UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

TESIS DOCTORAL

Teoremas Banach–Stone en espacios métricos

Javier Cabello Sánchez

Departamento de Matemáticas

2014

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

TESIS DOCTORAL

Teoremas Banach–Stone en espacios métricos

Javier Cabello Sánchez

Departamento de Matemáticas

Conformidad del Director:

Fdo: Félix Cabello Sánchez.

2014

A mi madre, Ana María.
A mi novia, Montse.

Agradecimientos

Quiero agradecer el apoyo de tantas personas que resulta complicado pensar que no se me vaya a quedar nadie atrás. Debo empezar disculpándome con aquéllos que saben que están aquí aunque su nombre no esté.

El primero de la lista debe ser mi hermano Félix, quien tiene la mayor parte de culpa en todo lo que tiene que ver con que este trabajo sea medianamente decente. Él fue quien me propuso intentar resolver algunos problemas allá por el año 2007, y gracias a esto fuimos avanzando hasta lo que hoy tenemos aquí.

Debo agradecer un montón de cosas a muchos compañeros de carrera y a muchos amigos. Desde mi hermano Alberto y Antonio Barradas, quienes intentaron que estudiara cualquier cosa salvo esto, hasta Lucio, Antonio, Bertó o David, quienes me hicieron muy agradable el camino. Me dejo a muchas personas sin nombrar, pero no caben en este estrecho margen.

Por llevar un cierto orden, aunque no sea lo mío, es de justicia acordarme de Curro Arranz y Patricia Arjona, que fueron los primeros que confiaron en mí después de acabar la carrera.

Muchísimas gracias a Jesús, Richard, Yolanda y Jesús. Es estupendo esto de tener un grupo de investigación en el que todo el mundo está siempre dispuesto a echar una mano, sobre todo si uno es tan desastre como soy yo.

A mis compañeros de asignaturas: empezando por Batildo y Juan en el curso 2007–2008 y acabando (de momento) con Marga y José Antonio (aparte de Jesús) en este curso. Gracias a todos los que, a lo largo de estos años, me habéis hecho la vida más sencilla a base de consejos y de compartir vuestras experiencias conmigo.

Al grupillo con el que me quedo a comer en Ciencias: con vosotros es más fácil que uno se quede a trabajar desde por la mañana hasta las 8 de la tarde. Gracias a Adrián, Pedro, José Antonio y Santiago por ser como son.

Índice general

Introducción

Aunque el título de esta Tesis contiene las palabras BANACH-STONE por motivos publicitarios, lo que el lector encontrará en ella son:

(a) Teoremas de representación de isomorfismos de orden entre subespacios de funciones continuas en espacios métricos.

(b) Un estudio de las biyecciones que conservan el producto en espacios de funciones.

La mayoría de los resultados que explicaremos se han ido publicando en los trabajos [6], [7], [8], [9] y [10], que figuran como apéndices de la Memoria. Hemos optado por organizar el material aquí poniendo de manifiesto que las ideas y métodos son esencialmente los mismos en todos los casos, pero con algunas modificaciones a la hora de tratar con los distintos tipos de espacios, de funciones y de isomorfismos entre los espacios de funciones. Además, comprobaremos cómo algunos de los teoremas clásicos se pueden demostrar de una manera sencilla utilizando las mismas herramientas que en los resultados nuevos.

Como regla general consideraremos funciones con valores reales, con el orden inducido por el de $\mathbb{R}$. Dado un espacio topológico X denotaremos el espacio de funciones (reales) continuas sobre X mediante $C(X)$. Si X es un espacio métrico (uniforme), el espacio de funciones uniformemente continuas sobre X se denotará $U(X)$ y pondremos $\mathrm{Lip}(X)$ para las funciones de Lipschitz. Si X es una variedad diferenciable $C^k(X)$ será el espacio de funciones de clase k sobre X, donde k puede ser un número natural o infinito. Para cualquier duda que pueda surgir sobre la notación remitimos al lector al final de esta introducción.

0.1. Isomorfismos de orden

Con estas notaciones, todos los resultados del tipo (a) contenidos en la Memoria encajan en el siguiente esquema, donde L puede ser C, U, Lip o sus versiones acotadas C^*, U^*, Lip^* (en cuyo caso X e Y representan sendos espacios métricos completos) o C^k (en cuyo caso X e Y serán variedades diferenciables):

Enunciado Típico. Todo isomorfismo de orden $T : L(Y) \to L(X)$ es de la forma

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x)) \qquad (x \in X),$$

donde $\tau : X \to Y$ es un homeomorfismo (con alguna propiedad extra) y $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dado por $t(x, c) = (Tc)(x)$.

Ni que decir tiene que parte del interés radica en la "propiedad extra" que aparece en el enunciado. Aquí un "isomorfismo de orden" es una biyección que conserva el orden en las dos direcciones, esto es, $Tf \leq Tg$ si y sólo si $f \leq g$. Si se requiere alguna propiedad adicional de T, por ejemplo que sea aditiva, lineal o que conserve el producto, se mencionará expresamente.

En este orden de cosas, el resultado más llamativo que contiene la Memoria es:

Teorema A. *Todo isomorfismo de orden $T : U(Y) \to U(X)$ es de la forma*

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x)) \qquad (x \in X),$$

donde $\tau : X \to Y$ es un homeomorfismo uniforme y $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dado por $t(x, c) = (Tc)(x)$.

Es tan natural que puede sorprender que sea "nuevo", pero lo es incluso en el contexto lineal. Para funciones de Lipschitz demostraremos lo siguiente:

Teorema B. *Sean Y y X espacios métricos completos de diámetro finito. Todo isomorfismo de orden $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ es de la forma*

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x)) \qquad (x \in X),$$

donde $\tau : X \to Y$ es un homeomorfismo de Lipschitz y t es como de costumbre.

Sin entrar en detalles, el método de prueba de estos resultados es el siguiente. Dada una función continua positiva $f : X \to \mathbb{R}$ denotamos mediante U_f el interior del soporte de f, donde sop $f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

Partiendo de un isomorfismo de orden $T : L(Y) \to L(X)$, que podemos suponer conserva el cero, y llamando provisionalmente $RL(X)$ a la familia de conjuntos abiertos de X que pueden obtenerse como U_f para f variando en $L(X)^+$, veremos que T da lugar a un isomorfismo de orden $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ definido mediante $\mathfrak{T}(U_f) = U_{Tf}$. Este isomorfismo permite "localizar" la acción de T en el sentido de que dadas funciones $f, g \in L(Y)$ y $U \in RL(Y)$ se tiene que f coindice con g en U si y sólo si Tf coincide con Tg en $\mathfrak{T}(U)$.

Por supuesto uno deberá demostrar que la fórmula anterior tiene sentido.

A continuación usamos $\mathfrak{T}$ para hacer aflorar la aplicación "puntual" τ que aparece en el enunciado "tipo". El caso es que cualquier isomorfismo de orden $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ está asociado a un homeomorfismo $\tau : X_0 \to Y_0$, donde X_0 e Y_0 son subconjuntos densos de X e Y, respectivamente.

Una vez establecido esto será fácil ver que, dadas $f, g \in L(Y)$ y un punto $y \in Y_0$ se tiene $f(y) = g(y)$ si y sólo si $(Tf)(x) = (Tg)(x)$, donde $y = \tau(x)$, de donde se sigue que

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))) \qquad (x \in X_0).$$

El resto de la demostración depende de los conjuntos de funciones que se estén considerando y utiliza argumentos *ad hoc*.

Las mismas ideas pueden adaptarse para trabajar con funciones diferenciables (o continuas). La diferencia más importante es que, mientras que la continuidad uniforme (o la condición de Lipschitz) es un requisito global, la continuidad y diferenciabilidad son propiedades locales. Esto unas veces simplifica las cosas y otras las complica. Para funciones diferenciables, que no forman un retículo, sólo hemos conseguido demostrar lo siguiente:

Teorema C. *Todo isomorfismo de orden $T : C^k(Y) \to C^k(X)$ es de la forma*

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x)) \qquad (x \in X),$$

donde $\tau : X \to Y$ es un homeomorfismo.

Si bien no hemos conseguido probar que en este caso la aplicación τ sea un difeomorfismo, como uno esperaría, este resultado todavía es útil cuando se le impone alguna condición adicional a la biyección T, por ejemplo que sea aditiva o multiplicativa – vease la Sección que sigue.

0.2. Biyecciones que conservan productos

Como ya hemos mencionado, en esta Memoria se estudian, junto con los isomorfismos de orden, isomorfismos multiplicativos: aplicaciones biyectivas $T : L(Y) \to L(X)$ que satisfacen $T(fg) = (Tf)(Tg)$ siempre que fg esté en $L(Y)$. El lector observará que los espacios de funciones con los que estamos tratando unas veces son álgebras ($C, C^k, U^*, \mathrm{Lip}^*$ por ejemplo lo son) y otras veces no tienen por qué serlo (U, Lip no siempre lo son) y por lo tanto no cabe hablar de semigrupos multiplicativos en general.

En esta línea nuestros resultados más afinados garantizan que, en ciertas situaciones, estos isomorfismos multiplicativos consisten en componer con un homeomorfismo (por supuesto, este homeomorfismo tiene alguna propiedad extra):

Teorema D. Sean X e Y variedades diferenciables de dimensión finita. Todo isomorfismo multiplicativo $T : C^k(Y) \to C^k(X)$ es de la forma $Tf(x) = f(\tau(x))$, donde $\tau : X \to Y$ es un difeomorfismo de clase k.

Teorema E. Sean Y y X espacios métricos completos sin puntos aislados. Todo isomorfismo multiplicativo $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ es de la forma $Tf(x) = f(\tau(x))$, donde $\tau : X \to Y$ es un homeomorfismo de Lipschitz.

0.3. Resultados "Banach–Stone"

Como muchas cosas en la vida, lo que se entiende por un resultado de tipo "Banach–Stone" es una cuestión de perspectiva. En cualquier caso, la mayoría de éstos son teoremas de representación de isomorfismos que utilizan un funtor adjunto a uno dado. Para ilustrar esto con un ejemplo concreto, considérese el genuino teorema de Banach–Stone.

Teorema. Sean Y y X espacios compactos. Si los espacios de Banach $C(Y)$ y $C(X)$ dotados de la norma del supremo son linealmente isométricos, entonces Y y X son homeomorfos. Más precisamente, toda isometría $T : C(Y) \to C(X)$ es de forma $Tf(x) = u(x)f(\tau(x))$, donde $\tau : X \to Y$ es un homeomorfismo y $u \in C(X)$ es de módulo 1.

El lector se preguntará, con razón, dónde aparece aquí un funtor adjunto. La respuesta está en la demostración "standard" del teorema, que discurre así. Los puntos extremos de la bola unidad del espacio dual de $C(X)$ son todos de la forma $\pm\delta_x$, donde δ_x es "evaluar en x". Si identificamos cada punto extremo con su opuesto y ponemos la topología cociente que corresponde a la topología pre-débil en $C(X)'$ se obtiene un espacio topológico homeomorfo al compacto base X. Este proceso da lugar a un funtor que es adjunto al funtor $K \to C(K)$ que asocia a cada compacto el espacio de Banach de sus funciones continuas, con la norma del máximo.

En este sentido la mayoría de las demostraciones que contiene la memoria son un poco insatisfactorias porque no permiten recuperar el espacio base, como sería deseable, sino sólamente representar los isomorfismos.

0.4. Organización de la Memoria

El trabajo, aparte de esta introducción general, se compone de tres capítulos. En el primer capítulo, desarrollamos y exponemos los resultados referentes a isomorfismos de conjuntos ordenados. El capítulo 2 está dedicado a los isomorfismos multiplicativos. Por último, en el tercer capítulo exponemos algunos ejemplos y problemas abiertos relacionados con los resultados obtenidos en los dos anteriores.

0.5. Requisitos

El trabajo es autocontenido y, hasta cierto punto, elemental. De hecho, algunas de las partes que nos habían resultado más difíciles de demostrar en los artículos originales se presentan ahora con demostraciones notablemente más simples. Como referencias generales nos remitiremos a [4] para estructuras de orden, a [45] para topología general y a [41], [42] y [43] para funciones de Lipschitz.

0.6. Definiciones y resultados básicos

Debemos recordar lo que entendemos por cada uno de los tipos de funciones con los que trabajaremos:

Definición 0.1. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Una función $f : (X,d) \to (Y,d')$ es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x,x') < \delta$ implica $d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Diremos que $f : (X,d) \to (Y,d')$ es de Lipschitz si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{d'(f(x),f(x'))}{d(x,x')} \leq L$ para todos $x, x' \in X$. Llamaremos a cualquiera de los números reales que cumplan esto *constantes de Lipschitz* de f. Si decimos que L es *la* constante de Lipschitz de f, nos estaremos refiriendo a que es la menor de estas constantes.

Definición 0.2. Una función $f : E \to F$ entre espacios de Banach es diferenciable (en el sentido de Frêchet) en $x \in E$ si existe un funcional lineal y continuo $A_x : E \to F$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - A_x(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Como es habitual, diremos que es diferenciable en E si lo es en todo $x \in E$. Dado un abierto $U \subset E$, diremos que es *de clase 1* en U si la aplicación $Df : x \in U \mapsto A_x \in L(E,F)$ es continua, en cuyo caso escribiremos $f \in C^1(U,F)$.

Inductivamente, la derivada k-ésima de f se define como $D(D^{k-1}f)$ y se dice que f es de clase k si $D^p f$ existe y es continua para todo $1 \leq p \leq k$. Si es de clase k para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces escribiremos $f \in C^\infty(E, F)$.

Comentario 0.3. Normalmente, dado un espacio métrico X y un subconjunto suyo A, se dice que A es un subconjunto uniformemente aislado si existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(x, x') \geq \varepsilon$ para todos $x, x' \in A$. Sin embargo, los conjuntos de este tipo no son relevantes en este trabajo, y cuando hablemos de que $A \subset X$ es uniformemente aislado nos estaremos refiriendo a que existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(x, x') \geq \varepsilon$ para todos $x \in A,\ x' \in X$. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ es un subconjunto uniformemente aislado de $\mathbb{R}$ según la definición habitual, pero no según la nuestra. Sí lo es, en cualquier caso, como subconjunto de sí mismo.

Comentario 0.4. Cada vez que hablemos de un espacio topológico, supondremos que cumple el primer axioma de numerabilidad y que es completamente regular. Recordemos que X cumple el primer axioma de numerabilidad si todo punto tiene una base numerable de entornos; y que es completamente regular cuando, dados un punto $x \in X$ y un cerrado $F \subset X$ que no contiene a x, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$, para todo $y \in F$. Si X es completamente regular, entonces la función f de la definición se puede suponer acotada y, de hecho, podemos suponer que $0 \leq f \leq 1$.

Definición 0.5. Cuando hablemos de una *variedad diferenciable de clase* k, nos estaremos refiriendo a una pareja $(X, \mathcal{O}_X)$, donde X es un espacio topológico Hausdorff y $\mathcal{O}_X$ es un haz de $\mathbb{R}-$álgebras definido sobre X, de modo que el espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente isomorfo a $(E, \mathcal{O})$, con E; un espacio de Banach no necesariamente de dimensión finita y $\mathcal{O}(U) = C^k(U, E)$. No pediremos que la variedad diferenciable tenga base numerable, algo que es habitual cuando se trata con estas variedades. Siempre consideraremos que en este espacio de Banach existe alguna función de clase k (sobre $\mathbb{R}$) no negativa y no nula de soporte acotado y conexo. Esto, que es automático en dimensión finita, no se cumple en general en dimensión infinita.

Definición 0.6. Dados un conjunto ordenado $\mathcal{C}$ y un subconjunto suyo $\mathcal{A}$, llamamos (en caso de que exista) *ínfimo* de $\mathcal{A}$ al único elemento $\inf \mathcal{A} = \bigwedge \mathcal{A}$ tal que $\bigwedge \mathcal{A} \leq c$ para todo $c \in \mathcal{A}$ y que es mayor o igual que todos los elementos de $\mathcal{C}$ que cumplen lo anterior. En el caso de que, además, $\bigwedge \mathcal{A}$ sea un elemento de $\mathcal{A}$, lo llamaremos *mínimo* de $\mathcal{A}$, y lo denotaremos en ocasiones como $\min \mathcal{A}$.

De manera dual (cambiando "mayor" por "menor" y viceversa) se definen los conceptos de supremo ($\sup \mathcal{A} = \bigvee \mathcal{A}$) y máximo ($\max \mathcal{A}$) de un subconjunto.

Definición 0.7. Diremos que un conjunto ordenado $\mathcal{C}$ es un *retículo* si, para cada pareja de elementos a, b de $\mathcal{C}$ existen tanto el supremo como el ínfimo de $\{a, b\}$ en $\mathcal{C}$.

Cada vez que tengamos un retículo $\mathcal{C}$, y dos elementos suyos $a, b \in \mathcal{C}$; $a \wedge b$ denotará su ínfimo, $a \vee b$ su supremo.

Utilizaremos, en todo lo que sigue, una notación tan uniforme como sea posible, de manera que denotaremos nuestros espacios (del tipo que sean) normalmente como X e Y. El conjunto de las funciones continuas con valores reales definidas sobre X se denotará como $C(X)$; su subconjunto de funciones acotadas como $C^*(X)$; las funciones continuas con valores en el intervalo $[0,1](=\mathbb{I})$ las denotaremos como $C(X, \mathbb{I})$ y de manera similar con las funciones uniformemente continuas $(U(X),\ U^*(X),\ U(X, \mathbb{I}))$, de Lipschitz $(\mathrm{Lip}(X),\ \mathrm{Lip}^*(X),\ \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I}))$ y diferenciables de clase k $(C^k(X))$.

Dotaremos a todos estos conjuntos del orden habitual: dadas $f, g \in L_X$; escribiremos $f \leq g$ cuando $f(x) \leq g(x), \forall\, x \in X$. Denotaremos tanto $L^+(X)$ como $L_+(X)$ al conjunto de las funciones no negativas de $L(X)$ y, en general, será $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_+ = \{\alpha \in \mathcal{C} : \alpha \geq 0\}$, cada vez que tengamos un conjunto ordenado $\mathcal{C}$ que contenga a 0.

Definición 0.8. Dados dos conjuntos ordenados $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, diremos que una aplicación $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un isomorfismo de orden siempre que sea biyectiva y cumpla que $a \leq b$ si y sólo si $Ta \leq Tb$ para todos $a, b \in \mathcal{C}$. En este caso, también diremos que T es isomorfismo de conjuntos ordenados y, si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son retículos, que es isomorfismo de retículos.

Definición 0.9. Dada $f \in L^+(X)$, llamaremos soporte de f a la clausura de $\{x \in X : f(x) > 0\}$ y lo denotaremos como sop f. Denotaremos como U_f al interior del soporte de f.

Definición 0.10. Diremos que un abierto es *regular* si coincide con el interior de su clausura. Equivalentemente, si es el interior de un cerrado. Por definición, todo U_f es un abierto regular. Denotaremos como $R(X)$ al conjunto de abiertos regulares de X y lo consideraremos como conjunto ordenado con el orden dado por la inclusión.

0.11. En alguna ocasión hablaremos de que un conjunto es un entorno regular de un punto. Con esto nos estaremos refiriendo a un abierto regular que es entorno del punto.

Además, aquí tenemos algunos resultados básicos que utilizaremos a lo largo de nuestra exposición, a menudo sin hacer mención explícita de ellos:

Lema 0.12. *Sean X un espacio topológico (completamente regular) y X_0 un subconjunto denso. Entonces la aplicación $\mathfrak{T} : R(X) \to R(X_0), U \mapsto U \cap X_0$ es un isomorfismo de orden y su inverso envía cada abierto regular de X_0 al interior (en X) de su clausura (en X).*

Lema 0.13. *Sean X un espacio topológico (completamente regular), $K \subset X$ un compacto, $F \subset X$ un cerrado que no corta con K y $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua. Existe $\tilde{f} \in C(X)$ que extiende a f y que se anula en F.*

Lema 0.14 (McShane)**.** *Sea X un espacio métrico, $A \subset X$. Toda función de Lipschitz $f : A \to \mathbb{R}$ se extiende a todo X. Además, se puede conseguir que la extensión tenga la misma constante de Lipschitz que f y que, si f es acotada, su extensión tenga los mismos supremo e ínfimo.*

Lema 0.15 (McShane)**.** *Sea X un espacio métrico, sea $A \subset X$. Toda función uniformemente continua y acotada $f : A \to \mathbb{R}$ se extiende a todo X. Además, se puede conseguir que su extensión tenga los mismos supremo e ínfimo.*

Recordemos que una suma de funciones $\sum_\alpha f_\alpha$ es *localmente finita* si todo punto tiene un entorno en el que se anulan todas las f_α salvo finitas.

Lema 0.16. *Una función es continua (resp. diferenciable) si y sólo si lo es localmente. Como consecuencia, toda suma localmente finita de funciones continuas (diferenciables) es continua (diferenciable).*

Lema 0.17. *Sea E un espacio de Banach, U, V abiertos de E, ambos conexos y acotados. Entonces existen $\{V_\alpha\}$, afines a V y disjuntos dos a dos tales que*

$$\overline{U} = \overline{\bigcup_\alpha V_\alpha}.$$

Diremos que un subconjunto de un espacio topológico es *denso en ningún sitio* si su clausura tiene interior vacío.

Teorema 0.18 (Lema de la categoría de Baire)**.** *Ningún espacio métrico completo es unión numerable de subconjuntos densos en ningún sitio.*

Teorema 0.19 (Cantor)**.** *Un espacio métrico X es completo si y sólo si para toda sucesión decreciente de conjuntos $A_n \subset X$ no vacíos y cerrados cuyos diámetros tienden a 0, la intersección de los A_n está formada por un solo punto.*

Capítulo 1

Isomorfismos de orden

En este capítulo mostraremos una amplia variedad de resultados en los que representamos isomorfismos de orden entre espacios de funciones. Los resultados más destacables son aquéllos en los que los espacios subyacentes son espacios métricos completos. Por tanto, nuestra exposición se centrará en los isomorfismos del tipo $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ y los del tipo $T : U(Y) \to U(X)$. Para concretar, uno de estos resultados es el siguiente:

Si X e Y son espacios métricos completos y $T : U(Y) \to U(X)$ es un isomorfismo de orden, entonces existen una función continua $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(x, c) = Tc(x)$ y un homeomorfismo uniforme $\tau : X \to Y$ tales que

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))).$$

Hay cuatro etapas claramente diferenciadas en las demostraciones de estos resultados, y las hemos separado de manera que cada sección contenga una de estas etapas:

- En la primera sección, siguiendo en parte los pasos de T. Shirota, conseguimos llegar a una base de la topología de los espacios partiendo de la estructura de orden de los espacios de funciones. Así, obtenemos una biyección que mantiene el orden dado por la inclusión entre los retículos de abiertos regulares $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$. Además, este isomorfismo $\mathfrak{T}$ es tal que f y g coinciden en U exactamente cuando Tf y Tg coinciden en $\mathfrak{T}(U)$.

- En la segunda sección utilizamos las bases de abiertos regulares obtenidas en la primera para llegar a un homeomorfismo $\tau : X_0 \to Y_0$ entre subespacios densos de X e Y.

- La tercera sección está dedicada al estudio del comportamiento puntual de los isomorfismos en los puntos de X_0 e Y_0: vemos que se cumple que $Tf(x) \geq Tg(x)$ es equivalente a $f(\tau(x)) \geq g(\tau(x))$ para todos $x \in X_0, f, g \in L(Y)$ y, por tanto,

  $$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))),$$

  para todos $x \in X_0,\ f \in L(Y)$, con $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t(x, c) = Tc(x)$.

- En la cuarta sección utilizaremos la representación puntual obtenida en la anterior para comprobar que τ es homeomorfismo uniforme cuando consideramos el retículo de las funciones uniformemente continuas; que es homeomorfismo entre X e Y cuando consideramos el retículo de las funciones de Lipschitz y que en este caso, y siempre que los espacios tengan diámetro finito, τ es homeomorfismo de Lipschitz.

En la quinta sección tratamos de los isomorfismos de los tipos entre espacios de funciones acotadas. Veremos que sólo hay que modificar ligeramente los razonamientos anteriores para obtener resultados análogos.

Los argumentos que damos para funciones sobre espacios métricos completos son aplicables, con algunas modificaciones, al resto de espacios. Aclararemos en las siguientes secciones cuáles son estas modificaciones y aplicaremos argumentos específicos para cada caso: en la sexta sección trabajamos con funciones diferenciables y en la séptima con funciones continuas.

Para terminar, expondremos ciertos resultados topológicos que no tenían cabida en la línea principal (sección 8) pero están relacionados con la sección 1.2 y los teoremas anteriores más relacionados con este trabajo (novena y última sección).

1.1. Del orden a los abiertos: el isomorfismo es local

1.1. Recordemos que las definiciones previas que son comunes a este capítulo y al siguiente se encuentran en la sección 0.6.

Definición 1.2. Dadas $f, g \in L^+(X)$, definimos el conjunto $f \cap g \subset L^+(X)$ como

$$f \cap g = \{h \in L^+(X) : h \leq f, h \leq g\}.$$

Lógicamente, $f \cap g = \{0\}$ es equivalente a $f \wedge g = 0$.

Definición 1.3. Dadas $f, g \in L^+(X)$, escribiremos $f \subset g$ cuando para toda $h \in L^+(X)$ tal que $g \cap h = \{0\}$ se tenga $f \cap h = \{0\}$. Esto nos permite definir una relación de equivalencia (véase) $\sim$ en $L^+(X)$ de la siguiente manera: $f \sim g \Leftrightarrow f \subset g, g \subset f$.

Comentario 1.4. Trabajaremos sólo con isomorfismos que cumplan $T0 = 0$. Podemos hacer esto porque todo lo que vamos a probar sobre los espacios con los que tratemos será igual de cierto para un isomorfismo $T : L(Y) \to L(X)$ arbitrario y para el isomorfismo $\tilde{T}$ definido como la composición de T con el automorfismo T_0 de $L(X)$ consistente en restar $T0$ a todas las funciones, de manera que $\tilde{T}0 = 0$. Como $T0 = 0$ implica $T(L^+(Y)) = L^+(X)$, lo dicho anteriormente nos da la opción de trabajar exclusivamente con funciones no negativas.

Lema 1.5. *Dadas $f, g \in L^+(X)$, se tiene:*

1. $f \cap g = \{0\}$ *si y sólo si* $U_f \cap U_g = \emptyset$.
2. $f \subset g$ *si y sólo si* $U_f \subset U_g$, *por lo que* $f \sim g$ *es equivalente a* $U_f = U_g$.

Demostración. Veamos lo primero:

Sean f y g tales que $U_f \cap U_g = \emptyset$. Entonces

$$\{x \in X : f(x) > 0\} \cap \{x \in X : g(x) > 0\} = \emptyset,$$

lo que significa que en todo punto $x \in X$ se anula o bien f o bien g. Por tanto, $f \cap g = \{0\}$.

Si, por el contrario, $U_f \cap U_g \neq \emptyset$, entonces

$$\{x \in X : f(x) > 0\} \cap \{x \in X : g(x) > 0\} \neq \emptyset,$$

ya que $\{x \in X : f(x) > 0\}$ es un abierto denso en U_f (y análogamente con g). Por tanto, existe $x \in X$ tal que $f(x) > 0, g(x) > 0$, así que no es cierto que $f \cap g = \{0\}$.

Lo segundo se sigue inmediatamente a partir de lo anterior. □

Definición 1.6. Sean X un espacio de los que estamos manejando, $L(X)$ uno de los espacios de funciones. Denotaremos como $RL(X)$ al conjunto de abiertos regulares de X que se pueden obtener como U_f para alguna $f \in L^+(X)$. Esto es: $RL(X) = \{U_f : f \in L^+(X)\}$.

Teniendo en cuenta que cada abierto regular es el interior del soporte de una función de Lipschitz ($U = U_f$, donde $f(x) = \text{dist }(U^c, x)$, por ejemplo), es claro que $R\text{Lip}(X) = RU(X) = R(X)$. Sin embargo, para C y C^k no sabemos si esto es cierto: sólo podemos asegurar que tanto $RC^k(X)$ como $RC(X)$ son bases de la topología de X. En cualquier caso, tenemos:

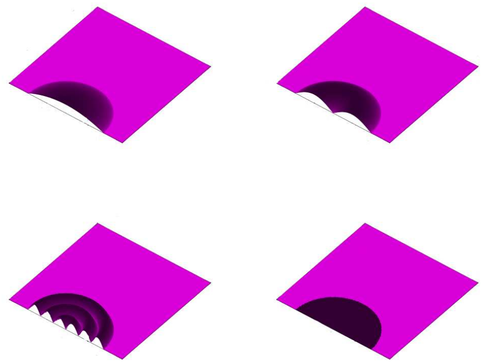

Figura 1.1: El isomorfismo de retículos $[f] \in (L^+(X)/\sim) \mapsto U_f \in R(X)$: las tres funciones son equivalentes entre sí y el abierto de abajo a la derecha es U_f.

Lema 1.7. *La aplicación que envía cada $U_f \in RL(Y)$ a $U_{Tf} \in RL(X)$ es isomorfismo de orden.*

Demostración. Esta aplicación es la composición de tres isomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccc} RL(Y) & \to & L^+(Y)/\sim & \to & L^+(X)/\sim & \to & RL(X) \\ U_f & \mapsto & [f] & \mapsto & [Tf] & \mapsto & U_{Tf} \end{array}$$

La primera y la tercera aplicaciones están bien definidas y son isomorfismos por el lema anterior, mientras que la segunda lo es porque la relación $f \subset g$ está definida a partir del orden de $L(Y)$, así que $f \subset g$ debe ser equivalente a $Tf \subset Tg$. □

Corolario 1.8. *Para todo isomorfismo $T : L(Y) \to L(X)$, la aplicación $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ dada por*

$$\mathfrak{T}(U) = \bigcup U_{Th},$$

donde la unión recorre todas las $h \in L^+(Y)$ tales que $U_h \subset U$, es un isomorfismo.

Lema 1.9. *Dadas tres funciones $f, g, h \in L^+(X)$, se tiene que $f \leq g$ en U_h si y sólo si $f \cap u \subset g \cap u$, para toda $u \subset h$.*

Demostración. Es evidente. □

Por tanto, ya que la relación $f \subset g$ y el subconjunto $f \cap g$ están definidos en función del orden de las funciones, tenemos:

Corolario 1.10. *$f \le g$ en U_h si y sólo si $Tf \le Tg$ en U_{Th}. Esto sigue siendo cierto si cambiamos "$\le$" por "$=$" o por "$\ge$".*

Comentario 1.11. Por tanto, estos isomorfismos entre los retículos de abiertos regulares tienen una propiedad que hace que su manejo sea mucho más sencillo: $\mathfrak{T}(U)$ es el interior del cerrado en el que coinciden Tf y Tg si f y g coinciden en U. Así, podemos decir que nuestro isomorfismo $T : L(Y) \to L(X)$ tiene carácter local ya que T induce un isomorfismo de orden entre las restricciones:

$$\{g_{|\mathfrak{T}(U)} : g \in L(X)\} = \{Tf_{|\mathfrak{T}(U)} : f \in L(Y)\} \simeq \{f_{|U} : f \in L(Y)\} \ \forall\, U \in R(Y).$$

1.2. De los abiertos a los puntos

En las próximas tres secciones, sólo trabajaremos con los retículos de funciones uniformemente continuas y de Lipschitz sobre espacios métricos completos.

Dado un isomorfismo de orden $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$, para cada $y \in Y$, consideremos el siguiente subconjunto de X: $\mathcal{R}(y) = \bigcap \mathfrak{T}(U)$, donde U son los abiertos regulares que contienen a y. Ahora, definimos $Y_0 \subset Y$ como el conjunto de puntos para los que $\mathcal{R}(y)$ está formado por un único punto: $Y_0 = \{y \in Y : \#(\mathcal{R}(y)) = 1\}$. Si definimos análogamente $\mathcal{S}(x) = \bigcap \mathfrak{T}^{-1}(V)$, $X_0 = \{x \in X : \#(\mathcal{S}(x)) = 1\}$, tenemos este lema que es fundamental para todo el trabajo posterior:

Lema 1.12. *Sean X e Y dos espacios métricos completos tales que sus retículos de abiertos regulares son isomorfos. Los subconjuntos $X_0 \subseteq X$ e $Y_0 \subseteq Y$ definidos anteriormente son densos y homeomorfos entre sí. En particular, X_0 (respectivamente, Y_0) contiene a todos los puntos aislados de X (respectivamente, de Y).*

Demostración. Este subconjunto X_0 será denso en X si y sólo si corta con todo abierto no vacío, y esto será lo que comprobemos. Sea $W \subset X$ un abierto no vacío. Sea U_1 un abierto regular tal que $\overline{U_1} \subset W$ y de diámetro menor o igual que 1, y consideremos $x_1 \in U_1$. Sean $V_1 \subset \mathfrak{T}^{-1}(U_1)$, también de diámetro no superior a 1, $y_1 \in V_1$. Ahora, $x_2 \in U_2 \subset \overline{U_2} \subset \mathfrak{T}(V_1)$ de modo que, además, el diámetro de U_2 sea menor o igual que $\frac{1}{2}$. Tomamos $y_2 \in V_2 \subset \overline{V_2} \subset \mathfrak{T}^{-1}(U_2)$ con el diámetro de V_2 también menor o igual que $\frac{1}{2}$. Si continuamos estas sucesiones de abiertos regulares de diámetros menores que $\frac{1}{n}$ y de puntos en ellos, es evidente que debe existir un par de puntos

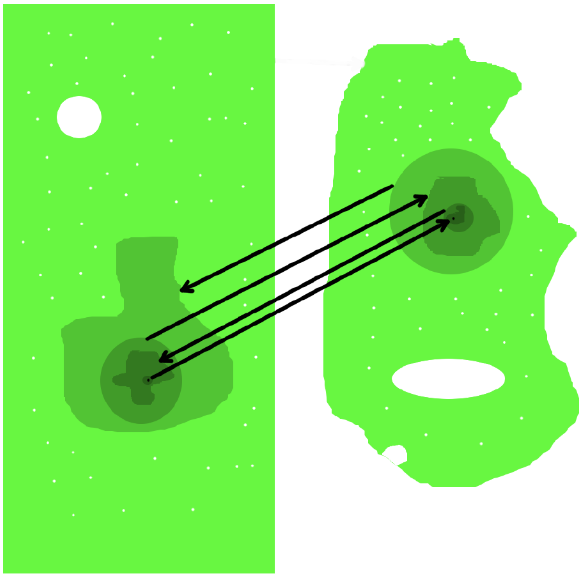

Figura 1.2: Vamos encajando abiertos cada vez más pequeños en los anteriores y en la intersección sólo queda un punto.

$x \in \overline{U_1} \subset W$ e $y \in Y$ tales que $x_n \to x, y_n \to y$, ya que ambos espacios son completos y $\max\{d(x_n, x_m), d(y_n, y_m)\} \leq \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}$. Las condiciones que les hemos impuesto a los U_n implican que forman una base de entornos de x, y los V_n forman una base de entornos de y. Así, es claro que

$$y \in \bigcap_{x \in U} \mathfrak{T}^{-1}(U) \subseteq \bigcap_{n} \mathfrak{T}^{-1}(U_n) = \{y\}$$

Por tanto, $x \in X_0 \cap W$ y X_0 es denso en X, como queríamos. Que la aplicación τ que envía cada $x \in X_0$ al único $y \in \mathcal{S}(x)$ sea un homeomorfismo es consecuencia de que los abiertos que hemos ido tomando formen bases de entornos de ambos puntos. □

Comentario 1.13. En la sección 1.8 veremos que este resultado se puede mejorar. Concretamente, probaremos que X_0 e Y_0 son subconjuntos G_δ de X e Y.

No va a ocurrir, en general, que estos isomorfismos de retículos cumplan que $\mathcal{R}(y)$ vaya a ser siempre un conjunto unitario o el vacío:

Ejemplo 1.14. *Sean* $X = [0,1] \cup [2,3], Y = [0,2]$. *Existe un isomorfismo* $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ *tal que* $\mathcal{R}(1) = \{1,2\}$.

Demostración. Sólo hay que observar que los retículos de abiertos regulares no distinguen las siguientes parejas de espacios topológicos:

- $[0,2]$ y $[0,1) \cup (1,2]$, porque el segundo es denso en el primero.
- $[0,1) \cup (1,2]$ y $[0,1) \cup (2,3]$, porque son homeomorfos.
- $[0,1) \cup (2,3]$ y $[0,1] \cup [2,3]$, porque el primero es denso en el segundo.

Sigamos la composición de los isomorfismos obvios: para cada abierto regular $U \in R([0,2])$, tenemos

$$U \mapsto U \cap ([0,1) \cup (1,2]) \mapsto (U \cap [0,1)) \cup ((U+1) \cap (2,3]) \mapsto$$
$$\mapsto \operatorname{int}\left[\operatorname{cl}\left[(U \cap [0,1)) \cup ((U+1) \cap (2,3])\right]\right].$$

Este último abierto es:

- $(U \cap [0,1)) \cup ((U+1) \cap (2,3])$ si $1 \notin \overline{U}$.
- $(U \cap [0,1)) \cup ((U+1) \cap (2,3]) \cup \{1\}$ si $1 \in \overline{U \cap [0,1]}, 1 \notin \overline{U \cap [1,2]}$
- $(U \cap [0,1)) \cup ((U+1) \cap (2,3]) \cup \{2\}$ si $1 \notin \overline{U \cap [0,1]}, 1 \in \overline{U \cap [1,2]}$
- $(U \cap [0,1)) \cup ((U+1) \cap (2,3]) \cup \{1,2\}$ si $1 \in \overline{U \cap [0,1]}, 1 \in \overline{U \cap [1,2]}$, esto es, si $1 \in U$.

□

Sin embargo, esto sí es cierto si $\mathfrak{T}$ proviene de un isomorfismo entre funciones:

Lema 1.15. *Sean $T : L(Y) \to L(X)$ un isomorfismo y $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ el isomorfismo asociado. Entonces, para cada $y \in Y$, el conjunto $\mathcal{R}(y)$ está formado como máximo por un punto.*

Demostración. Supongamos que existen $y_0 \in Y, x_0 \neq x_0' \in X$ tales que $x_0, x_0' \in \mathcal{R}(y_0)$. Escogemos una base $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de entornos regulares de y_0. Tenemos: todo $\mathfrak{T}(U_n)$ es abierto; tanto x_0 como x_0' pertenecen a todo $\mathfrak{T}(U_n)$ y X_0 es denso en X. Gracias a todo esto, podemos encontrar sucesiones $(x_n), (x_n') \subset X_0$ convergentes a x_0, x_0' y tales que $x_n, x_n' \in \mathfrak{T}(U_n)$ para todo n. Esto implica que tanto $y_n = \tau(x_n)$ como $y_n' = \tau(x_n')$ pertenecen a $U_n \cap Y_0$ para todo n, así que $(y_n) \to y_0$, $(y_n') \to y_0$. Consideremos $g = T(1) \in L(X)$. Independientemente del tipo de funciones con las que estemos tratando, podemos encontrar entornos regulares V, V' de x_0, x_0' de manera que la función que coincide con g en V' y se anula en V se puede extender a $h \in L(X)$. A partir de un cierto $\nu \in \mathbb{N}$, V es entorno de todo x_n y V' lo es de x_n', así que $\mathfrak{T}^{-1}(V)$ y $\mathfrak{T}^{-1}(V')$ lo son, respectivamente, de y_n y de y_n'. Así, $T^{-1}h(y_n) = 0$, $T^{-1}h(y_n') = 1$ para todo $n > \nu$. Como (y_n) e (y_n') convergen al mismo punto, llegamos a contradicción. □

1.3. Del comportamiento local al puntual

Con lo que tenemos hasta ahora, el objetivo inmediato es determinar el comportamiento puntual de nuestro isomorfismo $T : L(Y) \to L(X)$. Veremos que no sólo induce isomorfismos entre las restricciones a abiertos regulares, sino también al *restringir a los puntos*: obtendremos para cada punto de X_0 un automorfismo de $\mathbb{R}$. Lo que haremos será ver que si dos funciones $f, g \in L(X)$ coinciden en un punto $x \in X_0$, entonces existen abiertos regulares U, V y una función $h \in L(X)$ tales que $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$, $h = f \vee g$ sobre U y $h = f \wedge g$ sobre V. Una vez que tengamos esta función, y teniendo en cuenta el comportamiento local de T y el homeomorfismo $\tau : X_0 \to Y_0$, tendremos que $T^{-1}f, T^{-1}g$ y $T^{-1}h$ deben coincidir en $\tau(x)$.

Lema 1.16. *Sean $f, g \in L(X)$, $x \in X_0$. Si f y g coinciden en x, entonces existen una función $h \in L(X)$ y dos abiertos regulares U, V tales que $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$ y $h_{|U} = f_{|U}, h_{|V} = g_{|V}$.*

Demostración. Supongamos $f(x) = g(x)$. Podemos suponer $f \geq g$ y también $g = 0$. Si x es un punto aislado, entonces forma él solo un abierto regular, de manera que podemos tomar $U = V = \{x\}$ y $h = f$. Si no es aislado, podemos encontrar una sucesión (x_n) convergente a x tal que $\beta_n = d(x_{n+1}, x) < \frac{1}{4}d(x_n, x)$. Consideremos ahora la sucesión de bolas abiertas centradas en cada x_n de radio β_n, y $W_n = B(x_{2n}, \beta_{2n})$. Como f es continua, para cada x_{2n} existe δ_{2n} tal que f está acotada por $2f(x_{2n})$ en $W'_n = B(x_{2n}, \delta_{2n})$. Tomamos ahora $U_n = W_n \cap W'_n$, de manera que el radio de U_n es pequeño en relación con su distancia a x y además tenemos, en cada U_n, una cota superior para f de manera que la sucesión formada por estas cotas converge a 0. Consideramos ahora el abierto $U = \bigcup U_n$ y las funciones $h_0^n : X \to \mathbb{R}$ definidas como $2f(x_{2n})$ en cada U_n, y como

$$h_0^n(x) = 2f(x_{2n}) \cdot \left(\frac{\beta_{2n} - d(x, U_n)}{\beta_{2n}} \right) \vee 0$$

en $X \setminus U$, de manera que la máxima pendiente que puede tener cada una de estas funciones es $\frac{2f(x_{2n})}{\beta 2_n}$. Definimos $h_0 = \sum h_0^n$, que es uniformemente continua siempre que f sea continua. Si además f es de Lipschitz, entonces h_0 también lo es. La función h que buscábamos es $h_0 \wedge f$, y para el abierto V del enunciado podemos considerar el interior de $X \setminus U_h$, que contiene a todos los x_n con n impar. $\square$

Corolario 1.17. *En las condiciones del lema, $Tf(x) = Tg(x)$ si y sólo si $f(\tau(x)) = g(\tau(x))$.*

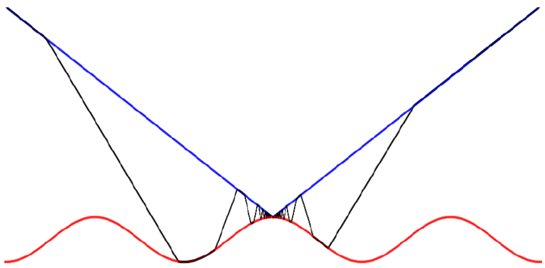

Figura 1.3: La función h que va coincidiendo alternativamente con f y con g.

Demostración. Sean $y = \tau(x) \in Y_0$; $f, g \in L(Y)$ tales que $f(y) = g(y)$. Escogemos $h \in L(Y)$; $U, V \in R(Y)$ como en el lema. Como τ es homeomorfismo y $\tau^{-1}(U \cap Y_0) = \mathfrak{T}^{-1}(U) \cap X_0$, debe ser también cierto que $\overline{\tau^{-1}(U \cap Y_0)} = \tau^{-1}(Y_0 \cap \overline{U})$. Así, tenemos $x \in \overline{\tau^{-1}(U)} \cap \overline{\tau^{-1}(V)}$.

Como T es isomorfismo entre las restricciones a U y a $\mathfrak{T}(U)$ de las funciones de $L(Y)$ y $L(X)$ (corolario 1.10), Tf y Th deben coincidir en x, ya que coinciden en $\mathfrak{T}(U)$. Del mismo modo, Tg coincide con Th en x, y tenemos $Tf(x) = Tg(x)$.

$\square$

Comentario 1.18. Con esto, para los puntos de X_0, tenemos que $Tf(x)$ sólo depende de cuál sea el punto x y del valor que toma la función f en $\tau(x)$, lo que nos da la representación

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$$

para alguna función $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Evidentemente, esta función tiene que ser $t(x, c) = T(c)(x)$, ya que $T(c)(x) = t(x, c(\tau(x)))$ y la función constantemente igual a c toma el valor c en $\tau(x)$.

Comentario 1.19. Es claro, gracias al corolario 1.10, que si T es isomorfismo de conjuntos ordenados no puede darse el caso $f(\tau(x)) < g(\tau(x))$, $Tf(x) > Tg(x)$, así que también tenemos $Tf(x) \geq Tg(x) \Leftrightarrow f(\tau(x)) \geq g(\tau(x))$ para todo $x \in X_0$. Esto sigue siendo cierto si cambiamos "$\geq$"por "$\leq$", "$>$" o "$<$".

1.4. Del comportamiento puntual a la estructura

Pasamos ahora a comprobar que se da la igualdad $X_0 = X$, de manera que X e Y son homeomorfos, y a analizar hasta qué punto los homeomorfismos conservan la estructura de nuestros espacios.

1.4.1. Uniformemente continuas

Veamos que, en el caso uniforme, τ es un homeomorfismo uniforme entre X_0 e Y_0. Como ambos son densos, esto implicará que τ está definido en todo X y que X e Y son uniformemente homeomorfos:

Teorema 1.20. *Todo isomorfismo de orden $T : U(Y) \to U(X)$ es de la forma*

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))),$$

donde $t : (x, c) \in X \times \mathbb{R} \mapsto t(x, c) = Tc(x)$ es continua y τ es un homeomorfismo uniforme de X en Y.

Demostración. Si τ no fuera uniformemente continuo, entonces existirían $\delta > 0$ y dos sucesiones $(x_n), (x'_n) \subset X_0$ tales que $d(x_n, x'_n) \to 0$ y $d(y_n, y'_n) > \delta$, con $y_n = \tau(x_n), y'_n = \tau(x'_n)$. Además, la desigualdad triangular hace que, dado $n \in \mathbb{N}$, existan como máximo un único $m(n)$ y un único $m'(n)$, ambos distintos de n, tales que $d(y_{m(n)}, y'_n), d(y_n, y'_{m'(n)}) < \frac{\delta}{2}$. Ahora, para $n = 1$ eliminamos de las sucesiones estos índices, que son como mucho 2: $m(1)$ y $m'(1)$. Para $n = 2$, si sigue estando, eliminamos $m(2), m'(2)$. Así, vamos obteniendo un conjunto infinito de índices J para el que se cumple que $\min\{d(y_n, y'_m) : m, n \in J\} \geq \frac{\delta}{2}$. Consideremos el retículo formado por los valores que toman sobre $\{y'_n : n \in J\}$ las funciones de $U(Y)$ que se anulan en $\{y_n : n \in J\}$: $U_Y^0 = \{(f(y'_n))_n : f \in U(Y), f(y_n) = 0\}$. Este retículo debe ser isomorfo a

$$\{(Tf(x'_n))_n : f \in U(Y), f(y_n) = 0\} =$$

$$= \{(g(x'_n))_n : g \in U(X), g(x_n) = 0\} = U_X^0,$$

ya que estamos suponiendo que $T0 = 0$ y sabemos que el valor de Tf en x sólo depende del valor de f en $\tau(x)$ y del propio x, de modo que $Tf(x_n) = 0$ es equivalente a $f(y_n) = 0$. Para que g sea uniformemente continua sobre X, la sucesión $g(x'_n)$ debe ser convergente a 0, así que $U_X^0 \subset c_0$. Además, cualquier función g definida sobre x'_n de manera que la sucesión $g(x'_n)$ sea convergente a 0 puede extenderse a una función uniformemente continua sobre X y que se anula en todo x_n (de una forma parecida a como lo hicimos en el lema 1.16), de modo que $U_X^0 = c_0$.

Tenemos ahora dos opciones: que exista una subsucesión de $\{y'_n : n \in J\}$ que esté lejos de su complementario en Y_0 (y por tanto de su complementario en Y, ya que Y_0 es denso) o que exista una sucesión $(y''_n) \subset Y_0$ tal que $0 < d(y'_n, y''_n) \to 0$. En el primer caso, los dos retículos no son isomorfos porque $U_Y^0 = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Veamos el segundo caso:

Existe una función $f \in U(Y)$ tal que $f(y_n) = 0, f(y'_n) = 1$. Como $\underline{Tf(x'_n)}$ debe ser convergente a 0, para cualquier sucesión $(x''_n) \subset X_0$ tal que $\overline{\{x''_n : n \in \mathbb{N}\}} \cap \overline{\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}} = \emptyset$, podemos encontrar una función $g \in U(X)$ que coincide con Tf en todo x'_n y se anula en x''_n *independientemente de si ambas sucesiones están o no a distancia mayor que 0.* Si tomamos una sucesión $(y''_n) \subset Y_0$ tal que $0 < d(y'_n, y''_n) \to 0$, es claro que no existe ninguna función uniformemente continua que valga 1 en los y'_n y se anule en los y''_n, pero sí la hay que coincide con $T1$ en x'_n y se anula en $x''_n = \tau^{-1}(y''_n)$, con lo que llegamos a contradicción y obtenemos que X_0 e Y_0 deben ser uniformemente homeomorfos. □

Corolario 1.21. *Todo isomorfismo lineal $T : U(Y) \to U(X)$ que conserve el orden es de la forma*

$$Tf(x) = a(x) \cdot f(\tau(x)),$$

donde $a(x) = T1(x) > 0, \forall\ x$ y $\tau : X \to Y$ es un homeomorfismo uniforme.

Demostración. Es consecuencia inmediata de lo anterior. □

Sin embargo, es conocido que este resultado no puede ser generalizado a todos los espacios uniformes, véase [14], el último comentario.

1.4.2. El caso Lipschitz

Teorema 1.22. *Si existe un isomorfismo de retículos $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$, entonces X e Y son homeomorfos y $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe $x \in X \setminus X_0$. Tenemos dos posibles situaciones: que toda bola centrada en x, $B(x, \varepsilon)$, sea tal que $\mathfrak{T}^{-1}(B(x, \varepsilon)) \cap Y_0$ tiene diámetro infinito o que exista ε_0 tal que $\mathfrak{T}^{-1}(B(x, \varepsilon))$ tiene diámetro finito para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$.

En el primer caso, podemos escoger una sucesión (y_n) de manera que $y_n \in \mathfrak{T}^{-1}\left(B\left(x, \frac{1}{n}\right)\right)$ y $d(y_{n+1}, y_n) > 3d(y_n, y_{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En estas condiciones, si f y g son funciones de Lipschitz sobre la sucesión (y_n), entonces toda función $h : \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$ tal que $f \leq h \leq g$ es también de Lipschitz. Pero existen funciones definidas sobre $\{\tau^{-1}(y_n) : n \in \mathbb{N}\}$ para las que esto no se cumple, ya que ésta es una sucesión convergente. (No hay más que tomar $f = 0, g = 1$ y h que valga 0 en los términos pares y 1 en los impares).

En el segundo caso, en particular si Y tiene diámetro finito, podemos escoger una sucesión $(x_n) \subset X_0 \cap B(x, \varepsilon_0)$ que converja a x y tal que $(y_n) = (\tau(x_n))$ no sea convergente en Y. Al ser Y un espacio completo, existen $\delta > 0$ y una subsucesión (y_{n_k}) tales que $d(y_{n_k}, y_{n_{k'}}) > \delta$ para todos $k \neq k' \in \mathbb{N}$. Sobre esta subsucesión, las funciones de Lipschitz son exactamente las funciones acotadas, ya que es un conjunto uniformemente aislado de diámetro finito. Así pues, estamos en condiciones muy similares a las del caso de diámetro infinito: dadas $f \leq g \in \mathrm{Lip}(\{y_{n_k} : k \in \mathbb{N}\})$, si $h : \{y_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$ es tal que $f \leq h \leq g$, entonces h también es de Lipschitz; pero esto no puede ocurrir con las funciones definidas sobre la sucesión convergente (x_{n_k}). $\square$

Teorema 1.23. *Si, además, X e Y tienen diámetro finito, entonces τ es homeomorfismo de Lipschitz.*

Demostración. Supondremos, ya que sabemos que X e Y son homeomorfos, que $Y = (X, \delta)$ y que τ es la identidad, de modo que T ahora se representa como $T : \mathrm{Lip}(X, \delta) \to \mathrm{Lip}(X, d)$, $Tf(x) = t(x, f(x))$. Lo que debemos demostrar es que d y δ son métricas Lipschitz-equivalentes sobre X.

Parte 1. Veamos primero que d y δ son uniformemente equivalentes. Probaremos que la identidad es uniformemente continua; esto es suficiente por simetría. Si no fuera uniformemente continua, existirían $\varepsilon > 0$; $(x_n), (y_n) \subset X$ tales que $d(x_n, y_n) \to 0, \delta(x_n, y_n) > \varepsilon$.

Si la sucesión (x_n) converge respecto de la métrica δ, entonces también lo hace respecto de d, porque ambas métricas son topológicamente equivalentes. Como $d(x_n, y_n) \to 0$, la sucesión (y_n) converge al mismo límite que (x_n) respecto de d, así que también respecto de δ. Esto implica que $\delta(x_n, y_n)$ tiende a 0, en contradicción con $\delta(x_n, y_n) > \varepsilon$. Llegaríamos a la misma conclusión suponiendo que (x_n) converge respecto de d; así pues, ninguna de las dos sucesiones puede ser convergente respecto de ninguna de las dos métricas. Al igual que al principio de la demostración del teorema 1.20, podemos encontrar subsucesiones (no modificaremos la forma de llamarlas) y otro ε (tampoco) tales que

$$\min\{\delta(x_n, x_m), \delta(y_n, y_m), \delta(x_n, y_n), \delta(x_n, y_m) : n \neq m\} \geq \varepsilon,$$

$$\min\{d(x_n, x_m), d(y_n, y_m) : n \neq m\} \geq \varepsilon,$$

Supongamos también que el espacio X consiste exclusivamente en las dos sucesiones: $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Esto no afecta a la argumentación, pero hace que la exposición sea más clara. Consideremos $\alpha : (X, \delta) \to \mathbb{R}, \beta : (X, d) \to \mathbb{R}$ definidas como $\alpha = 1 \vee T^{-1}(1), \beta = 1 \vee T1$ y las aplicaciones

$$T_\alpha : \mathrm{Lip}(X, \delta) \to \mathrm{Lip}(X, \delta),\ T_\alpha f = f \cdot \alpha,$$

$$T_\beta : \mathrm{Lip}(X, d) \to \mathrm{Lip}(X, d),\ T_\beta g = g/\beta.$$

Ambas son automorfismos porque α y β son funciones de Lipschitz con valores en un compacto de $[1, \infty)$. Podemos sustituir el isomorfismo T por $T_\beta \circ T \circ T_\alpha$ y tenemos $T(1) = 1, T0 = 0$. Así, tenemos que para todos $f \in \mathrm{Lip}(X, \delta), x \in X$, se cumple $Tf(x) = 1$ si y sólo si $f(x) = 1$. (Y lo mismo con 0). En estas condiciones, es claro que la función definida como 1 en la sucesión (x_n) y como 0 en (y_n) es de Lipschitz respecto de δ pero no lo es respecto de d, de modo que hemos llegado a una contradicción que prueba que d y δ deben ser uniformemente equivalentes.

Parte 2. Veamos que, de hecho, d y δ son Lipschitz-equivalentes.

Para que τ no sea de Lipschitz, es necesario que existan $(x_n), (y_n) \subset X$ tales que

$$\frac{d(x_n, y_n)}{\delta(x_n, y_n)} \to 0.$$

Esto implica que $d(x_n, y_n)$ tiende a 0, porque δ es acotada. Una vez que las distancias tienden a 0 "por parejas", quedan dos opciones pasando a subsucesiones: que todas las sucesiones tiendan al mismo punto o que las parejas estén uniformemente separadas entre sí, esto es, que exista $\varepsilon > 0$ tal que

$$\inf\{d(\{x_n, y_n\}, \{x_m, y_m\}), \delta(\{x_n, y_n\}, \{x_m, y_m\}) : n \neq m\} \geq \varepsilon.$$

Parte 2.1. En el caso de que las sucesiones tiendan a un cierto punto x, podemos encontrar una sucesión (z_n) tal que $\frac{d(z_n,x)}{\delta(z_n,x)} \to 0$. Esto lo podemos hacer tomando cada z_n como x_n o bien como y_n, gracias a la desigualdad triangular.

Sean, para cada $\lambda \in [-1, 2]$, $f_\lambda^+(z_n) = \lambda + d(x, z_n)$, $f_\lambda^-(z_n) = \lambda - d(x, z_n)$ y $m(\lambda)$ el menor número natural que es constante de Lipschitz de Tf_λ^+ y de Tf_λ^-.

Consideremos, para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$J_k = \{\lambda \in [-1, 2] : m(\lambda) \leq k\}.$$

El intervalo $[-1,2]$ es un compacto y es unión de los J_k, con k variando en $\mathbb{N}$, así que el Lema de la categoría de Baire nos asegura que existen $k \in \mathbb{N}$ y $a < b \in [-1,2]$ tales que $J_k \cap [a,b]$ es denso en $[a,b]$. Componiendo con los isomorfismos adecuados (cosa que puede hacer crecer k, pero no invalida el argumento), podemos suponer $a = -1, b = 2$, $T0 = 0$ y $T1 = 1$.

Las aplicaciones

$$\lambda \mapsto Tf_\lambda^+(x) = t(\lambda, x); \quad \lambda \mapsto Tf_\lambda^+(z_n) = t(\lambda, z_n)$$

son homeomorfismos (de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$), así que

$$\lambda \mapsto \frac{|Tf_\lambda^+(x) - Tf_\lambda^+(z_n)|}{d(x, z_n)}$$

es continua para todo n. Como esta aplicación está acotada por k en un denso de $[-1,2]$, tenemos

$$\frac{|Tf_\lambda^+(x) - Tf_\lambda^+(z_n)|}{d(x, z_n)} \leq k$$

para todos $\lambda \in [-1,2], n \in \mathbb{N}$; y podemos hacer lo mismo cambiando "f^+"por "f^-". Sean n tal que $\delta(x, z_n) > 2(k+1)d(x, z_n)$ y M, la parte entera de $2 + 1/\delta(x, z_n)$. Definimos $f_1, \ldots, f_M$ como

$$f_1 = f^+_{\delta(z_n,x)}, f_2 = f^-_{2\delta(z_n,x)}, f_3 = f^+_{2\delta(z_n,x)}, f_4 = f^-_{4\delta(z_n,x)}, \ldots$$

Con esto, tenemos unas funciones que coinciden alternativamente en x y en z_n y tales que $f_1(x) = 0, f_M(x) \geq 1$. Esto implica $Tf_1(x) = 0, Tf_M(x) \geq 1$, ya que habíamos supuesto $T0 = 0, T1 = 1$. Pero sin embargo,

$$Tf_M(x) \leq kMd(x, z_n) < kM\frac{\delta(x, z_n)}{2(k+1)} < 1,$$

con lo que terminamos este caso.

Parte 2.2. Si tenemos las parejas de puntos (x_n, y_n) uniformemente separadas entre sí, podemos utilizar un argumento parecido al anterior. En estas circunstancias, una función f es de Lipschitz para d si y sólo si es acotada y $\frac{f(x_n)-f(y_n)}{d(x_n,y_n)}$ también lo es, y análogamente para δ. Supondremos $\delta(x_n, y_n) > nd(x_n, y_n)$. Ahora nuestras funciones f_k serán, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$f_1(x_n) = 0, f_1(y_n) = \delta(x_n, y_n) \wedge 1;$$
$$f_2(y_n) = f_1(y_n), f_2(x_n) = 2\delta(x_n, y_n) \wedge 1;$$
$$f_3(x_n) = f_2(x_n), f_3(y_n) = 3\delta(x_n, y_n) \wedge 1; \ldots$$
$$\ldots f_{2k-1}(x_n) = f_{2(k-1)}(x_n), f_{2k-1}(y_n) = (2k-1)\delta(x_n, y_n) \wedge 1;$$

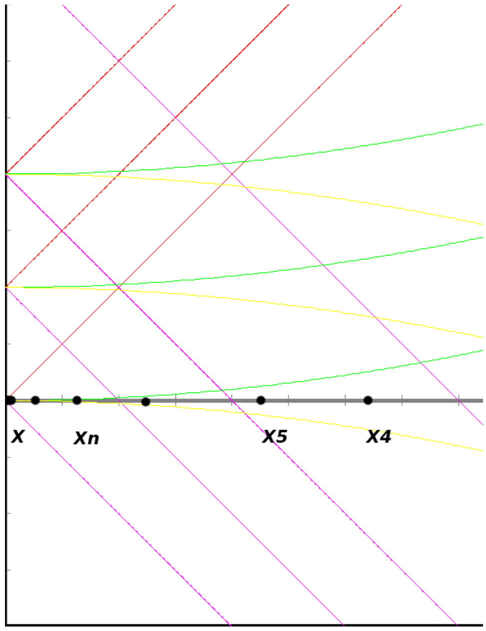

Figura 1.4: Hacen falta más funciones de un tipo que del otro para llegar de 0 a 1.

$$f_{2k}(y_n) = f_{2k-1}(y_n), f_{2k}(x_n) = 2k\delta(x_n, y_n) \wedge 1; \ldots$$

Para terminar sólo hay que observar que, para cada n, debe haber un k_n tal que

$$|Tf_{k_n}(x_n) - Tf_{k_n}(y_n)| \geq \frac{1}{2}|f_{k_n}(x_n) - f_{k_n}(y_n)| = \frac{1}{2}\delta(x_n, y_n) \geq \frac{n}{2}d(x_n, y_n),$$

ya que $f_k(x_n) = 1$ si y sólo si $Tf_k(x_n) = 1$ (e igual con y_n). La función que coincide con f_{k_n} en cada pareja (x_n, y_n) es de Lipschitz para δ pero no puede tener imagen en $\mathrm{Lip}(X, d)$. $\square$

Corolario 1.24. *Dados dos espacios métricos completos X e Y, todo isomorfismo lineal que conserve el orden $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ es de la forma*

$$Tf(x) = a(x) \cdot f(\tau(x)),$$

donde $a(x) = T1(x) > 0, \forall\ x$ y τ es un homeomorfismo de X en Y. Si además ambos espacios tienen diámetro finito, entonces este homeomorfismo es de Lipschitz.

La condición de que los espacios sean de diámetro finito es necesaria para obtener el resultado, como podemos ver:

Ejemplo 1.25. *Dos espacios no uniformemente homeomorfos cuyos espacios de funciones de Lipschitz son retículos vectoriales isomorfos.*

Demostración. Consideremos

$$X = \{n^2 + i : n \in \mathbb{N}, n \geq 2, i \in \{0,1\}\},$$

$$Y = \{n + i/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2, i \in \{0,1\}\},$$

con sus distancias usuales como subconjuntos de $\mathbb{R}$. Veamos que, si para cada $f \in \mathrm{Lip}(Y)$ escribimos $Tf(n^2+i) = nf(n+i/n)$, este T es un isomorfismo de retículos vectoriales entre $\mathrm{Lip}(Y)$ y $\mathrm{Lip}(X)$ cuyo inverso es la aplicación que a cada $g \in \mathrm{Lip}(X)$ asigna $T^{-1}g(n+i/n) = g(n^2+i)/n$. Dado que es evidente que T es inyectiva, que conserva el orden y que es lineal, lo que debemos comprobar es que $Tf \in \mathrm{Lip}(X)$ para toda $f \in \mathrm{Lip}(Y)$ y que es epiyectiva. Gracias a que ambos espacios son subespacios de $\mathbb{R}$, la constante de Lipschitz de una función definida sobre cualquiera de los dos solamente depende de los valores que tome en cada punto y el siguiente: si $g \in \mathrm{Lip}(X)$, $f \in \mathrm{Lip}(Y)$, entonces sus constantes de Lipschitz son

$$L_g = \sup_n \left\{ \left| g(n^2+1) - g(n^2)) \right|, \frac{|g((n+1)^2) - g(n^2+1)|}{2n} \right\}$$

$$L_f = \sup_n \left\{ n \left| f(n+1/n) - f(n) \right|, \frac{n}{n-1} \left| f(n+1) - f(n+1/n) \right| \right\}.$$

Tenemos, para cada $n \geq 2$,

$$|Tf(n^2-1) - Tf(n^2)| = n|f(n+1/n) - f(n)| \leq L_f,$$

$$\frac{Tf((n+1)^2) - Tf(n^2+1)}{2n} = \frac{|(n+1)f(n+1) - nf(n+1/n)|}{2n} =$$

$$= \frac{(n+1)f(n+1) - (n+1)f(n+1/n) + f(n+1/n)}{2n} \leq$$

$$\leq \frac{n+1}{2n}|f(n+1) - f(n+1/n)| + \frac{|f(n+1/n)|}{2n} \leq$$

$$\leq \frac{n+1}{2n} \cdot L_f \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{|f(n+1/n) - f(2) + f(2)|}{2n} \leq$$

$$\leq \frac{3}{4}L_f + \frac{L_f}{2n}(n+1/n-2) + \frac{|f(2)|}{2n} \leq \frac{5}{4}L_f + |f(2)|,$$

así que $L_{Tf} \leq \frac{5}{4}L_f + |f(2)|$ y T envía funciones de Lipschitz a funciones de Lipschitz. Veamos que su inversa también lo hace:

$$\frac{T^{-1}g(n+1/n) - T^{-1}g(n)}{1/n} = g(n^2+1) - g(n^2) \leq L_g;$$

$$\frac{n}{n-1}|T^{-1}g(n+1) - T^{-1}g(n+1/n)| = \frac{n}{n-1}\left|\frac{g((n+1)^2)}{n+1} - \frac{g(n^2+1)}{n}\right| =$$

$$= \frac{|ng((n+1)^2) - (n+1)g(n^2+1)|}{(n+1)(n-1)} \leq$$

$$\leq \frac{n}{(n+1)(n-1)} \cdot L_g \cdot 2n + \frac{|g(n^2+1)|}{(n+1)(n-1)} \leq$$

$$\frac{8}{3}L_g + \frac{|g(n^2+1) - g(4) + g(4)|}{(n+1)(n-1)} \leq \frac{11}{3}L_g + \frac{|g(4)|}{3},$$

lo que significa que $L_{T^{-1}g} \leq 11/3L_g + |g(4)|/3$, y con esto acabamos. □

Llama la atención el hecho de que este homeomorfismo no tenga que ser necesariamente uniforme en el caso de que los espacios sean de diámetro infinito, pero que sea de Lipschitz siempre que sean de diámetro finito. Además, la linealidad tampoco resuelve el problema. Se podría decir que la clave para que esta estructura determine algo más que la topología es que exista alguna función f tal que tanto f como Tf estén alejadas de 0 y sean acotadas. Evidentemente, en diámetro finito esto es automático.

1.5. Espacios de funciones acotadas

Como consecuencia directa del teorema 1.23, tenemos estos dos resultados sobre isomorfismos entre retículos de funciones de Lipschitz:

Corolario 1.26. *Sea $T : \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I}) \to \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ un isomorfismo de retículos. Entonces $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ donde $t : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ está definida como $t(x, c) = Tc(x)$ y τ es un homeomorfismo uniforme. Si X e Y tienen diámetro finito, entonces τ es homeomorfismo de Lipschitz.*

Demostración. Se sigue directamente de la primera parte de la demostración del teorema 1.23, aunque en este caso es más sencillo porque ya tenemos $T1 = 1$. □

Corolario 1.27. *Sea $T : \mathrm{Lip}^*(Y) \to \mathrm{Lip}^*(X)$ un isomorfismo de retículos. Entonces $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ y τ es un homeomorfismo uniforme. Si X e Y tienen diámetro finito, entonces τ es homeomorfismo de Lipschitz.*

Demostración. Es evidente que todo isomorfismo $T : \mathrm{Lip}^*(Y) \to \mathrm{Lip}^*(X)$ induce otro isomorfismo $\tilde{T} : \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I}) \to \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$, utilizando las funciones α y β como en la demostración del teorema 1.23. □

Por otra parte, cambiando ligeramente la demostración del teorema 1.20 podemos obtener este otro resultado:

Teorema 1.28 (Shirota)**.** *Todo isomorfismo de conjuntos ordenados* $T : U^*(Y) \to U^*(X)$ *es de la forma*

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))),$$

donde $t : (x, c) \in X \times \mathbb{R} \mapsto t(x, c) = Tc(x)$ *y* τ *es un homeomorfismo uniforme de* X *en* Y*.*

Demostración. Viendo la demostración del teorema 1.20, sólo hay que tener en cuenta que, si $d(x_n, x'_n) \to 0$, entonces

$$U_X^{0,*} = \{(g(x_n))_n : g \in U^*(X), g(x'_n) = 0\} = c_0$$

y si $d(y_n, y'_n) > 0$, entonces

$$U_Y^{0,*} = \{(f(y_n))_n : f \in U^*(Y), f(y'_n) = 0\} = l_\infty$$

pero c_0 y l_∞ no son retículos isomorfos. Veámoslo: sea $\phi : l_\infty \to c_0$ una aplicación que conserva el orden, y tal que la coordenada n-ésima de $\phi(\alpha)$ sólo depende de la coordenada n-ésima de α. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea k_m el primer número natural tal que $\phi(m)(n) < \frac{1}{m}$ para todo $n \geq k_m$, que existe porque $\phi(m)(n)$ converge a 0 cuando n tiende a infinito. La sucesión que coincide con $\phi(m)$ entre k_m y $k_{m+1} - 1$ tiende a 0, pero no puede ser imagen por ϕ de ninguna sucesión acotada, de modo que ϕ no es epiyectiva. $\square$

Corolario 1.29. *Todo isomorfismo de orden* $T : U(Y, \mathbb{I}) \to U(X, \mathbb{I})$ *es de la forma*

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))),$$

donde $t : (x, c) \in X \times \mathbb{I} \mapsto t(x, c) = Tc(x) \in \mathbb{I}$ *y* τ *es un homeomorfismo uniforme de* X *en* Y*.*

1.6. Funciones diferenciables

Consideramos ahora un isomorfismo $T : C^k(Y) \to C^k(X)$. Recordemos que sólo trabajaremos con variedades diferenciables de clase k cuyos espacios de Banach asociados tengan una función de clase k no nula de soporte acotado. Gracias a esto, es claro que $RC^k(X) = \{U_f : f \in C^k(X)\}$ es una base de la topología de X y los resultados de la primera sección se pueden aplicar aquí sin modificar nada para obtener esencialmente lo mismo que entonces:

Proposición 1.30. *Existe un isomorfismo de orden $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ que cumple:*

- $\mathfrak{T}(U_f) = U_{Tf}$ *para toda* $f \in C^k(Y)$.
- $f \leq g$ *en* U *si y sólo si* $Tf \leq Tg$ *en* $\mathfrak{T}(U)$. *Esto sigue siendo cierto si cambiamos "* $\leq$ *" por "* $=$ *" o por "* $\geq$ *".*

En este caso, aunque las variedades diferenciables no tienen por qué ser espacios métricos, (botella de Klein, plano proyectivo) también podemos llegar a la misma conclusión que en el lema 1.12 gracias a que *localmente* sí son espacios métricos completos (localmente son espacios de Banach, de hecho). Recordemos cómo habíamos definido los dos subconjuntos que luego comprobamos que eran densos. Primero, para todo $y \in Y$, definimos $\mathcal{R}(y) \subset X$ como la intersección de todos los $\mathfrak{T}(U)$ tales que U contiene a y. Ahora, Y_0 es el conjunto de puntos tales que $\mathcal{R}(y)$ contiene un único punto. Definiendo simétricamente $\mathcal{S}(x)$ y X_0, tenemos:

Lema 1.31. *Sean* X *e* Y *variedades diferenciables y* $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ *un isomorfismo de orden. Entonces* X_0 *e* Y_0 *son densos y homeomorfos entre sí.*

Demostración. Está claro que son homeomorfos, así que veamos que son densos. Sea $W \subset X$ un abierto. Consideramos un abierto $V \subset W$ homeomorfo a la bola unidad del espacio de Banach que dota de estructura diferenciable a X, dotado de la métrica inducida por este homeomorfismo; evidentemente V es regular. Ahora, si $U \subset \mathfrak{T}^{-1}(V)$ es homeomorfo a la bola unidad del espacio de Banach asociado a Y, podemos considerar también la métrica inducida por esta bola unidad. Si $F \subset U$ es un cerrado de interior no vacío, entonces ya estamos en las condiciones del lema 1.12 con los espacios métricos completos $\overline{\mathfrak{T}\left(\overset{\circ}{F}\right)}$ y F. □

En general es imposible encontrar una función diferenciable que vaya coincidiendo con dos funciones en las cercanías de un punto aunque las dos funciones sí copincidan, por lo que no podemos actuar como en el lema 1.16. Sin embargo, se puede encontrar una función estrictamente mayor que ambas en puntos cercanos a x y estrictamente menor que ambas en otros puntos cercanos a x. Esto nos da la misma representación que en el corolario 1.17 y es lo que utilizamos en el próximo resultado:

Lema 1.32 ([8], Step 1.5)**.** *Sean* $f, g \in C^k(Y)$, $x \in X_0$. f *y* g *coinciden en* $\tau(x)$ *si y sólo si* Tf *y* Tg *coinciden en* x.

Demostración. Sea $y = \tau(x) \in Y_0$. Por simetría, basta ver que, si $Tf(x) > Tg(x)$, entonces $f(y) > g(y)$. Supongamos, pues, $Tf(x) > Tg(x)$. En un entorno de x, tenemos $Tf \geq Tg$, y como T mantiene el orden localmente, debe ser $f \geq g$ en un entorno de y. Si fuera $f(y) = g(y)$, entonces tendríamos además $(Df)(y) = (Dg)(y)$ (D es la diferencial), ya que $f - g$ tiene un mínimo local en y. Cualquier función $h \in C^k(Y)$ que coincida con ambas en y pero tenga diferencial distinta debe tener puntos tan cerca como queramos de y en los que es mayor que ambas funciones y puntos en los que es menor (en ambos casos, estrictamente). Trasladando esto a x como en el corolario 1.17, tenemos $Tf(x) = Th(x) = Tg(x)$ y llegamos a contradicción. □

Comentario 1.33. Aquí también es válido el comentario 1.19, así que en este caso también tenemos $Tf(x) \geq Tg(x) \Leftrightarrow f(\tau(x)) \geq g(\tau(x))$ para todo $x \in X_0$ y esto sigue siendo cierto si cambiamos "$\geq$"por "$\leq$", "$>$" o "$<$".

Teorema 1.34. *Sean X e Y dos variedades diferenciables de clase k. Todo isomorfismo de orden $T : C^k(Y) \to C^k(X)$ es de la forma*

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))),$$

donde $t : (x, c) \in X \times \mathbb{R} \mapsto t(x, c) = Tc(x)$ y τ es un homeomorfismo de X en Y.

Demostración. Solamente falta por ver que τ es homeomorfismo entre X e Y, así que supongamos que existiera un cierto $x \in X \backslash X_0$. Si x no pertenece a X_0, lo que sucede es que la intersección de una base de entornos de x trasladada a Y por el isomorfismo $\mathfrak{T}$ es vacía, como consecuencia del lema 1.15. Tomando una base numerable U_n de entornos regulares de x, tenemos $\bigcap \mathfrak{T}(U_n) = \emptyset$. Podemos suponer que todo punto de Y está en, a lo sumo, finitos $\mathfrak{T}(U_n)$ (por ejemplo, si los U_n forman una sucesión decreciente). Sea $f_n \in C^{k+}(X)$ tal que $f_n(x) = n$ y $U_{f_n} \subset U_n$. Esta sucesión no tiene cota superior en $C^k(X)$, pero Tf_n sí la tiene en $C^k(Y)$, por ejemplo $\sum Tf_n$, ya que esta suma está bien definida y pertenece a C^k porque es localmente finita y es cota superior porque todas las funciones son no negativas. Con esto llegamos a contradicción. □

1.7. Funciones continuas

Trabajaremos ahora con los espacios de funciones continuas definidas sobre espacios topológicos. Recordemos que sólo trabajaremos con espacios completamente regulares y en los que cada punto tiene una base numerable de entornos. Aquí también podemos aplicar los resultados de la sección 1.1, así que tenemos (otra vez):

Proposición 1.35. *Para todo isomorfismo de orden $T : C(Y) \to C(X)$, existe otro isomorfismo $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ que cumple:*

- $\mathfrak{T}(U_f) = U_{Tf}$ *para toda* $f \in C^k(Y)$.
- $f \leq g$ *en* U *si y sólo si* $Tf \leq Tg$ *en* $\mathfrak{T}(U)$. *Esto sigue siendo cierto si cambiamos "* $\leq$ *" por "* $=$ *" o por "* $\geq$ *".*

Teorema 1.36 (Anderson)**.** *Sea $T : C(Y) \to C(X)$ un isomorfismo de retículos. Entonces, para todos $x \in X, f \in C(Y)$ se cumple*

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))),$$

donde τ es un homeomorfismo entre X e Y y $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(x, c) = Tc(x)$.

Demostración. Veamos primero que X e Y son homeomorfos. Consideramos la aplicación $\mathcal{S}$ que a cada $x \in X$ le asigna el subconjunto de Y

$$\bigcap_{x \in U \in R(X)} \mathfrak{T}^{-1}(U).$$

Comprobaremos que $\mathcal{S}(x)$ está siempre formado por un solo punto. Sea $x \in X$. Si es un punto aislado, entonces $\{x\}$ es un abierto regular minimal (salvo el vacío), por lo que $\mathfrak{T}^{-1}(\{x\})$ también debe serlo así que está formado por un punto. Si no es aislado, entonces podemos encontrar una base numerable de entornos de x, (U_n) de modo que $\overline{U_{n+1}} \subset U_n$ para todo n, ya que X (también Y) cumple el primer axioma de numerabilidad y existen bases de su topología formadas por cerrados. Veamos que la intersección de los $\mathfrak{T}^{-1}(U_n)$ no puede ser vacía, ya que el lema 1.15 nos asegura que no puede contener más de un punto.

Como X es completamente regular, existen funciones $f_n \in C^+(X)$ tales que $f_n(x) = n$ y $U_{f_n} \subset U_n$ para todo n. El conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene cota superior en $C(X)$, pero si $\bigcap \mathfrak{T}^{-1}(U_n) = \emptyset$, entonces $(T^{-1}f_n)$ es una sucesión de funciones localmente finita. Por tanto, su suma está bien definida, es continua y es cota superior para $\{T^{-1}f_n : n \in \mathbb{N}\}$; exactamente igual que en la demostración del teorema anterior.

Ya que sabemos que $\mathcal{S}(x)$ está formado por un punto, podemos definir la aplicación $\tau : X \to Y, \tau(x) = y$, donde $\{y\} = \mathcal{S}(x)$. Esta aplicación está bien definida y, por simetría, debe ser biunívoca. Si tenemos en cuenta que además $\tau(x)$ es la intersección de las imágenes por $\mathfrak{T}^{-1}$ de los entornos de x, es evidente que τ es un homeomorfismo.

Veamos que, además, $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$, para todos $f \in C(Y), x \in X$. Lo único que debemos comprobar es que si f y g coinciden en $\tau(x)$, entonces

Tf y Tg coinciden en x. Si x es aislado, entonces el resultado se sigue de la proposición 1.35 por ser $\{x\}$ un abierto regular. Podemos suponer que $g = 0$ y que $f \geq 0$. Si x no es aislado, sea (x_n) una sucesión convergente a x y, para cada n, W_n un entorno de x_n, de modo que $\overline{W_n} \cap \overline{W_m} = \emptyset$ siempre que $m \neq n$. Dado que X es completamente regular, podemos encontrar $h_n \in C^+(X)$ tales que $h_n(x_{2n}) = 2f(x_{2n})$ y $U_{h_n} \subset W_{2n}$. Estas h_n tienen soportes disjuntos, así que su supremo $h_0 = \bigvee\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ es continuo en todo punto salvo quizá en x. Haciendo $h = f \wedge h_0$, tenemos que $h \in C(X)$. Además h y f coinciden en un entorno de cada x_{2n} y $h = 0$ en un entorno de cada x_{2n-1}. Sean U el interior de $\{h = f\}$ y V el interior de $\{h = 0\}$. Teniendo en cuenta el comportamiento local del isomorfismo T, debe ser $T^{-1}h = T^{-1}f$ en $\mathfrak{T}^{-1}(U)$, $T^{-1}h = 0$ en $\mathfrak{T}^{-1}(V)$ y además $\tau(x) \in \overline{\mathfrak{T}^{-1}(U)} \cap \overline{\mathfrak{T}^{-1}(V)}$, de manera que $T^{-1}f(x) = T^{-1}h(x) = 0$, con lo que acabamos. □

Teorema 1.37. *Sea $T : C(Y, \mathbb{I}) \to C(X, \mathbb{I})$ un isomorfismo de retículos. Entonces existen un homeomorfismo $\tau : X \to Y$ y una función continua $t : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ tales que $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$, para todos $x \in X, f \in C(Y, \mathbb{I})$.*

Demostración. Mantenemos las notaciones anteriores. Para ver que $\mathcal{S}(x)$ no puede contener varios puntos basta también con el lema 1.15, así que veamos que $\mathcal{S}(x)$ no es, en ningún caso, el conjunto vacío. Si así fuera para un cierto $x \in X$ (que no puede ser aislado), entonces podríamos escoger una sucesión de abiertos regulares U_n como antes y tales que $\overline{\mathfrak{T}^{-1}(U_{n+1})} \subset \mathfrak{T}^{-1}(U_n)$.

Sean $y_n \in \mathfrak{T}^{-1}(U_n) \setminus \overline{\mathfrak{T}^{-1}(U_{n+1})}$; $h_n \in C^+(Y)$ tales que

$$h_n(y_{2n}) = 2,\ U_{h_n} \subset \mathfrak{T}^{-1}(U_n) \setminus \overline{\mathfrak{T}^{-1}(U_{n+1})}.$$

Otra vez, el supremo h_0 de estas funciones es una función continua porque sus soportes son disjuntos, y por tanto $h = h_0 \wedge 1 \in C(Y, \mathbb{I})$. Además h coincide con 1 en un abierto regular que corta con todo $\mathfrak{T}^{-1}(U_n)$ y se anula en otro abierto regular que también corta con ellos. Teniendo en cuenta que $T1 = 1, T0 = 0$, esto significa que en todo U_n debe haber puntos en los que $Th = 1$ y en los que $Th = 0$, de modo que Th no podría ser continua en x.

Para ver que τ es homeomorfismo y que $Tf(x)$ es función de x y de $f(\tau(x))$ nos vale también la demostración anterior, así que hemos terminado. □

Corolario 1.38. *Sea $T : C^*(Y) \to C^*(X)$ un isomorfismo de retículos. Entonces existen un homeomorfismo $\tau : X \to Y$ y una función continua $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$, para todos$x \in X, f \in C^*(Y)$.*

Demostración. Se demuestra fácilmente a partir del teorema anterior utilizando las mismas funciones y los mismos isomorfismos que en la demostración del teorema 1.23; $\alpha : (X, \delta) \to \mathbb{R}, \beta : (X, d) \to \mathbb{R}$ definidas como

$\alpha = 1 \vee T^{-1}(1), \beta(x) = \text{máx}\{1, T(1)(x)\}$. $T_\alpha f = f \cdot \alpha, T_\beta f = f/\beta$. Podemos sustituir el isomorfismo T por $\tilde{T} = T_\beta \circ T \circ T_\alpha$ y tenemos $\tilde{T}(1) = 1$, $\tilde{T}0 = 0$, así que tenemos un isomorfismo entre $C(Y, \mathbb{I})$ y $C(X, \mathbb{I})$ que nos da el homeomorfismo τ. Comprobar que $f(\tau(x)) = g(\tau(x))$ implica $Tf(x) = Tg(x)$ es rutinario. $\square$

Debemos señalar que en estos resultados no podemos eliminar la hipótesis de que los espacios sean G_δ, como se puede ver en el ejemplo de [25], p. 629.

1.8. Isomorfismos de abiertos regulares

Recordemos que el lema 1.12 dice lo siguiente:

Sean X e Y dos espacios métricos completos tales que sus retículos de abiertos regulares son isomorfos. Existen subconjuntos $X_0 \subseteq X$ e $Y_0 \subseteq Y$ densos y homeomorfos entre sí.

Pese a lo sencillo del enunciado y a que en realidad es una consecuencia casi inmediata del Teorema de Cantor, ha resultado de muchísima utilidad en los resultados posteriores. En general ha pasado bastante desapercibido en los artículos que hemos publicado, pero ciertamente ha sido una herramienta clave para poder llegar a los resultados "estrella". Esta sección, aparte del posible interés que tenga en sí misma, está pensada como un pequeño reconocimiento al lema 1.12.

En realidad, en ningún momento de la demostración habíamos utilizado que los abiertos sean regulares ni que los abiertos regulares formen un retículo, así que lo podemos generalizar así:

Corolario 1.39. *Sean X e Y espacios métricos completos y sean $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$, bases de sus topologías. Si existe una biyección entre $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ que conserva la inclusión, entonces X e Y tienen subespacios densos X_0 e Y_0 que son homeomorfos entre sí.*

Pero además, estos subconjuntos son mucho mayores de lo que podría parecer, ya que podemos extender el homeomorfismo $\tau : X_0 \to Y_0$. Concretamente, para esto nos servirán de mucha ayuda estos dos teoremas:

Teorema 1.40 (Lavrentiev)**.** *Sean X e Y espacios métricos completos, $A \subset X, B \subset Y$ y $\tau : A \to B$ un homeomorfismo. Entonces τ se puede extender a un homeomorfismo entre dos subconjuntos G_δ que contienen a A y B.*

Teorema 1.41 (Alexandrov)**.** *Todo subconjunto G_δ de un espacio métrico completo es completamente metrizable. Esto es, si $A \subset (X, d)$ es G_δ, entonces* *existe una métrica d' sobre A topológicamente equivalente d para la que (A, d') es completo.*

Proposición 1.42. *Sean X e Y espacios métricos completos y sean $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$, bases de sus topologías. Si existe una biyección entre $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ que conserva la inclusión, entonces existe un espacio métrico completo Z que es homeomorfo a un subconjunto G_δ denso en X y a un subconjunto G_δ denso en Y. En particular, $X \setminus X_0$ es unión numerable de subconjuntos densos en ningún sitio.*

Demostración. Gracias al teorema de Lavrentiev, sabemos que el homeomorfismo $\tau : X_0 \to Y_0$ dado por el lema 1.12 se puede extender a dos subespacios $\widetilde{X_0}$, $\widetilde{Y_0}$, que son G_δ en X e Y, respectivamente. Por otra parte, el teorema de Alexandrov nos asegura que existe una métrica d_Z sobre $Z = \widetilde{X_0}$ que mantiene la topología inducida por (X, d_X) y que hace que $\widetilde{X_0}$ sea completo. □

De hecho, podemos hacer una demostración para el caso concreto en el que las bases de abiertos son las formadas por abiertos regulares:

Lema 1.43. *Sean X e Y espacios métricos completos. Si existe una biyección $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ que conserva la inclusión, entonces existe un espacio métrico completo Z que es homeomorfo a un subconjunto G_δ denso en X y a un subconjunto G_δ denso en Y.*

Demostración. Pongamos $X = \bigcup_\alpha F^1_\alpha$, donde F^1_α son cerrados de interiores disjuntos U^1_α de manera que todo F^1_α tiene diámetro menor que 1 y $F^1_\alpha = \overline{U^1_\alpha}$.

$W_1 = \bigcup_\alpha U^1_\alpha$ es un abierto denso en X, por lo que $\bigcup_\alpha \mathfrak{T}^{-1}(U^1_\alpha)$ también es denso en Y (que sea abierto denso es equivalente a que, para todo abierto regular U, exista α para el que $U^1_\alpha \cap U \neq \emptyset$, cosa que se mantiene al pasar por $\mathfrak{T}$). Cada uno de los $\mathfrak{T}^{-1}(U^1_\alpha)$ los dividimos también en cerrados H^1_β de diámetro menor que 1, con interior V^1_β y $\overline{V^1_\beta} = H^1_\beta$.

$W'_1 = \bigcup V^1_\beta$ es abierto denso en Y. Ahora, los $\mathfrak{T}(V^1_\beta)$ los dividimos en trozos $F^2_\alpha = \overline{U^2_\alpha}$ de diámetros menores que $\frac{1}{2}$, y ponemos $W_2 = \bigcup_\alpha U^2_\alpha$. Si seguimos así, obtenemos dos sucesiones decrecientes $(W_n), (W'_n)$ de abiertos densos en X e Y. Por un lado, $X_0 = \bigcap W_n$ e $Y_0 = \bigcap W'_n$ son G_δ densos y por otro, es claro que son homeomorfos. Además, podemos dotar a X_0 de una distancia que lo hace completo de la siguiente manera: $d(x, x') = \frac{1}{k}$, donde k es el menor número natural para el que $x \in U^k_\alpha, x' \in U^k_{\alpha'}$, con $\alpha \neq \alpha'$. Es fácil ver que esta distancia es topológicamente equivalente a la inducida por la de X y que hace que X_0 sea completo. □

Proposición 1.44. *Sean X, Y, espacios métricos completos. Sean también Z un espacio métrico completo, $X_0 \subset X, Y_0 \subset Y$ subconjuntos densos y*

$\tau : Z \to X_0, \sigma : Z \to Y_0$, homeomorfismos. Entonces $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$, dado por la composición

$$U \mapsto U \cap Y_0 \mapsto (\tau \circ \sigma^{-1})(U \cap Y_0) \mapsto \overset{\circ}{\overline{(\tau \circ \sigma^{-1})(U \cap Y_0)}},$$

es un isomorfismo de retículos, y todos son de esta forma.

Demostración. Estas tres aplicaciones son isomorfismos, así que $\mathfrak{T}$ también lo es. Que todos son de esa forma es consecuencia de la proposición 1.42. □

1.9. Antecedentes

El primer paso que se dio a la hora de caracterizar espacios a partir de la estructura de orden de sus funciones vino por parte de M. H. Stone (aunque él se lo atribuye a S. Kakutani, [40], teorema 2):

Teorema 1.45 (Stone)**.** *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. $C(X)$, como grupo ordenado, caracteriza a X.*

En [24], I. Kaplansky ya no considera a $C(X)$ como grupo, sino que le basta simplemente con su estructura de orden. Éste es el primer resultado en el que se utiliza exclusivamente esta estructura para determinar el espacio subyacente:

Teorema 1.46 (Kaplansky)**.** *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. $C(X)$, como retículo, caracteriza a X.*

Este teorema implica que si X e Y son dos espacios topológicos compactos Hausdorff para los que existe un isomorfismo de retículos $T : C(Y) \to C(X)$, entonces X e Y son homeomorfos.

Sorprendentemente (a la vista de este resultado y del Teorema Banach–Stone), pueden existir dos espacios topológicos compactos no homeomorfos para los que $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach, véase [24].

Este resultado fue complementado por otro del propio Kaplansky en el que indica cuál es la forma que ha de tener todo automorfismo de $C(X)$ que cumpla una condición bastante natural:

Theorem 1. *Let X be a compact Hausdorff space, C the set of real continuous functions on X, and let C be topologized by uniform convergence. Let σ be a lattice automorphism and homeomorphism of C. Then σ has the form $\sigma(f) = f^*$, where $f^*[\theta(x)] = \psi[x, f(x)]$, θ is a homeomorphism of X, and $\psi(x, \alpha)$ is a real-valued function continuous jointly in x and α for $x \varepsilon X$ and α real, and strictly monotone in α for fixed x.*

Escrito con la notación que hemos utilizado en el resto del trabajo, esto quedaría como:

Teorema 1.47. *Para todo isomorfismo de retículos $T : C(Y) \to C(X)$ que sea continuo en la topología de la convergencia uniforme, existen un homeomorfismo $\tau : X \to Y$ y una función continua y creciente en c para todo x, $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(x,c) = Tc(x)$ tales que, para todos $x \in X$, $f \in C(Y)$, se tiene*

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))). \tag{1.1}$$

Como comentario sobre lo natural de esta condición, es conveniente añadir que, en [22], T. Ito demuestra que siempre que X no contenga como subconjunto a la compactificación de Stone–Čech del conjunto de los números naturales, todos los automorfismos de $C(X)$ son continuos.

Este resultado sigue siendo cierto si cambiamos "compactos"por "realcompactos"(Shirota, [37]).

- J. Marovt, en [28], da la misma representación 1.1 para los automorfismos de $C(X, \mathbb{I})$ siempre que el espacio X cumpla el primer axioma de numerabilidad.

- F. W. Anderson prueba en [1] que la estructura de retículo de $C(X)$ determina el espacio X entre los espacios topológicos G_δ y completamente regulares.

- T. Shirota, en [37], demuestra que la estructura de retículo de las funciones uniformemente continuas y acotadas $U^*(X)$ determina la estructura uniforme del espacio métrico completo X sobre el que están definidas. De hecho, en ese artículo se enuncia también el resultado para el retículo $U(X)$ de todas las funciones uniformemente continuas, pero hay un error en la demostración de uno de los lemas previos. Esto hace, al menos por lo que parece, que la demostración del teorema sea incorrecta. En cualquier caso, el resultado queda demostrado de una manera razonablemente clara en [10], junto con el resultado original de Shirota. Más concretamente, el Teorema 6 de [37] dice lo siguiente:

  "Sea X un espacio métrico completo. Entonces X queda determinado por el retículo de todas las funciones reales uniformemente continuas sobre X. Más aún, X queda determinado por el retículo de todas las funciones reales uniformente continuas y acotadas sobre X." No deja de ser llamativo que la demostración valga para el "más aún"pero no para lo anterior.

- En [14], podemos encontrar el siguiente resultado de M. I. Garrido y J. A. Jaramillo que generaliza lo obtenido por Shirota: Sean X e Y espacios métricos completos, $\mathcal{L}_X \subset U(X)$ y $\mathcal{L}_Y \subset U(Y)$ retículos vectoriales unitales que separan uniformemente. Si son retículos vectoriales unitales isomorfos, entonces X e Y son uniformemente homeomorfos.

- En [15], los mismos autores prueban que $\mathrm{Lip}(X)$ y $\mathrm{Lip}(Y)$ son retículos vectoriales unitales isomorfos si y sólo si son álgebras isomorfas y que ambas condiciones son equivalentes a que X e Y sean Lipschitz homeomorfos. Además, los únicos isomorfismos de este tipo $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ consisten en componer con el homeomorfismo.

Capítulo 2

Isomorfismos multiplicativos

En este capítulo estudiaremos isomorfismos multiplicativos entre espacios de funciones continuas. Obtendremos que, si $T : L(Y) \to L(X)$ es uno de estos isomorfismos, entonces existen un homeomorfismo τ entre X e Y y un cierto subconjunto $A \subset X$ tal que

$$Tf(x) = \text{sig } (f(\tau(x)))|f(\tau(x))|^{p(x)} \text{ para todos } x \in A, f \in L(Y), \qquad (2.1)$$

donde $p \in L(A, (0, \infty))$. Este subconjunto $A \subset X$ cumple que $f \in L(X)$ si y sólo si su restricción a A pertenece a $L(A)$. Escrito de otro modo, esto último queda como $L(X) = L(A) \oplus \mathbb{R}^{X \setminus A}$. Lógicamente, es imposible controlar lo que sucede con $Tf(x)$ si $x \notin A$.

El resultado que mejor determina la forma del isomorfismo T se consigue cuando trabajamos con funciones diferenciables: veremos que todo isomorfismo $T : C^k(Y) \to C^k(X)$ consiste en componer con τ y que τ es difeomorfismo de clase k siempre que X e Y sean variedades de dimensión finita. También veremos que si X e Y son espacios métricos completos sin puntos aislados entonces los únicos isomorfismos $T : \text{Lip}(Y) \to \text{Lip}(X)$ posibles son $Tf = f \circ \tau$, donde τ es un homeomorfismo de Lipschitz.

En la primera sección de este capítulo hemos incluido algunos resultados y comentarios que era mejor tener fuera de la argumentación posterior, en particular los que tratan sobre automorfismos de $\mathbb{R}$.

En la segunda sección, partiremos de un isomorfismo multiplicativo entre espacios de funciones de Lipschitz o uniformemente continuas. Empezaremos mostrando resultados análogos a los de las primeras secciones del capítulo anterior: el primer paso que damos es "localizar" el isomorfismo $T : L(Y) \to L(X)$, de manera que $f = g$ en un abierto regular $U \subset Y$ es equivalente a $Tf = Tg$ en $\mathfrak{T}(U) \subset X$, de la misma manera que en la sección 1.1. Aplicaremos los resultados de las secciones 1.2 y 1.3 para obtener la representación puntual $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ sobre el mismo subconjunto denso $X_0 \subset X$ que entonces. Esta representación hace que para cada $x \in X_0$, tengamos un automorfismo de $\mathbb{R} : c \mapsto Tc(x)$.

Posteriormente veremos hasta qué punto estos resultados nos permiten determinar la estructura de los espacios subyacentes. La idea principal es que, en general, estos isomorfismos conservan el orden de las funciones. Aunque esto no es del todo cierto, sí podemos aprovechar gran parte de los resultados del capítulo anterior gracias a que, salvo en un conjunto uniformemente aislado $S \subset X$, $Tf(x) \leq Tg(x)$ es equivalente a $f(\tau(x)) \leq g(\tau(x))$ para todas $f, g \in L(Y)$. Por un lado, esto implica que X e Y son homeomorfos gracias a los resultados del primer capítulo. Por otro, para todo $x \in X \setminus S$, tenemos $Tf(x) = \text{sig }(f(\tau(x)))|f(\tau(x))|^{p(x)}$.

Una vez comprobado esto, es fácil ver que τ es un homeomorfismo uniforme, y a esto hemos dedicado la tercera sección.

En la cuarta sección, comprobaremos que para los isomorfismos de funciones de Lipschitz, se cumple que $p(x) = 1$ siempre que x no sea aislado y también que S es un conjunto finito. Así, tendremos probado que τ debe ser homeomorfismo de Lipschitz tanto si X (o, equivalentemente, Y) tiene diámetro finito como si X no tiene puntos aislados (o Y). Además, veremos algunos ejemplos que ilustran estos resultados y que pueden dar alguna idea sobre hasta qué punto se pueden determinar los espacios aunque tengan diámetro infinito.

La sección 2.5 está dedicada a los isomorfismos entre espacios de funciones diferenciables. En ella mostramos que todo isomorfismo $T : C^k(Y) \to C^k(X)$ consiste en componer con un homeomorfismo $\tau : X \to Y$. Esto, en dimensión finita, implica que τ es difeomorfismo de clase k. Sin embargo, no queda claro si debe serlo en el caso de que X e Y sean de dimensión infinita.

En la siguiente sección (2.6) trabajaremos con los espacios de funciones continuas. En ella probamos que todo isomorfismo $T : C(Y) \to C(X)$ es también de la forma

$$Tf(x) = \text{sig }(f(\tau(x))) \cdot |f(\tau(x))|^{p(x)},$$

para todos $f \in C(Y)$, $x \in X \setminus S$, donde $S \subset X$ es un subconjunto sin puntos de acumulación. Si además X es compacto, entonces S es un conjunto finito (Milgram).

Al igual que en el capítulo anterior, dejaremos para el final los resultados relativos a espacios de funciones acotadas (sección 2.7) y los antecedentes (2.8).

2.1. Observaciones preliminares

Definición 2.1. Sean $(A, \cdot), (B, \cdot)$ dos semigrupos. Diremos que una aplicación $\phi : A \to B$ es un morfismo multiplicativo si $\phi(a \cdot \tilde{a}) = (\phi(a)) \cdot (\phi(\tilde{a}))$ para todos $a, \tilde{a} \in A$. Diremos que un morfismo es un isomorfismo si es biyectivo y $\phi^{-1}(b \cdot \tilde{b}) = (\phi^{-1}(b)) \cdot (\phi^{-1}\tilde{(b)})$ para todos $b, \tilde{b} \in B$.

Debemos extender esta definición, ya que algunas de las aplicaciones que vamos a estudiar son entre espacios que no son semigrupos:

Definición 2.2. Sean X e Y espacios topológicos, $L_X \subset C(X)$, $L_Y \subset C(Y)$. Diremos que una aplicación biyectiva $T : L_Y \to L_X$ es un isomorfismo multiplicativo si se cumplen estas dos condiciones:

- $T(f \cdot g) = (T(f)) \cdot (T(g))$ para todas $f, g \in L_Y$ tales que $f \cdot g \in L_Y$.
- $T^{-1}(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = (T^{-1}(\tilde{f})) \cdot (T^{-1}(\tilde{g}))$ para todas $\tilde{f}, \tilde{g} \in L(X)$ tales que $\tilde{f} \cdot \tilde{g} \in L_X$.

2.3. En gran parte de los artículos que componen la bibliografía se habla de *biyecciones multiplicativas* o de *biyecciones que conservan productos* en vez de hablar de isomorfismos multiplicativos. Teniendo en cuenta el título de este capítulo, uno se puede imaginar que cualquiera de estas tres expresiones podría aparecer una gran cantidad de veces, sin que la palabra "multiplicativo" sea del todo necesaria. Desde nuestro punto de vista, es más descriptivo hablar de un isomorfismo (elidiendo la palabra "multiplicativo") que de una biyección. En consecuencia, lo que hemos hecho ha sido llamar isomorfismos a este tipo de aplicaciones.

Por otra parte, también es habitual empezar a trabajar con biyecciones que cumplen $T(fg) = TfTg$ (tiene lógica llamarles biyecciones que conservan productos) para luego comprobar que, de hecho, son isomorfismos en el sentido de la definición 2.2. En nuestro caso hemos optado por ahorrarnos este paso, ya que no marca una diferencia esencial en el resto del trabajo.

2.4. Para acortar las expresiones, dados $0 \neq c \in \mathbb{R}, p \in (0, \infty)$, escribiremos $[c]^p$ en vez de sig $(c) \cdot |c|^p$; lógicamente, $[0]^p$ será 0 para todo p. Obsérvese que $[-c]^p = -[c]^p$. Del mismo modo actuaremos cuando tratemos con funciones: $[f(\,\cdot\,)]^{p(\,\cdot\,)}$ deberá entenderse como sig $(f(\,\cdot\,)) \cdot |f(\,\cdot\,)|^{p(\,\cdot\,)}$. De este modo, la expresión 2.1 queda como

$$Tf(x) = [f(\tau(x))]^{p(x)}. \tag{2.2}$$

Exponemos a continuación algunos resultados sobre automorfismos de $\mathbb{R}$. Si ϕ es uno de estos automorfismos, entonces:

Lema 2.5. $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1, \phi(-1) = -1$. *Además, para todo* $x \in \mathbb{R}$, *se cumple que* $\text{sig}\ (x) = \text{sig}\ (\phi(x))$ *y* $\phi(-x) = -\phi(x)$.

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(c) = 2$. Tenemos:

- $\phi(0) = \phi(0 \cdot c) = \phi(0) \cdot \phi(c) = 2 \cdot \phi(0)$ y esto implica $\phi(0) = 0$.
- $2 = \phi(c) = \phi(1 \cdot c) = \phi(1) \cdot \phi(c) = 2 \cdot \phi(1)$, así que $\phi(1) = 1$.
- $1 = \phi(1) = \phi((-1) \cdot (-1)) = \phi(-1) \cdot \phi(-1)$. Como ϕ es inyectivo, no puede ser $\phi(-1) = 1$, así que debe ser $\phi(-1) = -1$.
- Sea $x > 0$. Entonces existe $y \in \mathbb{R}$ distinto de 0 tal que $y \cdot y = x$. Por tanto, $\phi(x) = \phi(y \cdot y) = \phi(y) \cdot \phi(y) > 0$.
- $\phi(-x) = \phi((-1) \cdot x) = \phi(-1) \cdot \phi(x) = (-1) \cdot \phi(x) = -\phi(x)$.

$\square$

Lema 2.6. *Para todos* $c \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Q}$ *se da* $\phi([c]^p) = [\phi(c)]^p$.

Demostración. Con $c = 0$ es consecuencia del lema anterior. Por otra parte, si $c \in (0, \infty), n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\phi(c^n) = \phi(c \cdot \ldots \cdot c) = \phi(c) \cdot \ldots \cdot \phi(c) = \phi(c)^n.$$

Además, $1 = \phi(1) = \phi(c^n \cdot c^{-n}) = \phi(c^n) \cdot \phi(c^{-n}) = \phi(c)^n \cdot \phi(c^{-n})$, por lo que $\phi(c^{-n}) = \phi(c)^{-n}$. Para $m \in \mathbb{N}$, tenemos $\phi(c) = \phi\left(\left(c^{1/m}\right)^m\right) = \left(\phi\left(c^{1/m}\right)\right)^m$, así que $\phi(c^{1/m}) = (\phi(c))^{1/m}$. Así, para todos $c > 0$, $p = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, tenemos

$$\phi\left(c^{n/m}\right) = \phi\left(\left(c^{1/m}\right)^n\right) = \left(\phi\left(c^{1/m}\right)\right)^n = \left((\phi(c))^{1/m}\right)^n = (\phi\left(c\right))^{n/m}.$$

Para terminar basta en cuenta que $[-c]^p = -(c^p)$ y que $\phi(-c) = -\phi(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$. $\square$

2.7. En particular, $\{\phi([c]^p) : p \in \mathbb{Q}\} = \{[\phi(c)]^p : p \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $(0, \infty)$ para todo $0 < c \neq 1$ y en $(-\infty, 0)$ para todo $0 > c \neq -1$.

Lema 2.8. *Si* ϕ *conserva el orden entonces existe* $p \in (0, \infty)$ *tal que* $\phi(c) = [c]^p$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si ϕ conserva el orden, entonces es una biyección monótona de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, lo que implica que es homeomorfismo. Consideremos $p \in \mathbb{R}$ tal que $2^p = \phi(2)$ y la aplicación $x \mapsto [x]^p$. Como ϕ conserva el orden, debe ser $p > 0$, así que esta aplicación es continua. Para todo número racional α, tenemos $\phi(2^\alpha) = (\phi(2))^\alpha = (2^\alpha)^p$ y también $\phi([-2]^\alpha) = ([-2]^\alpha)^p$, de manera que $\phi(x) = [x]^p$ en un denso de $\mathbb{R}$. Tenemos dos aplicaciones continuas que coinciden en un denso, así que debe ser $\phi(x) = [x]^p$ en todo $\mathbb{R}$. $\square$

Lema 2.9. *Si ϕ no conserva el orden, entonces $\phi([0,\varepsilon])$ no es acotado para ningún $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, $c < c' \in \mathbb{R}$ tales que $\phi(c) > \phi(c')$; podemos suponer que $0 < c$. Entonces $\alpha = \frac{c}{c'} < 1$ y $\phi(\alpha) = \frac{\phi(c)}{\phi(c')} > 1$. Por tanto, para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^n < \varepsilon$, $\phi(\alpha^n) = (\phi(\alpha))^n > M$, de modo que $\phi([0,\varepsilon])$ no es acotado. $\square$

2.2. Comportamientos local y puntual

Sean X e Y espacios métricos completos. Consideraremos a lo largo de esta sección fijados tanto estos espacios como un isomorfismo (multiplicativo) $T : L(Y) \to L(X)$, donde $L(\,\cdot\,)$ puede ser $\mathrm{Lip}(\,\cdot\,)$ o $U(\,\cdot\,)$.

2.10. Dadas $f, g \in L(X)$ escribiremos $f \subset g$ cuando para toda $h \in L(X)$ tal que $g \cdot h = 0$ se tenga $f \cdot h = 0$.

Si consideramos $L(X)^+$ dotado de orden y de producto, esta relación $\subset$ es la misma que la de 1.3, y podemos definir la misma relación de equivalencia que entonces: $f \sim g$ cuando $f \subset g$ y $g \subset f$. Lógicamente, tenemos las versiones análogas del lema 1.5 y de sus consecuencias:

Lema 2.11. *Dadas $f, g \in L(X)$, se tiene:*

- *$f \cdot g = 0$ si y sólo si $U_f \cap U_g = \emptyset$.*
- *$f \subset g$ si y sólo si $U_f \subset U_g$.*

Lema 2.12. *Dadas tres funciones $f, g, h \in L(X)$, se tiene que $f = g$ en U_h si y sólo si $f \cdot u = g \cdot u$, para toda $u \subset h$ para la que tanto $f \cdot u$ como $g \cdot u$ pertenezcan a $L(X)$.*

Lema 2.13. *Para cada abierto regular $U \in R(Y)$, existe un único abierto regular $\mathfrak{T}(U) \in R(X)$ tal que $f = g$ en U es equivalente a $Tf = Tg$ en $\mathfrak{T}(U)$. Además, la aplicación $\mathfrak{T}$ es un isomorfismo de orden.*

Demostración. Sean $f, g, h \in L(X)$. A partir del lema anterior, es evidente que f y g coinciden en U_h si y sólo si Tf y Tg coinciden en U_{Th}. Además, todo $U \in R(Y)$ es U_h para alguna $h \in L(Y)$. Por tanto, la aplicación $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ dada por $\mathfrak{T}(U_h) = U_{Th}$ está bien definida, es biyectiva y conserva la inclusión. $\square$

Proposición 2.14. *Existen dos subconjuntos densos* $X_0 \subset X$, $Y_0 \subset Y$, *un homeomorfismo* $\tau : X_0 \to Y_0$ *y una función* $t : X_0 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida como* $t(x,c) = Tc(x)$ *tales que* $t_x(c) = t(x,c)$ *es un automorfismo de* $\mathbb{R}$ *para todo* x *y*

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))), \text{ para todos } x \in X_0, f \in L(Y).$$

Demostración. Es consecuencia de los lemas 1.12, 1.16 y 2.13 y del corolario 1.17. □

Pasamos a demostrar que todo isomorfismo conserva, esencialmente, la estructura de orden:

Proposición 2.15. *Todo punto* $y \in Y_0$ *no aislado tiene un entorno regular* U *tal que* $f \leq g$ *en* U *si y sólo si* $Tf \leq Tg$ *en* $\mathfrak{T}(U)$.

Demostración. Sea $y_0 = \tau(x_0) \in Y_0$ un punto no aislado. Suponiendo lo contrario, existen sucesiones $(x_n) = \tau^{-1}(y_n) \subset X_0$ y $(c_n) \subset (0,1)$ que tienden respectivamente a x_0 y 0 tales que $t_{x_n}(c_n) \geq 2$. Pasando a subsucesiones, podemos suponer también $d(y_{n+1}, y_0) < \frac{1}{4} d(y_n, y_0) = \alpha_n$ para todo n. La función $f(y_n) = \alpha_n$, $f(y_0) = 0$ es de Lipschitz, y además, si $f \geq g \geq 0$, entonces g también lo es. Tomamos una sucesión creciente $p_n \subset \mathbb{N}$ de manera que $\beta_n = c_n^{p_n} \leq \alpha_n$ y tenemos que la función $g(y_n) = \beta_n$ es de Lipschitz, y por tanto se puede extender a $\tilde{g} \in \mathrm{Lip}(Y)$. Para acabar sólo hay que observar que $T\tilde{g}(x_n) = t_{x_n}(c_n)^{p_n} \geq 2^n$, que tiende a infinito, por lo que $\tilde{g}$ no puede tener imagen en $L(X)$. □

2.3. Funciones uniformemente continuas

Esta sección está dedicada a los isomorfismos $T : U(Y) \to U(X)$. Estamos en condiciones de probar lo siguiente:

Teorema 2.16. *Sean* X *e* Y *espacios métricos completos, sea* $T : U(Y) \to U(X)$ *un isomorfismo. Entonces existen un homeomorfismo uniforme* $\tau : X \to Y$, *un conjunto uniformemente aislado* $S \subset X$ *(posiblemente vacío), un compacto* $K \subset (0, \infty)$ *y una función uniformemente continua* $p : X \setminus S \to K$ *tales que*

$$Tf(x) = [f(\tau(x))]^{p(x)} \text{ para todos } f \in U(Y),\ x \in X \setminus S.$$

Demostración. Sabemos que τ debe ser homeomorfismo uniforme gracias a la proposición 2.14 y a que $T0 = 0$ y $T1 = 1$, así que podemos suponer que $Y = X$ y que τ es la identidad. Sea $S_1 \subset X$ el conjunto de puntos x para los que existe algún $c_x \in (0,1)$ tal que $Tc_x(x) > 1$, y supongamos que existe una sucesión $(x_n) \subset S_1$ de manera que $d(x_n, X \setminus \{x_n\}) \to 0$. Entonces existe $(x'_n) \subset X$ de manera que $d(x_n, x'_n)$ tiende a 0. Escogemos una sucesión $(p_n) \subset \mathbb{N}$ de manera que $(c_{x_n}^{p_n}) \to 0$. Existe $f \in U(X)$ tal que $f(x_n) = c_{x_n}^{p_n}, f(x'_n) = 0$ para todo n y tendría que ser $Tf(x_n) > 1, Tf(x'_n) = 0$, lo que hace que Tf no pueda ser uniformemente continua.

Supongamos que $\{x \in X : p(x) < \frac{1}{n}\}$ no es uniformemente aislado para ningún n. Entonces existen $x_n, x'_n \in X$ tales que $d(x_n, x'_n) \to 0$ y $p(x_n) < \frac{1}{n}$. Tenemos que $T\frac{1}{2}(x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{p(x_n)} \to 1$, así que existe $f \in U(X, \mathbb{I})$ tal que $f(x_n) = T\frac{1}{2}(x_n), f(x'_n) = 1$. Por tanto, $T^{-1}f(x_n) = \frac{1}{2}, T^{-1}f(x'_n) = 1$ y esto implica que a partir de un cierto m, $d(x_n, x'_n) > \varepsilon$. Por tanto, debe existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $S_2 = \{x \in X : p(x) < \frac{1}{k}\}$ es uniformemente aislado. Por simetría, también lo es $S_3 = \{x \in X : p(x) > k'\}$ para algún k'. El conjunto $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ es uniformemente aislado y además $p(x) \in K = \left[\frac{1}{k}, k'\right]$ para todo $x \in X \setminus S$.

Además, p debe ser uniformemente continua porque $[c]^p$ lo es, para todo $c \in \mathbb{R}$. □

2.4. Funciones de Lipschitz

Trataremos ahora con los isomorfismos del tipo $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$. Comprobaremos que podemos mejorar las conclusiones del teorema 2.16. Concretamente, el conjunto S_1 de la demostración debe ser de cardinal finito, y eso hace que sea más conveniente escribir el enunciado de forma distinta. Olvidándonos por un momento de ese conjunto, lo que tienen en común las funciones "exponente"del teorema 2.16 y del próximo resultado es lo siguiente:

2.17. $\heartsuit$ *Si $p(x_n)$ converge a 0 o a ∞, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ de manera que $\{x_n : n \geq m\}$ es un conjunto uniformemente aislado.*

Teniendo esto en mente, la forma más natural de enunciar el resultado análogo a 2.16 para funciones de Lipschitz parece:

Teorema 2.18. *Sea $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ un isomorfismo. Entonces existen un subconjunto a lo sumo finito $S \subset X$ formado por puntos aislados, una función de Lipschitz $p : X \setminus S \to (0, \infty)$ que cumple la condición $\heartsuit$ y un homeomorfismo uniforme y localmente de Lipschitz $\tau : X \to Y$ tales que*

$$Tf(x) = [f(\tau(x))]^{p(x)}$$

para todos $f \in \mathrm{Lip}(Y)$ y $x \in X \setminus S$. Además $p(x) = 1$ salvo que x sea un punto aislado.

Demostración. Al igual que en la demostración del teorema 2.16, tenemos automáticamente que τ es homeomorfismo uniforme. Sea $S \subset X$ el conjunto de puntos x para los que existe algún $c_x \in (0,1)$ tal que $T^{-1}c_x(x) > 1$. Sabemos, por la proposición 2.15, que S es un conjunto uniformemente aislado y por tanto $\tau(S)$ también lo es. Así, cualquier función con valores reales definida sobre $\tau(S)$ o sobre S que sea acotada es de Lipschitz. Supongamos que el cardinal de S es infinito. Tomamos entonces sucesiones $(x_n) \subset S, (y_n) = (\tau(x_n))$ y $(\alpha_n) \subset (0,1)$ tales que, para todo n,

$$T\alpha_n(x_n) \geq n \cdot d(x_n, x_{n-1}) + T\alpha_{n-1}(x_{n-1}).$$

La función $f_0 : \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \to (0,1), f_0(y_n) = \alpha_n$ es de Lipschitz, ya que es acotada, y se puede extender a $f \in \mathrm{Lip}(Y)$, pero esta f no puede tener imagen por T en $\mathrm{Lip}(X)$. Llegamos así a una contradicción que muestra que S no puede contener más que una cantidad finita de puntos.

Sea ahora $A \subset X$ un conjunto de diámetro finito tal que $\tau(A) \subset Y$ también tiene diámetro finito. $\tau : A \to \tau(A)$ es de Lipschitz porque lo es:

- sobre $B = A \cap S$ por ser S y $\tau(S)$ conjuntos de cardinal finito,
- sobre $C = A \setminus S$, aplicando el teorema 1.23, porque T es isomorfismo de retículos al restringir las funciones de $\mathrm{Lip}(Y)$ a $\tau(A \setminus S)$,
- y en la unión $A = B \sqcup C$ porque B y C están a distancia positiva, A tiene diámetro finito y es de Lipschitz en B y C.

Por tanto, τ es localmente de Lipschitz, ya que todo punto x tiene un entorno de diámetro finito cuya imagen también tiene diámetro finito.

Además, $p \in \mathrm{Lip}(X \setminus S)$ porque $2^p \in \mathrm{Lip}(X \setminus S)$ y cumple $\heartsuit$ por lo mismo que en el teorema 2.16. Consideremos por último un punto no aislado $x_0 \in X$ y una función $f : Y \to \mathbb{R}$. En un entorno U de x_0, τ es homeomorfismo de Lipschitz, así que f es de Lipschitz en $\tau(U)$ si y sólo si $f \circ \tau$ lo es en U. Pero además f es de Lipschitz si y sólo si lo es $Tf = (f \circ \tau)^p$. Por tanto, $f \circ \tau \in \mathrm{Lip}(U) \Leftrightarrow (f \circ \tau)^p \in \mathrm{Lip}(U)$. Esto implica que $p(x_0) = 1$, por ejemplo tomando $f(y) = d(y, \tau(x_0)) \wedge 1$. $\square$

Teorema 2.19. *Sea $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ un isomorfismo, donde X e Y son espacios métricos completos sin puntos aislados. Entonces existe un homeomorfismo de Lipschitz $\tau : X \to Y$ tal que $Tf = f \circ \tau$ para toda $f \in \mathrm{Lip}(Y)$.*

Demostración. En estas condiciones tenemos $p(x) = 1$ para todo x, de modo que $Tf = f \circ \tau$ y, por tanto, τ cumple que $f \in \mathrm{Lip}(Y) \Leftrightarrow f \circ \tau \in \mathrm{Lip}(X)$. Esto implica que τ es homeomorfismo de Lipschitz. $\square$

Corolario 2.20. *Sea $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ un isomorfismo multiplicativo y lineal. Entonces existe un homeomorfismo de Lipschitz $\tau : X \to Y$ tal que $Tf = f \circ \tau$ para toda $f \in \mathrm{Lip}(Y)$.*

Demostración. El único automorfismo de álgebras de $\mathbb{R}$ es la identidad, así que $Tf(x) = f(\tau(x))$ para todos $f \in \mathrm{Lip}(Y)$, $x \in X$. □

Corolario 2.21. *En las condiciones del teorema 2.18, supongamos que tanto X como Y contienen una cantidad finita de puntos aislados. Entonces τ es homeomorfismo de Lipschitz.*

Demostración. Es evidente a partir de lo anterior. □

Resulta de interés observar que, aunque los espacios estén formados exclusivamente por puntos aislados, todavía se puede conseguir algo parecido al corolario 2.21 en algunos casos: si, por ejemplo, $X = \mathbb{N}$, entonces Y es Lipschitz homeomorfo a X (véase más abajo). Sin embargo, no podemos distinguir todos los espacios. Algo curioso que ocurre es que la estructura multiplicativa de las funciones de Lipschitz no es capaz de distinguir $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\{4^n : n \in \mathbb{N}\}$ (ejemplo 2.23), pero sí lo distingue de $\{n^n : n \in \mathbb{N}\}$ (véase el ejemplo 2.24). En cierto sentido, parece que esta estructura consigue distinguir la estructura de Lipschitz de X dotado de la distancia $d' = \log(1 + d)$.

Ejemplo 2.22. *Si $X = (\mathbb{N}, |\cdot|)$ y $T : \mathrm{Lip}(Y, d) \to \mathrm{Lip}(X)$ es un isomorfismo, entonces Y debe ser Lipschitz homeomorfo a X.*

Demostración. Para empezar, Y debe ser un conjunto uniformemente aislado, esto es, no existen $A, B \subset Y$, disjuntos y tales que $d(A, B) = 0$, ya que cualquier función indicador (combinación de ceros y unos) es de Lipschitz en $\mathbb{N}$ y esto se traslada a Y por T. Además, ningún subconjunto infinito A de Y puede tener diámetro finito, ya que entonces todas las funciones sobre A serían acotadas y, por tanto, cualquier potencia de cualquiera de estas funciones sería también de Lipschitz, cosa que no le ocurre a ningún subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

Ya que Y es uniformemente homeomorfo a $X = \mathbb{N}$, lo escribiremos como $Y = (\mathbb{N}, d)$, donde d es una métrica uniformemente equivalente a $|\cdot|$. De este modo, ambas métricas están acotadas lejos de 0 (para distancias entre puntos distintos, evidentemente). Además, supondremos que τ es la identidad.

Para que X e Y no sean Lipschitz homeomorfos tienen que exirtir dos sucesiones $(k_n), (k'_n) \subset \mathbb{N}$ para las que una de las dos condiciones siguientes se cumpla:

$$\mathbf{1} : \frac{d(k_n, k'_n)}{|k_n - k'_n|} \to \infty, \qquad \mathbf{2} : \frac{|k_n - k'_n|}{d(k_n, k'_n)} \to \infty.$$

Caso 1: Con esta hipótesis, la desigualdad triangular hace que la sucesión $d(n, n-1)$ no pueda ser acotada, así que podemos encontrar una sucesión $(k_n) \subset \mathbb{N}$ tal que $d(k_n, k_n - 1)$ tiende a infinito. Podemos suponer que $d(k_n, k_n - 1) \leq \text{mín}\{d(k_n, k_j), d(k_n, k_j - 1), j < n\}$, porque en caso contrario el resultado es evidente. Así, existe una función $f_0 \in \text{Lip}(Y)$ tal que $f_0(k_n) = d(k_n, k_n - 1)$ y que se anula en $k_n - 1$. Tf_0 debe estar acotada por un cierto $M \in \mathbb{R}$ en (k_n), ya que es de Lipschitz respecto de la distancia usual y se anula en $k_n - 1$, así que $g = Tf_0 \wedge M \in \text{Lip}^*(X)$. Esto hace que $g^2 \in \text{Lip}^*(X)$, pero $(T^{-1}g)^2$ no puede ser de Lipschitz.

Caso 2: Para empezar, esta hipótesis hace que $|k_n - k'_n| \to \infty$. En segundo lugar, tampoco puede estar acotada $d(k_n, k'_n)$ porque estaríamos como en el caso anterior. Además, las únicas funciones de $\text{Lip}(X)$ que podemos multiplicar por cualquier función indicador $I_A, A \subset \mathbb{N}$ son las acotadas, cosa que también deberá suceder en $\text{Lip}(Y)$, así que tenemos $T(\text{Lip}^*(Y)) = \text{Lip}^*(X)$. Sabemos también que, salvo en finitos $n \in \mathbb{N}$, se tiene $Tf(n) = f^{p_n}(n)$ para una cierta sucesión p_n, que debe ser acotada y estar lejos de 0 por lo anterior.

Tenemos dos opciones: que alguna de las sucesiones $(k_n), (k'_n)$ sea acotada, en cuyo caso podemos suponer que es constantemente igual a 1, o que no.

Supongamos $k'_n = 1, \forall\, n$, de modo que $\frac{k_n}{d(k_n,1)} \to \infty$ y consideremos la aplicación identidad sobre X, $f(n) = n$. Su imagen por T debe estar acotada por $Ld(n, 1)$ para algún $L \in \mathbb{R}$, así que $\frac{k_n}{Tf(k_n)} = \frac{f(k_n)}{Tf(k_n)} = k_n^{(1-p_n)}$ tiende a infinito. La función definida sobre X como $g(n) = [Tf(n)]$ (parte entera de $Tf(n)$) también es de Lipschitz y toma solamente $[d(k_n, k_{n+1})]$ valores entre $[Tf(k_n)]$ y $[Tf(k_{n+1})]$. Una función de estas características no puede provenir de ninguna función de Lipschitz definida sobre los naturales porque $\frac{k_{n+1}-k_n}{[d(k_{n+1},k_n)]}$ se va a infinito.

Si ninguna de las dos es acotada, entonces podemos encontrar subsucesiones (a las que no cambiaremos el nombre) de modo que $k_n > \text{máx}\{k'_n, 2k_{n-1}\}$, quizá intercambiando en alguna pareja k_n y k'_n. Aquí se puede utilizar el mismo razonamiento anterior, pero considerando una función que se anule en todo k'_n y tome el valor $k_n - k'_n$ en k_n. □

Ejemplo 2.23. *Para* $X = \{4^n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $Y = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ *con sus distancias usuales existe un isomorfismo* $T : \text{Lip}(Y) \to \text{Lip}(X)$ *pero no existe un homeomorfismo de Lipschitz entre ellos.*

Demostración. Es claro que X e Y no son Lipschitz-homeomorfos, así que veamos que existe un isomorfismo de $\text{Lip}(Y)$ en $\text{Lip}(X)$. Definimos $Tf(4^n)$ como $[f(2^n)]^2$ para todos $f \in \text{Lip}(Y), n \in \mathbb{N}$. Comprobemos que $Tf \in \text{Lip}(X)$ para toda $f \in \text{Lip}(Y)$ y que T es una aplicación epiyectiva sobre $\text{Lip}(X)$, ya que evidentemente es inyectiva y $T(f \cdot g) = Tf \cdot Tg$ para todas f, g:

Sea $f \in \mathrm{Lip}(Y)$ y consideremos $f_0 : Y \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f_0(0) = 0$ y que coincide con f al restringir a Y. Denotemos como L_f a la constante de Lipschitz de f_0. Tf es Lipschitz si y sólo si lo son su parte positiva y su parte negativa, así que podemos suponer $f \geq 0$. Tenemos:

$$\frac{|Tf(4^n) - Tf(4^m)|}{|4^n - 4^m|} = \frac{|(f(2^n))^2 - (f(2^m))^2|}{|(2^m)^2|} =$$
$$= \frac{|(f(2^n) - f(2^m))(f(2^n) + f(2^m))|}{|(2^n - 2^m)(2^n + 2^m)|} \leq L_f \frac{f(2^n) + f(2^m)}{2^n + 2^m} \leq$$
$$\leq L_f \frac{L_f 2^n + L_f 2^m}{2^n + 2^m} = L_f^2$$

y por tanto L_f^2 es constante de Lipschitz de Tf.

Sean $g \in \mathrm{Lip}(X)$, g_0 su extensión a $X \cup \{0\}$ tal que $g_0(0) = 0$ y L_g la constante de Lipschitz de g_0. Para $m < n \in \mathbb{N}$, y suponiendo que $g \geq 0$, tenemos

$$\frac{|T^{-1}g(2^n) - T^{-1}g(2^m)|}{2^n - 2^m} \leq \frac{\sqrt{g(4^n)} + \sqrt{g(4^m)}}{2^n - 2^m} \leq \frac{\sqrt{L_g 4^n} + \sqrt{L_g 4^m}}{2^n - 2^m} \leq$$
$$\frac{\sqrt{L_g 4^n} + \sqrt{L_g 4^{(n-1)}}}{2^n - 2^{(n-1)}} = \sqrt{L_g} \frac{2^n + 2^{(n-1)}}{2^{(n-1)}} = 3\sqrt{L_g}$$

y $T^{-1}g$ también es de Lipschitz. □

Ejemplo 2.24. *Sean* $X = \{n^n : n \in \mathbb{N}\}, Y = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$*, con sus distancias habituales como subconjuntos de* $\mathbb{N}$*. Entonces no existe ningún isomorfismo entre* $\mathrm{Lip}(X)$ *y* $\mathrm{Lip}(Y)$*.*

Demostración. Teniendo en cuenta que en estos espacios las distancias entre los puntos son lo bastante grandes como para que una función sea de Lipschitz si y sólo si está acotada por una lineal, se podría decir que las funciones más grandes que tenemos son de la forma $f(n^n) = Ln^n, g(2^n) = M2^n$. Este tipo de funciones, al multiplicarlas por una función no acotada, dejan de ser de Lipschitz, y además es claro que vamos a poder multiplicar cualquier función acotada por cualquier otra. Por tanto, nuestra estructura multiplicativa distingue las funciones que son acotadas de las que no, de tal manera que debemos tener $T(\mathrm{Lip}^*(Y)) = \mathrm{Lip}^*(X)$.

Si consideramos ahora la aplicación identidad de X, $f \in \mathrm{Lip}(X)$, tendremos que $T^{-1}f = h \cdot g$, donde $g \in \mathrm{Lip}(Y)$ es la identidad y h es una función acotada por lo dicho anteriormente. Por otro lado, $Tg = T(h^{-1})f$, así que $T(h^{-1})$ también es acotada y por tanto también lo son Th y h^{-1}.

Una vez en esta situación, consideramos α como la función definida sobre Y constantemente igual a 2. Sabemos que $T\alpha = T2$ debe ser acotada, pero esta función determina el valor de Tg, ya que $g(2^n) = 2^n = (\alpha(2^n))^n$. Por tanto, $Tg(n^n) = (T\alpha(n^n))^n$, de manera que $(Tg(n^n))^{1/n} = T\alpha(n^n)$ debe ser acotada. Pero existe una constante positiva δ para la que se cumple que $Tg(n^n) \geq \delta f(n^n) = \delta \cdot n^n$. Teniendo esto en cuenta, llegamos a que debería ser acotada la sucesión $\delta^{1/n} \cdot n$, cosa absurda, y terminamos. □

2.5. Funciones diferenciables

Consideremos dos variedades diferenciables X e Y de clase k y un isomorfismo $T : C^k(Y) \to C^k(X)$. Recordemos que las variedades no deben ser de dimensión 0 pero sí pueden ser de dimensión infinita. Sin embargo, el resultado principal de esta sección tiene forma distinta para dimensión finita y para dimensión infinita, por lo que al final separaremos ambos casos.

Comenzaremos de manera parecida a como lo hicimos en la sección dedicada a las funciones diferenciables del primer capítulo:

Proposición 2.25. *Para cada abierto regular $U \in R(Y)$, existe un único abierto regular $\mathfrak{T}(U) \in R(X)$ tal que $f = g$ en U es equivalente a $Tf = Tg$ en $\mathfrak{T}(U)$. Además, la aplicación $\mathfrak{T}$ es un isomorfismo de orden.*

Demostración. Se obtiene igual que el lema 2.13, salvo que debemos definir $\mathfrak{T}(U)$ como en el corolario 1.8: $\mathfrak{T}(U) = \bigcup_h U_{Th}$, con $U_h \subset U$. □

Corolario 2.26. *Existen subconjuntos densos $X_0 \subset X$ e $Y_0 \subset Y$ que son homeomorfos entre sí.*

Demostración. Es consecuencia de la proposición anterior y del lema 1.31. □

Al trabajar con isomorfismos entre espacios de funciones diferenciables, debemos tener en cuenta que hemos supuesto que las variedades tienen dimensión mayor o igual que 1, de manera que no contienen puntos aislados. Esto da una cierta ventaja, ya que en los puntos que no son aislados, todo isomorfismo (de cualquiera de los tipos que estamos considerando) conserva el orden. Así, tenemos:

Proposición 2.27. *Todo isomorfismo $T : C^k(Y) \to C^k(X)$ es isomorfismo de orden.*

Demostración. Basta ver que si $0 < f(\tau(x)) < 1$ entonces $0 < Tf(x) < 1$ para todos $x \in X_0$, $f \in C^k(Y)$. Sea $x_0 \in X_0$ tal que $f(\tau(x_0)) < 1$. Como $f(\tau(x_0)) < 1$, existe un entorno V de $\tau(x_0)$ tal que $f(y) < 1$ para todo $y \in V$. Como T conserva el producto localmente, Tf no puede ser constantemente igual a 1 en ningún entorno de x_0. Existe, por tanto, una sucesión $(x_n) \subset X_0$ que tiende a x_0 y tal que $Tf(x_n) \neq 1$ para todo n. Para cada n, podemos encontrar un entorno regular U_n de x_n y $(\varepsilon_n) > 0$ tales que $|Tf(x) - 1| > \varepsilon_n$ para todo $x \in U_n$. Pasando a subsucesiones si fuera necesario, existe una sucesión de números naturales p_n de modo que $Tf^{p_n}(x_n)$ tiende a 0 o a infinito, dependiendo de si $Tf(x_n) < 1$ o $Tf(x_n) > 1$. Así, en ningún caso puede ser $\lim Tf^{p_n}(x_n)$ un número real distinto de 0. Por tanto, si encontramos una función $h \in C^k(Y)$ que coincida con f^{p_n} en $\mathfrak{T}^{-1}(U_n)$, habremos probado que debe ser

$$0 = \lim Tf^{p_n}(x_n) = \lim Tf^{p_n}(x_0),$$

lo que implica que $Tf(x_0) < 1$.

Para la demostración de que tal función $h \in C^k(Y)$ existe, véase [8], pasos 2.2 y 2.3, a partir de la página 296. En el caso de que X e Y sean de dimensión finita también se puede obtener como consecuencia directa del Teorema de Whitney. $\square$

Corolario 2.28. *Todo isomorfismo $T : C^k(Y) \to C^k(X)$ es de la forma*

$$Tf(x) = [f(\tau(x))]^{p(x)},$$

donde $\tau : X \to Y$ es un homeomorfismo y $p(x) > 0$ para todo $x \in X$.

Demostración. Teniendo en cuenta que T es isomorfismo de orden, debe ser de la forma $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ por el teorema 1.34, pero además $t(x, \cdot)$ debe ser un automorfismo (multiplicativo) de $\mathbb{R}$ para todo x, así que para cada $x \in X$ existe $p(x) \in (0, \infty)$ tal que $t(x, c) = [c]^p$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Esto es: $Tf(x) = [f(\tau(x))]^{p(x)}$ para toda $f \in C^k(Y)$. $\square$

Teorema 2.29. *Si X e Y son variedades de dimensión finita, entonces todo isomorfismo $T : C^k(Y) \to C^k(X)$ es de la forma*

$$Tf(x) = f(\tau(x)),$$

donde $\tau : X \to Y$ es un difeomorfismo de clase k.

Demostración. Veamos primero que τ es un difeomorfismo: $T2 = 2^p$ es de clase k, así que $p \in C^k(X)$. Por tanto, para toda función $g : X \to (0, \infty)$

se tiene que $g \in C^k(X)$ si y sólo si $g^p \in C^k(X)$. Así, para $f : Y \to (0, \infty)$, tenemos

$$\spadesuit \qquad f \in C^k(Y) \Leftrightarrow (f \circ \tau)^p \in C^k(X) \Leftrightarrow f \circ \tau \in C^k(X),$$

lo que implica que τ es difeomorfismo de clase k gracias a que X e Y son de dimensión finita.

Falta ver que $p(x) = 1$ para todo x. Por simetría, basta comprobar que $p \geq 1$. Como ya sabemos que X e Y son difeomorfos, podemos escribir nuestro isomorfismo como $T : C^k(X) \to C^k(X), Tf = [f]^p$. Supongamos que existe $x \in X$ tal que $p(x) < 1$. Entonces, tomamos cualquier función $f \in C^k(X)$ tal que $f(x) = 0, Df(x) \neq 0$. La función $Tf = [f]^p$ no es diferenciable en x, con lo que llegamos a una contradicción que muestra que p debe ser constantemente igual a 1. □

2.5.1. Dimensión infinita

Dado que la condición ♠ sólo implica que τ sea difeomorfismo de clase k cuando las variedades son de dimensión finita, debemos definir algunos conceptos que nos ayudarán a describir los isomorfismos en el caso de que no lo sean.

Definición 2.30. Dados dos espacios de Banach y una función entre ellos $f : E \to F$, se dice que f es débilmente diferenciable en $x \in E$ si $\phi \circ f$ es diferenciable para todo funcional lineal y continuo $\phi : F \to \mathbb{R}$. Análogamente se define el concepto de "función débilmente de clase k"; un difeomorfismo débilmente de clase k será una aplicación biyectiva que es débilmente de clase k cuya inversa también lo es.

Proposición 2.31 (Gutiérrez, Llavona, [18], corolario 3.7)**.** *Toda función débilmente de clase $k \geq 2$ es de clase $(k-1)$.*

Teorema 2.32. *Si $k \geq 2$, entonces todo isomorfismo $T : C^k(Y) \to C^k(X)$ cumple que $Tf = f \circ \tau$ para un difeomorfismo débilmente de clase k.*

Demostración. Para llegar a que $f \in C^k(Y, (0, \infty)) \Leftrightarrow f \circ \tau \in C^k(X, (0, \infty))$ basta con lo que hicimos en el teorema anterior, ya que no habíamos utilizado que X e Y fueran de dimensión finita. Esta equivalencia implica que τ es difeomorfismo débilmente de clase k, así que la proposición anterior nos asegura que es difeomorfismo de clase $(k-1) \geq 1$. Para terminar, lo que utilizamos antes es que si $p(x) < 1$, entonces f^p no es diferenciable en x. Podemos volver a utilizar esto independientemente de si τ es difeomorfismo de clase k o solamente de clase 1. Por tanto, hemos terminado la demostración. □

Corolario 2.33. *Todo isomorfismo $T : C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ es de la forma*

$$Tf(x) = f(\tau(x)),$$

donde $\tau : X \to Y$ es un difeomorfismo de clase ∞.

Demostración. Es consecuencia del teorema 2.32 y la proposición 2.31. $\square$

2.6. Funciones continuas

En esta sección veremos cómo, efectivamente, podemos demostrar uno de los teoremas clásicos (véase en 2.35) de manera sencilla utilizando las mismas herramientas que hemos utilizado hasta el momento.

Proposición 2.34. *Sea $T : C(Y) \to C(X)$ un isomorfismo, $x \in X$ un punto que no sea aislado. Existe un entorno U de x tal que $f \geq g$ en U si y sólo si $T^{-1}f \geq T^{-1}g$ en $\mathfrak{T}^{-1}(U)$.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$ un punto no aislado y $f \in C(X)$ tal que $f(x_0) < 1$. Con la demostración de la proposición 2.27 basta para probar que $T^{-1}f(\tau(x_0)) < 1$.

Veamos que, de hecho, T conserva el orden en todo un entorno de x_0. Supongamos por el contrario que existieran sucesiones $(x_n) \subset X$, $(c_n) \subset (0,1)$ tales que (x_n) converge a x y $Tc_n(x_n) \geq 1$ para todo n. Entonces tomamos $y_n = \tau^{-1}(x_n)$ y una sucesión $(p_n) \subset \mathbb{N}$ de manera que p_n tienda a infinito y $h_0(y_n) = c_n^{p_n}, h_0(y_0) = 0$ sea continua. Extendemos h_0 a $h \in C(Y)$ y obtenemos que la única opción para que Th sea continua en x_0 es que $Tc_n(x_n)$ sea menor que 1 para todo n salvo finitos, con lo que acabamos. $\square$

Como consecuencia de esto, tenemos:

Teorema 2.35 (Milgram). *Sea $T : C(Y) \to C(X)$ un isomorfismo, con X e Y compactos. Entonces existen un homeomorfismo $\tau : X \to Y$, un conjunto a lo sumo finito de puntos aislados $S \subset X$ y una función continua $p : X \setminus S \to (0, \infty)$ tales que*

$$Tf(x) = [f(\tau(x))]^{p(x)} \text{ para todos } f \in C(Y),\ x \in X \setminus S.$$

Demostración. Los únicos subconjuntos de un espacio compacto sin puntos de acumulación son los conjuntos finitos, así que es evidente a partir de la proposición anterior. $\square$

2.7. Espacios de funciones acotadas

Mostraremos en esta sección resultados similares a los que hemos obtenido a lo largo del capítulo, pero considerando isomorfismos entre espacios de funciones acotadas o con valores en el intervalo $\mathbb{I} = [0, 1]$.

Uno de los principales escollos que hemos tenido a la hora de estudiar los isomorfismos del tipo $T : L(Y) \to L(X)$ ha sido que existen automorfismos de $\mathbb{R}$ que no conservan el orden. Esto no se da con los automorfismos de $\mathbb{I}$, lo que facilita grandemente las cosas:

Lema 2.36. *Todo automorfismo ϕ de $\mathbb{I} = [0, 1]$ es de la forma $\phi(c) = c^p$ para algún $p \in (0, \infty)$.*

Demostración. Podemos extender ϕ de manera trivial a un automorfismo φ de $[0, \infty)$ haciendo $\varphi(c) = \frac{1}{\phi(1/c)}$ para todo $c > 1$. Extendemos φ a todo $\mathbb{R}$ haciendo $\tilde{\varphi}(c) = -\varphi(-c)$ para todo $c < 0$ y tenemos un automorfismo de $\mathbb{R}$ que envía el intervalo $[0, 1]$ a sí mismo. Aplicando los lemas 2.8 y 2.9, acabamos. $\square$

Al igual que en la sección 1.5, aquí podemos aprovechar algunos resultados referentes a los espacios $L(\,\cdot\,)$ para obtener los análogos para $L^*(\,\cdot\,)$ y $L(\,\cdot\,, \mathbb{I})$.

2.7.1. Funciones uniformemente continuas

Teorema 2.37. ([6], teorema 4.) *Sean X e Y espacios métricos completos, $\tau : X \to Y$ un homeomorfismo uniforme y $p : X \to (0, \infty)$ una función uniformemente continua que cumple la siguiente condición:*

$\heartsuit$ Si $p(x_n)$ converge a 0 o a ∞, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ de manera que $\{x_n : n \geq m\}$ es un conjunto uniformemente aislado.

Entonces la aplicación $T : U(Y, \mathbb{I}) \to U(X, \mathbb{I})$ dada por $Tf(x) = f(\tau(x))^{p(x)}$ es un isomorfismo y todos los isomorfismos tienen esta forma.

Demostración. Al igual que en el teorema 2.16, sabemos que τ debe ser homeomorfismo uniforme gracias al lema 1.12, a la proposición 2.14 y a que $T0 = 0$ y $T1 = 1$.

Además es claro que debe ser $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ para todos $x \in X, f \in U(Y, \mathbb{I})$, y como los únicos automorfismos de $\mathbb{I}$ son de la forma $\phi(c) = c^p$ para algún $p > 0$, debe ser $Tf(x) = f(\tau(x))^{p(x)}$. Además $p \in U(X, (0, \infty))$ porque $T\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^p \in U(X, \mathbb{I})$.

Para ver que p debe cumplir $\heartsuit$ vale con la misma demostración que en el teorema 2.16. $\square$

Teorema 2.38. *Sea $T : U^*(Y) \to U^*(X)$ un isomorfismo. Entonces existen un conjunto a lo sumo finito $S \subset X$ formado por puntos aislados y una función uniformemente continua $p : X \setminus S \to (0, \infty)$ que cumple $\heartsuit$ tales que $Tf(x) = [f(\tau(x))]^{p(x)}$, para todos $f \in U^*(Y), x \in X \setminus S$.*

Demostración. Es evidente a partir de la demostración del teorema 2.16 y el lema 2.36. □

2.7.2. Funciones de Lipschitz

También son fáciles de comprobar estos tres resultados a partir del teorema 2.18:

Corolario 2.39. ([6], teorema 5.) *Sea $T : \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I}) \to \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ un isomorfismo. Entonces existen un homeomorfismo uniforme y localmente de Lipschitz $\tau : X \to Y$ y una función continua $p : X \to (0, \infty)$ tales que $Tf(x) = f(\tau(x))^{p(x)}$, y $p(x) = 1$ siempre que x no sea un punto aislado.*

Corolario 2.40. *Sea $T : \mathrm{Lip}^*(Y) \to \mathrm{Lip}^*(X)$ o $T : \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I}) \to \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ un isomorfismo, donde X e Y son espacios métricos completos de diámetro finito sin puntos aislados. Entonces existe un homeomorfismo de Lipschitz $\tau : X \to Y$ tal que $Tf = f \circ \tau$ para toda $f \in \mathrm{Lip}(Y)$.*

2.7.3. Funciones continuas

Teorema 2.41 ([6], teorema 3)**.** *Sean X e Y espacios completamente regulares que cumplen el primer axioma de numerabilidad, $\tau : X \to Y$ un homeomorfismo y $p : X \to (0, \infty)$ una función continua. Entonces la aplicación $T : C(Y, \mathbb{I}) \to C(X, \mathbb{I})$ dada por $Tf(x) = f(\tau(x))^{p(x)}$ es un isomorfismo y todos los isomorfismos tienen esta forma.*

Demostración. Es consecuencia directa del lema 2.36 y del teorema 1.37. □

2.8. Antecedentes

Repasaremos aquí algunos de los resultados más destacables que están relacionados con los de este capítulo:

El primer resultado en el que se determina la estructura de un espacio con ayuda de la estructura multiplicativa de un espacio de funciones es el teorema de Gel'fand y Kolmogorov, quienes, en [16], obtienen la estructura topológica de un espacio compacto X a partir de la estructura de álgebra de $C(X)$. En este caso, lo que cambia respecto al Banach-Stone es que en vez de $\|Tf\| = \|f\|$, debe ser $T(f \cdot g) = Tf \cdot Tg$, pero mantienen que T debe conservar la suma y el producto por escalares:

Teorema 2.42 (Gel'fand–Kolmogorov)**.** *Sean X e Y espacios topológicos compactos y de Hausdorff. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son álgebras isomorfas, entonces X e Y son homeomorfos.*

Este mismo resultado, para espacios realcompactos, fue obtenido por Hewitt (véase [21]).

A. N. Milgram prueba en [31] que si X e Y son compactos y sus espacios de funciones continuas son isomorfos como semigrupos multiplicativos, entonces X e Y son homeomorfos y, salvo en un conjunto finito $S \subset X$, se cumple que $Tf(x) = [f(\tau(x))]^{p(x)}$ para una función continua $p : X \setminus S \to (0, \infty)$. Este es el primer resultado en el que se obtiene un homeomorfismo entre los espacios subyacentes usando solamente la estructura multiplicativa de un espacio de funciones.

Mrčun y Šemrl prueban en [35] que la estructura de semigrupo multiplicativo de $C^k(X)$ determina la estructura diferenciable de la variedad diferenciable X cuando k es un número natural y la dimensión de X es finita, debilitando así la hipótesis que había necesitado J. Mrčun en [34], donde probaba el mismo resultado pero pidiendo que $T : C^k(Y) \to C^k(X)$ fuera isomorfismo de álgebras. Además consiguen demostrar que T consiste en componer con τ. Una generalización de este resultado puede encontrarse en [17], donde J. Grabowski obtiene la misma conclusión considerando subálgebras de C^k que separen puntos de cerrados (para cada $p \in X$ y cada cerrado F que no contenga a p, existe una función en la subálgebra que se anula en F y toma valor 1 en p) y sean cerradas respecto al inverso (si f está en la subálgebra y es invertible, entonces su inverso también está en la subálgebra).

En [36], D. R. Sherbert demuestra que el álgebra de funciones de Lipschitz sobre un espacio métrico compacto determina la estructura de Lipschitz del espacio.

Capítulo 3

Conclusiones y problemas abiertos

Para terminar, incluiremos algunas preguntas que surgen a partir de lo que hemos expuesto en lo dos capítulos anteriores, junto con algunas ideas que podrían ayudar a darles respuesta y otros comentarios que pueden ser de interés para futuras investigaciones.

3.1. Funciones uniformemente continuas

3.1. El teorema 1.20 asegura que si X e Y son espacios métricos completos, entonces todo isomorfismo de orden $T : U(Y) \to U(X)$ es de la forma $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$, con τ un homeomorfismo uniforme. Sin embargo, queda bastante trabajo por delante:

- Por una parte, no sabemos casi nada de la función $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(x, c) = Tc(x)$ del enunciado. Es evidente que, fijado $c \in \mathbb{R}$, $t(x, c)$ es uniformemente continua. Sin embargo, no sabemos qué pasa si fijamos $x \in X$. Y además deberíamos ser capaces de encontrar (o descartar) alguna propiedad extra para la función t sin necesidad de separar las dos variables.

- Por otra, sabemos que a partir del isomorfismo T no es posible obtener en general que los dos espacios uniformes vayan a ser uniformemente homeomorfos, pero sin embargo hay algunos tipos de espacios (no métricos) a los que se puede extender el resultado, como puede verse en [20], donde los autores consideran isomorfismos de retículos *reales*. Sería un importante avance conseguir determinar en qué contexto podemos asegurar que X e Y van a ser uniformemente homeomorfos.

- Por último, debemos añadir que no hemos sido capaces de reconstruir el espacio X a partir del retículo $U(X)$. Para esto, la caracterización del retículo real $U(X)$ dada en [19] podría ser de gran ayuda.

3.2. Sabemos, gracias al teorema 2.16, que todo isomorfismo multiplicativo $T : U(Y) \to U(X)$ puede verse como un automorfismo de $U(X)$, ya que X e Y deben ser uniformemente homeomorfos. Por un lado, sabemos que estos automorfismos son de la forma $Tf(x) = [f(x)]^{p(x)}$ salvo en un conjunto uniformemente aislado S, con $p \in U(X \setminus S, (0, \infty))$ y que salvo en otro conjunto uniformemente aislado, p está acotada lejos de 0 y de ∞. Sin embargo, no todas las funciones uniformemente continuas que cumplen estas condiciones inducen automorfismos de $U(X)$. De hecho ni siquiera las constantes los inducen: $Tf = [f]^2$ no es automorfismo de $U(\mathbb{R})$, por ejemplo. Parece claro que los automorfismos de $U(\mathbb{R})$ vendrán inducidos por funciones tales que $p(x) \to 1$ cuando $|x|$ tiende a infinito. Parece razonable pensar que si $(x_n) \subset X$ es una sucesión, con $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$, para la que existe $f \in U(X)$ tal que $f(x_n)$ es no acotada, entonces también debe tender $p(x_n)$ a 1 cuando n tiende a ∞.

Sin embargo, no hemos comprobado que estas afirmaciones sean ciertas y, sobre todo, sería interesante determinar para cada espacio cuáles son exactamente las funciones $p : X \to (0, \infty)$ que hacen que $Tf = [f]^p$ sea un automorfismo de $U(X)$.

3.2. Funciones de Lipschitz

3.3. Sabemos gracias al teorema 1.22 que todo isomorfismo de retículos $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ viene inducido por un homeomorfismo de Lipschitz siempre que X e Y tengan diámetro finito. Sabemos también que si ambos tienen diámetro infinito, entonces puede que no sean ni siquiera uniformemente homeomorfos. Una pregunta que surge de manera natural es si puede ser que uno de ellos tenga diámetro finito y el otro no. Además, queda saber si se puede rescatar la estructura de X a partir del orden de $\mathrm{Lip}(X)$ y también qué debe cumplir t para que $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ defina un isomorfismo de orden.

3.4. Para isomorfismos multiplicativos, falta ver si la función exponente tiene o no que ser acotada. Si tuviera que serlo (cosa que no parece descabellada), tendríamos automáticamente que todo isomorfismo $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ induce otro isomorfismo $T : \mathrm{Lip}^*(Y) \to \mathrm{Lip}^*(X)$.

3.3. Funciones diferenciables

3.5. Aunque puede resultar algo decepcionante el teorema 1.34, ya que en los demás casos se consiguen afinar las hipótesis hasta obtener exactamente las necesarias para tener una identificación todo lo buena posible entre los espacios X e Y; lo cierto es que ha resultado muy útil a la hora describir los isomorfismos multiplicativos. La principal pregunta que debemos intentar responder es qué debe cumplir τ para que $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ pueda ser un isomorfismo de orden. Esto es: ¿debe ser τ un difeomorfismo (quizá difeomorfismo débil)?

La parte mala: En dimensión infinita apenas vale para nada saber que dos variedades diferenciables sean homeomorfas: se pueden encontrar espacios homeomorfos como l_2 y l_1 cuyos espacios de funciones diferenciables son significativamente distintos. De hecho, en l_2 hay funciones de clase infinito de soporte acotado, mientras que en l_1 no las hay ni siquiera de clase 1; esto en particular significa que en $C^1(l_1)$ no existen funciones que coincidan en un abierto no vacío y que en *ningún caso* existe el supremo o el ínfimo de dos funciones salvo que una de ellas sea mayor o igual que la otra.

La parte buena:

En dimensiones bajas: Es conocido que si dos variedades diferenciables de dimensión menor o igual que 3 son homeomorfas, entonces son difeomorfas. Por tanto, si X (y por tanto Y) tiene dimensión 3 o menos, entonces existe un difeomorfismo entre ellas (aunque no sepamos si es τ).

Espacios vectoriales: Se sabe que sólo en el caso $n = 4$ existen distintas estructuras diferenciables en $\mathbb{R}^n$, así que un corolario inmediato de este resultado es que si $X = \mathbb{R}^n$, con $n \neq 4$, entonces X e Y también tienen que ser variedades difeomorfas.

Esferas: También es conocido que las esferas de dimensiones menores que 7 tienen una única estructura diferenciable, así que Y debe ser difeomorfo a X en el caso de que sea $X = S^n$, con $n \leq 6$. El caso $X = S^7$ podría ser un buen candidato para encontrar dos variedades diferenciables no difeomorfas cuyos espacios de funciones sean isomorfos, ya que además estas llamadas *esferas exóticas* no sólo son variedades de construcción razonablemente sencilla (véase, por ejemplo, [12], capítulo 3, sección 28) sino que además son difeomorfas a S^7 salvo en un punto.

Comentario 3.6. Podemos obtener algo bastante sorprendente (aparte del homeomorfismo τ y de la representación $Tf(x) = t(x, f(\tau(x))))$ a partir de la estructura de orden de C^k y que de alguna manera está implícito en la prueba del lema 1.32: podemos determinar no sólo cuándo dos funciones coinciden en un punto, sino también cuándo son tangentes. Ya sabemos que dos funciones f, g coinciden en un punto y exactamente cuando hay otra función que es mayor que ambas en algunos puntos cercanos y y menor que ambas en otros puntos cercanos a y. Una vez que coinciden en y, para que sean tangentes es condición necesaria y suficiente que exista alguna función que coincida con ambas en y y sea mayor o igual que ambas (en todo el espacio). Por tanto, si f y g son tangentes, entonces Tf y Tg deben serlo también.

De hecho, si las variedades en las que estamos trabajando son de dimensión 1, podemos determinar de qué orden es el contacto de estas dos funciones. Consideraremos $k = \infty$ y $X = Y = \mathbb{R}$, por no tener que distinguir casos. El orden del contacto es par exactamente cuando una de las funciones es mayor o igual que la otra en un entorno de y. Para comprobar que T conserva el orden del contacto, sólo hay que observar que f y g tienen un contacto de orden impar y mayor o igual que 3 en y exactamente cuando existe alguna función mayor o igual que ambas con la que coinciden en y, pero no se cumple $f \geq g$ (ni $f \leq g$) en ningún entorno de y. Que f y g tengan un contacto de orden par y mayor o igual que 4 es equivalente a que exista una función con contacto de orden impar y mayor o igual que 3 que sea mayor y menor que ambas cerca de y, en el sentido anterior. Siguiendo de esta manera, obtenemos que el orden del contacto de Tf y Tg en $\tau^{-1}(y)$ es al menos igual que el de f y g en y. Por simetría, deben ser iguales. Un objetivo razonable parece intentar comprobar si esto sucede también cuando las variedades son de dimensión mayor que 1.

3.7. El teorema 2.32 también deja algunas preguntas: en un primer momento habíamos creído que una función biyectiva $\tau : X \to Y$ tal que $f \circ \tau \in C^k(X)$ para toda $f \in C^k(Y)$ debía ser de clase k, como ocurre en dimensión finita. De hecho así está publicado en [8]. Debemos agradecer a Luis Sánchez González que nos advirtiera de que esto no es así (al menos nadie lo ha comprobado) y que nos informara de cuál es la situación real. Lo que se sabe ahora mismo es que toda función débilmente de clase k es de clase $(k-1)$. Es conocido que existe una función de $\mathbb{R}$ en c_0 que es débilmente de clase 1 pero no es diferenciable en ningún punto, véase [2]. No sabemos si esta función se puede extender a un homeomorfismo de c_0 en c_0 que sea débilmente diferenciable. Si se pudiera, tendríamos un ejemplo de automorfismo multiplicativo de $C^1(c_0)$ que no viene inducido por un difeomorfismo *fuerte*, de hecho sería automorfismo de álgebras. En el mismo artículo, Bachir y Lancien prueban que si un espacio de Banach E no tiene la propiedad de Schur, entonces existe una función de $\mathbb{R}$ en E que es débilmente de clase 1 pero no diferenciable en 0.

- ¿Se puede extender esta función a un difeomorfismo débil para algún E?

- Teniendo en cuenta que ningún espacio de dimensión infinita tiene la propiedad de Schur y funciones diferenciables de soporte acotado, ¿se puede extender esta función a un difeomorfismo débil para *todo* E?

3.4. Problemas topológicos

3.8. Sería interesante intentar generalizar de algún modo el lema 1.12, de manera que no fuera necesario que los espacios sean completos o ni siquiera métricos para obtener un homeomorfismo entre subconjuntos densos en X y en Y a partir de un isomorfismo de orden $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$.

Es evidente que la demostración del lema no va a funcionar en ninguno de estos casos más generales: por ejemplo, considerando espacios métricos no completos podemos obtener un isomorfismo de retículos entre $R(\mathbb{Q})$ y $R(\mathbb{Q}+\pi)$ componiendo los isomorfismos obvios $R(\mathbb{Q}) \to R(\mathbb{R})$ y $R(\mathbb{R}) \to R(\mathbb{Q}+\pi)$. Este isomorfismo envía cada abierto regular $U \subset \mathbb{Q}$ al interior (en $\mathbb{Q}+\pi$) de la clausura de U en $\mathbb{R}$; y tenemos (con la notación del lema 1.12), $\mathcal{R}(y) = \emptyset$ para todo $y \in \mathbb{Q}$.

Sin embargo, es obvio que ambos espacios son homeomorfos, lo que nos hace pensar que quizá se pueda obtener algo dándole un nuevo enfoque. Tenemos lo siguiente: aunque X e Y no sean completos, si $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ es un isomorfismo, podemos considerar sus compleciones $\tilde{X}, \tilde{Y}$ y el isomorfismo $\tilde{\mathfrak{T}} : R(\tilde{Y}) \to R(\tilde{X})$ dado por la composición de los isomorfismos habituales, $R(\tilde{Y}) \to R(Y) \to R(X) \to R(\tilde{X})$. Como $\tilde{Y}$ y $\tilde{X}$ son completos, existen G_δ densos $\tilde{Y}_0 \subset \tilde{Y}$, $\tilde{X}_0 \subset \tilde{X}$ que son homeomorfos entre sí. Lo que faltaría sería obtener subconjuntos densos $X_0 \subset X, Y_0 \subset Y$ y homeomorfismos inyectivos $\tau_X : X_0 \hookrightarrow \tilde{X}_0, \tau_Y : Y_0 \hookrightarrow \tilde{Y}_0$ de manera que $\tau \circ \tau_X(X_0)$ coincidiera con $\tau_Y(Y_0)$.

Bibliografía

[1] ANDERSON, F. W., A lattice characterization of completely regular G_δ spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** 757–765.

[2] BACHIR, M. and LANCIEN, G., On the composition of differentiable functions *Canad. Math. Bull.* **46** (2003) no. 4, 481–494)

[3] BANACH, S., Théorie des Opérations linéaires, *Monografje Matematyczne*, **I** (1932).

[4] BIRKHOFF, G., Lattice Theory. *American Mathematical Society Colloquium Publications* **25**, New York, 1948.

[5] CABELLO SÁNCHEZ, F. and Homomorphisms on lattices of continuous functions, *Positivity* **12** (2008) no. 2, 341–362.

[6] CABELLO SÁNCHEZ, F., CABELLO SÁNCHEZ, J., ERCAN, Z., and ÖNAL, S., Memorandum on Multiplicative Bijections and Order, *Semigroup Forum,* **79,** (2009), 193–209.

[7] CABELLO SÁNCHEZ, F. and CABELLO SÁNCHEZ, J., Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions. *Houston Journal of Mathematics,* **76,** (2010) no. 1, 181–202.

[8] CABELLO SÁNCHEZ, F. and CABELLO SÁNCHEZ, J., Some preserver problems on algebras of smooth functions, *Arkiv för Matematik,* **48,** (2010), 289–300.

[9] CABELLO SÁNCHEZ, F. and CABELLO SÁNCHEZ, J., Multiplicative semigroups of Lipschitz functions. *Extracta Mathematicae,* **25,** (2010) no. 3, 239–247.

[10] CABELLO SÁNCHEZ, F. and CABELLO SÁNCHEZ, J., Lattices of uniformly continuous functions. *Topology and its Applications,* **160,** (2013), 50–55.

[11] Deville, R., Godefroy, G., and Zizler, V., Smoothness and renormings in Banach spaces. *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics,* **64**. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.

[12] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T., and Novikov, S. P., Modern Geometry—Methods and Applications. Part III. Introduction to Homology Theory. *Graduate Texts in Mathematics,* **124**. Springer-Verlag, 1990.

[13] Fabian, M. and Zizler, V., An elementary approach to some questions in higher order smoothness in Banach spaces. *Extracta Math.* **14** (1999), no. 3, 295–327.

[14] Garrido, M. I. and Jaramillo, J. A., A Banach–Stone Theorem for Uniformly Continuous Functions. *Monatsh. Math* **131** (2000) 189–192.

[15] Garrido, M. I. and Jaramillo, J. A., Homomorphisms on Function Lattices. *Monatsh. Math* **141** (2004) 127–146.

[16] Gel'fand, I. and Kolmogorov, A. M., On rings of continuous functions on topological spaces, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **22**, (1939), no. 1, 11–15.

[17] Grabowski, J., Isomorphisms of algebras of smooth functions revisited. *Arch. Math.* (Basel) **85** (2005), no. 2, 190–196.

[18] Gutiérrez, J. M. and Llavona, J. G., Composition operators between algebras of differentiable functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **338** (1993) 769–782.

[19] Hušek, M., and Pulgarín, A., Lattices of uniformly continuous functions. *Quaestiones Mathematicae* **36** (2013) 389–397.

[20] Hušek, M., and Pulgarín, A., Banach-Stone-like theorems for lattices of uniformly continuous functions. *Quaestiones Mathematicae* **35** (2012) 417–430.

[21] Hewitt, E., Rings of real-valued continuous functions, I. *Trans. Amer. Math. Soc.* **64** (1948) 54–99.

[22] Ito, T., On the continuity of lattice automorfisms on continuous function lattices. *Illinois J. Math.* **8** (1964) 419–424.

[23] Kakutani, S., Weak topology, bicompact set and the principle of duality. *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **16** (1940) 63–67.

[24] Kaplansky, I., Lattices of continuous functions. *Bull. Amer. Math.Soc.* **53** (1947) 617–623.

[25] Kaplansky, I., Lattices of continuous functions II. *Amer. J. Math.* **70** (1948) 626–634.

[26] Kriegl, A. and Michor, P. W., The convenient setting of global analysis. *Mathematical Surveys and Monographs*, **53**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[27] Lochan, R. and Strauss, D., Lattice homomorphisms of spaces of continuous functions. *J. London Math. Soc.* (2) **25** (1982), no. 2, 379–384.

[28] Marovt, J., Order preserving bijections of $C(X, \mathbb{I})$. *T. Math. Anal. Appl.* **311**, 2005, 567–581.

[29] McShane, E. J., Extension of range of functions. *Bull. Amer. Math Soc.* **40**, 1934, 837–842.

[30] Megginson, J., An introduction to Banach space theory. *Graduate Texts in Mathematics* **183**, Springer-Verlag, New York, 1998.

[31] Milgram, A. N., Multiplicative semigroups of continuous functions. *Duke Math. J.* **16**, 1949, 377–383.

[32] Milnor, J. W., On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.* (2) **64**, 1956, 399–405.

[33] Milnor, J. W., Lectures on the h-cobordism Theorem. Notes by L. Siebenmann and J. Sondow.

[34] Mrčun, J., On isomorphisms of algebras of smooth functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **133**, 2005, 3109–3113.

[35] Mrčun, J. and Šemrl, P., Multiplicative bijections between algebras of differentiable functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **32** (2007), no. 2, 471–480.

[36] Sherbert, D. R., Banach algebras of Lipschitz functions. *Pacific J. Math.* **13** (1952) 1387–1399.

[37] Shirota, T., A generalization of a theorem of I. Kaplansky. *Osaka Math. J.* **4** (1952) 121–132.

[38] Srivastava, S. M., A course on Borel sets. *Graduate Texts in Mathematics* **180**, Springer-Verlag, New York, 1998.

[39] Stone, M. H., Applications of the theory of Boolean rings to general topology. *Transactions of the A.M.S.* **41** (1937), no. 3, 375–481.

[40] Stone, M. H., A general theory of spectra II. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A* **27** (1941), no. 1, 83–87.

[41] Weaver, N., Lattices of Lipschitz functions. *Pacific J. Math.* **164**, 179–193.

[42] Weaver, N., Order completeness in Lipschitz algebras. *J. Funct. Anal.* **130**, 118–130.

[43] Weaver, N., Lipschitz algebras. *World Scientific*, Singapore, 1999.

[44] Whitney, H., Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Transactions of the A.M.S.* **36** (1934), no. 1, 63–89.

[45] Willard, S., General Topology. *Addison–Wesley*, 1970.

Apéndice A

Memorandum on multiplicative bijections and order

Semigroup Forum
DOI 10.1007/s00233-009-9152-2

RESEARCH ARTICLE

Memorandum on multiplicative bijections and order

Félix Cabello Sánchez · Javier Cabello Sánchez · Zafer Ercan · Süleyman Önal

Received: 7 April 2008 / Accepted: 25 April 2009

Abstract Let $C(X, \mathbb{I})$ denote the semigroup of continuous functions from the topological space X to $\mathbb{I} = [0, 1]$, equipped with the pointwise multiplication. The paper studies semigroup homomorphisms $C(Y, \mathbb{I}) \to C(X, \mathbb{I})$, with emphasis on isomorphisms. The crucial observation is that, in this setting, homomorphisms preserve order, so isomorphisms preserve order in both directions and they are automatically lattice isomorphisms. Applications to uniformly continuous and Lipschitz functions on metric spaces are given. Sample result: if Y and X are complete metric spaces of finite diameter without isolated points, every multiplicative bijection $T : \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I}) \to \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ has the form $Tf = f \circ \tau$, where $\tau : X \to Y$ is a Lipschitz homeomorphism.

Keywords Semigroups of continuous functions · Homomorphism · Representation

Communicated by Rainer Nagel.

F. Cabello Sánchez and J. Cabello Sánchez are supported in part by DGICYT projects MTM2004-02635 and MTM2007-6994-C02-02.
J. Cabello Sánchez is supported in part by a grant of the UEx (Programa Propio–Acción 2).

F. Cabello Sánchez (✉) · J. Cabello Sánchez
Departamento de Matemáticas, UEx, 06071 Badajoz, Spain
e-mail: fcabello@unex.es
url: http://kolmogorov.unex.es/~fcabello

J. Cabello Sánchez
e-mail: angawen@gmail.com

Z. Ercan
Department of Mathematics, Abant Izzet Baysal University, Gölköy Kampusu, 14280 Bolu, Turkey
e-mail: zercan@ibu.edu.tr

S. Önal
Department of Mathematics, Middle East Technical University, 06531 Ankara, Turkey
e-mail: osul@metu.edu.tr

Published online: 11 June 2009

Introduction

This paper contemplates $C(X, \mathbb{I})$ as a semigroup under pointwise multiplication. As usual, $C(X, \mathbb{I})$ denotes the set of all continuous functions from the topological space X to $\mathbb{I} = [0, 1]$. Besides its semigroup structure, the set $C(X, \mathbb{I})$ is a lattice with the pointwise order, that is, $f \leq g$ meaning $f(x) \leq g(x)$ for all $x \in X$. Also, as a subset of the Banach algebra of bounded continuous functions $f : X \to \mathbb{R}$, it is a topological space with the metric

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

We emphasize that such notions as 'homomorphism', 'isomorphism', and the like refer to the 'default' semigroup setting, unless otherwise stated.

Plan of the paper The main purpose of the paper is to describe semigroup isomorphisms (multiplicative bijections) $T : C(Y, \mathbb{I}) \longrightarrow C(X, \mathbb{I})$.

The crucial observation (Lemma 3) is that, in this setting, a homomorphism must preserve order, so isomorphisms preserve order in both directions and therefore they are automatically lattice isomorphisms. This allows one to use the basic material on lattices contained in Sect. 1.

From this we obtain that if X and Y are compact spaces, then there is a homeomorphism $\tau : X \to Y$ and a continuous function $\mathfrak{t} : X \to [0, \infty]$ such that

$$(f(\tau(x))^-)^{\mathfrak{t}(x)} \leq Tf(x) \leq (f(\tau(x))^+)^{\mathfrak{t}(x)}$$

for all $f \in C(Y, \mathbb{I})$ and all $x \in X$. Moreover, $0 < \mathfrak{t}(x) < \infty$ on a dense set where, a fortiori, one has

$$Tf(x) = f(\tau(x))^{\mathfrak{t}(x)}. \tag{1}$$

In general we will not have this nice representation on the whole domain X, even if $Y = X$ is compact (Example 1). In fact, this holds if and only if T is continuous (Proposition 2).

It should be noted that some 'balance' condition on the couple Y, X is necessary to get a homeomorphism between X and Y out from an isomorphism T. Indeed, if X is completely regular and βX is its Stone-Čech compactification, then $C(X, \mathbb{I})$ and $C(\beta X, \mathbb{I})$ are obviously isomorphic while X is homeomorphic to βX only if X is compact.

We present some applications in Sect. 3. We give a complete description of the isomorphisms between the semigroups of continuous functions on metric spaces: if Y and X are metric spaces (compact or not), every isomorphism has a representation as in (1) for all $x \in X$. A similar result is obtained for uniformly continuous functions when Y and X are complete.

Although we have no complete description of the isomorphisms of semigroups of Lipschitz functions, let us mention the following sample result (Corollary 2): if Y and X are complete metric spaces of finite diameter without isolated points, then every semigroup isomorphism $T : \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I}) \to \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ has the form $Tf = f \circ \tau$, where $\tau : X \to Y$ is a Lipschitz homeomorphism—there is no $\mathfrak{t}$ here!

Our closing application concerns measurable functions. Under rather mild assumptions on the measure spaces $(Y, \mathfrak{Y}, \nu)$ and $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ we show that every multiplicative mapping $T : L^\infty(\mu, \mathbb{I}) \to L^\infty(\nu, \mathbb{I})$ has the form given in (1), where $\tau : X \to Y$ is a measurable isomorphism and $\mathfrak{t} : X \to (0, \infty)$ a measurable function. We decided to present a simple, self-contained, (lattice-free), proof because this result has some interest in operator theory and rounds-off earlier results by Molnár on effect algebras. See Sect. 3 for unexplained terms.

Predecessors As the reader can imagine this is not the first paper on semigroups of continuous functions. To the best of our knowledge the first one is Milgram's [14], a paper of classical elegance where it is shown that if Y and X are compact spaces and $T : C(Y, \mathbb{R}) \to C(X, \mathbb{R})$ is a semigroup isomorphism, then there is a homeomorphism $\tau : X \to Y$, a finite (possibly empty) set $S \subset X$ of isolated points, a continuous function $\mathfrak{t} : X \backslash S \to (0, \infty)$, and for each $x \in S$ an automorphism σ_x of $\mathbb{R}$, such that

$$Tf(x) = \begin{cases} f(\tau(x))^{\mathfrak{t}(x)} & \text{for } x \in X \backslash S, \\ \sigma_x(f(\tau(x))) & \text{for } x \in S. \end{cases}$$

Milgram uses what he called O-ideals. Although this approach could be used in our setting, dealing with functions taking values in $\mathbb{I}$ is more difficult: for instance, the statement 'f vanishes at some point of X' cannot be expressed within the semigroup structure of $C(X, \mathbb{I})$. Of course that statement is equivalent to 'f has no inverse' in $C(X, \mathbb{R})$. See Remark 1 for more on this.

Later on, Shirota [18] stated that two realcompact spaces Y and X are homeomorphic if and only if the semigroups $C(X, \mathbb{R})$ and $C(Y, \mathbb{R})$ are isomorphic. The argument given in [18] depends on lattice theory, but the proof seems to contain some gaps. A complete proof appeared much later in [7]. Curiously enough the proof by Császár is very close in spirit to Milgram's. To be true, Császár considers more general semigroups $C(X, \mathbb{S})$, where $\mathbb{S}$ is an adequate semigroup of real numbers and so Theorem 1 should be credited to him. Neither [18] nor [7] give any representation of the corresponding isomorphisms.

Very recently Marovt has published a paper [13] establishing the form on the automorphisms of $C(X, \mathbb{I})$, with X compact metric (roughly the statement of Theorem 3 but assuming $X = Y$ to be compact). Marovt's main motivation was the study of sequential isomorphisms of effect algebras. See Remark 3 for explanations.

Notations Topological spaces are assumed to be completely regular and Hausdorff. Operations and relations in $C(X, \mathbb{I})$ are defined 'pointwise': for instance $f < g$ means $f(x) < g(x)$ for all $x \in X$.

To avoid any possible confusion with exponents, given a mapping $f : X \to Y$ and $A \subset Y$, we write $f^{\leftarrow}(A)$ for the set $\{x \in X : f(x) \in A\}$ and we use the same notation for the inverse of f, provided it exists. The characteristic function of the set A is denoted 1_A, while the identity map on X is $\mathbf{1}_X$. The set of constant functions from X to $\mathbb{I}$ is denoted $\mathbb{I}_X$. Apart from these conventions our notation is standard: we follow Willard [21] for topology matters, Birkhoff [3] for lattice theory, Weaver [20] for Lipschitz functions, and Cohn [6] for measure theory.

Finally, we will use a recent result by Albiac and Kalton which allows us to represent certain real Banach algebras as the algebra of all real-valued continuous functions on a compact space: if $\mathfrak{A}$ is a (real, unital) Banach algebra whose norm satisfies the inequality

$$2\|fg\| \leq \|f^2 + g^2\| \quad (f, g \in \mathfrak{A}),$$

then, as a Banach algebra, $\mathfrak{A}$ is isometrically isomorphic to $C(X, \mathbb{R})$, for some compact space X. See [1, 2] for the remarkably simple proof.

1 Background on lattice homomorphisms

In this section we gather some basic material on the *lattices* $C(X, \mathbb{I})$ and their homomorphisms. We will not give proofs and we refer the reader to [4], where the corresponding results for $C(X, \mathbb{R})$ are stated and proved. Replacing $\mathbb{R}$ by $\mathbb{I}$ requires only minor changes in the proofs and we leave it to the reader.

Let A and B be lattices. A lattice homomorphism is a mapping $T : A \to B$ such that $T(f \vee g) = Tf \vee Tg$ and $T(f \wedge g) = Tf \wedge Tg$ for all $f, g \in A$.

Proposition 1 (See Proposition 1 in [4]) *Let Y and X be compact spaces and $T : C(Y, \mathbb{I}) \to C(X, \mathbb{I})$ a lattice homomorphism preserving* 0 *and* 1. *Then there is a unique continuous mapping $\tau : X \to Y$ such that*

$$t(x, f(\tau(x))^-) \leq Tf(x) \leq t(x, f(\tau(x))^+) \quad (f \in C(Y), x \in X),$$

where $t(x, c) = Tc(x)$. Here, 0^- should be treated as 0 *and 1^+ as* 1.

The above τ shall be referred as the map *associated* to T. It is easily seen that sending T to τ we get a (contravariant) functor, which clearly implies that τ is a homeomorphism if T is a lattice isomorphism—an old result by Kaplansky [12].

One may wonder under what conditions one can get a representation like $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ for *all* $x \in X$. We have the following result, where L is said to be *increasing* if $f < g$ implies $Lf < Lg$.

Lemma 1 (See Lemma 3 in [4]) *Let Y and X be compact spaces, $T : C(Y, \mathbb{I}) \to C(X, \mathbb{I})$ a lattice isomorphism, and let t and τ be as in Proposition* 1. *The following statements are equivalent*:

(a) *T is continuous on $\mathbb{I}_Y$ for the topology of pointwise convergence in $C(X, \mathbb{I})$.*
(b) *T is continuous in the topology of pointwise convergence.*
(c) *$Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$, for all f and x.*
(d) *$T^{\leftarrow}$ (the inverse of T) is increasing.*
(e) *T is continuous.*

It is proved in [4, Theorem 1] that it T is a lattice isomorphism, then $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ holds true for all x in some dense G_δ subset of X, possibly depending on T. Also, one has:

Lemma 2 (See Lemma 5 in [4]) *Let Y and X be compact spaces, $T : C(Y,\mathbb{I}) \to C(X,\mathbb{I})$ a lattice isomorphism and let $x \in X$ satisfy one of the following conditions*:

- *There is a sequence (x_n) converging to x, with $x_n \neq x$ for all n.*
- *X is locally connected at x.*

Then $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ for all $f \in C(Y,\mathbb{I})$.

2 Multiplicative bijections

In this section we move to our main subject, that is, multiplicative mappings. The following lemma relates multiplication and order, answering a question raised in [4].

Lemma 3 *Every multiplicative mapping $T : C(Y,\mathbb{I}) \to C(X,\mathbb{I})$ is order preserving. Consequently, every multiplicative bijection $T : C(Y,\mathbb{I}) \to C(X,\mathbb{I})$ is a lattice isomorphism.*

Proof First, note that for each $m,n \in \mathbb{N}$ and f one has $T(f^{m/n}) = (Tf)^{m/n}$. Indeed, from $(f^{1/n})^n = f$ we have $(T(f^{1/n}))^n = Tf$, that is, $T(f^{1/n}) = (Tf)^{1/n}$. As T is multiplicative we have $T(f^{m/n}) = (Tf)^{m/n}$.

Now, let $f \leq g$. Fix $n \in \mathbb{N}$, and define $h : Y \to \mathbb{I}$ as

$$h(y) = 0 \quad \text{if } g(y) = 0 \quad \text{and} \quad h(y) = \frac{f(y) f^{\frac{1}{n}}(y)}{g(y)} \quad \text{otherwise.}$$

Clearly, $h \leq f^{1/n} \leq 1$ and it is obvious that $f \cdot f^{1/n} = h \cdot g$.

Notice that h is continuous on Y. The continuity at every point where $h(y) \neq 0$ is clear; while, if $h(y) = 0$, then so $f(y) = 0$, and it follows from the estimate $h \leq f^{1/n}$ and the continuity of $f^{1/n}$. Finally, from

$$T(f)T(f)^{\frac{1}{n}} = T(f)T(f^{\frac{1}{n}}) = T(ff^{\frac{1}{n}}) = T(hg) = T(h)T(g) \leq T(g)$$

we get $Tf \leq Tg$, since n is arbitrary. This completes the proof. □

Now, we have:

Theorem 1 (Császár) *Two compact spaces Y and X are homeomorphic if and only if the multiplicative semigroups $C(X,\mathbb{I})$ and $C(Y,\mathbb{I})$ are isomorphic.*

Proof This follows from the corresponding result for lattices, in view of Lemma 3. □

So, let T be a semigroup isomorphism and define $t : X \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ as before, that is, $t(x,c) = Tc(x)$. For fixed x, the map $t(x,\cdot)$ is a multiplicative endomorphism of $\mathbb{I}$. It is proved in [13] that each multiplicative selfmap on $\mathbb{I}$ preserving 0 and 1 has the form $c \mapsto c^{\mathrm{t}}$ for some $\mathrm{t} \in [0,\infty]$. Here, for $\mathrm{t} \in \{0,\infty\}$, we understand

$$c^{\mathrm{t}} = \lim_{s \to \mathrm{t}} c^s \quad (0 < s < \infty).$$

Hence an endomorphism of $\mathbb{I}$ preserving 0 and 1 is continuous if and only if it assumes some value in (0, 1), equivalently, if it is continuous both at 0 and 1. Thus with these conventions we have

$$Tc(x) = t(x, c) = c^{\mathfrak{t}(x)},$$

for a unique mapping $\mathfrak{t} : X \to [0, \infty]$. Quite clearly, $\mathfrak{t}$ is continuous, and in fact, we can recover it from the image under T of any constant $c \in (0, 1)$. Indeed, for $0 < c < 1$, one has

$$\mathfrak{t}(x) = \log_c Tc(x),$$

if we agree that $\log_c 0 = \infty$ for $0 < c < 1$. Now, Proposition 1 yields:

Theorem 2 *Let $T : C(Y, \mathbb{I}) \to C(X, \mathbb{I})$ be a multiplicative bijection, where Y and X are compact spaces. Then there is a homeomorphism $\tau : X \to Y$ and a continuous function $\mathfrak{t} : X \to [0, \infty]$ such that*

$$(f(\tau(x))^{-})^{\mathfrak{t}(x)} \leq Tf(x) \leq (f(\tau(x))^{+})^{\mathfrak{t}(x)} \tag{2}$$

for all $f \in C(Y, \mathbb{I})$ and all $x \in X$, where 0^{-} is treated as 0 and 1^{+} as 1. Moreover, the open set $D = \mathfrak{t}^{\leftarrow}(0, \infty)$ is dense in X and one has $Tf(x) = f(\tau(x))^{\mathfrak{t}(x)}$ for all f and all $x \in D$.

Proof It only remains to see that D is dense. Since $X = D \oplus \mathfrak{t}^{\leftarrow}(0) \oplus \mathfrak{t}^{\leftarrow}(\infty)$ it suffices to see that $\mathfrak{t}^{\leftarrow}(0)$ and $\mathfrak{t}^{\leftarrow}(\infty)$ have empty interior. Let us verify it for the later case, the former being similar. Assume x interior to $\mathfrak{t}^{\leftarrow}(\infty)$. Let $f \in C(Y, [0, \frac{1}{2}])$ be a function vanishing outside $\tau[\mathfrak{t}^{\leftarrow}(\infty)]$ and such that $f(\tau(x)) = \frac{1}{2}$. Then (2) implies that $Tf = 0$, an absurd. □

Now, bearing Lemma 1 in mind, we can add some more criteria for a multiplicative bijection to be continuous. Notice that the equivalence between (e) and (f) fails for mere lattice isomorphisms.

Proposition 2 *Let Y and X be compact spaces. For a multiplicative bijection $T : C(Y, \mathbb{I}) \to C(X, \mathbb{I})$ the following statements are equivalent*:

(a) *For each $x \in X$ one has $Tc(x) \to 0$ as $c \to 0^{+}$ and $Tc(x) \to 1$ as $c \to 1^{-}$.*
(b) *$0 < \mathfrak{t}(x) < \infty$ for all $x \in X$.*
(c) *$Tf(x) = (f(\tau(x)))^{\mathfrak{t}(x)}$ for all f and x.*
(d) *There is $0 < f < 1$ such that $0 < Tf < 1$.*
(e) *T is continuous.*
(f) *$T^{\leftarrow}$ is continuous.*

Proof Everything follows from Lemma 1, but that (f) is equivalent to the other statements. But (e) and (f) are equivalent, since (d) holds for T if and only if it holds for its inverse. □

Example 1 (Compare to [8]) Let X be a completely regular space which is not pseudo-compact, and let $\mathfrak{t}: X \to (0, \infty)$ be a (possibly unbounded) continuous function. For $f \in C(X, \mathbb{I})$, define Tf by

$$Tf(x) = f(x)^{\mathfrak{t}(x)}.$$

This is a semigroup automorphism of $C(X, \mathbb{I}) = C(\beta X, \mathbb{I})$. Clearly, T is continuous at 1 if and only if $\mathfrak{t}$ is bounded from above; it is continuous at 0 if and only if $\mathfrak{t}$ is bounded away from 0.

Remark 1 Let us consider the following particular case of the above example. Take $X = \mathbb{N}$, with the discrete topology and let $\mathfrak{t}: \mathbb{N} \to (0, \infty)$. Put

$$Tf(n) = f(n)^{\mathfrak{t}(n)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

As $C(\mathbb{N}, \mathbb{I}) = C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{I})$, we can consider T as an automorphism of the semigroup $C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{I})$. Also, we can regard $\mathfrak{t}$ as a function from $\beta\mathbb{N}$ to $[0, \infty]$. Consider the constant $\frac{1}{2}$ as a function in $C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{I})$. Then $T\frac{1}{2}$ vanishes on $t^{\leftarrow}(\infty)$. This subset of $\beta\mathbb{N}$ will be empty only if $\mathfrak{t}$ is bounded on $\mathbb{N}$. As T is an automorphism of $C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{I})$ we see that the condition $f > 0$ cannot be expressed within the semigroup structure of $C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{I})$. Of course, that condition just means 'f is an inversible square' in the larger semigroup $C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

3 Applications

In this section we present some applications to certain distinguished semigroups of functions defined on metric spaces. We use d to denote distance in any metric space: this notation is clear unless we need to consider two metrics on the same set.

3.1 Continuous functions on metric spaces

Theorem 3 *Let X and Y be metrizable spaces (or even completely regular spaces where every point is G_δ), $\tau : X \to Y$ a homeomorphism and $\mathfrak{t}: X \to (0, \infty)$ a continuous function. Then the map $T : C(Y, \mathbb{I}) \to C(X, \mathbb{I})$ given by $Tf(x) = f(\tau(x))^{\mathfrak{t}(x)}$ is a multiplicative bijection. All multiplicative bijections arise in this way.*

Proof The first part is contained in Example 1. As for the converse, let $T : C(Y, \mathbb{I}) \to C(X, \mathbb{I})$ be a multiplicative bijection. By the universal property of the Stone-Čech compactification we can regard T as a multiplicative bijection between $C(\beta Y, \mathbb{I})$ and $C(\beta X, \mathbb{I})$. By Theorem 2 there is a homeomorphism $\tau : \beta X \to \beta Y$ and a continuous function $\mathfrak{t}: \beta X \to [0, \infty]$ such that

$$(f(\tau(x))^-)^{\mathfrak{t}(x)} \leq Tf(x) \leq (f(\tau(x))^+)^{\mathfrak{t}(x)} \quad (x \in \beta X).$$

It is well-known that the only G_δ points in βX are those of X, and similarly for Y (this can be seen in the classical treatise [11]). It follows that τ acts as a homeomorphism between X and Y. Moreover every G_δ point satisfies (at least) one of the conditions of Lemma 2 and therefore $0 < \mathfrak{t}(x) < \infty$ for all $x \in X$ and $Tf(x) = f(\tau(x))^{\mathfrak{t}(x)}$, as required. □

3.2 Uniformly continuous functions

Theorem 4 *Let X and Y be complete metric spaces, $\tau : X \to Y$ a uniform homeomorphism and $\mathfrak{t} : X \to (0, \infty)$ a uniformly continuous function satisfying the following condition*:

($\heartsuit$) *If $\mathfrak{t}(x_n)$ converges to 0 or ∞, then there is $\varepsilon > 0$ and m such that $d(x_n, x) \geq \varepsilon$ for all $n \geq m$ and $x \neq x_n$.*

Then the map $T : U(Y, \mathbb{I}) \to U(X, \mathbb{I})$ given by $Tf(x) = f(\tau(x))^{\mathfrak{t}(x)}$ is a multiplicative bijection. All multiplicative bijections arise in this way.

Proof Let us recall that f is uniformly continuous if and only if $d(x_n, y_n) \to 0$ implies $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Also, we will use the fact that, in a complete metric space, every sequence contains either a convergent subsequence or a uniformly 'separated' subsequence—the distance between two different terms is bounded from below by a fixed positive number.

We now prove the first statement. We may assume $Y = X$ and $\tau = \mathbf{1}_X$. Let $\mathfrak{t} : X \to (0, \infty)$ be a uniformly continuous function satisfying ($\heartsuit$). We must verify that $f \longmapsto f^{\mathfrak{t}}$ is an automorphism of $U(X, \mathbb{I})$. But $1/\mathfrak{t}$ has the same properties as $\mathfrak{t}$ and so one only has to show that $f^{\mathfrak{t}}$ is uniformly continuous when f is.

Take (x_n) and (y_n) so that $d(x_n, y_n) \to 0$. Let us see that

$$f(x_n)^{\mathfrak{t}(x_n)} - f(y_n)^{\mathfrak{t}(y_n)} \to 0. \tag{3}$$

Passing to a subsequence if necessary we may and do assume $\mathfrak{t}(x_n)$ converges to some point in $[0, \infty]$. If that limit is 0 or ∞, then $x_n = y_n$ for n large enough and so there is nothing to prove. Otherwise (3) is obvious.

As for the converse, let $T : U(Y, \mathbb{I}) \to U(X, \mathbb{I})$ be a multiplicative bijection. By general representation results, given a metric (or uniform) space Z there is a compact space κZ (in fact a compactification of Z) such that $U(Z, \mathbb{I}) = C(\kappa Z, \mathbb{I})$. Applying Theorem 2 we get a homeomorphism $\tau : \kappa X \to \kappa Y$ and a continuous function $\mathfrak{t} : \kappa X \to [0, \infty]$ such that

$$(f(\tau(x))^-)^{\mathfrak{t}(x)} \leq Tf(x) \leq (f(\tau(x))^+)^{\mathfrak{t}(x)} \quad (x \in \kappa X).$$

As X is complete, the only G_δ points in κX are those of X, and similarly for Y (see [9, Lemma 1]). It follows that τ maps X to Y, as a uniform homeomorphism. Moreover every G_δ point satisfies one of the conditions of Lemma 2 and therefore $0 < \mathfrak{t}(x) < \infty$ for all $x \in X$ and

$$Tf(x) = f(\tau(x))^{\mathfrak{t}(x)} \quad (x \in X).$$

It remains to prove that $\mathfrak{t}$ is uniformly continuous and satisfies ($\heartsuit$). At this stage of the proof we may and do assume $Y = X$ and $\tau = \mathbf{1}_X$.

Let us verify ($\heartsuit$) first. Suppose $\mathfrak{t}(x_n) \to \infty$. As $\mathfrak{t}$ is continuous (x_n) cannot contain convergent subsequences and so there is $\delta > 0$ and k such that $d(x_n, x_m) \geq \delta$ for $n \neq m$ and $n, m \geq k$. We claim there is $\varepsilon > 0$ and m such that $d(x_n, x) \geq \varepsilon$ if $n \geq m$

and $x \neq x_n$. For if not, passing to a sequence if necessary (we don't relabel it), there is (y_n) with $0 < d(x_n, y_n) \to 0$. We note in passing that we may assume $y_n \neq y_m$ for $n \neq m$ and $x_n \neq y_m$ for all n and m. It is not hard to see that there is $f \in U(X, \mathbb{I})$ such that

$$f(x_n) = 1 - \frac{1}{\mathfrak{t}(x_n)} \quad \text{and} \quad f(y_n) = 1$$

for every $n \in \mathbb{N}$. We leave the details to the reader. We then have

$$Tf(x_n) = \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{t}(x_n)}\right)^{\mathfrak{t}(x_n)} \longrightarrow \frac{1}{e}$$

as $n \to \infty$, while $Tf(y_n) = 1$ and so Tf is not uniformly continuous. The same conclusion obtains when $\mathfrak{t}(x_n) \to 0$.

Finally, let us verify that $\mathfrak{t}$ is uniformly continuous. Take sequences (x_n) and (y_n) such that $d(x_n, y_n) \to 0$. We prove that $\mathfrak{t}(x_n) - \mathfrak{t}(y_n) \to 0$. Clearly, we can assume $(\mathfrak{t}(x_n))$ and $(\mathfrak{t}(y_n))$ convergent in $[0, \infty]$. If one of the two limits is 0 or ∞, then $x_n = y_n$ for n large enough and we are done. Otherwise the two sequences must have the same limit, for if not $T\frac{1}{2}$ cannot be uniformly continuous. This completes the proof. □

Corollary 1 *For a given metric space X exactly one of the following alternatives holds*:

- *X contains an infinite uniformly isolated subset.*
- *Every automorphism of $U(X, \mathbb{I})$ is continuous in the topology of uniform convergence.*

Proof Of course, we can assume X complete since each alternative holds for X if and only if it holds for its completion. Now the result follows from Theorem 4 and Example 1. □

3.3 Lipschitz functions

Given a metric space X we write $\mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ for the set of Lipschitz functions from X to $\mathbb{I}$. Although in general the product of real-valued Lipschitz functions need not to be Lipschitz, $\mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ is always closed under pointwise multiplication. In what follows we describe the isomorphisms between these semigroups. In this case, our approach is different, based on the ideas of [5] and, ultimately, on Shirota's [18]. Let us start with the following.

Definition 1 Given $f, g \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$, we write $f \subset g$ if, whenever $h \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$, $hg = 0$ implies $hf = 0$.

If f is a function on X, we write U_f for the interior of its support. Here, the support of f is the closure of the set $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. The following result has an obvious proof we leave to the reader.

Lemma 4 (Mainly Shirota) *Given* $f, g \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$, *one has* $f \subset g$ *if and only if* $U_f \subset U_g$ *in the usual set theoretic sense.*

Recall that a *regular* open set is one that equals the interior of its closure. Let $R(X)$ denote the set of all regular open sets of X: it is a lattice, when ordered by inclusion.

By the very definition, U_f is regular for each $f \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$—actually, for each continuous f. Conversely, if U is a regular open set in X, then there is $f \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ so that $U = U_f$—take $f(x) = \min\{d(x, U^c), 1\}$. Thus the real meaning of Lemma 4 is that the lattice structure of $R(X)$ can be obtained from the semigroup $\mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ so that homomorphisms of semigroups of Lipschitz functions will induce homomorphisms between the corresponding lattices of regular open sets. The following result is a particular case of [5, Lemma 6].

Lemma 5 *Let* X *and* Y *be complete metric spaces. If* $\mathfrak{L} : R(X) \to R(Y)$ *is an isomorphism of lattices, then there is a dense subspace* $X' \subset X$ *and a mapping* $\tau : X' \to Y$ *such that, for each* $x \in X'$,

$$\{\tau(x)\} = \bigcap_{x \in U} \mathfrak{L}(U).$$

Proof With a slight abuse of notation, we define a map from X to the subsets of Y thus:

$$\tau(x) = \bigcap_{x \in U} \mathfrak{L}(U).$$

Let X' be the set of those points $x \in X$ for which $\tau(x)$ contains exactly one point of Y. Let W be a nonempty open subset of X. We want to see that W meets X'. Take a nonempty $U_1 \in R(X)$ such that $\overline{U}_1 \subset W$ and $\operatorname{diam} U_1 \leq 1$. Choose a nonempty $V_1 \subset \mathfrak{L}(U_1)$, with $\operatorname{diam} V_1 \leq 1$. Then choose a nonempty $U_2 \subset \mathfrak{L}^{-1}(V_1)$ with $\overline{U}_2 \subset U_1$ and $\operatorname{diam} U_2 \leq 1/2$. Next, take a nonempty $V_2 \subset \mathfrak{L}(U_2)$ such that $\overline{V}_2 \subset V_1$ and $\operatorname{diam} V_2 \leq 1/2$. In this way we get sequences (U_n) and (V_n) in $R(X)$ and $R(Y)$, respectively, such that, for each n:

- $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$ and $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$.
- U_n and V_n have diameter at most $1/n$.
- $\mathfrak{L}(U_{n+1}) \subset V_n \subset \mathfrak{L}(U_n)$.

Now, it is clear that there are $x \in X$ and $y \in Y$ such that

$$\{x\} = \bigcap_n U_n = \bigcap_n \overline{U}_n \quad \text{and} \quad \{y\} = \bigcap_n V_n = \bigcap_n \overline{V}_n.$$

From where it follows that $\tau(x) = \{y\}$. Moreover $x \in W$ and so X' is dense in X. $\square$

Before going into the main result for Lipschitz functions let us make explicit the following remark.

Lemma 6 *Let* $T : \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I}) \to \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ *be an isomorphism and let* $f, g, h \in \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I})$. *Then* f *and* g *agree on* U_h *if and only if* Tf *and* Tg *agree on* U_{Th}.

Proof Just observe that f and g agree on U_h if and only if $hf = hg$. $\square$

Theorem 5 *Let $T : \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I}) \to \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ be an isomorphism, where Y and X are complete metric spaces. Then there is a uniform homeomorphism $\tau : X \to Y$ and a continuous function $\mathfrak{t} : X \to (0, \infty)$ such that $Tf(x) = f(\tau(x))^{\mathfrak{t}(x)}$, and $\mathfrak{t}(x) = 1$ unless x is isolated.*

If, in addition, X has finite diameter, then τ is Lipschitz from X to Y.

Proof We consider the mapping $\mathfrak{L} : R(X) \to R(Y)$ sending U_{Tf} to U_f. The definition makes sense by Lemma 4. Clearly, $\mathfrak{L}$ preserves the order in both directions, hence it is a lattice isomorphism and so Lemma 5 applies: there is a dense $X' \subset X$ and a mapping $\tau : X' \to Y$ such that, for each $x \in X'$,

$$\bigcap_{x \in U} \mathfrak{L}(U)$$

reduces to the point $\tau(x)$. Our immediate aim is to show that τ is uniformly continuous. We must prove that if (x_n) and (y_n) are sequences in X' such that $d(x_n, y_n) \to 0$, then so $d(\tau x_n, \tau y_n) \to 0$. If we assume the contrary, passing to a subsequence if necessary, one finds $\varepsilon > 0$ and two sets $U, V \in R(Y)$ such that $d(U, V) \geq \varepsilon$, U contains $\tau(x_n)$ and V contains $\tau(y_n)$ for every n. This is true, but not entirely trivial—we refer the reader to [5, Sect. 1.1] for a detailed proof. Now, take $f \in \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I})$ so that $f|_U = 0$ and $f|_V = 1$. For instance one may take

$$f(y) = \min\{d(y, U)/\varepsilon, 1\}.$$

Now, taking U', V' and f' so that $\mathfrak{L}(U') = U, \mathfrak{L}(V') = V$ and $Tf' = f$ one has $x_n \in U'$, $y_n \in V'$ (by the very definition of τ) and $f'|_{U'} = 0$, $f'|_{V'} = 1$ (by Lemma 6). Hence $f'(x_n) = 0$ and $f'(y_n) = 1$, so f' is not uniformly continuous, let alone Lipschitz and we have reached a contradiction.

Since τ is uniformly continuous on X' and X' is dense in X we can extend it to a uniformly continuous mapping from X to Y still denoted τ. That τ is in fact a uniform homeomorphism will be proved later.

Next, we claim that the value of Tf at $x \in X'$ depends only on the value of f at $\tau(x)$. This obviously follows from Lemma 6 if x is isolated so we assume x is not isolated in the ensuing argument.

Assume on the contrary there are $f, g \in \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I})$ with $f(\tau(x)) \neq g(\tau(x))$ and $Tf(x) = Tg(x)$. Choose sequences (x_n) and (y_n) in X' in such a way that

$$d(y_n, x) \leq \frac{d(x_n, x)}{2} \quad \text{and} \quad d(x_{n+1}, x) \leq \frac{d(y_n, x)}{2},$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Set $\alpha_n = d(x_n, x)$, $\beta_n = d(y_n, x)$ and let U_n (respectively, V_n) be the ball of radius $\alpha_n/4$ centered at x_n (respectively, the ball of radius $\beta_n/4$ centered at y_n). Notice that $U_n \cap V_m = \emptyset$ for all n and m, while both $U_n \cap U_m$ and $V_n \cap V_m$ are empty unless $n = m$. Write $U = \bigcup_n U_n$, $V = \bigcup_n V_n$ and $Z = U \cup V$. Let $h : Z \to \mathbb{I}$ be the function agreeing with Tf on U and with Tg in V. We see h is Lipschitz on Z.

Indeed, let L be a common Lipschitz constant for Tf and Tg and pick $u, v \in Z$. If u and v are in U, then

$$|h(u) - h(v)| = |Tf(u) - Tf(v)| \leq Ld(u, v),$$

and similarly if both u and v are in V. Now, if $u \in U$ and $v \in V$, we may assume if fact that $u \in U_n$ and $v \in V_m$, with $n \leq m$ (the case $n \geq m$ is similar). We have

$$d(u, x) \geq \frac{3\alpha_n}{4} \quad \text{and} \quad d(v, x) \leq \frac{5\beta_m}{4} \leq \frac{5\alpha_n}{8},$$

so $d(u, v) \geq \alpha_n/8$ and

$$\begin{aligned} |h(u) - h(v)| &= |Tf(u) - Tg(v)| \leq |Tf(u) - Tf(x)| + |Tg(x) - Tg(v)| \\ &\leq L\left(\frac{5\alpha_n}{4} + \frac{5\beta_m}{4}\right) \leq 2L\alpha_n, \end{aligned}$$

hence the Lipschitz constant of h is not greater than $16L$. It is a classical result in function theory that Lipschitz functions can be extended preserving both the Lipschitz constant and the sup norm (see [20, Theorem 1.5.6(a)]). So let us extend h to some member in $\mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ we still call h. Now, let $h' \in \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I})$ be such that $Th' = h$. Then, by Lemma 6, h' agrees with f in a neighbourhood of each $\tau(x_n)$ and agrees with g in a neighbourhood of each $\tau(y_n)$. Since

$$\lim_{n\to\infty} f(\tau(x_n)) = f(\tau(x)) \neq g(\tau(x)) = \lim_{n\to\infty} g(\tau(y_n))$$

h' is discontinuous at $\tau(x)$, a contradiction which proves what we claimed.

As a consequence we have $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ for every $f \in \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I})$ and every $x \in X$, where $t(x, c) = Tc(x)$. By the form of the endomorphisms of $\mathbb{I}$ one has in fact $Tf(x) = f(\tau(x))^{\mathfrak{t}(x)}$, where $\mathfrak{t} : X \to [0, \infty]$ is continuous. The surjectivity of T now implies that $\mathfrak{t}(x) \in (0, \infty)$ for all $x \in X$. Elementary considerations on the inverse of T give that τ is a uniform homeomorphism: let $S : \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I}) \to \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I})$ be the inverse of T. Then

$$Sf(y) = f(\sigma(y))^{\mathfrak{s}(y)},$$

with $\sigma : Y \to X$ uniformly continuous. It is really easy to see that σ and τ are inverse for each other—and also that $\mathfrak{s}(y)\mathfrak{t}(x) = 1$ provided $y = \tau(x)$.

Let us verify that τ is Lipschitz when Y has finite diameter. We may use τ to transfer the distance of Y to X thus:

$$d'(x, x') = d(\tau(x), \tau(x')).$$

Then (X, d') is isometric to Y (through τ) and the mapping $L : \mathrm{Lip}((X, d'), \mathbb{I}) \to \mathrm{Lip}((X, d), \mathbb{I})$ defined by

$$Lf(x) = f(x)^{\mathfrak{t}(x)}$$

is an isomorphism. After a moment's reflection we realize that it suffices to see that if d' is a finite metric, uniformly equivalent to d on X, and there is a continuous function $\mathfrak{t}$ such that the mapping

$$Tf(x) = f(x)^{\mathfrak{t}(x)}$$

defines an isomorphism between $\mathrm{Lip}((X, d'), \mathbb{I})$ and $\mathrm{Lip}((X, d), \mathbb{I})$, then the identity is Lipschitz from (X, d) to (X, d').

Assuming the contrary, for each $n \in \mathbb{N}$, we get $x_n, y_n \in X$ such that

$$n \cdot d(x_n, y_n) < d'(x_n, y_n) \leq \mathrm{diam}(X, d').$$

This already implies that $d(x_n, y_n)$ converges to zero and so $d'(x_n, y_n)$ does, because d and d' are uniformly equivalent.

By the extension result mentioned above, we may complete the proof that $\mathbf{1}_X : (X, d) \to (X, d')$ is Lipschitz assuming $X = \{x_n, y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

As X does not contain uniformly isolated infinite subsets, we may proceed as in the proof of Theorem 4 to verify that $\mathfrak{t}$ (whence $1/\mathfrak{t}$) takes values in a compact subset of $(0, \infty)$—as we did to prove property ($\heartsuit$). It follows that $\mathfrak{t}$ is d-Lipschitz since $(\frac{1}{2})^{\mathfrak{t}} = T\frac{1}{2}$ is. Now, fix $0 < c < 1$ and let $f : X \to [c, 1]$ be d'-Lipschitz. Then $Tf(x) = f(x)^{\mathfrak{t}(x)}$ defines a d-Lipschitz function. Therefore so $\log f^{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t} \cdot \log f$ is d-Lipschitz. Since f is bounded away from zero and $1/\mathfrak{t}$ is d-Lipschitz we see that f is d-Lipschitz. Hence

$$\mathrm{Lip}((X, d'), [c, 1]) \subset \mathrm{Lip}((X, d), [c, 1]).$$

But d'-Lipschitz functions are bounded and since Lipschitz functions form a linear space we have $\mathrm{Lip}((X, d'), \mathbb{R}) \subset \mathrm{Lip}((X, d), \mathbb{R})$. From where it follows that $\mathbf{1}_X : (X, d) \to (X, d')$ is Lipschitz; see [10, Theorem 3.9].

We conclude the proof by showing that $\mathfrak{t}(x) = 1$ unless x is isolated. Moving to a compact set if necessary we may assume that $Tf(y) = f(y)^{\mathfrak{t}(y)}$ defines an automorphism of $\mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$. If $\mathfrak{t}(x) < 1$, then $\mathfrak{t}(y) < 1 - \varepsilon$ for y in a neighbourhood of x and Tf is not Lipschitz if $f(y) = \min\{1, d(x, y)\}$. □

Corollary 2 *Let Y and X be complete metric spaces, both of finite diameter and without isolated points. Every isomorphism $T : \mathrm{Lip}(Y, \mathbb{I}) \to \mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$ has the form $Tf = f \circ \tau$, where $\tau : X \to Y$ is a Lipschitz homeomorphism (in both directions).*

Remark 2 The hypothesis on the diameters cannot be removed in the preceding results. Indeed, if X is a metric space, with (generally unbounded) distance function d, then $d' = d/(1 + d)$ is a bounded metric on X and it is not hard to see that $\mathrm{Lip}((X, d'), \mathbb{I}) = \mathrm{Lip}((X, d), \mathbb{I})$. Needless to say d' and d are Lipschitz equivalent if and only if d is bounded.

3.4 Measurable functions

Given a measure space $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ we write $L^\infty(\mu)$ for the Banach algebra of all essentially bounded measurable functions $f : X \to \mathbb{R}$, with 'pointwise' operations, the essential supremum norm, and the traditional conventions about identifying functions equal almost everywhere. The meaning of $L^\infty(\mu, \mathbb{I})$ should be obvious.

To avoid any measure theoretic pathology, in the following result we consider only *standard* measures: that is, σ-finite measures defined on the Borel sets of a Polish (separable and complete metric) space.

Theorem 6 *Let $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ and $(Y, \mathfrak{Y}, \nu)$ be standard measure spaces, $\tau : X \to Y$ a measurable isomorphism and $\mathfrak{t} : X \to (0, \infty)$ a measurable function. Then the map $T : L^\infty(\nu, \mathbb{I}) \to L^\infty(\mu, \mathbb{I})$ given by*

$$Tf(x) = (f(\tau(x)))^{\mathfrak{t}(x)} \tag{4}$$

is an isomorphism. All isomorphisms arise in this way.

Before going into the proof, let us remark that $L^\infty(\mu, \mathbb{I})$ is a complete lattice: every subset of $L^\infty(\mu, \mathbb{I})$ has a supremum in $L^\infty(\mu, \mathbb{I})$. Note that if $S \subset L^\infty(\mu, \mathbb{I})$ is countable, then $\bigvee S$ can be computed pointwise.

We will exploit this fact thanks to the following.

Lemma 7 *Order isomorphisms $L^\infty(\nu, \mathbb{I}) \to L^\infty(\mu, \mathbb{I})$ preserve almost everywhere convergence. Hence so multiplicative bijections do.*

Proof Note that $f_n \to f$ almost everywhere if and only if

$$f = \bigwedge_n \bigvee_{k \geq n} f_k = \bigvee_n \bigwedge_{k \geq n} f_k$$

and that order isomorphisms preserve arbitrary joins and meets.

As for the second statement, notice that there is a compact space $\mathfrak{M}$ such that $L^\infty(\mu, \mathbb{R})$ is isomorphic to $C(\mathfrak{M}, \mathbb{R})$, as a Banach algebra. Hence $L^\infty(\mu, \mathbb{I}) = C(\mathfrak{M}, \mathbb{I})$ as ordered semigroups and so Lemma 3 applies. However there is no need of representation since the *proof* of Lemma 3 works directly in this case. □

Proof of Theorem 6 The first part is nearly obvious. As for the second one, let T be a multiplicative bijection. Clearly, T must send idempotents into idempotents. So, given a measurable $A \subset Y$ there is $A' = \Psi(A)$ (well defined up to null sets) such that $T1_A = 1_{A'}$. Let us analyze the action of Ψ. First, it is clear that Ψ defines a bijection between the measure algebras. Moreover, Ψ preserves Boolean operations since

$$1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B = 1_A \wedge 1_B \quad \text{and} \quad 1_{A \cup B} = 1_A \vee 1_B.$$

The hypothesis on the measures guarantees that $\Psi(A) = \tau^{\leftarrow}(A)$ for some measurable isomorphism $\tau : X \to Y$, by a classical result of von Neumann [17] (see also [19])

This can be used to 'localize' the action of T as follows: given $A \in \mathfrak{Y}$ and $f \in L^\infty(\nu, \mathbb{I})$ one has

$$T(1_A f) = T1_A Tf = 1_{\Psi(A)} Tf.$$

Thus f and g agree almost everywhere on A (equivalently, $1_A f = 1_A g$ in $L^\infty(\nu, \mathbb{I})$) if and only if Tf and Tg agree almost everywhere on $\Psi(A)$. In particular, $f < g$ almost everywhere in Y if and only if $Tf < Tg$ almost everywhere in X.

Next, we identify the function $\mathfrak{t}: X \to (0, \infty)$. For each rational r in $\mathbb{I}$, let us fix a version of Tr, so that we consider $Tr(x)$ defined for every $x \in X$. Note that for fixed $r, s \in \mathbb{I}$, one has $Trs(x) = Tr(x)Ts(x)$ almost everywhere. Thus, the set

$$\{x \in X : Trs(x) \neq Tr(x)Ts(x) \text{ for some } r, s \in \mathbb{I} \cap \mathbb{Q}\}$$

has measure zero. Hence we can choose new versions (that we don't relabel) of the functions Tr in such a way that $Trs(x) = Tr(x)Ts(x)$ for all $r \in \mathbb{I} \cap \mathbb{Q}$, with $T1 = 1$ and $T0 = 0$. We then have that for fixed $x \in X$, the mapping $r \in \mathbb{I} \cap \mathbb{Q} \mapsto Tr(x) \in \mathbb{I}$ is multiplicative and unital. After a moment's reflection we realize that there is $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(x) \in [0, \infty]$ such that

$$Tr(x) = r^{\mathfrak{t}(x)} \quad (x \in X, r \in \mathbb{I} \cap \mathbb{Q})$$

and that the function $\mathfrak{t} : X \to [0, \infty]$ so defined is measurable. Now, since $0 < T\frac{1}{2}(x) < 1$ almost everywhere on X we can choose a new version of $\mathfrak{t}$ taking values in $(0, \infty)$. Again, we don't relabel it.

Finally, we will prove that (4) holds almost everywhere on X. If f is a simple function taking rational values, then $f = \sum_{i=1}^n r_i 1_{A_i}$, with $X = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ and so

$$Tf = T\left(\bigvee_{i=1}^n r_i 1_{A_i}\right) = \bigvee_{i=1}^n T(r_i 1_{A_i}) = \bigvee_{i=1}^n Tr_i T1_{A_i} = \bigvee_{i=1}^n r_i^{\mathfrak{t}} 1_{\tau^{\leftarrow}(A_i)} = (f \circ \tau)^{\mathfrak{t}}.$$

Now, fix $f \in L^\infty(\nu, \mathbb{I})$. Let (f_n) be an increasing sequence of $\mathbb{Q}$-valued simple functions converging pointwise to f. We already know that $Tf_n(x) = (f_n(\tau(x)))^{\mathfrak{t}(x)}$ almost everywhere. On the other hand,

$$Tf_n(x) = (f_n(\tau(x)))^{\mathfrak{t}(x)} \to (f(\tau(x)))^{\mathfrak{t}(x)} \quad (n \to \infty)$$

for every $x \in X$. A quick look at Lemma 7 ends the proof. □

Remark 3 Let $\mathfrak{A}$ be a unital C*-algebra. The so called *effects* are the self-adjoint elements f of $\mathfrak{A}$ such that $0 \leq f \leq 1$. Denote the set of effects of $\mathfrak{A}$ by $E(\mathfrak{A})$. The *sequential product* in $E(\mathfrak{A})$ is defined by $f \circ g = f^{1/2} \cdot g \cdot f^{1/2}$. This makes $E(\mathfrak{A})$ into a semigroup. When $\mathfrak{A}$ is commutative it is *-isomorphic to $C(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ for some compact space $\mathfrak{M}$ and $E(\mathfrak{A})$ equipped with the sequential product equals our old friend $C(\mathfrak{M}, \mathbb{I})$. These notions originate in the quantum theory of measurement. See [15] and the references therein.

In the recent paper [15] (see algo the monograph [16]) Molnár proved that if $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{A}$ are von Neumann algebras and $T : E(\mathfrak{B}) \to E(\mathfrak{A})$ is a *sequential isomorphism* then, for $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, there are direct sum decompositions $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 \oplus \mathfrak{C}_1 \oplus \mathfrak{C}_2$, within the category of von Neumann algebras, with $\mathfrak{C}_0$ commutative, $\mathfrak{C}_1$ and $\mathfrak{C}_2$ having no commutative factors, and three bijections: a multiplicative $T_0 : E(\mathfrak{B}_0) \to E(\mathfrak{A}_0)$ one, a *-isomorphism, $T_1 : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{A}_1$ and an anti *-isomorphism $T_2 : \mathfrak{B}_2 \to \mathfrak{A}_2$ such that $T = T_0 \oplus T_1 \oplus T_2$ holds on $E(\mathfrak{B})$.

It is well-known that the commutative summands can be represented as $L^\infty(\mu_{\mathfrak{C}}, \mathbb{C})$ algebras, and so $\mathfrak{B}_0$ and $\mathfrak{A}_0$ are *-isomorphic (use either Theorem 1 or the proof of Theorem 6). When $\mathfrak{A}$ (hence $\mathfrak{B}$) acts on a separable Hilbert space the underlying measures are standard and Theorem 6 provides a sharp description of the 'irregular part' T_0.

Before leaving the C* setting, let us remark that, although Lemma 7 implies that isomorphisms between $L^\infty(\mu, \mathbb{I})$ semigroups are always continuous in the topology of convergence in measure this is not the case for the weak* topology—that is, the relative $\sigma(L^\infty, L^1)$ topology. In fact we do have the following:

Corollary 3 *Let λ denote Lebesgue measure on the Borel sets on the unit interval. An automorphism of $L^\infty(\lambda, \mathbb{I})$ is weak* continuous if and only if it extends to a *-automorphism.*

Proof The 'if part' is clear since *-isomorphisms are weak* continuous. As for the converse, let T be a weak* continuous automorphism of $L^\infty(\lambda, \mathbb{I})$. After composing with $\tau^{\leftarrow}$ we can and do assume $Tf = f^{\mathfrak{t}}$ and we must show that $\mathfrak{t} = 1$ almost everywhere. It suffices to see that $T\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Let (f_n) be a sequence of idempotents converging to $\frac{1}{2}$ in the weak* topology of $L^\infty(\lambda, \mathbb{I})$. A more concrete choice could be

$$f_n = \frac{1 + r_n}{2},$$

where r_n is the n-th Rademacher's function—that is, $r_n(t)$ is the signum of $\cos(2^n \pi t)$ for $0 \le t \le 1$. It is well-known that (r_n) is weak* null in $L^\infty(\lambda)$. Now, since T leaves every f_n fixed, we have

$$\frac{1}{2} = \lim_n f_n = \lim_n T f_n = T\left(\frac{1}{2}\right),$$

and the proof is complete. □

4 Concluding remarks and questions

We take our leave of the reader with some questions stemming from the results of the paper.

Problem 1 The second part of Theorem 2 implies that each multiplicative bijection T is completely determined by the associated maps τ and $\mathfrak{t}$. It would be interesting to characterize those functions $\mathfrak{t} : X \to [0, \infty]$ associated to automorphisms of $C(X, \mathbb{I})$. In particular, must be $X = \beta D$? This would complete Theorem 2.

Problem 2 Let X be a compact metric space. For which functions $\mathfrak{t} : X \to (0, \infty)$ is $f \mapsto f^{\mathfrak{t}}$ an automorphism of $\mathrm{Lip}(X, \mathbb{I})$?

Problem 3 Describe the isomorphisms $C^\infty(Y, \mathbb{I}) \to C^\infty(X, \mathbb{I})$ when X and Y are smooth manifolds.

Problem 4 Describe the automorphisms of the group $L^\infty(\mu, \mathbb{T})$. Here $\mathbb{T}$ is the multiplicative group of complex numbers of modulus one.

Note added in prrof Problem 1 has been soved by J. Araujo, Multiplicative bijections of semigroups of interval-valued continuous functions. Proc. Am. Math. Soc. 137 (2009) 171–178. The solution of Problem 3 is contained in “Some preserved problems for algebras of smooth functions”, a paper by the two first named authors to appear in Arkiv för Matematik.

References

1. Albiac, F., Kalton, N.J.: Topics in Banach Space Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 233. Springer, New York (2006)
2. Albiac, F., Kalton, N.J.: A characterization of real $C(K)$ spaces. Am. Math. Mon. **114**(8), 737–743 (2007)
3. Birkhoff, G.: Lattice Theory, 3rd edn. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 25. American Mathematical Society, Providence (1979)
4. Cabello Sánchez, F.: Homomorphisms on lattices of continuous functions. Positivity **12**(2), 341–362 (2008). Available at http://kolmogorov.unex.es/~fcabello
5. Cabello Sánchez, F., Cabello Sánchez, J.: Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions. Houst. J. Math. Available at http://kolmogorov.unex.es/~fcabello
6. Cohn, D.L.: Measure Theory. Birkhäuser, Boston (1980)
7. Császár, Á.: Semigroups of continuous functions. Acta Sci. Math. **45**, 131–140 (1983)
8. Ercan, Z., Önal, S.: An answer to a conjecture on multiplicative maps on $C(X, I)$. Taiwan. J. Math. **12**, 537–538 (2008)
9. Garrido, M.I., Jaramillo, J.Á.: A Banach-Stone theorem for uniformly continuous functions. Monatsh. Math. **131**(3), 189–192 (2000)
10. Garrido, M.I., Jaramillo, J.Á.: Homomorphisms on function lattices. Monatsh. Math. **141**, 127–146 (2004)
11. Gillman, L., Jerison, M.: Rings of Continuous Functions. Springer, New York (1976)
12. Kaplansky, I.: Lattices of continuous functions. Bull. Am. Math. Soc. **53**, 617–623 (1947)
13. Marovt, J.: Multiplicative bijections of $C(X, I)$. Proc. Am. Math. Soc. **134**(4), 1065–1075 (2006)
14. Milgram, A.N.: Multiplicative semigroups of continuous functions. Duke Math. J. **16**, 377–383 (1949)
15. Molnár, L.: Sequential isomorphisms between the sets of von Neumann algebra effects. Acta Sci. Math. (Szeged) **69**(3–4), 755–772 (2003)
16. Molnár, L.: Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1895. Springer, Berlin (2007)
17. von Neumann, J.: Einige Sätze über meßbare Abbildungen. Ann. Math. (2) **33**(3), 574–586 (1932)
18. Shirota, T.: A generalization of a theorem of I. Kaplansky. Osaka Math. J. **4**, 121–132 (1952)
19. Sikorski, R.: Boolean Algebras, 3rd edn. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 25. Springer, New York (1969)
20. Weaver, N.: Lipschitz Algebras. World Scientific, Singapore (1999)
21. Willard, S.: General Topology. Addison-Wesley, Reading (1970)

Apéndice B

Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions

Houston Journal of Mathematics

Volume 76, No. 1, 2050

NONLINEAR ISOMORPHISMS OF LATTICES OF LIPSCHITZ FUNCTIONS

FÉLIX CABELLO SÁNCHEZ AND JAVIER CABELLO SÁNCHEZ

Communicated by Kenneth R. Davidson

Abstract. The paper contains a number of Banach–Stone type theorems for lattices of uniformly continuous and Lipschitz functions without any linearity assumption. Sample result: two complete metric spaces of finite diameter are Lipschitz homeomorphic if (and only if, of course) the corresponding lattices of Lipschitz functions are isomorphic. Here, a lattice isomorphism is just a bijection preserving the order in both directions, in particular linearity is not assumed.

Introduction

The results presented in this paper could be described as nonlinear Banach–Stone type theorems for lattices of uniformly continuous and Lipschitz functions. Here, by a Banach–Stone theorem we mean the statement that certain (often algebraical) structure of a system of (continuous, real-valued) functions on a topological space X determines some additional (often topological) structure on X. As everyone knows the genuine Banach–Stone theorem says that two compact spaces are homeomorphic provided their corresponding spaces of continuous functions are isometric in the natural supremum norm. See [5] for a survey with many historical comments in the linear setting and the references in [2] for the nonlinear background.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 46Txx; 46E05.
Key words and phrases. Nonlinear isomorphisms, lattices of Lipschitz functions.
Research supported in part DGICYT projects MTM2004-02635 and MTM2007-6994-C02-02.

Let X be a metric space, with distance d. A function $f : X \to \mathbb{R}$ is said to be Lipschitz if

$$\Lambda(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} < \infty.$$

The set of all Lipschitz functions on X is denoted $\mathrm{Lip}(X)$ and carries several structures: it is a linear space, a lattice and a (complete) normed vector lattice. When X has finite diameter it is also a Banach algebra. The nice booklet by Weaver [11] contains a lot of information on spaces of Lipschitz functions. In this paper we forget every structure of $\mathrm{Lip}(X)$ but the order and we contemplate it as a lattice. Of course the order in $\mathrm{Lip}(X)$ is the pointwise order inherited from $\mathbb{R}$, with $f \leq g$ meaning $f(x) \leq g(x)$ for all $x \in X$. Let us emphasize that such notions as 'isomorphism', 'homomorphism', and the like refer to the 'default' lattice setting unless otherwise stated.

The main result of the paper is that the lattice structure of $\mathrm{Lip}(X)$ determines the Lipschitz structure of X amongst complete metric spaces of finite diameter: if Y and X are complete metric spaces of finite diameter and there is a lattice isomorphism $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$, then X and Y are Lipschitz homeomorphic (we remark again that a lattice isomorphism is nothing but a bijection preserving the order in both directions, in particular linearity is not assumed). In fact what we shall show is that such a T is implemented by a Lipschitz homeomorphism $\tau : X \to Y$ in the precise way we explain in Theorem 1.

It is worth noting that the corresponding linear result has been obtained only very recently [9, Part (d) of the Main Theorem]. See [4] for related results.

The somewhat involved proof of this single result occupies most of the paper (Section 1). In Section 2 we give an application to little Lipschitz functions. In Section 3 we prove a nonlinear version of a recent result by Garrido and Jaramillo stating that 'unital' uniformly separating lattices determine the uniform structure of complete metric spaces. In Section 3 we exhibit an example showing that the hypothesis made in the above results cannot be dropped. This actually follows from standard 'reduction' results for Lipschitz functions, but the uniformly continuous case seems to be new. We close the paper with an esoteric remark on a classical paper by Shirota and some open problems.

Notations and conventions. We use d to denote distance on any metric space. This causes no confusion unless we must consider two different metrics on the same space. We write $B(x, r)$ for the closed ball of radius $r > 0$ centred at $x \in X$. The distance between two subsets A, B of X is given by $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in$

$A, b \in B\}$. Given a continuous function $f : X \to \mathbb{R}$ the support of f, abbreviated $\operatorname{supp} f$, is the closure of the set $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

Finally, given a partially ordered set S, we write S^+ for the subset $\{s \in S : s \geq 0\}$ whenever this makes sense.

1. Lattices of Lipschitz functions

Let us present now the sought-after result on Lipschitz lattices.

Theorem 1. *Let $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ be an isomorphism, where Y and X are complete metric spaces of finite diameter. Then there is a Lipschitz homeomorphism $\tau : X \to Y$ such that*

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))) \tag{1}$$

for every $f \in \mathrm{Lip}(Y)$ and all $x \in X$, where $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given by $t(x, c) = Tc(x)$.

The rather long proof is divided into three parts. First we construct the required map $\tau : X \to Y$ and we show it is a uniform homeomorphism. Then, we use it to get the representation (1). Finally, we use this representation and a category argument to obtain that τ must be Lipschitz in both directions.

1.1. **From order to topology.** In this part we show how the lattice $\mathrm{Lip}(X)$ determines the topological space X and the uniform structure induced by the distance.

With an eye in the applications to little Lipschitz functions, let us say that a lattice $L(X)$ of uniformly continuous functions on X is uniformly separating if, given subsets A and B of X such that $d(A, B) > 0$ there is $f \in L(X)$ such that $f = 0$ on A and $f = 1$ on B. This notion is borrowed from [3]. Only the case $L(X) = \mathrm{Lip}(X)$ is needed to prove Theorem 1.

Throughout this Section $L(X)$ and $L(Y)$ will stand for uniformly separating vector lattices of functions on the metric spaces X and Y, respectively.

To each $f \in L(X)^+$ we associate an open set U_f taking the interior of its support. This is in fact a regular open set (one that agrees with the interior of its closure).

The class of all regular open subsets of X is denoted $R(X)$ and the subclass of those arising as U_f for some $f \in L(X)^+$ is denoted $RL(X)$. These are lattices when ordered by inclusion. Notice that $RL(X)$ contains a base for the topology of X as long as $L(X)$ is uniformly separating.

Our immediate aim is to show that the relations $U_f \subset U_g$ and $\overline{U}_f \subset U_g$ can be expressed within the order structure of $L(X)^+$. To this end, following Shirota

[8], for $f, g \in L(X)^+$, let us declare $f \subset g$ when for every $h \in L(X)^+$ one has $f \wedge h = 0$ whenever $g \wedge h = 0$. Then, we say that f and g are equivalent if $f \subset g$ and $g \subset f$. Also, we write $f \Subset g$ if, whenever the family (h_α) has an upper bound in $L(X)^+$ and $h_\alpha \subset f$ for all α, there is an upper bound $h \in L(X)^+$ such that $h \subset g$.

Lemma 1 (Mainly Shirota)**.** *Given $f, g \in L(X)^+$ one has:*

(a) *$f \wedge g = 0$ if and only if $U_f \cap U_g = \varnothing$.*
(b) *$f \subset g$ if and only if $U_f \subset U_g$ if and only if $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp} g$.*
(c) *If $f \Subset g$, then $d(U_f, U_g^c) > 0$. The converse is true if $L(X)$ is closed under products.*

Proof. (a) is trivial, let us prove (b). By the very definition, we have $f \subset g$ if and only if $g \wedge h = 0$ implies $f \wedge h = 0$. By part (a), this is equivalent to '$U_g \cap U_h = \varnothing$ implies $U_f \cap U_h = \varnothing$', which is clearly equivalent to $U_f \subset U_g$. The last equivalence is obvious.

(c) Assume $f \Subset g$. For each $x \in U_f$ pick some $h_x : X \to [0, 1]$ in $L(X)$ such that $h_x(x) = 1$ and $h_x \subset f$. Of course, the family (h_x) is bounded by 1. Now, if h is an upper bound for (h_x) such that $h \subset g$, then $h \geq 1$ on U_f, $h = 0$ on U_g^c and since h is uniformly continuous we have $d(U_f, U_g^c) > 0$.

Assume $L(X)$ is a ring and $d(U_f, U_g^c) > 0$. Take $u \in L(X)^+$ such that $u = 0$ off U_g and $u = 1$ on U_f. Now, if $h_\alpha \subset f$ and h is an upper bound for (h_α), then uh is also an upper bound and quite clearly $uh \subset f$. $\square$

Corollary 1. *If $T : L(Y)^+ \to L(X)^+$ is an isomorphism, then the map $\mathfrak{T} : RL(Y) \to RL(X)$ given by $\mathfrak{T}(U_f) = U_{Tf}$ is a well-defined lattice isomorphism.* $\square$

The following results show that isomorphisms of function lattices have a local behaviour.

Lemma 2. *Given $f, g, h \in L(Y)^+$, one has $f \leq g$ on U_h if and only if $f \wedge u \leq g \wedge u$ for every $u \subset h$.*

Therefore if $T : L^+(Y) \to L^+(X)$ is an isomorphism, then, given $f, g \in L^+(Y)$ and $U \in RL(Y)$, one has $f \leq g$ on U if and only $Tf \leq Tg$ on $\mathfrak{T}(U)$, where $\mathfrak{T}$ is as in Corollary 1.

Proof. If $f \leq g$ on U_h and $u \subset h$, then it is straightforward that every function lower than f and u is lower than g, so $f \wedge u \subset g \wedge u$.

As for the converse, it is clear that if $f \wedge ah \leq g \wedge ah$ for every $a \in (0, \infty)$, then $f \leq g$ on U_h. $\square$

Corollary 2. *Let $T : L(Y) \to L(X)$ be an isomorphism. There is a lattice isomorphism $\mathfrak{T} : RL(Y) \to RL(X)$ such that, given $f, g \in L(Y)$ and $U \in RL(Y)$, one has $f \leq g$ on U if and only if $Tf \leq Tg$ on $\mathfrak{T}(U)$. The same is true if we replace '$\leq$' by '$\geq$' or '$=$'.*

Proof. There is no loss of generality in assuming $T0 = 0$. Let $\mathfrak{T}$ be as in Corollary 1. We then have that for $f, g \in L^+(Y)$ and $U \in RL(Y)$ one has $f \leq g$ on U if and only if $Tf \leq Tg$ on $\mathfrak{T}(U)$. It is evident that this property characterizes $\mathfrak{T}(U)$ amongst the members of $RL(X)$.

But 0 plays no special rôle here, so actually we have proved that, given $u \in L(Y)$, there is an isomorphism $\mathfrak{T}_u : RL(Y) \to RL(X)$ such that for $f, g \geq u$ in $L(Y)$ and $U \in RL(Y)$ one has $f \leq g$ on U if and only if $Tf \leq Tg$ on $\mathfrak{T}_u(U)$. As before, this property characterizes $\mathfrak{T}_u(U)$ in $RL(X)$. Now, if $u, v \in L(Y)$, it is easily seen that

$$\mathfrak{T}_u = \mathfrak{T}_{u \wedge v} = \mathfrak{T}_{u \vee v} = \mathfrak{T}_v,$$

so $\mathfrak{T}_u = \mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}$ and the conclusion obtains. □

Before embarking into the proof of the main result, let us remark that $\mathrm{Lip}(X)$ is always uniformly separating. Indeed, if $d(A_0, A_1) > 0$, then the function $f : X \to [0, 1]$ given by

$$f(x) = \frac{d(x, A_0)}{d(x, A_0) + d(x, A_1)}$$

equals i on A_i, for $i = 0, 1$. Moreover every regular open subset of X arises as U_g for some $g \in \mathrm{Lip}(X)^+$, for if $U \in R(X)$, then $U = U_g$, where $g(x) = d(x, U^c)$.

Proof of Theorem 1. Part I. In this part of the proof we construct the required mapping $\tau : X \to Y$ and we prove it is a uniform homeomorphism. Our reasonings depend on the fact that Lipschitz functions on spaces with finite diameter are bounded and they do not apply to unbounded metrics; see Example 1 below.

So, let $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ be an isomorphism and let $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ be the lattice isomorphism given by Corollary 2. What we will show is that $\mathfrak{T}$ is induced by a point-mapping $\tau : X \to Y$ in the sense that $\mathfrak{T}(U) = \tau^{-1}(U)$ for every $U \in R(Y)$.

Consider the set valued map $\tilde{\tau} : X \to 2^Y$ given by

$$\tilde{\tau}(x) = \bigcap_{x \in \mathfrak{T}(U)} U = \bigcap_{x \in V} \mathfrak{T}^{-1}(V).$$

Let V_n be the open ball of radius $1/n$, centred at x. As $d(V_{n+1}, V_n^c) > 0$, if we write $V_n = U_{h_n}$ for suitably chosen $h_n \in \mathrm{Lip}(X)$ we have $h_{n+1} \Subset h_n$, by Lemma 1(c).

As the relation '$\Subset$' depends only on the order we have $T^{-1}h_{n+1} \Subset T^{-1}h_n$ whence if we denote $U_n = \mathfrak{T}^{-1}(V_n) = U_{T^{-1}h_n}$ one has $d(U_{n+1}, U_n^c) > 0$, in particular $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$ and

$$\tilde{\tau}(x) = \bigcap_n U_n = \bigcap_n \overline{U}_n.$$

Let us see that $\tilde{\tau}(x)$ is nonempty. For each n, take $y_n \in U_n$ and consider the resulting sequence. Every cluster point of (y_n) is in the closure of every U_n and so in $\tilde{\tau}(x)$. So, if we assume $\tilde{\tau}(x)$ to be empty, then there is $\varepsilon > 0$ and an infinite $M \subset \mathbb{N}$ such that $d(y_n, y_m) \geq \varepsilon$ for $n \neq m$ provided $n, m \in M$. Take a partition $M = M_0 \oplus M_1$ into two infinite subsets and, for $i = 0, 1$, set

$$W_i = \bigcup_{n \in M_i} B(y_n, \varepsilon/3).$$

Clearly $d(W_0, W_1) \geq \varepsilon/3$, so there is a Lipschitz $u : Y \to [0,1]$ such that $u = 0$ on W_0 and $u = 1$ on W_1. Let f and g be such that $Tf = 0$ and $Tg = 1$. The function $v = f + u \cdot (g - f)$ agrees with f on W_0 and agrees with g on W_1. So, if $w = Tv$, then w takes the values 0 and 1 on any neighbourhood of x, a contradiction.

We see that $\tilde{\tau}(x)$ has exactly one point. If $y \in \tilde{\tau}(x)$, then by the very definition, given $U \in R(Y)$, we have $y \in U$ as long as $\mathfrak{T}(U)$ contains x. Let $S : \mathrm{Lip}(X) \to \mathrm{Lip}(Y)$ be the inverse of T, $\mathfrak{S} : R(Y) \to R(X)$ the lattice isomorphism associated to S and $\tilde{\sigma} : Y \to 2^X$ the set-valued function associated to $\mathfrak{S}$. Clearly, $\mathfrak{S}$ is nothing but the inverse of $\mathfrak{T}$. Of course, we have proved that $\tilde{\sigma}(y)$ is nonempty. Taking $x' \in \tilde{\sigma}(y)$ we obtain the following implications, for $V \in R(X)$:

$$x \in V \Rightarrow y \in \mathfrak{S}(V) \Rightarrow x' \in V$$

This already implies that $x' = x$ and so, for $y \in \tilde{\tau}(x)$, we have $x \in V$ if and only if $y \in \mathfrak{S}(V)$. But $\mathfrak{S}$ is a lattice isomorphism and so there is at most one y satisfying that condition.

This shows that $\tilde{\tau}(x)$ is a singleton for every $x \in X$. That the map $\tau : X \to Y$ sending x into the only element of $\tilde{\tau}(x)$ is continuous is trivial. That this map is a homeomorphism follows by symmetry.

It remains to see that τ is uniformly continuous, that is, $d(x_n, x'_n) \to 0$ in X implies $d(y_n, y'_n) \to 0$ in Y, where $y_n = \tau(x_n), y'_n = \tau(x'_n)$. If we assume the contrary, we get sequences (x_n) and (x'_n) such that $d(x_n, x'_n) \to 0$, while $d(y_n, y'_n)$ is bounded away from zero. This implies that neither (x_n) nor (x'_n) have convergent subsequences. Indeed, if $(x_{n(k)})$ converges, say to x, then so $(x'_{n(k)})$ does. But τ is continuous and therefore both $(y_{n(k)})$ and $(y'_{n(k)})$ converge to $\tau(x)$. In particular $d(y_{n(k)}, y'_{n(k)}) \to 0$, a contradiction.

Taking into account that τ is a homeomorphism we see that (y_n) and (y'_n) do not have convergent subsequences. On the other hand, in a complete metric space, each sequence has either a convergent subsequence or an uniformly separated subsequence. Passing to subsequences without mercy we arrive to the following situation: there is $\varepsilon > 0$ such that:

- $d(y_n, y'_n) \geq \varepsilon$ for all n.
- $d(y_n, y_m) \geq \varepsilon$ for $n \neq m$.
- $d(y'_n, y'_m) \geq \varepsilon$ for $n \neq m$

We want to see that there is an infinite set of indices $M \subset \mathbb{N}$ such that, if $A = \{y_m : m \in M\}$ and $A' = \{y'_m : m \in M\}$, then $d(A, A') > 0$ in Y. The key point is that, given $n \in \mathbb{N}$, there is at most one $m \in \mathbb{N}$ such that $d(y_n, y'_m) \leq \varepsilon/2$ —or such that $d(y'_n, y_m) \leq \varepsilon/2$. We construct $M = \{m(k) : k \in \mathbb{N}\}$ inductively as follows. We begin taking $m(1) = 1$. Then $m(2)$ is the least integer m for which $d(y_m, y'_1) \geq \varepsilon/2$ and $d(y'_m, y_1) \geq \varepsilon/2$. Notice that $m(2) \leq m(1) + 3 = 4$. Next, let $m(3)$ be the least integer m such that $d(y_m, y'_{m(k)}) \geq \varepsilon/2$ and $d(y'_m, y_{m(k)}) \geq \varepsilon/2$ for $k = 1, 2$. We have $m(3) \leq m(2) + 5$. Continuing in this way we get a sequence $(m(k))$ of indices such that

$$d(y_{m(k)}, y'_{m(i)}) \geq \varepsilon/2 \quad \text{and} \quad d(y'_{m(k)}, y_{m(i)}) \geq \varepsilon/2 \quad \text{for } i < k,$$

with $m(k) \leq m(k-1) + 2k + 1$. Now, putting $M = \{m(k) : k \in \mathbb{N}\}$ it is clear that $d(A, A') \geq \varepsilon/2$.

To end, take $u \in \mathrm{Lip}(Y)$ such that $u = 0$ on a neighbourhood of A and $u = 1$ on a neighbourhood of A' and proceed as before: is f and g are such that $Tf = 0$ and $Tg = 1$, the image of the function $v = f + u \cdot (g - f)$ under T takes the value 0 at every x_n and the value 1 at every x'_n, a contradiction. □

1.2. **Functional representation.** In this Section we use the map τ to obtain the representation of T appearing in the main result. The key point is the construction of certain Lipschitz functions with suitable oscillation properties we present now.

Lemma 3. *Let S be a set of real numbers having 0 as a cluster point. There is a Lipschitz function $\varphi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ and two infinite subsets M and N of S such that:*

- *$\varphi(t) > t$ for all $t \in M$.*
- *$\varphi = 0$ on a neighbourhood of every $t \in N$.*

Moreover φ can be chosen with Lipschitz constant arbitrarily close to 1.

Proof. Without loss of generality we may assume 0 is a cluster point of S^+. The action takes place in the plane $\mathbb{R}^2$ and to avoid any risk of confussion, in this proof, we denote by $]a,b[$ the open interval with endpoints a and b. Fix $r>1$. Pick $s_1 \in S\cap]0,1/r[$. Now take $0<s_2<s_1$ in S^+so that the line joining $(s_2,0)$ with (s_1,s_1) has slope at most r, that is:

$$\frac{s_1-0}{s_1-s_2} \leq r.$$

Let $0<s_3<s_2$ so that $]s_3,s_2[\cap S \neq \varnothing$. Next take $s_4<s_3$ in such a way that the line joining (s_4,s_4) with $(s_3,0)$ has slope at most r:

$$\left|\frac{0-s_4}{s_3-s_4}\right| \leq r.$$

Now, replace s_1 by s_4 to obtain s_5 as we did with s_2 and so on.

Let us consider the function ϕ vanishing on the semiaxis $]-\infty,0]$, taking the value s_1 on $[s_1,\infty[$ and whose graph in $]0,s_1[$ is the 'polygonal' defined by the points

$$(s_1,s_1),(s_2,0),(s_3,0),(s_4,s_4),(s_5,0),(s_6,0),(s_7,s_7),\ldots$$

Then $\varphi = r\phi$ is the Lipschitz function we were looking for and, quite clearly, $\Lambda(\varphi)\leq r^2$. □

Proof of Theorem 1. Part II. Let us prove the formula (1), where $\tau : X \to Y$ is the uniform homeomorphism we got in Part I. Plainly, it suffices to prove that, given $x\in X$ and $f,g\in \mathrm{Lip}(Y)$, one has $Tf(x)=Tg(x)$ if and only if $f(y)=g(y)$, where $y=\tau(x)$. By symmetry, we only need the proof of the 'if' part.

Suppose $f(y)=g(y)$. Replacing f and g by $f\wedge g$ and $f\vee g$ we may assume $f\leq g$. In this case we already know $Tf\leq Tg$ and we must show $Tf(x)=Tg(x)$. This is obvious if $f=g$ on a neighbourhood of y, so in the ensuing argument we assume every neighbourhood of y contains points where $f<g$. In particular y (hence x) is not isolated.

Put $h=g-f$. Then $h(y)=0$ and there is a sequence $y_n\to y$ such that $h(y_n)>0$ for every n. Take $t_n=h(y_n)$ and apply Lemma 3 to the set of these t_n. Let φ be the resulting function and define $u=f+\varphi\circ h$. Clearly, every neighbourhood of y contains an open set where $u=f$ and also an open set where $u\geq g$. Therefore, if $v=Tu$, then every neighbourhood of x contains an open set where $v=Tf$ and also an open set where $v\geq Tg$. It follows that $Tf(x)=Tg(x)=v(x)$ and we are done. □

Before going further, let us remark that the function $t(x,c)$ appearing in the statement of Theorem 1 is strictly increasing in $c\in\mathbb{R}$ for each fixed $x\in X$. Quite clearly it is nondecreasing: $t(x,c)=Tc(x)$. On the other hand we have just seen that $f, g \in \mathrm{Lip}(Y)$ agree at some point of Y if and only if Tf and Tg agree at some point of X. Hence, if $c < c'$, we have $Tc(x) \neq Tc'(x)$ for every $x \in X$, that is, $t(x, c) < t(x, c')$.

1.3. **From order to distance through category.** We have arrived to the most delicate point of our main result and we face the proof that τ is Lipschitz. Here we will use in a essential way the fact that Lipschitz lattices are themselves complete metric spaces.

First of all, whenever X has finite diameter we can equip $\mathrm{Lip}(X)$ with the norm $\|f\| = \|f\|_\infty \vee \Lambda(f)$ which makes it into a Banach space. The resulting Banach lattice turns out to be boundedly complete. This simply means that $\bigvee S$ exists as long as the set S is norm bounded in $\mathrm{Lip}(X)$. We hasten to remark that 'norm bounded' implies 'bounded' , but the converse fails.

Also, recall that a lattice homomorphism T is said to be **normal** if it preserves all joints and meets, that is, it satisfies $T(\bigvee S) = \bigvee T(S)$ $(T(\bigwedge S) = \bigwedge T(S))$ provided $\bigvee S$ (respectively, $\bigwedge S$) exists. Needless to say, lattice isomorphisms are normal.

Lemma 4. *Let $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ be a normal homomorphism. Then:*

(a) *If (f_n) is bounded in the norm of $\mathrm{Lip}(Y)$ and converges pointwise to f, then Tf_n converges pointwise to Tf provided (Tf_n) is norm bounded in $\mathrm{Lip}(X)$.*

(b) *T maps an open set of $\mathrm{Lip}(Y)$ into a norm bounded set of $\mathrm{Lip}(X)$.*

Proof. The first part is nearly obvious once one realizes that if (f_n) is bounded in norm, then f_n converges to f pointwise if and only if

$$f = \bigwedge_n \bigvee_{k \geq n} f_k = \bigvee_n \bigwedge_{k \geq n} f_k$$

in the corresponding Lipschitz lattice.

Let us prove (b). We show that, for each real R, the set $\{f : \|Tf\| \leq R\}$ is closed in $\mathrm{Lip}(Y)$. Indeed, if (f_n) converges to f in the Lipschitz norm and $\|Tf_n\| \leq R$ for all n, then (f_n) is norm bounded and pointwise convergent to f, so (Tf_n) is pointwise convergent to Tf, which clearly implies that $\|Tf\| \leq R$. Now, we have

$$\mathrm{Lip}(Y) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f : \|Tf\| \leq k\}.$$

By Baire's theorem, there is $R \in \mathbb{N}$ such that (the norm closure of) $\{f : \|Tf\| \leq R\}$ has nonempty interior. This completes the proof. $\square$

Let V be a vector lattice and let $g \in V$. Then the map $f \mapsto f + g$ is a lattice automorphism of V. In particular, if $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ is a homomorphism, $g \in \mathrm{Lip}(Y)$ and $h \in \mathrm{Lip}(X)$, then $f \mapsto h + T(f + g)$ is a homomorphism. It is normal or an automorphism if and only if T is. In particular, if T maps a neighbourhood of g into a norm bounded set, then

$$f \longmapsto T(f+g) - T(g)$$

maps a ball centered at the origin into a norm bounded set and sends 0 to 0.

In the following result we use $\lfloor \cdot \rfloor$ for the integer part function.

Lemma 5. *Let d and δ be bounded metrics on X and $T : \mathrm{Lip}(X, \delta) \to \mathrm{Lip}(X, d)$ a homomorphism having the representation $Tf(x) = t(x, f(x))$ for every f and all x. If $\Lambda_d(Tf) \le R$ for each f in the ball of radius $r > 0$ in $\mathrm{Lip}(X, \delta)$, then for all $x, y \in X$ with $x \ne y$, one has the following:*

(a) *If $a, b \in [-r, r]$ and $|b - a| \le r\delta(x, y)$, then $|t(x, a) - t(y, b)| \le R \cdot d(x, y)$.*
(b) *If $0 \le c \le \delta(x, y)\lfloor 1/\delta(x, y)\rfloor$, then $|t(x, cr) - t(x, 0)| \le R \cdot d(x, y)/\delta(x, y)$.*

Proof. (a) There is $f \in \mathrm{Lip}(X, \delta)$ such that $f(x) = a, f(y) = b$ and $\|f\| \le r$. Now, as $\Lambda_d(Tf) \le R$, we have

$$|t(x, a) - t(y, b)| = |Tf(x) - Tf(y)| \le Rd(x, y).$$

(b) We may assume $T0 = 0$. Let N be the least integer such that $N\delta(x, y) > 1$, so that $N-1 = \lfloor 1/\delta(x, y)\rfloor$. Applying the first part with $a = r\delta(x, y)$ and $b = 0$ we get $t(x, r\delta(x, y)) \le Rd(x, y)$. And, by symmetry, $t(y, r\delta(x, y)) \le Rd(x, y)$. Also,

$$|t(x, 2r\delta(x, y)) - t(y, r\delta(x, y))| \le Rd(x, y),$$
$$|t(y, 2r\delta(x, y)) - t(x, r\delta(x, y))| \le Rd(x, y),$$

hence $|t(x, 2r\delta(x, y))| \le 2Rd(x, y)$ and $|t(y, 2r\delta(x, y))| \le 2Rd(x, y)$. Continuing in this way, we arrive to

$$|t(x, (N-1)r\delta(x, y))| \le R(N-1)d(x, y).$$

Since $(N-1)\delta(x, y) \le 1$ the result follows from the obvious fact that, for fixed $x \in X$, the function $t(x, c)$ is nondecreasing in c. And this is so because one necessarily has $t(x, c) = Tc(x)$ and T preserves order. □

Proof of Theorem 1. Part III. In previous issues of the proof we have seen that $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$, where $\tau : X \to Y$ is a uniform homeomorphism. Thus, we can transfer the structure of Y to X by defining a new distance through τ taking $\delta(x, x') = d(\tau(x), \tau(x'))$. In this way we may assume in the remainder of the proof that $Y = X$ and τ is the identity on X so that T defines an isomorphism from $\mathrm{Lip}(X,\delta)$ to $\mathrm{Lip}(X,d)$ by the formula $Tf(x) = t(x, f(x))$, where d and δ are uniformly equivalent metrics on X, both bounded and complete.

We must show that the identity is Lipschitz from (X,d) to (X,δ).

Clearly, isomorphisms are normal homomorphisms, so Lemma 4 guarantees that T maps a closed ball of $\mathrm{Lip}(X,\delta)$ into a norm-bounded set of $\mathrm{Lip}(X,d)$. By the remark made after Lemma 4 we may and do assume that $\Lambda_d(Tf) \le R$ for every $f \in \mathrm{Lip}(X,\delta)$ with $\|f\| \le r$ and also that $T0 = 0$.

Now, if the identity fails to be Lipschitz from (X,d) to (X,δ), there are sequences (x_n) and (y_n) such that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta(x_n,y_n)}{d(x_n,y_n)} = \infty, \tag{2}$$

which already implies $d(x_n,y_n) \to 0$. Since δ is uniformly equivalent to d we also have $\delta(x_n,y_n) \to 0$. Thus, for each $c < 1$, we have $c \le \delta(x_n,y_n)\lfloor 1/\delta(x_n,y_n)\rfloor$ for n large enough and by Lemma 5(b),

$$t\left(x_n, \frac{r}{2}\right) - t(x_n,0) \le R\frac{d(x_n,y_n)}{\delta(x_n,y_n)}.$$

If (x_n) has a cluster point in X, say x, then

$$t\left(x, \frac{r}{2}\right) - t(x,0) \le R \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n,y_n)}{\delta(x_n,y_n)} = 0,$$

a contradiction: in the second part of the proof we established that $t(x,c)$ is strictly increasing in c for each fixed x.

If (x_n) has no cluster point, then neither (y_n) has and there is $\varepsilon > 0$ such that $e(z_n,z_m) \ge \varepsilon$ for $e = d,\delta$, with $z = x,y$ and $n \ne m$. Set $Z = \{x_n, y_n : n \in \mathbb{N}\}$. As bounded Lipschitz functions extend anywhere the 'restriction' of T to Z, given by

$$Tf(z) = t(z, f(z)) \qquad (z \in Z)$$

is an isomorphism of $\mathrm{Lip}(Z,\delta)$ onto $\mathrm{Lip}(Z,d)$ we still call T.

Let ζ denote the involution on Z that permutes x_n and y_n. It is clear that ζ is Lipschitz with respect to d and δ. Thus, we can define a symmetric version of T through

$$Sf = Tf + \zeta^*(T(\zeta^*(f))) = Tf + (T(f\circ\zeta))\circ\zeta.$$

Notice that S maps $\mathrm{Lip}(Z,\delta)$ to $\mathrm{Lip}(Z,d)$. Even if S need not be an isomorphism, it is a homomorphism and, in fact, $Sf(z) = t(x_n, f(z)) + t(y_n, f(z))$ if z is either x_n or y_n. Also, we remark that $S0 = 0$ and $Sf \ge Tf$ for every f. We will construct certain $f \in \mathrm{Lip}(Z,\delta)$ so that $Sf \in \mathrm{Lip}(Z,d)$ forces the ratio $\delta(x_n,y_n)/d(x_n,y_n)$ to be bounded by a constant independent on n, thus contradicting (2).

We remark that the metric structure of Z is so simple that $f : Z \to \mathbb{R}$ is Lipschitz with respect to δ if (and only if) it is bounded and satisfies

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq \Lambda \delta(x_n, y_n)$$

for some Λ independent on n.

Let us write $Sf(z) = s(z, f(z))$, where $s(z, c) = t(x_n, c) + t(y_n, c)$ for $z = x_n, y_n$. As T is surjective we can choose $K \in \mathbb{R}$ such that $TK \geq 1$ whence $SK \geq 1$. Fix $n \in \mathbb{N}$ and let N be the least integer such that $N\delta(x_n, y_n) \geq K$. Let z denote either x_n or y_n. We have $s(z, N\delta(x_n, y_n)) - s(z, 0) \geq 1$, hence there is $0 \leq m \leq N - 1$ for which

$$s(z, (m+1)\delta(x_n, y_n)) - s(z, m\delta(x_n, y_n)) \geq \frac{1}{N} \geq \frac{1}{2(N-1)} \geq \frac{\delta(x_n, y_n)}{2K}. \tag{3}$$

Next, we define $f : Z \to \mathbb{R}$ taking

$$f(x_n) = m\delta(x_n, y_n) \quad \text{and} \quad f(y_n) = (m+1)\delta(x_n, y_n).$$

Clearly, $f \in \mathrm{Lip}(Z, \delta)$ and since $Sf \in \mathrm{Lip}(Z, d)$ we infer from (3) that

$$\frac{\delta(x_n, y_n)}{2K} \leq \Lambda_d(Sf) d(x_n, y_n),$$

in contradiction to (2). This completes the proof. □

2. Little Lipschitz lattices

Now we give an application to little Lipschitz functions. We avoid any pathology by considering in this Section only compact spaces. Let Z be a compact metric space with distance d. Then $\mathrm{lip}(Z)$ consists of those functions in $\mathrm{Lip}(Z)$ satisfying

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \to 0 \qquad \text{as} \qquad d(x, y) \to 0.$$

It may happen that $\mathrm{lip}(Z)$ contains only the constant functions: $Z = [0, 1]$ is just one example. Thus some additional condition is necessary to get a sensitive space of little Lipschitz functions.

Let us consider the following separation property, introduced by Weaver in [10] under a different name. We say that $\mathrm{lip}(Z)$ separates points boundedly if there is a constant $k > 1$ such that for each $x, y \in Z$ there is $f \in \mathrm{lip}(Z)$ satisfying $|f(x) - f(y)| = d(x, y)$ with $\Lambda(f) < k$. It turns out [11, Corollary 3.3.5] that if this condition is satisfied for some $k > 1$ then it holds for every $k > 1$. In this case $\mathrm{lip}(Z)$ is a vector lattice and even a Banach algebra with the norm inherited from $\mathrm{Lip}(Z)$.

Theorem 2. *Let Y and X be compact metric spaces such that* $\mathrm{lip}(Y)$ *and* $\mathrm{lip}(X)$ *separate points boundedly. Then* $\mathrm{lip}(Y)$ *and* $\mathrm{lip}(X)$ *are isomorphic lattices if and only if X and Y are Lipschitz homeomorphic.*

Antonio Jiménez-Vargas and Moisés Villegas-Vallecillos proved the corresponding linear result in [6] for Hölder metrics. Recall that if Z is a compact metric space with distance d and $\alpha \in (0,1)$, then the Hölder space Z^α is just Z with the new distance d^α. It is well-known [11, Proposition 3.2.2(b)] that such a $\mathrm{lip}(Z^\alpha)$ separates points boundedly.

The proof in [6] can be shortened just invoking duality. Indeed, if $T : \mathrm{lip}(Y) \to \mathrm{lip}(X)$ is a linear bijection preserving the order, then T is continuous (this is proved in [6] for Hölder metrics, but the proof goes undisturbed in the general case), and therefore the Banach space double adjoint $T^{**} : \mathrm{lip}(Y)^{**} \to \mathrm{lip}(X)^{**}$ is a bounded linear homeomorphism. On the other hand the separation hypothesis implies $\mathrm{lip}(Y)^{**} = \mathrm{Lip}(Y)$ by [11, Theorem 3.3.3], so T 'extends' to a linear bijection $T^{**} : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ that preserves order in both directions (this is easily checked). By Theorem 1 (also by [4, Theorem 3.10]), $T^{**}f = a \cdot (f \circ \tau)$, where $a = T1$ and $\tau : X \to Y$ is a Lipschitz homeomorphism and the same is true for T. Actually this representation is valid for any pair of metric spaces satisfying that the bidual of the little Lipschitz lattice is the big Lipschitz lattice (this can happen even if the involved spaces are not compact; see [10]). Needless to say this pattern cannot be followed if T fails to be linear. Instead, we will use the following extension result for little Lipschitz functions on compact spaces [11, Theorem 3.2.6(a)]: if $\mathrm{lip}(Z)$ separates points boundedly, then given a closed set Z_0 every $f_0 \in \mathrm{lip}(Z_0)$ with $\Lambda(f_0) < \Lambda$ can be extended to a $f \in \mathrm{lip}(Z)$ with $\Lambda(f) < \Lambda$ and $\|f\|_\infty = \|f_0\|_\infty$. This clearly implies that $\mathrm{lip}(Z)$ is uniformly separating.

Proof of Theorem 2. Let $T : \mathrm{lip}(Y) \to \mathrm{lip}(X)$ be a lattice isomorphism. The first part of the proof goes as in Section 1. However this time $R\,\mathrm{lip}(X)$ need not contain every regular open set and we must replace the neighbourhoods V_n by U_{h_n}, where $h_n \in \mathrm{lip}(X)$ equals 1 on V_{n+1} and vanishes outside V_n.

Moreover [11, Proposition 3.1.3], if $\varphi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ and $f \in \mathrm{lip}(Z)$ one has $\varphi \circ f \in \mathrm{lip}(Z)$, so the second part applies verbatim. Thus, we have the following representation

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))) \qquad (f \in \mathrm{lip}(Y), x \in X) \tag{4}$$

where τ is a homeomorphism and $t(x,c) = Tc(x)$.

Next we claim that T maps an open set of $\mathrm{lip}(Y)$ into a norm bounded subset of $\mathrm{lip}(X)$.

As little Lipschitz lattices do not enjoy the remarkable completeness properties of the big ones the first part of Lemma 4 is useless. However it follows from (4) that $t(x,c)$ is separately continuous in the second variable (a lattice automorphism of $\mathbb{R}$), so T preserves pointwise convergence. For if (f_n) converges pointwise to f in $\mathrm{lip}(Y)$ we have

$$Tf_n(x) = t(x, f_n(\tau(x))) \to t(x, f(\tau(x))) = Tf(x).$$

This shows that the sets $\{f : \|Tf\| \leq R\}$ are all closed in $\mathrm{lip}(Y)$ and by Baire's theorem some of them must have nonempty interior, as we claimed.

Now, using two translations if necessary we may and do assume that for certain $r, R > 0$ one has $\|Tf\| \leq R$ in $\mathrm{lip}(X)$ whenever $\|f\| \leq r$ in $\mathrm{lip}(Y)$. These numbers are fixed for the remainder of the proof. Besides, if we transfer the distance from Y to X through τ, we may consider Y is just X with another (equivalent) distance δ and that $T : \mathrm{lip}(X,\delta) \to \mathrm{lip}(X,d)$ has the form

$$Tf(x) = t(x, f(x)).$$

Now, the crucial estimates are the following:

(a) If $a, b \in [-r, r]$ and $|b - a| < r\delta(x,y)$, then $|t(x,a) - t(y,b)| \leq R \cdot d(x,y)$.
(b) If $0 \leq c < \delta(x,y)\lfloor 1/\delta(x,y)\rfloor$, then $|t(x,cr) - t(x,0)| \leq R \cdot d(x,y)/\delta(x,y)$.

This can be proved as we did in Lemma 5, using either the extension result for little Lipschitz functions we quoted before or the separation condition with k close to 1.

After that, the proof is easily completed. Let us see that the formal identity is Lipschitz from (X,d) to (X,δ). Assuming the contrary we find sequences (x_n) and (y_n) such that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n,y_n)}{\delta(x_n,y_n)} = 0.$$

Since d and δ are bounded, we see that both $d(x_n,y_n)$ and $\delta(x_n,y_n)$ converge to zero. So for every $c < 1$ we have $c < \delta(x_n,y_n)\lfloor 1/\delta(x_n,y_n)\rfloor$ for large n and from the estimate in (b) we get

$$t\left(x_n, \frac{r}{2}\right) - t(x_n, 0) \leq R\frac{d(x_n,y_n)}{\delta(x_n,y_n)}.$$

Let x be a cluster point of (x_n) —recall that X is compact. Then, taking limits in the preceding inequality, we have $t\,(x, r/2) = t(x,0)$, a contradiction. $\square$

3. Uniformly separating lattices

In this Section we prove a nonlinear version of a relatively recent result by Maribel Garrido and Jesús Jaramillo on uniformly continuous functions. In the next result the involved lattices are not assumed to be linear. However, it is easily seen that uniformly separating lattices (in the sense of Section 1) must contain the constants 0 and 1 and we can adhere this requirement to the definition.

Theorem 3. *Let Y and X be complete metric spaces and let $L(Y)$ and $L(X)$ be uniformly separating lattices. Suppose there is a lattice isomorphism $T : L(Y) \to L(X)$ such that $T0 = 0$ and $T1 = 1$. Then Y and X are uniformly homeomorphic.*

The proof follows the lines of Section 1.1, but due to the lack of structure in the involved lattices we need a different approach to get the point mapping $\tau : X \to Y$ out from the lattice isomorphism. The key point is the following general result where a lattice S of open sets of a given topological space X is said to be **basic** if it contains a base of the topology of X.

Lemma 6. *Let $B(Y)$ and $B(X)$ be basic lattices of open sets for the complete metric spaces Y and X, respectively. If $\mathfrak{T} : B(Y) \to B(X)$ is a lattice isomorphism, then there exist dense subsets X' of X and Y' of Y and a homeomorphism $\tau : X' \to Y'$ such that given $x \in X'$ and $U \in B(Y)$ one has $x \in \mathfrak{T}(U)$ if and only if $\tau(x) \in U$.*

Proof. Given $(x, y) \in X \times Y$, let us write $x \sim y$ if

$$\bigcap_{y\in U} \mathfrak{T}(U) = \{x\} \quad \text{and} \quad \bigcap_{x\in V} \mathfrak{T}^{-1}(V) = \{y\}$$

First of all notice that if $x \sim y$ and $x \sim y'$, then $y = y'$. Similarly, if $x \sim y$ and $x' \sim y$, then $x = x'$. Let X' be the set of those $x \in X$ for which there exists (a necessarily unique) $y \in Y$ such that $x \sim y$ and Y' the set of those $y \in Y$ such that $x \sim y$ for some $x \in X$. It is pretty obvious that the map $\tau : X' \to Y'$ sending each $x \in X'$ to the only $y \in Y'$ such that $x \sim y$ is a homeomorphism.

It remains to see that Y' is dense in Y. The corresponding statement for X' follows by symmetry.

Let U be a nonempty open subset of Y. We must show that U meets Y'. Take a nonempty $U_1 \in B(Y)$ such that $\overline{U}_1 \subset U$ and $\operatorname{diam} U_1 \le 1$. Choose a nonempty $V_1 \subset \mathfrak{T}(U_1)$, with $\operatorname{diam} V_1 \le 1$. Then choose a nonempty $U_2 \subset \mathfrak{T}^{-1}(V_1)$ with $\overline{U}_2 \subset U_1$ and $\operatorname{diam} U_2 \le 1/2$. Next, take a nonempty $V_2 \subset \mathfrak{T}(U_2)$ such that $\overline{V}_2 \subset V_1$ and $\operatorname{diam} V_2 \le 1/2$. In this way we get sequences (U_n) and (V_n) in $B(Y)$ and $B(X)$, respectively, such that, for each n:

- $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$ and $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$.
- U_n and V_n have diameter at most $1/n$.
- $\mathfrak{T}(U_{n+1}) \subset V_n \subset \mathfrak{T}(U_n)$.

Now, it is clear that there are $y \in Y$ and $x \in X$ such that

$$\{y\} = \bigcap_n U_n = \bigcap_n \overline{U}_n \quad \text{and} \quad \{x\} = \bigcap_n V_n = \bigcap_n \overline{V}_n.$$

From where it follows that $x \sim y$ and since $y \in U$ we see that Y' is dense in Y. □

Proof of Theorem 3. There is no loss of generality in assuming that every function in $L(Y)$ or $L(X)$ takes values in $[0,1]$. In any case one can replace $L(Y)$ by

$$L^{[0,1]}(Y) = \{0 \vee (f \wedge 1) : f \in L(Y)\}$$

and similarly with $L(X)$. Also, it is clear that the class of open sets $B(Y) = \{U_f : f \in L(Y)\}$ is a lattice. Moreover, for every $y \in Y$ and every neighbourhood U of y, there is $f \in L(Y)$ vanishing off U and such that $f(y) = 1$, so $B(Y)$ is a basic lattice of (regular) open sets of Y, and similarly for X. Next we define a mapping $\mathfrak{T} : B(Y) \to B(X)$ sending U_f into U_{Tf}. The definition makes sense because Part (b) of Lemma 1 remains true replacing $\mathrm{Lip}(X)$ by $L(X)$. Next, we claim that, for $i = 0, 1$ one has $f = i$ on $U \in S(Y)$ if and only if $Tf = i$ on $\mathfrak{T}(U)$. And this is so because $f = 0$ on U_h is equivalent to $f \wedge h = 0$, while $f = 1$ on U_h is equivalent to $f \wedge u = u$ whenever $u \subset h$.

Now we apply Lemma 6 to get a homeomorphism $\tau : X' \to Y'$ between dense subspaces in such a way that given $U \in S(Y)$ and $x \in X'$ one has $\tau(x) \in U$ if and only if $x \in \mathfrak{T}(U)$. We are going to see that τ is uniformly continuous on X'. Assuming the contrary we have sequences (x_n) and (x'_n) in X' such that $d(x_n, x'_n) \to 0$, while $d(y_n, y'_n)$ does not converge to zero, where $y_n = \tau(x_n), y'_n = \tau(x'_n)$. As (y_n) and (y'_n) cannot converge to the same limit, there is an infinite set $M \subset \mathbb{N}$ and $\delta > 0$ such that $d(y_n, y'_m) > \delta$ for all $n, m \in M$. Set

$$A_0 = \bigcup_{n \in M} B(y_n, \delta/3) \quad \text{and} \quad A_1 = \bigcup_{n \in M} B(y'_n, \delta/3),$$

then $d(A_0, A_1) \geq \delta/3$ and there is $f \in L(Y)$ such that $f = i$ on A_i, for $i = 0, 1$. Therefore, for $n \in M$, we have $Tf(x_n) = 0$ and $Tf(x'_n) = 1$, a contradiction which completes the proof. □

Corollary 3. *Let Y and X be complete metric spaces. Suppose $L(Y)$ and $L(X)$ are uniformly separating vector lattices of bounded functions that are isomorphic as mere lattices. Then Y and X are uniformly homeomorphic.*

Proof. Let $T : L(Y) \to L(Y)$ be a lattice isomorphism. We may assume without loss of generality that $T0 = 0$. Put $u = 1_Y \vee T^{-1}1_X$ and $v = Tu = 1_X \vee T1_Y$. Next notice that since $u, v \geq 1$ Theorem 3 remains true if we replace the condition $T1 = 1$ by $Tu = v$ provided $L(Y)$ has the property that if A and B are subsets of Y such that $d(A, B) > 0$ there is $f \in L(Y)$ such that $f = 0$ on A and $f = u$ on B and $L(X)$ has the analogous property with respect to v.

To check the relevant condition for $L(Y)$, take sets A and B such that $d(A, B) > 0$. Take some $h \in L(Y)$ such that $h = 0$ on A and $h = 1$ on B. If $M \geq 0$ is any constant satisfying $M \geq u$, then $f = u \wedge Mh$ does what we need. $\square$

As a byproduct of the proof we have the following explicit description of the isomorphisms of lattices of regular open sets of complete metric spaces. Notice that regular open sets play a major rôle in lattice theory; see [1].

Proposition 1. *Let Y and X be complete metric spaces with dense subspaces Y' and X'. Suppose $\tau : X' \to Y'$ is a homeomorphism. Then the mapping $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ given by*

$$\mathfrak{T}(U) = \overset{\circ}{\overline{\tau^{-1}(U \cap Y')}} \tag{5}$$

is a lattice isomorphism. And, conversely, every lattice isomorphism arises in this way.

Proof. The first part follows from the fact that $A \mapsto A' = A \cap Y'$ defines an isomorphism between $R(Y)$ and $R(Y')$ whose inverse is obtained sending $B \in R(Y')$ to the interior of the closure of B in Y, and similarly for X. Thus if $\tau : X' \to Y'$ is a homeomorphism between dense subspaces, then the map $\mathfrak{T}$ defined in (5) is just the composition

$$R(Y) \longrightarrow R(Y') \xrightarrow{\tau^{-1}} R(X') \longrightarrow R(X).$$

To prove this let us introduce the following notation. Given $B \subset Y'$, we write $\mathrm{cl}_{Y'}(B)$ for the closure of B in Y' and $\mathrm{int}_{Y'}(B)$ for the interior of B in Y'. As before, the bar and the circle stand, respectively, for the closure and the interior in the whole space Y. Now, we have:

- If A is open in Y, then $\mathrm{cl}_{Y'}(A \cap Y') = \overline{A} \cap Y'$.
- If F is closed in Y, then $\mathrm{int}_{Y'}(F \cap Y') = \overset{\circ}{F} \cap Y'$.

We check the first point only: the second one easily follows by duality taking complements. That $\mathrm{cl}_{Y'}(A \cap Y') \subset \overline{A} \cap Y'$ is trivial. The reversed inclusion is as follows. If $y \in \overline{A} \cap Y'$, there is a sequence (y_n) in A converging to y. As Y' is dense in A for each n there is $y'_n \in A \cap Y'$ such that $d(y_n, y'_n) < 1/n$. It follows that (y'_n) converges to y, which belongs to $\mathrm{cl}_{Y'}(A \cap Y')$, as required.

Let now A be open in Y and put $A' = A \cap Y'$. We have

$$\mathrm{int}_{Y'} \mathrm{cl}_{Y'}(A') = \mathrm{int}_{Y'} \mathrm{cl}_{Y'}(A \cap Y') = \mathrm{int}_{Y'}(\overline{A} \cap Y') = \overset{\circ}{\overline{A}} \cap Y'.$$

It follows that A' is regular if A is. Next, if $A, B \in R(Y)$ are such that $A \cap Y' = B \cap Y'$, then $A = B$. Indeed we have $\overline{A} = \overline{B}$ and so $A = B$.

It remains to see that each $C \in R(Y')$ can be obtained as the intersection of Y' with some member of $R(Y)$: but is is easily seen that taking the interior of the closure of C in Y suffices. This ends the proof of the first statement.

To prove the converse, let $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ be an isomorphism and let $\tau : X' \to Y'$ be as in Lemma 6. It is pretty obvious from the definition of $x \sim y$ and the first part of the proof that given $U \in R(Y)$ one has $\mathfrak{T}(U) \cap X' = \tau^{-1}(U \cap Y')$, which implies (5). $\square$

4. Counterexamples

The following example shows that the hypothesis on the diameters cannot be removed in Theorem 1. It also shows at once that the 'unital' character of the isomorphism is necessary in Theorem 3 and that Corollary 3 fails for lattices of unbounded functions. Please notice that linearity would not help!

Example 1. Two non-uniformly homeomorphic complete metric spaces Y and X such that the lattices $\mathrm{Lip}(Y)$ and $\mathrm{Lip}(X)$ are (even linearly) isomorphic.

Proof. Set $X = \{n^2 + i \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2, i = 0, 1\}$ and $Y = \{n + i/n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2, i = 0, 1\}$. We equip these spaces with the restriction of usual distance in $\mathbb{R}$. Consider the map sending each $f \in \mathrm{Lip}(Y)$ into the function

$$Tf(n^2 + i) = nf(n + i/n).$$

We claim that T defines an (obviously linear) isomorphism between $\mathrm{Lip}(Y)$ and $\mathrm{Lip}(X)$. We take advantage of the fact that the Lipschitz constant of functions defined either on Y or on X can be computed using only 'adjacent' points, so

$$\Lambda_X(g) = \sup_{n \geq 2} \left\{ |g(n^2 + 1) - g(n^2)|, \frac{|g((n+1)^2) - g(n^2 + 1)|}{2n} \right\},$$

while

$$\Lambda_Y(f) = \sup_{n \geq 2} \left\{ n|f(n + 1/n) - f(n)|, \frac{n}{n-1} |f(n+1) - f(n + 1/n)| \right\}.$$

But,

$$|Tf(n^2+1) - Tf(n^2)| = n|f(n+1/n) - f(n)| \leq n\Lambda_Y(f)/n = \Lambda_Y(f)$$

and

$$\begin{aligned}
\frac{|Tf((n+1)^2) - Tf(n^2+1)|}{2n} &= \frac{|(n+1)f(n+1) - nf(n+1/n)|}{2n} \\
&= \frac{|(n+1)f(n+1) - (n+1)f(n+1/n) + f(n+1/n)|}{2n} \\
&\leq \frac{n+1}{2n}|f(n+1) - f(n+1/n)| + \frac{|f(n+1/n)|}{2n} \\
&\leq \frac{n+1}{2n}\cdot\Lambda_Y(f)\cdot\frac{n-1}{n} + \frac{|f(n+1/n) - f(2) + f(2)|}{2n} \\
&\leq \frac{3}{4}\Lambda_Y(f) + \frac{\Lambda_Y(f)}{2n}(n+1/n-2) + \frac{|f(2)|}{2n} \\
&\leq \frac{5}{4}\Lambda_Y(f) + |f(2)|,
\end{aligned}$$

so $\Lambda_X(Tf) \leq \frac{5}{4}\Lambda_Y(f) + |f(2)|$ and T maps $\mathrm{Lip}(Y)$ into $\mathrm{Lip}(X)$. To see T is surjective let us show that for each $g \in \mathrm{Lip}(X)$ the function $f : Y \to \mathbb{R}$ given by

$$f(n+i/n) = \frac{g(n^2+i)}{n}$$

is Lipschitz. Obviously one then has $Tf = g$. We have

$$\frac{|f(n+1/n) - f(n)|}{1/n} = |g(n^2+1) - g(n^2)| \leq \Lambda_X(g).$$

Also,

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n-1}|f(n+1) - f(n+1/n)| &= \frac{n}{n-1}\left|\frac{g((n+1)^2)}{n+1} - \frac{g(n^2+1)}{n}\right| \\
&= \frac{|ng((n+1)^2) - (n+1)g(n^2+1)}{(n+1)(n-1)} \\
&\leq \frac{n}{(n+1)(n-1)}\cdot\Lambda_X(g)\cdot 2n + \frac{|g(n^2+1)|}{(n+1)(n-1)} \\
&\leq \frac{8}{3}\Lambda_X(g) + \frac{|g(n^2+1) - g(4) + g(4)|}{(n+1)(n-1)} \\
&\leq \frac{11}{3}\Lambda_X(g) + \frac{|g(4)|}{3}.
\end{aligned}$$

Whence $\Lambda_Y(f) \leq \frac{11}{3}\Lambda_X(g) + |g(4)|/3$, which completes the proof. □

Garrido and Jaramillo proved in [4, Theorem 3.10] that two complete metric spaces are Lipschitz homeomorphic if and only if there is a linear and unital lattice isomorphism between the corresponding spaces of Lipschitz functions. The preceding example shows that 'unital' is needed here. And the next one that neither 'linear' can be omitted.

Example 2. Let $\mathbb{N}_1$ denote the set of integers with the discrete metric instead of the usual metric. Obviously $\mathbb{N}_1$ is not Lipschitz homeomorphic with $\mathbb{N}$. However, there is a lattice isomorphism $T : \mathrm{Lip}(\mathbb{N}_1) \to \mathrm{Lip}(\mathbb{N})$ such that $T0 = 0$ and $T1 = 1$.

Proof. Notice $\mathrm{Lip}(\mathbb{N}_1)$ is nothing but the space of bounded sequences. Put

$$Tf(n) = \begin{cases} f(n) & \text{if } |f(n)| \leq 1 \\ nf(n) & \text{otherwise} \end{cases}$$

It is easily verified that T defines an isomorphism of $\mathrm{Lip}(\mathbb{N}_1)$ onto $\mathrm{Lip}(\mathbb{N})$. □

5. Concluding remarks

The paper [8] contains the statement that two complete metric spaces are uniformly homeomorphic if the corresponding lattices of uniformly continuous functions are isomorphic [8, Theorem 6].

While it is apparent that Shirota's proof works for bounded functions (we refer the interested reader to [2] for a contemporary proof), a serious gap occurs in the 'unbounded' case. It is worth noticing that Nagata had already proved a closely related for bounded uniformly continuous functions which are uniformly continuous outside a finite set [7, Theorem 2].

Perhaps the following explanations are in order. Let $U(X)$ denote the lattice of all uniformly continuous functions on X and $U^*(X)$ the sublattice of bounded functions in $U(X)$. Consider Shirota's relations '$\subset$' and '$\Subset$' we used in Section 1 in $U^*(X)$ and $U(X)$. As before, $f \subset g$ is equivalent to $U_f \subset U_g$ both in $U^*(X)^+$ and in $U(X)^+$, but the meaning of $f \Subset g$ depends on the 'ambient' lattice. Indeed, one has $f \Subset g \Leftrightarrow d(U_f, U_g^c) > 0$ in $U^*(X)$, by Lemma 1(c). However, the implication $(\Leftarrow)$ may fail in $U(X)$. To see this, take $X = \mathbb{R}$ with the usual distance and the sets:

$$V = \bigcup_n (n - 1/8, n + 1/8) \qquad \text{and} \qquad W = \bigcup_n (n - 1/4, n + 1/4).$$

Clearly, $d(V, W^c) = 1/8$. Define f and g taking $f(x) = d(x, V^c)$ and $g(x) = d(x, W^c)$, so that $V = U_f$ and $W = U_g$. Let us see that the relation $f \Subset g$ does not hold in $U(\mathbb{R})$. Indeed, for $n \in \mathbb{N}$, let h_n be piecewise linear function defined by the conditions $h_n(n) = n, h_n(n \pm \frac{1}{8}) = 0$. Then $h_n \subset f$ for all n and the sequence (h_n) is bounded by $|\cdot|$. However no uniformly continuous function $h \subset g$ can be an upper bound for (h_n).

So, let us close the paper with the following.

Problem. Let Y and X be complete metric spaces such that the lattices $U(Y)$ and $U(X)$ are isomorphic. Must X and Y be uniformly homeomorphic? What if $U(Y)$ and $U(X)$ are linearly isomorphic?

It is apparent that the problem reduces to find a condition equivalent to '$d(U_f, U_g^c) > 0$' (or to '$d(U_f, U_g) = 0$') within the order structure of $U(X)^+$. This could be an impossible task: Example 1 shows that these conditions cannot be expressed within the order structure of Lip(X) if X has infinite diameter.

Acknowledgement. It is a pleasure to thank the referee for many valuable suggestions that greatly improved the presentation of the original LaTeXscript.

References

[1] G. Birkhoff, Lattice theory. American Mathematical Society Colloquium Publications, 25. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979

[2] F. Cabello Sánchez, Homomorphisms on lattices of continuous functions, Positivity 12 (2008) 341–362. Available at `http://kolmogorov.unex.es/~fcabello`

[3] M.I. Garrido and J.Á. Jaramillo, A Banach-Stone theorem for uniformly continuous functions. Monatsh. Math. 131 (2000), no. 3, 189–192

[4] — and —, Homomorphisms on function lattices, Monatsh. Math. 141 (2004) 127–146

[5] — and —, Variations on the Banach-Stone theorem, Extracta. Math. 17 (2002) no. 3, 351–385

[6] A. Jiménez-Vargas and M. Villegas-Vallecillos, Order isomorphisms of little Lipschitz algebras, Houston J. Math. 34 (2008) 1185-1195

[7] J. Nagata, On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces, Osaka Math. J. 1 (2) (1949) 166–181.

[8] T. Shirota, A generalization of a theorem of I. Kaplansky. Osaka Math. J. 4 (1952) 121–132.

[9] N. Weaver, Lattices of Lipschitz functions, Pacific J. Math. 164 (1) (1994) 179–193

[10] —, Duality for locally compact Lipschitz spaces, Rocky Mountain J. Math. 26 (1996) 337–353

[11] —, Lipschitz Algebras, World Scientific, Singapore 1999.

Received May 21, 2008

(Félix Cabello Sánchez) Departamento de Matemáticas, UEx, 06071–Badajoz, Spain
E-mail address: fcabello@unex.es http://kolmogorov.unex.es/~fcabello

(Javier Cabello Sánchez) Departamento de Matemáticas, UEx, 06071–Badajoz, Spain
E-mail address: coco@unex.es

Apéndice C

Some preserver problems on algebras of smooth functions

Ark. Mat.
DOI: 10.1007/s11512-009-0097-1

Some preserver problems on algebras of smooth functions

Félix Cabello Sánchez and Javier Cabello Sánchez

Abstract. We study bijections between algebras of smooth functions preserving certain parts of its structure. In particular, we show that multiplicative bijections are implemented by diffeomorphisms and they are automatically algebra isomorphisms. This confirms a conjecture by Mrčun and Šemrl.

1. Introduction

This paper deals with bijections of algebras of (real) smooth functions that preserve certain parts of its structure.

By a manifold we understand a Hausdorff topological space X locally homeomorphic to a fixed Banach space E of dimension at least 1. We are not assuming X second-countable, connected or paracompact. A C^k manifold, $1\leq k\leq\infty$, is a manifold with an atlas whose transition maps are all k-times continuously (Fréchet) differentiable, with the usual convention when $k=\infty$. We require moreover that E admits a C^k bump function (one with nonempty bounded support). This condition is automatically satisfied when E is finite-dimensional. For the general case, please consult [3] or [8, Chapter III]. A less intimidating reference is [4].

It is worth noticing that in this setting the form of the isomorphisms between algebras of smooth functions has been elucidated only very recently, even in finite dimensions. Indeed, as observed by Weinstein (2003), the commonly known proofs that algebra isomorphisms between algebras of smooth functions are all induced by composition with a C^k diffeomorphism between the underlying manifolds strongly depend either on a second countability assumption or on paracompactness. (See [5]

Research supported by DGICYT projects MTM2004-02635 and MTM2007-6994-C02-02. JCS was supported in part by a grant of the UEx (programa propio–acción 2).

for a 'typical' proof in infinite dimensions.) Soon afterwards, (2005) Grabowski and Mrčun filled the gap with two essentially different proofs appearing in [6] and [10].

Here, we generalise this result in two ways. We will show that every additive bijection $T\colon C^k(Y)\to C^k(X)$ preserving the order in both directions has the form

$$Tf(x)=a(x)f(\tau(x)),\quad f\in C^k(Y),\ x\in X,$$

where $a=T1$ is strictly positive and $\tau\colon X\to Y$ is a C^k diffeomorphism.

Also, we prove that every multiplicative isomorphism $T\colon C^k(Y)\to C^k(X)$ is automatically linear (actually what we shall see is that T is just composition with a C^k diffeomorphism). This settles a conjecture by Mrčun and Šemrl who discovered the result and proved it for finite k in [11] (see [2] for related material).

Both results depend on a not very satisfying and rather incomplete, yet useful, description of the bijections $T\colon C^k(Y)\to C^k(X)$ preserving the order in both directions (nothing more is assumed) that could be considered as the main result of this note (Theorem 1).

The paper though self-contained is based on the ideas of Shirota's seminal paper [12]. However the functional representation for T in Theorem 1 originates with Kaplansky's classical [7]. See [1] for further references.

2. Order preserving bijections

Let us present our main result. The order we consider on $C^k(X)$ is that inherited from $\mathbb{R}$, so $f\le g$ means $f(x)\le g(x)$ for every $x\in X$.

Theorem 1. *Let $T\colon C^k(Y)\to C^k(X)$ be a bijective mapping preserving the order in both directions. Then there is a homeomorphism $\tau\colon X\to Y$ such that*

$$Tf(x)=t(x,f(\tau(x))),\quad f\in C^k(Y),\ x\in X,$$

where $t{:}X\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is given by $t(x,c)=Tc(x)$.

The proof consists of several steps. First of all we need to introduce some relations in the space of smooth functions. This will be done in a somewhat artificial way because $C^k(X)$ is not a lattice.

Given $f\in C^k(X)$, the *support* of f, denoted $\operatorname{supp} f$, is the closure of the set $\{x\in X: f(x)\neq 0\}$. We write U_f for the interior of $\operatorname{supp} f$. This is clearly a regular open set (one which equals the interior of its closure). Whether every regular open set can be obtained in this way is open to reflection.

Set $C^k_+(X)=\{f\in C^k(X): f\geq 0\}$. Our immediate aim is to show that, for $f,g\in C^k_+(X)$, the relations $U_f\subset U_g$ and $\overline{U}_f\subset U_g$ can be expressed within the order structure of $C^k_+(X)$. To this end, given $f_1,f_2\in C^k_+(X)$, put

$$f_1\cap f_2=\{f\in C^k_+(X): f\leq f_i \text{ for } i=1,2\}.$$

Also, let us declare $f\subset g$ when for every $h\in C^k_+(X)$ one has $f\cap h=\{0\}$ whenever $g\cap h=\{0\}$. Finally we write $f\Subset g$ if, whenever the family $\{h_\alpha\}_\alpha$ has an upper bound in $C^k_+(X)$ and $h_\alpha\subset f$ for all α, there is an upper bound $h\in C^k_+(X)$ such that $h\subset g$.

Step 1.1. *Let $f,g\in C^k_+(X)$. Then*
(a) *$f\cap g=\{0\}$ if and only if $U_f\cap U_g=\varnothing$.*
(b) *$f\subset g$ if and only if $U_f\subset U_g$ which holds if and only if* $\operatorname{supp} f\subset\operatorname{supp} g$.
(c) *If $f\Subset g$, then* $\operatorname{supp} f\subset U_g$ *and $\overline{U}_f\subset U_g$.*
(d) *If there is $u\in C^k_+(X)$ such that $u=0$ off U_g and $u=1$ on U_f, then $f\Subset g$.*

Proof. (a) The 'if' part is clear, so assume $U_f\cap U_g\neq\varnothing$. After a moment's reflection we see there is some point where both f and g are strictly positive. It follows that $f\cap g$ contains some nonzero function.

(b) By the very definition, we have $f\subset g$ if and only if $g\cap h=\{0\}$ implies $f\cap h=\{0\}$. By part (a), this is equivalent to '$U_g\cap U_h=\varnothing$ implies $U_f\cap U_h=\varnothing$', which is clearly equivalent to $U_f\subset U_g$. The last equivalence is obvious.

(c) Assume $f\Subset g$. For each $x\in U_f$ pick $h_x\in C^k_+(X)$ such that $h_x\leq 1$ and $h_x(x)=1$, with $h_x\subset f$. Now, the hypothesis gives an upper bound h for the family $\{h_x\}_x$ such that $h\subset g$. Clearly $h\geq 1$ on U_f and thus $\overline{U}_f\subset U_h\subset U_g$.

(d) Assume $u=0$ off U_g and $u=1$ on U_f. If $h_\alpha\subset f$ and h is an upper bound for $\{h_\alpha\}_\alpha$, then uh is also an upper bound and quite clearly $uh\subset f$. $\square$

Throughout this section T will be as in Theorem 1. Besides, we assume $T0=0$. This causes no loss of generality since $f\mapsto Tf-T0$ preserves the order in both directions and sends 0 to 0.

Step 1.2. *Given $f,g,h\in C^k_+(X)$ one has $f\leq g$ on U_h if and only if $g\cap u$ contains $f\cap u$ for every $u\subset h$.*

Therefore, given $f,g,h\in C^k_+(Y)$, one has $f\leq g$ on U_h if and only if $Tf\leq Tg$ on U_{Th}. The same is true if we replace $\leq$ by $\geq$ or $=$.

Proof. If $f\leq g$ on U_h and $u\subset h$, then it is straightforward that every function lower than f and u is lower than g, so $f\cap u\subset g\cap u$.

As for the converse, assume $f(x)>g(x)$ for some $x\in U_h$. Take some $v\in C^k_+(X)$ such that $v\leq 1$ and $v(x)=1$ and having support in the set $U_h\cap\{z{:}f(z)>g(z)\}$. Then $u=vf$ belongs to $u\cap f$ but not to $u\cap g$. The 'therefore' part is now obvious. $\square$

Let $R^k(X)$ denote the class of those regular open sets of X arising as U_h for $h\in C^k_+(X)$, and similarly for Y. We consider in $R^k(X)$ the (partial) order given by inclusion. It is not hard to see that $R^k(X)$ then becomes a lattice, but we will not use this fact.

Notice that our assumptions on the model Banach space already imply that $R^k(X)$ is a base for the topology of X. We shall use this fact without further mention in the sequel. We consider the mapping $\mathfrak{T}\colon R^k(X)\to R^k(Y)$ sending U_{Th} to U_h. In view of Step 1.1(b), $\mathfrak{T}$ is a well-defined bijection preserving (the order given by) inclusion in both directions.

Step 1.3. *Given $f,g\in C^k(X)$ and $U\in R^k(X)$ one has $f\leq g$ on $\mathfrak{T}(U)$ if and only if $Tf\leq Tg$ on U. The same is true replacing $\leq$ by $\geq$ or $=$.*

Proof. The case $f,g\geq 0$ is contained in Step 1.2. Thus we have the following: for each $U\in R^k(X)$ there is $V=\mathfrak{T}(U)$ in $R^k(Y)$ such that whenever $f,g\in C^k_+(Y)$ one has $f\leq g$ on V if and only if $Tf\leq Tg$ on U. Moreover this property characterises V in $R^k(Y)$.

But 0 plays no special rôle here (that is, in the ordered set of smooth functions) and we have an analogous statement for each fixed $u\in C^k(Y)$: there is a bijection $\mathfrak{T}_u\colon R^k(X)\to R^k(Y)$ preserving inclusions in both directions such that whenever $f,g\in C^k(Y)$ satisfy $f,g\geq u$ and $U\in R^k(X)$ one has $f\leq g$ in $V=\mathfrak{T}_u(U)$ if and only if $Tf\leq Tg$ on U. And, moreover, this property characterises V amongst the regular open sets of $R^k(Y)$.

We want so see that $\mathfrak{T}_u$ does not depend on u. First, is easily checked that $\mathfrak{T}_u=\mathfrak{T}_v$ if $v\leq u$. Now, for arbitrary $u,v\in C^k(Y)$, the function $w=\sqrt{1+u^2+v^2}$ is in $C^k(Y)$ and dominates both u and v, so

$$\mathfrak{T}_u=\mathfrak{T}_w=\mathfrak{T}_v=\mathfrak{T}_0=\mathfrak{T}$$

and $\mathfrak{T}_u=\mathfrak{T}$ is independent of u.

To complete the proof, take $f,g\in C^k(Y)$ and $U\in R^k(X)$. Set $V=\mathfrak{T}(U)$ and $u=-\sqrt{1+f^2+g^2}$, so that $u\leq f,g$. As $V=\mathfrak{T}_u(U)$ we have $f\leq g$ on V if and only if $Tf\leq Tg$ on U and we are done. $\square$

Next, consider the set-valued map $\tau\colon X\to 2^Y$ given by

$$\tau(x)=\bigcap\mathfrak{T}(U),$$

where the intersection is taken over those $U\in R^k(X)$ containing the point x.

Step 1.4. *The set $\tau(x)$ is a singleton for every $x\in X$. The map sending x to the only point in $\tau(x)$ is a homeomorphism (still denoted τ).*

Proof. Let $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a neighbourhood base at x taken from $R^k(X)$ satisfying $\overline{U}_{n+1}\subset U_n$. We require moreover that for each n there is $h\in C_+^k(X)$, depending on n, such that $U_n=U_h$ and $h=1$ on U_{n+1}. This guarantees that if $V_n=\mathfrak{T}(U_n)$, then $\overline{V}_{n+1}\subset V_n$, by parts (c) and (d) of Step 1.1. Therefore,

$$\tau(x)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{T}(U_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{V}_n.$$

Let us see that $\tau(x)$ cannot be empty. Assume on the contrary that $\tau(x)=\varnothing$. For each n, let $f_n\in C_+^k(X)$ be such that $f_n(x)=n$ and $\operatorname{supp} f_n\subset U_n$. Take g_n such that $Tg_n=f_n$. Then $U_{g_n}\subset V_n$. We claim that $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ is locally finite. Indeed, pick $y\in Y$. As $y\notin\bigcap_n\overline{V}_n$ there is $m\in\mathbb{N}$ such that $y\notin\overline{V}_m$ and we can choose a neighbourhood of y, say W, that does not meet $\overline{V}_m$. As $\operatorname{supp} g_n\subset\overline{V}_n$ we see that g_n vanishes on W as long as $n\geq m$.

Therefore the sequence $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ has an upper bound in $C^k(Y)$, namely $\sum_{n=1}^{\infty}g_n$, while $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ lacks it. A contradiction.

We see that $\tau(x)$ has exactly one point. If $y\in\tau(x)$, then by the very definition of τ, we have $y\in\mathfrak{T}(U)$ as long as $U\in R^k(X)$ contains x. Let $S\colon C^k(X)\to C^k(Y)$ be the inverse of T, $\mathfrak{S}\colon R^k(Y)\to R^k(X)$ the order isomorphism associated to S and $\sigma\colon Y\to 2^X$ the set-valued function associated to $\mathfrak{S}$. Taking into account the trivial fact that $\mathfrak{S}$ is nothing but the inverse of $\mathfrak{T}$, we get

$$\sigma(y)=\bigcap_{y\in V}\mathfrak{S}(V)\subset\bigcap_{x\in U}\mathfrak{S}(\mathfrak{T}(U))=\bigcap_{x\in U}U=\{x\}.$$

And since $\sigma(y)\neq\varnothing$ we see that $x=\sigma(y)$. Hence, for $U\in R^k(X)$, we have $x\in U$ if and only if $y\in\mathfrak{T}(U)$. Equivalently, given $V\in R^k(Y)$, one has $y\in V$ if and only if $x\in\mathfrak{S}(V)$. But $\mathfrak{S}$ is an order isomorphism onto $R^k(Y)$ (which separates points of Y) and so there is at most one y satisfying that condition.

This shows that, for every $x\in X$, $\tau(x)$ is a singleton. That the map $X\to Y$, sending x into the only element of $\tau(x)$, is continuous is trivial. That this map is a homeomorphism follows by symmetry: the map sending each y into the only element of $\sigma(y)$ is the inverse of $\tau\colon X\to Y$. □

Step 1.5. *Let $f,g\in C^k(Y)$ and $x\in X$. If $f(\tau(x))=g(\tau(x))$, then $Tf(x)=Tg(x)$.*

Proof. Write $y{=}\tau(x)$. It clearly suffices to see that if $f(y){\le}g(y)$, then $Tf(x){\le}$ $Tg(x)$. Or else, that if $Tf(x){>}Tg(x)$, then $f(y){>}g(y)$. So, assume on the contrary that $Tf(x){>}Tg(x)$, but $f(y){\le}g(y)$. As $Tf{\ge}Tg$ on some neighbourhood of x we know from Steps 1.2 and 1.3 that $f{\ge}g$ on some neighbourhood of y, whence $f(y){=}$ $g(y)$ and $Df{=}Dg$ at y—where $f-g$ attains a local minimum.

Let h be any function in $C^k(Y)$ such that $h(y){=}f(y)$ and $Dh(y){\ne}Df(y)$. Then every neighbourhood of y contains points (and so an open set) where $h{>}f$ as well as points where $h{<}g$. It follows that $Tf(x){\le}Th(x){\le}Tg(x)$, a contradiction. □

This completes the proof of Theorem 1.

Applications. Our first application, in the spirit of [9], shows that the behaviour of a bijection that preserves order depends largely on the action on constant functions.

Corollary 1. *Let $T\colon C^k(Y){\to}C^k(X)$ be a bijection preserving the order in both directions.*

(a) *T is linear (or additive) if and only if it is linear (additive) on the set of constant functions on Y. In this case $Tf(x){=}a(x)f(\tau(x))$, where $a{=}T1$ is strictly positive and τ is a C^k diffeomorphism.*

(b) *T is an algebra (or ring) isomorphism if and only if it sends each constant on Y into the same constant on X. If so, $Tf(x){=}f(\tau(x))$ and τ is a C^k diffeomorphism.*

It is worth noticing that a ring isomorphism between algebras of smooth functions must preserve order, so Corollary 1 implies the following result.

Corollary 2. (Grabowski [6], Mrčun [10]) *Every ring isomorphism between $C^k(Y)$ and $C^k(X)$ is given by composition with a C^k diffeomorphism between the underlying manifolds.*

3. Multiplicative bijections

In this section we move to the multiplicative structure of smooth functions. The following result settles a conjecture in [11], where the case $k{<}\infty$ is proved.

Theorem 2. *Every multiplicative bijection $C^k(Y){\to}C^k(X)$ is induced by composition with a C^k diffeomorphism. Therefore they are all linear.*

As before, we break the proof into a number of steps. From now on we assume that T is a bijection satisfying $T(fg)=Tf\cdot Tg$ for all $f,g\in C^k(Y)$. We use the same notation as in the proof of Theorem 1, with the only exception that we will use sets U_f for arbitrary f. Note, however, that U_f is the same as U_{f^2}, so this leads to the same class of regular open sets.

First of all, we remark that $T0=0$ and $T1=1$. Also, T preserves the set of strictly positive functions (they are just the invertible squares). Moreover, T acts in a local way, meaning that, given f, g and h in $C^k(Y)$, one has $f=g$ on U_h if and only if $Tf=Tg$ on U_{Th}. And this is so because the former condition is equivalent to $fh=gh$. It follows that $T(-1)=-1$ since -1 is the only idempotent which does not agree with 1 on some nonempty open set. Next notice that $U_f\subset U_g$ if and only if $U_{Tf}\subset U_{Tg}$ since the former just means that $gh=0$ implies $fh=0$ for every $h\in C^k(Y)$.

So, as we did in Section 1, we can define an order isomorphism $\mathfrak{T}\colon R^k(X)\to R^k(Y)$ taking $\mathfrak{T}(U_{Th})=U_h$ for $h\in C^k(Y)$. Now, consider the set-valued map $\tau\colon X\to 2^Y$ given by

$$\tau(x)=\bigcap\mathfrak{T}(U),$$

where the intersection is taken over those $U\in R^k(X)$ containing the point x.

Step 2.1. *The set $\tau(x)$ is a singleton for every $x\in X$. The map sending x to the only point in $\tau(x)$ is a homeomorphism between X and Y.*

Proof. Let $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a neighbourhood base at x consisting of regular open sets of $R^k(X)$, with $\overline{U}_{n+1}\subset U_n$. We require moreover that for each n there is $h\in C^k(X)$, depending on n, such that $h=1$ on U_{n+1} and $h=0$ outside U_n. This guarantees that if $V_n=\mathfrak{T}(U_n)$, then $\overline{V}_{n+1}\subset V_n$, and so

$$\tau(x)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{T}(U_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{V}_n.$$

Let us see that $\tau(x)$ is not empty. If we assume the contrary, passing to a subsequence if necessary we find a sequence $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $y_n\in V_n\setminus\overline{V}_{n+1}$ and a sequence of regular open sets $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ having disjoint closures, with $y_n\in W_n$.

Now, for even n, let $h_n\in C^k(Y)$ be a hat function around y_n (that is, one which agrees with 1 on a neighbourhood of the point) with support in W_n and set

$$f=\sum_{n\text{ even}}h_n.$$

As the sum is locally finite, f is in $C^k(Y)$ and has the following property: every V_n contains an open set where $f=1$ and also an open set where f vanishes. Therefore Tf is discontinuous at y and we have reached a contradiction.

That $\tau(x)$ has exactly one point and that sending x to that point defines a homeomorphism is shown as in Step 1.4. □

We pause for the construction of certain real-valued functions of a single real variable which we will use later.

Step 2.2. *Let $0<r<1$ be fixed. There exists C^∞ smooth functions $\varphi, \phi\colon \mathbb{R}\to[0,1)$ having the following properties*:

(a) *For every $s\neq r$ and N there is a nonempty open interval I lying between r and s and an integer $p\geq N$ such that $\varphi(t)=t^p$ for all $t\in I$.*

(b) *Every neighbourhood of 0 contains nonempty open sets where $\phi(t)=r^p$ for arbitrarily large p.*

Proof. (a) We start with a C^∞ smooth hat function h around the origin having support in $(-1,1)$. Set $r_n=r+(-\frac{1}{2})^n$ and let V_n be the open interval of radius $1/2^{n+1}$ centred at r_n. Notice that $V_n\cap V_m$ is empty unless $n=m$. We define h_n by $h_n(t)=h(2^{n+1}(t-r_n))$. This is a hat function around r_n with support in V_n. Finally, for $p\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ we define φ by

$$\varphi=\sum_{n=n_0}^{\infty}\imath^{p(n)}h_n,$$

where $\imath$ denotes the identity on $\mathbb{R}$ and n_0 is so that $V_n\subset(0,1)$ for every $n\geq n_0$.

The proof will be complete if we show that a good choice of the sequence $p(n)\to\infty$ makes φ smooth.

After all, let us remark that $\varphi(r)=0$ and that φ is C^∞ smooth at all points with the only possible exception of r. So it suffices to see that

$$\frac{D^m\varphi(t)}{r-t}\to 0, \quad \text{as } t\to r, \tag{1}$$

for each $m\in\mathbb{N}$. Indeed this implies that $D^m\varphi(0)=0$ for all m.

We use the following notation in the remainder of the proof. If u is a function whose domain contains A, we put

$$\|u\|_A=\sup_{t\in A}|u(t)|.$$

As φ vanishes outside the V_n's and taking into account that $\varphi = \imath^{p(n)} h_n$ on V_n and that $|r - t| \geq 2^{-(n+1)}$ for $t \in V_n$ we see that (1) is implied by the condition

$$\frac{\|D^m(\imath^{p(n)} h_n)\|_{V_n}}{2^{-(n+1)}} \to 0, \quad \text{as } n \to \infty. \tag{2}$$

But $D^m(\imath^{p(n)} h_n) = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} D^l \imath^{p(n)} D^{m-l} h_n$, and it suffices to see that, whenever $0 \leq l \leq m$,

$$2^{n+1} \|D^l \imath^{p(n)} D^{m-l} h_n\|_{V_n} \tag{3}$$

converges to zero as $n \to \infty$. On the other hand

$$D^{m-l} h_n(z) = 2^{n+1} \ldots 2^{n+1} D^{m-l} h(2^{n+1}(z - r_n))$$

(the factor 2^{n+1} appearing $m-l$ times), so

$$\|D^{m-l} h_n\|_{V_n} = 2^{(n+1)(m-l)} \|D^{m-l} h\|_{[-1,1]},$$

while for $p(n) > l$ one has

$$D^l \imath^{p(n)} = p(n)(p(n)-1)\ldots(p(n)-l+1)\imath^{p(n)-l}.$$

Thus, if we take $r < \rho < 1$, the sequence in (3) is dominated by

$$\|D^{m-l} h\|_{[-1,1]} 2^{n+1} 2^{(n+1)(m-l)} p(n)^l \rho^{p(n)-l},$$

which goes to zero as long as $p(n)/n \to \infty$. So, taking $p(n) = n^2$ suffices.

Part (b) is simpler. Let $h_n(t) = h\big(2^{n+1}\big(t - \big(-\frac{1}{2}\big)^n\big)\big)$. Given $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, define $\phi(t) = \sum_{n=1}^\infty r^{p(n)} h_n$. As before we want so see that $D^m \phi(t)/t \to 0$, as $t \to 0$, if $p(n) \to \infty$ fast enough. Let V_n be the open interval of radius $\big(\frac{1}{2}\big)^{n+1}$ centred at $\big(-\frac{1}{2}\big)^n$. It suffices to see that

$$2^{n+1} \|D^m r^{p(n)} h_n\|_{V_n} = 2^{n+1} r^{p(n)} 2^{m(n+1)} \|D^m h\|_{[-1,1]}$$

goes to zero as n increases. Again, taking $p(n) = n^2$ suffices. $\square$

Step 2.3. *If* $0 < f \leq 1$, *then* $0 < Tf \leq 1$.

Proof. Assume on the contrary that $0 < f \leq 1$, but $Tf(z) > 1$ for some $z \in X$. Take $U \in R^k(X)$ such that $Tf > R$ on U, with $R > 1$. Choose $y \in \mathfrak{T}(U)$ such that $f(y) < 1$. We will construct a function $g \in C^k(Y)$ having the following property:

For every neighbourhood W of y and every $N > 0$ there is an integer $p \geq N$ and an open subset of W where $g = f^p$.

Then, if $\tau(x)=y$, the function Tg is unbounded near x since each neighbourhood of x contains points where $Tg>R^N$ for all N.

We construct g using the functions of Step 2.2 as follows. Suppose f is non-constant on every neighbourhood of y. Then $g=\varphi\circ f$, where φ is as part (a), with $r=f(y)$.

If f is constant on a neighbourhood of y, let $u\in C^k(Y)$ be such that $u(y)=0$ and $Du(y)\neq 0$. Then take $g=\phi\circ u$, with ϕ as in part (b) and $r=f(y)$. □

An immediate consequence is that if $0<f\leq g$, with $f,g\in C^k(Y)$, then $0<Tf\leq Tg$. Indeed the hypothesis means that $0<f/g\leq 1$, so $0<T(f/g)=Tf/Tg\leq 1$. Hence T defines a bijection between $C^k(Y,(0,\infty))$ and $C^k(X,(0,\infty))$ preserving the order in both directions. As $\mathbb{R}$ is order-diffeomorphic with $(0,\infty)$ we can apply Theorem 1 to get the following consequence.

Step 2.4. *There is a strictly positive function $p\colon X\to\mathbb{R}$ such that*

$$Tf(x)=|f(\tau(x))|^{p(x)}\,\mathrm{sign}(f(\tau(x))) \tag{4}$$

for every $f\in C^k(Y)$.

Proof. First suppose $f>0$. We know from Theorem 1 that

$$Tf(x)=t(x,f(\tau(x))),$$

where $t(x,c)=Tc(x)$, with $c>0$. Actually only Step 1.5 is needed here. Next notice that for fixed x the map $c\mapsto Tc(x)$ is multiplicative and increasing on $(0,\infty)$, so $Tc(x)=c^p$, with $p>0$ depending on x. This proves (4) when $f>0$. As T acts locally, the formula is true whenever $f(\tau(x))>0$, even if f assumes negative values. On the other hand, $T(-f)=-Tf$, so (4) holds true for all $f\in C^k(Y)$ and every $x\in X$ provided $f(\tau(x))\neq 0$. In particular, we see that $f(\tau(x))\neq 0$ implies $Tf(x)\neq 0$, that is, $Tf(x)=0$ implies $f(\tau(x))=0$. Applying the same reasoning to the inverse of T we see that, in fact, $Tf(x)=0$ if and only if $f(\tau(x))=0$. Hence (4) is true for all $f\in C^k(Y)$ and all $x\in X$. □

Step 2.5. *One has $p(x)=1$ for all x, and τ is a C^k diffeomorphism.*

Proof. First, p is in $C^k(X)$, since $2^p=T2$ is. It follows that $f\circ\tau$ belongs to $C^k(X)$ for $f\in C^k(Y)$ and $f>0$, hence τ is C^k smooth and, by symmetry, it is a C^k diffeomorphism.

Finally, let us check $p(x)=1$ for all $x\in X$. By symmetry one only has to see that $p(x)\geq 1$ for all x in X. As τ is a C^k diffeomorphism we infer from (4) that

$$Lf(x)=|f(x)|^{p(x)}\,\mathrm{sign}(f(x))$$

defines a multiplicative automorphism of $C^k(X)$. Suppose $p(x)<1$. Pick $f\in C^k(X)$ with $f(x)=0$ and $Df(x)\neq 0$. We claim that $Lf=\mathrm{sign}(f)|f|^p$ is not differentiable at x. Indeed, let $u\colon \mathbb{R}\to X$ be a smooth curve passing through x at $t=0$, with $Df(x)u'(0)>0$. Then $Lf\circ u$ has no derivative at 0 since, taking $0<c<Df(x)(u'(0))$ and $p(x)<p_0<1$, one has

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{Lf(u(t))-Lf(u(0))}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{(f(u(t)))^{p(u(t))}}{t}\geq \lim_{t\to 0^+}\frac{(ct)^{p_0}}{t}=\infty.$$

This completes the proof. □

Concluding remarks

We close with a couple of questions arising from the content of this note.

(a) In Theorem 1, what can be said about τ? We do not know if τ must be differentiable even in the case $Y=X=\mathbb{R}$. It is apparent that the main obstruction is 'decoupling' the actions of $t(\cdot,\cdot)$ and τ.

(b) Does Corollary 2 remain true if the 'model' Banach space E fails to have a bump? We do not know the answer even if Y and X are in fact Banach spaces. See [5] for some affirmative results.

Acknowledgements. It is a pleasure to thank the referee for many remarks that greatly improved the article.

References

1. Cabello Sánchez, F., Homomorphisms on lattices of continuous functions, *Positivity* **12** (2008), 341–362.
2. Cabello Sánchez, F., Cabello Sánchez, J., Ercan, Z. and Önal, S., Memorandum on multiplicative bijections and order, to appear in *Semigroup Forum*.
3. Deville, R., Godefroy, G. and Zizler, V., *Smoothness and Renormings in Banach Spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **64**, Longman, Harlow, 1993.
4. Fabian, M. and Zizler, V., An elementary approach to some questions in higher order smoothness in Banach spaces, *Extracta Math.* **14** (1999), 295–327.
5. Garrido, M. I., Jaramillo, J. Á. and Prieto, Á., Banach–Stone theorems for Banach manifolds, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat.* (*Esp.*) **94** (2000), 525–538.

6. Grabowski, J., Isomorphisms of algebras of smooth functions revisited, *Arch. Math.* (*Basel*) **85** (2005), 190–196.
7. Kaplansky, I., Lattices of continuous functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 617–623.
8. Kriegl, A. and Michor, P. W., *The Convenient Setting of Global Analysis*, Mathematical Surveys and Monographs **53**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
9. Lochan, R. and Strauss, D., Lattice homomorphisms of spaces of continuous functions, *J. London Math. Soc.* **25** (1982), 379–384.
10. Mrčun, J., On isomorphisms of algebras of smooth functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), 3109–3113.
11. Mrčun, J. and Šemrl, P., Multiplicative bijections between algebras of differentiable functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **32** (2007), 471–480.
12. Shirota, T., A generalization of a theorem of I. Kaplansky, *Osaka Math. J.* **4** (1952), 121–132.

Félix Cabello Sánchez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura
ES-06071 Badajoz
Spain
fcabello@unex.es

Javier Cabello Sánchez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura
ES-06071 Badajoz
Spain
coco@unex.es

Received September 15, 2008

Apéndice D

Multiplicative semigroups of Lipschitz functions

EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **25**, Núm. 3, 239 – 247 (2010)

Multiplicative Semigroups of Lipschitz Functions *

F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura,
06006 *Badajoz, Spain*

fcabello@unex.es , http://kolmogorov.unex.es/˜fcabello , coco@unex.es

Presented by Francisco Montalvo — Received December 22, 2010

Abstract: Given a (complete) metric space X, we denote by $\mathrm{Lip}(X)$ the space of real-valued Lipschitz functions on X and we equip it with the pointwise product. The purpose of this note is to describe those bijections $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ which are "multiplicative" in the sense that whenever $f, g \in \mathrm{Lip}(Y)$ are such that $fg \in \mathrm{Lip}(Y)$ one has $T(fg) = T(f)T(g)$.

The main result of the paper states that if X has no isolated points, then every multiplicative bijection $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ arises as $T(f) = f \circ \tau$, where $\tau : X \to Y$ is a Lipschitz homeomorphism and so it is automatically linear.

We also give a description of the semigroup isomorphisms $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ in the case where the underlying metric spaces are compact.

Key words: Semigroups of Lipschitz functions, homomorphism, representation.

AMS *Subject Class.* (2010): 54C35.

1. Introduction

The purpose of this note is to describe the "multiplicative" bijections between spaces of Lipschitz functions. Given a metric space X, we denote by $\mathrm{Lip}(X)$ the space of real-valued Lipschitz functions on X and we equip it with the pointwise product. Our basic reference on spaces of Lipschitz functions and their relatives is Weaver booklet [14]. We hasten to remark that the product of two (in general unbounded) Lipschitz functions may fail to be Lipschitz and so $\mathrm{Lip}(X)$ is not a semigroup unless X has finite diameter.

To avoid any possible confusion, let us state the meaning in which the word "multiplicative" is used along the paper.

Definition 1. A mapping $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ is said to be multiplicative if whenever $f, g \in \mathrm{Lip}(Y)$ are such that $fg \in \mathrm{Lip}(Y)$ one has $T(fg) = T(f)\,T(g)$.

* Research supported in part by DGICYT projects MTM2004-02635 and MTM2007-6994-C02-02.

Of course, each of the spaces Y and X could be a single point, so that $\text{Lip}(Y) = \text{Lip}(X) = \mathbb{R}$. The simplest multiplicative automorphisms of $\mathbb{R}$ are the "powers" $t \mapsto \text{sign}(t)|t|^p$, with $p \in \mathbb{R}^*$. In general, if $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an additive bijection, we can define a multiplicative bijection by the formula $m(t) = \text{sign}(t)\exp(a(\log|t|))$. And, conversely, all multiplicative automorphisms of $\mathbb{R}$ arise in this way. As "most" additive bijections of the line are nonmeasurable, a certain degree of "pathological" behavior seems to be unavoidable. In this regard we have, as the main result of the paper, that if X has no isolated points, then every multiplicative bijection $T : \text{Lip}(Y) \to \text{Lip}(X)$ arises as $T(f) = f \circ \tau$, where $\tau : X \to Y$ is a Lipschitz homeomorphism and so it is automatically linear (Theorem 1).

We also give a description of the semigroup isomorphisms $T : \text{Lip}(Y) \to \text{Lip}(X)$ in the case where the underlying metric spaces are compact (Theorem 2) which solves a problem posed in [4].

Both Theorem 1 and Theorem 2 depend on a preliminary representation result which is the content of Section 2 (Proposition 1).

Background. The study of multiplicative bijections between rings has a relatively long history. In 1940, Eidelheit proved that any continuous multiplicative bijection between the algebras of operators of two real Banach spaces of dimension al least two is automatically linear – and so it arises as conjugation with a fixed linear homeomorphism between the underlying Banach spaces [6, Theorem 2 and Theorem 3]. A related result appears in Martindale's [10].

As for commutative rings, Milgram's classical paper [11] contains a description of the multiplicative bijections between the algebras of continuous functions on compacta. It turns out that two compact (Hausdorff) spaces are homeomorphic provided their semigroups of continuous functions are isomorphic. The papers [13, 8, 5, 9, 7, 4, 1] contain further developments, generalizations to noncompact spaces, and reiterations.

Multiplicative bijections between algebras of differentiable and smooth functions are the subject of [12] and [2]: they are all linear. Finally, [4] deals with uniformly continuous and Lipschitz functions with values in the unit interval.

2. A preliminary representation result

It this section $T : \text{Lip}(Y) \to \text{Lip}(X)$ will be a fixed multiplicative bijection (in the sense of Definition 1), with X and Y complete metric spaces.

Lemma 1. *The inverse of T is multiplicative.*

Proof. We must check that if $f, g \in \mathrm{Lip}(X)$ are such that $fg \in \mathrm{Lip}(X)$, then $T^{-1}(f)\, T^{-1}(g) = T^{-1}(fg)$. It clearly suffices to check that

$$u\, T^{-1}(f)\, T^{-1}(g) = u\, T^{-1}(fg)$$

for every $u \in \mathrm{Lip}(Y)$ whose support has finite diameter. Please notice that the product of any Lipschitz function by such an u is automatically Lipschitz – actually the support of the product has finite diameter again. But

$$\begin{aligned} T\big(u\, T^{-1}(f)\, T^{-1}(g)\big) &= T(u)\, T\big(T^{-1}(f)\big)\, T\big(T^{-1}(g)\big) \\ &= T(u)\, fg \,=\, T\big(u\, T^{-1}(fg)\big) \end{aligned}$$

and we are done. ∎

The main result of this section is the following.

Proposition 1. *There is a uniform homeomorphism $\tau : X \to Y$ and a mapping* $: X \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$ *such that*

$$T(f)(x) = \mathfrak{t}_x(f(\tau(x))) \qquad (f \in \mathrm{Lip}(Y)\,,\ \ x \in X)\,. \tag{1}$$

Proof. An open set is said to be regular if it is the interior of its closure. The class of all regular open subsets of X is denoted by $R(X)$. The support of a continuous $f : X \to \mathbb{R}$ is the closure of the (cozero) set $\{x \in X \,:\, f(x) \neq 0\}$ and we define U_f as the interior of $\operatorname{supp} f$. Quite clearly, U_f is a regular open set and each regular open set arises in this way. Indeed, if $U \in R(X)$, then $U = U_f$, where $f(x) = \mathrm{dist}(x, U^c)$.

We will consider the order given by inclusion in $R(X)$.

Claim 1. The map $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ given by $\mathfrak{T}(U_f) = U_{T(f)}$ is correctly defined and it is an order isomorphism. Moreover, given $f, g \in \mathrm{Lip}(Y)$ and $U \in R(Y)$ one has $f = g$ in U if and only if $T(f) = T(g)$ in $\mathfrak{T}(U)$.

Proof of Claim 1. First, the condition $U_f \subset U_g$ can be expressed within the multiplicative structure of $\mathrm{Lip}(X)$. To see this, following Shirota [13], let us declare $f \subset g$ if, whenever $h \in \mathrm{Lip}(X), hg = 0$ implies $hf = 0$. It is easily seen that, given $f, g \in \mathrm{Lip}(X)$, one has $f \subset g$ if and only if $U_f \subset U_g$. It follows that, given $f, g \in \mathrm{Lip}(X)$ one has $U_f = U_g$ if and only if $f \subset g$ and $g \subset f$.

As for the "moreover" part, let $M(Y)$ be the set of those h in $\mathrm{Lip}(Y)$ such that $hf \in \mathrm{Lip}(Y)$ for every $f \in \mathrm{Lip}(Y)$. Quite clearly, $M(Y)$ is an algebra containing every Lipschitz function whose support has finite diameter. First notice that if $U = U_h$ for some $h \in M(Y)$, one has $f = g$ on U if and only if $fh = gh$. For arbitrary $U \in R(Y)$ one has $f = g$ on U if and only if $fh = gh$ for every $h \in M(Y)$ such that $U_h \subset U$. *End of proof of Claim* 1.

Given $x \in X$ and $y \in Y$ we write $x \sim y$ provided

$$x = \bigcap_{y\in U} \mathfrak{T}(U) \qquad \text{and} \qquad y = \bigcap_{x\in V} \mathfrak{T}^{-1}(V)\,,$$

where $U \in R(Y)$ and $V \in R(X)$. Please note that if $x \sim y$ and $x \sim y'$, then $y = y'$. Similarly, if $x \sim y$ and $x' \sim y$, then $x = x'$. Write $X_0 = \{x \in X : x \sim y \text{ for some } y \in Y\}$ and $Y_0 = \{y \in Y : x \sim y \text{ for some } x \in X\}$.

Claim 2. (Cf. [3, Lemma 6 and the proof of Theorem 3].) X_0 and Y_0 are dense in X and Y respectively. The map $\tau : X_0 \to Y_0$ sending each x into the only y such that $x \sim y$ is a uniform homeomorphism.

Thus τ extends to a uniform homeomorphism between X and Y we denote again τ.

Claim 3. Given $f \in \mathrm{Lip}(Y)$ and $x \in X$, the value of $T(f)$ at x depends only on $f(\tau(x))$.

Proof of Claim 3. Suppose $f, g \in \mathrm{Lip}(Y)$ agree at $y = \tau(x)$ and let us see that $T(f)(x) = T(g)(x)$. It is possible to find a new Lipschitz function h having the following property: every neighborhood of y contains an open set where h agrees with f and another open set where h agrees with g (see [3, Lemma 3]). It follows that every neighborhood of x contains an open set where $T(h)$ agrees with $T(f)$ and another open set where $T(h)$ agrees with $T(g)$ and so $T(f)(x) = T(g)(x) = T(h)(x)$. *End of proof of Claim* 3.

To complete the proof of the proposition, just take $\mathfrak{t}_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by letting $\mathfrak{t}_x(c) = T(c)(x)$, where c is treated first as a real number and then as a constant function on Y. ∎

We can continue our analysis assuming $T : \mathrm{Lip}(X, d) \to \mathrm{Lip}(X, d')$ has the form

$$T(f)(x) = \mathfrak{t}_x(f(x)) \qquad (f \in \mathrm{Lip}(X, d)\,,\ \ x \in X)\,, \tag{2}$$

where d and d' are uniformly equivalent metrics on X, both making it complete. The general case reduces to this one just taking $d'(x,x') = d(\tau(x),\tau(x'))$.

LEMMA 2. *The set of those $x \in X$ for which $\mathfrak{t}_x$ is not a positive power is at most finite and contains only isolated points.*

Proof. First, observe that a semigroup automorphism of $\mathbb{R}$ is either a positive power or it maps any neighborhood of the origin into an unbounded subset of the line [11, Lemma 4.3].

Suppose there is a sequence (x_n) such that $\mathfrak{t}_{x_n}$ is not a positive power. Passing to a subsequence if necessary we may assume every point in $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ is (relatively) isolated. It is easily seen that there is a sequence (a_n) of strictly positive numbers in so that, if $|t_n| \le a_n$, then the map sending each x_n to t_n is Lipschitz on (S,d) and so ([14, Theorem 1.5.6(a)]) it extends to a bounded Lipschitz function on (X,d).

Given $n \in \mathbb{N}$, pick $t_n \in [-a_n, a_n]$ so that $|\mathfrak{t}_{x_n}(t_n)| > nd'(x_n, x_1)$ an let $f \in \mathrm{Lip}(X,d)$ such that $f(x_n) = t_n$. Obviously, $T(f)$ cannot be Lipschitz on (X,d').

As for the second part, let X^+ be the set of points in X where $\mathfrak{t}_x$ is a positive power, so that there is a function $p : X^+ \to (0,\infty)$ such that

$$T(f)(x) = \mathrm{sign}(f(x))|f(x)|^{p(x)} \qquad (f \in \mathrm{Lip}(X,d)\,,\ \ x \in X^+)\,. \tag{3}$$

Notice that p is uniformly continuous on X^+. Indeed $p(x) = \log T(e)$ is even d'-Lipschitz on X^+. Suppose (x_n) is a sequence in X^+ converging to $x \in X$. Then $p(x_n)$ converges, say to $q \ge 0$. Thus for $c > 0$ one has

$$\mathfrak{t}_x(c) = T(c)(x) = \lim_n T(c)(x_n) = \lim_n c^{p(x_n)} = c^q.$$

It follows that $q > 0$ and so $\mathfrak{t}_x$ is a positive power. ∎

LEMMA 3. *The metrics d and d' are locally Lipschitz equivalent on X. (And so, in the general case, $\tau : X \to Y$ is locally a Lipschitz homeomorphism.)*

Proof. Let $x \in X$. If the identity fails to be Lipschitz in every neighborhood of x, then there exist two sequences (x_n) and (y_n) converging to x such that $\frac{d(x_n,y_n)}{d'(x_n,y_n)} \to \infty$. In particular, x is non-isolated, so there is a neighborhood of x where $T(f)$ is given by (3).

By the triangle inequality we can find a sequence (z_n) such that $\frac{d(x,z_n)}{d'(x,z_n)} \to \infty$ (actually each z_n can be chosen to be x_n or y_n). Now, $h_0(y) = d(x,y)$ and $h_1(y) = 1 + d(x,y)$ are d-Lipschitz but fail to be d'-Lipschitz. Each $T(h_i) = h_i^p$ is d'-Lipschitz, and it is straightforward that p cannot be greater than 1 if h_1^p is d'-Lipschitz, nor lower or equal if h_0^p is, so we have a contradiction and so d and d' are locally Lipschitz equivalent. ∎

Lemma 4. *If x is a cluster point of X, then $p(x) = 1$.*

Proof. Let x be a cluster point of X. We know that, in a certain neighborhood of x, d and d' are Lipschitz equivalent and any function is d-Lipschitz if and only if it is d'-Lipschitz there. Taking $f(y) = d(x,y)$, we have that $T(f)(y) = d(x,y)^{p(y)}$ must be d'-Lipschitz, hence d-Lipschitz which forces $p(x) \geq 1$. By symmetry, it must be $p(x) = 1$. ∎

3. Applications

We state now the main results in this note which should be compared to [4, Theorem 5 and Corollary 2].

Theorem 1. *Let $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ be a multiplicative bijection, where X and Y are complete metric spaces. If X (and so Y) has no isolated points, then T has the form $T(f)(x) = f(\tau(x))$, where $\tau : X \to Y$ is a Lipschitz homeomorphism and so it is automatically linear.*

Proof. In fact we only need to prove that τ is bi-Lipschitz, but if $f \circ \tau$ is Lipschitz on X whenever f is Lipschitz on Y, then τ must be Lipschitz. By symmetry (see Lemma 1) the inverse is also Lipschitz. ∎

The following result solves a problem (number 2) posed in [4].

Theorem 2. *Let X and Y be compact metric spaces, $\tau : X \to Y$ a Lipschitz homeomorphism, F a finite set of isolated points of X and $\mathfrak{t} : F \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$ an arbitrary map. Let, further, $p : X \backslash F \to (0, \infty)$ be a Lipschitz function such that $p(x) = 1$ for every cluster point $x \in X$. Then the map $T : \mathrm{Lip}(Y) \to \mathrm{Lip}(X)$ given by*

$$T(f)(x) = \begin{cases} \mathrm{sign}(f(\tau(x))|f(\tau(x))|^{p(x)} & (x \in X \backslash F), \\ \mathfrak{t}_x(f(\tau(x))) & (x \in F), \end{cases}$$

is a semigroup isomorphism. And, conversely, all semigroup isomorphisms arise in this way.

Proof. The "conversely" part has been already proved.

As for the other part, we may and do assume F is empty and τ is the identity on X and we must prove that if $p : X \to \mathbb{R}_+$ is a Lipschitz function whose value at every cluster point is 1, then $f \mapsto \operatorname{sign}(f)|f|^p$ defines a semigroup isomorphism of $\operatorname{Lip} X$. By symmetry, it suffices to check that $\operatorname{sign}(f)|f|^p$ is Lipschitz if f is.

Observe that a continuous function g is locally Lipschitz provided $|g|$ is and that, by compactness, locally Lipschitz functions on X are Lipschitz. Hence we may assume f to be nonnegative.

Suppose f^p fails to be Lipschitz. Then there is a point x and a sequence (x_n) converging to x such that

$$\frac{f(x_n)^{p(x_n)} - f(x)^{p(x)}}{d(x_n, x)} \longrightarrow \infty \qquad (n \to \infty)\,.$$

But $p(x) = 1$ and quite clearly, $f(x) = 0$, so one actually has

$$\frac{f(x_n)^{p(x_n)}}{d(x_n, x)} \longrightarrow \infty \qquad (n \to \infty)\,.$$

However, the logarithm of the above expression is bounded since

$$\begin{aligned}
p(x_n) \log f(x_n) - \log d(x_n, x) \\
&\le p(x_n) \log(\Lambda(f) d(x_n, x)) - \log d(x_n, x) \\
&\le \|p\|_\infty |\log \Lambda(f)| + p(x_n) \log d(x_n, x) - \log d(x_n, x) \\
&\le \|p\|_\infty |\log \Lambda(f)| + |p(x_n) - 1| |\log d(x_n, x)| \\
&\le \|p\|_\infty |\log \Lambda(f)| + \Lambda(p)\, d(x_n, x)\, |\log d(x_n, x)|
\end{aligned}$$

and $t \log t \to 0$ as $t \to 0^+$. ∎

Let us present another application of the results proved in Section 2.

Corollary 1. *Let $T : \operatorname{Lip}(Y) \to \operatorname{Lip}(X)$ be a multiplicative bijection. If Y has finite diameter, then so X does and τ is a Lipschitz homeomorphism.*

Proof. Clearly, $\operatorname{Lip} Y$ is a semigroup if and only if Y has finite diameter, and the same applies to X. On the other hand, $\operatorname{Lip} Y$ is a semigroup if and only if $\operatorname{Lip} X$ is, by Lemma 1 and so X has finite diameter. According to Lemma 2 we may and do assume $\mathfrak{t}_x$ is a positive power for every $x \in X$ and therefore T preserves order in both directions and the main result of [3] applies. ∎

We close with a counterexample showing that most of the hypotheses appearing in our statements are really necessary.

EXAMPLE 1. Two complete metric spaces X and Y which are not Lipschitz homeomorphic, yet there is a multiplicative bijection between $\operatorname{Lip}(Y)$ and $\operatorname{Lip}(X)$.

Proof. Set $X = \{4^n : n \in \mathbb{N}\}$ and $Y = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ endowed with their standard metrics. These spaces are not Lipschitz homeomorphic. Indeed, let $\tau : Y \to X$ be any injective mapping. The set $S = \{n \in \mathbb{N} : \tau(2^n) \geq 4^n\}$ is infinite. If $n \in S$ is large enough one has $\tau(2^n) - \tau(2) \geq 4^n - \tau(2)$, which makes an estimate of the form $|\tau(2^n) - \tau(2)| \leq L|2^n - 2|$ impossible.

However, the formula $T(f)(4^n) = (f(2^n))^2 \operatorname{sign}(f(2^n))$ defines a multiplicative bijection between $\operatorname{Lip}(Y)$ and $\operatorname{Lip}(X)$. Quite clearly, T defines a semigroup isomorphism between $\mathbb{R}^Y$ and $\mathbb{R}^X$ whose inverse is given by $T^{-1}(g)(2^n) = \operatorname{sign} g(4^n)\sqrt{|g(4^n)|}$ and so the point is to check that T restricts to a bijection between $\operatorname{Lip} Y$ and $\operatorname{Lip} X$.

For $Z = X, Y$ we consider the space Z_0 obtained by adding the point 0 to Z. If f is any function on Z we extend it to a function f_0 on Z_0 just taking $f_0(0) = 0$. Obviously f_0 is Lipschitz on Z_0 provided $f \in \operatorname{Lip} Z$.

Let $f \in \operatorname{Lip}(Y)$ and let L a Lipschitz constant for f_0. Let us check that $T(f)$ is Lipschitz on X. Working separately with the positive and negative parts of f we may and do assume $f \geq 0$. We have

$$\begin{aligned}
\frac{\big|T(f)(4^n) - T(f)(4^m)\big|}{|4^n - 4^m|} &= \frac{\big|(f(2^n))^2 - (f(2^m))^2\big|}{|(2^n)^2 - (2^m)^2|} \\
&= \frac{|(f(2^n) - f(2^m))(f(2^n) + f(2^m))|}{|(2^n - 2^m)(2^n + 2^m)|} \\
&\leq L_f \frac{|f(2^n) + f(2^m)|}{2^n + 2^m} \leq L \frac{L2^n + L2^m}{2^n + 2^m} = L^2
\end{aligned}$$

and L^2 is a Lipschitz constant for $T(f)$.

For $g \in \mathrm{Lip}(X)$, take a Lipschitz constant K for g_0. If $m < n$, then

$$\frac{\left|T^{-1}(g)(2^n) - T^{-1}(g)(2^m)\right|}{|2^n - 2^m|} \leq \frac{\sqrt{|g(4^n)|} + \sqrt{|g(4^m)|}}{2^n - 2^m} \leq \frac{\sqrt{K4^n} + \sqrt{K4^m}}{2^n - 2^m}$$

$$\leq \frac{\sqrt{K4^n} + \sqrt{K4^{(n-1)}}}{2^n - 2^{n-1}} \leq \sqrt{K}\frac{2^n + 2^{n-1}}{2^{n-1}} = 3\sqrt{K}$$

and $3\sqrt{K}$ is a Lipschitz constant for $T^{-1}(g)$. ∎

References

[1] J. Araújo, Multiplicative bijections of semigroups of interval-valued continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (1) (2009), 171 – 178.

[2] F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, Some preserver problems on algebras of smooth functions, *Ark. Mat.* **48** (2) (2010), 289 – 300.

[3] F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions, *Houston J. Math.* **37** (1) (2011), 181 – 202.

[4] F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, Z. Ercan, S. Önal, Memorandum on multiplicative bijections and order, *Semigroup Forum* **79** (1) (2009), 193 – 209.

[5] Á. Császár, Semigroups of continuous functions, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **45** (1983), 131 – 140.

[6] M. Eidelheit, On isomorphisms of rings of linear operators, *Studia Math.* **9** (1940), 97 – 105.

[7] Z. Ercan, S. Önal, An answer to a conjecture on multiplicative maps on $C(X, I)$, *Taiwanese J. Math.* **12** (2) (2008), 537 – 538.

[8] M. Henriksen, On the equivalence of the ring, lattice, and semigroup of continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956), 959 – 960.

[9] J. Marovt, Multiplicative bijections of $C(X, I)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (4) (2006), 1065 – 1075.

[10] W.S. Martindale III, When are multiplicative mappings additive? *Proc. Amer. Math. Soc.* **21** (1969), 695 – 698.

[11] A.N. Milgram, Multiplicative semigroups of continuous functions, *Duke Math. J.* **16** (1940), 377 – 383.

[12] J. Mrcun, P. Šemrl, Multiplicative bijections between algebras of differentiable functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **32** (2) (2007), 471 – 480.

[13] T. Shirota, A generalization of a theorem of I. Kaplansky, *Osaka Math. J.* **4** (1952), 121 – 132.

[14] N. Weaver, "Lipschitz Algebras", World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999.

Apéndice E

Lattices of uniformly continuous functions

Topology and its Applications 160 (2013) 50–55

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Topology and its Applications

www.elsevier.com/locate/topol

Lattices of uniformly continuous functions ☆

Félix Cabello Sánchez *, Javier Cabello Sánchez

Departamento de Matemáticas, UEx, 06071-Badajoz, Spain

ARTICLE INFO

Article history:
Received 10 November 2011
Received in revised form 17 September 2012
Accepted 18 September 2012

Keywords:
Lattices
Uniformly continuous functions
Isomorphism
Banach–Stone theorem

ABSTRACT

An explicit representation of the order isomorphisms between lattices of uniformly continuous functions on complete metric spaces is given. It is shown that every lattice isomorphism $T : U(Y) \to U(X)$ is given by the formula $(Tf)(x) = t(x, f(\tau(x)))$, where $\tau : X \to Y$ is a uniform homeomorphism and $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by $t(x, c) = (Tc)(x)$. This provides a correct proof for a statement made by Shirota sixty years ago.

1. Introduction

The aim of this short note is to prove the following

Theorem. *Let X and Y be complete metric spaces and $T : U(Y) \to U(X)$ a lattice isomorphism. There is a uniform homeomorphism $\tau : X \to Y$ such that*

$$(Tf)(x) = t\big(x, f\big(\tau(x)\big)\big) \quad \big(f \in U(Y),\ x \in X\big), \tag{1}$$

where $t : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given by $t(x, c) = (Tc)(x)$. Here c is first treated as a real number and then as a constant function on Y.

(We use $C(X)$, $U(X)$ and $U^*(X)$ for the lattices of continuous, uniformly continuous and bounded uniformly continuous real-valued functions on X, respectively.)

We emphasize that lattice isomorphisms are not assumed to be linear, they are just bijections that preserve the order in both directions. Of course the preceding theorem implies that each linear lattice isomorphism $T : U(Y) \to U(X)$ is a weighted composition operator of the form $(Tf)(x) = w(x)f(\tau(x))$, where $\tau : X \to Y$ is a uniform homeomorphism and $w = T(1)$. To the best of our knowledge, even this specialization is new.

Let us quickly review some earlier results closely related to the subject of this note.

Shirota proved in [10] that the lattice structure of $U^*(X)$ determines the uniform structure of X amongst the complete metric spaces. A similar result had been got earlier by Nagata [9] under various continuity assumptions.

From a modern perspective the result for bounded functions is as follows (see [2, Section 4]): there is a compactification σX of X such that $U^*(X) = C(\sigma X)$ in the sense that a bounded function $f : X \to \mathbb{R}$ extends to a continuous function on

☆ Research supported in part DGICYT projects MTM2007-6994-C02-02 and MTM2010-20190 and Junta de Extremadura program GR10113.

* Corresponding author.
E-mail addresses: fcabello@unex.es (F. Cabello Sánchez), coco@unex.es (J. Cabello Sánchez).
URL: http://kolmogorov.unex.es/~fcabello (F. Cabello Sánchez).

0166-8641/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2012.09.010

σX if and only if it is uniformly continuous. (This construction is due to Smirnov and Samuel.) Therefore, each isomorphism between $U^*(Y)$ and $U^*(X)$ gives rise to an isomorphism $T : C(\sigma Y) \to C(\sigma X)$. By an old result of Kaplansky [8, Theorem 1], T induces a (necessarily uniform) homeomorphism $\tau : \sigma X \to \sigma Y$. But the only points in σX having countable neighborhood bases are those in X (and similarly for Y) and so τ restricts to a uniform homeomorphism between X and Y (see [5, Lemma 1]; this idea goes back to Čech). In a similar vein, it is proved in [5] that if there is a linear and unital isomorphism of lattices between $U(Y)$ and $U(X)$, then X and Y are uniformly homeomorphic, and the hypothesis about linearity was removed in [3]. For related results beyond the metric setting we refer the reader to the recent paper [6] as well as to [7], where a remarkable "internal" characterization of lattices of uniformly continuous functions appears.

To be true, it is claimed in [10] that the lattice structure of $U(X)$ determines the uniform structure of the complete metric space X. It seems, however, that the proof given there is not correct. See Section 3.4 below. In any case we believe that the result deserves a clean, correct proof.

2. Proof

The proof is organized as follows. First, we construct the homeomorphism τ on certain dense subsets of X and Y and we establish the functional representation (1) there.

After that we manage to prove that τ extends to a uniform homeomorphism between X and Y and we obtain (1) in general.

2.1. Regular open sets

This part makes heavy use of the ideas of [3]. An open set is said to be regular if it is the interior of its closure. The class of all regular open subsets of X is denoted by $R(X)$. We will consider the order given by inclusion in $R(X)$.

The support of a continuous $f : X \to \mathbb{R}$ is the closure of the (cozero) set $\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}$ and we define U_f as the interior of the support of f. Note that U_f and U_{-f} are exactly the same set. Quite clearly, U_f is a regular open set and each regular open set arises in this way for some $f \in U(X)$. Indeed, if $U \in R(X)$, then $U = U_f$, where $f(x) = \mathrm{dist}(x, U^c)$.

Next, we remark that the condition $U_f \subseteq U_g$ can be expressed within the order structure of $U(X)^+$, the subset of nonnegative functions in $U(X)$. To see this, following Shirota [10], let us declare $f \subset g$ if, whenever $h \in U(X)^+$, $h \wedge g = 0$ implies $h \wedge f = 0$. It is easily seen that, given $f, g \in U(X)^+$, one has $f \subset g$ if and only if $U_f \subseteq U_g$. It follows that, given $f, g \in U(X)^+$ one has $U_f = U_g$ if and only if $f \subset g$ and $g \subset f$.

Now, assuming once and for all $T(0) = 0$ as we clearly may do, we see that the map $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ given by $\mathfrak{T}(U_f) = U_{Tf}$ for $f \in U(Y)^+$ is correctly defined and it is an order isomorphism.

Although the definition of $\mathfrak{T}$ uses nonnegative functions only, the following result shows that, in some sense, $\mathfrak{T}$ governs the behavior of T on the whole of $U(Y)$. For the sake of completeness, we have included a proof which is perhaps simpler than the given in [3, Corollary 2].

Lemma 1. *Let $T : U(Y) \to U(X)$ be an isomorphism with $T(0) = 0$ and let $\mathfrak{T} : R(Y) \to R(X)$ be as before. Then, given $f, g \in U(Y)$ and $U \in R(Y)$, one has $f \leqslant g$ on U if and only if $Tf \leqslant Tg$ on $\mathfrak{T}(U)$. The same is true replacing "$\leqslant$" by "$\geqslant$" or by "$=$".*

Proof. First, we prove the lemma for $f, g \in U(Y)^+$. It suffices to check that $f \leqslant g$ on $U \in R(Y)$ if and only if $f \wedge h \leqslant g \wedge h$ for every $h \in U(Y)^+$ such that $U_h \subseteq U$. The "only if" part is nearly obvious from the definitions. The converse is as follows: if $f(y) > g(y)$ for some $y \in U$, then we may take $h \in U(Y)^+$ such that $h(y) = f(y)$ and $U_h \subseteq U$. We have $(f \wedge h)(y) = f(y) > g(y) = (g \wedge h)(y)$, which is enough.

Now, by symmetry (or applying the previous case to the map $f \mapsto -T(-f)$, which is a lattice isomorphism too), we also have the following: the map $\mathfrak{T}^- : R(Y) \to R(X)$ defined by $\mathfrak{T}^-(U_h) = U_{T(-h)}$ for $h \in U(Y)^+$ is correctly defined and preserves order in both directions. Moreover, given $f, g \in U(Y)^-$ and $U \in R(Y)$ one has $f = g$ on U if and only if $Tf = Tg$ on $\mathfrak{T}^-(U)$.

Next we prove that $\mathfrak{T}^- = \mathfrak{T}$. Let us verify that $\mathfrak{T}^-(U) \subseteq \mathfrak{T}(U)$ for every $U \in R(Y)$; the other containment is analogous, with the roles of $\mathfrak{T}^-(U)$ and $\mathfrak{T}(U)$ reversed. Suppose on the contrary that $\mathfrak{T}(U)$ does not contain $\mathfrak{T}^-(U)$. Then neither $\overline{\mathfrak{T}(U)}$ does and there is a (nonempty) regular open set $V \subseteq \mathfrak{T}^-(U)$ such that $d(V, \mathfrak{T}(U)) > 0$. Set $g' = T(1)$, $g'' = T(-1)$ and take a (nonempty) regular open $B'' \subset V$ where g'' is bounded. Take $A = (\mathfrak{T}^-)^{-1}(B'')$ and let B' be any (nonempty) regular open subset of $\mathfrak{T}(A)$ where g' is bounded. Then, since $d(B', B'') \geqslant d(V, \mathfrak{T}(U)) > 0$ and g' and g'' are bounded on B' and B'' respectively, there is $g \in U(X)$ which agrees with g' on B' and agrees with g'' on B''. Take $f \in U(Y)$ such that $g = Tf$ and put $f^+ = f \vee 0$ and $f^- = f \wedge 0$. Clearly, $T(f^+) = T(f \vee 0) = Tf \vee T0 = g^+$ and $T(f^-) = g^-$. Observe that $g^+ = g'$ on B' and $g^- = g''$ on B'', from where it follows that $f^+ = 1$ on $\mathfrak{T}^{-1}(B')$ and $f^- = -1$ on $(\mathfrak{T}^-)^{-1}(B'') = A$ and this is a contradiction since $\mathfrak{T}^{-1}(B')$ is a nonempty subset of A.

To complete the proof we observe that, given $f, g \in U(Y)$ and $U \in R(Y)$, one has $f \leqslant g$ on U if and only if $f^+ \leqslant g^+$ on U and $f^- \leqslant g^-$ on U. In this case one has $T(f^+) \leqslant T(g^+)$ on $\mathfrak{T}(U)$ and $T(f^-) \leqslant T(g^-)$ on $\mathfrak{T}(U)$ and since $T(f^\pm) = (Tf)^\pm$ and $T(g^\pm) = (Tg)^\pm$ we have $Tf \leqslant Tg$ on $\mathfrak{T}(U)$. $\square$

Now, we can use $\mathfrak{T}$ to construct a point map between certain dense subsets of X and Y. The following result is a particular case of [3, Lemma 6]. The proof is included to render this note self-contained.

Lemma 2. *If $\mathfrak{T}: R(Y) \to R(X)$ is a lattice isomorphism, then there exist dense subsets X' of X and Y' of Y and a homeomorphism $\tau: X' \to Y'$ such that given $x \in X'$ and $U \in R(Y)$ one has $x \in \mathfrak{T}(U)$ if and only if $\tau(x) \in U$.*

Proof. Given $(x, y) \in X \times Y$, let us write $x \sim y$ if

$$\bigcap_{y \in U} \mathfrak{T}(U) = \{x\} \quad \text{and} \quad \bigcap_{x \in V} \mathfrak{T}^{-1}(V) = \{y\},$$

where $U \in R(Y)$ and $V \in R(X)$. First of all notice that if $x \sim y$ and $x \sim y'$, then $y = y'$. Similarly, if $x \sim y$ and $x' \sim y$, then $x = x'$. Let X' be the set of those $x \in X$ for which there exists (a necessarily unique) $y \in Y$ such that $x \sim y$ and Y' the set of those $y \in Y$ such that $x \sim y$ for some $x \in X$. It is pretty obvious that the map $\tau: X' \to Y'$ sending each $x \in X'$ to the only $y \in Y'$ such that $x \sim y$ is a homeomorphism.

It remains to see that Y' is dense in Y. The corresponding statement for X' follows by symmetry.

Let U be a nonempty open subset of Y. We must show that U meets Y'. Take a nonempty $U_1 \in R(Y)$ such that $\overline{U}_1 \subseteq U$ and $\operatorname{diam} U_1 \leqslant 1$. Choose a nonempty $V_1 \subset \mathfrak{T}(U_1)$, with $\operatorname{diam} V_1 \leqslant 1$. Then choose a nonempty $U_2 \subset \mathfrak{T}^{-1}(V_1)$ with $\overline{U}_2 \subset U_1$ and $\operatorname{diam} U_2 \leqslant 1/2$. Next, take a nonempty $V_2 \subset \mathfrak{T}(U_2)$ such that $\overline{V}_2 \subset V_1$ and $\operatorname{diam} V_2 \leqslant 1/2$. In this way we get sequences (U_n) and (V_n) in $R(Y)$ and $R(X)$, respectively, such that, for each n:

- $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$ and $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$.
- U_n and V_n have diameter at most $1/n$.
- $\mathfrak{T}(U_{n+1}) \subset V_n \subset \mathfrak{T}(U_n)$.

Now, it is clear that there are $y \in Y$ and $x \in X$ such that

$$\{y\} = \bigcap_n U_n = \bigcap_n \overline{U}_n \quad \text{and} \quad \{x\} = \bigcap_n V_n = \bigcap_n \overline{V}_n.$$

From where it follows that $x \sim y$ and since $y \in U$ we see that Y' is dense in Y. $\square$

2.2. Functional representation

The following result allows one to entwine a couple of functions near a point where they agree.

Lemma 3. *Suppose $f, g \in U(Y)$ agree at $y \in Y$. If $g \leqslant f$, then there is $h \in U(Y)$ such that every neighborhood of y contains a nonempty (regular) open set where h agrees with f and another nonempty open set where h agrees with g.*

Proof. If y is isolated, then there is nothing to prove. Otherwise we may take a sequence (y_n) converging to y, with $y_n \neq y_m$ for $n \neq m$. Both $f(y_n)$ and $g(y_n)$ converge to $c = f(y) = g(y)$ and so there is a sequence (c_n) converging to c such that $c_n > f(y_n)$ for even n and $c_n < g(y_n)$ for odd n. Take $\phi \in U(Y)$ such that $\phi(y_n) = c_n$ and put $h = (\phi \vee g) \wedge f$. $\square$

Going back to T, we can now prove the formula in (1), at least for $x \in X'$ – which is the set defined during the proof of Lemma 2.

Corollary 1. *Given $f \in U(Y)$ and $x \in X'$, the value of Tf at x depends only on $f(\tau(x))$. Consequently, the formula (1) holds for every $x \in X'$ and every $f \in U(Y)$.*

Proof. Indeed suppose $f, g \in U(Y)$ agree at $y = \tau(x)$ and let us see that $(Tf)(x) = (Tg)(x)$. Replacing f and g by $f \vee g$ and $f \wedge g$ we may assume $g \leqslant f$. Take h as in the lemma and look at Th: every neighborhood of x contains an open set where Th agrees with Tf and another open set where Th agrees with Tg and so $(Tf)(x) = (Tg)(x) = (Th)(x)$.

To end, if $c = f(y)$, we have $(Tf)(x) = (Tc)(x) = t(x, c) = t(x, f(\tau(x)))$, as required. $\square$

2.3. Uniform continuity

Next we prove that $\tau: X' \to Y'$ is a uniform homeomorphism. By symmetry, one only has to check that it is uniformly continuous.

If we assume the contrary we easily arrive at the following situation: there are sequences (x_n) and (x'_n) in X' and $\delta > 0$ such that:

- $0 < d(x_n, x'_n) \to 0$;
- $d(x_n, x_m) \geqslant \delta$ and $d(x'_n, x'_m) \geqslant \delta$ for $n \neq m$;
- $d(y_n, y'_m) \geqslant \delta$ for every n and m,

where $y_n = \tau(x_n)$ and $y'_n = \tau(x'_n)$. See [1, Lemma 3.4] or [3, Proof of Theorem 1, part I] for details. We owe to the referee the information that this was published long time ago by Efremovich in [4] and by Vilhelm and Vitner in [11].

Suppose there is a sequence (y''_n) in Y' such that $d(y'_n, y''_n) \to 0$, with $y''_n \neq y'_n$ for every n. Since neither (y_n) nor (y'_n) have convergent subsequences we may assume that $y''_n \neq y'_m$ for arbitrary n, m. Let $f \in U(Y)$ be a function vanishing at every y_n and taking the value 1 at every y'_n and put $g = Tf$. Then g vanishes at every (x_n) and $g(x'_n) \to 0$. Now look at the sequence (x''_n), where $\tau(x''_n) = y''_n$ and observe that $x''_n \neq x'_m$ for every n and m. Quite clearly, there is $g^* \in U(X)$ such that $g^*(x_n) = g^*(x''_n) = 0$ for every n, while $g^*(x'_n) = g(x'_n)$ for every n. Taking $f^* \in U(Y)$ such that $Tf^* = g^*$ we see that $f^*(y_n) = f^*(y''_n) = 0$, while $f^*(y'_n) = f(y'_n) = 1$ for every n, a contradiction with $d(y'_n, y''_n) \to 0$.

If there is no such a sequence, then passing to a subsequence we may assume the sequence (y'_n) uniformly isolated in Y, that is, there is $r > 0$ (independent on n) such that the only point of Y in the ball of radius r centred at y'_n is y'_n itself. This obviously implies that the lattice of restrictions

$$M = \left\{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\colon\ s(n) = f\left(y'_n\right) \text{ for some } f \in U(Y) \text{ vanishing at every } y_k\right\}$$

is the whole of $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. But, certainly,

$$L = \left\{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\colon\ s(n) = g\left(x'_n\right) \text{ for some } g \in U(X) \text{ vanishing at every } x_k\right\}$$

is c_0, the lattice of null sequences. Clearly, T induces a lattice isomorphism between M and L (taking $s \in M$ to the sequence $(Tf)(x'_n)$, where f is any uniformly continuous function on Y such that $s(n) = f(y'_n)$ and $f(y_n) = 0$ for every n), which is impossible since $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ and c_0 are not isomorphic. Indeed, let us consider the following property that a given lattice N may have or may not have:

($\heartsuit$) If C is a countable subset of N and there is $h \in N$ such that $h = f \wedge g$ whenever f and g are different elements of C, then C has a supremum in N.

Then $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ has ($\heartsuit$), while c_0 lacks it.

This shows that τ defines a uniform homeomorphism between X' and Y' which, by density, extends to a uniform homeomorphism between X and Y that we shall not relabel. It is easily seen that, with the notations of Section 2.1, one has $\mathfrak{T}(U) = \tau^{-1}(U)$ and this implies that $X' = X$ and $Y' = Y$. Now (1) follows from what we proved in Section 2.2, which completes the proof of the theorem.

3. Miscellaneous remarks and examples

3.1. Lattices of bounded uniformly continuous functions

As we already mentioned the main result is true, and well-known, replacing $U(\cdot)$ by $U^*(\cdot)$. Let us indicate the minor changes required in the proof. First, notice that every $U \in R(X)$ arises as U_f for some nonnegative $f \in U^*(X)$: just take $f = d(\cdot, U^c) \wedge 1$. The remainder of the proof goes undisturbed replacing $U(\cdot)$ by $U^*(\cdot)$ everywhere until the point where the lattices of restrictions appear. This time $M^* = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\colon\ s(n) = f(y'_n)$ for some $f \in U^*(Y)$ vanishing at every $y_k\}$ equals ℓ_∞, the lattice of all bounded sequences, while $L^* = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\colon\ s(n) = g(x'_n)$ for some $g \in U^*(X)$ vanishing at every $x_k\}$ is again c_0. The following observation ends the proof.

Lemma 4. *The lattices c_0 and ℓ_∞ are not isomorphic.*

Proof. Quite clearly, ℓ_∞ has a countable subset C such that for every $g \in \ell_\infty$ there is $f \in C$ so that $g \leqslant f$. Let us see that there is no such set in c_0. Let (f_i) be any sequence in c_0. Take an increasing sequence of integers (n_i) so that $f_i(n) < 1/i$ for $n \geqslant n_i$. Then set $g(n) = 1/i$ for $n \in [n_i, n_{i+1})$. Clearly, g belongs to c_0, but $g \leqslant f_i$ for no $i \in \mathbb{N}$. □

This argument provides a rather elementary proof of Shirota's theorem for bounded functions which, moreover, gives a very explicit functional representation for T.

3.2. Bounded functions and continuity of isomorphisms

One may wonder to what extend $U(X)$ "knows" which functions are bounded. Since for fixed $g \in U(X)$ the translation mapping $f \mapsto f + g$ is an automorphism the real question is whether an isomorphism $T : U(Y) \to U(X)$ (or an automorphism of $U(X)$) must send pairs having bounded differences into pairs of the same type. In general the answer is negative since automorphisms of $U(\mathbb{N}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ are as arbitrary as they can be. Indeed, given a strictly positive $g \in U(\mathbb{N})$, the multiplication map $f \mapsto g \cdot f$ is a linear automorphism of $U(\mathbb{N})$ sending 1 to g.

It turns out that this "pathological" behavior is possible only if $\mathbb{N}$ (with the discrete metric) appears as a direct summand in X in the "uniform category" – that is, there is $r > 0$ and a sequence (x_n) in X such that the only point of X in the ball of radius r centered at x_n is x_n itself. Let us state this properly.

Corollary 2. *For a metric space X the following statements are equivalent*:

(a) *$\mathbb{N}$ is not a direct summand in X in the uniform category.*
(b) *Whenever T is an automorphism of $U(X)$ and $f, g \in U(X)$ are such that $g - f$ is bounded, $Tg - Tf$ is bounded.*
(c) *Every automorphism of $U(X)$ is continuous in the topology of uniform convergence.*

Proof. A metric space has the same uniformly continuous functions as its completion, and so we may assume X complete so that the main result applies.

It is clear that any of the conditions (b) or (c) implies (a).

Let us prove the implication (a) $\Rightarrow$ (b). Suppose there is an automorphism T of $U(X)$ and $f, g \in U(X)$ such that $g - f$ is bounded, but $Tg - Tf$ is not. Clearly, we may assume that the uniform homeomorphism associated to T is the identity on X so that $(Tf)(x) = t(x, f(x))$ for every $f \in U(X)$ and $x \in X$. Replacing f and g by $f \wedge g$ and $f \vee g$ we may and do assume $f \leqslant g$. Applying a translation if necessary we can assume that $f = a$ is constant and then that $g = b$ is also a constant. (Each translation is an order automorphism.) Consider the set $I = \{t \in [a, b]\colon\ T(t) - T(a) \text{ is bounded}\}$. Needless to say I is an interval and so either $I = [a, c)$ with $c \leqslant b$ or $I = [a, c]$, with $c < b$. We write the proof in the first case, the other is left to the reader. After subtracting $T(c)$ we arrive at the following situation: $T(c) = 0$ and $T(c')$ is unbounded for $c' > c$. We fix a sequence (c_n) decreasing to c and we put $f_n = T(c_n)$. All these functions are unbounded (from above) and we can choose a sequence (x_n) such that $f_{n+1}(x_{n+1}) \geqslant 1 + f_1(x_n)$. We then have $f_1(x_{n+1}) \geqslant 1 + f_1(x_n)$, which guarantees that the terms of (x_n) are uniformly apart. We claim that there is no sequence (x'_n) with $d(x_n, x'_n) \to 0$ and $x'_n \neq x_n$ for every n. Assuming the contrary, there is $f \in U(X)$ such that $f(x_n) = c_n$ and $f(x'_n) = c$. Therefore $g = Tf$ vanishes at every x'_n while $g(x_n) = f_n(x_n) \to \infty$, a contradiction.

Finally we prove that (a) implies (c). Let us begin with the observation that the formula appearing in the theorem already implies that each isomorphism $U(Y) \to U(X)$ is continuous (hence a homeomorphism) in the topology of pointwise convergence. This follows from the fact that, for each fixed $x \in X$, the function $c \in \mathbb{R} \to t(x, c) \in \mathbb{R}$ is continuous, since it is increasing and surjective.

Now suppose (c) fails. After a moment's reflection we realize that there is an automorphism T of $U(X)$ with $T(0) = 0$, a sequence (c_n) decreasing to 0 and some $\varepsilon > 0$ such that $\sup\{(Tc_n)(x)\colon\ x \in X\} > \varepsilon$. As before, we may assume that the spatial part of T is the identity.

For each n, pick x_n such that $(Tc_n)(x_n) > \varepsilon$. As $(Tc_n)(x) \to 0$ as $n \to \infty$ for each fixed x we see that (x_n) does not converge (and has no convergent subsequence). For if (x_n) converges, say to x, then we have $(Tc_n)(x) \to 0$, while if $m \geqslant n$, then $(Tc_n)(x_m) \geqslant (Tc_m)(x_m) > \varepsilon$, which is absurd. Hence there is some $r > 0$ such that $d(x_n, x_m) > r$ for $n \neq m$. Let us check that there is no sequence (x'_n) with $d(x_n, x'_n) \to 0$ and $x'_n \neq x_n$ for every n. If such an (x'_n) exists, then one finds $f \in U(X)$ such that $f(x_n) = c_n$ and $f(x'_n) = 0$ for every n and so $(Tf)(x_n) > \varepsilon$ and $(Tf)(x'_n) = 0$ for all n, a contradiction. $\square$

3.3. *Lattice homomorphisms*

The main theorem does not extend to general lattice homomorphisms. The following example shows that, in general, homomorphisms $T : U(Y) \to U(X)$ do not correspond to point maps $\tau : X \to Y$, even in the linear case. Please consider $\mathbb{R}$ as the lattice of (uniformly continuous) functions on a single point.

Example 1.

(a) A linear surjective homomorphism $\phi : U(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vanishing on every bounded function.
(b) A linear injective homomorphism $T : U(Y) \to U(X)$ which is not a weighted composition operator.

Proof. (a) Recall that every uniformly continuous function on the real line is Lipschitz for large distances and so, if $f \in U(\mathbb{R})$, the ratio $f(t)/t$ is bounded for large t. Let (s_n) be so that $|s_n| \to \infty$ and $\mathcal{U}$ a free ultrafilter on the integers. Then set $\phi(f) = \lim_{\mathcal{U}(n)} f(s_n)/s_n$.

(b) Take $Y = \mathbb{R}$ and let X be the disjoint union of $\mathbb{R}$ and a single (isolated) point, so that $U(X) = U(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Put $Tf = (f, \phi(f))$, where ϕ is as in Part (a). $\square$

3.4. *Was Shirota right?*

As we mentioned in the Introduction, Shirota claims in [10, Theorem 6, first part] that two complete metric spaces are uniformly homeomorphic provided they have isomorphic lattices of uniformly continuous functions.

We believe that this fact is not proved in [10] nor can even be deduced from the arguments given in that paper. (Please read the first paragraph of [5] and Problems 1 and 3 in [6]; by the way notice that our main result solves both problems in the affirmative sense.) Let us justify our opinion. Together with the order relation that we used in Section 2.1, Shirota considers the following stronger relation (Definition 4), where L can be either $U(X)^+$ or $U^*(X)^+$: Given $f, g \in L$ we write $f \Subset g$ if, whenever the family (h_α) has an upper bound in L and $h_\alpha \subset f$ for all α, there is an upper bound $h \in L$ such that $h \subset g$.

As far as we can understand, the proof of the part of [10, Theorem 6] concerning bounded functions is based on the fact that $d(U_f, U_g^c) > 0$ is equivalent to $f \Subset g$ when $L = U^*(X)^+$.

Allowing unbounded functions $d(U_f, U_g^c) > 0$ does not longer imply $f \Subset g$, as the following example, copied from [3, Section 5] and pasted here, shows. Consider $X = \mathbb{R}$ with the usual distance and the sets:

$$V = \bigcup_n (n - 1/8, n + 1/8) \quad \text{and} \quad W = \bigcup_n (n - 1/4, n + 1/4).$$

Clearly, $d(V, W^c) = 1/8$. Define f and g taking $f(x) = d(x, V^c)$ and $g(x) = d(x, W^c)$, so that $V = U_f$ and $W = U_g$. Let us see that the relation $f \Subset g$ does not hold in $U(\mathbb{R})$. Indeed, for $n \in \mathbb{N}$, let h_n be piecewise linear function defined by the conditions $h_n(n) = n$, $h_n(n \pm \frac{1}{8}) = 0$. Then $h_n \subset f$ for all n and the sequence (h_n) is bounded by $|\cdot|$. However no uniformly continuous function $h \subset g$ can be an upper bound for (h_n).

As the referee pointed out, the gap in [10] occurs in the (fifth line of the) proof of Lemma 1, where Shirota uses the product $g_1 h_1$ without realizing that h_1 may be unbounded and the product of a bounded uniformly continuous function with an unbounded one need not be uniformly continuous.

References

[1] A. Berarducci, D. Dikranjan, J. Pelant, An additivity theorem for uniformly continuous functions, Topology Appl. 146/147 (2005) 339–352.
[2] F. Cabello Sánchez, Homomorphisms on lattices of continuous functions, Positivity 12 (2008) 341–362.
[3] F. Cabello Sánchez, J. Cabello Sánchez, Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions, Houston J. Math. 137 (2011) 181–202.
[4] V.A. Efremovich, Infinitesimal spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR 76 (1951) 341–343 (in Russian).
[5] M.I. Garrido, J.Á. Jaramillo, A Banach–Stone theorem for uniformly continuous functions, Monatsh. Math. 131 (3) (2000) 189–192.
[6] M. Hušek, A. Pulgarín, Banach–Stone-like theorems for lattices of uniformly continuous functions, Quaest. Math., in press.
[7] M. Hušek, A. Pulgarín, Lattices of uniformly continuous functions, preprint, 2012.
[8] I. Kaplansky, Lattices of continuous functions, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 617–623.
[9] J. Nagata, On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces, Osaka Math. J. 1 (1949) 166–181.
[10] T. Shirota, A generalization of a theorem of I. Kaplansky, Osaka Math. J. 4 (1952) 121–132.
[11] V. Vilhelm, Č. Vitner, Continuity in metric spaces, Čas. Pěst. Mat. 77 (1952) 147–173 (in Czech).