EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **19**, Núm. 2, 227 – 231 (2004)

Algèbres Topologiques Algébriques

R. Choukri

Ecole Normale Supérieure-Takaddoum, Département de Mathématiques
B.P. 5118 *Rabat,* 10105 *Maroc*
e-mail: rchoukri@hotmail.com

(Presented by Francisco Montalvo)

AMS *Subject Class.* (2000): 46J40, 46J20 *Received November* 20, 2003

1. Introduction

Dans [4], il est montré qu'une algèbre de Banach est algébrique si, et seulement si, son radical de Jacobson est nilpotent et de codimension finie. Dans ce papier, nous nous plaçons dans un cadre topologique général. Nous montrons la validité du résultat ci-dessus dans le cas d'une algèbre topologique, non nécessairement complète, commutative et de Baire. Nous obtenons, par ailleurs, une décomposition d'une telle algèbre en produit fini d'algèbres topologiques locales. Une équivalence est également établie, dans le cas normé, entre l'algébricité de l'algèbre et la condition de la chaine descendante pour certains de ses idéaux.

2. Préliminaires

Soit A une algèbre réelle commutative unitaire. Un élément x de A est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients réels. L'algèbre A est dite algébrique si tous ses éléments le sont. Le spectre de x dans A, noté $\mathrm{Sp}_A(x)$, est la partie de $\mathbb{C}$ formée des λ tel que $x - \lambda e$ n'est pas inversible dans $A_{\mathbb{C}}$; où e est l'unité de A et $A_{\mathbb{C}}$ la complexifiée de A [1, Définition 1, p. 68]. Le rayon spectral de x est $\rho_A(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)\}$. L'élément x est dit quasi-nilpotent si $\rho_A(x) = 0$. Le radical de Jacobson de A, noté $\mathrm{Rad}\, A$, est l'intersection des idéaux maximaux de A. L'algèbre A est dite locale si elle n'admet qu'un seul idéal maximal M. Une telle algèbre est notée (A, M). Si $I_1, \ldots, I_r$ sont des idéaux de A, on note par $I_1 \cdots I_r$ l'idéal de A engendré par les produits $x_1 \cdots x_r$, où $x_i \in I_i$, pour tout i. Si $I_i = I$, pour tout i, l'idéal $I_1 \cdots I_r$ est noté I^r. Un idéal I de A est dit nil si tous ses éléments sont nilpotents. Il est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $I^n = \{0\}$ [1, Définition 1, p. 253]. Deux idéaux I et J de A sont dits étrangers si $I + J = A$. L'algèbre A est dite topologique si elle est munie d'une topologie d'espace vectoriel pour laquelle la multiplication est séparement continue. Une telle algèbre est dite une Q-algèbre si son groupe $G(A)$ des éléments inversibles est un ouvert ; dans ce cas le spectre de tout élément de A est compact.

3. Caractérisation des algèbres topologiques algébriques

Avant de donner le résultat principal de ce papier, voici trois lemmes dont on aura besoin par la suite.

Lemme 1. *Soit A une algèbre commutative unitaire et $I_1, \ldots, I_r$ des idéaux de A deux à deux étrangers. Alors,*

(1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(I_1 \cap \cdots \cap I_r)^n = I_1^n \cap \cdots \cap I_r^n = I_1^n \cdots I_r^n$.*

(2) *Pour tout $i = 1, \ldots, r$, on a $I_i = \left\{x \in A : x\left(\bigcap_{j \neq i} I_j\right) \subset \bigcap_{1 \leq j \leq r} I_j\right\}$.*

Preuve. (1) Découle de [2, Proposition 7, p. I.102].

(2) Soit $i = 1, \ldots, r$. L'inclusion $I_i \subset \left\{x \in A : x\left(\bigcap_{j \neq i} I_j\right) \subset \bigcap_{1 \leq j \leq r} I_j\right\}$ est évidente. L'autre inclusion découle du fait que les idéaux I_i et $\bigcap_{j \neq i} I_j$ sont étrangers. ∎

Le second lemme est de preuve immédiate.

Lemme 2. *Soit A une algèbre normée unitaire telle que pour tout $x \in A$, la suite d'idéaux $(Ax^n)_n$ est stationnaire. Alors A est une Q-algèbre.*

Preuve. Soit $x \in G(\widehat{A}\,) \cap A$, où $\widehat{A}$ est la complétée de A. Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $Ax^n = Ax^{n+1}$. Considérons $a \in A$ tel que $x^n = ax^{n+1}$. Mais x est inversible dans $\widehat{A}$; donc $e = ax$. Il en résulte que $x^{-1} = a \in A$. Donc $G(A) = G(\widehat{A}\,) \cap A$. On conclut par [1, Théorème 11, p. 12]. ∎

Enfin, le dernier lemme dont la preuve est semblable à celle du théorème 3 de la page 253 de [1].

Lemme 3. *Soit A une algèbre normée et I un idéal de A. Si I est nil et de Baire alors I est nilpotent.*

Voici maintenant le résultat principal de ce papier.

THÉORÈME 4. *Soit A une algèbre topologique, commutative, unitaire et de Baire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *A est une Q-algèbre algébrique.*

(2) (a) *Tout idéal maximal de A est fermé et de codimension finie.*

(b) *Il existe un isomorphisme d'algèbres continu entre A et un produit fini d'algèbres topologiques, de même nature topologique que A, locales (A_i, M_i), où M_i est nil pour tout i.*

(3) $\operatorname{Rad} A$ *est fermé, nil et de codimension finie.*

Si, de plus, A est normée, ces assertions sont équivalentes à :

(4) $\operatorname{Rad} A$ *est nilpotent et de codimension finie.*

(5) *Pour tout $x \in A$, la suite $(Ax^n)_n$ est stationnaire.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) (a) Soit M un idéal maximal de A. Alors A/M est une extension algébrique du corps $\mathbb{R}$ qui est un corps. Elle est alors isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'idéal M est de codimension au plus égale à 2. (b) Montrons d'abord que A admet un nombre fini d'idéaux maximaux. Supposons qu'il existe une suite $(M_n)_n$ d'idéaux maximaux de A deux à deux distincts. Par (1), les M_n sont fermés. Par (a), pour tout n, il existe un morphisme d'algèbre χ_n de A vers $\mathbb{C}$ dont le noyau est M_n. Considérons la suite $A_{m,n} = \{x \in A : \chi_m(x) = \chi_n(x)\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $m \neq n$. Les $A_{m,n}$ sont des sous-algèbres fermées et recouvrent A. Comme A est de Baire, il existe m_0, n_0 tel que A_{m_0,n_0} est d'intérieur non vide. Il en résulte que $A_{m_0,n_0} = A$ et donc $\chi_{m_0} = \chi_{n_0}$; ce qui n'est pas le cas. Notons par $M_1, \ldots, M_r$ les idéaux maximaux de A. D'après [3, Proposition 2, p. 70], pour tout $i = 1, \ldots, r$, il existe $x_i \in M_i \backslash \bigcup_{j \neq i} M_j$. Posons alors $I_i = \overline{Ax_i}$, $i = 1, \ldots, r$. Ces idéaux sont deux à deux étrangers. Donc, par [2, Proposition 7, p. I.102], on a $\bigcap_{1 \leq i \leq r} I_i = I_1 \cdots I_r = \overline{Ax_1 \cdots x_r}$. Or $x_1 \cdots x_r$ est un élément algébrique du radical ; il est alors nilpotent. Considérons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x_1 \cdots x_r)^n = 0$. On a également $(\bigcap_{1 \leq i \leq r} I_i)^n = \{0\}$. Donc, par (1) du lemme 1, $\bigcap_{1 \leq i \leq r} I_i^n = \{0\}$. Par ailleurs, d'après [2, Proposition 9, p. I.104], l'application φ de A vers $A/I_1^n \times \cdots \times A/I_r^n$ définie par $\varphi(x) = (s_1(x), \ldots, s_r(x))$ est un isomorphisme d'algèbres ; où s_i est la surjection canonique de A sur A/I_i^n. De plus, les idéaux $I_1^n, \ldots, I_r^n$ sont deux à deux étrangers. Donc par (2) du lemme 1, I_i^n est fermé, pour tout i. D'autre part, il est clair que φ est continue et que les algèbres A/I_i^n sont locales d'idéaux maximaux $s_i(M_i)$. De plus $s_i(M_i)$ est bien nil comme radical d'une algèbre algébrique.

L'implication (2) $\Rightarrow$ (3) est évidente.

(3) $\Rightarrow$ (1) L'algèbre A est bien algébrique vu que $\operatorname{Rad} A$ et $A/(\operatorname{Rad} A)$ le sont. De plus, A est une Q-algèbre puisque $A/(\operatorname{Rad} A)$ l'est.

Supposons maintenant que A est normée.

(3) $\Rightarrow$(4) Moyennant le lemme 3, il suffit de montrer que $\operatorname{Rad} A$ est de Baire. Soit F un supplémentaire vectoriel de $\operatorname{Rad} A$ dans A. On a $A = (\operatorname{Rad} A) \oplus F$. Comme F est de dimension finie, on a $\widehat{A} = \overline{\operatorname{Rad} A} + F$, où $\widehat{A}$ est la complétée de A et $\overline{\operatorname{Rad} A}$ est la fermeture de $\operatorname{Rad} A$ dans $\widehat{A}$. Cette dernière somme est directe vu que $\overline{\operatorname{Rad} A} \cap F \subset (\operatorname{Rad} \widehat{A}\,) \cap F \subset (\operatorname{Rad} A) \cap F = \{0\}$. Ainsi on a $\widehat{A} = (\operatorname{Rad} \widehat{A}\,) \oplus F$. Moyennant le théorème de l'application ouverte, $\widehat{A}$ est homéomorphe à $(\operatorname{Rad} \widehat{A}\,) \times F$. Il s'ensuit que A est homéomorphe à $(\operatorname{Rad} A) \times F$. Il en résulte que A est de Baire.

(4) $\Rightarrow$(5) Soit $x \in A$. Comme $\operatorname{Rad} A$ est de codimension finie, il existe n tel que $Ax^n + \operatorname{Rad} A = Ax^{n+1} + \operatorname{Rad} A$. Considérons $a \in A$ tel que $x^n - ax^{n+1} \in \operatorname{Rad} A$. Comme ce dernier est nilpotent, il existe $k \geq 1$ tel que $(x^n - ax^{n+1})^k = 0$. Il s'ensuit que $Ax^{nk} = Ax^{nk+1}$.

(5) $\Rightarrow$(1) A est une Q-algèbre par le lemme 2. Maintenant, soit $x \in A$. Considérons $\lambda \in \operatorname{Sp}_A(x)$. En s'inspirant d'une idée d'Esterle et Oudadess [5], on va montrer que λ est un point isolé de $\operatorname{Sp}_A(x)$. Supposons que ce n'est pas le cas. Il existe alors une suite $(\lambda_n)_n$ de $\operatorname{Sp}_A(x) \backslash \{\lambda\}$ qui tend vers λ. Par le lemme 2, et moyennant le théorème de Gelfand-Mazur, il existe une suite $(\chi_n)_n$ de morphismes d'algèbres de A vers $\mathbb{C}$ tel que $\lambda_n = \chi_n(x)$, pour tout n. Par ailleurs, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $a \in A$ tel que $(x - \lambda e)^k = a(x - \lambda e)^{k+1}$; $\chi_n(a)(\lambda_n - \lambda) \to 0$ puisque $\operatorname{Sp}_A(a)$ est compact. En appliquant aux deux membres de l'égalité les χ_n, nous aurons $1 = \chi_n(a)(\lambda_n - \lambda)$; ce qui est impossible. Ainsi $\operatorname{Sp}_A(x)$ est fini vu qu'il est compact. Posons alors $\operatorname{Sp}_A(x) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. L'élément $y = \Pi_{1 \leq i \leq r}(x - \lambda_i e)$ est quasi-nilpotent. Par ailleurs, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in A$ tel que $y^n = ay^{n+1}$. On a $y^n(e - ay) = 0$. Mais ay est également quasi-nilpotent. Donc $y^n = 0$ et par suite x est algébrique. ∎

Comme conséquence, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 5. *Pour qu'une Q-algèbre topologique commutative semi-simple de Baire soit algébrique, il faut, et il suffit, qu'elle soit de dimension finie.*

Références

[1] Bonsall, F.F., Duncan, J., "Complete Normed Algebras", Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[2] Bourbaki, N., "Algèbre, Chapitres 1 à 3", Diffusion C.C.L.S., Paris, 1970.

[3] Bourbaki, N., "Algèbre Commutative, Chapitres 1 à 4" (nouveau tirage), Masson, Paris, 1985.

[4] DIXON, P.G., Locally finite Banach algebras, *J. London Math. Soc. (2)* **8** (1974), 325–328.

[5] ESTERLE, J., OUDADESS, M., Structure of Banach algebras A satisfying $Ax^2 = Ax$ for every $x \in A$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **96** (1) (1986), 91–94.