Acta Veterinaria 4: 27-33, 1990

LA PRODUCCION OPTIMA DE VACUNO COMO UN PROBLEMA DE LOCALIZACION CON APLICACION DEL ALGORITMO ESTOCASTICO DEL CUASIGRADIENTE

Allueva Pinilla, Ana,
Dpto. de Matemática Aplicada.
Maza Rubio, Mª Teresa,
Dpto. de Agricultura y Economía Agraria.
Facultad de Veterinaria, Miguel Servet 177, 50013-Zaragoza

SUMMARY

A proposal to solve a problem of optimal monthly production of beef was developed. The solution is offered within the frame of the Stochastic Optimization by using the Quasigradient Method applied to location models in which the farmer is the only supply point, and the different months of the year are the different demand points to be met. The optimal sales strategy for annual production is determined so that the farmer can maximize his profits. Thus, the main purpose of this work is to show a methodology which can be applied to the market process of agrarian products.

INTRODUCCION

En este trabajo se plantea un modelo para la resolución de un problema de producción mensual óptima, concretamente de carne de vacuno. Para ello abordamos el problema de la predicción de precios en el mercado, precios que, aún considerados aleatorios, presentan una estacionalidad a lo largo del año.

La modelización del planteamiento se lleva a cabo en el ámbito de la optimización estocástica; se resuelve utilizando el algoritmo estocástico del cuasigradiente aplicado a modelos de localización: el empresario es el único punto de oferta, siendo los diferentes meses del año los distintos focos de demanda a satisfacer. Con este novedoso planteamiento en las técnicas de localización se determinará la estrategia óptima de venta de la producción anual, de modo que el empresario maximice sus beneficios.

Nuestro objetivo en este artículo es mostrar, fundamentalmente, una metodología aplicable en los procesos de comercialización de productos agrarios para poner a punto técnicas de utilidad en la modelización de problemas que posiblemente tendrán mayor interés desde el punto de vista del análisis económico de sus soluciones. Para ello comprobamos la eficacia del modelo con la resolución de un ejemplo sencillo en el que se considera un productor hipotético de carne de vacuno.

Tenemos que subrayar que nuestra intención al llevar a cabo este estudio no es la obtención de importantes conclusiones de tipo económico (puesto que únicamente se resuelve un problema hipotético y puntual), sino más bien un análisis empírico que resulte de utilidad en la aplicación a otros campos más ambiciosos.

En las líneas que siguen haremos una breve introducción a los problemas de comercialización en las explotaciones agrarias para, en la sección siguiente, exponer la metodología y técnicas en programación estocástica que centran nuestro problema en estudio.

La evolución del sector agrario en nuestro país, como en el resto de los países desarrollados, ha puesto de manifiesto la tendencia de las explotaciones agrarias a producir para el mercado, abandonándose de forma creciente el planteamiento tradicional que consideraba a la agricultura como una forma de vida de una parte de la población. Sin embargo, las empresas agrarias presentan una serie de características fundamentales que limitan notablemente su participación en el mercado.

Por un lado las empresas agrarias son, en general, de pequeña dimensión, incluyendo las que en agricultura se consideran como grandes explotaciones, comparadas con las empresas industriales. Esta atomización de la oferta junto con la falta de organización de los productores ha sido uno de los defectos más importantes para la comercialización de los productos agrarios. Por otra parte, los productos, tal como salen de la explotación agraria no están generalmente preparados para el consumo, siendo, en realidad, materias primas que utiliza la industria y el comercio y, a partir de los cuales, después de ser sometidos a determinadas transformaciones y manipulaciones, pasan a ser productos alimenticios.

También en este punto es muy importante la presencia de las organizaciones agrarias cuyo papel no se reduciría tan sólo a concentrar la oferta y ejercer de este modo una mayor influencia sobre el mercado, sino que podrían abarcar las fases de transformación, comercialización y distribución de los productos agrarios.

No obstante, a los dos problemas de comercialización en las explotaciones agrarias mencionados anteriormente, hay que añadir un tercero que es la fuerte estacionalidad de la oferta de muchos productos agrícolas que produce de hecho una estacionalidad en los precios sobre todo si el producto es perecedero. En este caso el agricultor puede planificar el momento de la venta en el sentido de beneficiarse de los precios altos. Esto requiere por un lado, en mercados poco transparentes o con grandes oscilaciones de precios, que el agricultor deba hacer uso de distintas fuentes para obtener información sobre precios o sobre previsión de precios a breve plazo; por otro lado, que planifique su producción adecuadamente ya que comercialización y producción están muy relacionadas.

En este sentido SHEPHERD y FUTRELL (1969) ya señalaban que «empezar con los problemas de comercialización en la puerta de la explotación es empezar demasiado tarde». Abundando en esta idea, en una sesión de estudios de la Organización de Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE) se llegó a un acuerdo sobre la definición de la comercialización en el que se decía que «la comercialización agraria constituye un proceso que empieza en el momento en que el agricultor toma la decisión de producir un producto agrario para la venta».

El tema de las oscilaciones de precios agrarios ha sido motivo de estudio desde hace tiempo. Parece ser que los mercados agrarios son inestables por propia naturaleza y que las causas de dicha inestabilidad son muy variadas. En 1945, los profesores T.W. SCHULTZ y D. G. JOHNSON afirmaban que la inestabilidad del sector agrario venía provocada por los otros sectores de la economía que incidían de forma decisiva en él. No existía unanimidad en este criterio y así W. COCHRANE señalaba las condiciones climatológicas como principal causante de las irregularidades de dichos mercados, mientras que HATHAWAY lo achacaba a las propias reacciones de los agricultores como respuesta a las oscilaciones de la demanda.

Siguiendo a R. FIRCH podemos sintetizar como algunas causas de las variaciones de los mercados agrarios las siguientes:

- Actividades económicas de los sectores no agrarios.
- Condiciones climatológicas.
- Política administrativa de ayudas, subvenciones y otras intervenciones.
- Reacción de la oferta a las expectativas del mercado.
- Fluctuaciones de la demanda, bien por cambio de gustos del consumidor, competencia de otros productos, variaciones de renta, etc.

En el ejemplo de aplicación concreto que nos ocupa, sobre el mercado de carne de vacuno, juegan todos los factores apuntados anteriormente. En efecto, a corto plazo la oferta de carne de vacuno dependerá principalmente del número de vacas para reproducción que haya en la ganadería, así como de otros factores tales como el peso medio de la canal, la viabilidad de los terneros, etc. La relación entre la producción de carne de vacuno y el número de vacas permite, si se tiene en cuenta el precio de otros productos agrícolas determinados, establecer previsiones fiables en materia de carne de vacuno. Por otro lado la demanda de carne de vacuno está ligada a factores clásicos como son el crecimiento demográfico y la evolución del gasto privado, pero también es particularmente sensible a la relación existente entre el precio al consumo de la carne de vacuno y el de las carnes competitivas como son la carne de porcino y la carne de ave.

MATERIAL Y METODO

Aunque en la literatura de investigación sobre Economía Agraria son frecuentes los problemas que se resuelven utilizando la técnica de localización, ésta se aplica en la mayoría de los casos desde un punto de vista espacial, esto es, en el sentido clásico: puntos de oferta geográficos que satisfacen diferentes puntos de demanda.

En este trabajo, como ya hemos indicado, desarrollamos un modelo de localización con aplicación diferente: el empresario es el único punto de oferta y cada uno de los meses del año los distintos focos de demanda a satisfacer.

La formulación del modelo determinístico de localización es como sigue:

$$\text{Minimizar} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} [\, x_{ij} \ln (x_{ij}) + c_{ij}x_{ij}] \qquad (1)$$

$$\text{Sujeto a: } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , i=1,\dots,r$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall\, i,j$$

donde x_{ij} es la cantidad esperada (desconocida) de usuarios del punto de demanda i al de oferta j, por unidad de tiempo; a_i es la demanda total en cada punto de demanda i (en términos de número de clientes por unidad de tiempo); c_{ij} es el coste del transporte entre el punto de demanda i y el de oferta j.

La solución del problema (1) es la siguiente:

$$x_{ij} = a_i P_{ij} \ , \ x_j = \sum_{i=1}^{r} x_{ij} \qquad (2)$$

$$\text{donde } Pij = \frac{\exp(-cij)}{\sum_{j=1}^{n} \exp(-cii)}$$

y x_j es el tamaño o la capacidad de la oferta en j.

Nótese que las cantidades P_{ij} satisfacen la siguiente relación:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \quad , \ i=1,\dots,r \ , \ j=1,\dots,n \qquad (3)$$

con $O \leq P_{ij} \leq 1$.

Por tanto, la cantidad P_{ij} puede interpretarse como la probabilidad de que un cliente ubicado en el punto de demanda i, elija el punto de oferta j. En consecuencia, x_{ij} será el número esperado de clientes que van de i a j.

Es posible, utilizando la ecuación (2), generalizar a un problema estocástico. Se harán dos hipótesis previas:

1) La demanda a_i del punto de demanda i no se conoce a *priori*, esto es, es una variable aleatoria, lo cual es un supuesto razonable en la mayoría de las aplicaciones prácticas del modelo.

2) Los clientes en el punto de demanda i, eligen los puntos de oferta j de modo independiente unos de otros con probabilidad P_{ij}.

Introduciendo estas hipótesis en el modelo se obtiene que las elecciones efectuadas por los clientes son estocásticas. Sea ϵ_{ij} el número (aleatorio) de clientes que van de i a j: se define r_j, número total de clientes atraídos por la oferta j, como sigue:

$$r_j = \sum_{i=1}^{r} \epsilon_{ij} \ , \ j=1,\dots,n$$

Nótese que:

$$\sum_{j=1}^{n} \epsilon_{ij} = a_i \ , \ i=1,\dots,r \qquad (4)$$

Sea Hj (y) la función de distribución de rj:

$$Hj\,(y) = P\,\{\, rj \leq y \,\}$$

Usualmente no es sencillo encontrar una expresión analítica de la función de distribución $H_j(y)$, pero la atracción aleatoria dada por r_j puede calcularse utilizando algún procedimiento de simulación basada en la ecuación (4).

Si x_j es el tamaño supuesto para el punto de oferta j, el número de clientes r_j que acuden a j no coincide necesariamente con xj; en consecuencia, la diferenciación x_j-r_j representará la oferta no utilizada por la demanda total. Supongamos que esto tiene un coste dado por: $\alpha_j^+(x_j-r_j)$, siempre que $x_j - r_j \geq 0$. Del mismo modo, en el caso de que xj<rj, el coste es: $\alpha_j^-(r_j-xj)$.

Así, se define la función por partes:

$$f_j(x_j, r_j) = \begin{cases} \alpha_j^+ (x_j - r_j) & \text{si } x_j \geq r_j \\ \alpha_j^- (r_j - x_j) & \text{si } x_j < r_j \end{cases}$$

Con el problema estocástico que se obtiene se tratará de determinar los tamaños x_j de los puntos de oferta j (j=1,...,n) de modo que se minimice el coste esperado:

$$F(x_1,...,x_n) = \sum_{j=1}^{n} E\,[f_j(x_j, r_j)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha_j^+ \int_0^{rj} (xj-y)\,dHj(y) + \alpha_j^- \int_{rj}^{\infty} (y-xj)\,dHj\,(y) \right] \quad (5)$$

Sujeto a las restricciones: $x_j \geq 0$, j=1,...,n (6)

La resolución analítica de este problema es habitualmente compleja puesto que, como ya hemos indicado, difícilmente se conoce $H_j(y)$ y, en consecuencia, no es posible calcular los valores exactos de las integrales que aparecen en (5). Esta es una de las dificultades típicas que aparecen en los modelos estocásticos. Una posible solución sería utilizar sólo valores medios de $H_j(y)$ y generar valores aleatorios mediante un procedimiento de simulación (por ejemplo, Monte Carlo).

Se puede reformular el problema dado por las ecuaciones (5) y (6) como un problema minimax estotástico, siendo:

$$fj\,(xj,rj) = \max \{\alpha_j^+(x_j - r_j),\ \alpha_j^-(r_j - x_j)\}$$

De este modo, la función objetiva está dada por la siguiente función convexa:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} E\,[\max \{\alpha_j^+(x_j - r_j),\ \alpha_j^-(r_j - x_j)\}] \quad (7)$$

Se tratará de minimizar F(x) sujeto a: $x_j \geq 0$, j=1,...,n. Para resolver el problema utilizaremos el método del cuasigradiente estocástico, cuyo algoritmo proporciona una solución aproximada con los siguientes pasos:

Algoritmo

Paso 0: Hacer k=0, NC=1

Elegir un multiplicador etápico ρ_k tal que

$$\rho_k \geq 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty,\ \sum_{k=0}^{\infty} E\,[\rho_k^2] < \infty$$

Sea $x^0 = (x_1^0 ..., x_n^0)$ una solución inicial arbitraria.

Paso 1: Simular valores para el vector $r = (r_1, ..., r_n)$. Sean $r^k = (r_1^k\ r_n^k)$ los valores simulados en la iteración de k-ésima correspondientes a la solución aproximada $x^k = (x_1^k, ..., x_n^k)$

Paso 2: Calcular una aproximación de los valores de la variable x^{k+1} mediante:

$$x_j^{k+1} = \max \{0, x_j^k - \rho k \xi_j^k\},\ j=1,...,n$$

donde ξ_j^k se define como:

$$\xi_j^k \begin{cases} \alpha_j^+ \text{si } x_j^k \geq r_j^k \\ \alpha_j^- \text{si } x_j^k < r_j^k \end{cases}$$

Paso 3: Hallar $F_{k+1} = \sum_{j=1}^{n} f_j\,(x_j^{k+1}, r_j^{k+1})$

Calcular la medida de la función objetivo hasta la k+1-ésima solución:

$$E_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} F_i = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{n} f_j\,(x_j^i, r_j^i)$$

Paso 4: Si $|E_{k+1} - E_k| < \epsilon$, para $\epsilon > 0$ prefijado, suficientemente pequeño, PARAR. En otro caso, ir al paso 5.

Paso 5: Si la sucesión de las medidas $\{E_k\}$ es estacionaria, reducir el multiplicador etápico a la mitad:

Hacer $\rho k+1 = \frac{\rho k}{2}$, k=k+1, NC=NC+1 e ir al paso 1.

En otro caso, hacer $\rho k+1 = \rho k$, k=k+1 e ir al paso 1.

Nótese que la forma de controlar el tamaño del paso, como en muchos problemas de minimización estocástica, está basado en mantener el multiplicador etápico constante durante un cierto número de iteraciones, que constituyen todo un ciclo, e irlo reduciendo de acuerdo con determinados criterios.

En el transcurso de estas iteraciones se observa el valor de la función $F_k=\sum_j f_j(x_j^k,r_j^k)$.

Usualmente estos valores tienen un determinado rango de variación que proporciona una sucesión de medias más o menos estables. Podemos verificar si la sucesión de las medias es estacionaria trabajando en interactivo o bien utilizando, para simular ese control manual, un nuevo parámetro δ. De este modo, se define el indicador ϵ_k en función del número de ciclos realizados (NC) como:

$$\epsilon_k = NC \frac{E_r - E_{r+1}}{\sum_{k\epsilon K} \rho k \|\xi k\|}, \quad r=1,...$$

donde $K= \{k \,/\, r\, NC \leq k \leq (r+1)NC\}$, y se verificará la condición exigida en el paso 5 para reducir el multiplicador etápico a la mitad si se cumple: $\epsilon r \leq \delta$, con δfijado a *priori*, suficientemente pequeño.

Por otra parte, se puede plantear la cuestión de cómo elegir un multiplicador etápico inicial. Si este es demasiado grande, la sucesión $\{E_k\}$ y las soluciones halladas en cada iteración, x_k, pueden oscilar muy lentamente de modo que la función objetivo no decrezca. Se obtiene una elección adecuada del paso inicial cuando se verifica: $\rho \xi j \approx \mu \bar{x}_j$, donde $\mu \epsilon$ (0,1) y $\bar{x}_j$ es el valor estimado de la j-ésima componente de la solución.

RESULTADOS Y DISCUSION

Como ya planteábamos en la introducción, con el algoritmo propuesto en el apartado anterior resolvemos un ejemplo sencillo en el que se considera un hipotético productor de carne de vacuno, tomando como datos las medias nacionales mensuales en el período 1972-1989 de la producción de ternera (5 meses) y los precios mensuales en el mismo intervalo de tiempo. Dichos datos se han obtenido de los Boletines Mensuales de Estadística del Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación.

Las producciones están medidas en miles de toneladas de peso canal y los precios en pesetas corrientes (de cada año) por kilogramo. Los precios corresponden a los denominados como «percibidos por los agricultores».

Una de las razones por las que hemos elegido este caso para constrastar la eficacia y aplicabilidad del algoritmo es, además de la amplia disponibilidad de datos sobre las variables incluídas en el problema, la homogeneidad que se observa en las variables precio acerca de su evolución mensual a lo largo de las series anuales estudiadas.

Esta característica puede destacarse en principio para cada una de ellas simplemente a la vista de los datos recogidos en las gráficas 1 y 2. Se observa pues un comportamiento cíclico anual que se repite con fidelidad año tras año, presentando un máximo ligeramente acusado en los meses de noviembre y diciembre de cada año y una tendencia creciente en los restantes meses hasta dicho máximo.

Puesto que no nos interesa establecer conclusiones de tipo económico, supondremos que los costes son fijos, esto es, independiente del nivel de producción. De este modo, el único elemento aleatorio en este planteamiento es el precio. En general, se puede suponer que el producto conoce el proceso aleatorio que lo genera para poder realizar la rutina de simulación necesaria en la aplicación del algoritmo del cuasigradiente.

Con estas hipótesis, el empresario maximizará su beneficio cuando su ingreso sea, a su vez, máximo; esto es, la estrategia óptima que debería seguir el productor consistiría en vender toda su producción en aquel mes que alcance mayor precio.

Para aplicar el algoritmo propuesto hay que elegir una solución $x^0= (x_1^0,..., x_{12}^0)$ inicial. En general, cada componente x_i de un vector solución x representará la producción que debe cormecializarse en el mes i-ésimo. En consecuencia, una opción para determinar x^0 consistiría en formar dicho vector de modo que cada componente tome el valor de la producción media mensual española (en miles de toneladas) en el período de tiempo considerado (1972-1989). Así el vector x^0 sería el siguiente:

x^0 = (33.44, 30.50, 31.96,32.19; 34.43,34.57; 35.97, 36.48,36.22, 36.35, 34.47, 37.04)

Por otro lado, en cada iteración se deben generar valores simulados $r^k=(r1^k ,..., x_{12}^k)$ correspondientes a la solución aproximada x^k. Para ello, formaremos el vector estocástico r^k de modo que todas sus componentes sean cero excepto aquella que corresponde al mes de mayor precio simulado y, con un valor igual a la suma de la producción en todos los meses. Este criterio se corresponde con la estrategia óptima de comercialización que habíamos fijado, de modo que el productor debe vender cuando el beneficio sea máximo. Por ejemplo, el vector estocástico r^o tendrá once componentes nulas y una igual a 413.62, correspondiente al mes de mayor precio simulado, e interpretable como la producción anual media.

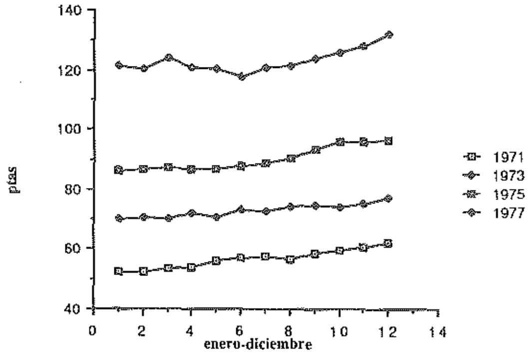
El algoritmo se ha implementado en ordenador utilizando la aplicación RATS que proporciona análisis de series de tiempos, econometría gráfica, modelos ARIMA y otros, todo ello con entrada flexible de datos a través de un editor de datos en pantalla.

Han sido precisas 175 iteraciones para que el comportamiento de Ek no fuera susceptible de mejora, evolución que se observa en la gráfica 3. Se ha elegido un valor inicial para el multiplicador etápico ρ_1=1 y se han efectuado tres ciclos completos reduciendo este valor hasta ρ_3=0.25. Los valores tomados para los parámetros a_j^+ y a_j^- son, respectivamente, 1 y 2.

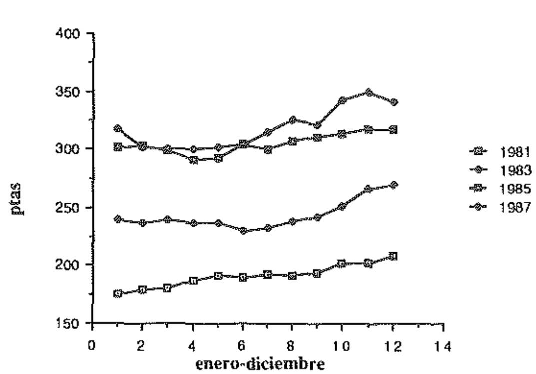
Tras aplicar varias veces el algoritmo, puesto que la solución está condicionada por las diferentes simulaciones efectuadas, se llega a la siguiente solución en porcentajes: La estrategia óptima que se debería recomendar al empresario para la comercialización es vender el 0.075% de su producción en agosto, 0.213% en septiembre, 0.3% en octubre, 46.966% en noviembre y 52.446% en diciembre, datos únicamente significativos en los dos últimos meses, noviembre y diciembre.

Esta conclusión, que está en consonancia con el simple examen que se puede realizar a la vista de las gráficas 1 y 2, manifiesta la eficacia de la aplicación de la técnica desarrollada y abre un camino para, como es nuestra intención, utilizarla en problemas referidos a la comercialización de otras especies donde los ciclos de precios son más complejos y dependientes de múltiples factores, como es el caso del ganado porcino.

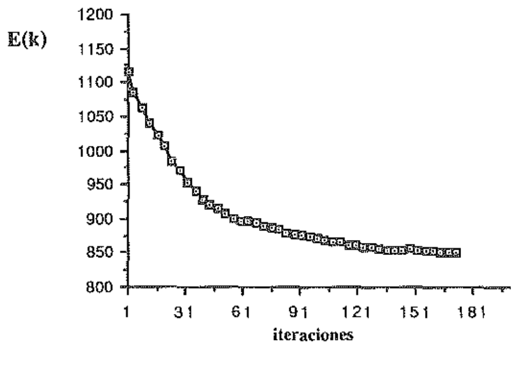
Por otra parte hay que señalar, a la hora de interpretar los resultados, que la hipótesis establecida sobre costes de producción fijos e iguales en todos os meses es irreal, aunque ha servido para hacer este ensayo sobre la aplicación de la metodología. En estudios posteriores se deberá eliminar esta hipótesis incorporando al modelo la información sobre costes reales en explotaciones particulares.



Gráf. 1. Precios mensuales en el período 71-77.



Gráf. 2. Precios mensuales en el período 81-87.



Gráf. 3. Evolución de las medias Ek

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer al profesor D. Fernando Sanz su colaboración al proporcionarnos el *software* necesario para resolver el problema práctico.

RESUMEN

En este trabajo se plantea un modelo para la resolución de un problema de producción mensual óptima, concretamente de carne de vacuno. La modelización del planteamiento se lleva a cabo en el ámbito de la optimización estocástica; se resuelve utilizando el algoritmo estocástico de cuasigradiente aplicado a modelos de localización: el empresario es el único punto de oferta, siendo los diferentes meses del año los distintos focos de demanda a satisfacer. Con este novedoso planteamiento en las técnicas de localización se determinará la estrategia óptima de venta de la producción anual, de modo que el empresario maximice sus beneficios. Nuestro objetivo en este artículo es pues mostrar, fundamentalmente, una metodología aplicable en los procesos de comercialización de productos agrarios.

BIBLIOGRAFIA

BRIZ ESCRIBANO, J. (1986): Los Mercados Agroalimentarios y las Empresas Multinacionales. II *Curso Internacional de Economía y Sociología Agraria en el Desarrollo Rural.* I.N.I.A.-M.A.P.A.

CALDENTEY ALBERT, P. (1976): *Comercialización de Productos Agrarios.* Agrícola Española.

ERMOLIEV, Y. (1988): Facility Location Problem. En *Numerical Techniques for Stochastic Optimization,* 413-434.

ERMOLIEV, Y.; WETS, R. (1988): *Numerical Techniques for Stochastic Optimization.* Springer Verlag.

HUNTER, A.P.; MARTINICH, J.S. (1989): *Facility Location and the Theory of Production.* Kluwer Academic Publishers.

LAMO DE ESPINOSA, J. (1986): Cambios en la Demanda de Productoa Alimenticios. *II Curso Internacional de Economía y Sociología Agraria en el Desarrollo Rural.* I.N.I.A.-M.A.P.A.

LOVE, F. y otros (1988): *Facilities Location Models and Methods.* Norh-Holland.

PAZ SAEZ, A.; HERNANDEZ CRESPO, J.L. (1981): *Morfología de los Mercados de Productos Ganaderos.* Monografías D.E.A., C.S.I.C.

SANZ, F.; SANSO, M.; (1990): Algoritmo Estocástico del Cuasigradiente. Una aplicación económica. Cuadernos aragoneses de economía, 14, 17-32.

SHAPIRO, R. (1984): *Optimization Models for Planning and Allocation. Wiley.*

URIEL, E. (1985): *Análisis de Series Temporales. Modelos ARIMA. Paraninfo.*