HACIA UNA CATEGORIZACIÓN DE LA ADQUISICIÓN DE OBJETIVOS GEOMÉTRICOS EN EL MARCO DEL MODELO VAN HIELE

Joxemari Sarasua Fernández
Escuela Universitaria de Magisterio de Vitoria-Gasteiz (UPV – EHU)

RESUMEN:

La presente comunicacióón pretende aportar elementos que contribuyan a definir de manera máás eficaz los contenidos y objetivos geoméétricos asociados a la escolaridad obligatoria y preuniversitaria. Tomando como marco de referencia el modelo Van Hiele, se esbozaráá una categorizacióón de los objetivos geoméétricos, relativos a las figuras planas, que los alumnos deberíian de adquirir a lo largo de su formacióón en matemááticas.

PALABRAS CLAVE: *capacidad espacial, modelo Van Hiele, objetivos geoméétricos*

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas hemos vivido el despertar de un notable interés en torno a la capacidad espacial y a la enseñanza de la geometría. Este interés está justificado, y tiene un componente de respuesta al auge de la llamada “matemática moderna”, que sobre todo en los años sesenta y setenta propició un cierto abandono de los contenidos relacionados con la capacidad espacial en favor de la formalización y algebraización de la geometría (Arrieta, 2003).

Cabe decir, de forma sintética, que han sido dos las principales líneas teóricas que se han aproximado al análisis de la geometría y del pensamiento espacial en los últimos tiempos: la teoría psicogenética de Piaget, por una parte, y el modelo Van Hiele, por otra.

- El primero pone el énfasis, de alguna manera, en los procesos mentales que intervienen en la formación del espacio psicológico del niño, tratando de analizar el desarrollo evolutivo de los conceptos espaciales (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960; Piaget y Inhelder, 1967). Propone, además, una secuenciación de las relaciones geométricas, de las más simples a las más complejas: *topolóógicas* (propiedades globales independientes de la forma o del tamaño), *proyectivas* (unidas a la idea de perspectiva y relacionadas con la capacidad de adivinar la forma de un objeto geométrico observado desde diferentes ángulos y posiciones) y *euclíideas* (referidas al tamaño y a la distancia).
- Van Hiele (1986) entiende la geometría desde una doble dimensión: como ciencia y, al mismo tiempo, como instrumento apto para estructurar el pensamiento matemático; distingue diferentes "niveles de razonamiento" y establece entre ellos una jerarquía, como se verá en el siguiente apartado.

Sin embargo una cuestión permanece aún sin resolver: ¿pueden llegar a ser compatibles estas dos líneas de análisis?; ¿sería posible formular un modelo global que integrara las dos perspectivas?

Cada una de las dos líneas teóricas, por otra parte, parece haber optado por un determinado conjunto de contenidos: mientras que, por ejemplo, las isometrías, las figuras planas, los ángulos y los sólidos han sido objeto de un análisis exhaustivo desde el enfoque del modelo Van Hiele (Burger y Shaughessy, 1986; Jaime y Gutiérrez, 1990; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Jaime y Gutiérrez, 1996; Alfonso, Camacho y Socas, 2000), otra serie de contenidos, como las nociones topológicas o proyectivas, aún no han encontrado acomodo dentro del mismo modelo (Hershkowitz, 1990, p. 93).

Se echa en falta un marco teórico global a la hora de estudiar la capacidad espacial y de visualización. Esta ausencia supone un lastre para el progreso de estudios unificados y operativos, ya que en no pocas ocasiones éstos se desarrollan en terrenos de notable indefinición (Arrieta, 2003): ¿qué entendemos realmente cuando hablamos de *capacidad espacial*, *orientacióón espacial* o *visualizacióón*? Por otra parte, y a la luz de las nuevas perspectivas sobre la enseñanza de las matemáticas que han surgido en los últimos años, ¿merece la pena repensar el currículo escolar actual en lo referente a la geometría?; y, si la respuesta fuera afirmativa, ¿sería posible clasificar, categorizar e integrar en una propuesta didáctica conjunta los contenidos, objetivos y procedimientos geométricos que el alumnado debería adquirir durante su etapa de escolarización, desde la educación infantil hasta el bachillerato?

Arrieta menciona tres problemas referentes al estudio de la capacidad espacial que se constituyen como objetivos para futuras investigaciones matemáticas (Arrieta, 2003):

- **PRIMER PROBLEMA** El análisis de la estructura de la capacidad espacial referida a factores, a los procesos cognitivos asociados y a las estrategias utilizadas en la resolución de tareas espaciales.
- **SEGUNDO PROBLEMA** El análisis del desarrollo de la capacidad espacial y de los contenidos geométricos asociados a lo largo de toda la escolaridad.
- **TERCER PROBLEMA** Las condiciones que ha de cumplir un modelo o propuesta didáctica para que favorezca un desarrollo equilibrado y progresivo de la capacidad espacial.

La presente comunicación pretende aportar elementos que contribuyan a avanzar en la resolución de los dos últimos problemas. Concretamente, señalaremos en primer lugar algunos déficits del modelo Van Hiele en su formulación actual; posteriormente esbozaremos, tomando como punto de partida el mismo modelo Van Hiele, una categorización de los objetivos geométricos, referidos a las figuras planas, que los alumnos deberían de adquirir a lo largo de su formación obligatoria y preuniversitaria.

2. EL MODELO VAN HIELE

La teoría psicogenética ha constituido, y sigue constituyendo, un marco referencial para múltiples aportaciones dirigidas a entender mejor el desarrollo del pensamiento espacial en el niño; particularmente también lo ha sido para el modelo Van Hiele, como así lo ha reconocido el mismo autor (Van Hiele, 1986, pp. 5-6).

Podría decirse, de forma concisa, que el grueso de las investigaciones piagetianas tienen como lugar común la psicología del aprendizaje y el desarrollo evolutivo de las ideas matemáticas; sin embargo adolecen de falta de propuestas didácticas concretas. El constructivismo, y particularmente la teoría psicogenética, tienen como objetivo hacer luz sobre los procesos de aprendizaje de los alumnos, pero poco aclaran sobre la manera en que los maestros y maestras deberían de enseñar los contenidos. La propuesta de Van Hiele, al tratarse de un modelo global de enseñanza y aprendizaje geométrico, viene en gran medida a cubrir este vacío.

Las ideas centrales del modelo Van Hiele pueden enunciarse de la siguiente manera (Jaime y Gutiérrez, 1990):

1) Se pueden encontrar varios niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
2) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.

3) Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

El modelo Van Hiele presenta una doble dimensión (Jaime y Gutiérrez, 1990):

a) Descriptiva: define una secuencia de modos de razonar matemáticamente, los llamados "niveles de razonamiento", a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de cualquier individuo (alumnos de infantil, primaria, secundaria o universitarios) desde que inicia el aprendizaje en cierta área geométrica (p.e. isometrías, figuras planas, sólidos etc.) hasta que llega a su máximo nivel de desarrollo intelectual en dicha área.

b) Pedagógica: ofrece a los profesores una serie de directrices sobre cómo pueden ayudar a que sus alumnos para que alcancen con más facilidad un nivel superior de razonamiento. A estas directrices las denomina "fases de aprendizaje".

Cabe hacer aquí una precisión: aunque el modelo Van Hiele tiene una vocación globalizadora hacia el aprendizaje matemático en su conjunto, la mayor parte de las investigaciones aparecidas hasta la fecha se han centrado únicamente en diversas áreas de la geometría. Parece además complicado, al menos por ahora, la eventual aplicación del modelo a otras áreas de la matemática; de ser así, habría que introducir cambios sustanciales en las caracterizaciones de los niveles, o incluso redefinirlos. La mayor parte de los estudios realizados en este sentido han obtenido pobres resultados (Hoffer, 1983; Jaime y Gutiérrez, 1990).

Describimos a continuación, de forma sucinta, los principales descriptores de los niveles propuestos por Van Hiele, valiéndonos cuando sea necesario de ejemplos concretos (principalmente relativos a las figuras planas) (Hoffer, 1983; Burger y Shaughessy, 1986; Jaime y Gutiérrez, 1990):

NIVEL 1: RECONOCIMIENTO

- En esta etapa los objetos geométricos se perciben globalmente como unidades, sin componentes ni atributos relevantes. En las descripciones el alumno puede incluir atributos irrelevantes.
- Las figuras geométricas se reconocen por su apariencia física, no mediante un análisis de sus componentes o propiedades. Las clasificaciones se realizan teniendo en cuenta diferencias o similitudes globales. Son habituales las siguientes expresiones para describir objetos geométricos: "es parecido a", "tiene la forma de", etc.

- El alumno que está en este nivel es incapaz de generalizar las propiedades que reconoce en una figura a otra de su misma clase.
- El alumno puede reproducir, dado un modelo, una figura geométrica.

NIVEL 2: ANÁLISIS

- El alumno se da cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y de que poseen propiedades matemáticas. Pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de una manera informal.
- En este nivel el alumno puede deducir unas propiedades de otras valiéndose de la observación y de la experimentación. También puede generalizarlas a otras figuras de la misma clase.
- El alumno es incapaz de relacionar unas propiedades con otras, y por tanto no puede realizar clasificaciones lógicas entre figuras basándose en sus elementos o propiedades.

NIVEL 3: CLASIFICACIÓN

- En esta etapa comienza a materializarse un razonamiento matemático formal. El alumno ya sabe que unas propiedades se deducen de otras, y puede establecer relaciones e implicaciones entre ellas. Particularmente, es capaz de clasificar lógicamente las familias de figuras geométricas en función las propiedades y componentes que ya conoce.
- El alumno puede enunciar definiciones matemáticas formales. Entiende para qué sirven las definiciones y qué condiciones deben cumplir.
- Aunque entiende los pasos consecutivos de un razonamiento lógico-formal, no siente la necesidad de la demostración. Es capaz de entender una demostración compleja si el profesor le explica cada uno de los pasos, pero es incapaz de (re)construirla por sí mismo.

NIVEL 4: DEDUCCIÓN FORMAL

- Llegado a este nivel, el alumno es capaz de entender y construir razonamientos lógico-formales por sus propios medios. Las demostraciones complejas ya tienen sentido para él, y las juzga necesarias para justificar la veracidad de un enunciado.
- El alumno admite que para llegar a un cierto resultado es posible seguir más de un camino. Entiende que pueden existir definiciones equivalentes.

NIVEL 5: RIGOR

- Es posible comparar diversos sistemas basados en diferentes axiomáticas.
- El alumno puede estudiar diferentes geometrías sin necesidad de modelos o referentes concretos.

3.-ALGUNAS CARENCIAS DEL MODELO VAN HIELE

Es innegable el acierto de las propuestas tanto didácticas como referentes al proceso de aprendizaje de la geometría desarrolladas a la luz del modelo Van Hiele. Así ha quedado patente durante las últimas décadas por el gran caudal de propuestas y teorías surgidas a su alrededor y por el interés que éstas han despertado, y siguen despertando, en ámbitos tanto académicos como educativos, con la incorporación paulatina, en este último caso, de sus categorías, propuestas didácticas y métodos de análisis en los currículos de varios países (Hoffer, 1983).

Gracias a este empuje, se ha conseguido modelizar localmente el proceso mediante el cual los alumnos adquieren los contenidos geométricos, caracterizando y jerarquizando diferentes etapas de "pensamiento geométrico". Esto, por su parte, ha llevado a elaborar minuciosas propuestas didácticas más coherentes y ajustadas al nivel de los alumnos, acelerando de manera significativa el proceso de aprendizaje.

Hasta aquí las principales virtualidades y aciertos de la teoría Van Hiele. No es menos cierto, sin embargo, que un análisis más exhaustivo de los niveles de razonamiento, del conjunto de sus descriptores y, en general, de la literatura relativa deja al descubierto ciertas carencias que merecen la pena ser analizadas con mayor detenimiento. Pasamos a continuación a enumerar los principales vacíos que hemos detectado:

3.1. - INDEFINICIÓN PREVIA DE LOS OBJETIVOS A ALCANZAR

A pesar de que en las caracterizaciones para los diferentes niveles de razonamiento se hace referencia constante, de manera explícita o implícita, a múltiples competencias que el alumno debe o no revelar para ser asignado a un determinado nivel (por ejemplo, "compara", "reconoce", "no admite la inclusión de clases", "deduce", "generaliza", etc.), los objetivos geométricos que se supone debe alcanzar aquel a lo largo de su escolarización:

i) no se concretan de forma explícita.

ii) no se redefinen, o adaptan, en función del nivel de razonamiento.

iii) no se redefinen, o adaptan localmente, en función del contenido geométrico.

iv) no se organizan de antemano en categorías diferenciadas, ni se establecen entre ellos líneas jerárquicas o redes de relaciones.

v) no se confrontan con los descriptores de niveles de Van Hiele para validar o no la adecuación mutua. Este vacío en cuanto a una formulación global previa de

a) *cuááles son los contenidos*, conceptuales y procedimentales, que hay que enseñar,

b) *cóómo han de secuenciarse* éstos en las diferentes etapas educativas, y

c) *cóómo reencajar los niveles de Van Hiele* en la nueva clasificación de objetivos, constituye un espacio común de indefinición en el que parecen desarrollarse gran parte de las propuestas relacionadas con el modelo Van Hiele.

3.2. - ATRIBUCIÓN ASIMÉTRICA DE CARACTERÍSTICAS

Un análisis en conjunto de los descriptores asociados a los niveles de Van Hiele, como base hacia una posible recategorización de los objetivos geométricos, pone de manifiesto una serie de carencias derivadas del desequilibrio y descompensación en las características referidas a los diferentes objetivos. Dicho de otra manera, mientras algunos objetivos aparecen claramente señalados, otros adolecen en diverso grado de (a) *indefinicióón*, (b) *ausencia de un desarrollo apropiado* u (c) *omisióón*, como se ejemplificará más adelante. Esto lleva a que alrededor de 70 descriptores de los diferentes niveles no figuren clasificados convenientemente, lo que a su vez:

i) dificulta la comprensión de dichas características.

ii) dificulta la clarificación de los límites entre los niveles.

iii) puede esconder déficits o carencias que pueden pasar desapercibidas.

3.3. - PROPUESTAS DIDÁCTICAS CERRADAS

Se observa que las aportaciones didácticas basadas en el modelo Van Hiele ignoran a menudo aspectos importantes que también deberían de tenerse en cuenta a la hora de elaborar cualquier propuesta de aprendizaje. Nos estamos refiriendo, más concretamente, a los siguientes puntos:

i) ciertos aspectos psicológicos del aprendizaje geométrico, por ejemplo:

a) especificidades de los procesos cognitivos en geometría (distinción entre *concepto* e *imagen de concepto*) (Vinner, 1983),

b) tratamiento de los errores, y

c) elementos distractores (Hershowitz, 1990).

ii) diversificación del uso de materiales y recursos:

a) manipulativos (geobandas, palillos, puzzles, tangram, teselados, Lego, etc.), y

b) virtuales (software de construcción).

iii) falsas creencias y lagunas competenciales de los mismos profesores, tanto relativas al modelo Van Hiele como su formación estrictamente matemática.

iv) el papel de la capacidad espacial (Arrieta, 2003).

De la misma forma que hay unanimidad al considerar que existe una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles de razonamiento, con la incorporación de aquél como elemento esencial para que el proceso de instrucción sea efectivo (Jaime y Gutiérrez, 1990), los aspectos arriba señalados también deberían ser tenidos en cuenta y de una manera u otra encontrar su encaje dentro del modelo Van Hiele.

3.4. - AUSENCIA DE APORTACIONES ESPECÍFICAS PARA LAS PRIMERAS ETAPAS EDUCATIVAS

Se ha señalado ya (Hershkowitz, 1990) que el grueso de las investigaciones realizadas durante las últimas décadas sobre pensamiento geométrico se ha centrado casi exclusivamente en alumnos mayores de 9 años, estudiantes de Magisterio e incluso profesores en activo, mientras que apenas se han estudiado los mecanismos de razonamiento geométrico en niños de corta edad. Es muy poco, así mismo, lo que el modelo Van Hiele ha aportado hasta ahora en esta dirección, apreciándose carencias en las siguientes áreas:

i) clarificación de objetivos específicos para educación infantil: clasificar universos aditivos o multiplicativos, reconocer, pintar, dibujar, etc.
ii) propuestas didácticas específicas para educación infantil.
iii) subsecuenciación del primer nivel de razonamiento, si fuera preciso, para hacerlo más operativo.

3.5. - AUTOLIMITACIÓN A CIERTOS GRUPOS DE CONTENIDOS

A pesar de la vocación totalizadora y aglutinante que se tiende a atribuir al modelo Van Hiele, al menos en cuanto a pensamiento geométrico se refiere, llama la atención cómo algunos contenidos que han recibido un tratamiento profuso desde una óptica *piagetiana*, por ejemplo los relativos a nociones topológicas y proyectivas, no han encontrado aún cabida dentro del modelo Van Hiele. No se puede decir lo mismo sobre otros tipos de contenidos (isometrías, ángulos, figuras planas, sólidos), que han sido objeto constante de estudio desde la formulación misma del modelo hace casi medio siglo (Burger y Shaugnessy, 1986; Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime y Gutiérrez, 1996; Guillén, 1997; Alfonso, Camacho y Socas, 2000).

4. - PROPUESTA DE CATEGORIZACIÓN PARA LOS NIVELES DE ADQUISICIÓN DE OBJETIVOS GEOMÉTRICOS

Pensamos que un reanálisis de las características de los niveles de Van Hiele desde la perspectiva de los objetivos geométricos contribuiría a:

a) Facilitar la comprensión de las características de cada nivel.
b) Fijar los límites de cada nivel.
c) Mostrar los déficits o carencias del modelo.

En primer lugar, (i) procederemos a desglosar cada uno de los objetivos geométricos de acuerdo con el currículo actualmente vigente para la enseñanza obligatoria, y después (ii) estudiaremos la posibilidad de organizarlos de forma racional, si es necesario en función del área en cuestión o del grupo de contenidos.

El objetivo general de la enseñanza de las matemáticas a lo largo de la enseñanza obligatoria es la mejora de las capacidades intelectuales y la adquisición de recursos aplicables a otras áreas. Todo ello se concreta en la adquisición de una serie de recursos, capacidades de lenguaje y procedimientos relativos a (i) la COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS, (ii) el CÁLCULO PROCEDIMENTAL, y (iii) la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, esto último entendido como fruto de la síntesis de los dos primeros objetivos, sobre los cuales pivota. Es por ello que centraremos nuestra atención en aquellos dos, aun conscientes de que la adquisición de competencias resolutorias presenta una dimensión propia susceptible de un análisis más particular. Así pues, nuestra PRIMERA CATEGORÍA hace referencia a este nivel general de adquisición del conocimiento matemático: el contenido.

Cada uno de los dos objetivos generales se desdobla, a su vez, en dos grandes bloques que hacen referencia a las destrezas implicadas en su adquisición y que tienen relación con las constantes de área que muchas veces se utilizan a la hora de evaluar la adquisición de co- nocimientos en matemáticas (Hoffer, 1981; Pegg y Davey, 1991; Davey y Holliday, 1992). Esto es:

1ª CATEGORÍA	**2ª CATEGORÍA**
COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS	RECONOCIMIENTO (destrezas senso-motoras)
	COMUNICACIÓN (destrezas verbales o escritas)
CÁLCULO PROCEDIMENTAL	REPRESENTACIÓN (destrezas de dibujo)
	RAZONAMIENTO (destrezas lógicas)
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (síntesis de las dos anteriores)	

Esta SEGUNDA CATEGORÍA nos conduce de forma natural a identificar los *verbos de acciöón* asociados a cada bloque de destrezas, que ordenamos según el grado de dificultad o complejidad. He aquí, por ejemplo, constituyendo una TERCERA CATEGORÍA de objetivos didácticos o terminales, los correspondientes a las figuras planas:

1ª CATEGORÍA	2ª CATEGORÍA	3ª CATEGORÍA
COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS	RECONOCIMIENTO	IDENTIFICAR
		RELACIONAR
		CLASIFICAR
	COMUNICACIÓN	DESCRIBIR
		DEFINIR
CÁLCULO PROCEDIMENTAL	REPRESENTACIÓN	DIBUJAR
	RAZONAMIENTO	INDUCIR
		DEDUCIR
		DEMOSTRAR
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (síntesis de las dos anteriores)		

Se observa que los objetivos aparecen jerarquizados para cada grupo de destrezas. Entendemos por *identificar* reconocer si una cosa es la misma que se supone o se busca; por *relacionar*, poner en conexión, comparando, una cosa con otra; por *clasificar*, ordenar determinando la clase o grupo que corresponde a una cosa. Así pues, *identificar* precede a *relacionar*, pues para comparar varias figuras es necesario reconocerlas cada una como tal. *Relacionar* es a su vez previo a *clasificar*, pues esto último exige comprender todas las relaciones posibles entre las figuras objeto de la clasificación: inclusión, pertenencia múltiple, dicotómicas, no-dicotómicas, etc.

Cuando hablamos de *describir*, nos referimos a definir de manera imperfecta, o más concretamente, a listar de forma exhaustiva las propiedades o partes de un objeto, pudiendo incluir atributos tanto relevantes como irrelevantes. Es previo, por tanto, al acto de *definir*: fijar con claridad y exactitud el significado de un objeto mediante una lista mínima de atributos, necesarios y suficientes, para caracterizarlo.

Bajo el término genérico de *dibujar*, a la espera de posterior concreción y clasificación, se incluye una amplia serie de acciones representativas que abarcan desde el acto de trasladar, proyectar, deformar, colorear, dibujar a mano alzada o con compás, hasta construir mediante material manipulativo o software.

Llamamos *inducir* a extraer, a partir de determinadas observaciones o experiencias particulares, el principio general que en ellas está implícito: por ejemplo de los hechos y fenómenos a las leyes, del objeto particular a su clase, de los efectos a las causas, etc. Se trata, por tanto, de una acción más pegada a lo concreto, previa en cualquier caso al nivel de abstracción requerido para *deducir*, esto es, para extraer consecuencias lógicas a partir de un principio, proposición o supuesto: por ejemplo, de la totalidad sobre las partes o de una clase sobre sus representantes. Ambas acciones preceden a lo que en matemáticas entendemos por *demostrar*: probar sirviéndose de algún tipo de razonamiento, generalmente sintético y aglutinante, un determinado enunciado. Toda demostración es, por tanto, un proceso que consta de (a) un planteamiento inicial, (b) un desarrollo lineal o complejo en el que pueden intervenir diversas formas de razonamiento inductivo o deductivo, de uno o varios niveles cada uno, y (c) un final hacia donde convergen los pasos anteriores formando una estructura cerrada y lógica.

Una CUARTA CATEGORÍA, también jerarquizada según el grado de complejidad, nos indicará, así mismo, el nivel de comprensión o consecución de cada uno de los objetivos didácticos. Proponemos, particularmente para las figuras planas, la siguiente clasificación-categorización:

1ª CATEGORÍA	2ª CATEGORÍA	3ª CATEGORÍA	4ª CATEGORÍA
comprensión de conceptos	reconocimiento	identificar	globalmente
			por partes
		relacionar	globalmente
			por partes
		clasificar	globalmente
			por partes
	comunicación	describir	globalmente
			por partes
		definir	con lista exhaustiva
			con lista mínima
cálculo procedimental	representación	dibujar	reproduciendo
			creando
	razonamiento	inducir	generalizando
		deducir	comprobando
			construyendo
		demostrar	comprobando
			construyendo
resolución de problemas (síntesis de las dos anteriores)			

Podemos identificar, relacionar, clasificar, describir y definir *globalmente* (según la forma) o *por partes* (según componentes o propiedades). Una clasificación *global*, por ejemplo, será aquella realizada según la apariencia general del objeto geométrico; no se tratará, por tanto, de una *clasificacióón lóógica* en sentido estricto. La clasificación por partes, en cambio, hace referencia a la clasificación genuina mediante los operadores lógicos habituales, como inclusión, pertenencia múltiple, etc. Entendemos que es necesario secuenciar este concepto, aún a costa de rebajarlo de su significado matemático riguroso, para poder establecer una jerarquía en cuanto a su grado de adquisición. Operaremos de la misma forma con respecto al significado atribuido a otras nociones, por ejemplo: inducir, deducir, demostrar, definir (una definición no minimal no puede en sentido estricto ser considerada como tal, aunque podrá darse por buena, e incluso su adquisición constituir un objetivo en sí mismo, para determinados niveles de razonamiento matemático) etc. Esta doble secuenciación en el significado y adquisición de determinados conceptos geométricos está plenamente justificada dentro del modelo Van Hiele, y responde a la necesidad de adecuar el vocabulario y la terminología especifica al nivel de razonamiento del alumno, de tal forma que éste entienda.

Por otra parte, es posible dibujar un objeto bien *reproduciéèndolo* (por ejemplo: coloreando, calcando, proyectando o copiando, a mano alzada o con regla y compás, un modelo), o bien *creáándolo* a partir, por ejemplo, de una definición verbal o escrita.

El razonamiento inductivo se manifiesta *generalizando* en base a la experimentación (por ejemplo, de un objeto o de un número pequeño de objetos a una clase, o de un caso particular a una ley), o mediante un procedimiento formal analítico.

Análogamente, el razonamiento deductivo y las demostraciones pueden trabajarse desde una doble dimensión: bien *comprobando* en un número finito de casos, usando mediciones directas o indirectas, o bien *construyendo* uno mismo analíticamente la prueba. Un ejemplo de “demostración por comprobación” mediante medidas indirectas para probar que los ángulos internos de un triángulo forman un ángulo llano, consiste en dibujar un triángulo cualquiera en una cartulina, recortar sus ángulos con unas tijeras y colocarlos sobre una línea recta.

* * * *

Un reanálisis de las características de los niveles de Van Hiele desde la perspectiva de los objetivos geométricos creemos que ayudaría a corregir las carencias señaladas en el apartado 3, además de poder servir como punto de partida, *mutatis mutandis* mediante la debida adaptación de los objetivos, para la generalización del modelo Van Hiele hacia otros contenidos o etapas educativas que hasta ahora no han recibido suficiente atención desde esta perspectiva.

REFERENCIAS

Alfonso, M.C.; Camacho, M.; Socas, M.M. (2000). “Dos ejemplos de unidades de aprendizaje desarrollados bajo la perspectiva de los V.H.: medidas de ángulos y giros”. En Alfonso, M.C.; Camacho, M; Socas, M.M. (Ed.), *Formacióón del profesorado e investigacióón en educacióón matemáática II*, 11-50. Universidad de La Laguna. Tenerife.

Arrieta, M. (2003). “Capacidad espacial y educación matemática*”. Educacióón Matemáática* 15(3), 57-76. Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986). “Characterizing the VH levels of development in Geometry”. *Journal for Research in Mathematics Education* 7(1), 31-48.

Davey, G.; Holliday, J. (1992). Van Hiele: Guidelines for Geometry. *The Australian Mathematics Teacher* 48(2), 26-29.

Guillén, G. (1997). *El modelo de VH aplicado a la geometríia de los sóólidos. Observacióón de procesos de aprendizaje*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Fortuny, J.M. (1991). "An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the VH levels". *Journal for Research in Mathematics Education* 22(3), 237-251.

Hershkowitz, R. (1990). "Psychological Aspects of Learning Geometry". En Nesher, P.; Kilpatrick, J. (Ed.), *Mathematics and Cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 70-148. Cambridge UP. Cambridge.

Hoffer, A. (1983). "Van Hiele Based Research". In Lesh, R.; Landau, M. (Ed.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. 205.-227. Academic Press. Florida.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990). "Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el Modelo Van Hiele". En Llinares, S.; Sánchez, M.V. (Ed.), *Teoríia y prááctica en Educacióón Primaria*. 295-384. Alfar. Sevilla.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1996*). El Grupo de las Isometríías del Plano.* Síntesis. Madrid.

Pegg, J.; Davey, G. (1991). *Levels of geometric understanding*. 47(2), 10-13.

Piaget, J.; Inhelder, B.; Szeminska, A. (1960). *The child´´s conception of geometry*. Routledge y Kegan Paul. London

Piaget, J.; Inhelder, B. (1967). *The child´´s conception of space*. Norton. New York.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight*. Academic Press. London.

Vinner, S; Hershkowitz, R. (1983). "On concept formation in geometry". *Zentralblatt füür Didaktik der Mathematik* 83(1), 20-25.