UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

Regla de L'Hôpital

Eva Catalán Fernández

27 de febrero de 2023

Fernando Sanchez Fernández, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura,

INFORMA:

Que Dña. Eva Catalán Fernández ha realizado bajo su dirección el Trabajo Fin de Grado y considera que la memoria reúne los requisitos necesarios para su evaluación.

Badajoz, dd de mm de yyyy

Fdo. Fernando Sanchez Fernández

Índice general

Capítulo 1

Resumen

En el siguiente trabajo haré un recopilatorio sobre resultados relacionados con la regla de L'Hôpital.
En primer lugar haré una breve mención sobre el autor de esta regla y la controversia que hubo, además de añadir unos ejemplos.
A continuación, en el primer capítulo, mostraré una serie de resultados necesarios para los teoremas posteriores. Trataré las indeterminaciones $\frac{0}{0}$, distinguiendo los casos en que el límite es un número real, y cuando es infinito. Por último en este apartado mostraré la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, diferenciando también cuando el límite es un número real y cuando es infinito.
En el siguiente capítulo, veremos las siguientes indeterminaciones: $0 * \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞.
En el penúltimo capítulo, mostraré la regla de L'Hôpital aplicado en sucesiones, es decir, la regla de Stolz, diferenciando cuando el límite es finito e infinito.
Por último, haré una pequeña mención de como aplicar esta regla en el caso de n variables.

Capítulo 2

Abstract

In the following paper I will make a compilation of results related to the L'Hôpital rule.
First of all, I will mention the author of this rule and the controversy that arose, and I will add two examples.
Next, in the first chapter, I will show some results necessary for the proofs of the theorems of the indeterminacies. I will deal with the indeterminacies $\frac{0}{0}$ distinguishing the cases when the limit is a real number, and when it is infinite. Finally in this section I will show the indetermination $\frac{\infty}{\infty}$ differentiating also when the limit is a real number and when it is infinite.
In the next chapter, we will study the following indeterminacies: $0 * \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞.
In the penultimate chapter I will show L'Hôpital's rule applied to sequences, that is, Stolz's rule, differentiating when the limit is finite and infinite.
Finally, I will make a small mention of how this rule can be applied in the case of n variables.

Capítulo 3

Introducción

En este estudio veremos un resultado sobre cálculo diferenciable, encontrado en el libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* escrito por el Marqués de L'Hôpital.

Esta regla nos permite calcular límites de funciones, a través de derivadas, que estén en forma indeterminada.

Hablaremos de la controversia que hubo entre dos grandes matemáticos, Johann Bernoulli y el marqués de L'Hôpital.

Johann Bernoulli (1667-1748)

Nació en Basilea, Suiza. Fue el décimo hijo del farmacéutico Nicolaus Bernoulli. Estudio medicina y humanidades, aunque su padre insistió en que fuese comerciante, como lo era él. En 1690, publicó una tesis doctoral sobre efervescencia y la fermentación. Al mismo tiempo impartía clases sobre ecuaciones diferenciales. L'Hôpital lo contrató para solicitarle ayuda para una serie de resultados matemáticos. En 1694, fue premiado con el título de doctor de medicina gracias a una tesis sobre la contracción muscular.
Aunque lo que realmente le interesaba era la física, las matemáticas y la astronomía. En 1695, obtuvo un puesto en la universidad de Groningen como profesor de matemáticas y física. A su vez siguió ayudando a L'Hôpital.
Entre 1691-1692 escribió algunos textos sobre cálculo diferencial e integral, pero no los publicó hasta 1922.

Guillaume Francois Antoine L'Hôpital (1661-1704)

Nació en París. Le obligaron a realizar la carrera de militar, llegó a ser capitán de caballería, pero lo tuvo que abandonar por problemas ópticos.
Gracias a esto, se interesó por las matemáticas.
Desde niño le llamaba la atención la geometría, con solo 15 años, calculó problemas avan-

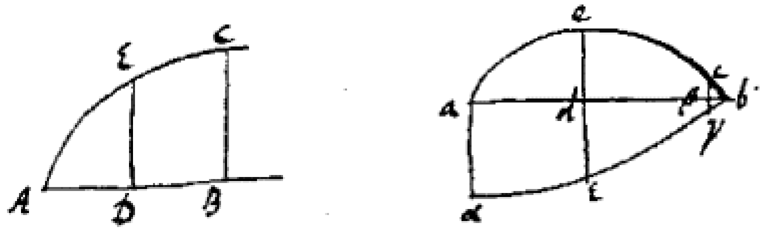
zados sobre la coclide, que había realizado Pascal.
En 1696, escribió *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* influenciado por los matemáticos, Johann Bernoulli, Jakob Bernoulli y Leibniz.

Evolución de la regla de L'Hôpital

La regla de L´Hôpital nos permite solucionar el problema que podemos encontramos en una función escrita como cociente de dos funciones $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, en un determinado valor, a, el numerados y el denominador toman el valor 0, es decir, $f(a) = g(a) = 0$, una indeterminación del tipo: $\dfrac{0}{0}$. Actualmente el enunciado sería, la función expresada como cociente en dicho punto, $\dfrac{f(c)}{g(c)}$, bajo unas ciertas condiciones, es igual al cociente de sus derivadas en dicho punto, $\dfrac{f^{'}(c)}{g'(c)}$.

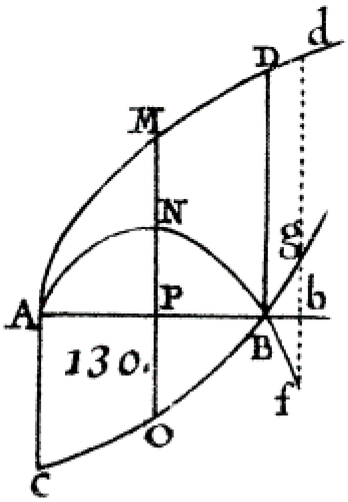
La regla de L'Hôpital se expreso por escrito por primera vez, en una proposición de Jean Bernoulli, que se encontró en una carta que le envió a L´Hôpital el 22 de julio de 1694, su demostración está basada en la idea de diferencial, que fue introducida en el pasado por Leibniz en la revista *Acta Eruditorum.*

En dicha carta Bernoulli dibujó, una curva AC, que es la aplicada de la fracción y. Además también dibujó dos curvas, que representan el numerador y el denominador , aeb y $\alpha * \xi * \beta$, que corta al eje en el mismo punto $b = \beta$ cuando x vale AB, respectivamente. Es decir, son curvas que en el mismo valor son iguales a cero. Luego representa que dos cantidades son iguales cuando se diferencian en una cantidad infinitamente pequeña, el comportamiento en A o en un punto cercano a este es el mismo. Y proporciona la regla general traducida, *Para tener el valor de la aplicada de dicha curva en este caso, hace falta dividir la diferencial del numerador de la fracción general por la diferencial del denominador; el cociente, después de hacer x igual a AB, será la cantidad BC.*



Esta regla no fue publicada hasta 1696, en el libro de texto de cálculo diferencial, *Analyse des Infiniment Petites, escrito por L´Hôpital.*

La idea de infinitamente pequeños es un resultado del concepto de diferencial, fue una herramienta muy favorable, basada en aquella cantidad aumentada que hace que no cambie y se pueda tomar la cantidad, actualmente toma la notación $x + dx = x$.
En este libro, enuncia el siguiente problema: Sea AMD una línea curva ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$) tal que el valor de la ordenada y, esté expresado por una fracción, en el que el numerador y el denominador vayan a cero cuando $x = a$; es decir, cuando el punto P coincida sobre el punto B dado , como podemos observar en la figura. Pregunta: ¿ Cuál es el valor de la ordenada BD ?



La respuesta a dicho problema se basa en la regla de L'Hôpital.

Aplicaciones de la regla de L'Hôpital

El uso común de la regla de L'Hôpital sabemos que es el cálculo de límites, pero voy a enunciar dos ejemplos prácticos donde se utiliza esta regla:

En electrónica.

Consideramos un circuito eléctrico de resistencia R ohms, inductancia L henrys, fuerza electromotriz E volts y corriente i en amperes, que fluye en el circuito tras t segundos, expresada matemáticamente como $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$, siendo e el número de Euler, que vale aproximadamente 2.718281. Considerando R,L, E constantes,

$$\lim_{R \longrightarrow 0} \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

tenemos una indeterminación, $\infty * 0$, luego si lo modificamos

$$\lim_{R \longrightarrow 0} \frac{1}{R/E}(1 - e^{-Rt/L})$$

obtenemos una indeterminación de $0/0$ y aplicando la regla de L'Hôpital, derivando el numerador y el denominador, llegamos a que cuando la resistencia tiende a cero la corriente tiende al valor $\dfrac{Et}{L}$.

Otro ejemplo de la aplicación de esta regla.

Realizamos una inversión inicial, A_0, de dinero en un banco con interés i, que reinvertimos n veces al año. El valor de dicha inversión después de un cierto tiempo t en años puede tomar la expresión matemáticamente,

$$A = A_o(1 + \frac{i}{n})^{nt}$$

Si el número de veces que reinvertimos dicha cantidad es muy grande, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} A_o(1 + \dfrac{i}{n})^{nt}$, llegamos a una indeterminación de tipo 1^∞ luego aplicando la siguiente transformación $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \longrightarrow a}(f(x)-1)g(x)}$ obtenemos $A_0 e^{\lim\limits_{n \longrightarrow \infty}(1 + \frac{i}{n} - 1)nt}$, luego la cantidad de dinero que recibiremos después de t años es $A = A_o e^{it}$, siendo e el número de Euler.

Controversia por los derechos de autor

En 1696, el marqués de L'Hôpital publicó su primer libro de cálculo: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.* Influenciado por los matemáticos Leibniz y Bernoulli.
El mismo reconoció, en la introducción de su libro, que parte del trabajo se lo debía a ellos.
El propio marque le envió un ejemplar del libro a Bernoulli, y este le contesto con una carta de felicitación. Aunque fue consciente que presentaban resultados suyos, no le menciono en la carta nada al respecto. Pero en 1698, Bernoulli envió una carta a Leibniz, donde explicaba su amargura y fraude al darse cuenta del plagio. Una vez fallecido el marqués, realizó varias declaraciones públicas sobre los resultados obtenidos y en concreto de la regla de L´Hôpital.
A partir de ese momento, hubo matemáticos que se dedicaron a investigar sobre la paternidad de la regla.
Bernoulli muere en 1748, sin haber solucionado el problema del plagio. En 1922 fue cuando apareció un documento de Bernoulli sobre el cálculo diferencial, fechado entre 1691 y 1692. Se empezaron a realizar comparaciones y descubrieron los parecidos entre el libro

de L´Hôpital y los documentos de Bernoulli.
En 1955 fue cuando se encontró una carta del marqués donde le ofrecía a Bernoulli la exclusiva de sus resultados a cambio de cierta cantidad de monedas. Hoy en día aun no se sabe si acepto esta propuesta, aunque se cree que si, ya que Bernoulli en ese momento tenia 24 años, estaba recién casado y además no poseía trabajo.

Ejemplo

Por último me gustaría mostrar un ejemplo de límite, el cual es muy común mostrarlo como ejemplo de la regla de L'Hôpital, pero realmente no se usa esta regla, lo que verdaderamente se aplica es la definición de derivada.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

La derivada de una función f en cualquier punto de su dominio se puede definir como

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Luego tomando $f(x) = \sin(x)$

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \cos(a)$$

Por tanto,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1.$$

Un ejemplo, en el que sí se haría uso de la regla de L' Hôpital,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{1} = 1$$

Capítulo 4

Casos clásicos de la regla de L'Hôpital

En este capítulo voy a exponer algunos casos de la regla de L'Hôpital, que se muestran en la siguiente tabla:

	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \infty$
$\frac{0}{0}$	$L \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Teorema** 4.0.5	$L \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Teorema** 4.0.6 $L \in \infty$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Teorema** 4.0.7
$\frac{\infty}{\infty}$	$L \in \infty$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Teorema** 4.0.9	$L \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Teorema** 4.0.8 $L \in \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Teorema** 4.0.8

Primero demostraré algunos teoremas necesarios para la regla de L'Hôpital

Resultados previos

Teorema 4.0.1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivable en un punto a del interior del conjunto A . Si f alcanza un extremo relativo(un máximo o un mínimo relativo) en a entonces $f'(a) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f tiene un mínimo relativo en a. Por definición de mínimo relativo, $\exists\ \epsilon > 0$ tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$

Luego,

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

cuando $x < a$, el numerador es ≥ 0 y el denominador es menor que 0, por tanto

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \leq 0$$

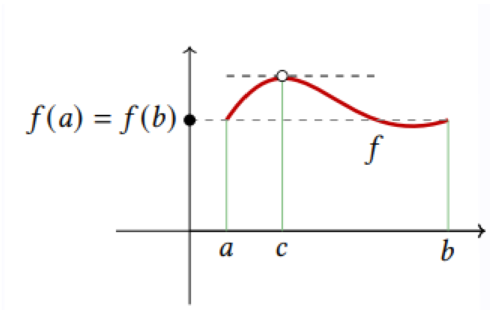
y cuando $x > a$, el numerador es ≥ 0 y el denominador es mayor que 0, por tanto

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \geq 0$$

y por hipótesis, f es derivable en a luego estos dos límites son iguales y por tanto concluimos que son igual a 0.

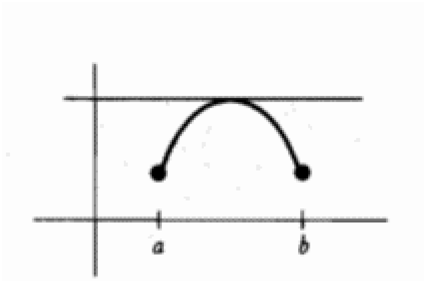
$\square$

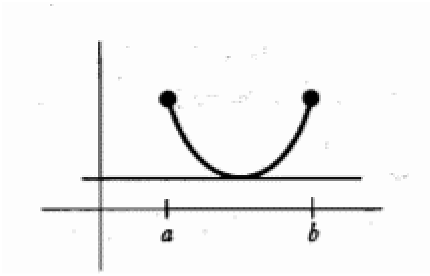
Teorema 4.0.2. ***Teorema de Rolle***
Sea f una función continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$ (la recta tangente en c es horizontal).



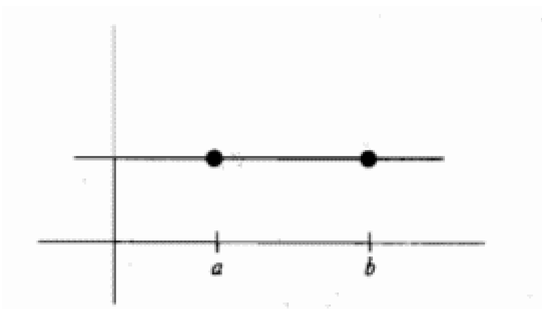
Demostración. De la continuidad de f en el compacto $[a, b]$, se deduce que f alcanza un máximo y un mínimo absoluto en $[a, b]$.
Si suponemos que f tiene un máximo en $c \in (a, b)$. Entonces según el teorema anterior, $f'(c) = 0$.

Y si f tiene un mínimo en $c \in (a, b)$. Por la misma razón $f'(c) = 0$.





Por último, supongamos que no alcanza ningún máximo ni mínimo en un punto interior del intervalo, luego $f(a) = f(b)$, es decir, es una función constante y por tanto f' se anula en todos los puntos.



$\square$

Teorema 4.0.3. ***Teorema del valor medio*** *Sea f una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$*

Demostración. Consideramos la función

$$F : x \in [a,b] \longrightarrow F(x) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & f(x) & x \\ 1 & f(a) & a \\ 1 & f(b) & b \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

luego, $F(x) = bf(a) - af(b) - f(x)(b-a) + x(f(b) - f(a))$
Como F es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y cumple $F(a) = F(b) = 0$, por el teorema de Rolle, sabemos que existe $c \in (a,b)$ tal que $F'(c) = 0$, es decir, $-f'(c)(b-a) + (f(b) - f(a)) = 0$.

De modo que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Teorema 4.0.4. ***Teorema del valor medio de Cauchy*** *Si f y g son continuas en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), entonces existe un número $c \in (a,b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c).$$

Demostración. Consideramos la función

$$F : x \in [a,b] \longrightarrow F(x) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

luego, $F(x) = g(b)f(a) - g(a)f(b) - f(x)(g(b) - g(a)) + g(x)(f(b) - f(a))$
Como F es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y cumple $F(a) = F(b) = 0$, por el teorema de Rolle, sabemos que existe $c \in (a,b)$ tal que $F'(c) = 0$, es decir,
$-f'(c)(g(b) - g(a)) + g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$.

□

Regla de L´Hôpital

Dado f y g funciones derivables en un entorno de a y $f(a) = g(a) = 0$, por tanto, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación de tipo $\dfrac{0}{0}$.
Si suponemos que g no se anula en un entorno de a, y además $g'(a) \neq 0$ entonces podemos escribir

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Las indeterminaciones que voy a tratar en este capítulo serian:

	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \infty$
$\frac{0}{0}$	$L \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Teorema** 4.0.5	$L \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Teorema** 4.0.6 $L \in \infty$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Teorema** 4.0.7
$\frac{\infty}{\infty}$	$L \in \infty$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Teorema** 4.0.9	$L \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Teorema** 4.0.8 $L \in \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **Teorema** 4.0.8

Indeterminación $\dfrac{0}{0}$

Teorema 4.0.5. *Sean f y g dos funciones derivables en (a, b) , siendo $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Sea $g'(x) \neq 0$ $\forall$ $x \in (a, b)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.*
Luego si existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Demostración. Primero veamos el caso en que que tiende por la derecha del intervalo, Supongamos que existe $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$
Ya que las funciones f y g no están definidas en a, entonces definimos las siguientes funciones:

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} f(x) & si & x \in (a,b) \\ 0 & si & x = a \end{array} \right\}$$

$$G(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} g(x) & si & x \in (a,b) \\ 0 & si & x = a \end{array} \right\}$$

F y G son continuas en $[a,b)$

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = F(a),\ F \text{ continua en } a$$
$$\lim_{x\to a^+} G(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 = G(a),\ G \text{ continua en } a$$

y derivables en (a,b)
Por tanto, $\forall\ x \in (a,b)\ F'(x) = f'(x)$ y $G'(x) = g'(x)$.
Considerando el intervalo $[a,x]$ podemos aplicar el teorema del valor medio de Cauchy

$$\exists\ c \in (a,x) : \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}$$

Sabemos que $G(x) - G(a) \neq 0$ por el teorema del valor medio,

$$\frac{G(x)-G(a)}{x-a} = G'(a) \neq 0, \text{ ya que por hipótesis, } G'(x) = g'(x) \neq 0$$

y por definición $F(a) = G(a) = 0$ entonces,

$$\frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

Tomando límites obtenemos,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{F'(c)}{G'(c)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y como

$$\lim_{x\to a^+} \frac{F'(c)}{G'(c)} = \lim_{c\to a^+} \frac{F'(c)}{G'(c)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

llegamos

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Ahora veamos cuando tiende por la izquierda del intervalo,

Supongamos que existe $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = M$
Definimos las siguientes funciones:

$$H(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & si & x \in (a,b) \\ 0 & si & x = b \end{array} \right\}$$

$$J(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} g(x) & si & x \in (a,b) \\ 0 & si & x = b \end{array} \right\}$$

H y J son continuas en $(a, b]$

$$\lim_{x \to b^-} H(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = 0 = H(b),\ H \text{ continua en } b$$
$$\lim_{x \to b^-} J(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0 = J(b),\ J \text{ continua en } b$$

y derivables en (a, b)
Por tanto, $\forall\ x \in (a, b)$ $H'(x) = f'(x)$ y $J'(x) = g'(x)$.
Considerando el intervalo $[x, b]$ podemos aplicar el teorema del valor medio de Cauchy

$$\exists\ c \in (x, b) : \frac{H'(c)}{J'(c)} = \frac{H(b) - H(x)}{J(b) - J(x)}$$

Sabemos que $J(b) - J(x) \neq 0$ por el teorema del valor medio,

$$\frac{J(b) - J(x)}{b - x} = J'(b) \neq 0, \text{ ya que por hipótesis, } J'(x) = g'(x) \neq 0$$

y por definición $H(b) = J(b) = 0$ entonces,

$$\frac{H'(c)}{J'(c)} = \frac{H(x)}{J(x)}$$

tomando límites obtenemos,

$$\lim_{x \to b^-} \frac{H'(c)}{J'(c)} = \lim_{x \to b^-} \frac{H(x)}{J(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y como

$$\lim_{x \to b^-} \frac{H'(c)}{J'(c)} = \lim_{c \to b^-} \frac{H'(c)}{J'(c)} \lim_{x \to b^-} \frac{H'(x)}{J'(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = M$$

llegamos

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = M$$

$\square$

Veamos el caso de que a es $-\infty$

Teorema 4.0.6. *Consideramos las funciones f y g definidas en $(-\infty, 0)$ diferenciables, y sea $g(x) \neq 0\ \forall\ x\ \in (-\infty, 0)$*
Supongamos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} g(x)$.
Luego si existe $\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces existe $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Demostración. Haciendo el cambio de variable, $x = 1/t$ consideramos $\forall\ t \in (-\infty, 0)$ las funciones

$$F(t) = f(1/t)$$
$$G(t) = g(1/t)$$

Como $t = 1/x$ entonces $f(x)/g(x) = F(t)/G(t)$, por tanto cuando $t \to 0^-$, $x \to -\infty$
Sabiendo $G'(t) = -1/t^2 g'(1/t) \neq 0$

Luego,

$$\lim_{t\to0^-}\frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-1}{t^2}f'(1/t)}{\frac{-1}{t^2}g'(1/t)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

$$\lim_{t\to0^-}\frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to0^-}\frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Y como sabemos por el apartado anterior,

$$\lim_{t\to0^-}\frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to0^-}\frac{F(t)}{G(t)}$$

tenemos que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$\square$

El caso de $a = +\infty$ es un caso análogo al anterior, definiendo las funciones en un intervalo $(0, +\infty)$

Veamos un ejemplo de la aplicación de esta regla:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}$$

Tenemos $f(x) = x - \tan x$ y $g(x) = x - \sin x$
Observamos una indeterminación de tipo 0/0. Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{1 - \cos x}$$

Seguimos con una indeterminación de 0/0, podemos seguir haciendo L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-2 \cos x \sin x}{\cos^4 x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{\sin x \cos^4 x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2}{\cos^3 x} = -2$$

La otra opción sería hacer una transformaciones trigonométricas:

$$1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = -\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos^2 x}$$

y sustituyendo

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{-(1 + \cos x)}{\cos^2 x} = -2$$

Por último en los casos de las indeterminaciones de $\frac{0}{0}$ demostraré el resultado cuando el límite es ∞

Teorema 4.0.7. *Consideramos el intervalo I, un punto a del intervalo y las funciones $f, g : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas y derivables que verifican:*

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{a\}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Por tanto, si se cumple $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ *entonces* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Demostración. Antes debemos introducir una pequeña notación.
Suponemos que $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas verificando $f(a) = g(a) = 0$.
Para ver que f y g son derivables en $I \setminus \{a\}$, consideramos $x \in I \setminus \{a\}$.
Si $a < x$ entonces g es continua en $[a, x]$ y derivable $I \setminus \{a\}$, aplicando el Teorema del valor medio,

$$\exists\ c \in I \setminus \{a\} : g(x) = g(x) - g(a) = g'(c)(x - a)$$

Por hipótesis sabemos que $g'(c) \neq 0$, por tanto $g(x) \neq 0$

El caso $a > x$ es análogo
Ahora, aplicando el Teorema del valor medio generalizado

$$\exists\ v \in (a, x) : (f(x) - f(a))g'(v) = (g(x) - g(a))f'(v), \text{ es decir, } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(v)}{g'(v)}$$

De igual manera se haría para $v \in (x, a)$
Por tanto obtenemos,

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \ \exists\ v \in I : 0 <\mid v - a \mid<\mid x - a \mid \text{ y } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(v)}{g'(v)}$$

Entonces si $\dfrac{f'}{g'}$ tienden a infinito en el punto a,

$$\text{dado un } K \in \mathbb{R}\ \exists\ \delta > 0 : y \in I, 0 <\mid y - a \mid< \delta \Rightarrow\mid \frac{f'(y)}{g'(y)} \mid> K$$

por tanto

$$\mid \frac{f(x)}{g(x)} \mid=\mid \frac{f'(v)}{g'(v)} \mid> K$$

Luego obtenemos que $\dfrac{f}{g}$ también tiende a infinito en el punto a.

□

Indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$

Teorema 4.0.8. *Consideramos las funciones f y g definidas en (a, ∞) derivables. Supongamos que existe $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty = \lim\limits_{x \to \infty} g(x)$*
Luego si existe $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces existirá $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Demostración. Caso $L \in (-\infty, +\infty)$:

Por el teorema de Rolle sabemos que $g'(x) \neq 0 \neq g(x)$ $\forall$ $x \in (a, \infty)$
Por otro lado, aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a f y g en el intervalo $[a, x]$, existe $c \in (a, x)$ tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$, por tanto, podemos escribir $\mid \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - L \mid < \epsilon$ para $x > a$
Por el teorema del valor medio, sabemos que $g(x) - g(a)$ no puede anularse ya que $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \simeq g'(a) \neq 0$.
Teniendo en cuenta que $f(x) - f(a) \neq 0$ para x grande , $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ y por tanto $f(x) > f(a)$ Podemos escribir,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \frac{f(x)}{f(x) - f(a)} \frac{g(x) - g(a)}{g(x)}$$

viendo que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)/f(x)}{f(x)/f(x) - f(a)/f(x)} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - f(a)/f(x)} = 1 \ ,$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{g(x)/g(x) - g(a)/g(x)}{g(x)/g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - g(a)/g(x)}{1} = 1$$

Entonces,

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} < \epsilon$$

Y por tanto,
$\mid \dfrac{f(x)}{g(x)} - L \mid \leq \mid \dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \mid + \mid \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - L \mid < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$ para valores grandes de x.

Veamos ahora el caso de $L = \pm\infty$

Considerando un $M > 0$ tal que $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} > M$ para $x > a$.
Aplicando el teorema de Cauchy,

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Luego,

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} > M \text{ para } x > a$$

Como en el caso anterior, como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, luego $f(x) > f(a)$ para x grande, entonces podemos escribir,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \frac{g(x)-g(a)}{g(x)} \frac{f(x)}{f(x)-f(a)}$$

Y teniendo en cuenta que,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)-g(a)}{g(x)} \frac{f(x)}{f(x)-f(a)} = 1$$

Luego,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{g(x)-g(a)}{g(x)} \frac{f(x)}{f(x)-f(a)} > M$$

Por tanto llegamos, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

$\square$

.

Veamos un ejemplo de este tipo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^2}$$

Como podemos observar es una indeterminación de $\dfrac{\infty}{\infty}$ y aplicando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{2} = +\infty$$

Teorema 4.0.9. *Considerando las funciones f y g derivable en (a,b) y $\lim_{x\to+a^+} f(x) = \infty = \lim_{x\to+a^+} g(x)$, luego si existe $\lim_{x\to+a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces existirá $\lim_{x\to+a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, luego*

$$\lim_{x\to+a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Demostración. Haciendo uso del cambio de variable, $x = a + 1/t$, vemos que cuando $t \longrightarrow \infty$, entonces $x \longrightarrow a^+$.
Por tanto,

$$\lim_{x\to+a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(a+1/t)}{g(a+1/t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{(-1/t^2)f'(a+1/t)}{(-1/t^2)g'(a+1/t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{f'(a+1/t)}{g'(a+1/t)}=\lim_{x\to+a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\square$

El caso de $x\longrightarrow a^-$ sería análogo.

Capítulo 5

Otros casos de la regla de L'Hôpital

Los siguientes tipos de indeterminaciones que trataremos, se resuelven mediante una serie de cambios, obteniendo las indeterminaciones que ya conocemos y sabemos resolver, es decir, las indeterminaciones de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$.

- Indeterminación $0 * \infty$
- Indeterminación $\infty - \infty$
- Indeterminación 0^0
- Indeterminación ∞^0
- Indeterminación 1^∞

Indeterminación $0 * \infty$

$\lim_{x \to a} f(x)g(x)$, siendo $f(x) \to 0$ y $g(x) \to \infty$

Podemos reescribirlo de la forma $f(x)g(x) = \dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ ó $f(x)g(x) = \dfrac{g(x)}{1/f(x)}$ y así llegamos a una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo:

$\lim_{x \to 0^+} x^n log(x)$ para $n > 0$

Como $x^n \to 0$ y $log(x) \to \infty$ entonces, haciendo el cambio $t = 1/x$, y sabiendo que cuando $x \to 0^+$ entonces $t \to +\infty$ tenemos:

$$\lim_{x \to 0^+} x^n log(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^n} log(1/t) = 0.$$

Indeterminación $\infty - \infty$

$\lim_{x\to a} f(x) - g(x)$ siendo $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$
Podemos reescribir el límite (mientras no se anule el denominador) en la forma:
$f(x) - g(x) = \dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$ y llegamos a una indeterminación de tipo $\dfrac{0}{0}$.

Ejemplo:
$\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

Luego si aplicamos la formula

$\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1-\log x}{(x-1)\log x}$ y obtenemos una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$.
Aplicando la regla de L'Hôpital, derivando el numerador y denominador,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\log x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = 1/2.$$

Indeterminación 0^0

$f(x) \to 0^+$, $g(x) \to 0$ Podemos reducirlo a una indeterminación de la forma $0 * \infty$.

Usando $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lambda}$; $\lambda = \lim_{x\to a} [g(x)\log f(x)]$.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0^+} (x^x) = e^{\lim_{x\to 0^+} (x\log x)} = e^0 = 1.$$

Indeterminación ∞^0

Usando la misma fórmula que en el caso anterior.

Ejemplo:
$\lim_{x\to +\infty} x^{1/x} = \exp \lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} \log x$.

Y haciendo el cambio de variable $t = 1/x$

$\exp \lim_{t\to 0^+} t \log 1/t = e^0 = 1$.

Indeterminación 1^{∞}

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ siendo $f(x) \to 1$, $g(x) \to \infty$.

Usando la misma formula que en los casos anteriores, podemos llegar a una indeterminación de tipo $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \exp\lim_{x\to\infty} x\ln(1-\tfrac{1}{x}) = \exp\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1-\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

y llegamos a una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ por tanto aplicando L'Hópital

$$\exp\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1-\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \exp\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1/x^2}{1-1/x}}{\frac{-1/x^2}{1}} = \exp\lim_{x\to\infty} -(1-\tfrac{1}{x}) = \exp -1.$$

Capítulo 6

Regla de Stolz

La regla de Stolz nos ayuda a calcular límites de cocientes $\frac{a_n}{b_n}$, en los que encontramos indeterminaciones del tipo $0/0$, ∞/∞.
Se trata de un resultado análogo a la regla de L'Hôpital, en el caso de sucesiones.

Antes de introducir el teorema, voy a exponer dos lemas que nos serán de ayuda en la demostración del teorema.

Lema 6.0.1. *Suponemos que tenemos dos fracciones* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ *tal que* $b, d > 0$ *que cumplen* $A < \frac{a}{b}, \frac{c}{d} < B$*, siendo* $A, B \in \mathbb{R}$ *entonces* $A < \frac{a+c}{b+d} < B$

Demostración. $A < \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow A(b+d) < a+c \Leftrightarrow a+c-A(b+d) > 0 \Leftrightarrow$
$a+c-Ab-Ad > 0 \Leftrightarrow (a-Ab)+(c-Ad) > 0$
Por hipótesis sabemos ,

$$A < \frac{a}{b} \text{ luego } a - bA > 0$$
$$A < \frac{c}{d} \text{ luego } c - dA > 0$$

De igual modo se demuestra $\frac{a+c}{b+d} < B$. $\square$

Lema 6.0.2. *Dadas las fracciones* $\frac{a_1}{b_1}, ..., \frac{a_n}{b_n}$ *siendo* $n \geq 2$ *y* $b_1, ..., b_n \geq 0$*. Se verifica:*

$$A < \frac{a_i}{b_i} < B \textit{ siendo } i = 1, ..., n \Rightarrow A < \frac{\Sigma_{i=1}^n a_i}{\Sigma_{i=1}^n b_i} < B$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre n,
Para $n = 2$, sería el lema 6.0.1.

Sea cierto para $k \geq 2$

$$A < \frac{a_1}{b_1}, ..., \frac{a_k}{b_k} < B \text{ siendo } b_i > 0 \ i = 1, ..., k \Rightarrow A < \frac{a_1 + ... + a_k}{b_1 + ... + b_k} < B$$

Para $k + 1$

$$A < \frac{a_1}{b_1}, ..., \frac{a_k}{b_k}, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} < B \text{ siendo } b_i > 0 \ i = 1, ..., k + 1$$

Aplicando por inducción,

$$A < \frac{a_1 + ... + a_k}{b_1 + ... + b_k} < B \text{ y } A < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} < B$$

Luego aplicando de nuevo el lema 6.0.1

$$A < \frac{\Sigma_{i=1}^{k+1} a_i}{\Sigma_{i=1}^{k+1} b_i} < B$$

□

Teorema 6.0.3. *Consideramos dos sucesiones a_n y b_n de números reales. Cumplen lo siguiente:*

1) *b_n es estrictamente monótona (creciente o decreciente).*
2) $\lim b_n = \pm\infty$, *ó* $\lim a_n = \lim b_n = 0$

Luego se verifica lo siguiente:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L \text{ (finito ó infinito)} \Rightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Nota:
Puede suceder que $b_n = 0$, para solucionar este problema, se procede del siguiente modo:

$\exists \, p \in \mathbb{Z}^+ : b_p = 0$ entonces como b_n es estrictamente creciente entonces $b_{p+1} > 0, b_{p+2} > 0, ...$ por tanto $b_n > 0 \ \forall \ n > p$ y del mismo modo $b_n - b_{n-1} > 0 \ \forall \ n > p$.

Demostración. **Caso** $L \in \mathbb{R}$

Supongamos $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L$, esto significa $\forall \ \epsilon > 0, \exists \ \nu \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \ n \geq \nu$ se verifica $L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < L + \frac{\varepsilon}{2}$

Luego sabemos que es cierto,

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{\nu+1} - a_\nu}{b_{\nu+1} - b_\nu}, \frac{a_{\nu+2} - a_{\nu+1}}{b_{\nu+2} - b_{\nu+1}}, ..., \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < L + \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n \geq \nu$$

Aplicando el lema 6.0.2,

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{\nu+1} - a_\nu + a_{\nu+2} - a_{\nu+1} + a_n - a_{n-1}}{b_{\nu+1} - b_\nu + b_{\nu+2} - b_{\nu+1} + b_n - b_{n-1}} < L + \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n \geq \nu$$

y simplificando,

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_\nu}{b_n - b_\nu} < L + \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n \geq \nu$$

Consideremos el caso $\lim a_n = \lim b_n = 0$.
Teniendo en cuenta que ν permanece fijo, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_\nu}{b_n - b_\nu} = \frac{a_\nu}{b_\nu}$$

Luego,

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_\nu}{b_\nu} < L + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ es decir, } |L - \frac{a_\nu}{b_\nu}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Lo que significa que $\frac{a_n}{b_n}$ tiene límite L.

Ahora veamos el caso $\lim b_n = \pm\infty$.

Consideramos la expresión

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_\nu}{b_n - b_\nu} < L + \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n \geq \nu$$

Haciendo uso, si fuese necesario de la nota, podemos dividir esta expresión por b_n, entonces

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n/b_n - a_\nu/b_n}{b_n/b_n - b_\nu/b_n} < L + \frac{\varepsilon}{2} \text{ siendo } n > \nu$$

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n/b_n - a_\nu/b_n}{1 - b_\nu/b_n} < L + \frac{\varepsilon}{2} \text{ siendo } n > \nu$$

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_\nu}{b_n}\right) + \frac{a_\nu}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_\nu}{b_n}\right) + \frac{a_\nu}{b_n}$$

siendo $b_\nu, a_\nu, \varepsilon, L$ fijos, y b_n tiende a ∞, obtenemos,

$$L - \varepsilon < L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n}{b_n} < L + \frac{\varepsilon}{2} < L + \varepsilon, \text{ para } n > \nu.$$

Lo que implica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Caso $L = +\infty$
Suponemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = +\infty$$

significa que $\forall\ M > 0, \exists\ \nu \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} > M$ si $n \geq \nu$.

Procediendo del mismo modo que en el caso anterior,

$$\frac{a_{\nu+1} - a_\nu}{b_{\nu+1} - b_\nu}, \frac{a_{\nu+2} - a_{\nu+1}}{b_{\nu+2} - b_{\nu+1}}, ..., \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} > M \text{ si } n \geq \nu.$$

Aplicando el lema 6.0.2 , llegamos:

$$\frac{a_n - a_\nu}{b_n - b_\nu} > M \text{ siendo } n \geq \nu.$$

Consideremos el caso $\lim a_n = \lim b_n = 0$.
Teniendo en cuenta que ν permanece fijo, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_\nu}{b_n - b_\nu} = \frac{a_\nu}{b_\nu}.$$

Luego

$$\frac{a_\nu}{b_\nu} > M, \text{ es decir, } |\frac{a_\nu}{b_\nu}| > M$$

lo que significa que $\dfrac{a_\nu}{b_\nu}$ tiende a $+\infty$.

Ahora veamos el caso $\lim b_n = \pm\infty$.

Consideramos la expresión

$$\frac{a_n - a_\nu}{b_n - b_\nu} > M \text{ si } n \geq \nu.$$

Haciendo uso, si fuese necesario de la nota, podemos dividir esta expresión por b_n, entonces dividimos esta expresión entre b_n

$$\frac{a_n/b_n - a_\nu/b_n}{b_n/b_n - b_\nu/b_n} = \frac{a_n/b_n - a_\nu/b_n}{1 - b_\nu/b_n} > M \text{ siendo } n > \nu$$
$$\frac{a_n}{b_n} > M\left(1 - \frac{b_\nu}{b_n}\right) + \frac{a_\nu}{b_n}$$

siendo b_ν, a_ν, M fijos, y b_n tiende a ∞, obtenemos $\dfrac{a_n}{b_n} > M$
lo que implica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

$\square$

La forma general del teorema de Stolz es la siguiente:

Teorema 6.0.4. *Si $(a_n)_{n>1}$ y $(b_n)_{n>1}$ son dos sucesiones tales que $(b_n)_{n>1}$ es monótono y su límite tiende a ∞, entonces se cumple :*

1. $$\liminf_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right) \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right)$$

2. $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L \text{ entonces } \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Veamos unos ejemplos donde aplicamos esta regla,

Ejemplo 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Sea $a_n = \sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}$ y $b_n = n\sqrt{n}$ vemos que es creciente y tiene límite en infinito. Aplicando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-(\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n})}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n})}{((n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n})((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n})} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}^2+n\sqrt{n(n+1)}}{(n+1\sqrt{n+1})^2-(n\sqrt{n})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1+n\sqrt{n^2+n}}{(n+1)^3-n^3} = 2/3$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = 2/3$$

Ejemplo 2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+...+n^3}{n^4}$$

Vemos que $a_n = 1^3+2^3+...+n^3$ y $b_n = n^4$ son crecientes y tienden a infinito.

Aplicando la regla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)^4 - n^4} = 1/4$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + ... + n^3}{n^4} = 1/4$$

La implicación recíproca del teorema anterior, no es cierta en general. En el caso $L = \infty$, esto es, si $\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ es un infinito, este infinito y el infinito a_n/b_n puede ser de distinto tipo.

Ejemplo

Veamos un ejemplo donde no se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n + n\lambda}{n} \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vemos que $b_n = n$ es estrictamente creciente y tiende a infinito.
Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n + n\lambda}{n} = \lambda$$

Pero si aplicamos el teorema vemos,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} ((-1)^{n+1} + n\lambda + \lambda - n\lambda - (-1)^n) \text{ que no es convergente.}$$

Veamos consecuencias del teorema:

1.**Regla de la media aritmética**.

Supongamos que a_n converge a $L \in \mathbb{R}$. Entonces su media aritmética

$$x_n = \frac{a_1 + ... + a_n}{n} \text{ converge a L.}$$

Demostración. Para demostrarlo, consideramos las sucesiones,
$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ y $B_n = n$ estrictamente monótona y converge a $+\infty$
Por el teorema de Stolz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + ... + a_n}{n} = L$$

□

Ejemplo

Calculamos $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{3}{2n} + \frac{4}{3n} + ... + \frac{n+1}{n^2} \right)$

Luego si escribimos, $\frac{2}{n} + \frac{3}{2n} + \frac{4}{3n} + ... + \frac{n+1}{n^2} = \dfrac{\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + ... + \frac{n+1}{n}}{n}$

Tenemos que $a_n = \frac{n+1}{n}$

Entonces, $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, por tanto, aplicando la regla de la media aritméticas obtenemos,
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{3}{2n} + \frac{4}{3n} + ... + \frac{n+1}{n^2} \right) = 1$

2.**Regla de la media geométrica**.

Supongamos que a_n creciente y el $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ó $+\infty$ entonces la media geométrica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1...a_n} = L$.

Demostración. Si llamamos $g_n = \sqrt[n]{a_1...a_n} = (a_1...a_n)^{1/n}$, entonces,

$$g_n = e^{ln[(a_1...a_n)^{1/n}]} = e^{1/n(\sum_{k=1}^{n} lna_k)}.$$

Tomando límites

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} e^{1/n(\sum_{k=1}^{n} lna_k)}$$

Llamamos $z_n = \dfrac{\ln(a_1) + ... + \ln(a_n)}{n}$ se trata de la media aritmética de $\ln(a_n)$, llamaremos h_n a $\ln(a_n)$.

Ahora consideramos dos casos:

Caso 1: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \ln(L)$. Y aplicando el resultado anterior a z_n podemos concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ln(L)$ por tanto,

$\lim\limits_{n\to\infty} g_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} z_n} = e^{\ln(L)} = L$

Caso 2: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ sea $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \ln(a_n) = +\infty$ y por tanto,

$\lim\limits_{n\to\infty} g_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} z_n} = e^{+\infty} = +\infty$.

$\square$

Ejemplo

Calculamos $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{10}{9} \cdot ... \cdot \frac{n^2+1}{n^2}}$

Observamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2} = 1$, luego aplicando la regla de la media geométrica, obtenemos:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{10}{9} \cdot ... \cdot \frac{n^2+1}{n^2}} = 1$.

3.**Regla de la raíz**.

Si (a_n) una sucesión de números reales, estrictamente positiva entonces se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Demostración. Llamamos

$$x_n = \ln(\sqrt[n]{a_n}) = \ln(a_n^{\frac{1}{n}}) = \tfrac{1}{n}\ln(a_n) = \frac{\ln(a_n)}{n}$$
$$A_n = \ln(a_n)$$
$$B_n = n$$

Vemos que es estrictamente creciente y converge a $+\infty$.
Luego aplicando el teorema,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$$

tenemos,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

aplicando la continuidad del logaritmo,

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln(L)$$

Como

$$\ln(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln(\sqrt[n]{a_n})$$

entonces aplicando de nuevo la continuidad del logaritmo,

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\sqrt[n]{a_n}) = \ln(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(}a_n)$$

obtenemos,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(}a_n).$$

□

Ejemplo

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

Luego como $a_n = n$, bastará con calcular

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$

Capítulo 7

Caso vectorial de la regla de L'Hôpital

Podemos extender la regla de L'Hôpital a funciones escalares de n variables.

Definición 7.0.1. *Una curva C, en un intervalo I, se dice que es suave si sus derivadas son continuas en dicho intervalo.*

Teorema 7.0.1. [4]

Consideramos un entorno N contenido en $\mathbb{R}^2$ que contiene un punto p en el que las funciones diferenciables se anulan, $f, g : N \longrightarrow \mathbb{R}$.
Definimos una curva suave, $C = \{x \in N : f(x) = g(x) = 0\}$ que pasa por el punto p.
Suponemos que existe un vector v, no tangente a C en p que cumple $D_v g \neq 0$, entonces,

$$\lim_{(x,y)\to p} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{(x,y)\to p} \frac{D_v f(x,y)}{D_v g(x,y)}$$

En general,
Si C esta compuesto por la unión de un conjunto de curvas, que pasan por el punto p, entonces para toda componente $E_i = N \setminus C$ si existiese un vector v_i, no tangente en el punto p a las curvas que componen C, de forma que $D_{v_i} g \neq 0$ en E_i, entonces,

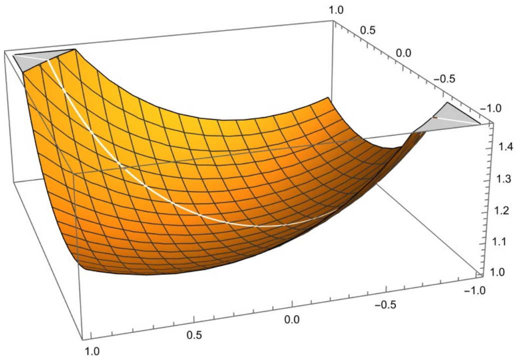
$$\lim_{(x,y)\to p} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{(x,y)\to p, (x,y)\to E_i} \frac{D_{v_i} f(x,y)}{D_{v_i} g(x,y)}$$

Este teorema también es válido para funciones reales de n variables, siendo C unión de hipersuperficies.
Ocurriría exactamente igual para $\mathbb{R}^n$.

Ahora veamos una serie de ejemplos:

Ejemplo 1

Sea $\lim_{(x,y)\to(0,0),x\neq y} \dfrac{x-y}{\sin(x)-\sin(y)}$



Considerando $f(x,y)=x-y$ y $g(x,y)=\sin(x)-\sin(y)$
Consideramos $C=\{(x,y):f(x,y)=g(x,y)=0\}=\{(x,y):x=y\}$
Como podemos observar en la gráfica la función en C no existiría. Suponemos que existe V, por ejemplo, $V=(1,0)$ no tangente a C en $(0,0)$ tal que $D_v g\neq 0$ en el entorno del punto $(0,0)$.
Entonces aplicando el teorema anterior,

$$\lim_{(x,y)\to p}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\lim_{(x,y)\to p}\frac{D_v f(x,y)}{D_v g(x,y)}$$

obtenemos,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),x\neq y}\frac{x-y}{\sin(x)-\sin(y)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\cos(x)}=1.$$

Ejemplo 2

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sin(z)-\sin(x^2+y^2)}{\tan(z-x^2)-\tan(y^2)}=1$$

Bibliografía

[1] T.M. Apostol. *Análisis Matemático.* Editorial Reverté, S.A., 1976.

[2] F.Sánchez. *Funciones reales de variable real. Cálculo diferencial*, 2022. http://matematicas.unex.es/~fsanchez/calculoI/07.pdf [Acceso: 20-abril-2022].

[3] Martha Isela G., Enrique C., Isi Yanet G., and Marcela Carolina G. La regla de l´hôpital y una controversia a su alrededor. *CIENCIA ergo-sum, Revista Científica Multidisciplinaria de Prospectiva*, 12:329–334, 2005.

[4] G. R. Lawlor. L'hôpital's rule for multivariable functions. *The American Mathematical Monthly*, 127(8):717–725, 2020.

[5] E. Palma and F. A. González. Enseñanza de un objeto matemático : una primera aproximación a la evolución histórica de la regla de l'hôpital. 2013.

[6] R.Payá. *Reglas de L'hôpital*, 2022. https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/CalculoII/2013-14/Lopital.pdf [Acceso: 3-mayo-2022].

[7] M. Spivak. *Suplemento del Calculus.* Reverté, 1974.

[8] M. Spivak. *Calculus.* Calculus. Cambridge University Press, 2006.

[9] J. Stewart. *Calculus.* Cengage Learning, 2011.

[10] K.R. Stromberg and Karreman Mathematics Research Collection. *Introduction to Classical Real Analysis.* Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics. Taylor & Francis, 1981.