ESPACIOS (LF) Y EL PROBLEMA DEL COCIENTE SEPARABLE

JOSE M. GARCIA LAFUENTE

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
Facultad de Ciencias
Sección de Matemáticas

Portada: Xulio García Rivas
I.S.B.N.: 84-600-4203-0
Depósito Legal: BA-275-1986
Imprime: Gráficas Aprosuba-3
BADAJOZ

Este trabajo ha sido realizado, en cumplimiento de la legislación vigente, para participar en el concurso a la plaza de Catedrático de la Universidad de Extremadura, Area de Conocimiento Análisis Matemático

INDICE

INTRODUCCION

Los espacios (LF) , límite inductivo de sucesiones de espacios de Fréchet, fueron introducidos por J. Dieudonné y L. Schwartz [5] . En ese trabajo se llama espacio (LF) lo que posteriormente se llamó espacio (LF) estricto, reservándose el término (LF) para aquellos espacios que son límite inductivo de una sucesión de espacios de Fréchet, cada uno de los cuales está continuamente incluído en el siguiente (pero no necesariamente es isomorfo a un subespacio del siguiente; caso estricto).

En [5] se estudian las propiedades más inmediatas de los espacios (LF) y en [10] , G. Köthe prueba el clásico Teorema de completitud de los espacios (LF) estrictos, abriendo la cuestión, inicialmente planteada por A. Grothendieck, de si todo espacio (LF) es completo, o al menos si la compleción de todo espacio (LF) es un espacio (LF). En [9] , §31.6., se exhibe un espacio (LB) que no es completo. Asimismo, a partir del descubrimiento de espacios (LF) metrizables (Grothendieck [7]), se obtiene una vasta clase de espacios (LF) cuya compleción no es un espacio (LF), ya que ningún espacio (LF) puede ser Fréchet.

La existencia de espacios (LF) metrizables suministra, a su vez, abundante información en el estudio del antiguo problema del cociente separable, planteado por S. Banach en 1932. A saber, ¿todo espacio de Banach infinito-dimensional posee un cociente (módulo un subespacio cerrado) infinito-dimensional y separable?

Por otro lado, existe una estrecha relación entre varios tipos de espacios (LF) y espacios localmente convexos de tipo Baire, que son estudiados en el Capítulo 1 del presente trabajo. En particular, existen espacios (LF) que son tonelados pero no son quasi-Baire, que son quasi-Baire pero no son Baire-like y que son Baire-like pero no supratonelados. Todo ello llevó a S. Saxon y P. P. Narayanaswami a clasificar el conjunto de todos los espacios (LF) en tres clases disjuntas no triviales, llamadas espacios (LF) de tipo i (i = 1,2,3). Esta clasificación conduce a un estudio más fino de la estructura de los espacios (LF) y a nuevos enfoques de problemas relativos a la teoría, como el de compleción de espacios (LF) antes mencionado.

En el presente trabajo se lleva a cabo un estudio de la teoría de los espacios (LF) de tipo i, obteniéndose resultados relativos a subespacios, productos, compleciones y límites inductivos de espacios (LF) de tipo i utilizándose estos resultados para obtener una nueva caracterización del problema del cociente separable.

Comienza el trabajo con un primer capítulo introductorio de las distintas clases de espacios localmente convexos de tipo Baire (sin ánimo de ser exhaustivo) y de sus propiedades más inmediatas. Se incluyen varias técnicas de construcción de topologías de Fréchet para uso posterior.

El capítulo 2 es un estudio sistemático de los distintos tipos de espacios (LF). Se estudian sus relaciones con los espacios de tipo Baire y se prueba que espacios (LF) de tipo i sirven para distinguir entre espacios tonelados, quasi-Baire, Baire-like y supratonelados. Dado que algunos de

estos resultados son conocidos y están dispersos en la literatura, se hace hincapié en mostrar las mutuas relaciones entre los espacios, que culmina en la Figura 1 y Ejemplos subsiguientes.

En el Capítulo 3 se estudian propiedades hereditarias de espacios (LF) de tipo i , con atención especial a los subespacios y subespacios complementados de espacios (LF) y aportando una respuesta al antiguo problema de la compleción de espacios (LF). En relación con la compleción de espacios (LF) se sugieren varios problemas abiertos.

En el Capítulo 4 se demuestra una nueva caracterización del problema del cociente separable, explotando para ello ciertas propiedades de los espacios (LF) metrizables y de los espacios de tipo Baire estudiados en el Capítulo 1.

El autor desea agradecer la hospitalidad del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Maryland donde fue desarrollado parte del presente trabajo durante su estancia allí como becario Fulbright. En particular mi agradecimiento a los profesores Denis Gulick y John Horváth por su ayuda y excepcional cordialidad en todo momento. El autor desea expresar también su reconocimiento al profesor Steve Saxon de la Universidad de Florida, con quien tuvo la fortuna de compartir su año sabático en la Universidad de Maryland. Varias ideas de este trabajo surgieron de fructíferas conversaciones y, en particular, la solución al problema de la compleción de espacios (LB) de tipo i tuvo su origen en una conjetura

presentada al autor por el Profesor S. Saxon.

Mi agradecimiento finalmente a Manuel Roza por la elaboración de la Figura 1. Su esmerado trabajo transformó una maraña ininteligible de líneas en una ordenada y nítida clasificación de espacios.

Capítulo 1

ESPACIOS DE TIPO BAIRE

Un conjunto A de un espacio topológico se dice que es raro o nunca denso si $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

Un espacio localmente convexo Hausdorff (siempre definido sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de números reales o complejos) se dice que es

a) de Baire, si E no es la unión de una sucesión (creciente) de conjuntos raros.

b) Unordered Baire-like , o brevemente U.B.L. ([19]), si E no es la unión de una sucesión arbitraria de discos raros (disco = conjunto convexo y equilibrado).

c) Supratonelado o (DB), si posee la siguiente propiedad de Robertson, Tweddle y Yeomans ([12]): Si E es la unión de una sucesión creciente de subespacios lineales, al menos uno de ellos es denso y tonelado.

d) Baire-like ([13]), si E no es la unión de una sucesión creciente de discos raros.

e) quasi-Baire ([13]), si E es tonelado y no es unión de una sucesión creciente de subespacios raros.

A partir de las definiciones se deduce fácilmente que: espacio localmente convexo de Baire $\Longrightarrow$ U.B.L. $\Longrightarrow$ (DB) $\Longrightarrow$ Baire-like $\Longrightarrow$ quasi-Baire $\Longrightarrow$ Tonelado. Todas las implicaciones, excepto la segunda, son inmediatas. La segunda es consecuencia de la caracterización de A. R. Todd y S. Saxon de espacios U.B.L. (ver [19] Theorem 2.2.).

Aunque no serán utilizados en el presente trabajo, cabe mencionar que M. Valdivia y P. Pérez-Carreras ([21]) introducen la clase de espacios totalmente tonelados, que son aquellos espacios E que satisfacen la siguiente condición: Si E es la unión de una sucesión de espacios lineales $\{E_n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, E_n es tonelado y $\operatorname{codim}(\overline{E}_n)$ es finita.

Claramente U.B.L. $\Longrightarrow$ totalmente tonelado $\Longrightarrow$ (DB) y existen ejemplos distinguiendo las tres clases de espacios.

Los espacios introducidos hasta aquí, con excepción de los espacios de Baire, tienen la propiedad común de ser estables para la toma de subespacios de codimensión numerable (propiedad característica de la tonelación). Teoremas demostrando esta propiedad hereditaria aparecen en [13] , [17] , [19] y [21] . Para espacios de Baire cf. [2].

I. Amemiya y Y. Kōmura ([1]) probaron que todo espacio metrizable y tonelado es Baire-like y S. Saxon ([13]) generalizó este resultado probando que todo espacio tonelado que no contiene a φ es Baire-like. Aquí φ denota un espacio lineal de dimensión algebraica numerable provisto de la más fina topología localmente convexa y se dice que un espacio vectorial topológico E contiene a φ si E posee un subespacio lineal que, provisto de la topología relativa, es topológicamente isomorfo a φ. Recordamos que

φ no es metrizable pues de serlo, sería un espacio de Baire de dimensión algebraica numerable, que es imposible.

Tal y como veremos, con excepción de los espacios (LF) metrizables, todo espacio (LF) contiene una copia de φ y esta propiedad característica sirve a su vez para distinguir los espacios tonelados de los espacios quasi-Baire y éstos de los espacios Baire-like. La incidencia de φ en la topología de un producto no numerable de espacios localmente convexos es notable (ver [13] , Theorem 1.4.). Por otro lado es bien sabido que todo subespacio cerrado de codimensión numerable de un espacio tonelado tiene complemento topológico isomorfo a φ. Además

Proposición 1.1. Sea E un espacio tonelado. Las condiciones siguientes son equivalentes

a) E no es quasi-Baire

b) E contiene un subespacio cerrado de codimensión numerable

c) E contiene una copia complementada de φ.

Demostración:

La equivalencia b) $\Longleftrightarrow$ c) resulta de la indicación justo antes de la Proposición. Para probar b) $\Longrightarrow$ a) sea M un subespacio cerrado de codimensión numerable y sea $\{x_1, x_2, \ldots\}$ una base de Hamel de un complemento algebraico de M . Cada espacio $M_n = M \oplus sp(x_1,\ldots,x_n)$ $n \in \mathbb{N}$, es un subespacio cerrado propio de E y, en particular, nunca denso. Puesto que $E = \bigcup M_n$, E no es quasi-Baire. Finalmente probemos a) $\Longrightarrow$ b) . Si el espacio tonelado E no es quasi-Baire, existe una sucesión estrictamente creciente de subespacios cerrados $\{E_n\}$ tal que $E = \bigcup E_n$. Obtenemos entonces inductivamente una sucesión biortogonal $\{(x_i, f_i)\} \subset E \times E'$ tal que $x_i \in E_{i+1} - E_i$ y $f_i(E_i) = \{0\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $x_1 \in E_2 - E_1$ y $f_1 \in E'$ tal que $f_1(x_1) = 1$ y $f_1(E_1) = \{0\}$. Elegidos $x_1, \ldots, x_k \in E$ y $f_1, \ldots, f_k \in E'$ tales que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(i,j \leq k)$, $x_i \in E_{i+1} - E_i$ y $f_i(E_i) = \{0\}$ $i = 1, \ldots, k$, se toma un punto $y \in E_{k+2} - E_{k+1}$ y se define $x_{k+1} = y - \sum_{i=1}^{k} f_i(y) x_i$. Puesto que $x_{k+1} \in E_{k+2} - E_{k+1}$, se toma $f_{k+1} \in E'$ tal que $f_{k+1}(x_{k+1}) = 1$ y $f_{k+1}(E_{k+1}) = \{0\}$. Claramente $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(i,j \leq k+1)$ y la inducción queda completada. El subespacio lineal de dimensión numerable $N = sp\{x_i ; i \in \mathbb{N}\}$ es un complemento algebraico del subespacio cerrado $M = \bigcap_{i=1}^{\infty} Ker(f_i)$. En efecto, es claro que $M \cap N = \{0\}$. Sea $x \in E$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n+1}$. Se sigue que $f_j(x) = 0$ para todo $j \geq n+1$. Por tanto $z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) x_j \in N$, $x - z \in M$ y $x = z + (x - z)$.

Corolario 1.2. Dentro de la clase de espacios que no contienen una copia complementada de φ, un espacio es tonelado si y solo si es quasi-Baire.

Terminamos este capítulo mostrando varias técnicas de construcción de topologías de Fréchet que serán usadas con frecuencia a lo largo del trabajo.

Lema 1.3. Sean (E_1, Γ_1) y (E_2, Γ_2) espacios de Fréchet cada uno de ellos incluído continuamente en un espacio topológico Hausdorff X. Sobre el espacio lineal $E_1 \cap E_2$ la topología localmente convexa con base de entornos de 0 $\Gamma = \{U \cap V ; U \in \Gamma_1, V \in \Gamma_2\}$ es Fréchet.

Demostración:

Γ es metrizable pues Γ_1 y Γ_2 lo son. Si $\{x_n\}$ es una sucesión Γ-Cauchy en $E_1 \cap E_2$, entonces $\{x_n\}$ es, "a fortiori", de Cauchy en (E_1, Γ_1) y en (E_2, Γ_2). Por tanto $\{x_n\}$ converge por Γ_i hacia algún $z_i \in E_i$, $i = 1, 2$ y, por hipótesis, $\{x_n\}$ converge hacia z_i, $i = 1, 2$ para la topología de X. Por la unicidad del límite en X, $z_1 = z_2$ y ese valor común es ciertamente el Γ-límite de la sucesión $\{x_n\}$. Por tanto Γ es también una topología completa.

Lema 1.4. Sea E un espacio normado con bola unidad cerrada B y sea F un espacio localmente convexo Hausdorff completo tal que E está continuamente incluído en F. Si $\hat{B}$ es la clausura de B en F, la envolvente lineal $F_o = sp(\hat{B})$ es un espacio de Banach para la topología de la norma que tiene como bola unidad cerrada $\hat{B}$.

Demostración:

Puesto que F es completo y la aplicación inyección canónica $E \hookrightarrow F$ es continua, $\hat{B}$ es un conjunto absolutamente convexo acotado y completo de F. Por tanto la norma "gauge" de $\hat{B}$ define en F_o una topología de espacio de Banach en virtud del Teorema 3.3.4. de [8]. Para esta topología $\hat{B}$ es ciertamente la bola unidad cerrada de F_o.

Lema 1.5. Sea $Q : (F, \Gamma) \longrightarrow (G, \tau)$ una aplicación lineal continua entre espacios de Fréchet y sea (G_1, τ_1) un espacio de Fréchet incluído continuamente en (G,τ) . Entonces sobre $F_1 = Q^{-1}(G_1)$ la topología Γ_1 con base de entornos de 0 $\{U \cap Q^{-1}(V) \; ; \; U \in \Gamma \, , \, V \in \tau_1\}$ es Fréchet.

Demostración:

Claramente Γ_1 es metrizable. Sea $\{x_n\}$ una sucesión Γ_1-Cauchy en F_1 . Puesto que $Q|_{F_1} : (F_1, \Gamma_1) \longrightarrow (G_1, \tau_1)$ es continua por definición de Γ_1 , $\{Q(x_n)\}$ converge por τ_1 hacia $y \in G_1$ y, "a fortiori", converge por τ en G. Por otro lado, $\{x_n\}$ es también Γ-Cauchy y Γ-convergente hacia $x \in F$. Por tanto $\{Q(x_n)\}$ converge por τ a $Q(x)$ y en consecuencia $x \in Q^{-1}(G_1) = F_1$

Sea $U \cap Q^{-1}(V)$ un Γ_1-entorno de 0 cualquiera. Existe entonces $n_o \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_o$, $Q(x_n) - y \in V$ y $x_n - x \in U$. Por tanto si $n \geq n_o$, $Q^{-1}(Q(x_n) - y) \subset Q^{-1}(V)$ es decir $x_n - x \in Q^{-1}(V)$, probando que $\{x_n\}$ converge a x por Γ_1 y (F_1, Γ_1) es, por tanto, un espacio de Fréchet.

Corolario 1.6. Bajo las hipótesis del Lema 1.5., si (F,Γ) y (G_1, τ_1) son espacios de Banach, entonces (F_1, Γ_1) también es un espacio de Banach.

Demostración:

Por el Lema 1.5., (F_1, Γ_1) es un espacio completo. También es normable pues $U \cap Q^{-1}(V)$ es un Γ_1-entorno acotado de 0 si U y V son entornos acotados de 0 por Γ y τ_1 respectivamente.

Capítulo 2

ESPACIOS (LF) DE TIPO i (i = 1 , 2 , 3)

Una sucesión (E_n, τ_n) de espacios de Fréchet se dice que es una sucesión inductiva si

a) $E_n \subsetneq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) La inclusión canónica $(E_n, \tau_n) \hookrightarrow (E_{n+1}, \tau_{n+1})$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si en la condición b) las inclusiones canónicas son incluso abiertas (es decir, isomorfas sobre su imagen), entonces se dice que la sucesión inductiva es estricta. El espacio lineal $E = \bigcup_n E_n$ se llama envolvente lineal de la sucesión inductiva (E_n, τ_n) .

Dos sucesiones inductivas se dice que son equivalentes, si cada miembro de una sucesión está continuamente incluído en algún miembro de la otra (en particular, ambas poseen la misma envolvente lineal).

Una sucesión inductiva estricta puede ser equivalente a una sucesión inductiva no estricta, como se comprueba con el siguiente

Ejemplo 2.1. Sean l_1 y s los espacios de Banach y de Fréchet respectivamente de sucesiones sumables y de sucesiones de decrecimiento rápido. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$E_n = l_1 \times \ldots \times l_1 \times \{0\} \times \ldots$ (n veces l_1)

$F_n = l_1 \times \ldots \times l_1 \times s \times \{0\} \times \ldots$ (n veces l_1)

provistos de las topologías producto τ_n y Ψ_n respectivamente. La sucesión (E_n, τ_n) es estricta y la sucesión (F_n, Ψ_n) no es estricta. Sin embargo son equivalentes pues las inclusiones canónicas $E_n \hookrightarrow F_n$ y $F_n \hookrightarrow E_{n+1}$ son continuas para cada $n \in \mathbb{N}$.

Un espacio localmente convexo Hausdorff (E, τ) se dice que es un espacio (LF) (respectivamente un espacio (LF) estricto) si (E, τ) es el límite inductivo de alguna sucesión inductiva (respectivamente inductiva estricta) de espacios de Fréchet (E_n, τ_n) . Ello significa que E es la envolvente lineal de los espacios E_n y que τ es la más fina topología localmente convexa (Hausdorff) en E que hace continuas a todas las inclusiones canónicas $(E_n, \tau_n) \hookrightarrow (E, \tau)$, $n \in \mathbb{N}$.

Si cada espacio (E_n, τ_n) es un espacio de Banach, (E, τ) se dice que es un espacio (LB) . Definición obvia para espacios (LB) estrictos. Cualquiera de las anteriores situaciones se escribirá $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ o bien $E = \lim E_n$ cuando las topologías son conocidas por el contexto.

Es bien sabido que si $\mathcal{U}_n$ es una base de entornos de 0 en (E_n, τ_n) , $n \in \mathbb{N}$, una base de entornos de 0 en $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ viene dada por la familia de todas las envolventes absolutamente convexas $\Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n)$ donde U_n varía en $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Si $E = \lim E_n$ es un espacio (LF) y F un espacio localmente convexo cualquiera, una aplicación lineal $u : E \longrightarrow F$ es continua si y solo si

para cada $n \in \mathbb{N}$, $u \circ I_n$ es continua, donde I_n denota la inclusión canónica de E_n en E .

Para la teoría general de los espacios (LF) y, en particular, para los conocidos resultados de J. Dieudonné, L. Schwartz y G. Köthe, se remite a [5] , [9] y [10] .

El siguiente Teorema será de uso frecuente a lo largo del trabajo

<u>Teorema 2.2.</u> (De equivalencia) Sea $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ y $(E, \Psi) = \lim (F_j, \Psi_j)$. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) $\{(E_n, \tau_n)\}$ y $\{(F_j, \Psi_j)\}$ son sucesiones equivalentes.

b) $\tau = \Psi$

c) El inferior de τ y Ψ es una topología Hausdorff.

Demostración:

Claramente a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c) . Probemos c) $\Longrightarrow$ a) . Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Puesto que E_n es un espacio (DB) (ya que E_n es Fréchet), de la relación $E_n = \bigcup_j E_n \cap F_j$ se sigue la existencia de un índice $j \in \mathbb{N}$ tal que $F = E_n \cap F_j$ es denso y tonelado en (E_n, τ_n) . Por la hipótesis c) , se aplica el Lema 1.3. para dotar a F de una topología de Fréchet Γ. Del Teorema de la Aplicación Abierta de Pták aplicado a la identidad continua $(F, \Gamma) \longrightarrow (F, \tau_n|_F)$ resulta

$$\Gamma = \tau_n|_F \qquad (1)$$

En particular F es cerrado en (E_n, τ_n) y se sigue $F = E_n$, es decir $E_n \subset F_j$. De (1) se deduce asimismo que la inclusión $(E_n, \tau_n) \hookrightarrow (F_j, \Psi_j)$

es continua. De forma análoga se prueba que cada (F_j, Ψ_j) está continuamente incluído en algún (E_n, τ_n) y a) queda probado.

De este Teorema de Equivalencia se deduce que el espacio $E = \lim E_n$ del Ejemplo 2.1. es un espacio (LB) estricto cuya topología puede ser definida por la sucesión $\{F_n\}$ que no es estricta ni está formada por espacios de Banach. Sin embargo

<u>Proposición 2.3.</u> Si (E_n, τ_n) es una sucesión inductiva estricta de espacios de Fréchet, equivalente a la sucesión inductiva (F_n, Ψ_n) de espacios de Banach, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, (E_n, τ_n) es un espacio de Banach.

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ y existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $E_n \subset F_k \subset E_p$ y $\tau_p|_{F_k} \leq \Psi_k$ y $\Psi_k|_{E_n} \leq \tau_n$. De donde se sigue $\tau_p|_{E_n} \leq \Psi_k|_{E_n} \leq \tau_n$. Pero estas desigualdades son, de hecho, igualdades, deduciéndose que τ_n es la topología normada $\Psi_k|_{E_n}$.

Mediante sencillas manipulaciones pueden construirse sucesiones inductivas con propiedades adicionales interesantes. Así por ejemplo

<u>Proposición 2.4.</u> Todo espacio (LF) posee una sucesión inductiva tal que cada espacio de la sucesión no es denso en el siguiente

Demostración:

Sea $E = \lim E_n$ un espacio (LF). Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in F_{n+1} - F_n$ y sea $E_n = F_n \oplus sp(x_n)$ provisto de la topología Fréchet suma directa. Se tiene obviamente $\overline{E}_n \subset \overline{F}_{n+1} = F_n \subsetneq E_{n+1}$ (clausuras en E_{n+1}) y las sucesiones $\{E_n\}$ y $\{F_n\}$ son equivalentes.

Por el contrario se tiene

<u>Proposición 2.5.</u> Si para el espacio (LF) $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ se tiene que E_n es denso en (E_{n+1}, τ_{n+1}) para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces E_1 (y por tanto todo E_n) es denso en (E, τ).

Demostración:

Sea V un τ-entorno abierto de $x \in E$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_n$. Entonces $V \cap E_n$ es un abierto no vacío en (E_n, τ_n) que, por hipótesis, corta a E_{n-1}. Por tanto $V \cap E_{n-1}$ es un abierto no vacío de E_{n-1}. Repitiendo n veces el argumento, se concluye $V \cap E_1 \neq \emptyset$.

<u>Proposición 2.6.</u> Sea $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ un espacio (LF). Las siguientes condiciones son equivalentes

a) E es un espacio (LF) estricto

b) $\tau|_{E_n} = \tau_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

c) E_n es τ-cerrado en E para cada $n \in \mathbb{N}$.

d) E_n es τ_{n+1}-cerrado en E_{n+1} para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Para a) $\Longrightarrow$ b) ver [9] 19.4.1. La primera demostración de esta propiedad de los espacios (LF) estrictos aparece en el trabajo original de J. Dieudonné y L. Schwartz ([5] Proposition 2).

b) $\Longrightarrow$ c) y c) $\Longrightarrow$ d) son triviales. Para probar finalmente d) $\Longrightarrow$ a) nótese que τ_n y $\tau_{n+1}|_{E_n}$ son topologías de Fréchet y $\tau_n \geq \tau_{n+1}|_{E_n}$. Por el Teorema de la Aplicación Abierta, ambas topologías son iguales.

Puesto que límites inductivos de espacios tonelados son tonelados, todo espacio (LF) es tonelado. En la siguiente Proposición hacemos uso de un resultado posterior (cf. Teorema 2.10.) para demostrar además

Proposición 2.7.

a) Ningún espacio (LF) es (DB)

b) Ningún espacio (LB) es Baire-like

c) Ningún espacio (LF) estricto es quasi-Baire

Demostración:

a) Si el espacio (LF) $(E,\tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ fuese (DB) , algún espacio $(E_n, \tau|_{E_n})$ sería denso en E y tonelado. El Teorema de la Aplicación Abierta de Pták aplicado a la identidad $(E_n, \tau_n) \longrightarrow (E_n, \tau|_{E_n})$ implica que E_n es cerrado en E es decir $E_n = E$, contradiciendo que la sucesión E_n es estrictamente creciente

b) Sea $(E,\tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ un espacio (LB) y sea B_n la bola unidad cerrada de E_n . No hay restricción en suponer que B_n es una sucesión creciente, la cual satisface además $E = \bigcup n B_n$. Si E fuese Baire-like

por el Teorema 2.10., todo espacio E_n (o eventualmente todos a partir de un cierto índice) es denso en E . Además, a partir de un cierto índice, $\overline{nB_n}$ tiene punto interior, es decir la inclusión continua canónica $(E_n, \tau_n) \hookrightarrow (E,\tau)$ es casi-abierta. Por el Teorema de la Aplicación Abierta de Pták (cf. [8] Theorem 9.7.1.), E_n es cerrado en E , es decir $E_n = E$. Imposible.

c) Si $E = \lim E_n$ es un espacio (LF) estricto, cada espacio E_n es cerrado (y propio) en E por la Proposición 2.6. Puesto que $E = \bigcup_n E_n$ se sigue que E no es quasi-Baire.

Puesto que, como veremos más adelante, existen espacios (LB) que son quasi-Baire, el apartado b) de la Proposición precedente demuestra la existencia de espacios quasi-Baire que no son Baire-like. Del mismo modo, puesto que existen también espacios (LF) que son Baire-like, el apartado a) demuestra la existencia de espacios Baire-like que no son (DB).

Estas consideraciones motivan la clasificación de los espacios (LF) en tres categorías no vacías y mutuamente disjuntas, de acuerdo con la siguiente definición

Definición 2.8. (S. Saxon, P.P. Narayanaswami) Un espacio (LF) E se dice que es de tipo i o un espacio $(LF)_i$ ($i = 1, 2, 3$) si satisface la siguiente condición (i):

(1) E tiene una sucesión inductiva $\{E_n\}$ tal que ningún espacio E_n es denso en E .

(2) E no es metrizable y tiene una sucesión inductiva $\{E_n\}$ tal que algún espacio E_n es denso en E.

(3) E es metrizable

Deducimos algunas consecuencias inmediatas de esta definición. Los espacios $(LF)_1$ no son, claramente, quasi-Baire y, por la Proposición 1.1., contienen una copia (complementada) de φ. Puesto que φ no es metrizable, los espacios $(LF)_1$ no son metrizables.

Por el Teorema 2.2. de Equivalencia, los espacios $(LF)_2$ poseen una sucesión inductiva $\{E_n\}$ tal que todo espacio E_n es denso en E.

Cualquier sucesión inductiva $\{E_n\}$ que define a un espacio $(LF)_3$ tiene algún elemento E_n que es denso en E (es aplicable, en particular, la nota anterior). En efecto, por el Teorema de Amemiya-Kōmura, un espacio (LF) de tipo 3 es Baire like y por tanto quasi-Baire.

Se deduce, en particular, de las notas anteriores que las tres clases de espacios (LF) definidas no se solapan. Las tres clases son asimismo no triviales. En efecto, todo espacio (LF) estricto es un espacio $(LF)_1$. Cualquier espacio (LB) E con sucesión inductiva $\{E_n\}$ de espacios de Banach tales que E_n es denso en E_{n+1} es un espacio $(LF)_2$ (aplicar las Proposiciones 2.5. y 2.7.). Por ejemplo $l_{p^-} = \lim l_{p_n}$ con $0 < p_n < p_{n+1} < p$ y $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ es un espacio (LB) de tipo 2. Finalmente la existencia de espacios (LF) metrizables fue demostrada por A. Grothendieck (cf. [7]). Espacios (LF) metrizables existen en abundancia y aquí se muestra un Ejemplo de S. Saxon y P.P. Narayanaswami

Ejemplo 2.9. Para $n = 1, 2, \ldots$ se define

$$E_n = \overbrace{\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \ldots \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}}}^{n} \times l_1 \times l_1 \times \ldots$$

dotado de la topología producto. Es claro que $\{E_n\}$ es una sucesión inductiva de espacios de Fréchet. Su envolvente lineal $E = \bigcup E_n$ es un subespacio denso del espacio de Fréchet $F = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \ldots$ ya que l_1 es denso en $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Puesto que la topología de $E = \lim E_n$ es la topología relativa de subespacio de F, se sigue que $F \approx \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ contiene un subespacio denso que es un espacio (metrizable) (LF).

En [17] se demuestra además que todo espacio de Fréchet con base de Schauder incondicional, en particular los espacios clásicos c_0, $C([0,1])$, l_p, $L_p([0,1])$ $(1 \leq p < \infty)$, contienen subespacios densos que son (LF) para la topología relativa. En [22] se exhibe otra amplia clase de espacios (LF) metrizables (que engloba en particular al Ejemplo 2.9.) al probarse que todo espacio de Fréchet no normable posee un subespacio propio denso que con la topología relativa es un espacio (LF).

Teorema 2.10. Sea $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ un espacio (LF). Son equivalentes las condiciones siguientes

a) E es un espacio $(LF)_3$

b) E es un espacio Baire-like

c) E no contiene a φ.

Demostración:

Puesto que φ no es metrizable, a) $\Longrightarrow$ c). También c) $\Longrightarrow$ b) por

[13] , Theorem 2.1. Para probar finalmente b) $\Longrightarrow$ a) tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$ una base de entornos de 0 $\mathcal{U}_n = \{U_{nk}\}_{k\in \mathbb{N}}$ en el espacio de Fréchet E_n. Sea $\mathcal{B}_o$ la familia (numerable) de todos los conjuntos de la forma $\Gamma(\bigcup_{n=1}^{m} U_{nk})$, $m \in \mathbb{N}$, $U_{nk} \in \mathcal{U}_n$ y sea $\mathcal{B} = \{\overline{B}$; $B \in \mathcal{B}_o$ y $\overline{B}$ es 0-entorno en E$\}$. Si se prueba que $\mathcal{B}$ es base de entornos de 0 en E , queda probado a) . Sea U un entorno de 0 cerrado y absolutamente convexo en E . Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que $U_{nk(n)} \subset U \cap E_n$ y sea $B_m = \Gamma(\bigcup_{n=1}^{m} U_{nk(n)})$ $m \in \mathbb{N}$ .Puesto que $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} m B_m$ y E es Baire-like, algún conjunto $\overline{m B_m}$, y por tanto $\overline{B_m}$, es entorno de 0 en E . Por tanto, $\overline{B_m} \in \mathcal{B}$ y claramente $\overline{B_m} \subset U$.

El Teorema precedente fue utilizado en la demostración de la Proposición 2.7. y de ambos resultados se deduce ahora

<u>Corolario 2.11.</u> Ningún espacio (LB) es metrizable.

Este Corolario contrasta sorprendentemente con el hecho de que existen numerosos espacios (LF) que sí son metrizables (ver Ejemplo 2.9. y notas subsiguientes).

<u>Teorema 2.12.</u> Sea $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ un espacio (LF). Son equivalentes las condiciones siguientes

a) E es un espacio $(LF)_2$

b) E es quasi-Baire pero no Baire-like

c) E contiene una copia de φ pero no una copia complementada de φ .

Demostración:

a) $\Longrightarrow$ b) Si E no es metrizable, E no es Baire-like (Teorema 2.10.). Sea $\{F_n\}$ una sucesión creciente de subespacios lineales tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ Entonces $G_n = E_n \cap \overline{F_n}$ es un subespacio cerrado de (E_n, τ_n) y por tanto $\{(G_n, \tau_n|_{G_n})\}$ es una sucesión creciente de espacios de Fréchet cuya unión es E . Se comprueba de inmediato que $\{(G_n, \tau_n|_{G_n})\}$ es una sucesión inductiva equivalente a $\{(E_n, \tau_n)\}$ y, por hipótesis, algún G_n debe ser denso en en E . "A fortiori" $\overline{F_n}$ es denso en E y, por tanto, F_n no es raro. Es decir E es quasi-Baire.

b) $\Longrightarrow$ c) Consecuencia de la Proposición 1.1. y del Teorema 2.10.

c) $\Longrightarrow$ a) Si E contiene a φ , E no es metrizable. Puesto que E no contiene una copia complementada de φ , E es quasi-Baire (Proposición 1.1.). Por tanto algún espacio E_n es denso.

<u>Teorema 2.13.</u> Sea $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ un espacio (LF). Son equivalentes las condiciones siguientes

a) E es un espacio $(LF)_1$

b) E no es quasi-Baire

c) E contiene a φ complementado.

Demostración:

La implicación a) $\Longrightarrow$ b) es inmediata y b) y c) son equivalentes por la Proposición 1.1. Si E no es quasi-Baire, existe una sucesión estrictamente creciente $\{F_n\}$ de subespacios cerrados propios de E tal que $E = \bigcup F_n$. Si se define $G_n = F_n \cap E_n$, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{(G_n, \tau_n|_{G_n})\}$

es una sucesión inductiva equivalente a $\{(E_n, \tau_n)\}$ y ningún espacio G_n es denso en E . Ello prueba b) $\Longrightarrow$ a) y termina la demostración.

Los resultados precedentes acerca de espacios tonelados de tipo Baire y de espacios (LF) son resumidos en la Figura 1. Las referencias numéricas en la Figura se utilizan para indicar ejemplos de espacios que se situan en la correspondiente zona de la Figura, de acuerdo con la siguiente lista

Ejemplos 2.14.

1. Sea $E = \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ provisto de la topología producto. Como producto de espacios métricos completos, E es un espacio de Baire. Puesto que $\mathbb{K}$ lleva su topología débil, E no contiene a φ ([13] Theorem 1.4.) y sin embargo E no es metrizable pues $\mathrm{card}(\mathbb{R}) > \aleph_0$.

2. Cualquier espacio de Banach o de Fréchet (Teorema de Baire)

3. En [2] se prueba que todo espacio de Banach separable contiene un hiperplano denso que no es de Baire. Se aplica este hecho junto con el bien conocido de que todo subespacio de codimensión numerable de un espacio U.B.L. es U.B.L. ([19] Theorem 4.4.).

J. Oxtoby ([11]) ha mostrado también un ejemplo de un espacio de Baire E tal que $E \times E$ no es de Baire. Puesto que cualquier producto de espacios U.B.L. es U.B.L., se sigue que $E \times E$ es también un ejemplo de espacio U.B.L. que no es de Baire.

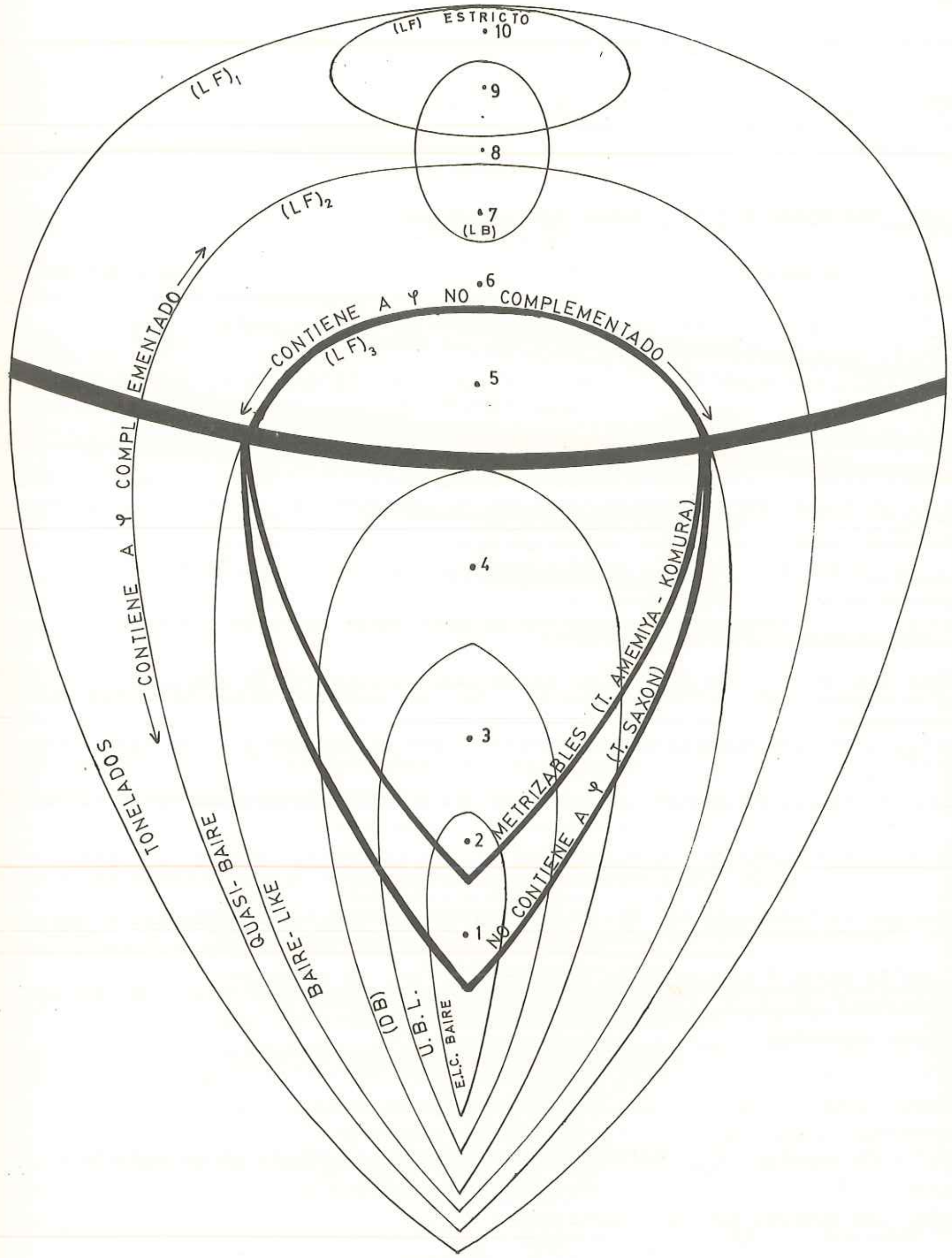

FIGURA 1

4. Existen en abundancia espacios (DB) que no son U.B.L., de acuerdo con el siguiente Teorema (cf. [16] ,Theorem 4.): Todo espacio de Fréchet infinito-dimensional contiene un subespacio denso que es (DB) pero no es U.B.L.

5. Ver Ejemplo 2.9. y notas subsiguientes.

6. Sea $p > 1$ y sea $\{p_n\}$ una sucesión de números reales tal que $1 < p_n < p_{n+1} < p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Se define el espacio (LB) $l_{p^-} = \lim l_{p_n}$. Por el Teorema 2.2. de Equivalencia, l_{p^-} es independiente de la sucesión $\{p_n\}$ elegida. Sea $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ provisto de la topología producto τ. Se sigue que $E \times l_{p^-}$ es un espacio (LF) definido por la sucesión $\{E \times l_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Puesto que $E \times l_{p^-}$ no es metrizable (Corolario 2.11.), se sigue que $E \times l_{p^-}$ es de tipo 2 (aplíquese la Proposición 2.5.). Si $E \times l_{p^-}$ fuese un espacio (LB), existiría, por el Teorema 2.2. de Equivalencia, un espacio de Banach E_n tal que $E \times l_{p_1}$ está continuamente incluído en E_n. Por tanto E_n induciría en E una topología normada τ_n menos fina que la topología τ de E. Puesto que la topología producto τ en E es la menos fina topología Hausdorff en E, se sigue que $\tau = \tau_n$, lo que es imposible.

7. El espacio l_{p^-} definido en el ejemplo precedente es un espacio $(LB)_2$ de acuerdo con la Proposición 2.5.

8. $\varphi \times l_{p^-}$, como producto de dos espacios (LB) es un espacio (LB) y de tipo 1 (ver Proposición 3.8.). Si $\varphi \times l_{p^-}$ fuese estricto, el Teorema 2.2. de Equivalencia se aplicaría para obtener números $1 < p_1 < p_2 < p_3 < p$ tal que l_{p_3} induce en l_{p_1} la topología de l_{p_1} lo que es manifiestamente imposible.

En el Ejemplo 3.13 volveremos sobre un nuevo espacio $(LF)_1$ no estricto.

9. El espacio φ de dimensión algebraica numerable con la más fina topología localmente convexa es un espacio (LB) estricto definido, por ejemplo, por la sucesión $\{\mathbb{K}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. No solo φ ha sido definido por una sucesión estricta, sino que φ es el único espacio (LF), salvo isomorfismos, tal que toda sucesión que lo define es estricta.

Existen también espacios (LB) estrictos definidos por sucesiones que ni son estrictas ni están formadas por espacios de Banach. Ver, por ejemplo, la nota anterior a la Proposición 2.3.

10. El espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ test de distribuciones en un conjunto abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un espacio (LF) estricto que no es (LB). En efecto, si lo fuera, existirían compactos $K \subset \Omega$ tales que $\mathcal{D}(K)$ sería un espacio de Banach por la Proposición 2.3.

Estudiamos a continuación algunas propiedades relativas a la dimensión algebraica de espacios (LF). La siguiente proposición de carácter general, será de utilidad

Proposición 2.15. Sea (E_o, τ_o) un espacio tonelado que contiene un subespacio propio denso E tal que, provisto de una topología localmente convexa τ más fina que la relativa $\tau_o|_E$, es un espacio de Fréchet. Entonces E posee codimensión infinita no numerable en E_o.

Demostración:

Por hipótesis, la aplicación inclusión $I : (E, \tau) \hookrightarrow (E_o, \tau_o)$ es continua. Puesto que E es propio, por el Teorema de la Aplicación Abierta de Pták, I no es casi-abierta. Por tanto existe un entorno V de 0 en (E, τ) tal que su clausura $\overline{V}$ en (E_o, τ_o) no es un entorno de 0. Por tanto el subespacio denso $sp(\overline{V})$ de (E_o, τ_o) no es tonelado y tiene, por consiguiente, codimensión algebraica no numerable. Puesto que $E \subset sp(\overline{V})$, la Proposición está probada.

Corolario 2.16. Si $E = \lim E_n$ es un espacio $(LF)_i$ $i = 2,3$ cada espacio E_n tiene codimensión infinita no numerable en E.

Corolario 2.17. Ningún espacio $(LF)_2$ o $(LF)_3$ tiene dimensión algebraica numerable.

Este último resultado ya es conocido para espacios $(LF)_3$ porque ningún espacio metrizable y tonelado puede tener dimensión algebraica numerable. Sin embargo existen espacios $(LF)_1$, como φ por ejemplo, que tienen dimensión algebraica numerable

Proposición 2.18. Sea $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ un espacio (LF). Entonces

a) Si $\dim E_{n+1}/E_n \leq \aleph_o$ para cada $n \in \mathbb{N}$, E es un espacio $(LF)_1$.

b) Si $\dim E_{n+1}/E_n < \aleph_o$ para cada $n \in \mathbb{N}$, E es un espacio (LF) estricto.

Demostración:

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\text{codim}(E_n) = \dim E/E_n = \sum_{i \geq n} \dim E_{i+1}/E_i \leq \aleph_o$ y el Corolario 2.16. se aplica.

b) Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\dim E_{n+1}/E_n = r$. Denotemos por Γ la (única) topología Fréchet del espacio $\mathbb{K}^r$. E_{n+1} es algebraicamente isomorfo a $E_n \oplus \mathbb{K}^r$ y la topología Fréchet τ_{n+1} es menos fina que la topología Fréchet $\tau_n \times \Gamma$. Por tanto ambas topologías son iguales y E_n es un subespacio complementado de E_{n+1}. En particular, E_n es cerrado en (E_{n+1}, τ_{n+1}) y, por la Proposición 2.6., E es estricto.

Proposición 2.19. Sea $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ un espacio (LF) y sea G un subespacio lineal de E. Si existe una topología de Fréchet Ψ en G tal que $\Psi \geq \tau|_G$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ con $G \subset E_n$.

Demostración:

(G, Ψ), siendo un espacio de Fréchet, es (DB). Por tanto, de $G = \bigcup_n (E_n \cap G)$ se sigue que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $H_n = E_n \cap G$ es denso y tonelado en G. Puesto que (E_n, τ_n) está continuamente incluído en (E, τ) y, por hipótesis, (G, Ψ) está también continuamente incluído en (E, τ), se aplica el Lema 1.3. para concluir que la topología Γ en H_n con base de entornos $\{U \cap V ; U \in \tau_n , V \in \Psi\}$ es Fréchet. Por el Teorema de la Aplicación Abierta, la identidad $(H_n, \Gamma) \longrightarrow (H_n, \Psi|_{H_n})$ es un isomorfismo topológico y por tanto H_n es cerrado en (G, Ψ), es decir $H_n = G$. Se sigue también que G está continuamente incluído en E_n.

Aunque en la Proposición 2.7. se demostró un resultado aún más fuerte, la Proposición precedente invita a deducir el siguiente

Corolario 2.20. Ningún espacio (LF) es Fréchet.

Demostración:

Si el espacio (LF) $E = \lim E_n$ fuese Fréchet, $E \subset E_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, lo que es imposible.

En contraste con la Proposición 2.19. se tiene

Proposición 2.21. Sea $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ un espacio (LF) y sea G un subespacio cerrado de E. Si existe en G una topología (LF) η tal que $\eta \leq \tau|_G$, entonces ningún espacio E_n contiene a G.

Demostración:

Si $G \subset E_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\tau_n|_G$ sería una topología Fréchet en G que hace continua, por hipótesis, a la identidad $(G, \tau_n|_G) \longrightarrow (G, \eta)$. Por el Teorema de la Aplicación Abierta, $\eta = \tau_n|_G$, contradiciendo el Corolario 2.18.

Terminamos este Capítulo probando el siguiente Teorema de Aplicación Abierta para compleciones de espacios (LF)

Teorema 2.22. (Aplicación Abierta) Sea Ψ una topología (LF) en la compleción $\hat{E}$ del espacio (LF) (E, τ) tal que la aplicación identidad $I : (\hat{E}, \Psi) \longrightarrow (\hat{E}, \hat{\tau})$ es continua. Entonces I es un isomorfismo topológico.

Demostración:

Supongamos que $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ y $(\hat{E}, \Psi) = \lim (F_j, \Psi_j)$ para espacios de Fréchet E_n, F_j, $n\ j \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Puesto que $E_n \subset \hat{E}$, $E_n = \bigcup_j (E_n \cap F_j)$ y existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $H = E_n \cap F_j$ es denso y tonelado en (E_n, τ_n). Por hipótesis, E_n y F_j están continuamente incluídos en el espacio Hausdorff $(\hat{E}, \hat{\tau})$. Mediante el Lema 1.3., se dota a H de una topología Fréchet Γ más fina que $\tau_n|_H$. El Teorema de la Aplicación Abierta se aplica para concluir que $\Gamma = \tau_n|_H$ y por tanto H es cerrado en (E_n, τ_n). Se deduce que $H = E_n \subset F_j$ y también que la aplicación inclusión canónica $(E_n, \tau_n) \hookrightarrow (F_j, \Psi_j)$ es continua. Por tanto es continua $(E_n, \tau_n) \hookrightarrow (\hat{E}, \Psi)$ y, siendo $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, se sigue que la inmersión $(E, \tau) \hookrightarrow (\hat{E}, \Psi)$ es continua. Extendiendo por continuidad a las compleciones, queda probada la continuidad de la aplicación $(\hat{E}, \hat{\tau}) \longrightarrow (\hat{E}, \Psi)$, inversa de I.

Capítulo 3

PROPIEDADES HEREDITARIAS

Es sabido que el cociente de un espacio (LF) módulo un subespacio cerrado es o bien un espacio (LF) o bien un espacio de Fréchet. En este capítulo estudiaremos nuevos resultados acerca de subespacios de codimensión numerable de espacios (LF), de productos de espacios (LF) y de límites inductivos numerables de espacios (LF). También se estudiará de forma exhaustiva el antiguo problema de la compleción de espacios (LF), que será abordado estudiando separadamente cada uno de los tres tipos de espacios (LF). Se plantean algunos problemas abiertos relativos a compleción de espacios (LF), si bien la respuesta al problema central de la compleción se obtiene en el Teorema 3.11. y siguientes resultados.

Lema 3.1. Sea $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ un espacio (LF) y sea F un subespacio de codimensión numerable de E tal que $F \not\subset E_n$ y $F \cap E_n$ es cerrado en (E_n, τ_n) para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces F es un subespacio complementado de E y, con la topología relativa, es un espacio (LF)

Demostración:

Como $F \not\subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión estrictamente creciente de la sucesión $F_n = F \cap E_n$ $n \in \mathbb{N}$, que seguiremos denotando $\{F_n\}$

tal que $F = \bigcup_n F_n$. Por hipótesis, la topología $\Psi_n = \tau_n|_{F_n}$ en F_n es Fréchet, y se define el espacio (LF) $(F, \Psi) = \lim (F_n, \Psi_n)$. Probaremos que $E = (F, \Psi) \oplus \varphi$ (suma directa toplógica) y que $\Psi = \tau|_F$ lo que probará las dos aserciones del Lema. Sea $\varphi = \lim (L_n, \gamma_n)$ donde γ_n es la (única) topología de Fréchet en el espacio n-dimensional L_n y sea $G_n = F_n \oplus L_n$ $n \in \mathbb{N}$, dotado de la topología de Fréchet $\Gamma_n = \Psi_n \oplus \gamma_n$. El espacio (LF) $(E, \Gamma) = \lim (G_k, \Gamma_k)$ está bien definido y $\tau \leq \Gamma$ (en efecto, cada aplicación $(G_k, \Gamma_k) \hookrightarrow (E, \tau)$ es continua). Por el Teorema 2.2. de Equivalencia, las sucesiones inductivas (E_n, τ_n) y (G_k, Γ_k) son equivalentes. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que la inclusión

$$(E_n, \tau_n) \hookrightarrow (G_k, \Gamma_k) \tag{1}$$

es continua. Sea entonces V un entorno absolutamente convexo de 0 en (F, Ψ) y W un entorno de 0 en φ , por ejemplo cualquier disco absorbente. Se tiene, $(V + W) \cap G_k \supset (V \cap F_k) + (W \cap L_k) \in \Psi_k \oplus \gamma_k = \Gamma_k$. Por continuidad de (1), se sigue entonces que $(V + W) \cap E_n \in \tau_n$ y siendo $n \in \mathbb{N}$ arbitrario resulta que $V + W$ es un τ-entorno de 0 . Si $V \in \Psi$, resulta de lo anterior que $V + \varphi \in \tau$ y por tanto $V = (V + \varphi) \cap F \in \tau|_F$. Puesto que claramente, $\Psi \geq \tau|_F$, se concluye que $\Psi = \tau|_F$.

Teorema 3.2. Sea $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ y sea F un subespacio de codimensión numerable de E . Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) F con la topología relativa es un espacio (LF)

b) $F \cap E_n$ es cerrado en (E_n, τ_n) y $F \not\subset E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

c) F es cerrado en (E, τ) y $F \not\subset E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

a) $\Longrightarrow$ b) Si $n \in \mathbb{N}$ se fija, $(F \cap E_n, \tau_n|_{F \cap E_n})$ es un espacio (DB) como subespacio de codimensión numerable a lo sumo del espacio (DB) (E_n, τ_n). Por tanto, de la relación $F \cap E_n = \bigcup_k F_k \cap E_n$ se sigue que algún espacio $F_k \cap E_n$ es denso y tonelado en $F \cap E_n$. Mediante el Lema 1.3. se puede definir en $F_k \cap E_n$ una topología de Fréchet y por el Teorema de la Aplicación Abierta se sigue que que $F_k \cap E_n$ es cerrado en, y por tanto igual a, $F \cap E_n$. Siendo $F_k \cap E_n \neq F$ se tiene $F \not\subset E_n$. También se sigue que $\tau_n|_{F \cap E_n}$ es una topología de Fréchet y, por consiguiente, $F \cap E_n$ es cerrado en (E_n, τ_n)

b) $\Longrightarrow$ c) Por el Lema 3.1., F es complementado en E y, en particular, F es cerrado.

c) $\Longrightarrow$ b) Evidente.

b) $\Longrightarrow$ a) Consecuencia también del Lema 3.1.

Corolario 3.3. Si un espacio $(LF)_i$ $(i = 2,3)$ E posee un subespacio F que es (LF) entonces la codimensión algebraica de F es infinita no numerable.

Demostración:

Si F tuviera codimensión numerable en E , por el Teorema precedente F sería cerrado. Por tanto la Proposición 1.1. implica que E no es quasi-Baire, lo que es imposible.

En contraste con el Corolario precedente, se tiene el siguiente relativo a espacios $(LF)_1$

Corolario 3.4. Un espacio (LF) E es de tipo 1 si y solo si posee un subespacio de codimensión numerable que es (LF).

Demostración:

Si E posee un tal subespacio, E es de tipo 1 por el Corolario 3.3. Recíprocamente, si E es de tipo 1, por la Proposición 1.1. E posee una copia complementada F de φ. Se tiene entonces $E = F \times \varphi = F \times (\varphi \times \varphi) = (F \times \varphi) \times \varphi = E \times \varphi$, de donde se deduce la propiedad.

Proposición 3.5. Un subespacio F de codimensión finita de un espacio (LF) $E = \lim E_n$ es un espacio (LF) si y solo si F es cerrado en E. En estas condiciones el tipo de F es igual al tipo de E y ambos igual a 1.

Demostración:

Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{codim}(E_n) = +\infty$, se sigue que $F \not\subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto del Teorema 3.2. se deduce que F es un espacio (LF) si y solo si F es cerrado. Puesto que F es quasi-Baire si y solo si E lo es, la afirmación sobre el tipo es ahora consecuencia del Corolario 3.4.

Bajo condiciones adicionales sobre la dimensión de E_n se tiene el siguiente resultado para subespacios de codimensión numerable

Proposición 3.6. Sea $(E, \tau) = \lim (E_n, \tau_n)$ un espacio (LF) tal que

$\mathrm{codim}(E_n) > \aleph_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Un subespacio F de codimensión numerable de E es (LF) si y solo si F es cerrado en E. En estas condiciones el tipo de F es igual al tipo de E y ambos igual a 1.

Demostración:

Por la hipótesis sobre la codimensión de E_n se tiene que $F \not\subset E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se aplica de nuevo el Teorema 3.2. para probar la primera parte de la Proposición. La segunda se sigue igual que en la Proposición precedente.

Estudiamos a continuación productos de espacios (LF). Sólo bajo condiciones muy restrictivas, un producto de espacios (LF) es un espacio (LF). Se tiene el siguiente

Teorema 3.7. (Floret) Un producto de espacios (LF) es un espacio (LF) si y solo si el producto es finito.

Demostración:

Claramente el producto de dos espacios (LF) es un espacio (LF), pues si $\{E_n\}$, $\{F_n\}$ son sucesiones inductivas para los espacios E y F respectivamente, $\{E_n \times F_n\}$ es una sucesión inductiva para la topología de $E \times F$. Por el contrario, sea $\{(E^i, \tau^i)\}_{i \in I}$ una familia infinita de espacios (LF) con $(E^i, \tau^i) = \lim (E^i_n, \tau^i_n)$ y supongamos que $(E, \tau) = \prod_i (E^i, \tau^i)$ fuese un espacio (LF), es decir $(E, \tau) = \lim (F_n, \Psi_n)$ para espacios de Fréchet (F_n, Ψ_n). Para cada $n \in \mathbb{N}$, F_n no contiene a ningún (E^i, τ^i) en virtud de la Proposición 2.21. Seleccionemos una sucesión de puntos distintos entre sí $i_1, i_2, \ldots$ en I y sea $k \in \mathbb{N}$ arbitrario. De $F_k \not\supset E^{i_k}$ se deduce que existe $n(k) \in \mathbb{N}$ tal que $F_k \not\supset E^{i_k}_{n(k)}$. El espacio $G = \prod_{k \in \mathbb{N}} (E^{i_k}_{n(k)}, \tau^{i_k}_{n(k)})$, provisto de la topología producto, es un espacio de Fréchet que está continuamente incluído en (E, τ), pero no está incluído en ningún F_k, contradiciendo, pues, la Proposición 2.19.

Para productos finitos de espacios (LF) puede precisarse un poco más el Teorema precedente

<u>Proposición 3.8.</u> El producto cartesiano de un espacio $(LF)_i$ con un espacio $(LF)_j$ es un espacio $(LF)_k$ con $k = \min(i, j)$.

Demostración:

Si i ó j es igual a 1, el producto contiene a φ complementado y por tanto $k = 1$ (Teorema 2.13.) Si $i = j = 3$, el producto es metrizable y $k = 3$. Si $i \in \{2, 3\}$ y $j = 2$, entonces el producto no es metrizable y una sucesión inductiva que define al producto tiene sus elementos densos en el producto, es decir $k = 2$.

<u>Corolario 3.9.</u> Si un espacio tonelado E contiene un subespacio cerrado de codimensión numerable F que es un espacio (LF), entonces E es un espacio $(LF)_1$.

Demostración:

El espacio $(LF)_1$ φ es un complemento topológico de F. Por la Proposición 3.8., $E = F \times \varphi$ es un espacio $(LF)_1$.

Es sabido que si un espacio localmente convexo E contiene un subespacio denso que es tonelado (resp. quasi-Baire, resp. Baire-like), entonces E es tonelado (resp. quasi-Baire, resp. Baire-like). Esta propiedad no se mantiene, en absoluto, para espacios (LF). De hecho existen abundantes espacios de Fréchet que contienen subespacios densos (LF). Este contraste entre espacios (LF) y espacios tonelados no (LF) se refleja también en el corolario precedente, donde "denso" hubo de cambiarse por "cerrado" en esta situación particular.

Los espacios (LF) no gozan de buenas propiedades de estabilidad frente a compleciones. Así, mientras todo espacio (LF) estricto es completo ([10], 19.5.3.), ningún espacio (LF) de tipo 3 es completo, ni su compleción puede ser (LF) (Corolario 2.20.) Tal y como veremos existen ejemplos de espacios $(LF)_i$, $(i = 1, 2)$ cuya compleción es o no es un espacio (LF). Solamente para la clase de espacios (LB) existen importantes resultados positivos acerca de compleciones (ver Teorema 3.12. más abajo)

El siguiente resultado de M. de Wilde y C. Houet, [4], sobre sucesiones absorbentes de conjuntos absolutamente convexos, será de aplicación. Su demostración se omite

<u>Proposición 3.10.</u> (De Wilde, Houet) Sea E un subespacio σ-tonelado de un espacio localmente convexo F y sea $\{H_m\}$ una sucesión creciente de conjuntos absolutamente convexos en E tal que $\bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$ es absorbente en E. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, $\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} H_m} \subset (1+\varepsilon) \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{H_m}$ (Clausuras en F).

En primer lugar estudiamos sendos ejemplos de espacios $(LF)_i$, $i=1,2$ cuya compleción no es un espacio (LF)

Ejemplo 3.11. Sea $1<p_n<p_{n+1}<p$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\lim_{\to\infty} p_n = p$. Se considera el espacio $l_{p^-} = \lim l_{p_n}$ del Ejemplo 2.14.7. Para cada $n\in\mathbb{N}$ se define

$$F_n = l_{p_n} \times l_{p_n} \times \ldots$$

provisto de la topología Fréchet producto denotada τ_n . Puesto que la sucesión $\{l_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, lo es también la sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y se define el espacio (LF) $(F,\tau) = \lim (F_n,\tau_n)$. Se tiene $F\subset l_{p^-}\times l_{p^-}\times\ldots$ y F es denso en $l_{p^-}\times l_{p^-}\times\ldots$ porque l_{p^-} es de tipo 2 . Se comprueba de inmediato que τ es la topología relativa de subespacio de $l_{p^-}\times l_{p^-}\times\ldots$ Se deduce en primer lugar que F no es metrizable porque no lo es l_{p^-} . F tampoco es de tipo 1 porque cada espacio F_n es denso en F . Por tanto F es un espacio $(LF)_2$ y la compleción de F es $l_{p^-}\times l_{p^-}\times\ldots$ que no es un espacio (LF) en virtud del Teorema 3.7.

El producto topológico de este espacio F y del espacio φ es un espacio $(LF)_1$ (Proposición 3.8.). La compleción $\widetilde{F\times\varphi}$ de $F\times\varphi$ no es un espacio (LF) porque tiene un cociente $\widetilde{F} = l_{p^-}\times l_{p^-}\times\ldots$ que no es ni un espacio (LF) ni un espacio de Fréchet.

En contraste con los ejemplos anteriores, cabe notar que espacios $(LF)_1$ y $(LF)_2$ completos existen (ver Ejemplos 2.14.7., 2.14.9. y 2.14.10.)

Para la clase más restringida de espacios (LB) se tiene el siguiente Teorema Fundamental de Compleción.

Teorema 3.12. a) La compleción de un espacio $(LB)_1$ es un espacio $(LB)_1$
b) La compleción de un espacio $(LB)_2$ es un espacio $(LB)_2$ o un espacio de Banach.

Demostración.

Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea (E_n,τ_n) un espacio de Banach con bola unidad cerrada B_n , tal que $(E,\tau) = \lim (E_n,\tau_n)$ es un espacio $(LB)_1$. Sustituyendo eventualmente B_n por un homotético de B_n , podemos suponer adicionalmente que $B_n\subset B_{n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Sea $(\hat{E},\hat{\tau})$ la compleción de (E,τ) y denotemos en lo que sigue por $\overline{H}$ y $\hat{H}$ la clausura de un conjunto $H\subset E$ en E y $\hat{E}$ respectivamente. Por el Lema 1.4., $F_n = sp(\hat{B}_n)$ es un espacio de Banach para una topología Ψ_n para la cual $\hat{B}_n$ es la bola unidad cerrada. Además, para cada $n\in\mathbb{N}$

$$\hat{\tau}|_{F_n} \leq \Psi_n \qquad (1)$$

En efecto, si V es un entorno cerrado de 0 en $(\hat{E},\hat{\tau})$, $V\cap E_n\in\tau_n$ y, en consecuencia, $\lambda B_n\subset V\cap E_n$ para algún número $\lambda>0$. Puesto que $F_n\subset\hat{E}_n$ se deduce que $\lambda\hat{B}_n\subset V\cap F_n$ y la relación (1) está probada.

Sea $F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Si para algún índice $m\in\mathbb{N}$, $F_m = F$, entonces $\hat{E}_m\supset F_m\supset E$ y $\overline{E}_m = E\cap\hat{E}_m = E$ contradiciendo que E es de tipo 1 . Por tanto existe una subsucesión estrictamente creciente $\{F_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $F=\bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_{n_j}$. LLamamos de nuevo $\{F_n\}$ a esta subsucesión y definimos el espacio (LB) $(F, \Psi) = \lim (F_n, \Psi_n)$ que es (algebraicamente) un subespacio lineal de $\hat{E}$. La envolvente absolutamente convexa $U = \Gamma_n B_n = \bigcup_n B_n$ es un entorno de 0 en (E, τ) y, en particular, absorbente en E. Por la Proposición 3.10., para cada número $\varepsilon > 0$

$$\hat{U} \subset (1+\varepsilon) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{B}_n \subset (1+\varepsilon) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = F \qquad (2)$$

Since $\hat{U}$ es un $\hat{\tau}$-entorno de 0 en $\hat{E}$, se sigue que $\hat{E} = sp(\hat{U}) \subset F$ y por tanto $\hat{E} = F$.

Por (1) la aplicación inclusión $(F_n, \Psi_n) \hookrightarrow (\hat{E}, \hat{\tau})$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, la identidad $(F, \Psi) \longrightarrow (\hat{E}, \hat{\tau})$ es continua y por el Teorema 2.22. es un isomorfismo topológico. Hemos probado así que $(\hat{E}, \hat{\tau})$ es un espacio (LB). Si para algún $n \in \mathbb{N}$, $\hat{F_n} = \hat{E}$; se deduce fácilmente que $\overline{E_n} = E$ lo que es imposible porque E es de tipo 1. Por tanto $(\hat{E}, \hat{\tau})$ es un espacio $(LB)_1$ lo que demuestra la parte a) del Teorema. A fin de probar b) mantenemos las mismas notaciones salvo que ahora (E, τ) es de tipo 2. Si para algún índice $m \in \mathbb{N}$, $F_m = F$, entonces la relación (2) prueba ahora que $\hat{U} \subset F_m$. Siendo $\hat{U}$ un $\hat{\tau}$-entorno de 0 en $\hat{E}$, se deduce que $\hat{E} = F_m$ y por el Teorema de la Aplicación Abierta de Pták, $\hat{\tau} = \Psi_m$, es decir $(\hat{E}, \hat{\tau})$ es un espacio de Banach. De lo contrario, existe una subsucesión estrictamente creciente $\{F_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $F = \bigcup_j F_{n_j}$. Continúa la demostración ahora como en la parte a) para concluir que $(\hat{E}, \hat{\tau})$ es un espacio (LB). Puesto que algún espacio E_n es denso en E, algún espacio F_n es denso en $\hat{E}$ y $(\hat{E}, \hat{\tau})$ es de tipo 2.

Ejemplo 3.13. El Teorema precedente tiene aplicaciones no triviales, pues espacios $(LB)_1$ y $(LB)_2$ no completos existen de hecho. En efecto, el espacio (LB) E de [9], 31.6. es un ejemplo de espacio $(LB)_2$ no completo. El producto topológico de este espacio E y φ es un espacio $(LB)_1$ (Proposición 3.8.) que no es completo pues el subespacio cerrado E de $E \times \varphi$ no es completo. Puesto que todo espacio (LF) estricto es completo, $E \times \varphi$ es también un ejemplo de espacio $(LB)_1$ no estricto (cf. Ejemplo 2.14.8.) .

Proposición 3.14. Sea $E = \lim E_n$ un espacio (LF). E es un espacio $(LF)_1$ completo si y solo si $\hat{E_n} \subsetneq E$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Si E es completo, $E = \hat{E}$ y por tanto para cada $n \in \mathbb{N}$, $\hat{E_n} = \overline{E_n} \subset E$. Si además E es de tipo 1 $\overline{E_n} \neq E$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Recíprocamente, supongamos que $\hat{E_n} \subsetneq E$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si E no fuera completo se tomaría $x \in \hat{E} - E = \hat{E} - \bigcup_n \hat{E_n}$. Puesto que cada espacio $\hat{E_n}$ es cerrado en $\hat{E}$, existe para cada $n \in \mathbb{N}$ un entorno de 0 absolutamente convexo W_n en $\hat{E}$ tal que $W_n \supset W_{n+1}$ y tal que $(x + W_n) \cap \hat{E_n} = \emptyset$. Puesto que $W_n \cap E_n$ es un entorno de 0 en E_n, $U = \Gamma_n (E_n \cap \frac{1}{2} W_n)$ es un entorno de 0 en E que satisface claramente

$$U \subset E_n + \tfrac{1}{2} W_n \qquad n = 1,2,\ldots \qquad (1)$$

Puesto que E es denso en $\hat{E}$, $x + \hat{U}$ corta a E, y por tanto corta a algún espacio E_n. Además, por (1), se tiene para cada $n \in \mathbb{N}$, $x + \hat{U} \subset x + U + \frac{1}{2} W_n \subset$ $\subset x + W_n + E_n$. Se sigue, pues, que $x + W_n + E_n$ corta a E_n, o equivalente, $x + W_n$ corta a $\hat{E_n}$. De esta contradicción se concluye que E es completo. De $\hat{E_n} \neq E$ se sigue "a fortiori", $\overline{E_n} \neq E$ y E es también de tipo 1.

Problema 3.15. En virtud de [22] , del Ejemplo 2.9. y notas posteriores, muchos espacios de Fréchet contienen subespacios densos (LF). Se plantea, pues, si será cierto que todo espacio de Fréchet es la compleción de un cierto espacio (LF), que sería necesariamente de tipo 3.

Problema 3.16. De acuerdo con el Teorema 3.12. ciertas clases de espacios $(LF)_i$ $i=1,2$ admiten compleción (LF). Usando el Ejemplo 3.11. como pauta para excluir espacios (LF) que no tienen compleción (LF), surge el siguiente problema natural: Caracterización de aquellos espacios (LF) cuya compleción es un espacio (LF) .

Problema 3.17. En la Proposición 3.14. se demuestra una condición necesaria y suficiente para que un espacio (LF) sea un espacio $(LF)_1$ completo. ¿Es generalizable esta condición a espacios $(LF)_2$?

Problema 3.18. Sea E un espacio (LF) metrizable. Puesto que $\hat{E}$ es un espacio (DB), la codimensión algebraica de E en $\hat{E}$ es infinita no numerable (recuérdese que todo subespacio de codimensión numerable de un espacio (DB) es un espacio (DB) y úsese la Proposición 2.7.). Siendo así que E y $\hat{E}$ están algebraicamente "alejados", se plantea la cuestión de si existe algún subespacio E_o de $\hat{E}$ que es (LF) y tal que $E \subsetneq E_o \subsetneq \hat{E}$. Por el argumento anterior, un tal espacio E_o tiene codimensión infinita no numerable en $\hat{E}$. También la codimensión de E en E_o habría de ser

infinita no numerable (cf. Corolario 3.3.) .

Terminamos este Capítulo estudiando límites inductivos de sucesiones de espacios (LF)

Teorema 3.19. Sea (E,τ) el límite inductivo Hausdorff de una sucesión creciente $\{(E^k,\tau^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de espacios (LF). Entonces (E,τ) es un espacio (LF)

Demostración:

Supongamos que para cada $k\in\mathbb{N}$ $(E^k,\tau^k) = \lim_n (E^k_n,\tau^k_n)$ para espacios de Fréchet E^k_n , $k,n\in\mathbb{N}$. Se define inductivamente una sucesión estrictamente creciente $\{m_k\}\subset\mathbb{N}$ del modo siguiente. Si $k=1$, entonces $m_k = 2$ satisface obviamente $E^1_1 \subsetneq E^k_{m_k}$ con inclusión continua. Supongamos que una sucesión finita m_1 m_2 ... m_k se ha encontrado tal que

$$E^i_p \subsetneq E^k_{m_k} \qquad i=1,\dots,k \;;\; p=1,\dots,m_k-1$$

con inclusiones continuas. Por la Proposición 2.19. aplicada sucesivamente a los espacios de Fréchet E^i_p $i=1,\dots k$; $p=1,\dots,m_k-1$, que están continuamente incluídos en el espacio (LF) E^{k+1} , existe $m_{k+1} > m_k$ tal que $E^i_p \subsetneq E^{k+1}_{m_{k+1}}$ con inclusión continua para $i=1,\dots,k+1$; $p=1,\dots,m_{k+1}-1$. En particular, la sucesión de espacios de Fréchet $\{E^k_{m_k}\}$ es inductiva. Además $E=\bigcup_k E^k_{m_k}$ pues si $x\in E$, $x\in E^i_p$ para algún $(i,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, y se sigue $x\in E^k_{m_k}$ si $i\leq k$, $p<m_k$. Por la transitividad de las topologías inductivas se sigue fácilmente que (E,τ) es (isomorfo a) el espacio (LF) definido por $\lim_k (E^k_{n_k},\tau^k_{n_k})$.

Capítulo 4

COCIENTE SEPARABLE

El problema del cociente separable, planteado originalmente por S. Banach, consiste en saber si todo espacio de Banach (o de Fréchet) E posee un subespacio cerrado M tal que el espacio cociente E/M es infinito-dimensional y separable.

Algunos resultados parciales se conocen en esta dirección. En [9] 31.4.1. se prueba que todo espacio de Fréchet que no es de Banach, tiene un cociente isomorfo a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ que es, obviamente, separable. Cabe mencionar también que si el espacio de Fréchet E carece de norma continua, entonces E contiene incluso a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ complementado (cf. [8] 7.2.7.) en cuyo caso E posee también un cociente isomorfo a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

También es sabido que todo espacio (LF) posee un cociente separable (ver [16] Corollary Theorem 3).

Sin embargo no es conocida una respuesta general, afirmativa o negativa, al problema del cociente separable para espacios de Banach, si bien existen dispersas en la literatura diversas formulaciones equivalentes al problema.

Sorprendentemente, el problema del cociente separable presenta conexiones con el problema de la existencia de espacios (LF) metrizables y con ciertas propiedades de los espacios de tipo Baire estudiados en le Capítulo 1. En este capítulo, estudiaremos varias de estas condiciones de existencia de cociente separable con inclusión de tres nuevas caracterizaciones basadas en propiedades de espacios (LB) y en propiedades de cocientes.

<u>Proposición 4.1.</u> Para un espacio localmente convexo E, las siguientes condiciones son equivalentes

a) Todo subespacio denso de E es (DB).

b) Todo subespacio denso de E es quasi-Baire.

Si E es metrizable, también es equivalente

c) Todo subespacio denso de E es tonelado.

Demostración:

Claramente, para todo espacio localmente convexo se tiene a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c). Supongamos que b) se satisface y sea M un subespacio denso de E tal que $M = \bigcup_n M_n$ para alguna sucesión creciente de subespacios $\{M_n\}$. Puesto que M es quasi-Baire, algún M_n es denso en M y, por tanto, en E. De nuevo por b) M_n es quasi-Baire y, en particular, tonelado. Por tanto M es (DB). Si E es metrizable y se satisface c), por el Teorema de Amemiya-Kōmura todo subespacio denso de E es Baire-like y, en particular, quasi-Baire.

<u>Proposición 4.2.</u> Sea A un conjunto numerable en el espacio localmente

convexo E. Sea $\{P_n\}$ una sucesión de proyectores continuos en E tal que $\dim(P_n(E)) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $sp(A)$ es recubierto por la unión de una sucesión de subespacios cerrados propios.

Demostración:

Si $B_n = \{x \in E \; ; \; x$ es combinación lineal de menos que n elementos de $A\}$ entonces $sp(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Sea $A_1, A_2, \ldots$ una enumeración de todos los subconjuntos de $P_n(A)$ tal que $card(A_i) < n$ y sea $E_i = sp(A_i)$ $i = 1,2,\ldots$ Puesto que $E_i \subset P_n(E)$ y $\dim(E_i) < n$, por hipótesis E_i es un subespacio (cerrado) propio de $P_n(E)$ y por tanto $P_n^{-1}(E_i)$ es un subespacio cerrado propio de E satisfaciendo también $B_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_n^{-1}(E_i)$. Por tanto $sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n^{-1}(E_i)$.

<u>Proposición 4.3.</u> Si el espacio localmente convexo E tiene un conjunto total numerable A y una sucesión $\{P_n\}$ de proyectores continuos tal que $\dim(P_n(E)) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces E tiene un subespacio denso que no es U.B.L.

Demostración:

$F = sp(A)$ es un subespacio denso que por la Proposición 4.2. puede ser recubierto por una sucesión $\{F_n\}$ de subespacios cerrados propios. Por tanto $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cap F$ donde cada espacio $F_n \cap F$ es nunca denso en F porque F_n es propio en E. Por tanto F no es U.B.L. (incluso F no es "unordered quasi-Baire")

<u>Corolario 4.4.</u> Todo espacio localmente convexo con base de Schauder

tiene un subespacio denso que no es U.B.L.

Demostración:

Sea $A = \{e_n\}$ una base de Schauder en el espacio localmente convexo E y sea $\{f_n\}$ la sucesión (unívocamente determinada) de coeficientes funcionales de la base. Puesto que cada f_n es continua, las proyecciones $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, e_i$, $x \in E$, $n = 1,2,\ldots$ son continuas y satisfacen $\dim(P_n(E)) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que A es un subconjunto total en E , la Proposición anterior se aplica.

Si F es un subespacio denso del espacio localmente convexo (E, τ) y ψ es una topología en F tal que $\psi \geq \tau|_F$, diremos que (E, τ) contiene continuamente y densamente a (F, ψ) .

La siguiente sencilla observación relativa a espacios de Banach separables será de uso posterior en el Teorema central del cociente separable

<u>Proposición 4.5.</u> Todo espacio de Banach infinito dimensional y separable contiene continuamente y densamente a φ y a l_1 .

Demostración:

Sea $x_1, x_2, \ldots$ una sucesión de elementos linealmente independientes del espacio de Banach infinito dimensional E tales que $F = sp(x_n)$ es un subespacio denso de E . Se supone adicionalmente que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El espacio F provisto de la más fina topología localmente convexa es el espacio φ y claramente la inclusión canónica $\varphi \hookrightarrow E$ es continua. Por otro lado la aplicación $l_1 \hookrightarrow E$ definida por $\xi \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$, $\xi = (\xi_n) \in l_1$

es continua porque $\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$ para todo $\xi \in l_1$ y su rango contiene a F que es denso.

<u>Proposición 4.6.</u> Sea $Q : (F, \Gamma) \longrightarrow (G, \tau)$ una suprayección lineal continua entre espacios de Fréchet. Si G contiene un subespacio denso (LF), entonces F contiene un subespacio denso (LF).

Demostración:

Sea $(G_o, \tau_o) = \lim (G_n, \tau_n)$ un subespacio denso (LF) de (G, τ) . Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $F_n = Q^{-1}(G_n)$ y mediante el Lema 1.5. dotamos a F_n de una topología de Fréchet Γ_n . La sucesión $\{(F_n, \Gamma_n)\}$ es claramente inductiva y se define el espacio (LF) $(F_o, \Gamma_o) = \lim (F_n, \Gamma_n)$. Puesto que G_o es denso en G y Q es una aplicación abierta, se sigue que $F_o = Q^{-1}(G_o)$ es un subespacio denso de F . Dado que $\Gamma|_{F_n} \leq \Gamma_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\Gamma|_{F_o} \leq \Gamma_o$ y la Proposición quedará demostrada si se prueba que $\Gamma_o \leq \Gamma|_{F_o}$. Observemos en primer lugar que si W es un conjunto absolutamente convexo de F_o entonces

$$W \in \Gamma_o \implies Q^{-1}(Q(W)) \in \Gamma|_{F_o} \qquad (1)$$

En efecto tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$, entornos $U_n \in \Gamma$ y $V_n \in \tau_n$ tal que $W \cap F_n \supset U_n \cap Q^{-1}(V_n)$. Se sigue $Q(W) \supset Q(U_n) \cap V_n$ y siendo Q una aplicación abierta, se deduce que que $Q(U_n) \cap V_n \in \tau_n$ y "a fortiori", $Q(W) \cap G_n \in \tau_n$. Puesto que $Q(W)$ es un conjunto absolutamente convexo de G_o se sigue que $Q(W) \in \tau_o = \tau|_{G_o}$ y se deduce (1) por continuidad de Q . Sea entonces W un Γ_o-entorno de 0 absolutamente convexo y fijemos un entorno absolutamente convexo $U \in \Gamma$ y un entorno $V \in \tau_1$ tal que $\frac{1}{2}W \supset U \cap Q^{-1}(V)$. Se tiene

$$\tfrac{1}{2}U \cap Q^{-1}(Q(\tfrac{1}{2}W \cap \tfrac{1}{2}U)) = \tfrac{1}{2}U \cap [Q^{-1}(0) + (\tfrac{1}{2}W \cap \tfrac{1}{2}U)] \subset [U \cap Q^{-1}(0)] + \tfrac{1}{2}W \qquad (2)$$

En efecto, la primera igualdad es de inmediata comprobación y para la inclusión segunda notemos que si $z = x + y$ con $z \in \frac{1}{2}U$, $x \in Q^{-1}(0)$, $y \in \frac{1}{2}W \cap \frac{1}{2}U$ se tiene $x = z - y \in \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}U = U$. De la relación

$$W = \tfrac{1}{2}W + \tfrac{1}{2}W \supset [U \cap Q^{-1}(V)] + \tfrac{1}{2}W \supset [U \cap Q^{-1}(0)] + \tfrac{1}{2}W$$

de (2) y de (1) se deduce finalmente $W \supset \frac{1}{2}U \cap Q^{-1}(Q(\frac{1}{2}W \cap \frac{1}{2}U)) \in \Gamma|_{F_o}$ como se quería demostrar.

De acuerdo con las observaciones hechas al principio del capítulo, todo espacio de Fréchet que no es de Banach posee un cociente separable. Por ello en el Teorema de caracterización de espacios con cociente separable que demostraremos a continuación, nos limitaremos a espacios de Banach, excluyendo el caso trivial de espacios de Banach de dimensión finita. En la demostración de este Teorema haremos uso de propiedades de espacios de tipo Baire que hemos estudiado en el Capítulo 1 y de ciertas propiedades de espacios (LF) estudiadas en los capítulos 2 y 3 . De especial importancia será la existencia de espacios (LF) metrizables ya estudiada en dichos capítulos.

<u>Teorema 4.7.</u> Sea E un espacio de Banach infinito dimensional. Las proposiciones siguientes son equivalentes

a) E tiene un cociente infinito dimensional y separable

b) E posee un subespacio denso no tonelado

c) E posee un subespacio denso no quasi-Baire

d) E posee un subespacio denso no (DB)

e) E posee un subespacio denso E_o que, con una topología más fina que la relativa, es un espacio (LF) metrizable

f) E posee un subespacio cerrado M tal que el cociente E/M contiene un subespacio denso que, con una topología más fina que la relativa, es topológicamente isomorfo al espacio de Banach l_1 .

g) E posee un subespacio denso E_o que, con una topología más fina que la relativa, es un espacio (LB)

h) E posee un subespacio cerrado M tal que el cociente E/M contiene un subespacio denso que, con una topología más fina que la relativa es un espacio (LB)

Demostración:

Denotaremos a lo largo de la demostración, por τ la topología del espacio de Banach E . Las condiciones b) , c) y d) son equivalentes en virtud de la Proposición 4.1.

a) $\Longrightarrow$ h) : Sea E/M un cociente infinito dimensional y separable de E módulo el subespacio cerrado M. Por la Proposición 4.5., E/M contiene continuamente y densamente a φ que es un espacio (LB) (Ejemplo 2.14.9.) .

h) $\Longrightarrow$ g) Sea $Q : E \longrightarrow E/M$ la suprayección continua canónica sobre el cociente que da la condición h) y sea $\{(G_n , \Psi_n)\}$ una sucesión inductiva de espacios de Banach tal que $(G , \Psi) = \lim (G_n , \Psi_n)$ es un espacio (LB) continuamente y densamente incluído en E/M. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $E_n = Q^{-1}(G_n)$ y en E_n se define la topología localmente convexa τ_n con base de entornos de 0 $\{U \cap Q^{-1}(V)\ ;\ U \in \tau\ ,\ V \in \tau_n\}$. Por el Corolario 1.6. (E_n , τ_n) es un espacio de Banach para cada $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $(E_o , \tau_o) = \lim (E_n , \tau_n)$ es un espacio (LB). Puesto que $E_o = \bigcup_n E_n = \bigcup_n Q^{-1}(G_n) = Q^{-1}(\bigcup_n G_n) = Q^{-1}(G)$ y puesto que Q es una aplicación abierta, se sigue que E_o es denso en E. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ la inclusión $(E_n , \tau_n) \hookrightarrow (E_o , \tau|_{E_o})$ es continua (en efecto, si $U \in \tau$, entonces $(U \cap E_o) \cap E_n = U \cap E_n = U \cap Q^{-1}(G_n) \in \tau_n$). Por consiguiente $\tau_o \geq \tau|_{E_o}$.

Supongamos que g) o e) se satisface y sea entonces $(E_o , \tau_o) = \lim (E_n , \tau_n)$ un espacio (LF) continuamente y densamente incluído en el espacio de Banach (E , τ). Entonces $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$ (clausuras en (E,τ)) es un subespacio denso de E. Si para algún $n \in \mathbb{N}$, $\overline{E_n} = F$, entonces E_n es un subespacio denso y no tonelado de (E , τ) (si $(E_n , \tau|_{E_n})$ fuese tonelado, el Teorema de la Aplicación Abierta aplicado a la identidad continua $(E_n , \tau_n) \longrightarrow (E_n , \tau|_{E_n})$ implicaría que E_n es τ-cerrado en E y $E_n = E$ en contra de que $E_n \subsetneq E_o$). En este caso b) se cumple. Si $\overline{E_n} \neq F$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\overline{E_n}$ es un subespacio nunca denso de F y F no es quasi-Baire. Es decir la condición c), equivalente a b), se cumple.

a) $\Longrightarrow$ f) Consecuencia de la Proposición 4.5.

f) $\Longrightarrow$ e) Sea $Q : E \longrightarrow E/M$ la suprayección canónica continua sobre el cociente que da la condición f). Puesto que el espacio de Banach l_1 está continuamente incluído en E/M, por el Corolario 1.6. existe en $F = Q^{-1}(l_1)$ una topología de espacio de Banach Γ más fina que $\tau|_F$ tal que la restricción $Q|_F : (F , \Gamma) \longrightarrow l_1$ es una suprayección continua. Puesto que l_1 es denso en E/M y Q es una aplicación abierta, se sigue que F es denso en (E , τ). También l_1 contiene un subespacio denso (LF) (ver nota posterior al Ejemplo 2.9.). Por la Proposición 4.6. (F , Γ) contiene un subespacio denso E_o que es (LF). Puesto que $\Gamma|_{E_o} \geq \tau|_{E_o}$ la condición e) queda probada.

Por último probamos b) $\Longrightarrow$ a) con una demostración basada en una idea original de S. Saxon y P. P. Narayanaswami. Si existe en E un subespacio denso y no tonelado, por un sencillo argumento se deduce que existe un disco cerrado B_1 en E tal que $sp(B_1)$ es denso en E pero B_1 no es entorno de 0 en $sp(B_1)$. Denotemos por U_n la bola cerrada de centro 0 y radio 2^{-n} en E, $n \in \mathbb{N}$. Si $U_1 \subset B_1$ entonces B_1 sería entorno de 0. Por tanto existe $x_1 \in U_1 \setminus B_1$ y se toma $f_1 \in B_1^o$ tal que $f_1(x_1) = 1$. Sea $B_2 = B_1 + \{a_1 x_1\ ;\ |a_1| \leq 1\}$. Si $f_1^{-1}(0) \cap U_2 \subset B_2$ entonces $sp(B_2)$ tendría codimensión a lo sumo 1 en contra de que $sp(B_1)$ tiene codimensión infinita (no numerable) como subespacio no tonelado de un espacio tonelado. Por tanto existe $x_2 \in (f^{-1}(0) \cap U_2) \setminus B_2$ y se toma entonces $f_2 \in B_2^o$ tal que $f_2(x_2) = 1$. Sea $B_3 = B_1 + \{a_1 x_1 + a_2 x_2\ ;\ |a_i| \leq 1\ ,\ i = 1,2\}$. El mismo argumento que antes prueba que B_3 no puede contener a $f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0) \cap U_3$ pues la codimensión de $sp(B_3)$ no es a lo sumo 2.

Prosiguiendo inductivamente este proceso, se obtienen sucesiones $\{x_n\} \subset E$, $\{f_n\} \subset E'$ y conjuntos $B_n = B_1 + \{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \; ; \; |a_i| \leq 1 \; , \; i = 1,2,\ldots,n-1 \}$ $n = 2,3,\ldots$ tales que $\|x_n\| \leq 2^{-n}$, $f_n(x_n) = 1$, $|f_n(x)| \leq 1$ para todo $x \in B_n$ y $f_k(x_{k+n}) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Para $k \in \mathbb{N}$ se define el subespacio cerrado $M_k = \bigcap_{i=k+1}^{\infty} f_i^{-1}(0)$. Probaremos que para cada $y \in B_1$ y cada $k \in \mathbb{N}$, existe un elemento $z(k, y) \in E$ tal que

$$\|z(k, y)\| \leq 2^{-k} \quad , \quad y + z(k, y) \in M_k \tag{1}$$

En efecto, sea $a_1 = -f_{k+1}(y)$ y para $n \geq 2$ sea $a_n = -f_{k+n}(y + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{k+i})$ que satisface, por lo demostrado anteriormente, $|a_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El elemento $z(k, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{k+i}$ está bien definido porque $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \, \|x_{k+i}\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-(k+i)} = 2^{-k}$. De esta relación se sigue también que $\|z(k, y)\| \leq 2^{-k}$. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$f_{k+n}(y + z(k, y)) = f_{k+n}(y + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{k+i}) + a_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i f_{k+n}(x_{k+i}) = -a_n + a_n + 0 = 0$$

es decir $y + z(k, y) \in M_k$ y las relaciones (1) quedan probadas. De (1) se deduce en primer lugar que el subespacio lineal $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ es denso en B_1 y por tanto denso en $sp(B_1)$ y por tanto denso en E. En particular, para cada $k \geq 2$, f_k no se anula en B_1 puesto que $f_k \neq 0$. Sea $y_k \in B_1$ tal que $f_k(y_k) \neq 0$. De (1) se deduce que $u_k = y_k + z(k, y_k) \in M_k$. Por la definición de $z(k, y_k)$ se deduce también que $f_k(u_k) = f_k(y_k) \neq 0$, es decir $u_k \notin M_{k-1}$. Por tanto $u_k \in M_k \setminus M_{k-1}$ y, puesto que la codimensión

de M_{k-1} en M_k no puede exceder 1, se sigue que $\{u_k \; ; \; k \geq 2\}$ es una sucesión de elementos linelamente independientes de E tal que

$$M_1 \cap sp\{u_k \; ; \; k \geq 2\} = \{0\} \quad , \quad M = M_1 + sp\{u_k \; ; \; k \geq 2\}$$

De la primera relación se deduce que $\{u_k + M_1 \; ; \; k \geq 2\}$ es una sucesión linealmente independiente en E/M_1, es decir E/M_1 tiene dimensión algebraica infinita. De la segunda relación se deduce que $M_1 + sp\{u_k \; ; \; k \geq 2\}$ es denso en E y por tanto $sp\{u_k + M_1 \; ; \; k \geq 2\}$ es denso en E/M_1. Por consiguiente E/M_1 es el cociente separable buscado.

Es interesante notar que, de acuerdo con el Corolario 2.11., las condiciones e) y g) del Teorema precedente no se solapan, proporcionando así un mayor espectro de condiciones para investigar la existencia de cociente separable.

Mencionemos finalmente la siguiente condición de G. Bennett y N. J. Kalton equivalente al problema del cociente separable (ver [3]) : El espacio de Banach infinito dimensional E satisface las condiciones equivalentes del Teorema 4.7. si y solo si E posee un subespacio denso propio que, con una topología más fina que la topología relativa, es un espacio de Fréchet.

REFERENCIAS

[1] I. AMEMIYA, Y. KOMURA, Über nicht-vollständige Montelräume, Math. Ann. 177 (1968), 273-277

[2] J. ARIAS DE REYNA, Dense hyperplanes of first category, Math. Ann. 249 (1980), 111-114

[3] G. BENNETT, N. J. KALTON, Inclusion Theorems for k-spaces, Canad. J. of Math. 25 (1973), 511-524

[4] M. DE WILDE, C. HOUET, On Increasing Sequences of Absolutely Convex Sets in Locally Convex Spaces, Math. Ann. 192 (1971), 257-261

[5] J. DIEUDONNÉ, L. SCHWARTZ, La dualité dans les espaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{LF}$), Ann. Inst. Fourier 1 (1950), 61-101

[6] J. M. GARCÍA-LAFUENTE, On the Completion of (LF)-spaces, Mh. für Math. (to appear)

[7] A. GROTHENDIECK, Sur les espaces (F) et (DF), Summa Brasil Math. 3 (1954), 57-123

[8] H. JARCHOW, Locally Convex Spaces, B. G. Teubner, Stuttgar, 1981

[9] G. KÖTHE, Topological Vector Spaces I, Springer-Verlag, Berlin, 1969

[10] G. KÖTHE, Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalconvexer Räume, Math. Z. 52 (1950), 627-630

[11] J. OXTOBY, Cartesian Products of Baire Spaces, Fund. Math. 49 (1961), 157-166

[12] W. J. ROBERTSON, I. TWEDDLE, F. E. YEOMANS, On the Stability of Barrelled Topologies III, Bull. Austr. Math. Soc. 22 (1980), 99-112

[13] S. A. SAXON, Nuclear and Product Spaces, Baire-like Spaces, and the Strongest Locally Convex Topology, Math. Ann. 197 (1972), 87-106

[14] S. A. SAXON, Metrizable Generalized (LF)-spaces, Notices Amer. Math. Soc. 20 (1973), A-143

[15] S. A. SAXON, M. LEVIN, Every Countable-codimensional Subspace of a Barrelled Space is Barrelled, Proc. Amer. Math. Soc. 29, 1 (1971), 91-96

[16] S. A. SAXON, P. P. NARAYANASWAMI, Metrizable (LF)-spaces, (DB) spaces and the Separable Quotient Problem, Bull. Austr. Math. Soc. 23 (1981), 65-80

[17] S. A. SAXON, P. P. NARAYANASWAMI, Metrizable [Normable] (LF)-spaces and two Classical Problems in Fréchet [Banach] Spaces, (to appear)

[18] S. A. SAXON, A. WILANSKY, The Equivalence of some Banach Space Problems, Coll. Math. XXXVII (2) (1977), 217-226

[19] A. R. TODD, S. A. SAXON, A Property of Locally Convex Baire Spaces, Math. Ann. 206 (1973), 23-34

[20] M. VALDIVIA, Absolutely Convex Sets in Barrelled Spaces, Ann. Inst. Fourier 21, 2 (1971), 3-13

[21] M. VALDIVIA, P. PÉREZ-CARRERAS, On Totally Barrelled Spaces, Math. Z. 178 (1981), 263-269

[22] M. VALDIVIA, P. PÉREZ-CARRERAS, Sobre Espacios (LF) Metrizables, Coll. Math. 33, 3 (1982), 299-303

[23] M. VALDIVIA, A property of Fréchet Spaces, Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory II, North Holland Math. Studies 86, (1984), 469-477

[24] M. VALDIVIA, On Suprabarrelled Spaces, Functional Analysys, Holomorphy and Approximation Theory, Lecture Notes in Mathematics 843, (1981), 572-580 .

INDICE DE MATERIAS

PUBLICACIONES DE LA SECCION DE MATEMATICAS UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

1. **Francisco Montalvo Durán**: *Estructuras Diametrales.*
2. **Joaquín Bruna, Julia Cufi**: *Métodos Actuales de la Teoría de Funciones Holomorfas de Varias Variables.* (Curso de Jarandilla de 1982).
3. **Francisco Gómez Ruiz**: *Grupos de Lie y Clases Características.* (Curso de Jarandilla de 1982).
4. **Javier Alonso Romero**: *Ortogonalidad en espacios normados.*
5. **Juan Antonio Navarro González**: *Teoría de Galois.*
6. **Ana María Fernández Militino**: *Cuestiones notables en la Inferencia Bayesiana de las Series Temporales.*
7. **Miguel A. Fajardo Caldera**: *Generalizaciones de los Sistemas Pearsonianos Discretos.*
8. **Guido Weiss**: *Espacios Generados por Bloques.* (Curso de Jarandilla 1984).
9. **Luis Romero Marzal**: *Espacios G y Nuclearidad Asociada.*
10. **Manuel Fernández García-Hierro**: *Aproximación en espacios normados producto: Aproximación simultánea y con norma mixta.*
11. **Ricardo Faro Rivas**: *Aproximación de cuerpos convexos simétricos.*

Pedidos a:

Biblioteca de la Sección de Matemáticas
Facultad de Ciencias.
Universidad de Extremadura
Avda. de Elvas s/n.
06071 - Badajoz (SPAIN)