo para su Escuela y en esta figura está la proporción *auron* entre todos sus elementos, lados y diagonales. En Platón, en su *Timeo*, también se encuentran referencias. Es en el periodo de la Grecia clásica cuando encontramos estudios formales teóricos sobre las relaciones geométricas entre las partes y el todo de una cosa, magnitud finita o figura regular. A partir de Euclides se desarrolla la idea de *incommensurabilidad* de determinadas magnitudes, primeramente la derivada de la proporción diagonal del cuadrado y con la proposición euclidiana de división de un segmento en *media y extrema razón*, también incommensurable, quedó establecida una proporción que, dada su bondad, se le han conferido propiedades de carácter místico y filosófico. En Roma es con Vitruvio Polion donde se encuentra esta proporción cuando trata de la «simetría» en los edificios y sus partes. En el s. XIII, es en el manuscrito de Villar de Honnecourt donde aparece nuevamente referencia a la proporción *áurea* representada en un dibujo de un rectángulo *áureo* sobre la imagen de una oveja. Las teorías de las proporciones incommensurables fueron nuevamente objeto de estudio en el Renacimiento. De todas las obras publicadas en ese periodo sobre proporciones geométricas la que más difusión ha tenido es el de Luca Pacioli, s. XV, una compilación de conocimientos geométricos antiguos, en la que muestra su admiración por la proporción *auron* que llama *Divina Proportione*, y en la que llega a enumerar en trece los efectos de la utilización de la proporción que considera perfecta y divina. Sebastiano Serlio, s. XVI, retoma el estudio del cuadrado y de los rectángulos derivados de él para la aplicación en el diseño arquitectónico. La importancia de la *proporción áurea* también se refleja en obras de Andrea Palladio, Miguel Ángel, Leonardo da Vinci y de Alberto Durero. Después de algunos siglos, en el XIX reaparece como canon de belleza en obras de pintores como Cézanne y en el s. XX destaca Le Corbusier en el estudio de las proporciones geométricas, el *Modulor*, en base a trazados sencillos con regla y compás, a partir de rectángulos áureos por adición, superposición y división de éstos.

¹¹⁹ En la búsqueda de la proporción áurea a través de los Libros de Euclides seguimos el camino señalado por Luca Pacioli en su libro: *La divina proporción* (ed. Akal), que en el capítulo VII, p. 43, «Del primer efecto de una línea dividida según nuestra proporción» —que denominó *proportio habens medium et duo extrema*— señala: *En la vigesimonovena del sexto se enseña a dividir de este modo una cantidad, habiéndose previamente descrito en la tercera definición del sexto cómo debe entenderse esta división. Aunque en su segundo, por la undécima, se demuestra cómo se divide la línea bajo esta misma virtud y fuerza, no mencionándose la proporción hasta que se pasa al quinto.* Y efectivamente se puede comprobar que la primera vez que aparece la proporción áurea, sin llegar a nombrarla, en *Elementos* (ed. Rodrigo Zamorano 1576, f. 17-17v) es en el Libro II, problema 1, proposición 11, que enuncia: «Dividir una línea de manera que el rectángulo de toda ella y una de sus partes sea igual a aquel cuadrado que se hace de la parte que resta»; la siguiente en el libro VI,

definición 3 (f. 96): «Dize fe fer diuidida una línea recta con razon extrema y media quando fuere que como fe ha toda a la mayor parte, affi la mayor a la menor»; la siguiente en el libro VI, problema 9, proposición 29 (f. 117-117v): «Sobre una línea recta dada acomodar un paralelogramo ygual a un rectilineo dado, y que exceda en una figura paralelograma femejante a uno dado». Aunque Luca Pacioli señaló primeramente que: *En la vigesimonovena del sexto se enseña a dividir de este modo [media y extrema razón] una cantidad. . .* entendemos más clarificador la siguiente proposición de ese libro VI, el problema 10, proposición 30 (f. 118): «diuidir una línea recta dada terminada cõ extrema y media razon».

¹²⁰De Euclides, en *Elementos* (ed. Gredos) Libro V: «Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas» (definición 3), y «Llámesen proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón»; a partir de estas definiciones puede establecerse la ecuación general de la proporción geométrica discontinua de cuatro magnitudes: $a/b = c/d$, y cuando $b=c$ se tiene la proporción geométrica continua de tres magnitudes: $a/b = b/c$. Se tiene, también una proporción geométrica continua con dos magnitudes cuando se verifica la igualdad de razones: $(a+b)/a = a/b$, o lo que es lo mismo referido a la figura 4.17 que: $(DC+CE)/DC = DC/CE$ o bien : $DE/DC = DC/CE$, que es la división de una magnitud DE en dos partes que estén en una proporción geométrica continua que Euclides —Libro VI, proposición 30— enuncia como «Dividir una recta finita en *media y extrema razón*»; en Sanz García y Moratalla de la Hoz, Ascensión, *Proporción*, págs. 3-4.

¹²¹ El primer número irracional al que se prestó especial interés desde la antigüedad griega fue $\sqrt{2}$, que representa la diagonal de un cuadrado de lado la unidad. Aparece en Vitruvio al tratar de las dimensiones de los atrios, peristilos y otras piezas del edificio así como en la resolución de problemas de simetría; en Sanz García y Moratalla de la Hoz, Ascensión, *Proporción*, págs. 8-9.

¹²² En la figura 4.17 se presenta un segmento DE de magnitud X como parte total o *entera*; en la división de este segmento según la proporción euclidiana *media y extrema razón*, si la parte *mayor* AC es 1 la parte *menor* restante CE será X-1; entonces la proporción euclidiana se puede escribir algebraicamente como: $X/1 = 1/(X - 1)$; conocido que dos fracciones son equivalentes cuando al multiplicar sus términos en cruz se obtiene el mismo resultado, se tiene: $X(X - 1) = 1$, o lo que es igual: $X^2 - X - 1 = 1$, ecuación de segundo grado con dos soluciones de las que obviamente solo tiene sentido la positiva que resulta: $X = (1 + \sqrt{5})/2$, que se cuantifica como: $X = 1,618. . .$ Si la ecuación planteada es la relación entre dos segmentos o magnitudes en que se ha dividido AE, esta relación será siempre la misma cualquiera que sea el valor inicial fijado para DE, es decir, la proporción así obtenida, la proporción *áurea*, será siempre la misma con independencia del segmento o magnitud *entera* elegida. La proporción *áurea* es conocida actualmente con la letra griega Φ , denominación debida al matemático Mark Barr que la propuso, hacia 1900, en honor a Fídias (arquitecto del Partenón de Atenas y el más famoso escultor de la antigua Grecia) por ser la primera letra de su nombre griego: $\Phi\epsilon\iota\delta\acute{\iota}\alpha\varsigma$.

¹²³ De conocimientos de matemáticos anteriores, relacionados con la escuela de Platón, como: Teeteto, Eudoxo y Menecmo. Detalles sobre Euclides, sus influencias, sus obras y otros aspectos pueden leerse en Euclides: *Elementos* (ed. Gredos), *Introducción General* de Luis Vega, tomo I, págs. 1-184.

¹²⁴En ese apartado 4.4, en pág. 65, se llegó a la altura $HO_{mur} \approx (11/60)L$; la diferencia matemá-

tica de dividir CO_{sec} en *media y extrema razón* para la localización del centro O_{mur} es, respecto de aquel valor, de $(1/125)L$, o lo que es igual $0,008L$, diferencia que consideramos insignificante.

¹²⁵ «cuerda pentagonal» o «cuerda opuesta al ángulo pentagonal» o «cuerda pentagonal del pentágono» son denominaciones que hace Pietro della Francesca en su *Libellus de quinque corporibus regularibus*, obra escrita en latín y traducida por Luca Pacioli al italiano e incluida por éste, como una parte, en *Divina Proportione*. En esa parte, la tercera, aparece esta denominación de la cuerda de un pentágono, en el Tratado Primero: *Del pentágono*, en las resoluciones de los casos 27 al 36. Luca Pacioli, *La Divina Proporción* (Ed. Losada), p. 13 y págs. 202-208.

¹²⁶ La figura del pentágono regular era usado como símbolo —emblema— de reconocimiento entre los pitagóricos

¹²⁷ En el apartado anterior 4.4 se obtuvo que las magnitudes $O_{sec} O_{mur} = HO_{mur} \approx (11/60)L$ y que $CO_{mur} = b_{mur} + Ret \approx (11/60)L$; la diferencia matemática de dividir CO_{sec} en *media y extrema razón* para la localización de O_{mur} es, respecto de aquellos valores, de $0,008 \times L$, diferencia que consideramos insignificante.

¹²⁸ Matemáticamente la generatriz que produce la arista en el muro tiene un semieje mayor igual a la mitad del lado y el semieje menor b_{gen} igual a $5/21$ del Lado, valor éste que a efectos prácticos puede tomarse como $1/4$ de L.

¹²⁹ La primera noticia que se tiene de estas curvas es del matemático griego Menecmo (380-320 a. C.). Se debe al matemático y astrónomo Apolonio de Perga (262-180 a.C.) —relacionado con discípulos de Euclides en Alejandría—, a su tratado *Las Cónicas*, compuesta de ocho libros, la sistematización y generalización de los conocimientos existentes sobre las secciones cónicas, clasificándolas y obteniendo las propiedades que las identifica y define. Considerado como el *corpus* más completo sobre estas curvas de toda la Antigüedad, contiene 387 teoremas, algunos ya conocidos y la mayoría de ellos inéditos. En el libro I se encuentra la definición de un cono recto u oblicuo: «Si una línea recta de longitud indefinida y que pasa siempre por un punto fijo [línea generatriz] se hace mover sobre la circunferencia de un círculo [línea directriz] que no está en el mismo plano que el punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá la superficie de un cono doble.»; cono que al ser cortado por un plano dará los diferentes tipos de cónicas. Asienta los conceptos de diámetro, vértice, diámetro conjugado y ejes. Introduce el concepto del parámetro *latus rectum*. En González Rodríguez, *Apolonio de Perga. Las Secciones Cónicas*, págs. 355-366. En el libro VI, sobre la igualdad y semejanza de cónicas, aparece el problema que nos ocupa en este apartado: dada la cónica y dado un cono circular recto, hallar una sección del cono que sea igual a la cónica dada; problema que aquí se ha resuelto mediante el teorema de Dandelin (Germinal Pierre Dandelin, matemático Belga, 1794-1847), conocido como ‘esferas de Dandelin’

¹³⁰ Vitruvio al tratar de los elementos de que consta la arquitectura (Ordenación, Disposición, Eurytmia, Simetría, Ornamento y Distribución), explica el significado de Ordenación como «la justa proporción de los elementos de una obra, tomados aisladamente y en conjunto...» y esta, la Ordenación, «se regula por la Cantidad [arbitraria]» que se define como «la toma de módulos a partir de la misma obra, para cada uno de sus elementos y lograr así un resultado apropiado o armónico de la obra en su conjunto». Vitruvio Polion: *Los diez libros de Arquitectura* (ed. Alianza Forma), Capítulo segundo, pág. 32.

¹³¹ Germinal Pierre Dandelin, matemático y profesor, estableció en 1822 el teorema que lleva su nombre aplicado a las curvas cónicas; en el caso de la elipse establece que: en una superficie cónica cortada enteramente por un plano y que la sección resultante sea una elipse, se pueden dibujar dos esferas interiores al cono y tangentes a la superficie de éste de tal manera que los puntos de tangencia de las esferas y el plano de corte son los focos de la elipse. A partir de esta propiedad geométrica en un cono dado se puede trazar un plano secante conocida la distancia focal de la elipse que se quiera obtener. El método gráfico para esta resolución puede verse en Taibo Fernández, *Geometría descriptiva y sus aplicaciones*, págs. 147-148.

¹³² Al tomar un cuadrado ABCD de lado L para inscribir el cono VCD de la figura, se produce una pequeña diferencia con el valor buscado para el eje mayor, diferencia que nos parece insignificante por su valor, que es de $3/152$ de L ($0,02 \times L$) y la mitad para el eje menor; en todo caso, la elipse que se obtiene está en proporción *dupla*.

¹³³ Véase nota anterior 128

¹³⁴ Véase nota anterior 101

¹³⁵ HUERTA FERNÁNDEZ, SANTIAGO: «La teoría del arco de fábrica: desarrollo histórico». *Obra Pública. N.º 38*, 1996. Págs 18-19

¹³⁶ Afirmación de Cristóbal de Rojas en «Teorica y practica de fortificacion...» cuando trata de las tres principales cosas necesarias para la fortificación: 1ª «saber mucha practica de matematicas...», para lo que recomienda el conocimiento del tratado de Euclides, imprescindible para «disponer planos y fundamentos de los edificios...»; 2ª «la Aritmetica», para dar cuenta del «gasto para hazer la fabrica...», las medidas de las distancias y proporciones... y 3ª, específica para el objetivo de la obra, «conocer bien el puesto donde fe ha de hazer la fortaleza, o el castillo».

¹³⁷ El Ingeniero de Caminos Luis Gaztelu, en *Consideraciones acerca de la estabilidad de las bóvedas...*, comentando artículos de los ingenieros franceses M. Laterrade y M. Tourtay hace hincapié en la elección de la curva de presiones: debe elegirse la mínima «porque goza de propiedades geométricas especiales que la hacen apta para servir de comparación entre las condiciones de estabilidad de las bóvedas de diferentes luces y espesores en la clave y diversamente trazadas» y más adelante «La curva de presiones mínimas no tiene mayor probabilidad que otra cualquiera de realizarse en la práctica, ó al menos nadie puede afirmarlo: pero sin embargo, es de gran interés su conocimiento, y su importancia superior al de todas las demás».

¹³⁸ Una explicación razonada de este comportamiento puede leerse en: FORTEA LUNA, MANUEL y LÓPEZ BERNAL, VICENTE: *Bóvedas Extremeñas. Proceso constructivo y análisis estructural de bóvedas de arista*. Ed. Kantrila SL, Badajoz, 3ª edición, 2012; en cap. V «Mecánica de la doble curvatura» págs. 43-45 y gráficos explicativos en las figuras de las págs. 87 y 88.

Esta función de las aristas diagonales haciendo de nervios ocultos fué reseñada por Violet-le-Duc en bóvedas del s. XII: «... se levantan bóvedas que, en cuanto a su estructura, son verdaderas cúpulas, pero que intentan adoptar la apariencia de bóvedas de arista. Son cúpulas a las que se ciñen arcos diagonales por debajo, más como una concesión al gusto de aquel tiempo que por requerimiento de la solidez; pues de hecho estos arcos ojivos, generalmente muy débiles, no soportan nada, están incluso entregados en la plementería y sostenidos por ella»; En Violet-le-Duc *La construcción medieval*, cap. *Bóvedas*, pág. 106.

El arquitecto-ingeniero Henri Thunnissen dice de las cúpulas: «se debe diferenciar entre cúpulas

nervadas y cúpulas de cáscara. En las cúpulas nervadas (de gajos o gallonadas) se supone que los nervios son los soportes de las bóvedas y el análisis [de tensiones] recae en la comprobación de que las líneas de empuje permanezcan dentro de los núcleos de los nervios... . En las cúpulas de cáscara, [o] bien no se colocan nervios, o bien pueden ser obviados, pues sirven solamente para la rigidización de la cáscara de la cúpula... . En las cúpulas de cáscara, que tienen pequeño espesor en relación con la luz, se supone que las tensiones se reparten uniformemente en el espesor de la sección [horizontal]». Henri Thunnissen: *Bóvedas, su construcción y...*, cap. 5, págs. 344-345.

¹³⁹ En Fortea Luna y López Bernal puede leerse, al tratar el retumbo de esta bóveda, que «Por tanto la bóveda de arista con retumbo [la BEX] está más próxima a una cúpula, o una bóveda baida, que a una bóveda de arista propiamente dicha (intersección de dos bóvedas de cañón). Fortea Luna y López Bernal: *Bóvedas Extremeñas, proceso constructivo y análisis...*, pág. 21.

¹⁴⁰ Jacques Heyman, en *La ciencia de las estructuras*, pág. 53.

¹⁴¹ Santiago Huerta precisa que la línea de empujes es el lugar geométrico, dentro de los límites de la fábrica, de los puntos de paso de los esfuerzos —debidos a las cargas a que está sometida la fábrica— por un sistema de planos de corte, juntas reales o imaginarias, dados a la fábrica; la envolvente de todos los puntos de paso es la línea de presiones o línea de empujes (Huerta Fernández, Santiago: *Arcos, bóvedas y cúpulas...*, págs. 35-40). Sobre la denominación de línea de empujes o de presiones, en el mismo texto, en nota aparte en pág. 538, aclara que: «En castellano se ha utilizado normalmente “curva de presiones”, traducción literal del francés *courbe de pression*, ... Usamos la expresión *línea de empujes*, ya que el vocablo *pression* se refiere no a una fuerza sino a la fuerza por unidad de superficie. Por otra parte, el término *empuje* se ha empleado tradicionalmente en castellano para denominar el esfuerzo que ejercen los arcos contra los estribos.».

El ingeniero francés Pierre Couplet redacta una memoria en 1729 sobre: *De la Poussée des Voûtes* y al año siguiente otra, Pierre Couplet: *Seconde partie de l'examen de la Poussée des Voûtes* en la que enuncia en «Theoreme», pág 119, que si la línea de empujes se localiza íntegramente en el espesor del arco de fábrica, ésta será estable.

Según Jacques Heyman, esta condición de equilibrio en que la línea de empujes debe discurrir íntegramente dentro de la sección de la fábrica fué «comprendida» por Coulomb en 1773 en su *Essai sur une application de règles de maximis et minimis a quelques problèmes de statique, relatif à l'architecture*. Fué Henry Moseley, en 1843, en *The mechanical principles of engineering and architecture*, quien afirma de forma clara que la condición de equilibrio es que la línea de empujes o *line of pressure* no debe salir de la sección transversal de la fábrica. La *line of resistance* determina el punto de aplicación de la resultante de presiones en cada superficie de contacto de las partes constituyentes de un arco y la *line of pressure* es la dirección de la resultante; en Henry Moseley: *The Mechanical Principles of...*, art. 284, pág. 379.

¹⁴² Jacques Heyman, *La ciencia de las estructuras*, pág. 19.

¹⁴³ Jacques Heyman, *La ciencia de las estructuras*, pág. 39.

¹⁴⁴ El Coeficiente de Seguridad, en el análisis límite o plástico, «resulta de dividir la carga de colapso que produciría el hundimiento con la carga que realmente soporta», y el Coeficiente de Seguridad Geométrico, en estructuras de fábrica, compara «la geometría que conduciría al hundimiento (bajo el sistema de cargas considerado) con la geometría real», conceptos que expone Jacques Heyman en: *Teoría, historia y restauración...* y se exponen en el Cap. 6 «La seguridad de

los arcos de fábrica», págs. 92-112. A partir de estos conceptos el autor establece el teorema fundamental de la «seguridad»: «si se puede hallar una posición cualquiera para la línea de empujes... (dentro de la fábrica), esto es una prueba absoluta de que la estructura es estable, y ciertamente el colapso no puede producirse nunca bajo la carga dada.»; en Heyman: *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica*, pág 26.

¹⁴⁵ Sobre la resultante de las fuerzas que actúan sobre una sección de un arco de fábrica puede leerse en el tratado de: DUPUIT, J.: *Traité de l'équilibre des voutes et de la construction des ponts en maçonnerie*. Libraire des corps des ponts et chaussées et des mines, Paris, 1870, en el Chap. II «De la stabilité des massif en maçonnerie», y en el siguiente Chap III «De la stabilité des voutes en maçonnerie», p.p. 22-79.

¹⁴⁶ Aunque las termas originalmente son de origen romano probado, Pascual Madoz en su *Diccionario Histórico-Geográfico de Extremadura*, págs. 324-325, escribe: «hasta el último tercio del siglo XVII, el baño de este pueblo era más bien un pilón informe, sin cobertizo y casi sin uso». En ese siglo XVII se acometieron las primeras obras de restauración sobre los restos acondicionados y a mitad del s. XIX se realizaron nuevas reformas en todo el establecimiento por lo que puede descartarse que la BEx levantada en este lugar sea de origen romano en Hispania.

¹⁴⁷ MARTÍNEZ SALAS, JOSÉ: *Elementos de Matemáticas*. Gráficas Andrés Martín S.A., Valladolid, 3ª edición, 1969, págs. 505-512.

¹⁴⁸ Del griego $\epsilon\lambda\lambda\epsilon\upsilon\psi\iota\zeta$: imperfección. Curva geométrica estudiada por el matemático y geómetra griego Menaechmus de Alopeconnesus (ca. 380-ca. 320 a.C.).

¹⁴⁹ Martínez Salas, José, *Elementos de matemáticas*, págs. 429-439.

Bibliografía

- AL EDRISI: *Descripción de España*. (s. XII) Trad. Antonio blázquez, Imprenta y litografía del depósito de la guerra, Madrid, 1901.
- ALBARRÁN GARCÍA-MARQUÉS, JOSÉ: *Bóvedas de ladrillo que se ejecutan sin cimbra*. volumen :Revista Quincenal de 15 febrero, 1 marzo, 1 abril y 15 de Abril de 1885. Imprenta del Memorial de Ingenieros del Ejército, Madrid, 1885.
- ALMAGRO GORBEA, ANTONIO: *Un aspecto constructivo de las bóvedas en Al-Andalus*. III Congreso de Historia de la Construcción Sevilla (2000). Al-Qantara, 2001.
- AUGUSTE CHOISY, FRANCOIS: *Note sur la construction des voutes sans cintrage. Pendant la période Byzantine*. volumen Mémoires et Documents, 5^a série, Tome XII, 2^o semestre. Annales des Ponts et Chaussées, París, 1876. Págs. 439-450.
- : *L'art de bâtir chez les byzantins*. Librairie de la Société Anonyme de Publications Périodiques, París, 1883.
- BAILS, BENITO: *Diccionario de Arquitectura Civil*. Imprenta de la viuda de Ibarra, Madrid, 1802.
- BATTISTA ALBERTI, LEON: *Los Diez libros de Architectura de León Baptista. Traducidos del Latín en Romance*. Trad. por Francisco Lozano. Ed. Alonso Gómez, Madrid, 1582.
- BOGUERÍN ACEDILLO, FRANCISCO JAVIER: *Construcción de bóvedas de ladrillo sin auxilio de cimbras ni yeso*. volumen Tomo I 12 (2) de *Revista de Obras Públicas (Artículo fechado en Badajoz, 16 de Mayo de 1855)*. Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, Madrid, 1855.
- CELESTINO ESPINOSA, PEDRO: *Manual de construcciones de albañilería*. Imprenta de Severiano Baz, Madrid, 1859.
- CÓMEZ RAMOS, RAFAEL: *Los constructores de la España Medieval*. Universidad de Sevilla (Secretariado de Publicaciones), Sevilla, 3^a edición, 2009.
- COULOMB, CHARLES AUGUSTIN: «Sur une applitation des régles de Maximis & Minimis á quelques Problèmes de Statique, relatifs á l'Architecture». *Mémoires de Mathématique et de Physique. Académie Royale des Sciences a Paris*, 1773, pp. 343–384.
- COUPLET, PIERRE: «De la Poussée des Voûtes». *Histoire de l'Academie Royale des Sciences a Paris*, 1731, pp. 79–127. Memoria redactada en 1729.
- : «Seconde partie de l'examen de la Poussée des Voûtes». *Histoire de l'Academie Royale des Sciences a Paris*, 1732, pp. 117–120. Memoria redactada en 1730.
- DUPUIT, J.: *Traité de l'équilibre des voutes et de la construction des ponts en maçonnerie*. Libraire des corps des ponts et chaussées et des mines, París, 1870.
- DURERO, ALBERTO: *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*, 1525.
- EUCLIDES: *Los seis libros primeros de la Geometría de Euclides*. Trad. Rodrigo Zamorano. Impresor Alonso de la Barrera, Sevilla, 1576.
- : *Elementos*. volumen tomo I: libros I-V, tomo II: libros V-IX y tomo III: libros X-XIII. Trad. y notas de María Luisa Puertas Castaño. Gredos S.A., Madrid, 1^a edición, 1991.

- FERNÁNDEZ CASTRO, MARÍA CRUZ: «El aspecto oriental de Tartessos». En: *Historia de España. La península Ibérica en época prerromana*, volumen 2. El País S.L., Madrid, 2007. Págs. 195-201.
- FORTEA LUNA, MANUEL: *Origen de la bóveda tabicada*. Actas del VI Congreso Nacional de Historia de la Construcción Valencia 2009. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 2009.
- FORTEA LUNA, MANUEL y LÓPEZ BERNAL, VICENTE: *Bóvedas Extremeñas. Proceso constructivo y análisis estructural de bóvedas de arista*. Ed. Kantrila SL, Badajoz, 3ª edición, 2012.
- GAZTELU, LUIS: «Consideraciones acerca de la estabilidad de las bóvedas. Determinación de las presiones por medio de fórmulas empíricas y trazados gráficos». *Revista de Obras Públicas*, 1887, 5, pp. 325-337 y 350-359..
- GER Y LÓBEZ, FLORENCIO: *Tratado de Construcción Civil*. Establecimiento tipográfico La Minerva Extremeña, Badajoz, 1898.
- : *Manual de Construcción Civil*. Imprenta de D. José Santamaría, Badajoz, 2ª edición, 1915.
- GONZÁLEZ RODRIGUEZ, JOSÉ MANUEL.: *Apolonio de Perga. Las Secciones Cónicas*. Dpto. de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna, Santa Cruz de Tenerife.
- HERNÁN RUIZ (EL JOVEN): *Libro de Arquitectura*. volumen Manuscrito c. 1550. Estudio y edición crítica de Pedro Navascues Palacio. Escuela Técnica Superior de Arquitectura, 1974.
- HEYMAN, JACQUES: *Teoría, historia y restauración de Estructuras de fábrica*. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 1995.
- : *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica*. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 1999.
- : *La ciencia de las estructuras*. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 2001.
- HONNECOURT, VILLARD DE: *Livre de portraiture (Cuaderno)*. Manuscrito s. XIII, Biblioteca Nacional de París. Trad. Yago Barja de Quiroga. Ed. Akal, Madrid, 2001.
- HUERTA FERNÁNDEZ, SANTIAGO: *Diseño Estructural de Arcos, Bóvedas y Cúpulas en España (ca. 1500 - ca. 1800)*. Tesina o Proyecto, Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, Madrid, 1990.
- : «La teoría del arco de fábrica: desarrollo histórico». *Obra Pública. Nº 38*, 1996. Págs 18-19.
- : *Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 2004.
- INSTITUTO GEOLÓGICO Y MINERO DE ESPAÑA: *Investigación Geológica y Tecnológica de los yesos en Andalucía*. volumen Tomo I Memoria. IGME, Madrid, 1982.
- MADOZ, PASCUAL: *Diccionario histórico-geográfico de Extremadura*. Tomo I. Publicaciones del Departamento de Seminarios de la Jefatura Provincial del Movimiento, Cáceres, 1953.
- MARTÍNEZ SALAS, JOSÉ: *Elementos de Matemáticas*. Gráficas Andrés Martín S.A., Valladolid, 3ª edición, 1969.
- MAYOR GONZÁLEZ, GERARDO: *Materiales de construcción*. McGraw-Hill, México, D.F., 1977.
- MOSELEY, HENRY: *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture*. Part IV: Theory of the stability of structures, pág. 377. John Wiley & Son, New York, 2ª edición, 1869.
- NAVARRO DE ZUVILLAGA, JAVIER: *Imágenes de la perspectiva*. Siruela S.A., Madrid, 1996.
- PACIOLI, LUCA: *La divina proporción*. Trad. Ricardo Resta. Reproducción facsimilar. Editorial Losada, Buenos Aires, 1946.
- : *La divina proporción*. Trad. Juan Calatrava. Ediciones Akal, Madrid, 4ª edición, 2008.

- PALLADIO, ANDREA: *Il quattro libri del l'Architettura Di Andrea Palladio*. Ed. Bartolomeo Campello, Venecia, 1581.
- : *Los quatro libros de arquitectura*. Trad. Joseph Francisco Ortiz y Sanz. Imprenta Real, Madrid, 1779.
- PAREDES GUILLÉN, VICENTE: *Tratado de bóvedas sin cimbra*. volumen I: Estudio y transcripción de Gómez Pizarro y Sánchez Leal y vol. II: Facsímil. Consejería de Fomento de la Junta de Extremadura, Badajoz, 2004.
- PLINIO SEGUNDO, CAYO (PLINIO EL VIEJO): *Historia Natural*. volumen II. Trad. Gerónimo Huerta. Ed. Juan González, Madrid, 1629.
- RAMALLO ASENSIO, SEBASTIÁN y VIZCAÍNO SÁNCHEZ, JAIME: *Bizantinos en Hispania. Un problema recurrente en la Arqueología Española*. Archivo Español de Arqueología, Ed. Centro Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2002.
- RAMÍREZ DEL RÍO, JOSÉ: *Pueblos de Sevilla en época Islámica. Breve recorrido histórico-político*. volumen XIII, fasc. I. Philología Hispalensis, Ed. Universidad de Sevilla, Sevilla, 1999.
- : *La Orientalización de al-Andalus. Los días de los árabes en la Península Ibérica*. Ed. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, Sevilla, 2002.
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (Ed.): *Diccionario de autoridades*. Madrid, 1726-1739.
- ROJAS, CRISTÓBAL DE: *Teórica y practiva de la fortificacion, conforme a las medidas, y defensas destos tiempos, repartida en tres partes*. Ed. Luis Sánchez, Madrid, 1598.
- RUIZ FELIPE, JESÚS: *El método demostrativo de Euclides en los Elementos*. Revista Digital de la Sociedad de Información nº17. Ed. Cefalea, 1ª edición, 2009.
- SAN NICOLAS, FRAY LORENZO DE: *Arte y uso de Architectura. Primera parte*. Madrid, 1639.
- : *Arte y uso de Architectura. Con el primer libro de Euclides traducido al Castellano*. Primera Parte, ed. Plácido Barco López, Madrid, 4ª edición, 1796.
- SÁNCHEZ FERLOSIO, RAFAEL: *Ensayos*. Penguin Random House G. E., Barcelona, 2015.
- SANZ GARCÍA, M.^A AGRIPINA y MORATALLA DE LA HOZ, ASCENSIÓN: *Simetría*. volumen Geometría y Arquitectura (II) de *Cuadernos del Instituto Juan de Herrera de la Escuela de Arquitectura de Madrid nº 40-01*. Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, Madrid, 1999.
- : *Proporción*. volumen Geometría y Arquitectura (III) de *Cuadernos del Instituto Juan de Herrera de la Escuela de Arquitectura de Madrid nº 82-01*. Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, Madrid, 2000.
- SERLIO, SEBASTIANO: *Libro primo d'architettura*. Ed. Francesfo Seneffe & Zuane Krugher, Venecia, 1566.
- TAIBO FERNÁNDEZ, ÁNGEL: *Geometría Descriptiva y sus aplicaciones*. volumen II: curvas y superficies. Tebar Flores, Madrid, 1983.
- THUNNISSEN, ENRI J. W.: *Bóvedas: su construcción y empleo en la arquitectura*. Trad. Rafael García García. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 2012.
- VALLEJO GIRVÉS, MARGARITA: *Hispania y Bizancio. Una relación desconocida*. Akal, Madrid, 2012.
- VÁRILLI, JOSEPH C.: *Elementos de Geometría Plana*. Editorial de la Universidad de Costa Rica, Costa Rica, 2ª edición, 2013.
- VIOLET-LE-DUC, EUGÈNE-EMMANUEL: *La construcción medieval*. Trad. Enrique Rabasa Díaz. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 2ª edición, 1996.
- VITRUVIO POLION, MARCO LUCIO: *Los diez libros de Arquitectura*. Trad. Lázaro de Velasco, 1564.

- : *Los diez libros de Architectura*. Trad. Joseph Francisco Ortiz y Sanz, Imprenta Real, Madrid, 1787.
- : *Los diez libros de Arquitectura*. Trad. José Luis Oliver Domingo, Alianza Forma, Madrid, 1997.
- VV. AA.: *Carta de Venecia (Carta Internacional para la Conservación y Restauración de Monumentos y Sitios)*. II Congreso Internacional de Arquitectos y Técnicos de Monumentos Históricos, 1964. Trad. María José Martínez Justicia.
- : *Carta del Restauero 1972*. Ministerio de Instrucción Pública, 1972. Trad. María José Martínez Justicia.
- : *Principios para la creación de archivos documentales*. ICOMOS, 1996.
- : *Carta del Levantamiento Arquitectónico 1999*, 1999. trad. Ana Almagro Vidal.
- WILLIS, ROBERT: *La construcción de las bóvedas en la Edad Media*. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 2012.
- ZELLINI, PAOLO: *Número y Logos*. Trad. Juan Díaz de Atauri. Acantilado, Barcelona, 2018.