



UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA



MÁSTER UNIVERSITARIO EN INICIACIÓN A LA  
INVESTIGACIÓN EN INGENIERÍA Y ARQUITECTURA.  
(ESPECIALIDAD EN INGENIERÍAS GRÁFICA Y DE LA CONSTRUCCIÓN)  
Escuela Politécnica

Trabajo Fin de Máster

*La bóveda extremeña.*

*Un acercamiento a su geometría*

*... con «regla y compás»*

Fernando Pariente Lorenzo

Junio, 2014





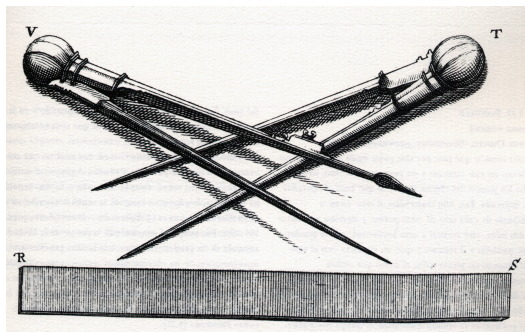
# UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

MÁSTER UNIVERSITARIO EN INICIACIÓN A LA  
INVESTIGACIÓN EN INGENIERÍA Y ARQUITECTURA.  
(ESPECIALIDAD EN INGENIERÍAS GRÁFICA Y DE LA CONSTRUCCIÓN)  
Escuela Politécnica

Trabajo Fin de Máster

## *La bóveda extremeña.*

*Un acercamiento a su geometría  
... con «regla y compás»*



Autor: Fernando Pariente Lorenzo

Director: Dr. D. Manuel Fortea Luna

Tribunal Calificador

Presidente: Dra. Dña. Carolina Tejeiro Vidal

Fdo:

Secretario: Dr. D. José Carlos Salcedo Hernández

Fdo:

Vocal: Dr. D. Juan Saumell LLadó

Fdo:

CALIFICACIÓN:

FECHA:

Figura en portada de instrumentos básicos del dibujo: la regla simple y los dos compases, el de medir y el de trazar, tomada de la obra de Jean Dubreuil «*La perspective pratique nécessaire à tous peintres, graveurs, sculpteurs... et autres se servant du dessin*, par un parisien, religieux de la Compaigne de Jésus». Tavernier et L'Anglois. Paris, 1642. En (ref. [19]); Cap. 2: *Máquinas de ver, máquinas de dibujar*. p. 85.

### Agradecimientos.

Parte importante y necesaria en este trabajo no hubiera sido posible sin la generosidad de algunas personas. Por permitirme entrar en casas particulares a Luis Higuero Salado, Marta Sánchez-Herrero Rosado, Víctor González Barrera, y Luis Acha Iturmendi. Por las explicaciones sobre la ejecución de bóvedas de rosca a Julio Manzano Gómez y por sus aclaraciones sobre la interpretación de la estadística a Arthur Pewsey. A Manuel Fortea Luna, maestro de juicio y generoso saber.

Que sin querer alguno, de mí se apodera:  
Y veo que quiere el noble *arif*  
Que con justicia tenga beneficio.

... ah, y a mi inseparable Lily Linch.



## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	3
1.2. Objetivo . . . . .	4
1.3. Planteamiento . . . . .	4
1.4. Contenido . . . . .	5
<b>2. Geometría y proporciones</b>	<b>7</b>
2.1. Preámbulo . . . . .	7
2.2. La proporción Arquitectónica . . . . .	8
2.3. Los «Elementos» de Euclides . . . . .	9
2.3.1. Libro II, proposición 11 . . . . .	10
2.3.2. Libro VI, definición 3 . . . . .	12
2.3.3. Libro VI, proposición 29 . . . . .	13
2.3.4. Libro VI, proposición 30 . . . . .	13
2.4. Álgebra de las proporciones . . . . .	14
2.5. La proporción del cuadrado . . . . .	16
2.6. La «proporción áurea» . . . . .	17
2.6.1. El «rectángulo áureo» . . . . .	21
2.7. Traza de un «rectángulo áureo» con «cinta y cordel» . . . . .	26
<b>3. Forma de la bóveda extremeña</b>	<b>27</b>
3.1. Preámbulo . . . . .	27
3.2. Definición geométrica con «regla y compás» . . . . .	28
3.2.1. Curvas directrices . . . . .	28
3.2.2. Curvas generatrices . . . . .	30
3.3. Replanteo de la bóveda con «cinta y cordel» . . . . .	33
3.3.1. Curvas directrices. Retumbo . . . . .	33
3.3.2. Curvas generatrices . . . . .	36
3.3.3. Replanteo práctico de obra . . . . .	39
<b>4. Comprobación de la forma. Estudio de campo</b>	<b>43</b>
4.1. Preámbulo . . . . .	43
4.2. Toma de datos . . . . .	44
4.3. Análisis de datos . . . . .	45
4.4. Traza de la bóveda extremeña . . . . .	47
<b>5. Resultados y conclusiones</b>	<b>49</b>
5.1. Resultados . . . . .	49
5.1.1. Curvas directrices . . . . .	49
5.1.2. Curvas generatrices . . . . .	51

5.1.3.	Retumbos . . . . .	52
5.1.4.	Flechas . . . . .	54
5.2.	Conclusiones . . . . .	56
5.2.1.	Curvas definidoras de las superficies . . . . .	56
	De las curvas directrices . . . . .	59
	De las aristas diagonales . . . . .	59
	De las curvas generatrices . . . . .	59
	De los retumbos . . . . .	60
	De las flechas . . . . .	60
	General . . . . .	61
5.3.	Epílogo . . . . .	62
<b>Anexos</b>		<b>65</b>
<b>A. Geometría teórica</b>		<b>67</b>
A.1.	Geometría teórica de las superficies . . . . .	67
A.1.1.	Dimensiones teóricas de las bóvedas . . . . .	69
<b>B. Geometría real y ajustes I</b>		<b>73</b>
B.1.	Introducción . . . . .	73
B.2.	Ajuste de las curvas directrices . . . . .	73
B.2.1.	Resultados ajuste de directrices . . . . .	75
B.2.2.	Estadística ajuste de directrices . . . . .	76
B.3.	Ajuste de las curvas generatrices . . . . .	77
B.3.1.	Resultados ajuste de generatrices . . . . .	78
B.3.2.	Estadística ajuste de generatrices . . . . .	80
B.4.	Altura del retumbo . . . . .	81
B.4.1.	Retumbo real . . . . .	81
B.4.2.	Estadística del retumbo . . . . .	83
B.5.	Altura de la flecha . . . . .	84
B.5.1.	Flecha real . . . . .	84
B.5.2.	Estadística de flechas . . . . .	86
<b>C. Geometría real y ajustes II</b>		<b>89</b>
C.1.	Introducción . . . . .	89
C.2.	Ermita de Alta Gracia . . . . .	90
C.3.	Casa Arroyo de la Luz I . . . . .	93
C.4.	Ermita del Prado . . . . .	98
C.5.	Monasterio del Palancar . . . . .	103
C.6.	Las Seguras de Ovando . . . . .	110
C.7.	Casa Malpartida de Cáceres I . . . . .	115
C.8.	Casa palacio Los Becerra . . . . .	120
C.9.	Cáceres. Plaza Mayor . . . . .	125
<b>D. Textos originales. Reproducción</b>		<b>129</b>
D.1.	«Elementos». Traducción de Rodrigo Zamorano . . . . .	129
D.1.1.	Libro I, proposición 47, folio 34 . . . . .	131
D.1.2.	Libro I, proposición 47, folio 34b . . . . .	132
D.1.3.	Libro II, proposición 11, folio 17 . . . . .	133
D.1.4.	Libro II, proposición 11, folio 17 v. . . . .	134

D.1.5. Libro VI, definición 3, folio 96 . . . . .	135
D.1.6. Libro VI, proposición 29, folio 117 a. . . . .	136
D.1.7. Libro VI, proposición 29, folio 117 r. . . . .	137
D.1.8. Libro VI, proposición 30, folio 118 a. . . . .	138
D.1.9. Libro IV, proposición 15, folio 70 a. . . . .	139
D.1.10. Libro IV, proposición 15, folio 70 r. . . . .	140
D.2. «Libro primo d'architettura». Sebastiano Serlio . . . . .	141
D.2.1. Libro I, folio 15 . . . . .	142
D.2.2. Libro I, folio 11b . . . . .	143
D.3. «Libro de Arquitectura». Hernán Ruiz . . . . .	144
D.4. «Los X libros de arquitectura». Traducción de Lázaro de Velasco . . . . .	145
D.5. «Livre de portraiture». Villard de Honnecourt . . . . .	146

## Referencias bibliográficas

147





## Resumen

La identificación y comprensión de la forma de las edificaciones es de vital importancia para el conocimiento de la Historia de la Arquitectura. La bóveda extremeña constituye una singularidad, en cuanto a su configuración, entre las construcciones arquitectónicas de obra de fábrica de ladrillo o adobe y argamasa destinadas a cubrir un espacio.

Para investigar la geometría de las superficies que dan la forma a la bóveda extremeña se realizaron levantamientos topográficos de este tipo de abovedamientos y se analizaron matemáticamente los elementos que resaltan, las aristas, y que marcan y delimitan las superficies constituyentes. En su análisis se obtuvo que dichas superficies son curvadas en el espacio y son el resultado de la intersección de dos superficies de revolución, normales entre sí y con el mismo centro, engendradas por curvas planas y cerradas elípticas que siguen trayectorias también elípticas. De la intersección de estos dos toroides entre sí y de ambos con los planos verticales de los muros que delimitan el espacio a cubrir resultan las aristas: en los muros las *generatrices*, curvas elípticas, y en el espacio entre los muros las *diagonales*; la trayectoria seguida por las curvas generadoras de las superficies, las *directrices*, resultaron, como las primeras, también elípticas.

Se comprobó que el diseño de esta bóveda de aristas, atribuido a época bizantina, puede plasmarse mediante útiles básicos de dibujo como la regla y el compás, que su replanteo es factible por maestros de obras —alarifes— con cinta y cordel, y se confirmó algebraicamente que los ejes de las elipses así trazadas, las *directrices* y las *generatrices*, resultaron, en todos los casos estudiados, estar en una misma *razón*; sus magnitudes están relacionadas entre sí de manera que la geometría de su diseño corresponde a uno de los cánones clásicos de belleza más elogiado a lo largo de la historia de las artes: la *proporción áurea*.



# 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

Desde la antigüedad y a lo largo de la historia, la ordenación, distribución y composición de un diseño arquitectónico se ha desarrollado, principalmente, en base a la geometría. Con esta herramienta gráfica y matemática se ha podido pasar del campo de la imaginación al real, al físico, plasmando en un dibujo el proyecto de una edificación. A partir del diseño original ya representado gráficamente se puede interpretar una idea arquitectónica y hacerla realidad: se puede construir.

Una de las partes de la construcción de la edificación es la cubrición de los espacios abiertos: los vanos entre muros, entre pilares o entre ambos. Con funciones varias, cerramiento y apoyo de la cubierta o sostén de un piso superior, se han desarrollado desde la antigüedad sistemas de cerramiento en forma de bóvedas y/o cúpulas y en todas ha sido necesaria la participación de la geometría en su diseño.

Entre todos los sistemas de cubrición de un espacio abierto, el tipo de bóveda conocido como «de rosca» ha tenido gran difusión y aceptación en la técnica constructiva del abovedamiento desde el tercer milenio a.C. hasta nuestros días <sup>1</sup>. A partir de pequeñas piezas utilizables a mano, con forma geométrica sencilla, fácil de fabricar y económicas, se puede construir una bóveda disponiendo estas pequeñas piezas de una manera ordenada y precisa, unidas o sujetas entre sí con argamasa, hasta formar una superficie espacial. La manera de colocación de estas pequeñas piezas, ladrillos o adobes, y la forma final de las superficies generadas ha dado lugar a los distintos tipos en que se clasifican, desde diferentes aspectos técnicos y formales, los abovedamientos.

De entre los tipos clasificados, uno de ellos, que se construye con los medios y de la manera dicha, tiene una singularidad que la hace notable desde sus orígenes; por un lado se construye al aire, sin apoyo de cimbra, lo que requiere de operaciones de ejecución especializada para conseguir la estabilidad de la fábrica en cada fase de construcción, y por otro lado requiere de un sistema de referencias de replanteo específico para obtener la forma singular de las superficies engendradas de las que resulta su equilibrio apreciativo: es la «bóveda extremeña».

---

<sup>1</sup> (ref. [3]).

Tradicionalmente su implantación geográfica la sitúa en la parte occidental de la península Ibérica y más concretamente en la Baja Extremadura. Es una bóveda «de rosca» de ladrillo cocido colocado a «tabla» e inclinado suavemente sin auxilio de cimbra. Son bóvedas con superficies compuestas, de doble curvatura, resultado de la unión de curvas simples revolucionadas por ejes *directrices*. Las uniones quedan marcadas visualmente por aristas *diagonales*. Las superficies se inician por hiladas a partir de los muros o arcos que delimitan el espacio a cubrir, son las aristas *laterales* o *perimetrales*, y ganando en altura con el desarrollo de la fábrica las superficies avanzan hasta confluír y cerrar en la clave de la bóveda. Todas las aristas visibles tienen una geometría peculiar, original, que la hacen diferente —misteriosa—: son elípticas.

## 1.2. Objetivo

El propósito de este trabajo es el de un acercamiento al conocimiento de la geometría de la bóveda extremeña a partir del análisis de casos reales de estos abovedamientos mediante el exámen de la geometría que la define, de las curvas matemáticas que se desarrollan en el espacio y sus parámetros, de las magnitudes de los diferentes parámetros de las curvas, sus posiciones espaciales, y las proporciones entre sus magnitudes.

Una vez conocida la forma —matemática— de la bóveda, este trabajo tiene como propósito el investigar mediante el exámen de su forma si existe alguna relación con los cánones clásicos de belleza arquitectónica, con base documental histórica, y especialmente con el más elogiado de todos, por sus cualidades y méritos, el de la proporción o *razón áurea*.

También se tiene como objetivo identificar y determinar si pudieron existir reglas, patrones, factibles de diseño de la bóveda, y si es posible y realizable el replanteo de la obra por alarifes <sup>2</sup> siguiendo esas reglas.

## 1.3. Planteamiento

Lo que se presenta desarrollado en este trabajo es una primera aproximación, un «acercamiento», a partir de la forma visual, a la configuración de la bóveda extremeña mediante resoluciones gráficas de dibujo y los fundamentos matemáticos en los que se basa para conocer la geometría de las superficies, su generación, propiedades y proporciones que dió origen a este singular diseño, pues, como es sabido, la creación arquitectónica es inicialmente creativa —es artística— y seguidamente se desarrolla en base a la geometría. A partir de un boceto, la geometría y las matemáticas en que se funda el diseño arquitectónico —y esta interacción se ha mantenido durante siglos—, son los que posibilitan fabricar un edificio; y es su forma visual la que lo

<sup>2</sup> *Diccionario de Autoridades* Tomo I (1726), «Alarife: El Maestro que publicamente está señalado y aprobádo para reconocer, apreciar, ù dirigir las obras que pertenecen à la Architectura; aunque yá generalmente se toma solo por el Maestro de Albañilería. Es voz Arábiga, que trahe su origen del verbo Aráfa, que significa el que fué señalado y nombrado para reconocer las obras públicas: de qual se deriva el nombre Arif, que vale reconocedor, al qual añadido el artículo Al, se dixo Alarif.»

caracteriza y en el caso de la bóveda extremeña la que hace de ella una singularidad.

En el planteamiento, aunque enfocado fundamentalmente a la obtención del diseño geométrico en el plano y en el espacio, que se piensa proviene de uno original, no se ha olvidado que la bóveda extremeña pertenece a ese tipo de edificaciones en las que prima el aprovechamiento de los materiales locales, comúnmente conocidas como arquitectura popular y más concretamente, tomando palabras prestadas, a las edificaciones de «arquitectura sin arquitectos»<sup>3</sup>. Realizadas por maestros albañiles, en la que las técnicas de replanteo inicial y de comprobación, los sistemas de ejecución y el resultado final no son precisamente las de obras exquisitas, al menos formalmente. La bóveda extremeña pertenece a esa clase de construcciones con limitados recursos económicos, y sin embargo, heredera originalmente de un profundo conocimiento técnico, de materiales, de procesos constructivos y cuyo resultado estético es de una inusual belleza.

#### 1.4. Contenido

El trabajo preliminar que se presenta se desarrolla sobre la idea de que en todo diseño arquitectónico está implicada la geometría. Inicialmente, en el capítulo «Geometría y proporciones» se hace un repaso a los conceptos geométricos de las dimensiones que deben tener las distintas partes de una cosa para lograr una buena disposición y correspondencia entre ellas, esto es, euritmia.

A lo largo de la Historia de la Arquitectura han sido muchas y variadas las opiniones sobre la forma más adecuada de los elementos arquitectónicos para alcanzar esa euritmia y se han establecido cánones de belleza basados en la razón, la proporción, entre las partes de una cosa y su conjunto. La proporción que más aceptación ha tenido, ha sido, sin duda, la proporción *áurea*, y por ello se ha considerado inevitable hacer un breve repaso a la primera noticia histórica que tenemos de un estudio formal, desde un punto de vista algebraico, de esta proporción que se encuentra en la obra de Euclides de Alejandría: «Los Elementos».

Con esa revisión a la proporción *áurea* se da apoyo gráfico y también técnico a la proposición que se plantea en el siguiente capítulo «Forma de la bóveda extremeña» y que se tratará de revalidar más adelante. En ese capítulo se desarrolla el modelo teórico, la teoría del diseño geométrico, la forma de la bóveda extremeña con la utilización, solamente, de los instrumentos básicos de dibujo geométrico: la regla y el compás. Se describe la obtención de los elementos geométricos de la bóveda, de las superficies planas y curvas que la constituyen, mediante varios procedimientos posibles solo con regla y compás, encaminados a demostrar la posibilidad técnica de confeccionar un diseño puramente geométrico basado en la proporción *áurea* entre los elementos constituyentes de la bóveda extremeña; se concluye con la explicación de un método posible de replanteo de la obra con los útiles clásicos de un maestro de obra: cinta de medir, cuerda y plomada.

---

<sup>3</sup>Cano Ramos, Javier. *Geometría, mecánica y economía: las bóvedas extremeñas*, presentación al libro (ref. [12]).

El desarrollo geométrico, analítico, de la «Forma de la bóveda extremeña» se presenta separado en el anexo «Geometría teórica», en el que se incluye una exposición púramente matemática de los elementos geométricos que definen la bóveda, sus magnitudes y proporciones, y la posición relativa entre ellos.

Para verificar y poder confirmar el modelo teórico se realizó un estudio de campo con levantamientos topográficos de abovedamientos del tipo que se trata en este trabajo, en distintas edificaciones, separadas temporal y espacialmente, en Cáceres y su entorno más cercano. En el capítulo «Comprobación de la forma. Estudio de campo» se describe el criterio seguido para la toma de datos de los elementos, las aristas, que definen visualmente la bóveda y la metodología seguida para la obtención de las curvas geométricas planas que se ajuste lo más fielmente posible a los datos de campo. A partir de estas curvas se obtiene un modelo geométrico real susceptible de compararlo con el modelo teórico previsto.

Los criterios matemáticos teóricos se han expuesto y desarrollado en anexo aparte. En el anexo «Geometría real y ajustes I» se expone el método de ajuste de la curva geométrica a los datos reales obtenidos en campo, los resultados ajustados para cada una de las bóvedas observadas, el modelo real, y un análisis estadístico que coopera a la interpretación y validación de los resultados obtenidos. Los datos de campo que han servido de base en este trabajo se exponen en sitio aparte, en el anexo «Geometría real y ajustes II». En éste se ilustra, en distintos planos de planta y secciones, la forma real observada topográficamente y se superpone en cada sección el resultado gráfico de la curva que mejor se ajusta según los criterios descritos para el modelo teórico.

La forma, la ordenación y distribución de los elementos del diseño de la bóveda extremeña, expuesta previamente como hipótesis, se presenta en el capítulo «Resultados y conclusiones». Mediante el análisis comparativo de la geometría real y la teórica se razona y concluye, en los casos estudiados, que las proposiciones realizadas en «Forma de la bóveda extremeña» se mantienen y se verifican: la composición inicial del diseño de la bóveda extremeña se basa en curvas geométricas planas cerradas inscritas en rectángulos *áureos*.

## 2

### Geometría y proporciones

*«Hay un recurso al que acuden todas las ciencias y del que, así mismo, todas se nutren: es la Matemática. La actividad arquitectónica también utiliza este recurso en numerosas ocasiones: cálculo de estructuras, ornamentación, urbanismo...»*

*»Pero materializar una forma, un espacio, un componente constructivo no es solo dimensionarlo, sino incluirlo dentro de una armonía de proporciones que sintonicen con el ser humano y constituyan un todo.*

*»Así como la Música maneja proporciones y podemos crear sonatas diferentes con los mismos instrumentos y notas, la Arquitectura, matemáticamente realizada, podrá crear aquellas proporciones que dentro de tramas espaciales organicen la materia armónica y bellamente.»*

*M<sup>a</sup> Agripina Sanz García y  
Ascensión Moratalla de la Hoz <sup>1</sup>*

#### 2.1. Preámbulo

En toda obra y elemento arquitectónico la mayor y más satisfactoria sensación que se puede sentir es la estética. Esta se puede conseguir cuando existe una bondadosa concordancia entre toda la obra y las partes que la conforman: existe armonía.

Vitruvio postuló el concepto de armonía en su obra *Los diez libros de Arquitectura* <sup>2</sup>. En ella, con la euritmia se refiere al hecho de moverse en el espacio de modo armonioso y buscando la belleza mediante la consecución de un aspecto elegante y hermoso de la obra, entre otros, de *la justa proporción de los elementos de una obra, tomados aisladamente y en conjunto, así como su conformidad respecto a un resultado simétrico* y en la *colocación apropiada de los elementos*, y concluye que *La Euritmia es el aspecto elegante y hermoso, es una figura apropiada por la conjunción de sus elementos. La Euritmia se logra cuando los elementos de una obra son adecuados, cuando simétricamente se corresponde la altura respecto a la anchura, la anchura respecto a la longitud y en todo el conjunto brilla una adecuada correspondencia* <sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup> (ref. [25]), cap. *Introducción*, p.1

<sup>2</sup> (ref. [30])

<sup>3</sup> (ref. [30]), cap. 2 *De qué elementos consta la arquitectura*, en el que describen los componentes de: Ordenación, Disposición, Euritmia, Simetría, Ornamento y Distribución. pp. 32-35.

En arquitectura existe un concepto de la belleza que es antropomórfico, basado en las proporciones del cuerpo humano. La importancia y trascendencia de este concepto ha sido tratada por innumerables autores a través de la historia, y entre ellos Alsina y Trias <sup>4</sup> nos parece que justifica el concepto de belleza antropomórfica al ser el hombre el destinatario y perceptor de la estética de la obra arquitectónica:

*El espacio arquitectónico posee un rasgo absolutamente diferencial:  
es creado por el hombre para uso del hombre.*

De todas las facetas del diseño: la espacial, la percepción, el color, la luminosidad... , la geometría tienen un papel esencial en el tratamiento y delimitación del espacio, y en éste, las proporciones que se delimitan el todo y las partes son esenciales en el proceso creativo. En la búsqueda de la proporción de las medidas, y en la simetría, que dan a la obra una buena disposición y correspondencia entre sus partes, se ha recurrido, desde la antigüedad, a crear armonía a partir de figuras planas sencillas como cuadrados y rectángulos por superposición o división de ellos.

## 2.2. La proporción Arquitectónica

La búsqueda de la belleza y perfección en el arte ha sido constante a través de los tiempos. Con Platón, la relación entre las partes y el todo tienen un significado general y filosófico. En sus obras *Timeo*, la *República* y las *Leyes* trata las proporciones como un principio universal <sup>5</sup>.

Artistas y arquitectos de todas las épocas han buscado la relación entre las partes de una obra y su totalidad de manera que sea agradable a los sentidos; Luca Pacioli justificó esta búsqueda: *no hay nada en el intelecto que previamente no de haya ofrecido de alguna manera a los sentidos*. La belleza se entiende como proporción y armonía, y desde la antigüedad la armonía se ha identificado directamente con la proporción.

En la antigüedad griega la perfección de las formas, musicales y estéticas, están ligadas a determinadas proporciones numéricas. Las primeras proporciones aplicadas en el arte se encuentran en el canon de Policleto (s. V a.C.): en un cuerpo humano perfecto su altura es ocho veces la cabeza. Esta primera proporción es conmensurable, es decir, las partes son números enteros y su razón también, son números racionales <sup>6</sup>. Sin embargo las grandes obras artísticas de la Grecia clásica se basan en proporciones inconmensurables, en que la razón entre sus partes es un número irracional <sup>7</sup>. Se atribuye a Pitágoras el descubrimiento de la primera proporción inconmensurable: la diagonal del cuadrado, de lado unidad, no puede expresarse mediante un número entero.

---

<sup>4</sup> (ref. [4])

<sup>5</sup> Aldo Mieli, prólogo al libro (ref. [20])

<sup>6</sup> Número racional: expresión numérica susceptible de ser expresada mediante un número entero, decimal o por una fracción.

<sup>7</sup> Número irracional: expresión numérica que no puede expresarse por un número entero, decimal o fracción.



Estos hallazgos, las proporciones numéricas, calaron fuertemente en arquitectos, escultores, filósofos que entendieron que existe una «Ley Matemática», una *armonía* entre las partes de una cosa, corporal o espiritual, natural o artificial, real o abstracta.

Hacer un repaso y exposición de las distintas proporciones utilizadas en arquitectura a través de la historia resultaría largo y estaría fuera del alcance de este trabajo. De entre todas las proporciones, una inconmensurable, conocida como *proporción áurea*, es la que mayor admiración y aceptación ha tenido entre los artistas a través de todos los tiempos; por ello se tratará de la proporción geométrica que se ha mantenido con mayor y más creciente interés a través de los siglos: la *proporción áurea* o *Sección Áurea*.

Con esta denominación, la *Sección Áurea*, debida a Leonardo da Vinci, se conoce la proporción en que queda dividido un segmento que Euclides <sup>8</sup> enunció en su obra *Elementos* como: «Un segmento se divide en media y extrema razón cuando todo el segmento es a su parte mayor como ésta es a la menor».

Existen numerosos trabajos que apuntan que la proporción áurea era conocida en las culturas babilonias y asirias hacia el 2000 a.C., sin embargo no hay certeza de ello mediante documentos o pruebas suficientes históricas. El primer estudio formal, geométrico, sobre la proporción áurea se debe a Euclides.

De las obras que han llegado hasta nosotros, los *Elementos* constituye una base fundamental como tratado de geometría plana, que con pequeñas adaptaciones se ha mantenido vigente hasta el siglo XIX. Para Euclides, la geometría es la ciencia de las figuras en el espacio. La geometría Euclidiana, como base de la geometría descriptiva, puede considerarse como el pilar sobre el que descansa todo diseño que se realiza en un espacio arquitectónico. Con la utilización de esta herramienta que relaciona las magnitudes de las formas en el espacio, se desarrollan diseños arquitectónicos en los que su volumen, las superficies delimitadoras, etc., son fácilmente perceptibles por el hombre aumentando las sensaciones producidas por su uso y contemplación, y especialmente cuando estos diseños son sencillos y de formas regulares.

### 2.3. Los «Elementos» de Euclides

Para analizar la exposición de los teoremas de Euclides, en lo que a la *Sección Áurea* se refiere, recurrimos a la edición de Rodrigo Zamorano de 1576 <sup>9</sup>, con el título *Los seis primeros libros de la geometría de Euclides*, primera en lengua castellana (reproducido parcialmente en el anexo D.1) y a la edición de *Elementos* <sup>10</sup>, en castellano actual, con introducción de Luis Vega y traducción y notas de María Luisa Puertas Castaño .

En la comprensión de las expresiones literales que allí se utilizan es de suma

---

<sup>8</sup> Euclides de Alejandría (325-265 a.C.), matemático y geómetra griego. En su obra *Elementos* compiló las teorías de la proporción de Eudoxo de Cnido (actual Turquía 390-337 a.C.) y las aportaciones sobre poliedros regulares de Teeteto (Atenas 417-369 a.C.)

<sup>9</sup> (ref. [32])

<sup>10</sup> (ref. [10])

importancia asumir lo que sobre ellas indican:

- El profesor Jesús Ruiz Felipe <sup>11</sup>: «... las cantidades están representadas geoméricamente. Los números se reemplazan por segmentos; el producto se transforma en el área del rectángulo; el producto de tres números es un volumen; la suma de dos números se refleja en la prolongación de un segmento en una longitud igual a la del otro, y la resta en cercenar de un segmento la longitud del segundo. La división de un producto (un área) por un tercer número se realiza hallando un rectángulo que tenga como lado a este último y cuya área sea igual al producto dado, siendo entonces el otro lado el cociente buscado».

- El profesor Joseph C. Várilli <sup>12</sup>: «La regla y el compás usados por Platón y Euclides difieren de los instrumentos modernos en dos aspectos importantes. En primer lugar, "la regla no es una regla milimétrica", es decir, no posee calibraciones ni graduaciones de ningún tipo para cumplir la función secundaria de medir distancias: es simplemente un instrumento que permite trazar una línea recta entre dos puntos dados... En segundo lugar, el compás de Euclides puede trazar un círculo cuyo centro es un punto dado y que pasa por un segundo punto dado. El compás "moderno", confeccionado de metal (con o sin un travesaño para mayor rigidez) permite fijar el radio antes de aplicar su punto al centro del círculo deseado: con este compás podemos trazar un círculo con " un centro dado y un radio dado". Sin embargo, esta distinción es de menor importancia, ya que las primeras tres proposiciones del libro I de Euclides establecen la equivalencia entre los dos tipos de compás» <sup>13</sup>.

En la búsqueda de la proporción áurea a través de los Libros de Euclides seguiremos el camino señalado por Luca Pacioli en su libro: *La divina proporción*, que en el capítulo VII «Del primer efecto de una línea dividida según nuestra proporción» señala: *En la vigesimonovena del sexto se enseña a dividir de este modo una cantidad, habiéndose previamente descrito en la tercera definición del sexto cómo debe entenderse esta división. Aunque en su segundo, por la undécima, se demuestra cómo se divide la línea bajo esta misma virtud y fuerza, no mencionándose la proporción hasta que se pasa al quinto* <sup>14</sup>.

### 2.3.1. Libro II, proposición 11

En el grupo de Libros I-IV que tratan de la teoría elemental de la geometría plana, el Libro II, el más corto de los seis, recoge una serie de problemas antiguos tratados a modo de teoremas <sup>15</sup> y en el que se desarrolla el álgebra geométrica.

La primera vez que aparece la proporción áurea, sin llegar a nombrarla, en *Elementos* es en el Libro II, proposición 11 <sup>16</sup>, que dice:

---

<sup>11</sup> (ref. [23])

<sup>12</sup> (ref. [31])

<sup>13</sup> La utilización principal del compás era la de trasladar medidas y posteriormente, a partir de ellas, marcar círculos o arcos circulares.

<sup>14</sup> (ref. [21]), pp. 43-46

<sup>15</sup> (ref. [10]), cap. *introducción* de Luis Vega.

<sup>16</sup> (ref. [32]), Rodrigo Zamorano: *Los seis primeros libros de la geometría de Euclides*, folios 17 y 18 en anexo D.1 p. 133-134.

«Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la recta entera y una de sus partes sea igual —equivalente— al cuadrado del la parte restante»

Se trata de dividir la recta <sup>17</sup> AB, lado del cuadrado ABDC, figura [2.1], en dos partes mediante la localización de un punto T sobre ella, de manera que el cuadrado ABDC y el rectángulo construido, a partir de T, sobre ZIKC sean iguales (en área). Para ello se traza BE, donde E es el punto medio del lado AC del cuadrado ABDC, y con centro en E y radio EB se construye un arco de círculo desde B hasta la prolongación del lado AC, obteniéndose el punto Z. A partir de este punto y tomando como lado el segmento AZ se puede construir el cuadrado AZIT. Con el punto T obtenido la recta inicial AB queda dividida en dos partes desiguales: una *mayor* AT y otra *menor* TB.

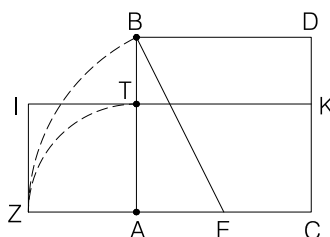


Figura 2.1: Los *Elementos*. Gráfico de la proposición 11, Libro II

Resulta, en esta división, que AB es el segmento *entero*, AT el el segmento *mayor* de la división y TB es el *menor* de la división así hecha.

La comprobación de la proposición de igualdad de áreas del cuadrado ABDC y el rectángulo ZIKC se puede realizar fácilmente mediante el teorema de Pitágoras, expuesto por Euclides en el Libro I proposición 47 <sup>18</sup>.

En la figura [2.1] se puede establecer en EAB que:

$$EB^2 = AE^2 + AB^2 \quad (1)$$

Por la construcción realizada  $EB = EZ$ , y por tanto  $EB^2 = EZ^2$ , y como resulta que  $EZ = AZ + AE$ , la expresión anterior quedará como:

$$EB^2 = (AZ + AE)^2 = AZ^2 + AE^2 + 2 \cdot AZ \cdot AE;$$

si  $2 \cdot AE = AC$  y  $AZ = AT$ , entonces:

$$EB^2 = AZ^2 + AE^2 + AC \cdot AT;$$

<sup>17</sup> En la antigüedad griega la palabra matemática *recta* se aplicaba en el sentido que actualmente se da al vocablo *segmento*.

<sup>18</sup> (ref. [32]), Rodrigo Zamorano: *Los seis primeros libros . . .*, folios 47 y 47v. en anexo D.3 pp. 131-132.

como  $AZ^2 + AC \cdot AT$  es el rectángulo  $ZC \cdot ZI$ ;

$$EB^2 = AE^2 + ZC \cdot ZI;$$

entonces, en el triángulo inicial EAB, en (1):

$$AE^2 + AZ \cdot ZI = AE^2 + AB^2;$$

simplificando el término  $AE^2$  resulta finalmente:

$$AB^2 = ZC \cdot ZI$$

con lo que queda probado que el área del cuadrado ABDC ( $= AB^2$ ) es igual al área del rectángulo ZIKC ( $= ZC \cdot ZI$ ).

De igual modo se puede comprobar que las figuras obtenidas por la división efectuada sobre AB en AT y TB, cuadrado AZIT y rectángulo TBDK son iguales. De esta manera AB ha quedado dividida, por el punto T, de modo que el área del rectángulo comprendido por la recta *entera* AB (o BD) y la parte *menor* BT es igual al área del cuadrado de lado la parte *mayor* AT.

Con esta construcción geométrica Euclides deja establecido que: la razón <sup>19</sup> entre las partes *entera* y *mayor*, y entre las partes *mayor* y *menor* están en igual proporción: es la conocida como *proporción áurea* <sup>20</sup>.

### 2.3.2. Libro VI, definición 3

En los Libros V-VI, Euclides trata la teoría generalizada de la proporción. En el Libro V se pasa de la teoría elemental de la geometría plana al campo de la teoría de la proporción. La teoría se refiere a las magnitudes como términos de la relación de proporcionalidad y debe entenderse que las magnitudes son abstracciones o idealizaciones de objetos geométricos: longitud en las líneas, áreas en las figuras planas y volúmenes en los sólidos. Sobre esta teoría de la proporción, en el Libro VI, y aplicada a la geometría plana, Euclides presenta una serie de leyes que relacionan los polígonos semejantes y de manera general las áreas. Algunos de los problemas expuestos en este Libro VI han sido tratados ya, de forma más elemental, en libros anteriores <sup>21</sup>.

En la definición 3 del Libro VI, se define <sup>22</sup>:

<sup>19</sup> En los *Elementos* de Euclides «...razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas», definición 3<sup>a</sup> del libro V (ref. [32]).

<sup>20</sup> Esta proporción entre relaciones geométricas aparece posteriormente en el libro IV proposición 10, en la que se construye un triángulo isósceles en el que los dos ángulos iguales son doble del tercero y la relación de los lados iguales al tercero están en la misma proporción. Es el llamado *triángulo Áureo*. Con esta proposición 10 del libro IV se inicia otra serie, de la 11 a la 14, sobre el pentágono regular, que es una figura fundamental, junto al dodecaedro, en la obra *Elementos*.

<sup>21</sup> (ref. [10]), cap. *introducción* de Luis Vega, p. 80.

<sup>22</sup> (ref. [32]), Rodrigo Zamorano: *Los seis primeros libros ...*, folio 96 en anexo D.1 p. 135.

«Se dice que una recta está dividida en extrema y media razón cuando la recta entera es a la parte mayor como ésta es a la parte menor»

Se trata de una definición que fija con claridad y precisión la significación de la *proporción áurea*, sobre la que se construye la teoría y que ha de admitirse sin demostración.

### 2.3.3. Libro VI, proposición 29

En este apartado se expone <sup>23</sup>:

«Sobre una recta dada acomodar un paralelogramo igual a un rectilíneo dado, y que exceda en una figura paralelograma semejante a uno dado»

Esta proposición 29, junto a las anteriores 27 y 28, tratan de la construcción de paralelogramos sobre un segmento inicial. Se demuestra las propiedades de estas figuras al añadir o restar otro paralelogramo semejante al inicial. Estas propiedades son una generalización del álgebra geométrica expuesta en el Libro II.

Como se dijo más arriba, Luca Pacioli señaló el camino a seguir en los Libros de Euclides para encontrar lo que denominó *proportio habens medium et duo extrema*, y señaló primeramente *En la vigesimonovena del sexto se enseña a dividir de este modo una cantidad . . .* A nosotros nos parece más clarificador, a efectos de este trabajo, comentar la siguiente proposición 30, que trata específicamente de la división de un segmento según la *Proporción*.

### 2.3.4. Libro VI, proposición 30

Su enunciado dice <sup>24</sup>:

«Dividir un segmento en extrema y media razón»

Esta proposición es un caso particular de las 27, 28 y 29. Dado el segmento AB se trata de dividir éste en media y extrema razón según la definición 3 de este Libro.

En la figura [2.2] se presenta la construcción ya realizada y que fué descrita en el apartado de la proposición 11 del Libro II, por lo que, al ser similar, se omite comentar su desarrollo. Allí quedó probado que el área del rectángulo cuya diagonal es BT es igual al área del rectángulo de diagonal TD. Si a estos dos cuadriláteros se les resta el rectángulo de diagonal TE, resultan dos figuras: el rectángulo BZ y el cuadrado AD, ambos iguales en superficie. Resulta que, según proporción 14 del Libro VI, los lados que comprenden ángulos iguales de los paralelogramos BZ y AD son inversamente proporcionales; y se puede establecer que:

<sup>23</sup> *Ibíd.*, folio 117 y 117v. en anexo D.1 p. 136 y 137.

<sup>24</sup> *Ibíd.*, folio 118 en anexo D.1 p. 138.

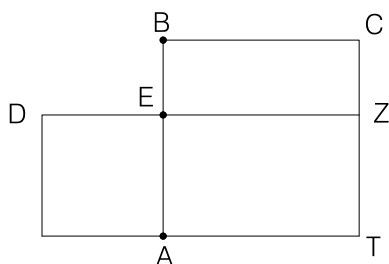


Figura 2.2: Los *Elementos*. Gráfico de la proposición 30, Libro VI

$$\frac{ZE}{ED} = \frac{AE}{EB}$$

como  $ZE = AB$  y  $ED = AE$ ,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB}$$

Habiéndose dividido la recta AB en media y extrema razón por el punto E. De nuevo Euclides da la *razón* de la igualdad de las *proporciones* entre la parte *entera* y la *mayor* y entre la parte *mayor* y la *menor*.

## 2.4. Álgebra de las proporciones

Según Vitruvio *la proporción es la conmensurabilidad de cada uno de los miembros de la obra y de todos los miembros de la obra mediante una determinada unidad de medida o módulo* (Libro I) <sup>25</sup>. Las proporciones, las comparaciones o igualdad de razones, que se atribuyen a Pitágoras, han sido desde la antigüedad objeto de estudio en el campo del arte en cuanto a técnica para la resolución del espacio en relación al hombre, capaz de percibir el ritmo y belleza de las obras.

Una proporción algebraica se entiende como la relación entre las dimensiones de una o varias cosas y muestra el tamaño relativo entre ellas o la correspondencia de una parte con el todo. Los tipos de proporciones, entre magnitudes homogéneas, pueden ser: aritmética, armónica y geométrica <sup>26</sup>.

a) Una *proporción aritmética* de tres magnitudes, números enteros, es la razón por su diferencia. Dados tres elementos a, b, c, están en *proporción aritmética* cuando se verifica que:

$$b - a = c - b;$$

y su *media aritmética* es b:

$$b = \frac{a + c}{2};$$

<sup>25</sup> Vitruvio Polión, Marco. *De architectura*. Tratado de arquitectura, en diez libros, de la antigüedad greco-latina escrito hacia el 15 a.C. (ref. [30]).

<sup>26</sup> (ref. [26]), pp. 3-4.

b) En una *proporción armónica* tres magnitudes están relacionadas según:

$$\frac{b-a}{a} = \frac{c-b}{c}$$

y su *media armónica* b es:

$$b = \frac{2ac}{a+c}$$

Esta proporción es la más comúnmente utilizada en arquitectura, tanto en oriente como en occidente. Dada su importancia se comentará más adelante.

c) La *proporción geométrica* es la razón de magnitudes por su cociente. En el caso de cuatro magnitudes homogéneas, están en *proporción geométrica discontinua* cuando la igualdad de razones cumpla:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

y en el caso particular de  $b=c$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$$

las tres magnitudes estarán en una *proporción geométrica continua*, siendo la *media geométrica*:

$$b = \sqrt{ad}$$

Cuando las magnitudes a comparar son dos, a y b, y se puede establecer que:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

siendo las magnitudes  $(a+b)$  y  $b$  los extremos de la proporción, es decir la parte *entera* o total y la parte *menor*, y  $a$  la media geométrica o parte *mayor* de la proporción establecida; y la expresión anterior se puede expresar como:

$$\frac{\textit{entera}}{\textit{mayor}} = \frac{\textit{mayor}}{\textit{menor}}$$

de esta forma se expresa la *proporción geométrica continua* que Euclides estableció al dividir un segmento en *media y extrema razón*.

Algebráicamente una *proporción geométrica continua* se expresa como:

$$p(a, b) = \frac{\textit{máximo}(a, b)}{\textit{mínimo}(a, b)}$$

que cuando  $a > b$ , la proporción directa establece que:  $a = k \cdot b$ , siendo  $k$  una constante numérica para cualquier valor que se adopte en una de las dos magnitudes comparadas.

Basándonos en las consideraciones expuestas sobre el álgebra de las proporciones, su significado e interpretación matemática, se expone a continuación las proporciones más significativas, que no las únicas, aplicadas en el arte y en lo que nos ocupa aquí, en el campo de la Arquitectura: La proporción del cuadrado, la *proporción áurea*, y la figura del *rectángulo áureo*.

## 2.5. La proporción del cuadrado

La proporción más antigua conocida deriva de las propiedades de la diagonal del cuadrado: el (*diagon*). Es una de las proporciones más famosas en matemáticas ya que a partir de su estudio, por la Escuela Pitagórica, se descubrieron las magnitudes inconmensurables, los números irracionales. La figura del cuadrado ha sido fundamental en el diseño de obras arquitectónicas de todos los tiempos, no tanto por su forma en sí como por sus propiedades geométricas generadoras de rectángulos. Éstos, formados a partir de la diagonal del cuadrado, se conocen como *rectángulos dinámicos*.

Las proporciones de él derivadas aparecen en la construcción de plantas y alzados de edificios en la época de Grecia clásica (s. VI-II a.C.), en la arquitectura bizantina y románica. Vitruvio, en el libro VI capítulo tercero <sup>27</sup>, describe la forma que debe tener un tipo de atrio con estas proporciones, la tercera clase: «cuando su anchura quede fijada en un cuadrado de lados iguales y trazando en el mismo cuadrado una línea diagonal mida lo mismo que la longitud del atrio».

En las obras arquitectónicas medievales el cuadrado se consideró la base, la unidad, a partir de la cual se desarrollan rectángulos, por adición, sustracción o división, obteniéndose figuras de distintas proporciones *ad quadratum*, como recoge en sus cuadernos de viajes Villard de Honnecourt <sup>28</sup>.

Sebastiano Serlio <sup>29</sup>, en el s. XVI, llegó a definir siete proporciones derivadas del cuadrado: el *cuadrado perfecto*; la *figura sesquicuarta*, del cuadrado más un cuarto; la *figura sesquitercera*, del cuadrado más un tercio; el *diagon*, la proporción diagonal; la *figura sesquilatera*, del cuadrado más un medio; la *proporción superbipartiens tertias*, del cuadrado más dos tercios; y la *proporción doble*, de dos cuadrados.

Son numerosos los ejemplos de aplicación de estas proporciones del cuadrado. A modo ilustrativo, mencionamos la aplicación de la proporción diagonal que se encuentra en la planta de la Sacristía Vecchia de San Lorenzo (Venecia), de Filippo Brunelleschi, construida a principios del s. XV, en que la planta rectangular se desarrolla a partir de la diagonal del cuadrado, en el que éste es la proyección circunscrita de la cúpula.

La construcción de la proporción básica a partir del cuadrado se realiza con regla y compás. En esta figura geométrica, de lado  $l$  y diagonal  $d$ , aplicando el teorema

<sup>27</sup> (ref. [30]), pp. 149-153.

<sup>28</sup> (ref. [17])

<sup>29</sup> (ref. [27]), Sebastiano Serlio: *Libro primo (-quinto) d'architettura*. Ed. Francesco de Franceschi. 1566. Reproducción parcial en anexo D.2, p. 142.



de Pitágoras se puede establecer la relación *armónica*:

$$d^2 = 2 \cdot l^2; \quad \text{operando se tiene: } d = l\sqrt{2}$$

y la proporción resulta:

$$\text{diagonal} = \text{lado}\sqrt{2}$$

En base a esta relación lado-diagonal del cuadrado se pueden construir figuras rectangulares en las que la proporción entre sus lados  $a$  y  $b$  estén en dicha proporción. En general, las proporciones entre dos magnitudes se denotan como:

$$p(a, b) = \frac{\text{máximo}(a, b)}{\text{mínimo}(a, b)}$$

que será siempre mayor que 1, y solo igual en el caso del cuadrado <sup>30</sup>.

Para la construcción geométrica de un rectángulo de proporción  $\sqrt{2}$  se parte de un cuadrado unitario ABCD, cuya diagonal es  $d = AC$ , figura [2.3].

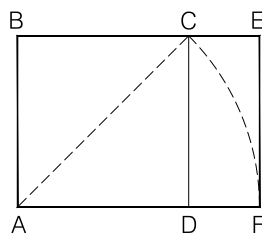


Figura 2.3: Proporción lado diagonal del cuadrado

Se traza un arco de círculo, con centro en A y radio  $d$ , desde el punto C hasta la prolongación del lado AD y se obtiene el punto F; el rectángulo construido a partir de la diagonal FB, es decir el ABEF, es un rectángulo *armónico* de proporción  $\sqrt{2}$ . Si en este rectángulo el lado mayor es BE y el menor AB, la proporción se expresa :

$$p(a, b) = \sqrt{2} \quad \text{que se cuantifica como: } p(a, b) = 1,414\dots$$

Una propiedad especialmente útil de esta figura resultante es que se puede generar otro rectángulo con idéntica proporción al dividirlo en dos partes iguales por su lado mayor. También se obtiene un rectángulo  $p(a, b) = \sqrt{2}$  cuando se duplica por su lado mayor.

## 2.6. La «proporción áurea»

Como vese viene diciendo, la búsqueda de la belleza es una constante del hombre a trves de los tiempos y encontrar su secreto ha sido el objetivo de innumerables

<sup>30</sup> Estas proporciones se denominan *estáticas* cuando  $p(a, b)$  es un número entero y *dinámicas* cuando están expresadas por números irracionales.

investigaciones en todas las artes. En esa búsqueda de la obra perfecta, ha sido incesante la investigación de relaciones matemáticas de las cosas con el todo: «Las matemáticas y la representación gráfica han sido históricamente las que han suministrado los instrumentos para el control previo de la forma, que en cada época ha sido parte esencial del proceso de diseño arquitectónico» <sup>31</sup>.

Las proporciones, la armonía de los edificios, ha tenido como base fundamental del diseño el trazado a partir de figuras geométricas —planas— y por tanto las relaciones entre los elementos constituyentes de esas figuras. Los polígonos regulares esenciales en el diseño han sido el triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono, el exágono, el octógono y el decágono, inscritos o circunscritos en la circunferencia, y el rectángulo <sup>32</sup>.

A partir de un cuadrado se pueden construir rectángulos de proporciones armónicas como el descrito en el epígrafe anterior, en base al lado y la diagonal (proporción  $1 : \sqrt{2}$ ). Otro rectángulo posible a partir del cuadrado se obtiene al dividir éste en dos rectángulos iguales y al abatir la diagonal de uno de ellos sobre un lado del cuadrado se obtiene el lado mayor de un rectángulo: el *auron*.

Encontramos aplicaciones arquitectónicas con esta proporción desde tiempos remotos. La Gran pirámide de Guiza (Keops), construida hacia 2700 a.C., presenta la proporción en la geometría de la forma exterior que la contiene y en salas interiores, lo que hace pensar que sus constructores conocían de alguna manera la proporción *auron*. Se piensa que de Egipto pasó a Grecia; Pitágoras tomó la figura del pentágono como distintivo para su Escuela y en esta figura está la proporción *auron* entre todos sus elementos, lados y diagonales. En Platón, en su *Timeo*, también se encuentran referencias. Es en el periodo de la Grecia clásica cuando encontramos estudios formales teóricos sobre las relaciones geométricas entre las partes y el todo de una cosa, magnitud finita o figura regular. A partir de Euclides se desarrolla la idea de *inconmensurabilidad* de determinadas magnitudes, primeramente la derivada de la proporción diagonal del cuadrado, comentada más arriba, y con la proposición Euclidiana de división de un segmento en *media y extrema razón*, también inconmensurable, quedó establecida una proporción que, dada su bondad, se la ha conferido propiedades de carácter místico y filosófico. En Roma, es con Vitruvio <sup>33</sup> donde se encuentran referencias a esta proporción.

En el s. XIII, es en el manuscrito de Villard de Honnecourt donde aparece nuevamente referencia a la proporción *áurea* representada en un dibujo de un rectángulo *áureo* sobre la imagen de una oveja <sup>34</sup>.

Las teorías de las proporciones inconmensurables fueron nuevamente objeto de estudio en el Renacimiento. De todas las obras publicadas en ese periodo sobre proporciones geométricas la que más difusión ha tenido es el de Luca Pacioli <sup>35</sup>, una compilación de conocimientos geométricos antiguos, en la que muestra su admiración

---

<sup>31</sup> (ref. [22]), p. 18.

<sup>32</sup> (ref. [28]), pp. 188-189.

<sup>33</sup> (ref. [30])

<sup>34</sup> (ref. [17]), reproducción en el anexo D.5, p. 146.

<sup>35</sup> (ref. [20])

por la proporción *auron* que llama *Divina Proportione*, y en la que llega a enumerar en trece los efectos de la utilización de la proporción que considera perfecta y divina.

Sebastiano Serlio <sup>36</sup>, entre otros, retoma el estudio del cuadrado y de los rectángulos derivados de él para la aplicación en el diseño arquitectónico. La importancia de la *proporción áurea* también se refleja en obras de Leonardo da Vinci y de Alberto Durero <sup>37</sup> principalmente. Después de algunos siglos, en el XIX reaparece como canon de belleza en obras de pintores como Cézane y en el s. XX destaca Le Corbusier en el estudio de las proporciones geométricas, el *Modulor*, en base a trazados sencillos con regla y compás.

Estas proporciones realizadas sobre objetos o magnitudes de forma sencilla con *regla y compás* ya fueron descritas en apartados anteriores dedicados a los *Elementos* de Euclides. A continuación exponemos aquellas construcciones geométricas y sus razones de una manera que podríamos llamar actualizada, en el sentido que su descripción se realiza en un lenguaje matemático: el álgebra.

Como quedó visto más arriba, las descripciones geométricas euclidianas, en que las proposiciones se muestran como cuestiones puramente geométricas, se pueden expresar algebraicamente mediante la ecuación de una proporción geométrica continua. Dadas dos magnitudes homogéneas  $a$  y  $b$ , y entre ellas  $a > b$ , denominaremos en adelante a la magnitud total suma de  $a$  y  $b$  como parte *entera*, a la magnitud  $a$  como parte *mayor* y a la  $b$  como parte *menor*. Estos dos elementos están en una proporción geométrica continua si entre ellos se verifica la igualdad de razones:

$$\frac{\textit{entera}}{\textit{mayor}} = \frac{\textit{mayor}}{\textit{menor}}$$

Esta proporción entre razones se puede calcular matemáticamente.

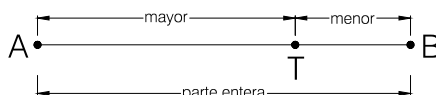


Figura 2.4: Segmento dividido según *media y extrema razón*

En la figura [2.4] se presenta un segmento AB de magnitud  $X$  como *parte entera*; en la división de este segmento según la proporción Euclidiana *media y extrema razón* la parte *mayor* AT es 1 y la parte *menor* restante, BT, será  $X - 1$ ; entonces la proporción de más arriba se puede escribir como:

$$\frac{\textit{entera}}{\textit{mayor}} = \frac{\textit{mayor}}{\textit{menor}} \quad \rightarrow \quad \frac{X}{1} = \frac{1}{X - 1};$$

conocido que dos fracciones son equivalentes cuando al multiplicar sus términos en cruz se obtiene el mismo resultado, se tiene:

<sup>36</sup> (ref. [27]), reproducción en anexo D.2, p. 142.

<sup>37</sup> (ref. [9]), Estudio del trazado de nuevas curvas, de espirales, con regla y compás, entre las que destaca una conocida como: espiral de Durero. Es una espiral construida sobre una figura básica, que se repite reiterativamente, en base a *rectángulos áureos* y la sucesión de Fibonacci.

$$X(X - 1) = 1; \quad \text{o lo que es igual: } X^2 - X - 1 = 1;$$

ecuación de segundo grado con dos soluciones de las que obviamente solo tiene sentido la positiva <sup>38</sup>:

$$X = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \text{que se cuantifica como: } X = 1,618\dots$$

Si la ecuación planteada es la relación entre los segmentos en que se ha dividido  $AB$ , esta relación será siempre la misma cualquiera que sea el valor fijado para  $AB$ , es decir, la proporción así obtenida, la *proporción áurea*, será siempre la misma con independencia del segmento *entero* elegido.

La *proporción áurea* es conocida actualmente con la letra griega  $\Phi$ ; esta denominación es debida al matemático Mark Barr que la propuso, hacia 1900, en honor a Fidias (arquitecto del Partenón de Atenas y el más famoso escultor de la antigua Grecia) por ser la primera letra de su nombre griego:  $\Phi\epsilon\iota\delta\acute{\iota}\alpha\varsigma$ .

La proporción geométrica establecida inicialmente se podrá expresar como:

$$\frac{\textit{entera}}{\textit{mayor}} = \frac{\textit{mayor}}{\textit{menor}} = \Phi;$$

y en la ecuación planteada es evidente que siempre se verificará que:

$$\text{si: } \textit{entera} = 1 \quad \rightarrow \quad \textit{mayor} = \frac{1}{\Phi}; \text{ y}$$

$$\text{si: } \textit{mayor} = 1 \quad \rightarrow \quad \textit{entera} = \Phi.$$

La construcción gráfica para dividir un segmento en *media y extrema razón* es sencilla con instrumentos básicos de dibujo como la regla y el compás. Dados dos puntos sobre una recta, un segmento, de magnitud cualesquiera, se procede de la siguiente manera:

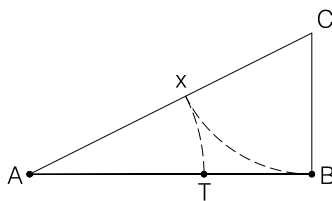


Figura 2.5: División de un segmento en *media y extrema razón*

Sobre el segmento  $AB$  de la figura [2.5], se traza una recta perpendicular por  $B$  y con centro en  $B$  se traza un arco de radio  $AB/2$  hasta que corta a esa perpendicular y se obtiene el punto  $C$ . Se une con una recta el punto  $C$  con el extremo  $A$  del segmento a dividir. Un círculo con centro en  $C$  y radio  $CB$  cortará a esa recta en  $X$ , y finalmente, con centro en el extremo  $A$  se traza un arco de radio  $AX$  hasta que corte

<sup>38</sup> (ref. [32]), En el libro V, definición 3<sup>a</sup>, Euclides deja establecido que «Una razón es determinada relación entre dos magnitudes homogéneas».

al segmento original AB. El punto T así obtenido es la división de un segmento *entero* AB en *media y extrema razón* con AT como parte *mayor* y BT como parte *menor*.

Si el segmento es de magnitud unidad,  $AB=1$ , se tiene que:

$$BC= CX= 1/2, \text{ por tanto,}$$

$$AX= AT= (\sqrt{5} - 1) - 1/2$$

y tenemos la *proporción geométrica continua*:

$$\frac{1}{\text{mayor}} = \frac{\text{mayor}}{\text{menor}} = \Phi;$$

y se puede establecer, entre las partes del segmento *entero* AB, la proporción directa por la constante  $\Phi$ :

$$\text{mayor} = \Phi \cdot \text{menor}.$$

### 2.6.1. El «rectángulo áureo»

Una de las figuras más usadas en pintura y arquitectura es el *rectángulo áureo*. Se conoce con esta denominación al rectángulo en el que la relación entre sus lados mayor y menor están en *proporción áurea*; es un rectángulo dinámico, es decir:

$$p(a, b) = \Phi.$$

Conocido el lado mayor, se puede construir un *rectángulo áureo* fácilmente con el procedimiento descrito en el apartado 2.6 La «proporción áurea» (p. 17).

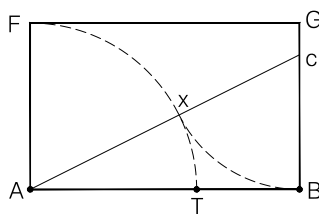


Figura 2.6: Construcción de un *rectángulo áureo* conocido su lado mayor

A partir de la división realizada del segmento AB en *media y extrema razón* por el punto T, fig. [2.6], se traza por A una recta perpendicular al segmento AB y con centro en A y radio la parte *mayor* AT se traza un arco desde T hasta la perpendicular trazada, obteniéndose el punto F. Resulta que BF es la diagonal de un rectángulo, el AFGB, que es un *rectángulo áureo* de lado *mayor* AB y lado *menor* AD. En este se verifica que:

$$p(a, b) = \frac{\text{mayor}}{\text{menor}} = \frac{AB}{AD} = \Phi.$$

En ciertos casos resulta útil construir el *rectángulo áureo* a partir de su lado menor, y en este caso se parte de la figura de un cuadrado con ese valor del lado.

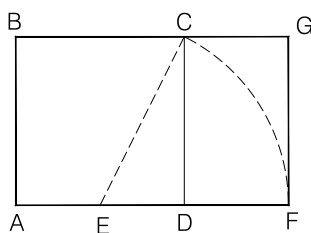


Figura 2.7: Construcción de un *rectángulo áureo* conocido su lado menor

En la figura [2.7] está representado un cuadrado ABCD de lado el lado menor del rectángulo buscado. Tomando como centro E, punto medio de uno de sus lados, se traza un arco de radio EC desde C hasta la prolongación del lado AD. El punto F así obtenido y el punto B del cuadrado inicial forman la diagonal de un rectángulo, el ABGF, y éste es un *rectángulo áureo* en el que se verifica la *proporción áurea* entre sus lados:

$$p(a, b) = \frac{\text{mayor}}{\text{menor}} = \frac{AF}{AB} = \Phi.$$

Se puede verificar la *proporción áurea* en el rectángulo, de esa manera construido, si se toma el cuadrado originario ABCD de lado igual a 2. El punto E, que divide por mitad al lado AD, dista 1 de A y de D. Como ED=1 y DC=2, la hipotenusa de EDC, EC, valdrá  $\sqrt{5}$ ; luego:

$$\text{si: } AF = AE + EF = AE + EC,$$

el lado *mayor* AF será igual a  $1 + \sqrt{5}$  y el lado *menor* AB será igual a 2; y su proporción resulta:

$$p(a, b) = \frac{\text{mayor}}{\text{menor}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

que es el número áureo  $\Phi$ , valor numérico de la *proporción áurea*, como quedó dicho en el apartado 2.6 sobre La «proporción áurea».

Entre las muchas propiedades de este tipo de proporción en el rectángulo, se pueden destacar, por su interés en este Trabajo:

- Son una función continua, figura 2.8(a), y la proporción se mantiene invariante entre rectángulos semejantes, figura 2.8(b). Es continua porque para cualquier valor que se tome en el segmento inicial, el *mayor* o el *menor*, mediante las construcciones vistas más arriba, siempre se obtiene un rectángulo con las mismas proporciones; y es invariante al existir una única transformación que lleva de un rectángulo a otro, de forma constante, y que mediante cambios de escala

no se modifica la proporción entre sus lados ( $p(a, b) = p(\lambda a, \lambda b)$ ).

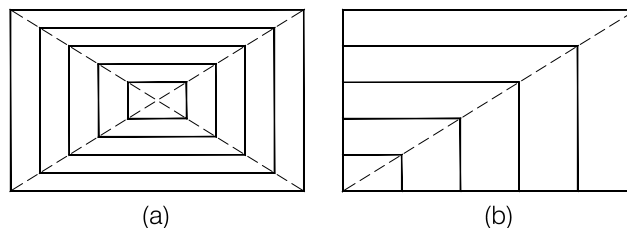


Figura 2.8: *rectángulo áureo*: a) proporción continua  
b) proporción invariante por semejanzas

- Si dentro de un *rectángulo áureo* se construye un cuadrado a partir de su lado menor, la diferencia entre ambos también resulta un *rectángulo áureo*. En la figura [2.9], en el *rectángulo áureo* ABCD está inscrito un cuadrado FECD de lado CD igual al lado menor del rectángulo; la diferencia entre ambos es el rectángulo ABEF de proporción  $p(a,b) = \Phi$ .

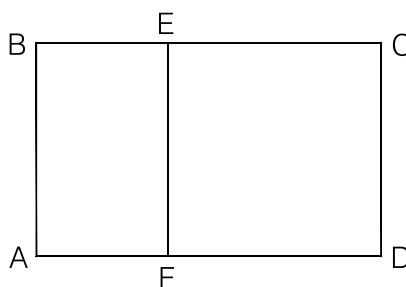


Figura 2.9: *rectángulo áureo* por sustracción de un cuadrado a un *rectángulo áureo*

- Si en los dos rectángulos obtenidos anteriormente, el ABCD y el ABEF, trazamos sus diagonales BD, en el inicial y AE en el resultante, se observa que estas diagonales son perpendiculares entre sí; su punto de intersección está señalado en la figura [2.10] como O. Esto sucede igualmente al elegir el otro par de diagonales. Ahora, si al rectángulo ABEF le restamos un cuadrado de lado igual a su lado menor y se repite el proceso de dibujar diagonales resulta que también son perpendiculares entre sí y se cortan en el mismo punto anterior O. Este proceso constructivo se puede repetir indefinidamente y siempre se obtendrá la propiedad de perpendicularidad de las diagonales y todas tendrán el mismo punto O de intersección.
- De la propiedad anterior se puede extraer otra: el *rectángulo áureo* es el único en el que al prolongar una diagonal, ésta contiene el mismo *rectángulo áureo* colocado verticalmente y adyacente por su lado *menor*.
- Otra propiedad muy interesante del *rectángulo áureo* resulta de la relación de





$$p(a, b) = \frac{\text{mayor}}{\text{menor}} = \frac{OA}{AC} = \Phi,$$

y se puede establecer que cualquier ángulo de  $36^\circ$  inscrito en una circunferencia abarca un arco cuya cuerda es el lado del decágono <sup>39</sup>.

- Esta relación del *rectángulo áureo* y ciertos polígonos también se observa con el pentágono regular. En ese pentágono si sobre una de sus diagonales, AB de la figura [2.12], se traza una recta perpendicular por A, y sobre esta se lleva el segmento BD igual al lado del pentágono, resulta que AD es la diagonal de un *rectángulo áureo*.

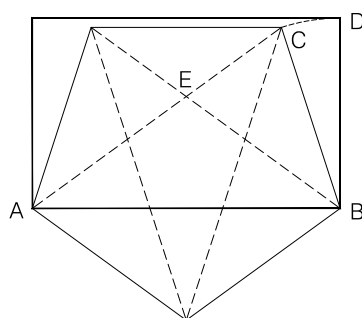


Figura 2.12: Relación del *rectángulo áureo* con la diagonal y el lado de un pentágono regular

y se verifica, al igual que los casos anteriores, que:

$$p(a, b) = \frac{\text{mayor}}{\text{menor}} = \frac{AB}{CD} = \Phi,$$

- Resulta inmediata la relación existente entre el *rectángulo áureo* y los dos tipos de triángulos isósceles que se obtienen en el pentágono regular al trazar sus diagonales. En los cinco triángulos que tienen como base el lado del pentágono y altura el vértice opuesto, como el ABC de la figura [2.12], con los ángulos iguales de  $36^\circ$  y el desigual de  $72^\circ$ , la razón del lado *mayor* AB o AC y el lado *menor* BC es la *proporción áurea*. En los otros cinco triángulos isósceles formados, como el ABE en la figura, con los ángulos iguales de  $36^\circ$  y el desigual de  $108^\circ$ , la razón del lado *mayor* AB y el *menor* BE o AE, es el número áureo; en ambos tipos de triángulos se verifica que:

$$p(a, b) = \frac{\text{mayor}}{\text{menor}} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BE} = \Phi,$$

Estos triángulos, por las proporciones entre sus lados desiguales, se conocen como *triángulos áureos*.

<sup>39</sup> (ref. [26])

## 2.7. Traza de un «rectángulo áureo» con «cinta y cordel»

Se puede trazar un «rectángulo áureo» con la ayuda de útiles sencillos y accesibles en obra como son la «cinta y cordel».

Tomando como base una determinada unidad de medida, se puede dividir un cordel en doce partes (12) iguales a la unidad mediante anudar la misma cuerda. A partir de estas divisiones hechas en la cuerda es posible trazar un triángulo pitagórico de lados 3, 4 e hipotenusa 5 unidades o divisiones, trazado conocido desde la antigüedad. El procedimiento es el siguiente (figura [2.13]):

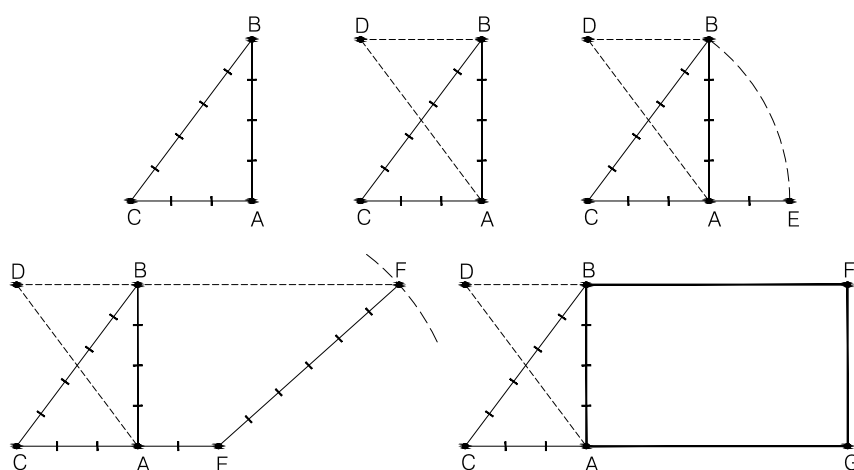


Figura 2.13: Traza del «rectángulo áureo» con «cinta y cordel»

- Se traza un triángulo pitagórico CAB.
- Sobre este el triángulo se traza otro idéntico sobre el lado AB del primero y se obtiene ABD.
- Con centro en C y radio la hipotenusa CB se traza un arco hasta la prolongación del lado CD en el punto E. Esta prolongación será de 2 unidades.
- Con centro en E y radio 6 divisiones, la mitad de toda la cuerda, se traza un arco hasta que corte a la prolongación del lado DB, obteniéndose el punto F.
- Se repite el procedimiento ahora prolongando el lado DB del segundo triángulo y con idénticos pasos se obtiene sobre la prolongación de CA el punto G.

El rectángulo cuyas diagonales son AF o BG resulta un *rectángulo áureo*. Este procedimiento es sencillo y factible de utilización por maestros albañiles en el replanteo de edificaciones o parte de ellas que tengan relacionadas sus partes según la *proporción áurea*.

# 3

## Forma de la bóveda extremeña

*Los cánones de la geometría y de las proporciones tratan de la cantidad común de dos medidas relacionadas que puede ser numérica o geométrica. De ahí que el principio de la proporción ideal -en una bóveda- incumbe también a la forma visual.*

### 3.1. Preámbulo

El resultado de una primera observación de la bóveda extremeña es que está formada por cuatro superficies que se desarrollan por el espacio cubierto desde los cuatro muros verticales que la delimitan y hacia arriba ganando altura, hasta el punto medio de ese espacio cubierto, la clave. Las superficies, que se inician todas con la misma forma <sup>1</sup> y a la misma altura en los muros, claramente no son planas, ni de geometría simple; la forma que se aprecia del abovedamiento es el resultado de la intersección en el espacio de las superficies de dos toroides <sup>2</sup>. Estas superficies de revolución, que se describirán en este capítulo y se comprobará su veracidad más adelante, están generadas por curvas planas cerradas elípticas que giran alrededor de un eje de revolución que también es otra curva plana cerrada elíptica.

Las intersecciones de las superficies de los toroides con los muros verticales se denominarán en adelante aristas *generatrices*, la intersección de las superficies entre sí, dentro del espacio cubierto, se denominarán aristas *diagonales* y las curvas por la que se desarrollan las secciones del toroide se denominarán *directrices*.

En los siguientes apartados se proponen métodos de diseño puramente gráficos basados en los útiles clásicos de dibujo: regla y compás. Las definiciones geométricas resultantes se tomaron como hipótesis de la forma de la bóveda extremeña, de planta cuadrada, y esta geometría teórica se comprobará más adelante con el análisis de los resultados obtenidos de las bóvedas reales topografiadas *in situ*.

---

<sup>1</sup> En el sentido que se da en (ref. [14]): Cualquiera de los arcos desde donde nacen los témpanos de una bóveda por arista.

<sup>2</sup> (ref. [12]), cap. I: Definición, p. 19.

### 3.2. Definición geométrica con «regla y compás»

Como se dijo más arriba, la bóveda Extremeña está formada por curvas *generatrices* que partiendo de los muros se desarrollan en el espacio a través de curvas *directrices*. Ambas resultaron elípticas y con los ejes mayor y menor que las definen en *proporción áurea*.

La construcción o definición geométrica de las curvas *directrices* se puede resolver gráficamente con «regla y compás»<sup>3</sup>, teniendo siempre presente las aclaraciones sobre este método expuestas en el apartado 2.3 (página 9).

El método gráfico para la definición de los dos tipos de curvas se describen en las siguientes secciones:

#### 3.2.1. Curvas directrices

La elipse directriz para un habitáculo cuadrado a abovedar será aquella que tenga como semieje mayor la parte *entera* de la dimensión del vano y como semieje menor la parte *mayor* de ese segmento de la división realizada según la proporción *media y extrema razón* del vano.

En la figura [3.1], en un habitáculo cuadrado de vano  $l$  a cubrir y sobre el eje vertical que pasa por su centro, se ha colocado el origen de un sistema de referencia; a partir de éste se traza una recta horizontal, que será perpendicular a dos muros enfrentados y los atravesará por mitad. Desde el punto A de la figura, y sobre la recta trazada, se lleva una magnitud igual a  $l$  de manera que el segmento AB representa la dimensión del vano.

La división de un segmento en *media y extrema razón* quedó expuesta en el apartado 2.6 La «proporción áurea», página 17. En la figura [3.1], Sobre un recta perpendicular al punto B y desde éste se lleva BC, igual a  $AB/2$ ; sobre la diagonal CA del triángulo rectángulo ABC se marca el punto X a una distancia de C igual al cateto BC. Sobre el lado AB del triángulo se lleva, a partir de A, el arco de radio AX obteniéndose el punto T. Como quedó dicho, la división del segmento AB en dos partes, la AT y BT, resulta con una relación entre el vano o parte *entera* AB, la parte *mayor* AT y la parte *menor* BT que es la proporción armónica *áurea* y tiene como valor  $\Phi$ .

Una vez realizada la división del segmento, del vano o parte *entera*, se lleva a partir del origen A y sobre el eje vertical Z, la parte *mayor* AT y se obtiene el punto E. Las elipses directrices de los toroides que forman el abovedamiento, ambas iguales, quedan definidas, en los planos XZ e YZ, por los semiejes mayor AB y menor AE verificándose:

---

<sup>3</sup> El método de la «regla y compás», desde la antigüedad griega, ha estado implícito en la resolución de problemas comprometidos con la construcción de elementos geométricos y figuras planas. Es el método más relevante en el procedimiento de construcción y álgebra geométrica utilizado por Euclides en los *Elementos*.

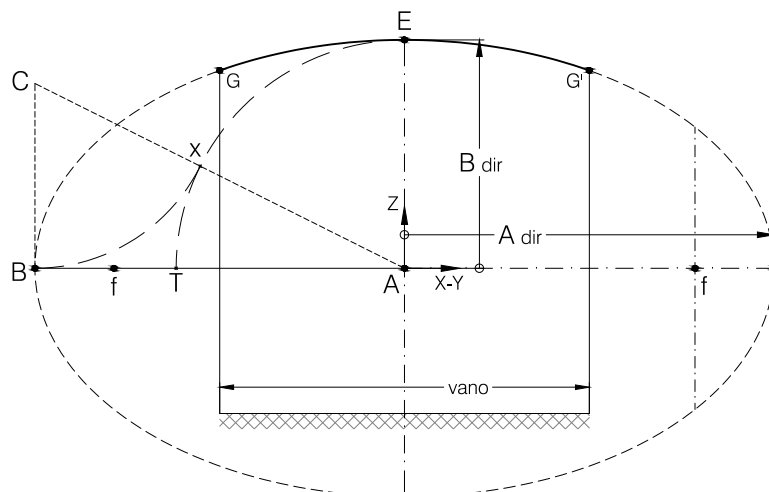


Figura 3.1: Construcción geométrica de las curvas directrices de los toroides con «regla y compás».

$$p(A_{dir}, B_{dir}) = \frac{A_{dir}}{B_{dir}} = \frac{AB}{AE} = \Phi$$

Para dibujar la elipse directriz basta con conocer la posición de sus focos, puntos del eje mayor y equidistantes al origen, desde los que la suma de las distancias a cualquier punto de la elipse es constante. Para ello, desde el punto E, intersección de las dos directrices y clave de la bóveda, se traza un arco de radio igual a la parte *entera* AB, que cortará a los ejes horizontales AX y AY en dos puntos señalados en la figura con *f*. Éste punto, el foco, es un vértice del triángulo rectángulo EA*f* y por lo tanto se verificará el teorema de Pitágoras de la forma:  $Af^2 = AB^2 - AE^2$ .

Si por cualquiera de los focos se traza una recta perpendicular al eje mayor de la elipse, la cuerda vertical que se obtiene es el *latus rectum* de dicha elipse y el valor de este segmento es:

$$latus\ rectum_{dir} = \frac{2 \cdot B_{dir}^2}{A_{dir}}$$

Con esta resolución gráfica quedan definidas las directrices por la que se desarrollan las superficies generadoras de la bóveda —que más adelante se dirá su replanteo— desde dos puntos entre muros opuestos señalados en la figura [3.1] como G y G<sup>4</sup>. La diferencia de cota entre estos puntos y el más alto de las directrices E, se conoce como *retumbo*<sup>5</sup> de la bóveda.

<sup>4</sup> La altura de los puntos G y G' respecto del origen del sistema de referencia coincide con la altura de los seis triángulos que constituyen un hexágono regular inscrito en un círculo de radio igual a AE ( $B_{dir}$ ). También, si el exágono de dibuja con dos lados opuestos paralelos a los ejes horizontales X e Y, el lado superior de ese exágono está sobre la recta GG', por lo que bastaría prolongar ese lado para obtener los puntos G y G' sobre los muros. La construcción del hexágono puede realizarse con el procedimiento descrito en *Elementos* en el libro IV proposición 15, reproducido en el anejo D.1, páginas 139 y 140

<sup>5</sup> Esta diferencia de cotas se conoce peralte y también como *resubido* (ref. [15], p. 216), resultado, en el replanteo, de la operación de *resubido*, es decir, de tirar hacia arriba, hacia la clave, la intersección de las dos cuerdas instaladas entre los puntos más altos de dos aristas perimetrales opuestas. En (ref. [14]), p. 246, se llama *empino* a la altura de la clave que levanta sobre los arcos.

En esta construcción, para un vano de longitud  $l$ , representada por AB, se comprueba que:

Dividida la longitud  $l$  del vano en *media y extrema razón*, el semieje mayor de la elipse directriz  $A_{dir}$  es igual a la parte *entera* y el semieje menor  $B_{dir}$  a la parte *mayor* de la luz del vano, y por tanto:

$$entera = A_{dir} = l; \quad y$$

$$mayor = B_{dir} = \frac{l}{\Phi}$$

La diferencia entre los semiejes *directrices* y el *latus rectum* de la elipse están relacionados según:

$$menor = A_{dir} - B_{dir} = \frac{latus\ rectum_{dir}}{2}$$

El *latus rectum* de la elipse directriz es el doble de la parte *menor* BT del vano de la bóveda:

$$menor = BT = \frac{B_{dir}^2}{A_{dir}}$$

El rectángulo que inscribe a la elipse directriz es un *rectángulo áureo*.

$$p(2 \cdot A_{dir}, 2 \cdot B_{dir}) = \frac{2 \cdot A_{dir}}{2 \cdot B_{dir}} = \Phi.$$

Esta definición geométrica de las curvas *directrices* y *generatrices* se desarrolla matemáticamente en el anexo A, cuadro A.1 (pág. 70) donde se muestran las magnitudes teóricas para distintas dimensiones de habitáculos cuadrados abovedados.

### 3.2.2. Curvas generatrices

La forma y dimensiones de las curvas generatrices, que desde los muros hasta la clave constituyen la bóveda, están directamente relacionadas con la geometría de las curvas directrices.

La elipse generatriz para un habitáculo a abovedar será aquella que tenga como semieje mayor la parte *entera* de la diferencia entre el semieje menor de la directriz y el *retumbo*, y como semieje menor la parte *mayor* de esa diferencia.

En el apartado anterior se vió que la curva directriz corta a los pares de muros opuestos en los puntos señalados, en la figura [3.1], como G y G' y quedó dicho que la diferencia de cota entre estos puntos y la clave de la bóveda E se conoce con el nombre de *retumbo*, que más adelante, en el apartado 3.2.1 Curvas directrices se dirá cómo se obtiene. A partir de la construcción gráfica desarrollada en la mencionada figura, también se pueden definir gráficamente las curvas generatrices de la bóveda mediante el método de la «regla y compás».

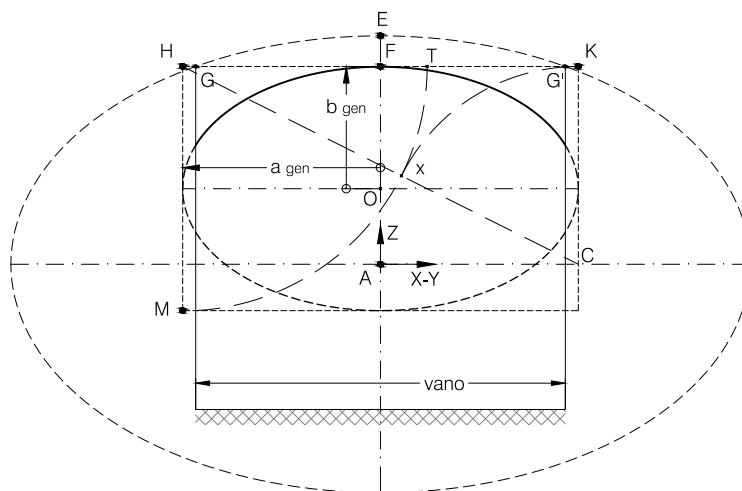


Figura 3.2: Construcción geométrica de las curvas generatrices en los muros verticales con «regla y compás».

En un habitáculo cuadrado de lado  $l$  a abovedar, la figura [3.2] representa una sección vertical por uno de los muros que lo delimitan. Una recta horizontal trazada por G y G' corta al eje vertical Z del sistema de referencia en F; el segmento EF representa el valor del *retumbo*. Desde el punto F, mediante un arco y a ambos lados en la recta horizontal, se lleva una magnitud igual a FA, que es la diferencia entre el eje menor de la directriz del toroide y el *retumbo*. Los puntos H y K obtenidos representan un segmento que se puede dividir en la proporción de *media y extrema razón*, resultando HT la parte *mayor* y KT la parte *menor*. Sobre el segmento HK y con la división efectuada en él, se puede construir un rectángulo con el lado mayor la parte *entera* o total HK y con el lado menor HM la parte *mayor* HT del segmento dividido. Es evidente que mediante esta construcción, como quedó dicho en el apartado 2.6.1, MK es la diagonal de un *rectángulo áureo*.

En el *rectángulo áureo* construido se puede inscribir una elipse con el eje mayor  $2a_{gen}$  igual a HF que es la parte *entera* diferencia entre el eje menor de la curva directriz y el *retumbo*, y con el semieje menor  $2b_{gen}$  la parte *mayor* de HK. De otra manera, el eje mayor  $2a_{gen}$  y menor  $2b_{gen}$  de la elipse generatriz, algebraicamente se pueden expresar, en términos de Euclides sobre la división de un segmento HK, lado mayor del rectángulo MK, como:

$$entera = a_{gen} = B_{dir} - retumbo; \quad y$$

$$mayor = b_{gen} = \frac{B_{dir} - retumbo}{\Phi}$$

y la parte *menor* del segmento HK dividido, que es la diferencia entre la parte *entera* y la *mayor*, está relacionada con el *latus rectum* de la curva generatriz según:

$$menor = a_{gen} - b_{gen} = \frac{latus\ rectum_{gen}}{2}$$





porción armónica:

$$p(2 \cdot a_{gen}, 2 \cdot b_{gen}) = \frac{2 \cdot a_{gen}}{2 \cdot b_{gen}} = \Phi$$

Los *rectángulos áureos* obtenidos que inscriben las curvas directrices y generatrices, sus ejes mayores y menores, satisfacen, entre otras, la propiedad indicada en el apartado 2.6.1 El «rectángulo áureo», de ser funciones continuas e invariantes, ya que para cualquier valor que tome el lado del habitáculo se obtienen elipses con la misma proporciones y relacionadas entre sí,  $p(A_{dir}, B_{dir}) = p(\lambda a_{gen}, \lambda b_{gen})$ , de la forma que se ha expuesto en este apartado y en el anterior; es decir:

$$p(A_{dir}, B_{dir}) = p(a_{gen}, b_{gen}) = \frac{A_{dir}}{B_{dir}} = \frac{a_{gen}}{b_{gen}} = \Phi$$

La definición geométrica expuesta de los semiejes mayor y menor, el retumbo y la flecha teórica para las curvas *generatrices*, se desarrolla matemáticamente en el anexo A, donde se exponen en el cuadro A.1 (pág. 70) los valores teóricos para distintos habitáculos abovedados.

### 3.3. Replanteo de la bóveda con «cinta y cordel»

En lo apartados anteriores se ha descrito el proceso de definición geométrica de las curvas definidoras de la bóveda extremeña que se basa en la geometría plana y para su definición se ha utilizado la «regla y compás» como únicos útiles siguiendo los métodos expuestos por Euclides en los *Elementos*. Una vez fijado el espacio a cubrir, de planta cuadrada, se han obtenido las distintas curvas, directrices y generatrices, que como se ha visto son función del valor del lado del habitáculo.

A partir de la planta, se construyen los cuatro muros verticales que delimitan el espacio a cubrir hasta una altura que será como mínimo la altura de la clave, que ha sido fijada previamente en la fase de diseño del abovedamiento. Estos muros de fábrica son la referencia para el trazado de los elementos de la bóveda.

El replanteo de la obra consiste en marcar o “dibujar” a tamaño real la disposición y dimensiones de los distintos elementos constructivos que darán la forma diseñada a la bóveda. En nuestro caso, la bóveda extremeña, el replanteo consiste en marcar sobre los muros las curvas generatrices que se desarrollarán por las directrices hasta la clave, cerrando el espacio y delimitando el volumen del habitáculo abovedado.

#### 3.3.1. Curvas directrices. Retumbo

Para el replanteo de la curva directriz se pueden utilizar varios métodos con solo los útiles básicos de «cinta y cordel» y una plomada. En la figura 3.4 está representada esta curva que se obtuvo según lo expuesto en el apartado 3.2.1 «Curvas directrices». Esta curva se desarrolla entre dos muros opuestos iniciándose desde los puntos G y G' hasta alcanzar el punto más alto de la bóveda, la clave, señalada como E.

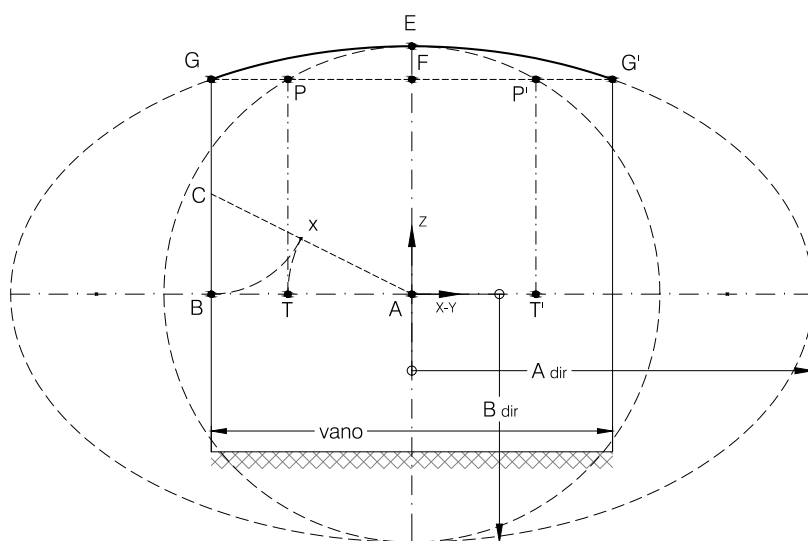


Figura 3.4: Curva directriz. Replanteo I

- Primer método: a partir de un punto cualquiera A, que se ha tomado anteriormente como centro del sistema de referencia, del eje vertical Z, que divide al muro por mitad, figura [3.4], se traza una línea horizontal hasta los muros, resultando el segmento AB de la figura igual a la mitad del lado del habitáculo. Este segmento se puede dividir según la proporción de *media y extrema razón*, mediante el método expuesto en 2.6, obteniéndose el punto T y con él la parte *mayor* AT y la *menor* BT.

Por otra parte, con centro en A se traza un arco, en el tramo de muro por encima de A, con radio igual a AE, que es el semieje  $B_{dir}$  conocido de antemano. Resulta que la intersección de una recta vertical, trazada con plomada, por el punto T con el arco dibujado anteriormente, el punto P, es la altura desde A de paso de la directriz por el muro. Basta trazar al otro lado del eje Z otra recta vertical con el mismo procedimiento y la recta horizontal resultante de unir los puntos P' y P intersectará a los muros verticales en G' y G <sup>6</sup>.

Así han quedado definidos en obra los puntos de arranque <sup>7</sup> G y G' de las curvas directrices y que corresponden a los puntos más altos de las elipses generadoras que en las figuras de los distintos apartados está señalada como F.

- Segundo método: otra manera de obtener la recta que delimita los puntos G y G' sobre los muros es localizar con «cinta y cordel» el punto medio de ésta, es decir el punto F.

<sup>6</sup> Se puede comprobar que los puntos P' y P obtenidos corresponden al lado de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio la parte *mayor* del vano del habitáculo y también que si el hexágono inscrito presenta dos lados opuestos paralelos a los ejes horizontales de referencia, la prolongación de uno de ellos hasta los muros dará los puntos G' y G (*Elementos*, libro IV proposición 15 en anexo D.1).

<sup>7</sup> (ref. [7]), Nacimiento de un arco o bóveda, el plano o superficie que sirve de asiento a la primera de sus hiladas.

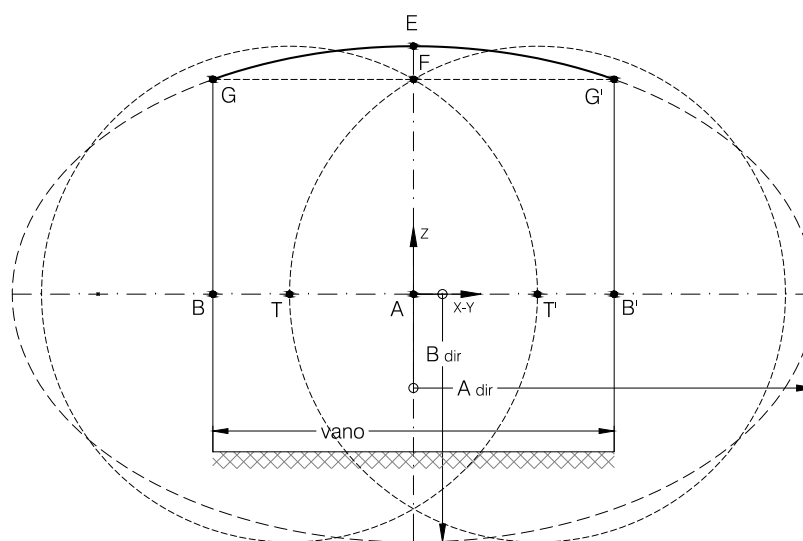


Figura 3.5: Curva directriz. Replanteo II

Para ello, en la figura [3.5], si los segmentos correspondientes a las semiluces del vano AB y AB' se dividen en *media y extrema razón*, se obtienen la parte *mayor* AT y la AT' a ambos lados del eje vertical Z. Con centro en los puntos T y T' se puede trazar un arco de círculo, por encima del origen de referencia y sobre el muro, con radio igual a AE, que como se vió, es igual a la parte *entera* de la luz del vano, es decir  $B_{dir}$ , y la intersección de los dos arcos corresponde al punto F. Trazando una recta horizontal por F se pueden obtener también G y G' sobre los muros.

- Tercer método: consiste en el uso de los parámetros conocidos de la elipse generatriz obtenidos en la definición geométrica con «regla y compás» expuesta más arriba (apartado 3.2.1).

En la figura [3.6], la recta horizontal trazada por A, origen del sistema de referencia inicial y de la elipse directriz, corta a los dos pares de muros opuestos en los puntos B y B'. Con la magnitud correspondiente al eje mayor de la curva generatriz  $a_{gen}$  se pueden trazar arcos sobre los cuatro muros con centro en B y en B'. Los arcos así trazados se cortarán en cada uno de los cuatro rincones del habitáculo, a la misma cota, obteniéndose en las intersecciones los puntos G y G'. El punto medio entre cada par de puntos, señalados como F, será el punto de paso de la curva directriz por el muro.

También el punto F será el extremo superior del eje menor  $b_{gen}$  de la generatriz y se puede utilizar para el replanteo de dicha curva.

La diferencia de cota entre ese punto medio de la recta GG', punto F, obtenido por cualquiera de los procedimientos descritos, y la cota de la clave E será el *retumbo* de la bóveda:

$$retumbo = AE - AF;$$

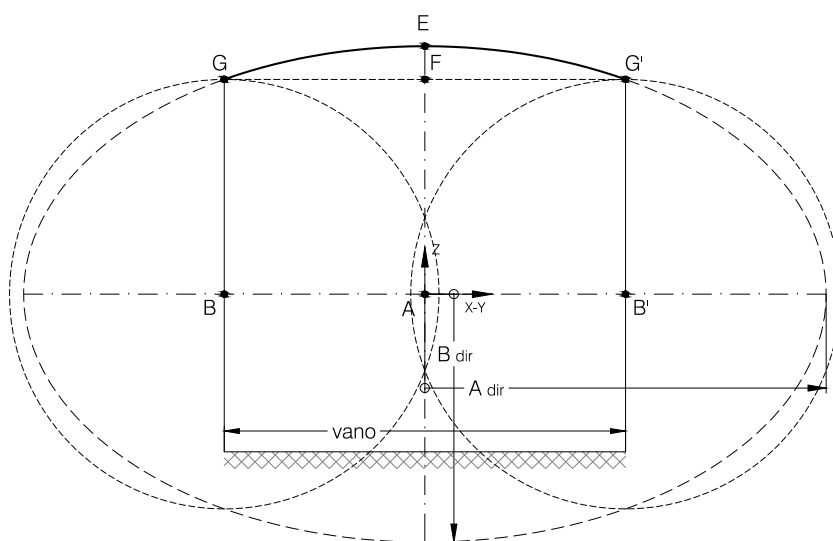


Figura 3.6: Curva directriz. Replanteo III

y por lo expuesto en 3.2.2 y en este apartado sobre las curvas generatrices, resulta:

$$retumbo = B_{dir} - a_{gen}$$

Conocido que  $AE$  es la parte *mayor* de la luz del vano o lo que es igual  $B_{dir}$ , como se vió en el apartado anterior, para replantear la clave de la bóveda a una determinada altura  $H_{clave}$  sobre el suelo del habitáculo solo hay que situar el origen del sistema de referencia a una cota  $h_{ref}$  sobre el suelo tal que cumpla cualquiera de las igualdades:

$$H_{clave} = mayor + h_{ref} = AE + h_{ref} = B_{dir} + h_{ref}$$

### 3.3.2. Curvas generatrices

En apartados anteriores se ha expuesto el método gráfico de resolución de las dimensiones y disposición de los elementos geométricos que definen las curvas directrices y que son función de la longitud  $l$  del vano a abovedar. También quedó dicho las dimensiones y posición de las elipses generadoras, que al ser sus parámetros, los semejes, función de las directrices, también ellas son función de la luz  $l$  del vano.

A diferencia del replanteo de las directrices en que solo es necesario y suficiente <sup>8</sup> trazar en obra los inicios sobre los muros y su final en la clave, para las generatrices se debe replantear toda la curva que corresponda a los muros.

El método de replanteo más preciso y eficaz para delimitar la curva generatriz elíptica, el asiento de la fábrica en el muro, es el conocido como «método del jar-

<sup>8</sup> La curva que que deberá formar la fábrica desde sus arranques en los muros hasta la clave es una tryectoria que se realiza a estima.

dinero». Este reproduce fielmente la propiedad de la elipse que la distancia de un punto cualquiera de la curva a dos puntos fijos es constante; éstos puntos, los focos, situados a ambos lados del eje vertical de simetría de la elipse y sobre el eje horizontal, también de simetría, satisfacen el teorema de Pitágoras que su distancia  $c_{gen}$  al centro de la elipse es:  $c_{gen}^2 = a_{gen}^2 - b_{gen}^2$ . Conocidos la posición de los focos de la elipse resulta sencillo el replanteo con «cinta y cordel», basta pasar un cordel entre los focos y un punto conocido de la curva y manteniendo tenso el cordel deslizarse por el muro y al mismo tiempo marcar sobre él la traza.

Un método de replanteo inmediato podría consistir en que a partir del punto de paso de la directriz por el muro, punto F replanteado anteriormente, se puede llevar sobre la vertical el segmento conocido  $a_{gen}$  y situar el origen de la elipse generatriz  $O_{gen}$ ; sobre una horizontal trazada por este origen se puede llevar el valor de la semidistancia focal a ambos lados del eje vertical y a partir de los focos trazar sobre los muros el arco de curva correspondiente.

Sin embargo este método, que requiere la resolución de las semidistancias focales mediante el teorema de Pitágoras, nos parece un poco complicado de resolver en obra, por lo que se proponen otros métodos alternativos más sencillo y factibles para la localización de los puntos de los focos.

- Primer método: un método alternativo, descrito por Sebastiano Serlio <sup>9</sup> y Hernán Ruiz <sup>10</sup>, y factible de replanteo con «cinta y cordel» y una plomada, figura [3.7], consiste en trazar dos arcos de círculo con centros en el origen  $O_{gen}$  de la curva generatriz. Uno con radio igual al semieje  $a_{gen}$ , que coincide con el segmento FA delimitado por puntos ya replanteados, y otro círculo con radio el semieje  $b_{gen}$ . A partir del eje vertical Z y a ambos lados de este, se dividen los semicírculos trazados en arcos con la misma longitud de cuerda; trazando verticales por los puntos de división del círculo exterior y horizontales por las divisiones del círculo interior, se obtiene por intersección los puntos de la elipse generatriz.

Este método, aunque es factible de replanteo en obra con «cinta y cordel» y una plomada, nos parece un poco complicado en su desarrollo, por lo que se propone una segunda manera, más factible, de trazado de la curva generatriz mediante la localización de los focos y a partir de éstos usar el «método del jardinero» que es bien conocido por los maestros de obra.

- Segundo método: consiste en trazar, figura [3.8], una recta horizontal por debajo del punto F a la distancia conocida:  $b_{gen}$ ; la intersección de la vertical por F y la recta trazada será el origen  $O_{gen}$  de la elipse generatriz. A continuación se traza un arco de círculo con centro en el punto F y radio igual al valor del semieje mayor de la directriz  $a_{gen}$  y para ello se puede utilizar el segmento FA, cuyos puntos son conocidos, y su valor coincide con  $a_{gen}$ . La intersección de este arco con la recta

<sup>9</sup> Serlio, Sebastiano: *Libro Primo D'Architettura* (ref. [27]). La reproducción de la hoja del libro en el que se describe y muestra gráficamente el método de replanteo de curvas elípticas puede verse en el anejo D, página 143.

<sup>10</sup> Hernán Ruiz: *Libro de Arquitectura* (ref. [16]), propone el mismo método de replanteo. El editor Pedro Navascues Palacio dice: «omitió pertinazmente los nombres de los autores cuyos textos y dibujos había utilizado» y nombra, entre otros a Sebastiano Serlio. Una reproducción puede verse en el D, página 144.

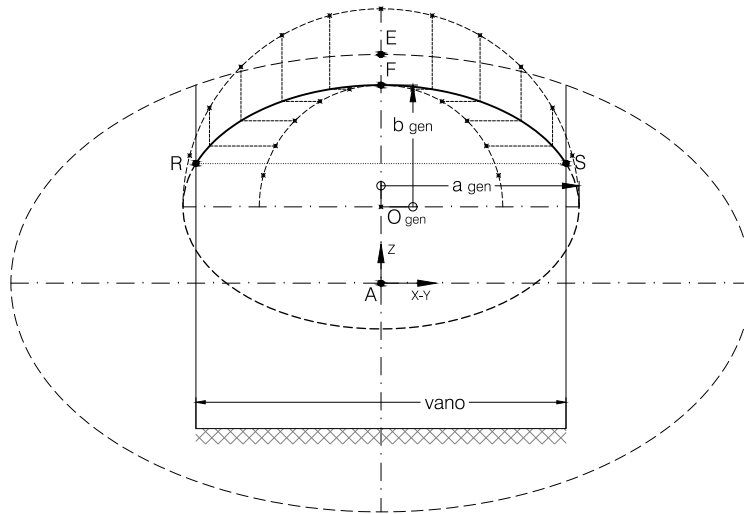


Figura 3.7: Curva generatriz. Replanteo I

horizontal antes trazada son los puntos  $f$  y  $f'$  de la figura que resultan ser los focos de la elipse generatriz en los muros.

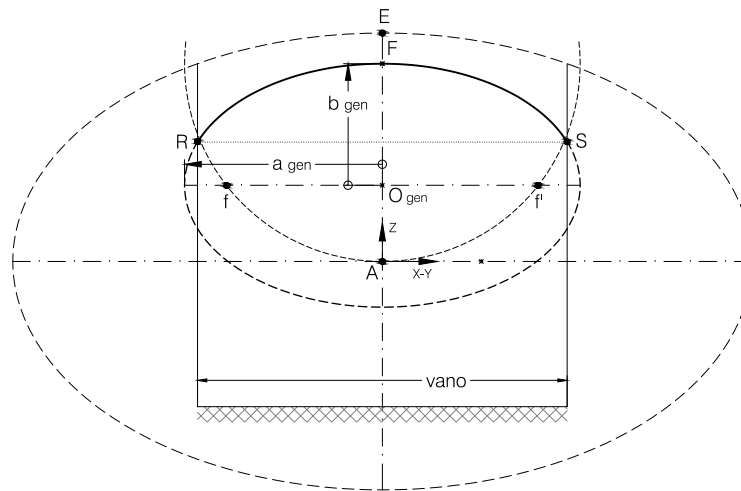


Figura 3.8: Curva generatriz. Replanteo II

Con los dos focos replanteados por cualquiera de los métodos expuestos y un punto conocido de la generatriz como el  $F$ <sup>11</sup>, resulta fácil obtener mediante el «método del jardinero» el arco de curva indicado en las figuras anteriores como RFS.

<sup>11</sup> Se pueden obtener otros puntos de la generatriz que no siendo geoméricamente puntos de ésta pueden tomarse como válidos dada la proximidad a puntos reales de la elipse. En la figura [3.8], los puntos de arranque de la bóveda R y S se pueden hallar con suficiente precisión de replanteo al trazar un arco con centro en F y radio el segmento FA. La intersección de este arco con los cuatro rincones del habitáculo dará los puntos R y S. La relación de la distancia de F a la recta RS, flecha del arco, y la distancia de R a S, luz del vano, están en una proporción que a efectos prácticos puede tomarse como  $f/l \approx 1/5$ .

### 3.3.3. Replanteo práctico de obra

En los apartados anteriores se han expuesto métodos de replanteo factibles de utilización en obra, sin embargo creemos que su utilización requiere de conocimientos que entendemos están fuera —en muchos casos— del alcance de un maestro de obras, que no es perito en geometría y que tiene que memorizar una serie de datos y procedimientos geométricos que no son de uso común, en la construcción de edificios, por albañiles especializados o maestros de obra en lo que se conoce como arquitectura popular.



Figura 3.9: Replanteo de obra con cinta y cordel.  
Miniatura de las *Cantigas de Santa María* XLV, códice s. XIII

Por ello se propone un «método práctico» de replanteo para los distintos elementos que componen la bóveda extremeña basado en una única regla sencilla, fácil de asimilar, de memorizar y aplicable a cualquier habitáculo cuadrado en el que la única variable o decisión a tomar es la altura máxima de la bóveda sobre el suelo.

Establecida la clave de la bóveda, con el «método práctico» que se propone, con «cinta y cordel» y plomada, se pueden trazar los arranques de la bóveda sobre los muros, realizando una sola operación mental que es la de dividir una única magnitud, la longitud del vano o lado, en *partes* iguales mediante la cinta de medir, o bien, más fácilmente, dividir esa magnitud en *partes* iguales plegando un cordel sobre sí mismo cuantas veces requiera el número de *partes* a obtener.

El procedimiento a aplicar en este «método práctico» se realiza, como en todos los expuestos más arriba, a partir de la ejecución previa de los cuatro muros, como mínimo hasta la altura de la clave, decisión tomada de antemano. Consiste en instalar cordeles entre los puntos medios de los muros opuestos, en su coronación; la intersección de las cuerdas en el espacio abierto marca el punto de la clave y el inicio de cada cuerda en los muros marca un punto de un eje vertical que los divide por mitad.

En la figura [3.10] está representada una sección del habitáculo a abovedar con los muros verticales ya contruidos hasta la altura prevista de la clave de la bóveda. Los tendeles entre mitad de los muros se cortan en el centro del espacio abierto, la clave, y al mismo tiempo marcan en cada muro la mitad de éste, punto E, y por él, a plomo, se traza un eje vertical que es de simetría en cada muro.

Desde el punto E de cada muro, se lleva, a plomo, una magnitud con cinta o con el cordel, igual a la longitud  $l$  del lado o vano a cubrir. Esta longitud se divide en *seis partes* iguales, pudiéndose realizar esta división mentalmente o, más fácilmente, plegando el cordel de longitud  $l$  sobre sí mismo primero en dos partes y a continuación plegándolo nuevamente en tres partes, con lo que finalmente el cordel queda dividido, mediante nudos por ejemplo, en *seis partes* iguales; de esta manera cada *parte* del cordel dividido resulta un sexto ( $1/6$ ) de la luz  $l$  del vano <sup>12</sup>].

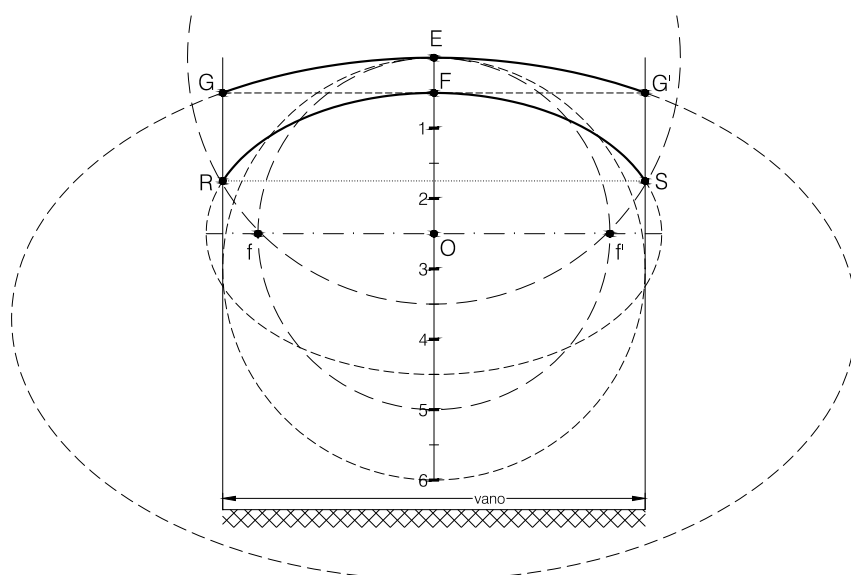


Figura 3.10: Replanteo práctico de obra

<sup>12</sup> La división en *seis partes* probablemente esté relacionada con el «número perfecto»; son números perfectos los que son iguales a la suma de sus divisores, excepto él mismo ( $6 = 1 + 2 + 3$ ). Euclides descubrió la fórmula para obtener dichos números (Libro VII, definición 23). Marco Vitruvio, (ref. [30]), libro III capítulo I, describe: «Los matemáticos, por el contrario, afirmaron que el número perfecto es el número seis, pues posee unas divisiones que suman seis, de la siguiente manera: la sexta parte, es el uno; la tercera parte, es el dos; la mitad del seis, es el tres; dos terceras partes componen el número cuatro, en griego *dimoeron*; cinco partes del número seis -*pentemoeron*-, es el número cinco; y el número perfecto y final es el número seis.», y más adelante comenta: «De igual modo, el pie es la sexta parte de la altura del hombre, o lo que es lo mismo, sumando seis veces un pie delimitaremos la altura del cuerpo; por ello coincidieron en que tal número -el seis- es el número perfecto, y además observaron que un codo equivale a seis palmos, o lo que es lo mismo, veinticuatro dedos». Esta consideración sobre la división en seis partes puede verse en la reproducción de la traducción de la obra de Vitruvio hecha por Lázaro de Velasco (ref. [29]) en el anexo D página 145. Desde la antigüedad la cuerda dividida en 12 partes iguales,  $2 \times 6$  nudos, era utilizada tanto en la construcción como en la agrimensura. Con la cuerda así dividida se puede construir el triángulo de Pitágoras de lados 3, 4 y 5 divisiones entre nudos, obtener ángulos de  $90^\circ$  y trazar el *rectángulo áureo* como se vio en el apartado anterior [2.7



En cada muro, a partir del punto E señalado, se lleva por la línea de la plomada, distintas *partes* de la división anteriormente hecha y se marcan sobre los muros los siguientes puntos del replanteo:

- el primero, desde E, con una longitud *mitad de una parte* (un medio de un sexto o lo que es igual un doceavo de  $l$ ) resulta el punto F de la figura, el F' en el muro enfrenteado a este y los puntos G y G' en los contiguos mediante una horizontal por F.

- el segundo, con la medida de *dos partes y media* (dos y un medio de un sexto o lo que es lo mismo cinco doceavos de  $l$ ) desde E se obtiene el punto indicado como O, origen de la curva *generatriz*. Sobre este punto se puede hacer una marca horizontal en cada muro, o bién, de otra manera, desde lo alto de los cuatro rincones marcar en ellos la misma medida de *dos partes y media*, que unidas sobre cada muro por una línea resultan ser horizontales y contienen en su punto medio el punto O marcado anteriormente.

De esta manera quedan replanteados puntos de la bóveda a construir sobre los muros: los puntos F que corresponden el punto más alto de la curva *generatriz* y extremo del semieje menor de la elipse vertical en los muros; los puntos O que son el origen del semieje mayor y menor de dicha elipse; y la distancia vertical EF, marcada como *mitad de una parte* corresponde al retumbo de la bóveda.

A continuación, con un cordel, tomando como medida el segmento entre los puntos replanteados E y O, o lo que es igual tomando *dos partes y media*, se traza un arco con centro en O y su intersección con la horizontal trazada anteriormente, que pasa por este centro, da como resultado dos puntos, f y f', que resultan ser los focos de la elipse *generatriz*. Con unos clavos instalados en los puntos f y f' y un cordel que pase entre ellos y alcance el punto F, mediante el «método del jardinero» se marca la traza de la fábrica de la curva *generatriz* que se inicia en cada rincón y avanza hasta el punto central de la clave del arco perimetral.

El inicio de la curva *generatriz*, también se puede replantear trazando desde E un arco de *tres partes y media* (tres y un medio de un sexto o lo que es igual siete doceavos de  $l$ ) que alcanza a los rincones en los puntos R y S. Éste mismo arco corta a la línea horizontal por O en dos puntos, f y f', que corresponden a los focos de la curva *generatriz*.

La altura de la cuerda RS del arco perimetral sobre O, centro de la *generatriz*, será de *media y un cuarto de parte* y la flecha resultante tendrá *una y un cuarto de parte*.



# 4

## Comprobación de la forma. Estudio de campo

### 4.1. Preámbulo

El agrupamiento de los abovedamientos en distintas clasificaciones y tipologías es numeroso; todas las bóvedas tienen en común que son generadas por un arco —una curva— que sigue una trayectoria, curva o recta, de traslación en el espacio a cubrir. Fray Lorenzo de San Nicolás en *Arte y uso de Arquitectura*, hace una revisión a las varias tipologías de abovedamientos y a sus denominaciones resumiendo en cinco los tipos a los que designa: de cañon, de media naranja, baida, esquifada y finalmente, el quinto tipo, de arista <sup>1</sup>; y aclara que a partir de estos tipos básicos se originan los demás <sup>2</sup>.

En las inspecciones realizadas a edificaciones con espacios cubiertos con la tipología conocida como bóveda extremeña, salta a primera vista la característica de un espacio cubierto, de fábrica, en el que resaltan claramente unas aristas, marcadas en las intersecciones entre diversas superficies espaciales y entre estas superficies y los muros verticales que delimitan el espacio cubierto. Las superficies, en número de cuatro, se desarrollan a partir de los muros y avanzan suave y progresivamente, siguiendo trayectorias curvas, hasta encontrarse en la clave. Estas superficies en ningún momento son planas al igual que las distintas aristas observadas no son rectas. La bóveda extremeña puede incluirse claramente en el quinto tipo de clasificación de fray Lorenzo: de arista <sup>3</sup>. En base a esta primera apreciación visual de la forma de la bóveda extremeña se ha realizado un estudio geométrico, de la superficie de cubrición, a partir de esos elementos visibles: las aristas.

La forma, la geometría que define las distintas superficies de fábrica que configuran la bóveda extremeña que se presenta en este capítulo ha sido estudiada a partir de datos reales obtenidos topográficamente, dibujados en planos y posteriormente analizados por métodos matemáticos con el objetivo de encontrar los distintos elementos geométricos que componen la bóveda, su disposición espacial, sus magnitudes y las proporciones entre dichas magnitudes.

---

<sup>1</sup> (ref. [7]), La que se forma de dos o muchos cañones, que se cortan formando en su intradós ángulos salientes o aristas.

<sup>2</sup> (ref. [24]), cap. XLVII: *Trata de los nombres de las bóvedas, y de donde se derivaron*, p. 124.

<sup>3</sup> (ref. [24]), cap. LII: *Trata del quinto género de Bóveda, que llamamos Capilla por arista, y de su traza y fábrica*, pp. 137-140.

## 4.2. Toma de datos

Para el estudio de la forma de la bóveda extremeña se han realizado levantamientos topográficos en edificaciones con estancias abovedadas en distintas localidades en el entorno de la ciudad de Cáceres. A fin de obtener la geometría real de la fábrica de una bóveda, la metodología ideal para la toma de datos de campo consiste en el levantamiento topográfico tridimensional primero de las aristas visibles y posteriormente realizar un relleno de puntos en toda la superficie del abovedamiento. Con estos datos se puede estudiar qué figuras geométricas planas definen las aristas (líneas de quiebro entre superficies) y con los puntos de relleno construir un plano de curvas de nivel para su interpretación en cuanto a qué tipo de superficie se adapta mejor a dichas curvas de nivel.

Este planteamiento inicial fué reducido por diversas causas: en primer lugar por las limitaciones técnicas en la medición de ángulos verticales que tiene el distanciómetro utilizado para la toma de datos y en segundo lugar, la imposibilidad física de estacionar el aparato en cualquier punto bajo la bóveda o de realizar mediciones con cinta o hacer triangulaciones, al tener, la mayoría de los habitáculos medidos, mobiliario u otros elementos decorativos que imposibilitaban las maniobras necesarias en este planteamiento inicial. Sin embargo, la toma de datos realizada es, a nuestro juicio y dado el alcance de este trabajo, suficiente para la determinación de la forma geométrica de la bóveda extremeña en un primer «acercamiento a su geometría».

En cada una de las bóvedas se han tomado puntos topográficos en el espacio de la clave y de los arranques, y éstos, bién desde los muros verticales o desde los arcos en que se sustenta la fábrica que conforma la bóveda. Los arcos perimetrales han sido topografiados desde sus inicios, las pechinas o aristas de encuentro <sup>4</sup>, hasta la clave, por un número de puntos suficientes para delimitar su forma —su curva— en función de la longitud de su desarrollo, de manera que la distancia entre dos puntos consecutivos constituyera una cuerda de arco, en torno a cuarenta centímetros de promedio. Dadas las irregularidades superficiales de las aristas que delimitan la fábrica, en muchos casos la bóveda no está lucida y presenta el ladrillo visto, con las juntas rehundidas y en no pocas ocasiones con desconchones, desplome de paramentos verticales, estimamos que el error más probable en cada punto observado en el levantamiento topográfico no supera los dos centímetros.

Los datos de campo fueron obtenidos mediante un distanciómetro electrónico Leica Disto D5, montado sobre trípode, de precisión milimétrica en distancias y ángulos verticales, limitados a 45° desde el horizonte, con precisión de décimas de grado. En algunas circunstancias, cuando existe mobiliario en el habitáculo, se ha recurrido a triangulaciones auxiliares de relleno.

---

<sup>4</sup> (ref. [7]), En una bóveda por arista es la esquina que se forma en el intradós del concurso de dos tímpanos inmediatos

### 4.3. Análisis de datos

A partir de los datos de campo se confeccionaron planos de planta y distintas secciones verticales con ayuda del sistema gráfico informático Autocad 2012 <sup>5</sup>. Los datos topográficos delineados en ellos están referidos a un sistema de referenciaortonormal, figura [4.1], con origen en el centro de la proyección de la bóveda, bajo la clave y en la intersección de las aristas diagonales, los ejes X e Y en un plano horizontal y el eje Z en la vertical que contiene a la clave.

Los planos de planta reflejan la proyección horizontal de la bóveda y por tanto de sus aristas, que son de dos tipos: las aristas diagonales, entre los dos pares de rincones opuestos, intersección de las distintas superficies espaciales entre sí, y las aristas perimetrales intersección de dichas superficies espaciales con los cuatro muros en que descansan.

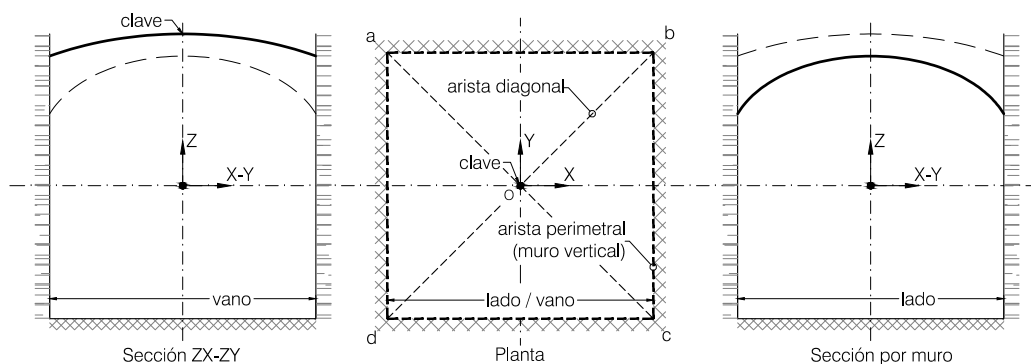


Figura 4.1: Planta y secciones de la bóveda

Los planos de secciones muestran dos vistas verticales distintas: una por mitad de la bóveda, la clave, y mitad de dos muros verticales enfrentados, y otra entre dos rincones consecutivos, es decir, por el plano que contiene la superficie de cada muro. Para cada bóveda estudiada, de los primeros resultan dos secciones verticales: una por ZX y otra por ZY; de los segundos cuatro, también verticales, por a-b, b-c, c-d y d-a, correspondientes a cada uno de los cuatro muros o planos, que delimitan verticalmente la bóveda.

Las distintas secciones descriptivas de la geometría y sus dimensiones reales han sido representadas en planos con el sistema gráfico informático Autocad 2012, y analizados matemáticamente con un software de creación propia que utiliza como motor el sistema de álgebra computacional *wxMaxima* versión 12.04.0 <sup>6</sup>.

Los planos obtenidos de los levantamientos, de planta con sus dimensiones, las secciones verticales por muros y entre muros por la clave, y los puntos topográficos tomados *in situ* de cada bóveda se encuentran con todos sus detalles en el anejo C página 89 y siguientes. Como resumen del anexo, las bóvedas estudiadas se indican

<sup>5</sup> (c) Autodesk, Inc. V-F.51.0.0

<sup>6</sup> (C) 2004 - 2011 Andrej Vodopivec. *wxMaxima* es una interface gráfica de usuario para el Sistema de Álgebra Simbólica (CAS) *Maxima*, basado en *wxWidgets*. Version de *Maxima* 5.28.0-2 GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.8

en el siguiente cuadro, con la localización del edificio que pertenecen, su tipología arquitectónica y el número de ellas estudiadas en cada edificio.

Localización	Arquitectura	nº de bóvedas
Garrovillas T.M.	Religiosa. Ermita	1
Arroyo de la Luz	Vivienda	2
Casar de Cáceres T.M.	Religiosa. Ermita	2
Pedroso de Acim T.M	Religiosa. Monasterio	3
Cáceres T.M.	Casa-castillo	2
Malpartida de Cáceres	Vivienda	2
Cáceres	Casa-palacio	2
Cáceres. Plaza Mayor	Vivienda	1
Total edificios: 8		
Total bóvedas: 15		

Como quedó dicho, bóveda extremeña pertenece al tipo de bóvedas de arista <sup>7</sup>. En una primera inspección visual resulta que las superficies que la forman, se aprecian claramente cuatro, están combadas, y delimitadas, por intersecciones, por unas aristas de dos tipos bien distintos: unas que se desarrollan desde los rincones opuestos del habitáculo hasta la clave, que en adelante denominaremos aristas *diagonales*, y otras que aparecen en la intersección de la bóveda con los muros, que denominaremos aristas o curvas *generatrices*. También se observa a primera vista que las aristas en los muros, las *generatrices*, su punto de mayor cota respecto del suelo está por debajo de la cota de la clave; esta diferencia se conoce como *retumbo*. En la figura [4.2] se muestran sobre una imagen tomada de Auguste Choisy <sup>8</sup> la disposición espacial de estas aristas.

Para estudiar la geometría de las *generatrices*, en los planos de secciones se han dibujado los extremos de los muros entre los que se desarrolla la curva, líneas verticales correspondientes a los rincones, y entre los que se representan los puntos topográficos del levantamiento de esas aristas curvas (Secciones por muro en la figura [4.1]). A partir de un sistema de referencia con origen en la vertical que divide al muro en dos partes iguales, se ha buscado una curva geométrica plana que se ajuste lo más posible a todos los puntos que definen la *generatriz*.

Mediante los planos de secciones verticales por la clave y por mitad de dos muros opuestos, se ha estudiado la geometría de la curva plana que envuelve las superficies que se desarrollan en el espacio (Secciones ZX y ZY en la figura [4.1]). Estas curvas, que en adelante se denominarán *directrices*, deberán incluir de la manera más próxima posible los puntos de mayor cota de las *generatrices*, en los muros, y el punto de la clave de la bóveda, punto más alto del abovedamiento y de mayor cota que los

<sup>7</sup> (ref. [24]); (ref. [12])

<sup>8</sup> (ref. [5]); Auguste Choisy, Francois (1841-1909). Ingeniero, historiador y teórico de la arquitectura. Su libro fundamental fué *Historia de la arquitectura* y en toda su obra identifica la buena arquitectura con la buena construcción. Junto a Viollet-le-Duc y Guadet, fué uno de los historiadores de la arquitectura que más influyó en la arquitectura moderna.

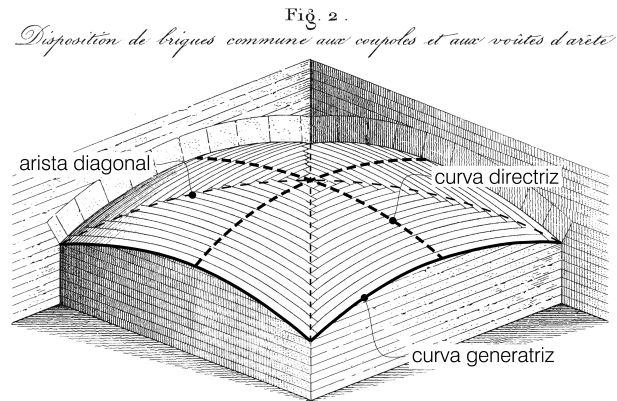


Figura 4.2: Bóveda de aristas. Disposición de las curvas directrices, generatrices y aristas diagonales en la bóveda.

anteriores.

#### 4.4. Traza de la bóveda extremeña

Mediante el estudio de las propiedades geométricas y de las medidas de las figuras en el plano y en el espacio de las aristas *generatrices* y de las curvas *directrices* se ha obtenido una tipología de curvas matemáticas que definen las superficies del abovedamiento.

En Primer lugar se analizaron las *generatrices* ajustando una curva plana entre todos los puntos del levantamiento topográfico en cada muro. La curva que mejor se ajusta resultó de tipo elíptico. El criterio para la elección de la elipse que mejor se ajusta ha sido que la distancia de los puntos del levantamiento topográfico a la elipse trazada fuera mínimo. Se obtuvieron distintas elipses que cumplen esta condición y que se ajustan a toda la poligonal formada por los puntos de la arista *generatriz*. Las elipses posibles ajustadas, sus ejes mayor y menor difieren entre sí algunos centímetros.

Con la intención de comprobar si las elipses ajustadas, las *generatrices*, se enmarcan en alguna de las figuras de proporciones clásicas utilizadas en Arquitectura, comentadas en el capítulo anterior, se pudo verificar que entre el rango de ajustes posibles para los ejes mayor y menor de las curvas envolventes se encontraban valores que satisfacen la *proporción áurea* entre dichos ejes.

Con el mismo criterio de ajuste se estudió la curva geométrica que define el desarrollo en el espacio de las superficies del abovedamiento, las curvas *directrices*, y se pudo comprobar que es posible dibujar una elipse, también de *proporción áurea*, entre los puntos de mayor cota de las aristas en los muros, las *generatrices*, y el punto más alto de la bóveda, la clave.

La geometría analítica utilizada en el ajuste de las distintas curvas se expone detalladamente en el anexo A (página 67 y siguientes).

Estas curvas analíticas obtenidas, en el origen de su diseño no pudieron desarrollarse de modo matemático como el expuesto en el mencionado anexo A. Esta forma de abovedamiento, que numerosos autores datan de origen Bizantino<sup>9</sup>, ha tenido que ser desarrollada con métodos más sencillos, acorde con los conocimientos técnicos de cada época, métodos gráficos basados en instrumentos básicos como una regla y el compás, utilizados desde la antigüedad hasta la aparición en la Edad Moderna de la geometría analítica.

---

<sup>9</sup> Uno de los más significativos en el estudio de la historia de la Arquitectura, junto a Viollet-le-Duc, es sin duda Auguste Choisy. En su obra *El arte de construir en Bizancio*, dice que «El arte bizantino tiene en la bóveda su elemento principal» y que esta Arquitectura es «practicada por los pueblos griegos del Oriente al final del periodo romano...». (ref. [6]); Introducción p.4.



# 5

## Resultados y conclusiones

### 5.1. Resultados

El desarrollo del método de análisis expuesto en el capítulo anterior para conocer los elementos geométricos de la bóveda extremeña, sus dimensiones físicas y su disposición espacial, se exponen pormenorizadamente en el anexo B: Geometría real I (pág. 73). Los resultados obtenidos se muestran en los distintos cuadros de ese anexo en los que se indica para cada elemento estudiado, semiejes *directrices* y *generatrices*, retumbos y flechas, su magnitud real, la teórica, según lo expuesto en 3.2: Definición de la geometría con «regla y compás» (pág. 28), y el porcentaje que supone la diferencia entre la real y la teórica respecto de la teórica (las dimensiones teóricas están desarrolladas en el anexo A, pág 67).

A continuación se realiza un resumen de los resultados obtenidos en el anexo B, de los parámetros geométricos de definición de las elipses ajustadas, *directrices* y *generatrices*, frente a las teóricas, y de los retumbos y flechas medidas *in situ* y sus diferencias con las teóricas.

#### 5.1.1. Curvas directrices

Los resultados del ajuste de las curvas *directrices* para cada una de las bóvedas estudiadas se muestra en el anejo B.1: «Geometría real I», en el cuadro B.1 (pág. 75). La solución gráfica obtenida de las curvas directrices ajustadas entre los puntos más altos de las aristas perimetrales y la clave de la bóveda puede verse, para cada bóveda, en el anejo C: «Geometría real y ajustes II», a partir de la página 89.

Para cada sección, en el mencionado cuadro B.1, junto al nombre de la bóveda y la sección correspondiente, se indica la longitud real del vano, los valores de los semiejes  $A_{dir}$  y  $B_{dir}$  ajustados con la condición de estar inscritos en un *rectángulo áureo*, y los incrementos, positivos o negativos, de las diferencias entre los semiejes ajustados con los valores teóricos según la hipótesis indicada en el capítulo: 3: «Forma de la bóveda extremeña».

Como se aprecia en los resultados, la diferencia entre los semiejes ajustados y los

teóricos para alguna de las bóvedas es excesiva para asegurar que se replantearon y/o construyeron según el modelo descrito en el citado capítulo 3. Esas bóvedas fueron rechazadas como datos *outlier*<sup>1</sup> en el análisis estadístico, en el que se fijó como límite máximo de desviación todos los casos que no superen un 10 % las magnitudes teóricas, porcentaje que corresponde a casos con valores de residuos estudentizados superiores a tres (3) en valor absoluto.

Los casos rechazados lo fueron no tanto porque presentaran valores medidos del retumbo algo superiores al límite fijado, sino que se rechazaron porque a efectos prácticos las bóvedas no tienen retumbo.

En el gráfico de la figura 5.1 están representados por puntos los semiejes mayor y menor de las elipses ajustadas; la línea discontinua representa los valores teóricos para cada semieje en función de la luz del vano y con línea continua el modelo de regresión lineal efectuado para los casos filtrados.

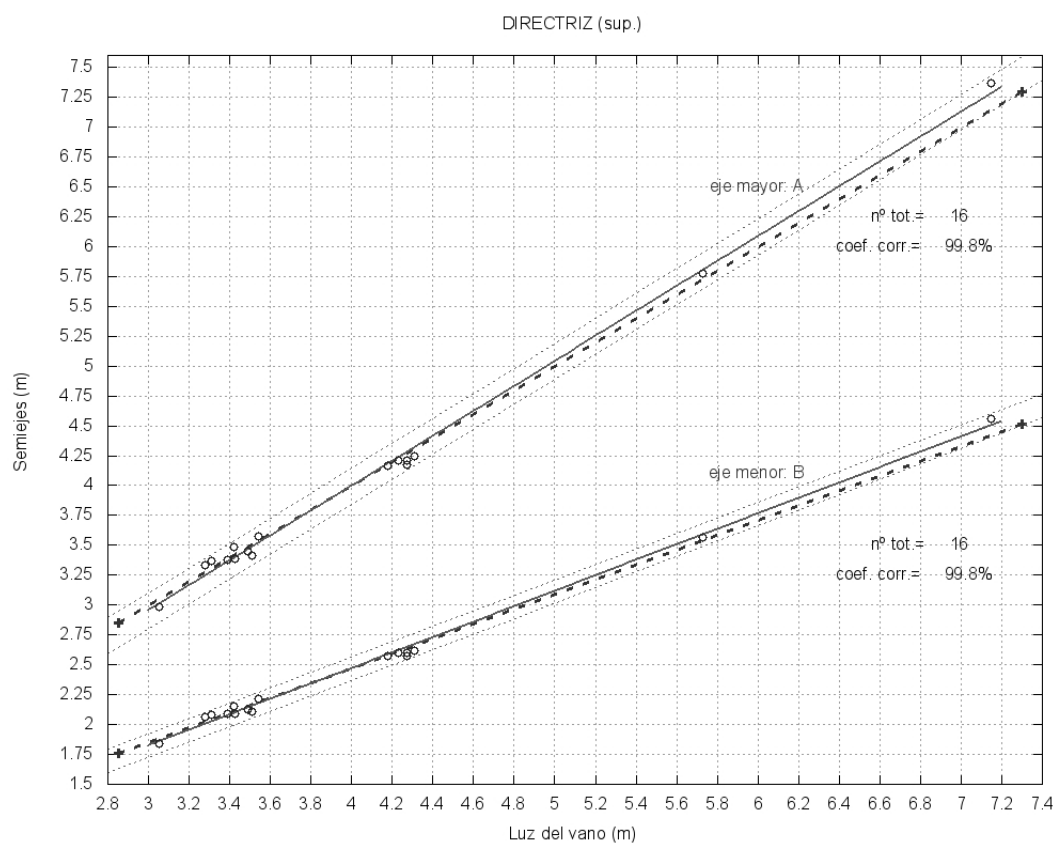


Figura 5.1: Resultado del ajuste de las *directrices* de las bóvedas

Los valores estadísticos resultantes de la regresión se muestran en anejo B, cuadro B.1 (pág. 75). El modelo de regresión resultante para el semieje mayor  $A_{dir}$  resultó  $y = 1,04x - 0,17$ ; con un nivel de confianza del 95 %, el modelo, con los intervalos de confianza para el coeficiente de regresión de la ordenada en el origen,

<sup>1</sup> Caso atípico cuantitativo de una población que resulta mayor o menor de lo esperado por tener un residuo inusual o excesivo, muy grande o muy pequeño.

abarca casos desde  $y = 1,04x - 0,32$  hasta  $y = 1,04x - 0,03$ . Para el semieje menor  $B_{dir}$  el modelo resultante fué  $y = 0,65x - 0,12$ ; con un nivel de confianza del 95 %, con los intervalos de confianza para la ordenada en el origen, el modelo abarca casos desde  $y = 0,65x - 0,21$  hasta  $y = 0,65x - 0,02$ .

Las variaciones estadísticas del modelo de regresión para  $A_{dir}$  y  $B_{dir}$  están representados en la figura [5.1] por líneas de puntos. La línea que representa los valores teóricos de los semiejes se localiza en el interior de los intervalos de confianza, prácticamente coincide con la regresión en ambos semiejes, por lo que, con los casos manejados, puede asegurarse que la predicción del modelo es consistente<sup>2</sup> y se puede mantener estadísticamente a medida que aumente el número de casos de la población.

### 5.1.2. Curvas generatrices

Los ajustes realizados para las aristas perimetrales de las bóvedas estudiadas se muestran en el cuadro de resultados B.3.1 (pág. 78), del anejo B: «Geometría real I». Las curvas ajustadas a las aristas de los muros desde las que se inician las superficies de la bóveda están representadas gráficamente en el anejo C: «Geometría real y ajustes II», en página 89 y siguientes.

En el cuadro B.3: «Generatrices. Elipses ajustadas» se indica para cada bóveda el nombre y sección correspondiente a cada uno de los cuatro lados en que descansa la bóveda, la dimensión del lado, los semiejes mayores  $a_{gen}$  y menores  $b_{gen}$  de la elipse ajustada con proporciones *áureas*, y los incrementos porcentuales, positivos o negativos, de la diferencia de las medidas de los semiejes ajustados y los teóricos. Estos últimos, los valores teóricos de los semiejes, fueron calculados en base a la hipótesis indicada en el apartado 3.2.2 (pág. 30) del capítulo anterior 3: «Forma de la bóveda extremeña».

En las diferencias de los semiejes ajustados y los teóricos no se detectaron casos *outlier* superiores al límite establecido, también en estas curvas, para las aristas *generatrices* del 10 %. El resultado estadístico del ajuste realizado se muestra en el gráfico de la figura 5.2. Los semiejes  $a_{gen}$  y  $b_{gen}$  ajustados están representados por puntos en el gráfico, con línea discontinua se indica el valor teórico para cada semieje correspondiente a la longitud del lado a cubrir, y con línea continua el modelo estadístico de regresión lineal realizado cuyos valores resultantes se muestran en el cuadro B.4 (pág. 81).

El modelo de regresión resultante para el semieje mayor  $a_{gen}$  resultó  $y = 0,55x - 0,08$ ; con un nivel de confianza del 95 %, el modelo, con los intervalos de confianza para el coeficiente de regresión de la ordenada en el origen, abarca casos desde  $y = 0,55x - 0,14$  hasta  $y = 0,55x - 0,03$ . Para el semieje menor  $b_{gen}$  el modelo resultante fué  $y = 0,34x - 0,05$ ; con un nivel de confianza del 95 %, con los intervalos de confianza para la ordenada en el origen, el modelo abarca casos desde  $y = 0,34x - 0,08$  hasta  $y = 0,34x - 0,02$ .

<sup>2</sup> Con  $p\text{-value} = 0$ , queda rechazada la hipótesis nula y por tanto la recta de regresión tiene pendiente. La varianza del error poblacional es mínima

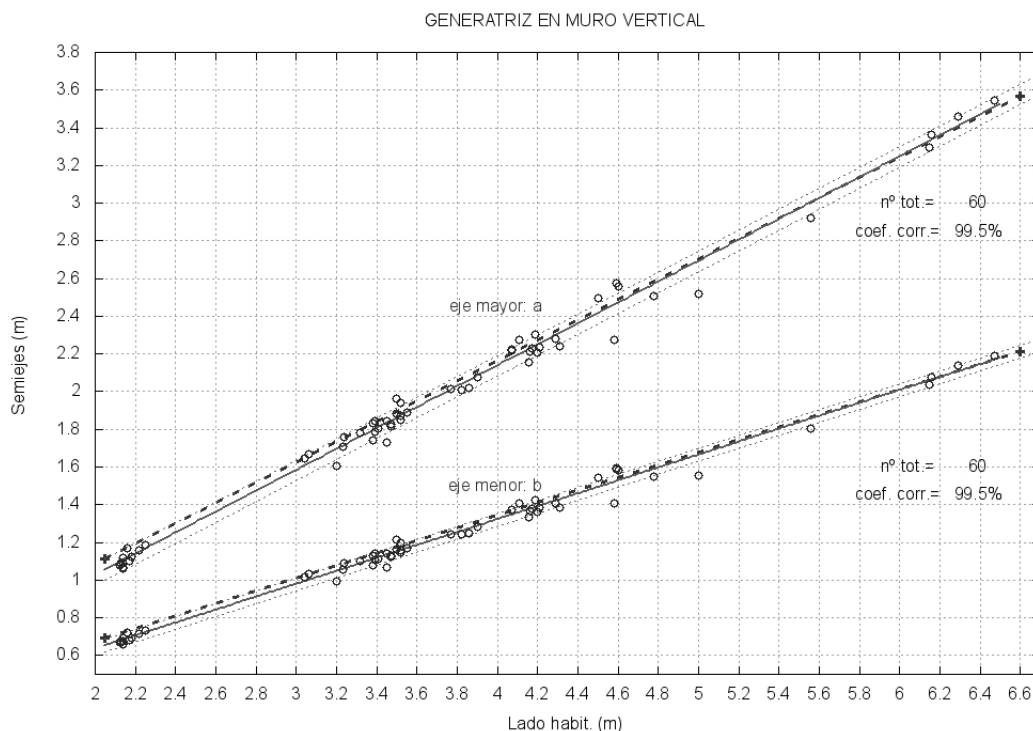


Figura 5.2: Resultado del ajuste de las *generatrices* de las bóvedas

Las variaciones estadísticas del modelo de regresión para  $a_{gen}$  y  $b_{gen}$  están representados en la figura [5.2] por líneas de puntos. La línea que representa los valores teóricos de los semiejes se localiza en el interior de los intervalos de confianza, centrada entre ellos y prácticamente coincidente con la regresión, por lo que, con los casos analizados, puede asegurarse que la predicción del modelo es consistente <sup>3</sup> y se puede mantener estadísticamente a medida que aumente el número de casos de la población.

### 5.1.3. Retumbos

Los retumbos medidos topográficamente entre el extremo más alto de las aristas verticales, las *generatrices*, y el punto de clave central de la bóveda se muestran en el cuadro B.5 (pág. 81 del anexo B).

En el cuadro B.5 se muestran para cada bóveda y en las cuatro aristas perimetrales de cada una de ellas, su denominación, el valor del lado correspondiente, el retumbo real entre la arista perimetral y la clave, el retumbo teórico y la diferencia, en tanto por ciento, entre el retumbo real y el teórico. El retumbo teórico fue obtenido con la predicción hecha en el apartado 3.2.2 (pág. 30) del capítulo anterior 3: «Forma de la bóveda extremeña».

Como quedó dicho en el apartado de resultados anterior 5.1.1, algunas bóvedas

<sup>3</sup> Con  $p\text{-value} = 0$ , queda rechazada la hipótesis nula y por tanto la recta de regresión tiene pendiente. La varianza del error poblacional es mínima

estudiadas no se adaptan a las dimensiones que sobre las *directrices* se predicen en el capítulo 3: «Forma de la bóveda extremeña». Por la misma razón expuesta en el apartado 5.1.1 en cuanto al límite fijado para las desviaciones de los ajustes realizados sobre los teóricos, quedan excluidos los retumbos que pertenecen a aquellas mismas bóvedas y por lo tanto eliminados del análisis estadístico sobre los retumbos.

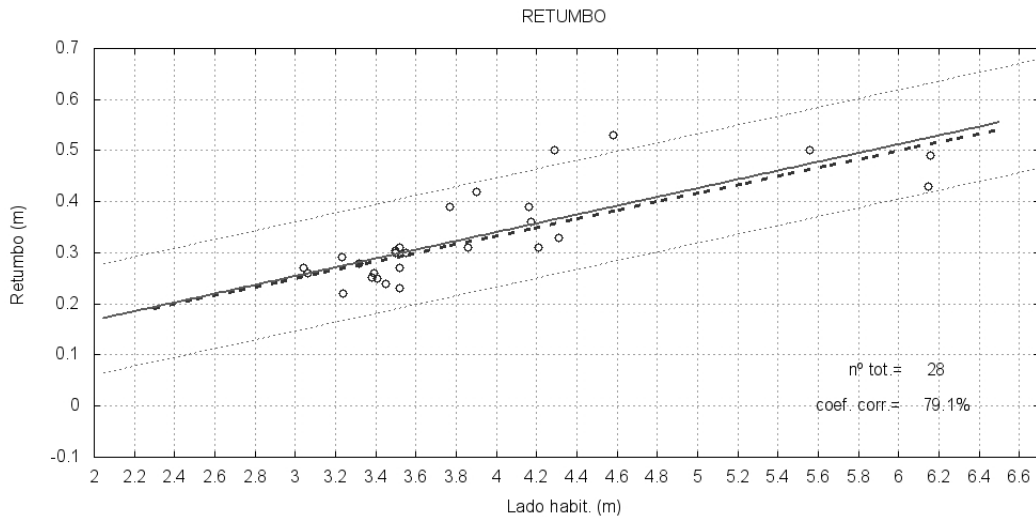


Figura 5.3: Retumbo real

Los valores estadísticos resultantes de la regresión se muestran en anejo B, cuadro B.6 (pág. 84). El modelo de regresión resultante para el retumbo resultó  $y = 0,09x$ ; con un nivel de confianza del 95 %, el modelo, con los intervalos de confianza para el coeficiente de regresión de la ordenada en el origen, abarca casos desde  $y = 0,06x$  hasta  $y = 0,11x$ .

Las variaciones estadísticas del modelo de regresión para el retumbo están representados en la figura [5.3] por líneas de puntos. La línea que representa los valores teóricos de los semiejes se localiza en el interior de los intervalos de confianza, por lo que, con los casos analizados, puede asegurarse que la predicción del modelo es consistente<sup>4</sup> y se puede mantener estadísticamente a medida que aumente el número de casos de la población.

La dispersión que se puede observar en el gráfico, algunos retumbos difieren del teórico en algo más de diez centímetros, puede deberse a distintas causas. A falta de un estudio más completo, podemos apuntar:

La mayoría de las bóvedas estudiadas no tienen una proyección en planta cuadrada como el modelo de referencia. Es posible que el maestro de obras forzara deliberadamente la geometría teórica de los arcos perimetrales para adaptar el conjunto de la bóveda a las dimensiones de las distintas luces de los muros fijándose como objetivo alcanzar la clave de la bóveda, que es un punto fijo,

<sup>4</sup> Con  $p\text{-value} = 0$ , queda rechazada la hipótesis nula y por tanto la recta de regresión tiene pendiente. La varianza del error poblacional es mínima

conocido de antemano y que no se puede modificar por alterar la cota del suelo de la planta superior.

#### 5.1.4. Flechas

Cada una de las bóvedas estudiadas y sus correspondientes cuatro aristas perimetrales en muros están representadas gráficamente en el anejo C: «Geometría real y ajustes II», en página 89 y siguientes. La flecha real obtenida en cada curva, altura desde los arranques o pechinas en los rincones hasta el punto más alto de la arista, está indicada en el anejo B, cuadro de resultados B.7: «Flechas» (pág. 84).

En dicho cuadro, junto al nombre de la bóveda y su correspondiente sección perimetral se indican: la luz del lado del habitáculo cubierto, la flecha real medida sobre el levantamiento topográfico, la relación entre el lado o luz y la flecha real, la flecha teórica según la hipótesis hecha en el apartado 3.2.2: «Curvas generatrices» del capítulo 3 (pág. 30).

Los resultados obtenidos en cada bóveda, las flechas, están representados en el diagrama de la figura 5.4. Cada flecha real medida está representada por un punto situado en el gráfico por su luz real y su correspondiente flecha real medida; se muestra en la figura, con línea discontinua, la flecha teórica que correspondería a cada curva perimetral según la hipótesis hecha en el mencionado apartado 3.2.2, y con línea continua se indica el ajuste de regresión realizado para todos los casos de flechas reales medidas.

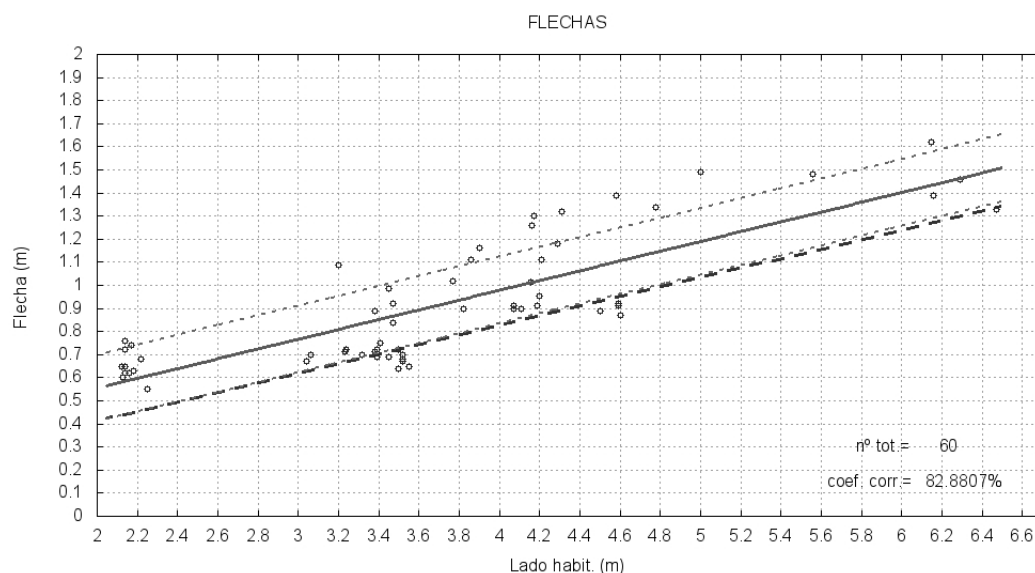


Figura 5.4: Flecha real

Los valores estadísticos de la regresión se muestran en el cuadro B.8, página 87. El modelo de regresión ajustado para las flechas resultó  $y = 0,21x + 0,13$ , y aunque con una pequeña diferencia de la ordenada en el origen respecto a la recta teórica, puede considerarse que ambas rectas, la regresión y la teórica, son paralelas. Con

un nivel de confianza del 95 %, el modelo obtenido, con los intervalos de confianza para el coeficiente de regresión de la ordenada en el origen, abarca casos desde  $y = 0,21x - 0,01$  hasta  $y = 0,21x + 0,28$ .

Las variaciones estadísticas del modelo de regresión para las flechas están representados en la figura [5.4] por líneas de puntos. La línea que representa los valores teóricos de las flechas, paralela a la regresión, se localiza en el extremo inferior de los intervalos de confianza de la regresión, por lo que, con los casos analizados, puede asegurarse, con un nivel de confianza mínimamente inferior al 95 %, que la predicción del modelo es consistente <sup>5</sup> y se puede mantener estadísticamente a medida que aumente el número de casos de la población.

El desplazamiento que se observa puede hacer pensar, en un primer momento, que la hipótesis establecida en el capítulo 3 no se verifica y sea diferente de:  $flecha/luz \approx 1/5$ . En los casos estudiados, estadísticamente la relación  $flecha/luz$  está más cerca de  $1/4$ ; esto puede deberse a distintas causas posibles:

Las primeras hiladas de los arcos perimetrales exige primeramente la ejecución de las pechinas y éstas se ejecutan a partir de una pequeña demolición de los muros en los rincones, desapareciendo las marcas del replanteo. La ejecución de las pechinas, que se realiza a estima, debe cubrir todo el hueco abierto y es posible que la fábrica resultante en los rincones no se ajuste al replanteo inicial.

La circunstancia anterior puede darse en uno o en ambos rincones, como puede apreciarse en los gráficos de secciones por las aristas perimetrales representados en el anejo C. En este trabajo se ha tomado como cuerda del arco elíptico la recta horizontal que pasa por mitad de las cotas de los puntos de arranque de las pechinas.

Las bóvedas aquí estudiadas no tienen la planta cuadrada tomada como referencia. Es posible que el maestro de obras al replantear los arcos perimetrales sobre muros con distintas luces se viera forzado, por la cota de la clave de la bóveda que es fija, a encajar las aristas de arranque de la fábrica deformando la geometría teórica del replanteo, rebajando la flecha del arco de mayor luz y de esta manera los puntos más altos de los arcos perimetrales queden a la misma altura <sup>6</sup>.

Hay que tener en cuenta que muchas de las bóvedas de este trabajo presentan un acabado de lucido con mortero y con esta operación es posible que la arista *generatriz* aparezca alargada, con respecto de la fábrica, en un intento de rematar o corregir defectos de ejecución y que aparezcan acentuadas, especialmente en el punto de encuentro de dos aristas, en los rincones.

<sup>5</sup> Con  $p\text{-value} = 0$ , queda rechazada la hipótesis nula y por tanto la recta de regresión tiene pendiente. La varianza del error poblacional es mínima

<sup>6</sup> Esta solución para bóvedas de arista de lados desiguales fue apuntada por Joseph Gelabert (ref. [13]) para la fabricación de plantillas para el tallado de piedra de bóvedas de planta rectangular.

Es posible que la regla de replanteo utilizada por los maestros de obra para la relación *flecha/luz* fuera de 1/4 en vez de la teórica de 1/5. Resulta más fácil dividir un cordel con la luz del lado en cuatro que en cinco partes iguales.

Estas posibles causas requieren un estudio más amplio que el que se presenta. En cualquier caso, creemos que, con el número de casos estudiados, la diferencia de la relación *flecha/luz* obtenida no es de suficiente magnitud como para invalidar el modelo teórico descrito en el capítulo 3: «Forma de la bóveda extremeña».

## 5.2. Conclusiones

Las conclusiones que se dirán se basan en los resultados de las mediciones realizadas de bóvedas extremeñas y que han sido expuestos en los apartados anteriores. Aunque no pueda afirmarse taxativa y enfáticamente la certeza de las hipótesis enunciadas en el capítulo 3: «Forma de la bóveda extremeña» dado el número de casos analizados en este trabajo, a nuestro juicio, lo que se concluirá debe tomarse como preludeo de un estudio más amplio en la casuística y, fundamentalmente, en el ámbito territorial. Lo que aquí se concluye sobre la geometría de la bóveda extremeña debe tomarse como un «acercamiento a su geometría».

Lo que se plantea, con la precaución antedicha, es que la bóveda extremeña, a partir de una sola magnitud —el lado del habitáculo— fué diseñada en origen bajo un criterio geométrico basado en curvas elípticas, tanto las *directrices* como las *generatrices*, con la particularidad y exclusividad de que todos sus elementos constituyentes están en la proporción *áurea*. El diseño original, la base geométrica de su forma característica, de las «curvas definidoras de las superficies» y de las «superficies definidoras de la bóveda» se dicen a continuación.

### 5.2.1. Curvas definidoras de las superficies

La bóveda extremeña, como quedó dicho, está constituida por el espacio interior resultante de la intersección de dos toroides <sup>7</sup> y las paredes o muros verticales que delimitan el espacio a cubrir. Las curvas planas por las que se desarrollan las superficies de la bóveda son dos: una que corresponde a las directrices superiores de los toroides, paralelas a los ejes de éstos en el plano vertical, y otra, la curva plana resultado de la intersección de las superficies de los muros con los toroides. De la primera, las *directrices*, resultan dos curvas elípticas iguales, y de la segunda, las *generatrices*, cuatro, también elípticas e iguales entre sí, en los muros. En la figura [5.5] se muestran los dos tipos de curvas y su disposición espacial.

El esquema representado en la figura [5.6] muestra la disposición espacial resultante, en los casos estudiados, en planta y alzado de las secciones constitutivas de los toroides, las posiciones relativas de los ejes de revolución, y las secciones rectas que generan dichos toroides

---

<sup>7</sup> (ref. [12]), p. 19.



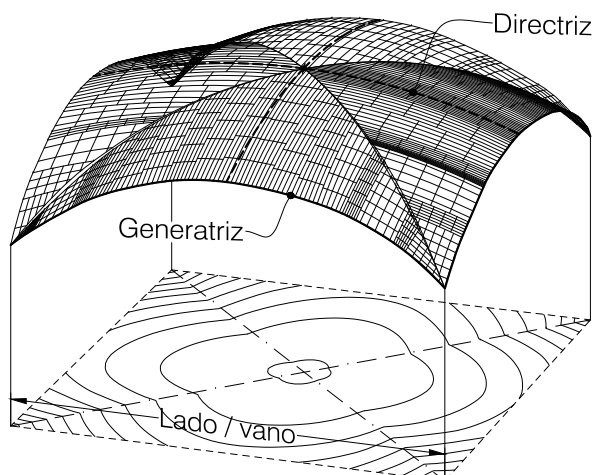


Figura 5.5: Curvas directriz y generatriz de la bóveda

El espacio a cubrir por la bóveda está delimitado por el interior de los cuatro muros verticales de lados  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  y  $da$ , que forman un paralelepípedo vertical según el eje  $Z$  de base cuadrada. Inicialmente la cota a la que se sitúa el origen de coordenadas respecto del suelo del habitáculo puede ser cualquiera <sup>8</sup>.

En el esquema superior de la figura [5.6] está representada la planta de una sección horizontal, por el origen del sistema de referencia, los dos toroides y el habitáculo. Los muros verticales de la sección están señalados entre los puntos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . El plano horizontal de la sección corta a los dos toroides según curvas cerradas elípticas, situadas fuera del habitáculo, con semiejes mayores paralelos a las caras de los muros y simétricas respecto de los ejes  $X$  e  $Y$ . Los parámetros que definen estas elipses del toroide están indicados como  $a_t$  y  $b_t$ , semiejes mayor y menor respectivamente, de las secciones rectas generadoras del toroide.

En la parte inferior de la imagen está representada una sección vertical, por el origen de referencia y los ejes  $X$  o  $Y$ . En esta sección se ha señalado el eje de revolución del toroide y la intersección del plano de la sección con la superficie exterior del toroide, puntos más alejados del centro de referencia, indicada como: directriz superior del toroide. Los planos que contienen a los muros verticales, paralelos y separados entre sí una distancia igual al vano a cubrir, cortan a los toroides según curvas verticales elípticas con ejes mayores  $a_{gen}$  ( $= a_t$ ) y menores  $b_{gen}$  ( $< b_t$ ).

Se pueden observar en dicha figura [5.6] disposiciones y magnitudes que son una singularidad, entre otras <sup>9</sup>, de la geometría de la bóveda extremeña objeto de este trabajo, a saber:

<sup>8</sup> En el apartado 3.3.3: «Replanteo práctico obra» (pág. 39) se especifica que la altura de la clave de la bóveda es una decisión tomada de antemano y que a partir de ese punto conocido se replantea el resto de la obra a ejecutar.

<sup>9</sup> Entre otras singularidades que se pueden resaltar destacan la rapidez de ejecución, la economía de medios auxiliares en su construcción (ref. [2], IV parte: conclusión, pág. 89; en ref. [8], pp. 135-136) y de las formas de transmisión de esfuerzos a su través: como bóveda de arista o como cúpula (ref. [11], p. 320).

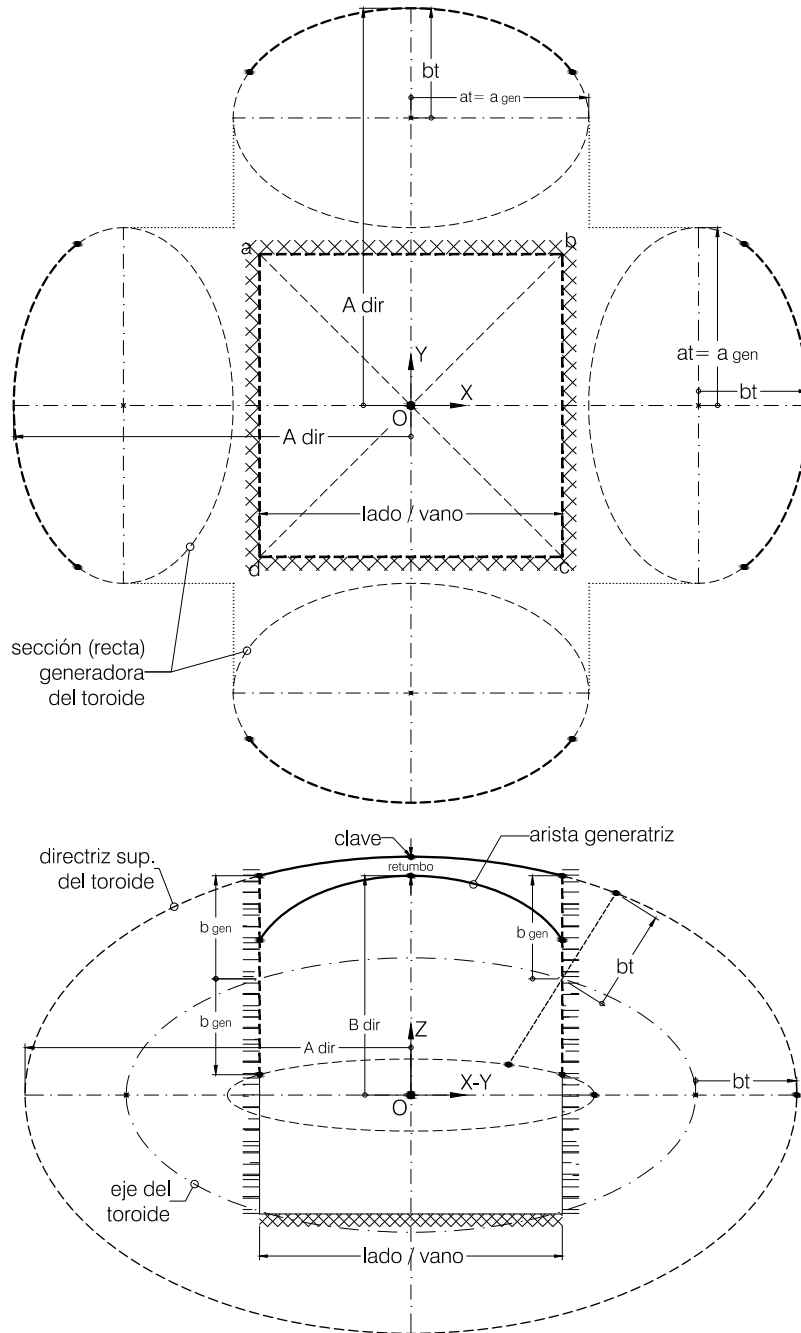


Figura 5.6: Planta del habitáculo y disposición de las secciones generadoras de los toroides (sup.) y sección vertical por directriz (inf.)

### De las curvas directrices

Las *directrices* de la bóveda, directrices superiores de los toroides, son curvas elípticas que se desarrollan en planos verticales y perpendiculares entre sí por el centro del habitáculo. Las magnitudes de los semiejes mayor y menor son iguales en ambas elipses y resultan:

Semieje mayor:  $A_{dir} = \text{vano}$ ;

Semieje menor:  $B_{dir} = \frac{A_{dir}}{\Phi}$ ;

y por tanto verifican la razón *áurea*:

$$p(A_{dir}, B_{dir}) = \frac{A_{dir}}{B_{dir}} = \Phi.$$

Los semiejes mayor y menor que definen las elipses *directrices* de la bóveda están relacionados con el *latus rectum*<sup>10</sup> de dichas elipses en la razón aritmética:

$$A_{dir} - B_{dir} = \frac{\text{latus rectum}_{dir}}{2}$$

### De las aristas diagonales

Las intersecciones de las dos superficies de los toroides que forman la bóveda, las aristas *diagonales*, son curvas cerradas de geometría compleja —no son elípticas—, contenidas en planos verticales entre dos rícones opuestos del habitáculo.

### De las curvas generatrices

Las *generatrices*, cada uno de los cuatro arcos perimetrales en los muros desde los que se inician las superficies de la bóveda, son curvas elípticas y las magnitudes de sus semiejes mayores y menores son iguales en todas ellas y resultan:

Semieje menor:  $b_{gen} = \frac{\text{lado}}{3}$ ;

Semieje mayor:  $a_{gen} = b_{gen} \times \Phi$ ;

y los semiejes están en razón *áurea*:

$$p(a_{gen}, b_{gen}) = \frac{a_{gen}}{b_{gen}} = \Phi.$$

Los semiejes mayor y menor que definen las elipses *generatrices* de la bóveda están relacionados con el *latus rectum*<sup>11</sup> de dichas elipses en la razón aritmética:

<sup>10</sup> En una elipse con el eje mayor en un plano horizontal y el eje menor según Z, el *latus rectum* corresponde al valor de la cuerda vertical de la elipse trazada por cualquiera de sus focos y su valor corresponde a:  $2 \times B_{dir}^2 / A_{dir}$ .

<sup>11</sup> En una elipse con el eje mayor en un plano horizontal y el eje menor según Z, el *latus rectum* corresponde al valor de la cuerda vertical de la elipse trazada por cualquiera de sus focos y su valor corresponde a:  $2 \times b_{gen}^2 / a_{gen}$ .

$$a_{gen} - b_{gen} = \frac{\textit{latus rectum}_{gen}}{2}$$

Las secciones rectas generadoras de los toroides son elípticas y tienen sus semiejes mayores  $a_t$  ( $= a_{gen}$ ) y menores  $b_t$  ( $> b_{gen}$ ) en una proporción tal que:  $p(a_t, b_t) \neq \Phi$ . Sin embargo, la intersección de los planos verticales de los muros con el toroide da como resultado sendas curvas elípticas en los muros cuyos semiejes mayor  $a_{gen}$  y menor  $b_{gen}$  sí están en la *proporción áurea*.

### De los retumbos

Los puntos medios de las aristas *generatrices*, los de mayor altura en los muros, presentan una diferencia de cota con el punto más alto de la bóveda, la clave, cuya magnitud viene dada por <sup>12</sup>:

$$\text{Retumbo} = \frac{\textit{lado}}{12}.$$

### De las flechas

La flecha del arco elíptico que aparece en el muro tiene una dimensión que corresponde, gráficamente, a la mitad del *latus rectum* de su elipse *generatriz* <sup>13</sup>.

$$f \approx \frac{\textit{latus rectum}}{2}$$

La razón entre flecha  $f$  y luz  $l$  en el arco elíptico del muro vertical, que es igual en todos los muros, es:

$$p(f, l) = \frac{f}{l} \approx \frac{1/2 \textit{latus rectum}}{l} = \frac{1}{4,838}$$

que a efectos prácticos puede tomarse como:

$$p(f, l) = \frac{f}{l} \approx \frac{1}{5}$$

---

<sup>12</sup> Ver observaciones en 5.1.4, p. 54

<sup>13</sup> Ver observaciones en 5.1.3, p. 52

## General

Todos los elementos de las curvas definidoras, las dimensiones de sus parámetros y las posiciones relativas entre ellas, son función de una sola magnitud: el lado o vano del habitáculo abovedado. A partir de él, se traza la bóveda extremeña resultando que todas sus partes constituyentes, curvas *directrices* y *generatrices* están en proporción *áurea*, precepto clásico de la geometría de la correcta e ideal proporción.

La traza geométrica de la bóveda extremeña puede realizarse de manera sencilla, a partir de la longitud del lado o vano, con instrumentos básicos de dibujo como son la regla y el compás.

El replanteo de la obra puede hacerse con útiles sencillos y de uso común en albañilería como el cordel y la plomada; las magnitudes de los elementos a replantear se obtienen fácilmente como fracciones o partes del lado o vano, operaciones fáciles y que están dentro de los conocimientos técnicos de los alarifes.

La geometría del abovedamiento, de esta manera diseñada, cumple los requisitos de forma que durante siglos se han tenido como canon de belleza, y como referencia indiscutible tomamos las palabras de Marco Vitruvio : *«Es imposible que un templo posea una correcta disposición si carece de simetría y de proporción, como sucede con los miembros o partes del cuerpo de un hombre bien formado.»* ... *«Por tanto, si la naturaleza ha formado el cuerpo humano de modo que sus miembros guardan una exacta proporción respecto a todo el cuerpo, los antiguos fijaron también esta relación en la realización completa de sus obras, donde cada una de sus partes guarda una exacta y puntual proporción respecto a la forma total de su obra.»* y más adelante, concluyendo el capítulo I del libro II: *«En consecuencia, si es lógico y conveniente que se haya descubierto el número a partir de las articulaciones del cuerpo humano y a partir de cada uno de sus miembros, entonces se establece una proporción de cada una de las partes fijadas, respecto a la totalidad del cuerpo en su conjunto; sólo nos queda hacernos eco de quienes, al construir los templos de los dioses inmortales, ordenaron las partes en sus obras con el fin de que, por separado y en su conjunto, resultaran armónicas, en base a su proporción y simetría.»*<sup>14</sup>.

Por todo lo anterior hemos considerado oportuno reflejar, en la figura [5.7], la armonía del diseño de la bóveda extremeña en base a sus proporciones y simetría sobre el canon de belleza que representa el dibujo de Leonardo da Vinci sobre «El Hombre de Vitruvio». La belleza a que nos referimos no debe entenderse con el significado común de la palabra ya que los juicios estéticos son subjetivos. La belleza, en este trabajo, la referimos, al arte de la construcción, y la geometría e ingeniería al servicio de la Arquitectura para realizar este tipo de abovedamiento que responde a un ideal de belleza.

---

<sup>14</sup> (ref. [30]), pp. 81-84.

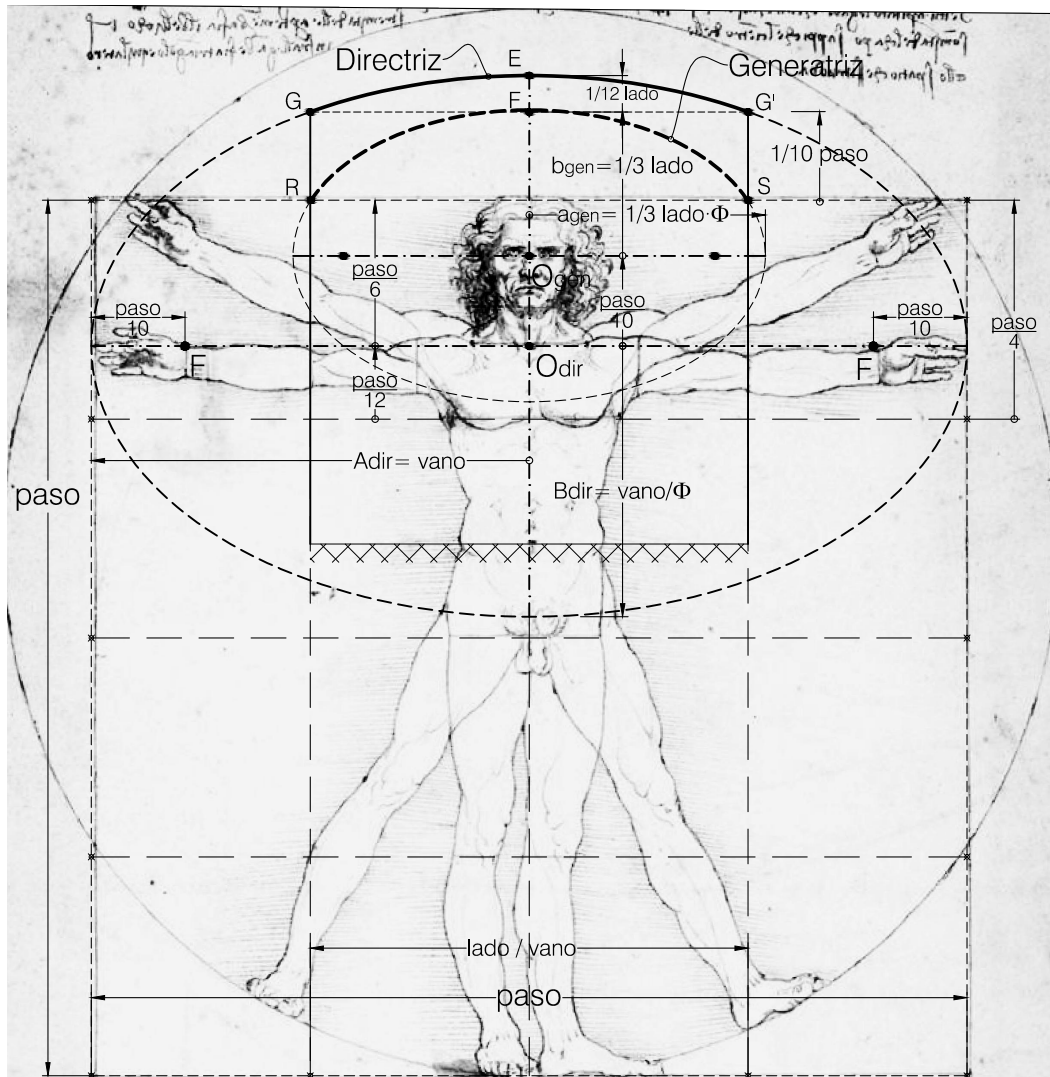


Figura 5.7: Elipse *directriz* y *generatriz* definidoras de la bóveda extremeña, con proporciones *áureas*, inscrita en el *Hombre de Vitruvio*.

### 5.3. Epílogo

El tipo de la bóveda extremeña es una singularidad en cuanto a la geometría que la define. La distinción entre las bóvedas de arista peraltadas radica en su forma, constituida por superficies elípticas y la excepcionalidad de las proporciones entre los parámetros geométricos que definen las distintas aristas y superficies del abovedamiento: todas están en proporción *áurea*.

Esta singularidad, extraordinaria a nuestro juicio, entendemos que dada su complejidad y lo acertado de sus proporciones geométricas, no ha podido ser producto de la casualidad, de un diseño fortuito, del azar.

Pensamos que este antiguo diseño original produjo un nuevo estilo y/o tipo de abovedamiento que conocemos, hoy, recientemente, con el nombre de «bóveda extremeña»; y que su forma se difundió mediante reglas de dimensionamiento memo-

rizadas mnemotécnicamente y transmitidas oralmente, entre el gremio de alarifes a través de los siglos.

Consideramos que a partir de lo expuesto hasta aquí se abre una interesante vía de estudio para futuros trabajos, con una perspectiva más general ampliando el campo de estudio a mayor número de bóvedas, con más amplitud territorial y, particularmente, con investigación en archivos históricos.

*“...y simplemente por placer, nunca por el beneficio.”*





# Anexos



## Anexo A

### Geometría teórica

Con la ayuda de la geometría analítica se puede interpretar, a partir de las coordenadas de puntos en un sistema de referencia cartesiano, la medida de las distancias, las relaciones entre los puntos, las superficies que definen etc. También se pueden obtener las ecuaciones matemáticas de las curvas que describen y relacionan los puntos y otros elementos definidores de la bóveda como ejes de simetría y de revolución, dimensiones y proporciones entre ellos, intersección espacial de superficies y sus formas, etc. A partir de dichas ecuaciones se puede interpretar la *armonía de proporciones* en base a las relaciones entre los distintos elementos constitutivos de la forma de la bóveda mediante sencillos cálculos algebraicos.

Se expone en este anexo las relaciones geométricas teóricas que se deben verificar en la bóveda extremeña de manera provisional, como base del trabajo que se expone y que deberá ser confirmado con los datos reales, obtenidos de levantamientos topográficos (recogidos en anexo B y C), para sacar de ello, mediante su análisis, si es posible, una consecuencia.

La geometría teórica que se establece provisionalmente es el resultado de lo expuesto en el capítulo 3, epígrafe 3.2: Definición geométrica con «regla y compás» pág. 28, que se tomará como punto de partida en este trabajo.

#### A.1. Geometría teórica de las superficies

Para la descripción y análisis de las curvas que forman una bóveda es necesario recurrir a la geometría al ser esta la parte de las matemáticas que trata de la extensión, de la medida, de las relaciones entre sus dimensiones y de las formas expresables con medidas.

Se dice que un conjunto de puntos constituye un lugar geométrico respecto de una cierta propiedad, cuando todo punto del conjunto posee esta propiedad y, recíprocamente, todo punto del plano que posee la propiedad pertenece a dicho conjunto. Los lugares geométricos de las dos curvas planas delimitadoras de las bóvedas y que tienen la misma propiedad, satisfacen la ecuación general de segundo grado<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>(ref. [18]), pp. 505-512.

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Esta ecuación general de cónicas representa los lugares geométricos del plano de elipses, parábolas e hipérbolas. Conocida la propiedad de la elipse que es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos, llamados focos, es constante, dicha ecuación representará a una elipse cuando la relación entre los seis parámetros satisfagan las dos condiciones siguientes:

- a)  $B^2 - 4AC < 0$ , con la que se excluyen parábolas e hipérbolas y  
 b)  $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F > 0$ , por la que se evitan elipses degeneradas.

Para una elipse<sup>2</sup>, referida a un sistema de referencia, con centro en  $(x_c, y_c)$  y siendo a el semieje mayor y b el semieje menor, la ecuación general de la cónica que satisface las condiciones anteriores puede expresarse de forma cartesiana como:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1,$$

que describe el lugar geométrico de los puntos  $(x_e, y_e)$  de una elipse con eje mayor paralelo al de referencia OX (horizontal), eje menor paralelo al OY (vertical), distancia focal  $c < a$  y semiejes mayor y menor con relación  $a > b$ .

Se comprueba la identidad de las ecuaciones cartesianas con la general de cónicas, con las condiciones impuestas en a) y b), al estar relacionados sus parámetros según:

$$A = b^2, \quad B = 0, \quad C = a^2, \quad D = -2b^2x_c, \quad \text{y} \quad F = b^2x_c^2 + a^2y_c^2 - a^2b^2.$$

Las dimensiones de los parámetros de las curvas teóricas que se dirán en este apartado están referidas a la ecuación cartesiana de la elipse. La forma de la ecuación general se reserva para el ajuste de la geometría real y que se muestran en cada una de las bóvedas estudiadas que se exponen en el anexo C: Geometría real II, pág. 89.

Las condiciones teóricas para la geometría teórica (figura [A.1]) de las curvas elípticas *directrices* y *generatrices* expuestas en el capítulo 3: Forma de la bóveda extremeña, epígrafe 3.2, son:

- Curvas *directrices*:

Semieje mayor:  $A_{dir} = \text{luz del vano a cubrir}$ .

Semieje menor:  $B_{dir} = \text{luz del vano} / \Phi$ .

- Curvas *generatrices*:

Semieje mayor:  $(b_{gen} - \text{Retumbo}) = / \Phi$ .

Semieje menor:  $a_{gen} = b_{gen} / \Phi$ .

---

<sup>2</sup>Del griego  $\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\zeta$ : imperfección. Curva geométrica estudiada por el matemático y geómetra griego Menaechmus de Alopeconnesus (ca. 380-ca. 320 a.C.).

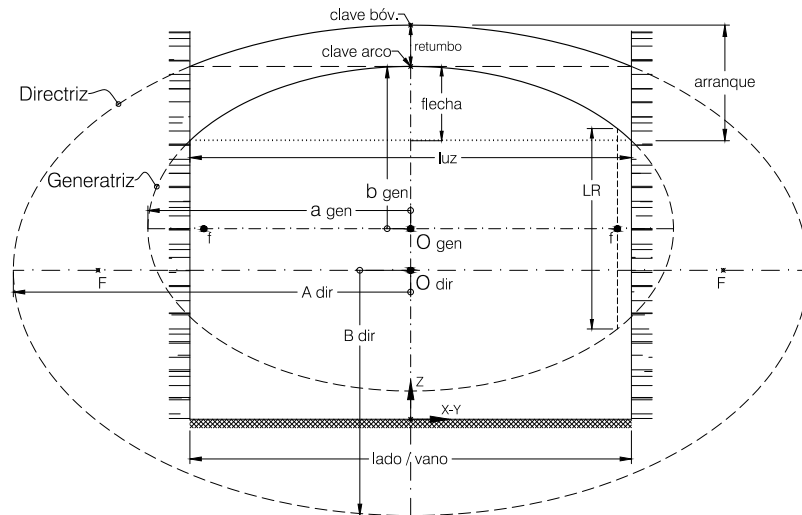


Figura A.1: Disposición curvas Directriz y Generatriz.  
(parámetros geométricos de definición)

### A.1.1. Dimensiones teóricas de las bóvedas

Con las condiciones geométricas impuestas, se presenta en la siguiente tabla [A.1] las dimensiones teóricas de la bóveda extremeña. La nomenclatura usada en este trabajo y en las tablas que se muestran en este anejo, que se corresponden con la figura [A.2], es:

- $A_{dir}$ ,  $a_{gen}$ : semiejes mayores (horizontales) de las curvas elípticas que definen las curvas directrices y generatrices.
- $B_{dir}$ ,  $b_{gen}$ : semiejes menores (verticales) de las curvas elípticas que definen las curvas directrices y generatrices.
- arrq.: arranque. distancia vertical entre el inicio de la fábrica de los arcos perimetrales (pechinas) y la clave de la bóveda.
- Clave de la bóveda: punto más alto de la bóveda intersección de las cuatro superficies que la forman.
- Clave del arco: punto más alto de la curva generatriz en el muro.
- Directriz (Superior): curvas bajo las que se desarrollan las generatrices.
- Flecha: altura del arco perimetral. Distancia vertical desde el arranque de la fábrica del arco hasta el punto más alto de la curva generatriz.
- Generatriz: curvas elípticas que sustentadas en la directrices desarrollan las distintas superficies de la bóveda entre pares de muros opuestos.
- Intersección diagonal: curva intersección de las superficies generadas por las generatrices. Aristas de la bóveda.
- Lado: dimensión horizontal del habitáculo cubierto por la bóveda.
- Luz: dimensión horizontal de un arco medida entre sus arranques.
- Ret.: retumbo. Diferencia de altura entre la clave de la bóveda y la del arco.

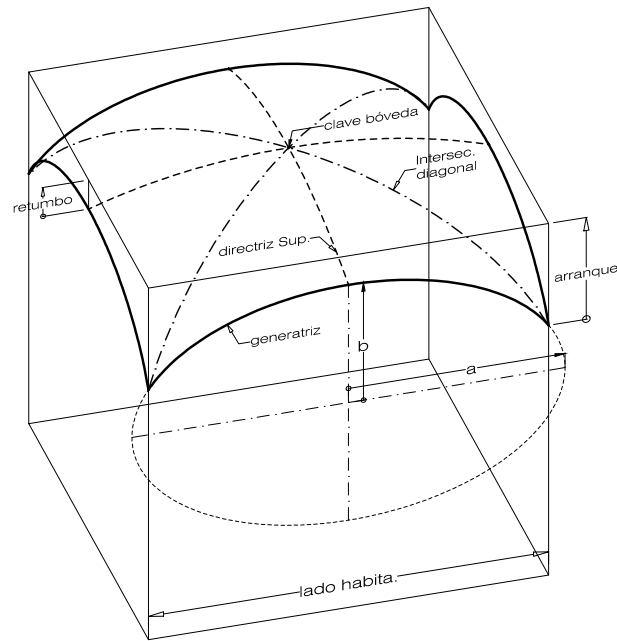


Figura A.2: Esquema de los elementos geométricos que definen una bóveda Extremeña.

Cuadro A.1: Dimensiones teóricas de los elementos geométricos de la bóveda extremeña (en metros).

lado-vano	Directriz				Generatriz			
	$A_{dir}$	$B_{dir}$	Ret.	arrq.	$a_{gen}$	$b_{gen}$	flecha	luz
2,0	2,0	1,236	0,17	0,58	1,079	0,67	0,41	2,0
2,1	2,1	1,298	0,18	0,61	1,133	0,7	0,43	2,1
2,2	2,2	1,36	0,18	0,64	1,187	0,73	0,45	2,2
2,3	2,3	1,421	0,19	0,67	1,24	0,77	0,47	2,3
2,4	2,4	1,483	0,2	0,69	1,294	0,8	0,49	2,4
2,5	2,5	1,545	0,21	0,72	1,348	0,83	0,52	2,5
2,6	2,6	1,607	0,22	0,75	1,402	0,87	0,54	2,6
2,7	2,7	1,669	0,23	0,78	1,456	0,9	0,56	2,7
2,8	2,8	1,73	0,23	0,81	1,51	0,93	0,58	2,8
2,9	2,9	1,792	0,24	0,84	1,564	0,97	0,6	2,9
3,0	3,0	1,854	0,25	0,87	1,618	1,0	0,62	3,0
3,1	3,1	1,916	0,26	0,9	1,672	1,033	0,64	3,1
3,2	3,2	1,978	0,27	0,93	1,726	1,067	0,66	3,2
3,3	3,3	2,04	0,28	0,95	1,78	1,1	0,68	3,3

continúa en pág. siguiente

Cuadro A.1: Dimensiones teóricas de los elementos geométricos de la bóveda extremeña (cont.)

lado-vano	Directriz		Ret.	arrq.	Generatriz			
	$A_{dir}$	$B_{dir}$			$a_{gen}$	$b_{gen}$	flecha	luz
3,4	3,4	2,101	0,28	0,98	1,834	1,133	0,7	3,4
3,5	3,5	2,163	0,29	1,013	1,888	1,167	0,72	3,5
3,6	3,6	2,225	0,3	1,042	1,942	1,2	0,74	3,6
3,7	3,7	2,287	0,31	1,071	1,996	1,233	0,76	3,7
3,8	3,8	2,349	0,32	1,1	2,05	1,267	0,78	3,8
3,9	3,9	2,41	0,33	1,128	2,103	1,3	0,8	3,9
4,0	4,0	2,472	0,33	1,157	2,157	1,333	0,82	4,0
4,1	4,1	2,534	0,34	1,186	2,211	1,367	0,84	4,1
4,2	4,2	2,596	0,35	1,215	2,265	1,4	0,87	4,2
4,3	4,3	2,658	0,36	1,244	2,319	1,433	0,89	4,3
4,4	4,4	2,719	0,37	1,273	2,373	1,467	0,91	4,4
4,5	4,5	2,781	0,38	1,302	2,427	1,5	0,93	4,5
4,6	4,6	2,843	0,38	1,331	2,481	1,533	0,95	4,6
4,7	4,7	2,905	0,39	1,36	2,535	1,567	0,97	4,7
4,8	4,8	2,967	0,4	1,389	2,589	1,6	0,99	4,8
4,9	4,9	3,028	0,41	1,418	2,643	1,633	1,009	4,9
5,0	5,0	3,09	0,42	1,447	2,697	1,667	1,03	5,0
5,1	5,1	3,152	0,42	1,476	2,751	1,7	1,051	5,1
5,2	5,2	3,214	0,43	1,505	2,805	1,733	1,071	5,2
5,3	5,3	3,276	0,44	1,534	2,859	1,767	1,092	5,3
5,4	5,4	3,337	0,45	1,562	2,912	1,8	1,112	5,4
5,5	5,5	3,399	0,46	1,591	2,966	1,833	1,133	5,5
5,6	5,6	3,461	0,47	1,62	3,02	1,867	1,154	5,6
5,7	5,7	3,523	0,47	1,649	3,074	1,9	1,174	5,7
5,8	5,8	3,585	0,48	1,678	3,128	1,933	1,195	5,8
5,9	5,9	3,646	0,49	1,707	3,182	1,967	1,215	5,9
6,0	6,0	3,708	0,5	1,736	3,236	2,0	1,236	6,0
6,1	6,1	3,77	0,51	1,765	3,29	2,033	1,257	6,1
6,2	6,2	3,832	0,52	1,794	3,344	2,067	1,277	6,2
6,3	6,3	3,894	0,52	1,823	3,398	2,1	1,298	6,3
6,4	6,4	3,955	0,53	1,852	3,452	2,133	1,318	6,4
6,5	6,5	4,017	0,54	1,881	3,506	2,167	1,339	6,5

continúa en pág. siguiente

Cuadro A.1: Dimensiones teóricas de los elementos geométricos de la bóveda extremeña (cont.)

lado-vano	Directriz		Ret.	arrq.	Generatriz			
	$A_{dir}$	$B_{dir}$			$a_{gen}$	$b_{gen}$	flecha	luz
6,6	6,6	4,079	0,55	1,91	3,56	2,2	1,36	6,6
6,7	6,7	4,141	0,56	1,939	3,614	2,233	1,38	6,7
6,8	6,8	4,203	0,57	1,968	3,668	2,267	1,401	6,8
6,9	6,9	4,264	0,57	1,996	3,721	2,3	1,421	6,9
7,0	7,0	4,326	0,58	2,025	3,775	2,333	1,442	7,0
7,1	7,1	4,388	0,59	2,054	3,829	2,367	1,463	7,1
7,2	7,2	4,45	0,6	2,083	3,883	2,4	1,483	7,2
7,3	7,3	4,512	0,61	2,112	3,937	2,433	1,504	7,3
7,4	7,4	4,573	0,62	2,141	3,991	2,467	1,524	7,4
7,5	7,5	4,635	0,62	2,17	4,045	2,5	1,545	7,5

(fin Cuadro A.1)



## Anexo B

### Geometría real y ajustes I

#### B.1. Introducción

Se expone en este anexo el método seguido para la obtención de las curvas geométricas que mejor se adaptan a las distintas superficies y aristas que forman las bóvedas extremeñas que se han estudiado en este trabajo (en anexo C): primero las curvas *directrices* de las superficies que se desarrollan en el espacio y segundo las curvas de las aristas *generatrices* que arrancando en los muros perimetrales en que se apoya la fábrica se desarrollan en el espacio cubierto siguiendo la trayectoria marcada por las *directrices*. También se incluyen en este anexo los resultados de las mediciones efectuadas de los retumbos y flechas, deducidas de los levantamientos topográficos realizados para cada bóveda.

Para cada uno de los ajustes realizados, dos curvas *directrices* y cuatro *generatrices* por bóveda, se indican los valores obtenidos de los ejes mayor y menor así como la diferencia de estos valores con los teóricos según el anexo anterior A. Para cada una de las curvas *generatrices* se muestran las mediciones de sus retumbos, flechas y relaciones luz-flecha y la comparación de sus magnitudes reales con las teóricas desarrolladas en ese mismo anexo. Se incluye también un estudio estadístico descriptivo de la relación entre los datos tomados topográficamente y las curvas ajustadas como base para la interpretación de las hipótesis expuestas en el anexo A: «Geometría teórica» y en el que se desarrolla analíticamente las hipótesis sobre la «Forma de la bóveda extremeña» expuestas en el capítulo 3.

#### B.2. Ajuste de las curvas directrices

Entre cada uno de los tres puntos que se han tomado topográficamente y que se toman para la definición de la *directriz*, dos en mitad de muros opuestos y en las cotas más altas de las aristas en esos muros, y el tercero en lo más alto de la bóveda, la clave, se establece la ecuación de una curva elíptica y posteriormente se verifica si engloba a los tres puntos fijos tomados topográficamente.

En el punto central del suelo del habitáculo abovedado, figura [B.1], proyección de la intersección de las aristas *diagonales*, se establece el origen de un sistema de referencia fijo con ejes X e Y horizontales y sensiblemente paralelos y/o perpendiculares a los planos verticales de los muros, y eje Z vertical y conteniendo al centro de la bóveda, la clave.

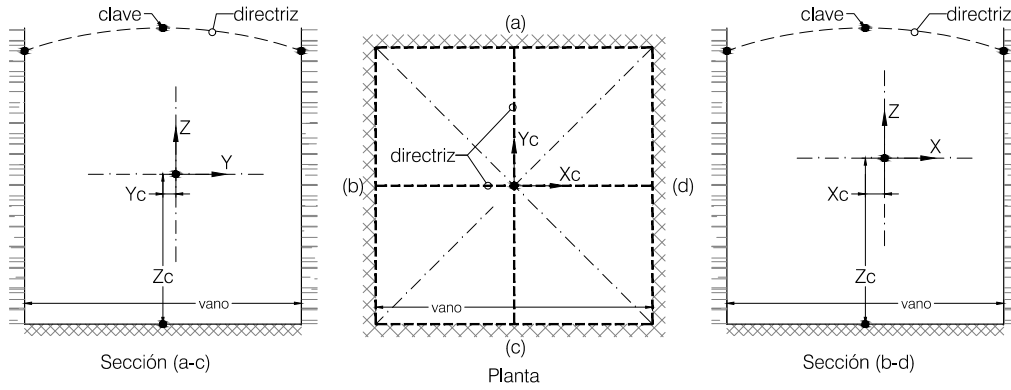


Figura B.1: Sistemas de referencia en planta y en secciones *directrices*

Para cada una de las dos secciones *directrices* se toma un sistema de referencia subordinado con desplazamiento vertical  $Z_c$  y horizontal  $X_c$  o  $Y_c$  según la sección a estudiar. Los tres puntos de la *directriz*, de coordenadas  $(y_p, z_p)$  y  $(x_p, z_p)$  en cada sección, tendrán que verificar las ecuaciones:

$$\text{sección (a-c): } \frac{(y_p - Y_c)^2}{A_{dir}^2} + \frac{(z_p - Z_c)^2}{B_{dir}^2} = 1$$

$$\text{sección (b-d): } \frac{(x_p - X_c)^2}{A_{dir}^2} + \frac{(z_p - Z_c)^2}{B_{dir}^2} = 1$$

Como se pretende encontrar una elipse que se ajuste lo más posible y que esté inscrita en un *rectángulo áureo* de tal manera que sus semiejes mayor y menor estén en la proporción  $p(A_{dir}, B_{dir}) = \Phi$ , la cuestión se resuelve al encontrar un valor del semieje menor B tal que:

$$\text{sección (a-c): } B_{dir} = \frac{1}{\Phi} \sqrt{\Phi^2(z_p - Z_c)^2 + (y_p - Y_c)^2}$$

$$\text{sección (b-d): } B_{dir} = \frac{1}{\Phi} \sqrt{\Phi^2(z_p - Z_c)^2 + (x_p - X_c)^2}$$

Para cada punto de la observación se obtiene una elipse, con semiejes  $A_{dir}$  y  $B_{dir}$ , con centro en el sistema de referencia secundario. La curva que mejor se ajusta a todos los puntos de la *directriz* se obtiene promediando los distintos valores de  $A_{dir}$  y  $B_{dir}$  obtenidos buscando una posición, por interacción de la posición del eje secundario respecto del fijo, para el centro de referencia secundario de tal manera que las distancias de los puntos topografiados  $(y_p, z_p)$  y  $(x_p, z_p)$  a la elipse ajustada, la *directriz*, sean mínimas.

En el siguiente epígrafe se muestra en forma de cuadro los resultados de los ajustes realizados para las elipses *directrices* de cada una de las bóvedas estudiadas (ver anexo C: Geometría real y ajustes II). Los datos reflejados corresponden a:

- Nombre: denominación de la bóveda y sección (anexo C).
- vano: dimensión del vano cubierto en la sección, en metros.

- $X_c$ : ordenada del centro de la elipse ajustada respecto del origen de referencia fijo inicial (punto central del suelo del habitáculo cubierto), en metros.
- $Y_c$ : abscisa del centro de la elipse ajustada respecto del origen de referencia fijo inicial, en metros.
- $A_{dir}$ : valor del semieje mayor de la elipse ajustada, en metros.
- $B_{dir}$ : valor del semieje menor de la elipse ajustada, en metros.
- $\Delta A_{teor}$ : diferencia del semieje mayor ajustado  $A_{dir}$  respecto del semieje mayor teórico  $A_{teor}$  indicado en anexo A, en tanto por ciento.
- $\Delta B_{teor}$ : diferencia del semieje menor ajustado  $B_{dir}$  respecto del semieje menor teórico  $B_{teor}$  indicado en anexo A, en tanto por ciento.

### B.2.1. Resultados ajuste de directrices

Resultados de los ajustes realizados para las elipses *directrices* (ver resultados en los gráficos de secciones en anejo C a partir de la página 89).

Cuadro B.1: *Directrices*. Elipses ajustadas

Nombre	vano	$A_{dir}$	$B_{dir}$	$X_c$	$Z_c$	$\Delta A_{teor}(\%)$	$\Delta B_{teor}(\%)$
Altagracia(a-c)	3,425	3,385	2,092	0,0	2,798	-1,1679	-1,17
Altagracia(b-d)	4,23	4,208	2,601	0,1	2,343	-0,52	-0,508
ArroyoLuz1(a-b)	3,419	3,485	2,154	-0,13	0,563	1,9304	1,9376
ArroyoLuz1(d-c)	3,31	3,367	2,081	-0,1	0,621	1,7221	1,7259
ArroyoLuz2(a-c)	3,389	3,382	2,09	0,02	0,878	-0,207	-0,216
ArroyoLuz2(b-d)	3,28	3,333	2,06	0,01	0,917	1,6159	1,6204
Palancar1(a-c)	2,14	6,409	3,971	-0,15	-0,84	199,49	200,24
Palancar1(b-d)	2,16	6,501	4,021	-0,15	-0,91	200,97	201,21
Palancar2(a-c)	2,13	6,477	4,004	-0,25	-0,88	204,08	204,16
Palancar2(b-d)	2,23	6,474	3,99	0,1	-0,89	190,31	189,5
Palancar3(a-c)	2,15	6,495	4,011	-0,05	-0,872	202,09	201,86
Palancar3(b-d)	2,15	6,483	4,01	-0,05	-0,85	201,53	201,78
Prado4(a-c)	4,18	4,163	2,571	0,09	1,34	-0,407	-0,479
Prado4(b-d)	4,31	4,249	2,619	-0,04	1,26	-1,4153	-1,6791
Prado5(a-c)	4,27	4,17	2,577	0,08	1,26	-2,3419	-2,3496
Prado5(b-d)	4,27	4,207	2,596	0,2	1,23	-1,4754	-1,6296
Seguras1(a-c)	4,13	4,657	2,873	-0,07	1,17	12,76	12,557
Seguras1(b-d)	4,59	6,246	3,868	0,01	0,16	36,078	36,352
Seguras2(a-c)	4,09	5,16	3,183	0,0	0,81	26,161	25,922
Seguras2(b-d)	4,54	5,87	3,627	-0,02	0,39	29,295	29,265
Víctor1(a-c)	3,51	3,414	2,11	0,0	0,79	-2,735	-2,7336
Víctor1(b-d)	3,49	3,446	2,13	-0,1	0,8	-1,2607	-1,2489
Víctor2(a-c)	3,05	2,985	1,837	-0,04	0,93	-2,1311	-2,5466
Víctor2(b-d)	3,54	3,579	2,218	0,03	0,59	1,1017	1,3785

continúa en pág. siguiente

Nombre	vano	$A_{dir}$	$B_{dir}$	$X_c$	$Z_c$	$\Delta A_{teor}(\%)$	$\Delta T_{teor}(\%)$
Becerra1(a-c)	5,73	5,773	3,567	0,07	0,61	0,75	0,725
Becerra1(b-d)	7,15	7,369	4,563	-0,03	-0,35	3,0629	3,26
Becerra2(a-c)	5,36	6,912	4,276	0,01	-0,27	28,955	29,08
Becerra2(b-d)	6,62	10,694	6,607	0,01	-2,6	61,541	61,486
CaceresPM(a-c)	3,6	6,354	3,931	-0,35	0,05	76,5	76,68
CaceresPM(b-d)	3,46	6,294	3,893	-0,25	0,06	81,908	82,052

(fin Cuadro B.1)

### B.2.2. Estadística ajuste de directrices

Se ha realizado un análisis estadístico de regresión lineal simple donde se analiza la influencia de la variable explicativa *vano* sobre los valores que se han medido en las variables dependientes  $A_{dir}$  y  $B_{dir}$ .

En el análisis de regresión lineal se han descartado como casos *outlier*<sup>1</sup> aquellas bóvedas con valores de semiejes de las elipses *directrices* que exceden en más del 10 % sobre los teóricos previstos según la hipótesis expuesta en el capítulo 3, apartado 3.2.1: «Curvas directices» (pág. 28).

La regresión lineal, realizada sobre 16 casos, tiene un nivel de confianza del 95 % en que el parámetro buscado estará dentro de los intervalos de confianza.

<sup>1</sup>Caso atípico cuantitativo de una población que resulta mayor o menor de lo esperado por tener un residuo inusual o excesivo, muy grande o muy pequeño

	semieje $A_{dir}$	semieje $B_{dir}$
model:	1,04262 vano - 0,1743	0,646 vano - 0,1146
means:	[4,03456; 4,03219]	[4,03456; 2,49163]
variances:	[1,05461; 1,15059]	[1,05461; 0,4418]
correlation:	0,9982	0,998
adc:	0,9961	0,9957
a_estimation:	-0,1743	-0.1146
a_conf_int:	[-0,3241; -0,02455]	[-0,2123; -0,01686]
b_estimation:	1,04262	0,646
b_conf_int:	[1,00664; 1,07861]	[0,6225; 0,6694]
hypotheses:	H0: b=0 ;H1: b≠0	H0: b=0 ;H1: b≠0
statistic:	62,1489	59,0195
distribution:	[student_t, 14]	[student_t, 14]
p-value:	0,0	0,0
v_estimation:	0,004749	0,002021
v_conf_int:	[0,002546; 0,01181]	[0,001083; 0,005028]

Cuadro B.2: Estadística de las elipses *directrices* ajustadas

### B.3. Ajuste de las curvas generatrices

Entre todos los puntos del levantamiento topográfico de las aristas verticales de la bóveda, la *generatriz*, se hace pasar una curva elíptica y posteriormente se verifica la bondad del ajuste realizado.

En cada uno de los cuatro muros en los que descansa la bóveda, figura [B.2], se establece un sistema de referencia fijo, de ejes  $X_c$  y  $Z_c$ , situado en mitad del muro y a cota del suelo. A partir de este sistema se establece otro secundario, de ejes  $x$  y  $z$  paralelos al anterior, desde el que se estudia la curva que mejor se adapta a los múltiples puntos topográficos en cada arista *generatriz*.

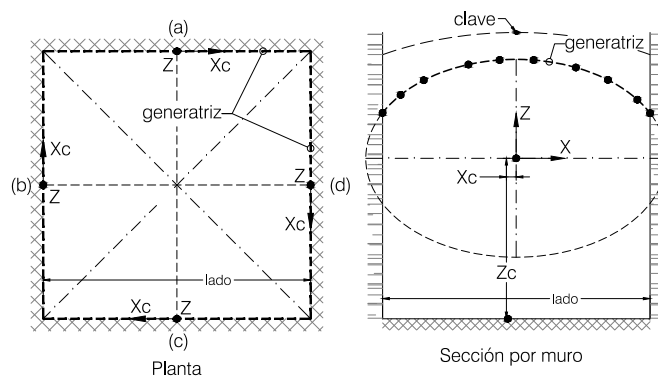


Figura B.2: Sistemas de referencia en planta y en secciones *generatrices*

La curva elíptica que engloba los distintos puntos  $(x_p, z_p)$  de la arista tendrá que

verificar, en cada sección:

$$\text{sección } ( ): \quad \frac{(x_p - X_c)^2}{a_{gen}^2} + \frac{(z_p - Z_c)^2}{b_{gen}^2} = 1$$

Si la elipse buscada, sus ejes, están en la proporción *áurea* se tiene que verificar que  $p(a_{gen}, b_{gen}) = \Phi$  y por tanto la ecuación anterior se resuelve, conocidas las posiciones relativas de los puntos  $(x_p, z_p)$ , al hallar el valor del semieje menor de la elipse  $b_{gen}$  que satisfaga:

$$\text{sección } ( ): \quad B_{dir} = \frac{1}{\Phi} \sqrt{\Phi^2(x_p - X_c)^2 + (z_p - Z_c)^2}$$

Con esta condición impuesta, para cada punto observado  $(x_p, z_p)$  se obtiene una elipse de semiejes  $a_{gen}$  y  $b_{gen}$  con centro en el sistema de referencia secundario. La curva que mejor se ajusta a todos los puntos de la *generatriz* se obtiene promediando los distintos valores de  $a_{gen}$  y  $b_{gen}$  buscando, por interacción de la posición del eje secundario respecto del fijo, la posición del centro del primero en que resulte que las distancias de los puntos  $(x_p, z_p)$  a la elipse ajustada sean mínimas.

En el siguiente epígrafe se muestra en forma de cuadro los resultados de los ajustes realizados para las elipses *generatrices* en los cuatro muros de cada una de las bóvedas estudiadas (ver anexo C: Geometría real y ajustes II). Los datos reflejados corresponden a:

- Nombre: denominación de la bóveda y sección (anexo C).
- lado: ancho —lado— del muro en la sección, en metros.
- $X_c$ : ordenada del centro de la elipse ajustada respecto del origen de referencia fijo inicial (punto central del muro a cota del suelo del habitáculo), en metros.
- $Y_c$ : abscisa del centro de la elipse ajustada respecto del origen de referencia fijo inicial, en metros.
- $a_{gen}$ : valor del semieje mayor de la elipse vertical ajustada, en metros.
- $b_{gen}$ : valor del semieje menor de la elipse vertical ajustada, en metros.
- $\Delta a_{teor}$ : diferencia del semieje mayor ajustado  $a_{gen}$  respecto del semieje mayor teórico  $a_{teor}$  indicado en anexo A, en tanto por ciento.
- $\Delta b_{teor}$ : diferencia del semieje menor ajustado  $b_{gen}$  respecto del semieje menor teórico  $b_{teor}$  indicado en anexo A, en tanto por ciento.

### B.3.1. Resultados ajuste de generatrices

Resultados de los ajustes realizados para las elipses *generatrices* (ver resultados en los gráficos de secciones en anexo C a partir de la página 89).

Cuadro B.3: *Generatrices*. Elipses ajustadas

Nombre	lado	$a_{gen}$	$b_{gen}$	$X_c$	$Z_c$	$\Delta a_{teor}(\%)$	$\Delta b_{teor}(\%)$
Altagracia(a)	4,2	2,205	1,363	-0,03	3,13	2,9615	2,9447
Altagracia(b)	3,45	1,728	1,068	0,05	3,46	7,4216	7,4184

continúa en pág. siguiente

Cuadro B.3: *Generatrices*. Elipses ajustadas (cont.)

Nombre	lado	$a_{gen}$	$b_{gen}$	$X_c$	$Z_c$	$\Delta a_{teor}(\%)$	$\Delta b_{teor}(\%)$
Altagracia(c)	4,158	2,154	1,331	-0,04	3,24	4,2484	4,266
Altagracia(d)	3,2	1,608	0,993	0,04	3,63	7,1203	7,1949
ArroyoLuz1(a)	3,24	1,76	1,088	0,0	1,36	-0,404	-0,428
ArroyoLuz1(b)	3,38	1,793	1,108	0,0	1,34	1,9498	1,9617
ArroyoLuz1(c)	3,5	1,746	1,079	0,02	1,36	7,7936	7,8011
ArroyoLuz1(d)	3,39	1,781	1,101	0,0	1,34	2,8933	2,8685
ArroyoLuz2(a)	3,232	1,705	1,054	0,0	1,614	2,4925	2,4692
ArroyoLuz2(b)	3,389	1,788	1,105	0,015	1,587	2,4829	2,4868
ArroyoLuz2(c)	3,318	1,781	1,101	0,0	1,589	0,786	0,761
ArroyoLuz2(d)	3,408	1,804	1,115	0,01	1,584	2,1588	2,1529
Palancar1(a)	2,14	1,071	0,662	-0,01	2,38	7,496	7,484
Palancar1(b)	2,14	1,068	0,66	-0,05	2,39	7,7551	7,7635
Palancar1(c)	2,17	1,099	0,679	0,0	2,41	6,3899	6,4201
Palancar1(d)	2,14	1,118	0,691	0,001	2,33	3,4365	3,4312
Palancar2(a)	2,22	1,159	0,716	-0,01	2,3	3,5027	3,5433
Palancar2(b)	2,12	1,081	0,668	-0,03	2,42	5,7514	5,7648
Palancar2(c)	2,25	1,184	0,732	0,001	2,33	2,7356	2,7026
Palancar2(d)	2,14	1,089	0,673	0,04	2,34	5,9413	5,9468
Palancar3(a)	2,14	1,092	0,675	-0,03	2,39	5,6822	5,6672
Palancar3(b)	2,13	1,089	0,673	0,02	2,41	5,4997	5,5052
Palancar3(c)	2,16	1,168	0,722	-0,02	2,35	0,052	0,0332
Palancar3(d)	2,18	1,125	0,695	0,04	2,39	4,6148	4,6544
Prado4(a)	4,31	2,241	1,385	0,0	2,17	3,8942	3,8952
Prado4(b)	3,9	2,076	1,283	0,05	2,19	1,6108	1,6137
Prado4(c)	3,77	2,014	1,245	0,0	2,27	1,2578	1,2356
Prado4(d)	4,16	2,212	1,367	0,05	2,16	1,7174	1,724
Prado5(a)	4,17	2,231	1,379	0,05	2,03	1,1109	1,099
Prado5(b)	3,86	2,021	1,249	0,05	2,23	3,2248	3,2285
Prado5(c)	4,29	2,28	1,409	0,15	1,97	1,7659	1,7741
Prado5(d)	4,21	2,236	1,382	-0,01	2,2	1,831	1,8256
Seguras1(a)	4,6	2,561	1,583	-0,03	2,19	-2,905	-2,919
Seguras1(b)	4,07	2,218	1,371	0,01	2,38	-0,728	-0,743
Seguras1(c)	4,59	2,576	1,592	0,03	2,18	-3,7333	-3,7296
Seguras1(d)	4,19	2,304	1,424	0,01	2,35	-1,6373	-1,6409
Seguras2(a)	4,59	2,574	1,591	0,02	2,17	-3,6527	-3,6645
Seguras2(b)	4,11	2,275	1,406	0,01	2,35	-2,3115	-2,3095
Seguras2(c)	4,5	2,495	1,542	0,01	2,225	-2,4809	-2,4812

continúa en pág. siguiente

Cuadro B.3: *Generatrices*. Elipses ajustadas (cont.)

Nombre	lado	$a_{gen}$	$b_{gen}$	$X_c$	$Z_c$	$\Delta a_{teor}(\%)$	$\Delta b_{teor}(\%)$
Seguras2(d)	4,07	2,226	1,376	0,02	2,37	-1,0917	-1,1106
Víctor1(a)	3,45	1,846	1,141	0,03	1,52	1,0997	1,0903
Víctor1(b)	3,5	1,883	1,164	0,0	1,43	0,559	0,538
Víctor1(c)	3,52	1,874	1,158	0,0	1,45	1,5962	1,6128
Víctor1(d)	3,52	1,851	1,144	0,0	1,55	2,804	2,8023
Víctor2(a)	3,55	1,891	1,169	0,0	1,33	1,5427	1,5176
Víctor2(b)	3,06	1,67	1,032	0,1	1,5	-0,874	-0,863
Víctor2(c)	3,52	1,938	1,198	0,0	1,33	-1,7644	-1,7857
Víctor2(d)	3,04	1,646	1,017	0,0	1,49	-0,0786	-0,0506
Becerra1(a)	6,15	3,298	2,038	0,03	1,69	0,88	0,894
Becerra1(b)	5,56	2,921	1,805	-0,01	1,84	2,895	2,9099
Becerra1(c)	6,16	3,364	2,079	0,03	1,64	-0,939	-0,936
Becerra1(d)	4,58	2,277	1,407	-0,005	2,2	8,107	8,1242
Becerra2(a)	6,47	3,547	2,192	0,05	1,56	-1,3309	-1,3232
Becerra2(b)	5,0	2,518	1,556	0,07	2,11	6,917	6,9295
Becerra2(c)	6,29	3,461	2,139	-0,1	1,56	-1,7035	-1,7027
Becerra2(d)	4,78	2,505	1,548	0,04	2,13	3,1355	3,1464
CareresPM(a)	3,47	1,825	1,128	0,0	2,64	2,7884	2,7808
CareresPM(b)	3,38	1,744	1,078	0,0	2,75	4,6294	4,6162
CareresPM(c)	3,47	1,817	1,123	0,01	2,77	3,2145	3,2117
CareresPM(d)	3,82	2,006	1,24	-0,005	2,54	2,9373	2,9198

(fin Cuadro B.3)

### B.3.2. Estadística ajuste de generatrices

Se ha realizado un análisis estadístico de regresión lineal simple donde se analiza la influencia de la variable explicativa *lado* sobre los valores obtenidos en las variables dependientes  $a_{gen}$  y  $b_{gen}$ .

En el cuadro anterior B.3: «*Generatrices*. Elipses ajustadas» no se observan variaciones de los semiejes  $a_{gen}$  y  $b_{gen}$  que hagan pensar que el ajuste realizado y por tanto las *generatrices* reales topografiadas, sea diferente de la hipótesis dicha en el capítulo 3, apartado 3.2.2 (pág. 30).

La regresión lineal, realizada sobre 60 casos, tiene un nivel de confianza del 95 % en que el parámetro buscado estará dentro de los intervalos de confianza.



	semieje $a_{gen}$	semieje $b_{gen}$
model=	0,5547 lado - 0,08192	0,3428 lado - 0,05058
means:	[3,69125; 1,96547]	[3,69125; 1,21472]
variances:	[1,17041; 0,3635]	[1,17041; 0,1388]
correlation:	0,9953	0,9953
adc:	0,9905	0,9953
a_estimation:	-0,08192	-0,05058
a_conf_int:	[-0,1365; -0,02733]	[-0,08438; -0,01678]
b_estimation:	0,5547	0,3428
b_conf_int:	[0,5405; 0,5689]	[0,334; 0,3516]
hypotheses:	H0: b=0 ;H1: b≠0	H0: b=0 ;H1: b≠0
statistic:	78,2347	78,081
distribution:	[student_t, 58]	[student_t, 58]
p-value:	0,0	0,0
v_estimation:	0,00353	0,001353
v_conf_int:	[0,002529; 0,005271]	[0,00097; 0,002021]

Cuadro B.4: Estadística de las elipses *generatrices* ajustadas

#### B.4. Altura del retumbo

En todas las bóvedas estudiadas se midió el retumbo real, la altura desde el punto más elevado de las aristas perimetrales, las *generatrices*, hasta la clave central de la bóveda.

En el siguiente cuadro B.5 se indica para cada sección por la arista *generatriz* de cada bóveda su denominación, acompañada de la letra de la sección correspondiente, el valor de la longitud horizontal del lado del habitáculo en la que aparece, el retumbo real medido obtenido del levantamiento topográfico, el retumbo teórico que le corresponde, desarrollado en el anejo A con la hipótesis enunciada en el capítulo 3: «Forma de la bóveda extremeña», y finalmente la diferencia, en tanto por ciento, entre el valor del retumbo medido y el teórico (ver resultados en los gráficos de secciones en anejo C a partir de la página 89).

##### B.4.1. Retumbo real

Resultados de los retumbos reales medidos *in situ*.

Cuadro B.5: Retumbo real y retumbo teórico

Nombre	lado	$Ret_{real}$	$Ret_{teor}$	$\Delta Ret_{teor}(\%)$
Altagracia(a)	4,2	0,36	0,35	2,857
Altagracia(b)	3,45	0,35	0,29	23,48

continúa en pág. siguiente

Cuadro B.5: Retumbo real y retumbo teórico (cont.)

Nombre	lado	$Ret_{real}$	$Ret_{teor}$	$\Delta Ret_{teor}(\%)$
Altagracia(c)	4,158	0,3	0,35	-11,98
Altagracia(d)	3,2	0,25	0,27	-6,25
Chano1(a)	3,24	0,22	0,27	-18,52
Chano1(b)	3,38	0,25	0,28	-10,53
Chano1(c)	3,5	0,3	0,29	4,229
Chano1(d)	3,39	0,26	0,28	-7,611
Chano2(a)	3,232	0,29	0,27	8,416
Chano2(b)	3,389	0,26	0,28	-7,937
Chano2(c)	3,318	0,28	0,28	1,266
Chano2(d)	3,408	0,25	0,28	-11,97
Palancar1(a)	2,14	0,03	0,18	-83,18
Palancar1(b)	2,14	0,02	0,18	-88,79
Palancar1(c)	2,17	0,0	0,18	-100,0
Palancar1(d)	2,14	0,06	0,18	-66,36
Palancar2(a)	2,22	0,05	0,19	-72,97
Palancar2(b)	2,12	0,0	0,18	-100,0
Palancar2(c)	2,25	0,0	0,19	-100,0
Palancar2(d)	2,14	0,06	0,18	-66,36
Palancar3(a)	2,14	0,08	0,18	-55,14
Palancar3(b)	2,13	0,05	0,18	-71,83
Palancar3(c)	2,16	0,06	0,18	-66,67
Palancar3(d)	2,18	0,07	0,18	-61,47
Prado4(a)	4,31	0,33	0,36	-8,121
Prado4(b)	3,9	0,42	0,33	29,23
Prado4(c)	3,77	0,39	0,31	24,14
Prado4(d)	4,16	0,39	0,35	12,5
Prado5(a)	4,17	0,36	0,35	3,597
Prado5(b)	3,86	0,31	0,32	-3,627
Prado5(c)	4,29	0,5	0,36	39,86
Prado5(d)	4,21	0,31	0,35	-11,64
Seguras1(a)	4,6	0,28	0,38	-26,96
Seguras1(b)	4,07	0,26	0,34	-23,34
Seguras1(c)	4,59	0,25	0,38	-34,64
Seguras1(d)	4,19	0,24	0,35	-31,26
Seguras2(a)	4,59	0,28	0,38	-26,8
Seguras2(b)	4,11	0,27	0,34	-21,17
Seguras2(c)	4,5	0,28	0,38	-25,33

continúa en pág. siguiente

Cuadro B.5: Retumbo real y retumbo teórico (cont.)

Nombre	lado	$Ret_{real}$	$Ret_{teor}$	$\Delta Ret_{teor}(\%)$
Seguras2(d)	4,07	0,26	0,34	-23,34
Víctor1(a)	3,45	0,24	0,29	-16,52
Víctor1(b)	3,5	0,3	0,29	2,857
Víctor1(c)	3,52	0,31	0,29	5,682
Víctor1(d)	3,52	0,23	0,29	-21,59
Víctor2(a)	3,55	0,3	0,3	1,408
Víctor2(b)	3,06	0,26	0,26	1,961
Víctor2(c)	3,52	0,27	0,29	-7,955
Víctor2(d)	3,04	0,27	0,25	6,579
Becerra1(a)	6,15	0,43	0,51	-16,1
Becerra1(b)	5,56	0,5	0,46	7,914
Becerra1(c)	6,16	0,49	0,51	-4,545
Becerra1(d)	4,58	0,53	0,38	38,86
Becerra2(a)	6,47	0,29	0,54	-46,21
Becerra2(b)	5,0	0,3	0,42	-28,0
Becerra2(c)	6,29	0,31	0,52	-40,86
Becerra2(d)	4,78	0,27	0,4	-32,22
CareresPM(a)	3,47	0,2	0,29	-30,84
CareresPM(b)	3,38	0,12	0,28	-57,4
CareresPM(c)	3,47	0,06	0,29	-79,25
CareresPM(d)	3,82	0,19	0,32	-40,31

(fin Cuadro B.5)

#### B.4.2. Estadística del retumbo

Se ha realizado un análisis estadístico de regresión lineal simple donde se analiza la influencia de la variable explicativa *lado o vano* sobre los valores que se han medido en la variable dependiente: *retumbo*.

En el apartado anterior B.2.2: «Estadística ajuste de directrices» quedaron excluidas aquellas bóvedas que sus semiejes *directrices* superaran en más de un 10% los valores teóricos esperados. Es por esta misma razón que en el análisis estadístico de regresión sobre los retumbos se excluyen las mismas bóvedas que en B.2.2.

La regresión lineal, realizada sobre 16 casos, tiene un nivel de confianza del 95% en que el parámetro buscado estará dentro de los intervalos de confianza.

	Retumbo
model=	0,086 luz - 0,00455
means:	[3,89775; 0,3307]
variances:	[0,6693; 0,007916]
correlation:	0,7908
adc:	0,611
a_estimation:	-0,004547
a_conf_int:	[-0,1114; 0,1023]
b_estimation:	0,086
b_conf_int:	[0,05917; 0,1128]
hypotheses:	H0: b=0 ;H1: b≠0
statistic:	6,58855
distribution:	[student_t, 26]
p-value:	0,0
v_estimation:	0,003193
v_conf_int:	[0,001981; 0,005998]

Cuadro B.6: Estadística del retumbo

## B.5. Altura de la flecha

En las bóvedas incluidas en este trabajo se midió la flecha de los arcos perimetrales, es decir, la altura desde los arranques de los arcos en los rincones del habitáculo hasta el punto más alto de la arista *generatriz*.

En el cuadro inferior B.7 se indica para cada una de las cuatro aristas en muros de la bóveda su denominación seguida de la letra identificativa de la sección, la luz del vano en la que se encuentra, el valor de la flecha obtenida del levantamiento topográfico, la relación entre la luz y la flecha del arco, el valor de la flecha teórica que correspondería a la luz del arco según la hipótesis hecha en 3.2.2 y finalmente la diferencia, en tanto por ciento, entre la flecha real del arco y la flecha teórica.

### B.5.1. Flecha real

Resultados de las flechas reales medidas.

Cuadro B.7: Flechas

Nombre	luz	$f_{real}$	$luz/f_{real}$	$f_{teor}$	$\Delta f_{teor}(\%)$
Altagracia(a)	4,2	0,95	4,407	0,87	10,14
Altagracia(b)	3,45	0,99	3,492	0,71	39,01
Altagracia(c)	4,158	1,013	4,105	0,86	18,26
Altagracia(d)	3,2	1,088	2,941	0,66	65,04

continúa en pág. siguiente

Cuadro B.7: Flechas (cont.)

Nombre	luz	$f_{real}$	luz/ $f_{real}$	$f_{teor}$	$\Delta f_{teor}$ (%)
Chano1(a)	3,24	0,72	4,5	0,67	7,869
Chano1(b)	3,38	0,71	4,747	0,7	2,252
Chano1(c)	3,5	0,64	5,469	0,72	-11,24
Chano1(d)	3,39	0,69	4,92	0,7	-1,343
Chano2(a)	3,232	0,71	4,527	0,67	7,235
Chano2(b)	3,389	0,72	4,707	0,7	3,126
Chano2(c)	3,318	0,7	4,74	0,68	2,407
Chano2(d)	3,408	0,75	4,544	0,7	6,824
Palancar1(a)	2,14	0,72	2,972	0,44	63,32
Palancar1(b)	2,14	0,76	2,816	0,44	72,39
Palancar1(c)	2,17	0,74	2,932	0,45	65,53
Palancar1(d)	2,14	0,65	3,292	0,44	47,44
Palancar2(a)	2,22	0,68	3,265	0,46	48,68
Palancar2(b)	2,12	0,65	3,262	0,44	48,83
Palancar2(c)	2,25	0,55	4,091	0,46	18,66
Palancar2(d)	2,14	0,62	3,452	0,44	40,63
Palancar3(a)	2,14	0,65	3,292	0,44	47,44
Palancar3(b)	2,13	0,6	3,55	0,44	36,74
Palancar3(c)	2,16	0,62	3,484	0,44	39,33
Palancar3(d)	2,18	0,63	3,46	0,45	40,28
Prado4(a)	4,31	1,32	3,265	0,89	48,66
Prado4(b)	3,9	1,16	3,362	0,8	44,38
Prado4(c)	3,77	1,02	3,696	0,78	31,33
Prado4(d)	4,16	1,26	3,302	0,86	47,02
Prado5(a)	4,17	1,3	3,208	0,86	51,33
Prado5(b)	3,86	1,11	3,477	0,8	39,59
Prado5(c)	4,29	1,18	3,636	0,88	33,52
Prado5(d)	4,21	1,11	3,793	0,87	27,98
Seguras1(a)	4,6	0,87	5,287	0,95	-8,194
Seguras1(b)	4,07	0,9	4,522	0,84	7,339
Seguras1(c)	4,59	0,92	4,989	0,95	-2,706
Seguras1(d)	4,19	0,91	4,604	0,86	5,423
Seguras2(a)	4,59	0,91	5,044	0,95	-3,764
Seguras2(b)	4,11	0,9	4,567	0,85	6,294
Seguras2(c)	4,5	0,89	5,056	0,93	-3,997
Seguras2(d)	4,07	0,91	4,473	0,84	8,532
Víctor1(a)	3,45	0,69	5,0	0,71	-2,918

continúa en pág. siguiente

Cuadro B.7: Flechas (cont.)

Nombre	luz	$f_{real}$	luz/ $f_{real}$	$f_{teor}$	$\Delta f_{teor}(\%)$
Víctor1(b)	3,5	0,72	4,861	0,72	-0,14
Víctor1(c)	3,52	0,7	5,029	0,73	-3,47
Víctor1(d)	3,52	0,67	5,254	0,73	-7,607
Víctor2(a)	3,55	0,65	5,462	0,73	-11,12
Víctor2(b)	3,06	0,7	4,371	0,63	11,04
Víctor2(c)	3,52	0,68	5,176	0,73	-6,228
Víctor2(d)	3,04	0,67	4,537	0,63	6,982
Becerra1(a)	6,15	1,62	3,796	1,267	27,86
Becerra1(b)	5,56	1,48	3,757	1,145	29,21
Becerra1(c)	6,16	1,39	4,432	1,269	9,532
Becerra1(d)	4,58	1,39	3,295	0,94	47,32
Becerra2(a)	6,47	1,33	4,865	1,333	-0,22
Becerra2(b)	5,0	1,49	3,356	1,03	44,65
Becerra2(c)	6,29	1,46	4,308	1,296	12,67
Becerra2(d)	4,78	1,34	3,567	0,98	36,08
CareresPM(a)	3,47	0,84	4,131	0,71	17,51
CareresPM(b)	3,38	0,89	3,798	0,7	27,82
CareresPM(c)	3,47	0,92	3,772	0,71	28,7
CareresPM(d)	3,82	0,9	4,244	0,79	14,36

(fin Cuadro B.7)

### B.5.2. Estadística de flechas

Se ha realizado un análisis estadístico de regresión lineal simple donde se analiza la influencia de la variable explicativa *lado* sobre los valores que se han medido en la variable dependiente *flecha*.

La regresión lineal, realizada sobre 60 casos, tiene un nivel de confianza del 95 % en que el parámetro buscado estará dentro de los intervalos de confianza.

Flecha	
model:	0,2117 luz + 0,1311
means:	[3,69125; 0,9126]
variances:	[1,17041; 0,07638]
correlation:	0,8288
adc:	0,6815
a_estimation:	0,1311
a_conf_int:	[-0,01345; 0,2756]
b_estimation:	0,2117
b_conf_int:	[0,1742; 0,2493]
hypotheses:	H0: b=0 ;H1: b≠0
statistic:	11,2808
distribution:	[student_t; 58]
p-value:	0,0
v_estimation:	0,02474
v_conf_int:	[0,01773; 0,03694]

Cuadro B.8: Estadística de flechas





## Anexo C

### Geometría real y ajustes II

#### C.1. Introducción

En este anexo se incluyen los levantamientos topográficos realizados para este trabajo y los distintos ajustes realizados para las curvas *directrices* y *generatrices*. Cada bóveda de cada edificación está identificada por su nombre seguido de un número cuando existen varias bóvedas pertenecientes a un mismo edificio. Se indica para cada una de ellas su localización, el término municipal o población a la que pertenece, su situación en coordenadas geográficas, sus referencias catastrales de polígono y parcela, el tipo de arquitectura, uso y superficie del edificio que las contiene y, cuando se conoce, la fecha de su construcción. A esta información se acompaña una fotografía de la fachada principal de la edificación.

Los planos de planta reflejan la proyección horizontal de la bóveda; con línea discontinua se señala el inicio de las superficies que forman la bóveda, las aristas *generatrices* que se desarrollan sobre un muro vertical o sobre un arco, con indicación de sus dimensiones que corresponden a la magnitud del lado del habitáculo. En estos planos también aparece la acotación horizontal correspondiente a las aristas *diagonales*.

Los planos de secciones verticales son de dos tipos. Primeramente se incluyen las secciones verticales por cada uno de los cuatro muros verticales, o arcos en su caso, en los que aparecen, con una marca, los puntos obtenidos del levantamiento topográfico de la arista perimetral en su desarrollo entre rincones consecutivos. Por cada una de las marcas se hace pasar una poligonal curvada que refleja la geometría real de la arista perimetral. En cada sección se incluye la elipse ajustada según el criterio expuesto en el apartado 3.2.2 (pág. 30), con indicación de los semiejes de la elipse ajustada. A continuación se incluye las secciones verticales correspondientes a las curvas *directrices*, secciones desde el punto medio de un muro o arco hasta el punto medio del muro o arco opuesto. En cada una de las dos secciones *directrices* por bóveda se indica la situación de la clave y los parámetros que definen la elipse ajustada.

Se acompaña, finalmente y en forma de cuadro, a cada una de las bóvedas estudiadas, los parámetros de la ecuación general de la cónica ajustada.

## C.2. Ermita de Alta Gracia

### Ermita de Alta Gracia (bóveda 1)

---

Localización: Pago de *Viñas de la Jara*  
T.M. de Garrovillas (Cáceres)  
39° 36' 57,83"N – 6° 31' 24,07"W

Dat. catastral: Pol. 5 par. 37 i

Tipo Arquitectura: Religiosa (Ermita)

Uso: Religioso

Sup. construcción: 662 m<sup>2</sup>

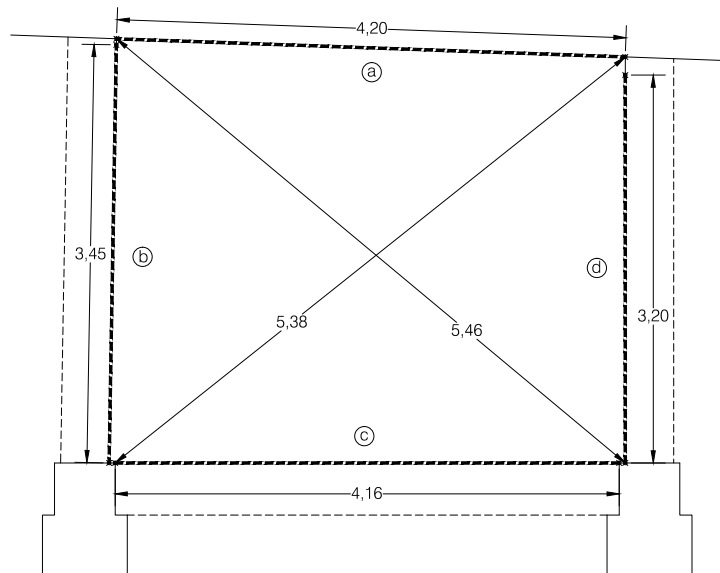
Año: s. XVI (con reformas posteriores)

---

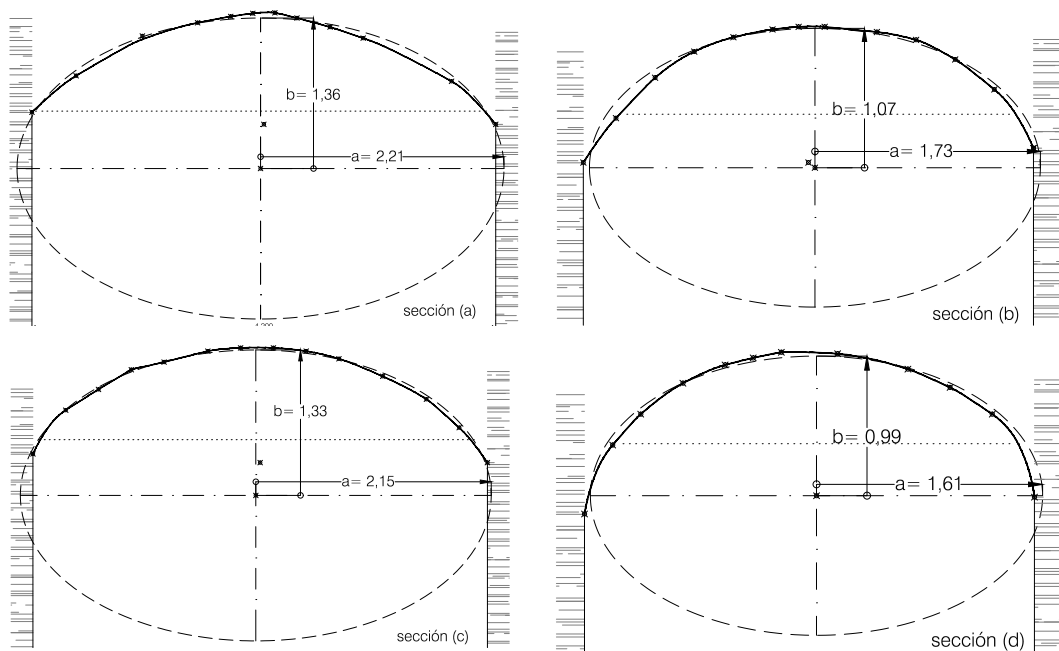
Fotografía



Ermita de Alta Gracia. Bóveda 1

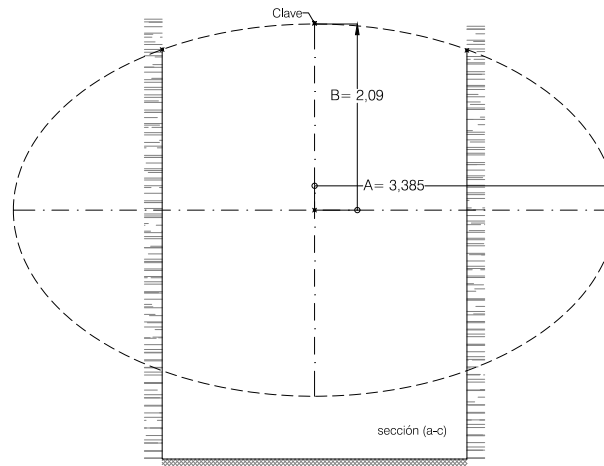


Planta bóveda

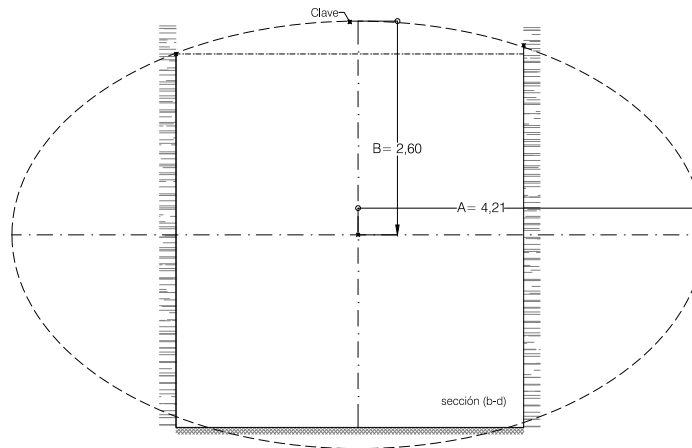


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

Ermita de Alta Gracia. Bóveda 1 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada



Sección directriz b-d. Elipse ajustada

Parámetros de las cónicas ajustadas

	A	B	C	D	E	F
Directriz:						
Altagracia1 (a-c)	4.37646	0.0	11.45822	0.0	-64.12023	39.55769
Altagracia1 (b-d)	6.7652	0.0	17.70726	-1.35304	-82.97624	-22.51888
Generatriz:						
Altagracia1 (a)	1.85777	0.0	4.86203	0.11147	-30.06536	38.60193
Altagracia1 (b)	1.14062	0.0	2.98598	-0.11406	-20.66301	32.34397
Altagracia1 (c)	1.77156	0.0	4.63972	0.14172	-18.41513	40.48918
Altagracia1 (d)	0.98605	0.0	2.58566	-0.07888	-18.77192	31.52302

### C.3. Casa Arroyo de la Luz I

Casa Arroyo de la Luz (bóvedas 1 y 2)

---

Localización: C. Parra nº 18

Arroyo de la Luz (Cáceres)

39° 29' 7,38"N – 6° 34' 56,43"W

Dat. catastral:

Tipo Arquitectura: Vivienda

Uso: Residencial

Sup. construcción: 136 m<sup>2</sup>

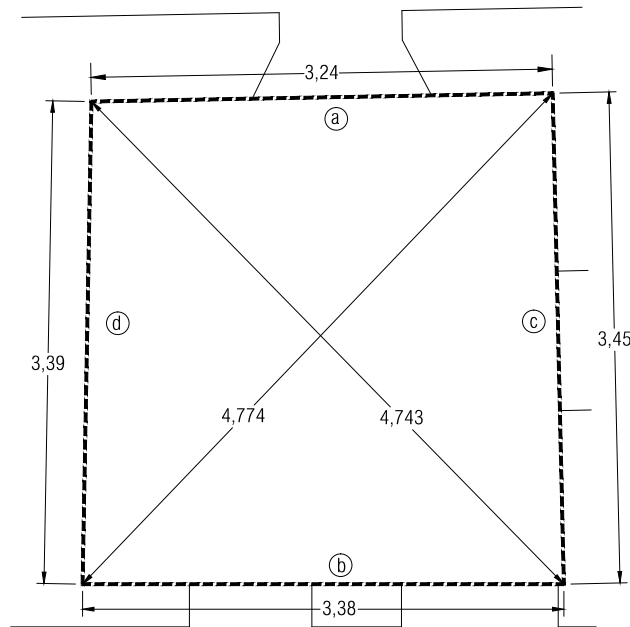
Año:

---

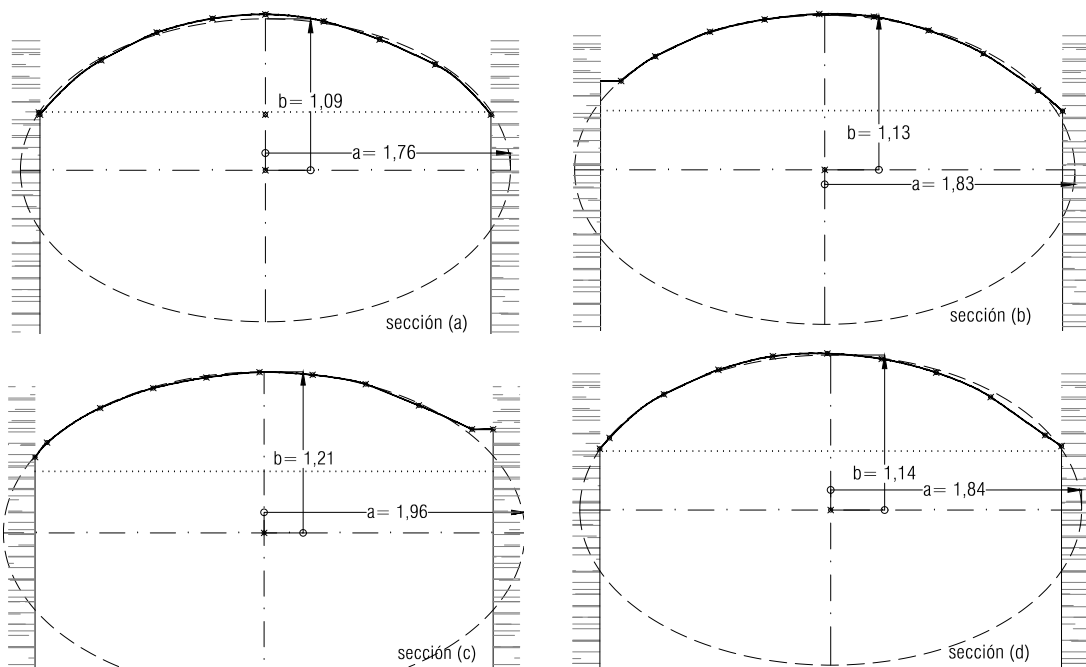
Fotografía



Casa Arroyo de la Luz I. Bóveda 1

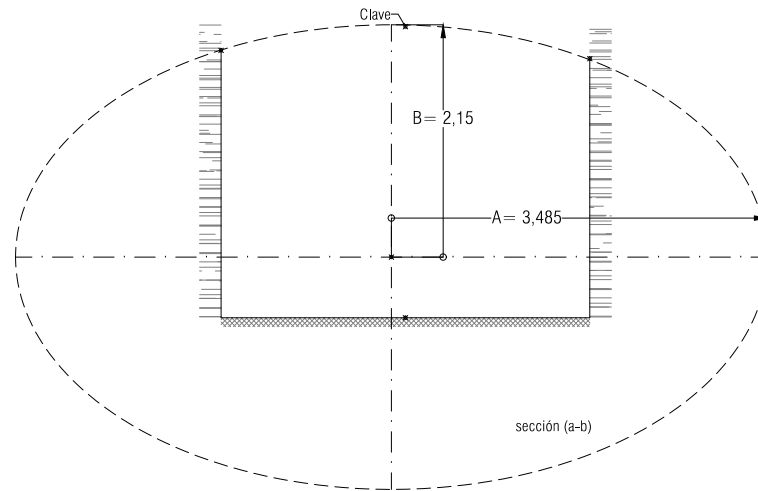


Planta bóveda

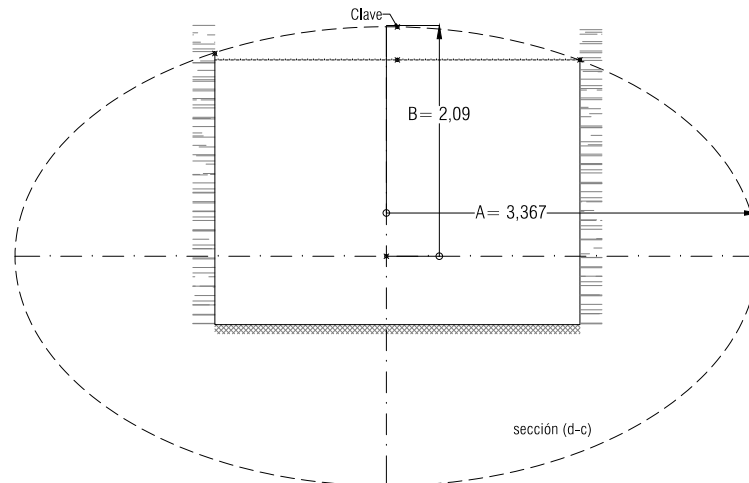


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

Casa Arroyo de la Luz I. Bóveda 1 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada

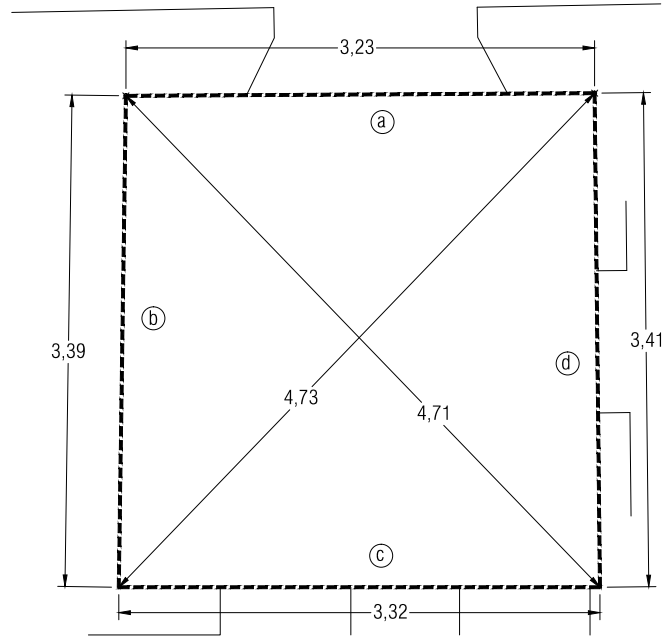


Sección directriz b-d. Elipse ajustada

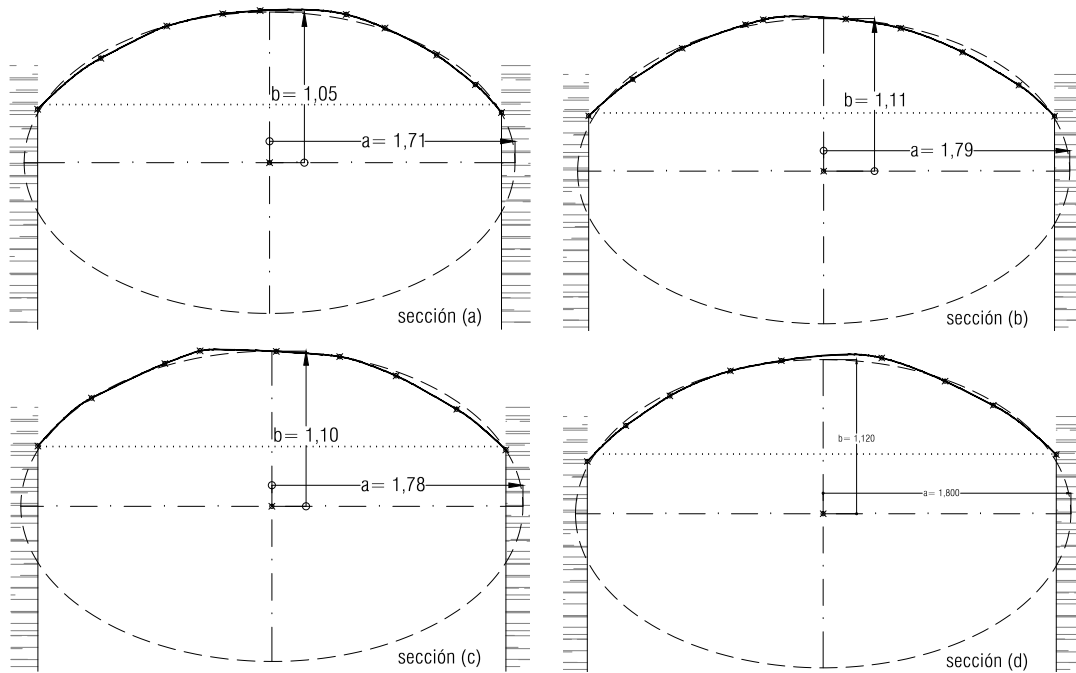
Parámetros de las cónicas ajustadas

	A	B	C	D	E	F
Directriz:						
Arroyo1 (a-b)	4.63972	0.0	12.14523	1.20633	-13.67552	-52.42232
Arroyo1 (d-c)	4.33056	0.0	11.33669	0.86611	-14.08017	-44.67903
Generatriz:						
Arroyo1 (a)	1.18374	0.0	3.0976	0.0	-8.42547	2.06256
Arroyo1 (b)	1.28142	0.0	3.35622	0.12814	-8.79331	1.46207
Arroyo1 (c)	1.16424	0.0	3.85337	-0.05885	-9.17102	-0.21238
Arroyo1 (d)	1.29732	0.0	3.39665	0.00259	-8.76335	1.24582

Casa Arroyo de la Luz I. Bóveda 2



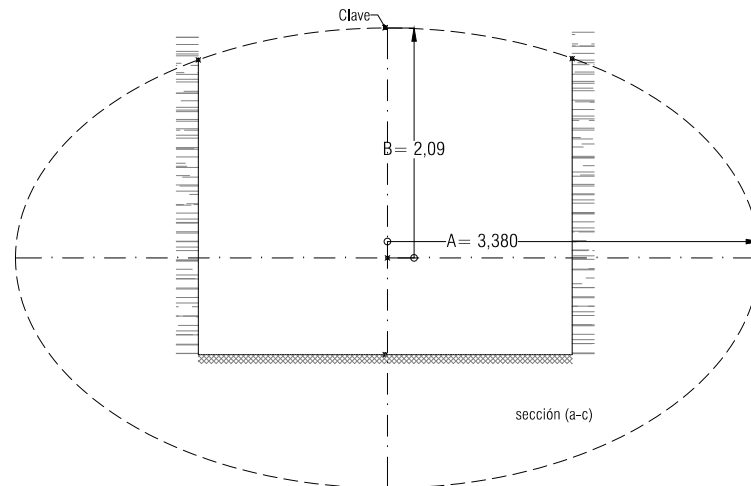
Planta bóveda



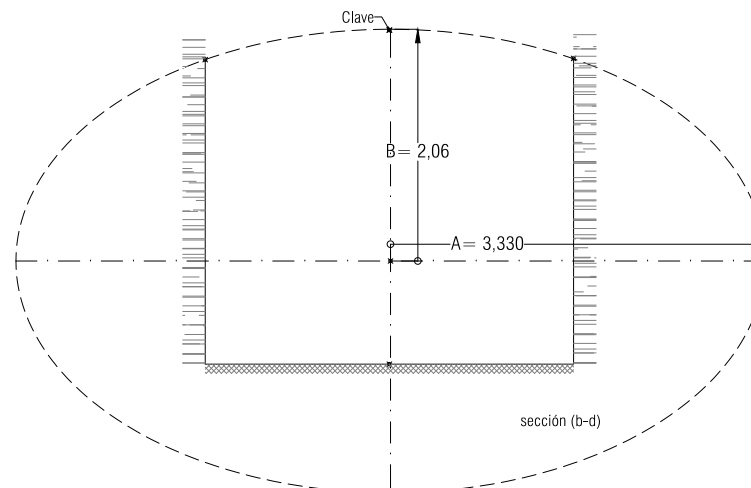
Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas



Casa Arroyo de la Luz I. Bóveda 2 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada



Sección directriz b-d. Elipse ajustada

Parámetros de las cónicas ajustadas

	A	B	C	D	E	F
Directriz:						
Arroyo2 (a-b)	4.3681	0.0	11.43792	-0.17472	-20.08499	-41.14294
Arroyo2 (d-c)	4.2436	0.0	11.10889	-0.08487	-20.3737	-37.79991
Generatriz:						
Arroyo2 (a)	1.11092	0.0	2.90703	0.0	-9.38388	4.34333
Arroyo2 (b)	1.22103	0.0	3.19694	-0.03663	-10.1471	4.14845
Arroyo2 (c)	1.2122	0.0	3.17196	0.0	-10.08049	4.1639
Arroyo2 (d)	1.24323	0.0	3.25442	-0.02486	-10.30999	4.11966

#### C.4. Ermita del Prado

Ermita Vigen del Prado (bóvedas 4 y 5)

---

Localización: Pago de *Viñas de la Jara*  
T.M. de Casar de Cáceres (Cáceres)  
39° 34' 39,88 N – 6° 30' 23,66 W

Dat. catastral: Pol. 9 par. 5

Tipo Arquitectura: Religiosa (Ermita)

Uso: Religioso

Sup. construcción: 620 m<sup>2</sup>

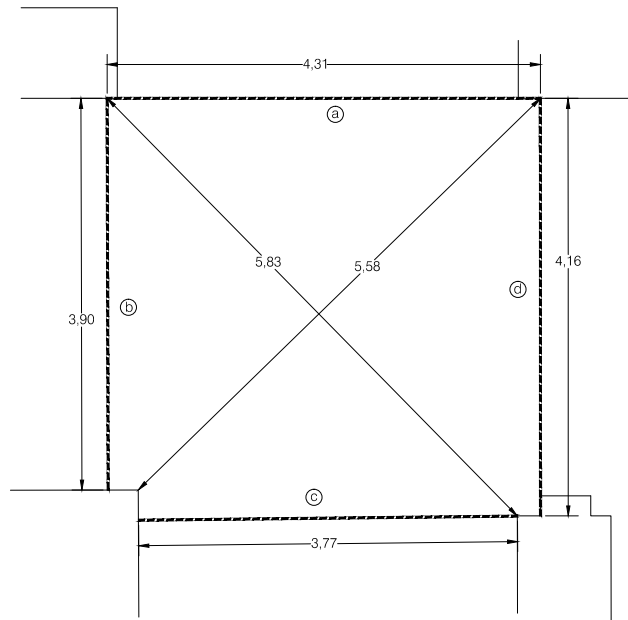
Año: s. XVI (con reformas posteriores)

---

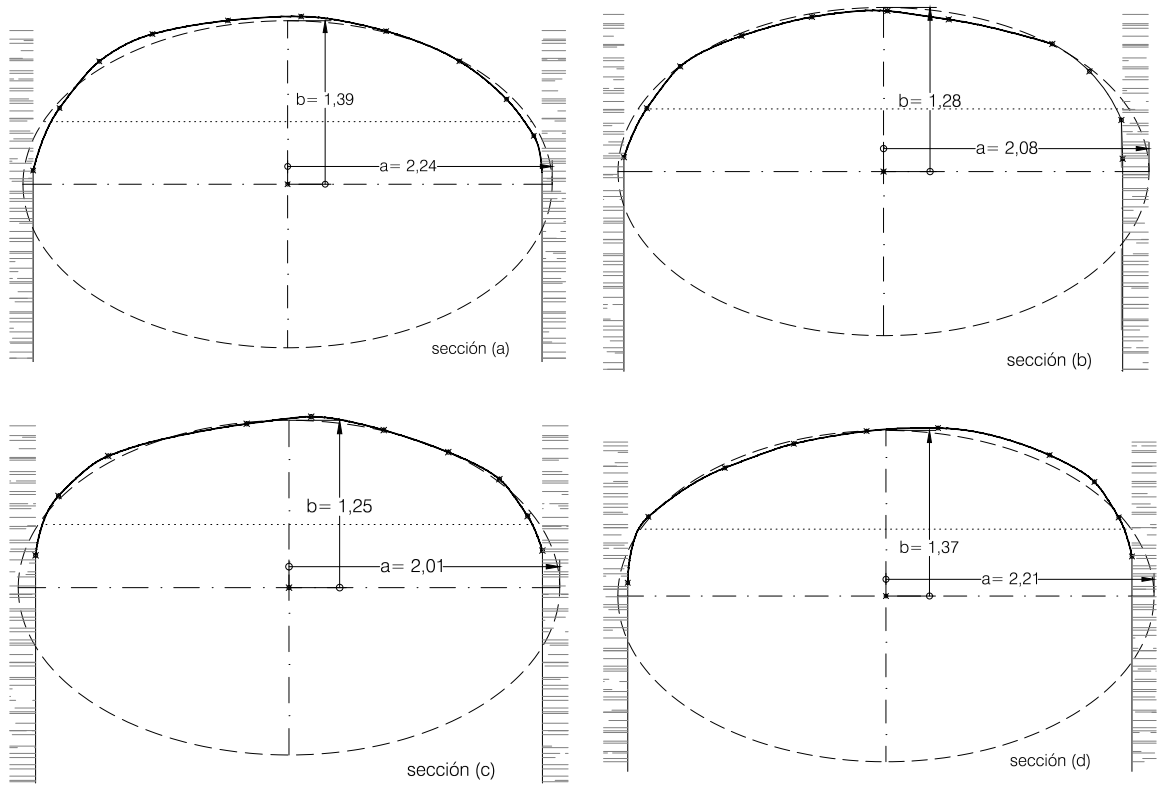
Fotografía



Ermita del Prado. Bóveda 4

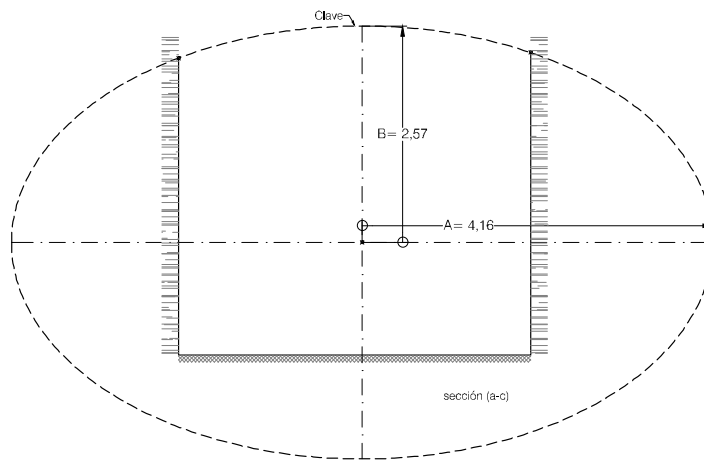


Planta bóveda

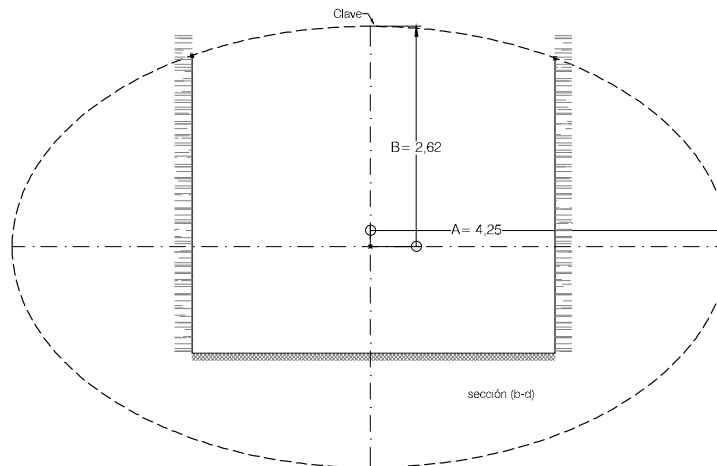


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

## Ermita Virgen del Prado. Bóveda 4 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada

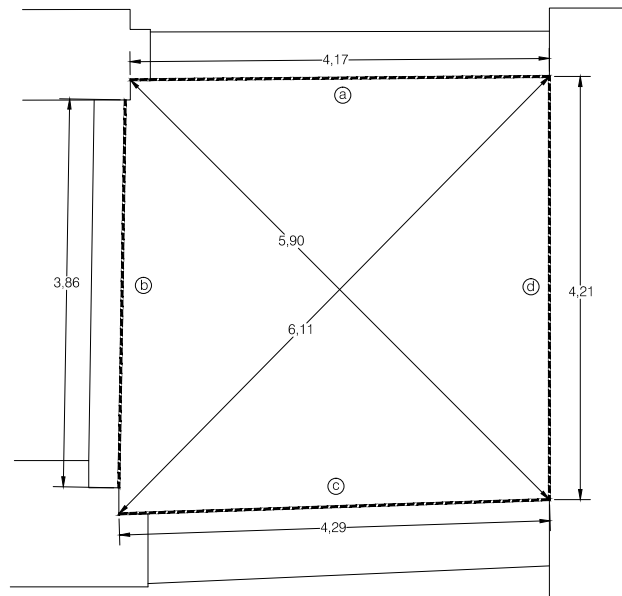


Sección directriz b-d. Elipse ajustada

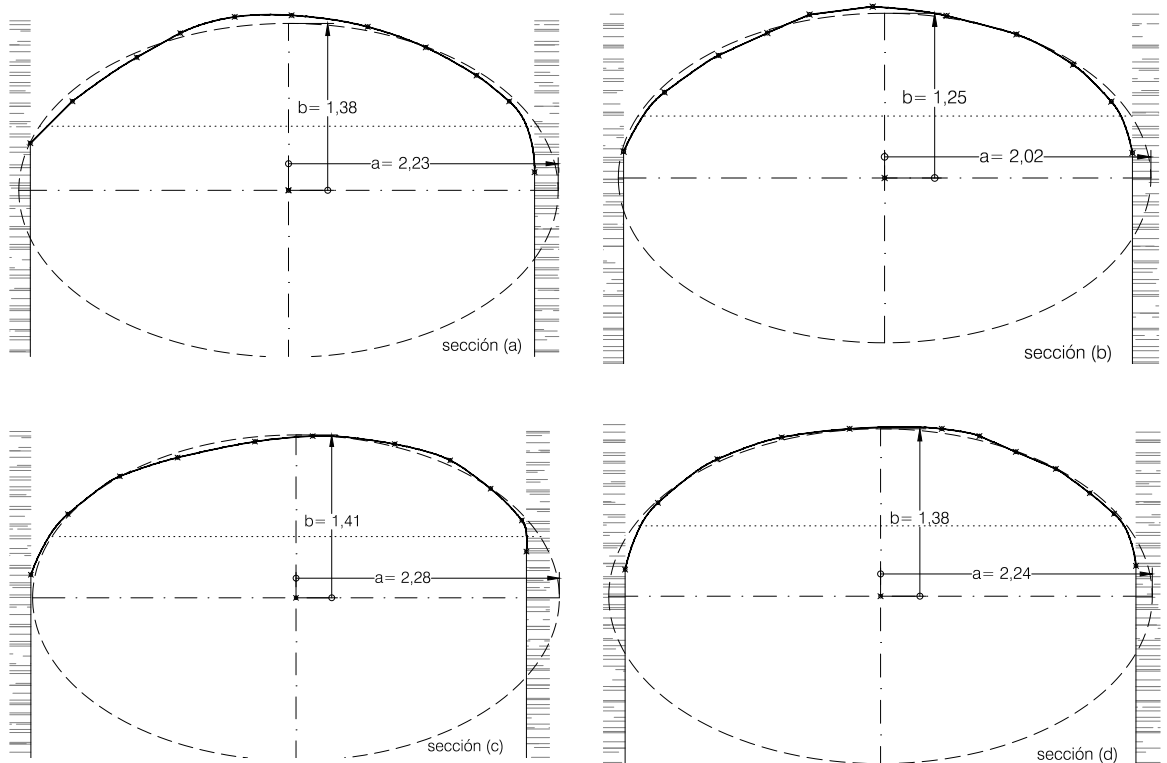
## Parámetros de las cónicas ajustadas

	A	B	C	D	E	F
Directriz:						
Prado4 (a-c)	6.61004	0.0	17.33057	-1.18981	-46.44592	-83.38346
Prado4 (b-d)	6.85916	0.0	18.054	0.54873	-45.49608	-95.16179
Generatriz:						
Prado4 (a)	1.91823	0.0	5.02208	0.0	-21.79583	14.015
Prado4 (b)	1.64609	0.0	4.30978	-0.16461	-18.87682	13.57996
Prado4 (c)	1.55003	0.0	4.0562	0.0	-18.41513	14.61397
Prado4 (d)	1.86869	0.0	4.89294	-0.18687	-21.13752	13.6898

Ermita del Prado. Bóveda 5

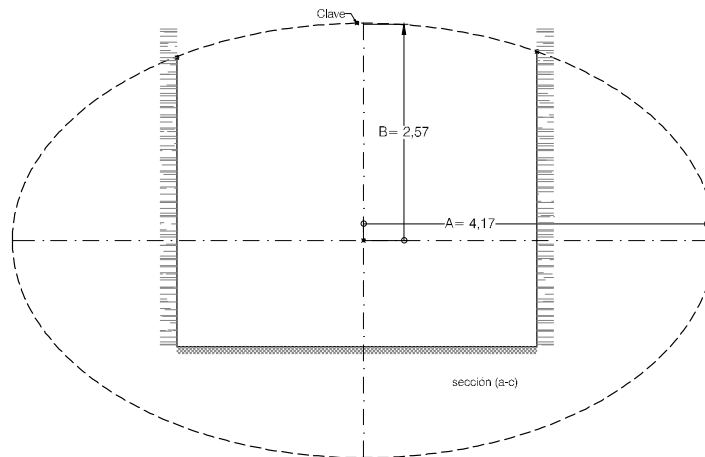


Planta bóveda

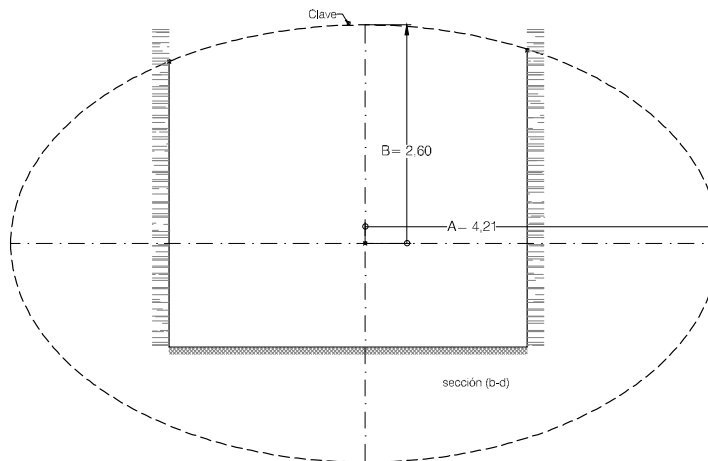


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

## Ermita Virgen del Prado. Bóveda 5 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada



Sección directriz b-d. Elipse ajustada

## Parámetros de las cónicas ajustadas

	A	B	C	D	E	F
Directriz:						
Prado5 (a-c)	6.64093	0.0	17.3889	-1.06255	-43.82003	-87.82933
Prado5 (b-d)	6.73922	0.0	17.69885	-2.69569	-43.53917	-92.23021
Generatriz:						
Prado5 (a)	1.90164	0.0	4.97736	-0.19016	-20.20809	11.05081
Prado5 (b)	1.56	0.0	4.08444	-0.156	4.97736	13.94368
Prado5 (c)	1.98528	0.0	5.1984	-0.59558	-20.4817	9.89885
Prado5 (d)	1.90992	0.0	4.9997	0.0382	-21.99866	14.64968

### C.5. Monasterio del Palancar

---

Monasterio del Palancar (bóvedas 1, 2 y 3)

---

Localización: T.M. Pedroso de Acim  
Pedroso de Acim (Cáceres)  
39° 49' 11,0"N – 6° 24' 2,78"W

Dat. catastral:

Tipo Arquitectura: Religiosa (monasterio)

Uso: Religioso

Sup. construcción: 964 m<sup>2</sup>

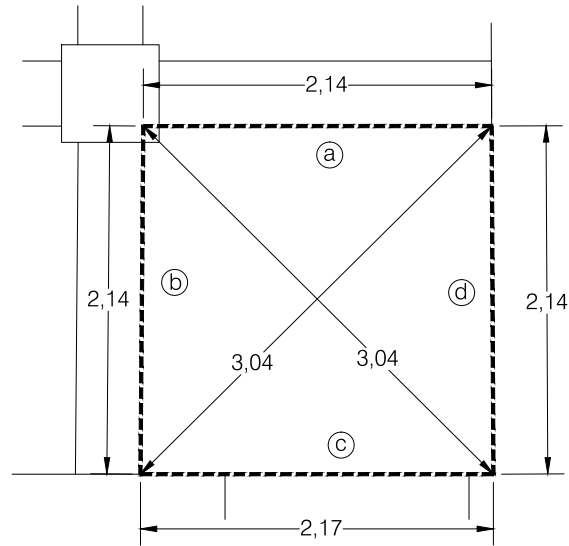
Año: s. XVI (reformas en el s. XVII y s. XVIII)

---

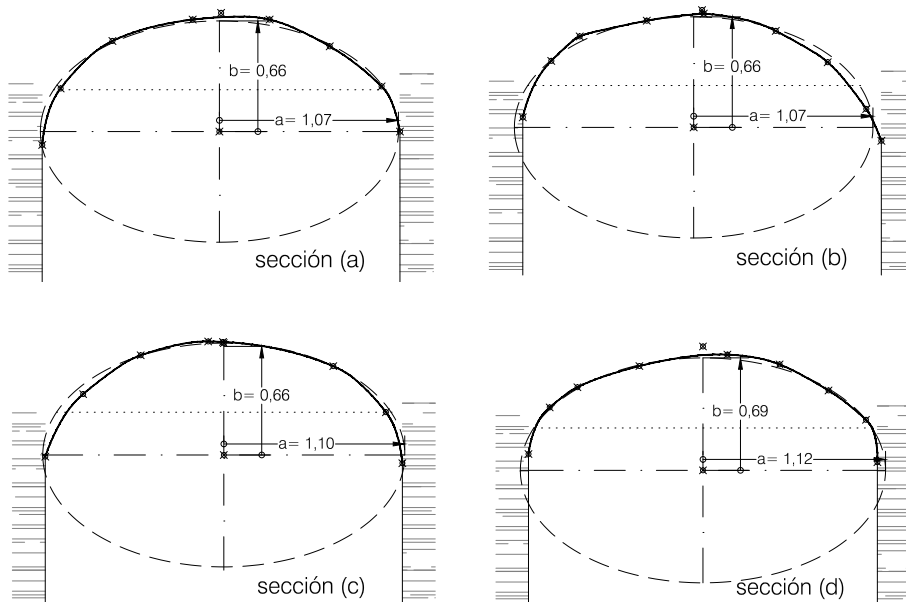
Fotografía



Monasterio del Palancar. Bóveda 1



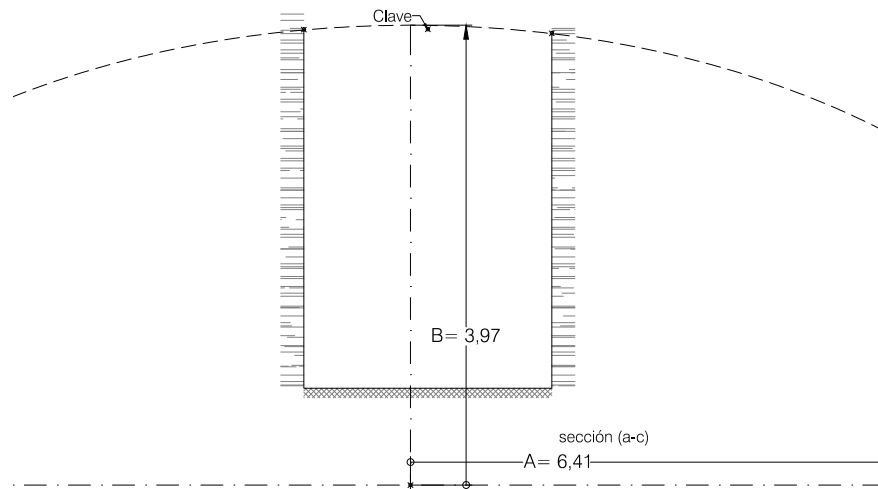
Planta bóveda



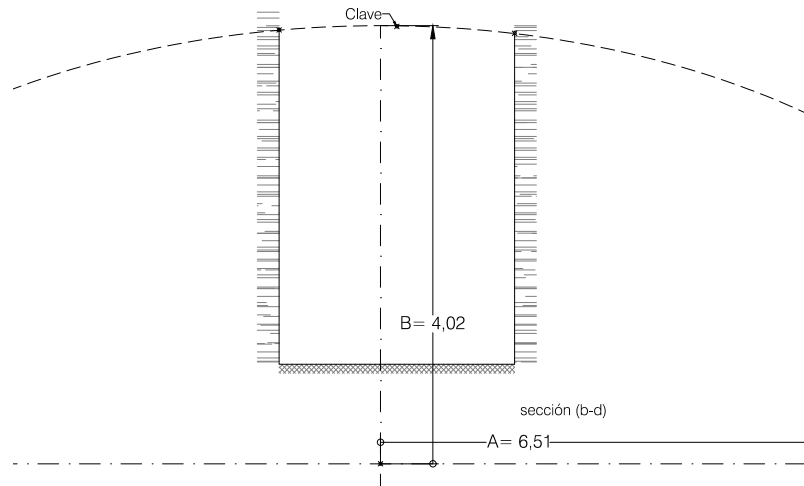
Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas



Monasterio del Palancar. Bóveda 1 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada

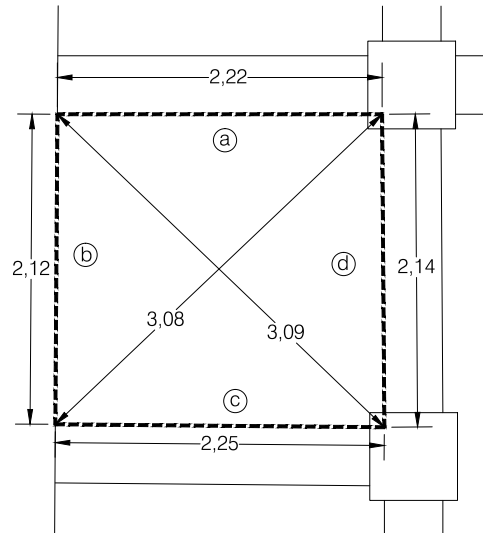


Sección directriz b-d. Elipse ajustada

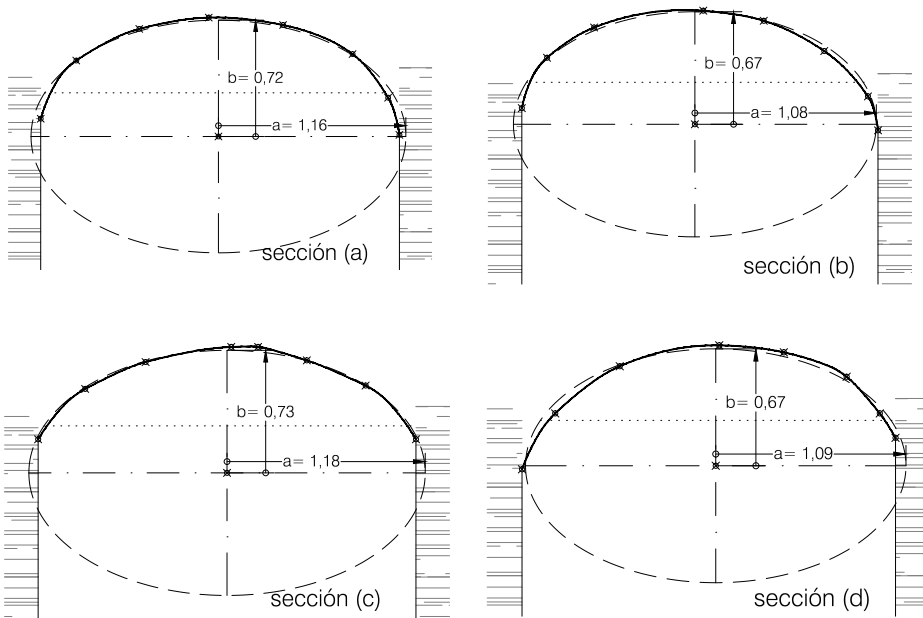
Parámetros de las cónicas ajustadas

	A	B	C	D	E	F
Directriz:						
Palancar1 (a-c)	15.76884	0.0	1.14704	0.00876	-5.45992	5.99466
Palancar1 (b-d)	16.16844	0.0	42.263	4.85053	76.91866	-647.96506
Generatriz:						
Palancar1 (a)	0.43824	0.0	1.14704	0.00876	-5.45992	5.99466
Palancar1 (b)	0.4356	0.0	1.14062	0.04356	-5.45218	6.01959
Palancar1 (c)	0.46104	0.0	1.2078	0.0	-5.8216	6.45818
Palancar1 (d)	0.47748	0.0	1.24992	0.0	-5.82465	6.1889

Monasterio del Palancar. Bóveda 2

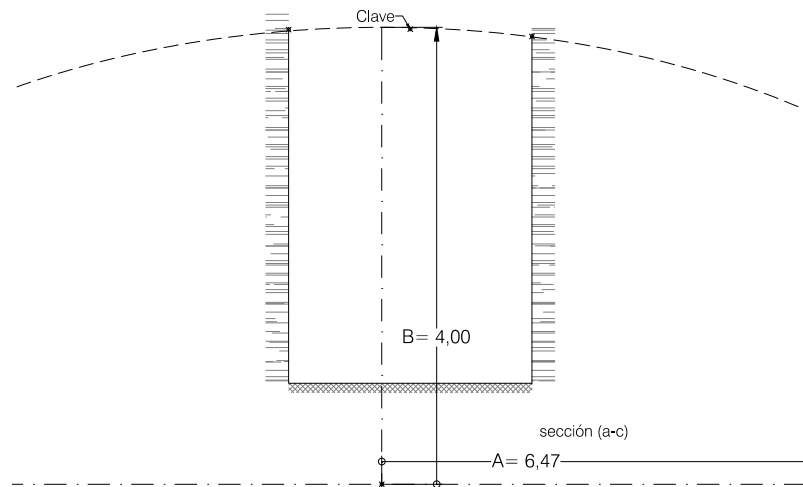


Planta bóveda

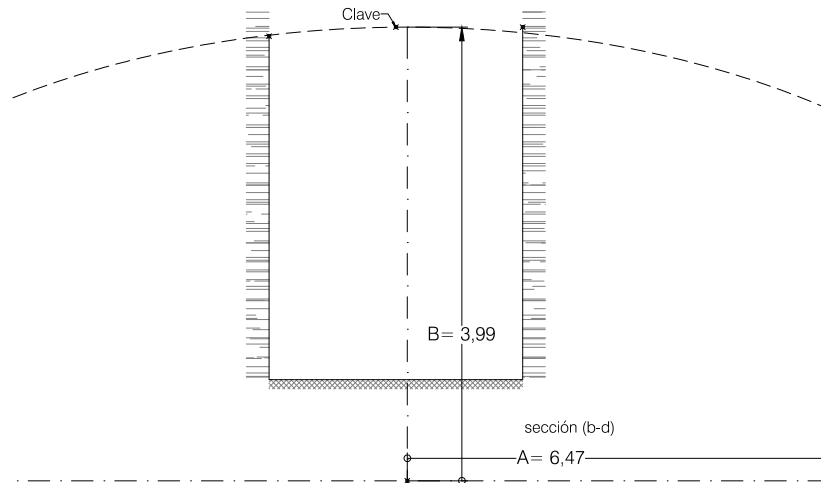


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

Monasterio del Palancar. Bóveda 2 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada



Sección directriz b-d. Elipse ajustada

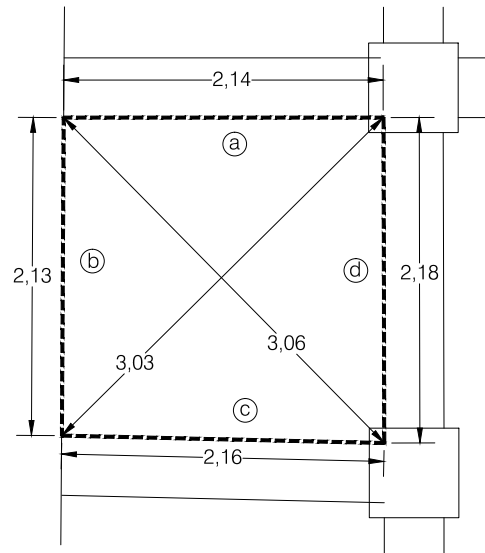
Parámetros de las cónicas ajustadas

	A	B	C	D	E	F
Directriz:						
Palancar2 (a-c)	16.03202	0.0	41.95153	8.01601	8.01601	-639.07832
Palancar2 (b-d)	15.9201	0.0	41.91268	-3.18402	74.60456	-633.89576
Generatriz:						
Palancar2 (a)	0.51266	0.0	1.34328	0.01025	-6.17909	6.41737
Palancar2 (b)	0.44622	0.0	1.16856	0.02677	-5.65584	6.32252
Palancar2 (c)	0.53582	0.0	1.40186	-0.00107	-6.53265	6.85939
Palancar2 (d)	0.45293	0.0	1.18592	-0.03623	-5.55011	5.95722

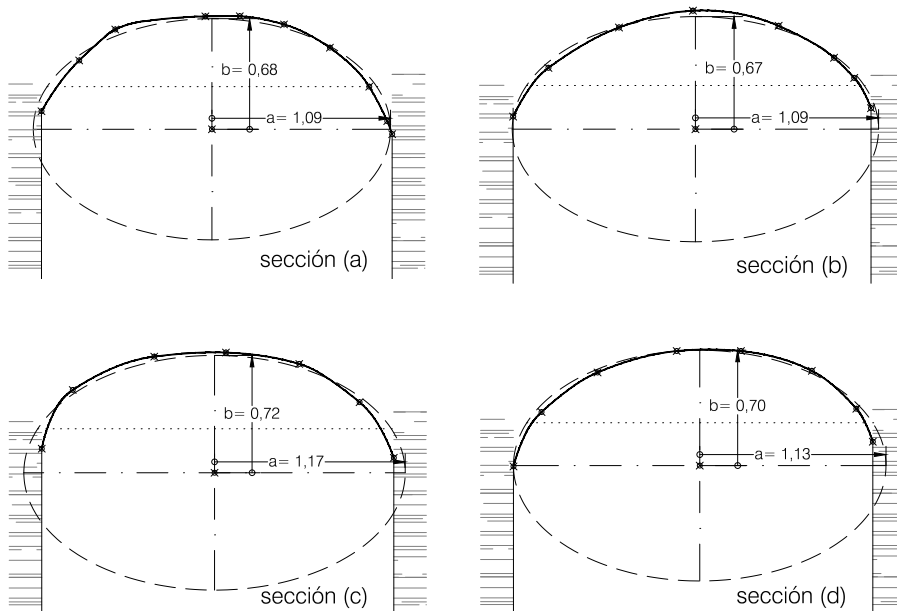
---

 Monasterio del Palancar. Bóveda 3
 

---

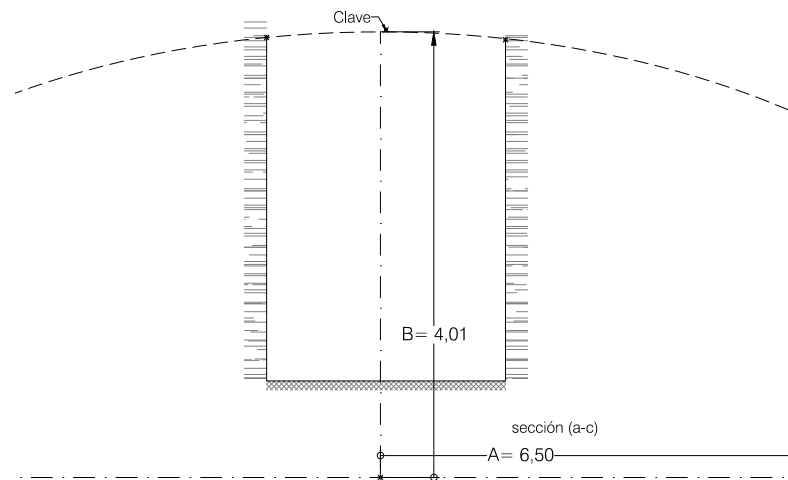


Planta bóveda

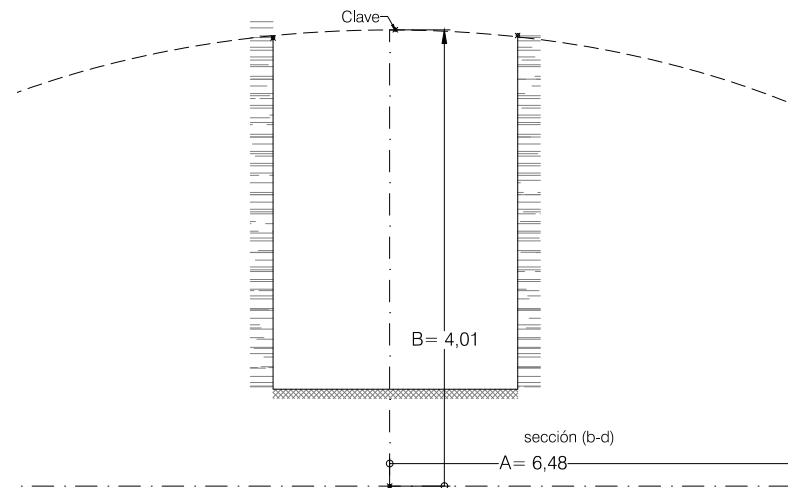


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

Monasterio del Palancar. Bóveda 3 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada



Sección directriz b-d. Elipse ajustada

Parámetros de las cónicas ajustadas

	A	B	C	D	E	F
Directriz:						
Palancar3 (a-c)	16.08812	0.0	42.18503	1.60881	73.57068	-646.56075
Palancar3 (b-d)	16.0801	0.0	42.02929	1.60801	71.449790	-645.42881
Generatriz:						
Palancar3 (a)	0.45563	0.0	1.19246	0.02734	-5.69998	6.26857
Palancar3 (b)	0.45293	0.0	1.18592	-0.01812	-5.71614	6.35099
Palancar3 (c)	6.35099	0.0	1.36422	0.02085	-6.41185	6.82299
Palancar3 (d)	0.48302	0.0	1.26563	-0.03864	-6.049691	6.61882

## C.6. Las Seguras de Ovando

Las Seguras de Ovando (bóvedas 1 y 2)

---

Localización: Cáceres

T.M. de Cáceres

39° 22' 32,33"N – 6° 26' 53,67"W

Dat. catastral:

Tipo Arquitectura: Casa-castillo

Uso: Residencial

Sup. construcción: 615 m<sup>2</sup>

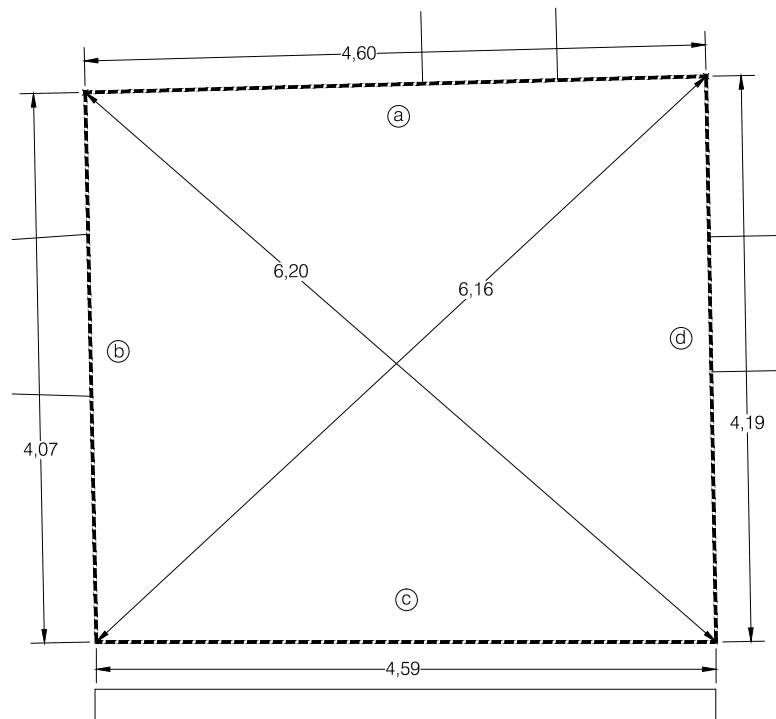
Año: s. XIII (con reformas posteriores)

---

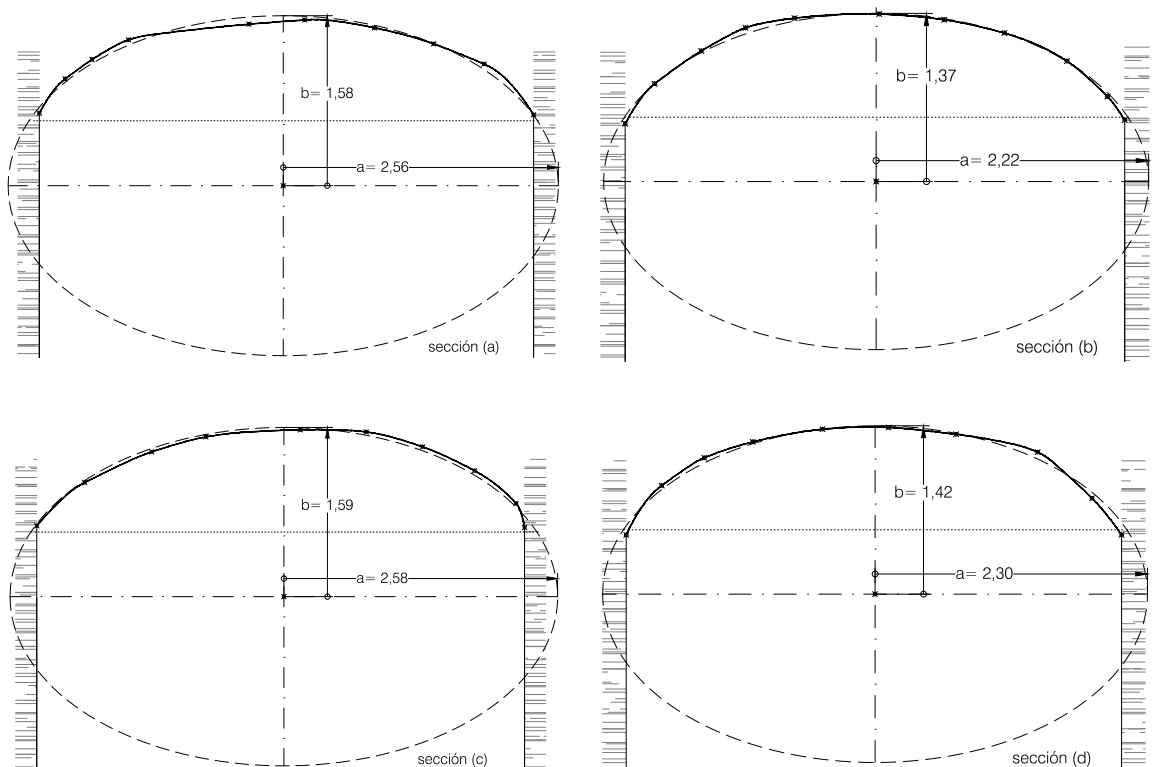
Fotografía



Las Seguras de Ovando. Bóveda 1

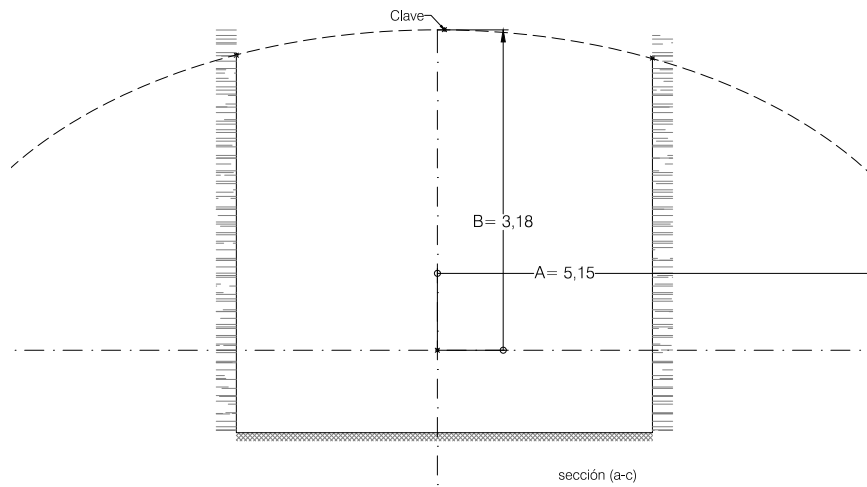


Planta bóveda

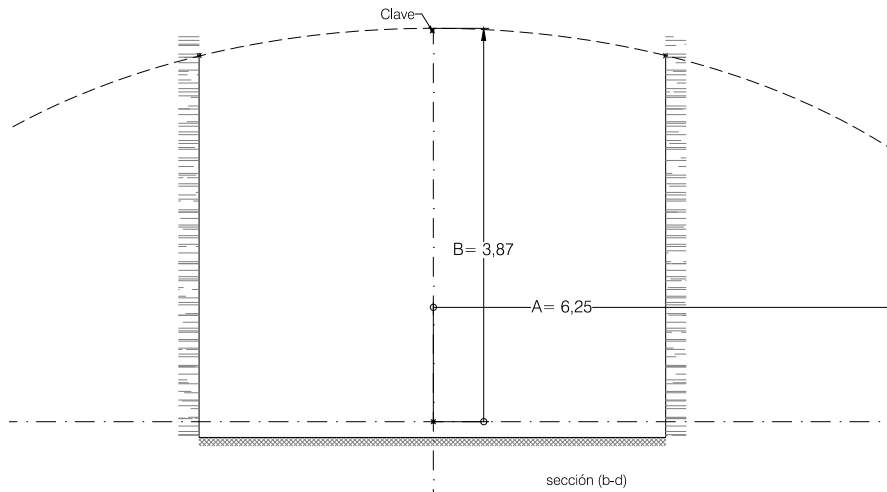


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

## Las Seguras de Ovando. Bóveda 1 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada



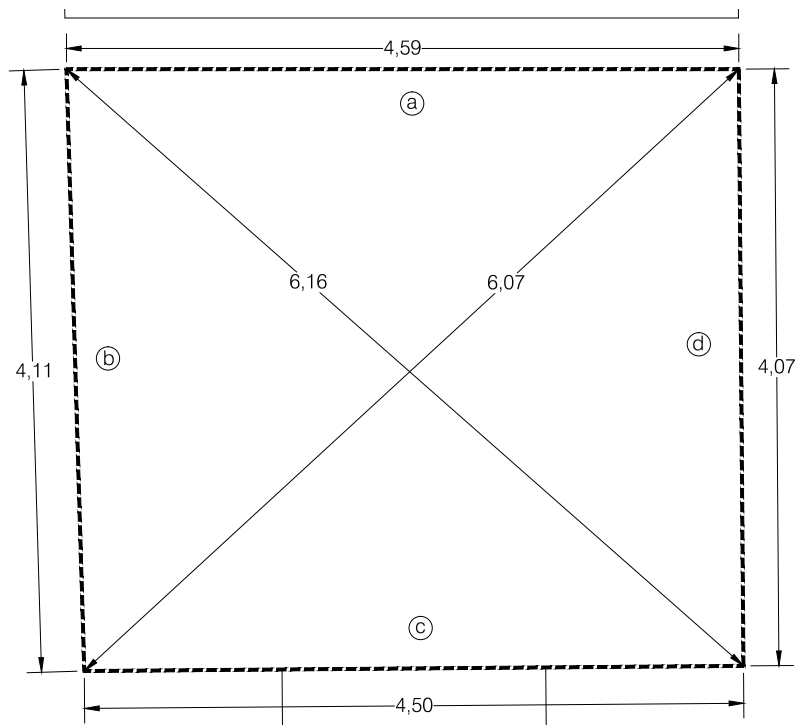
Sección directriz b-d. Elipse ajustada

## Parámetros de las cónicas ajustadas

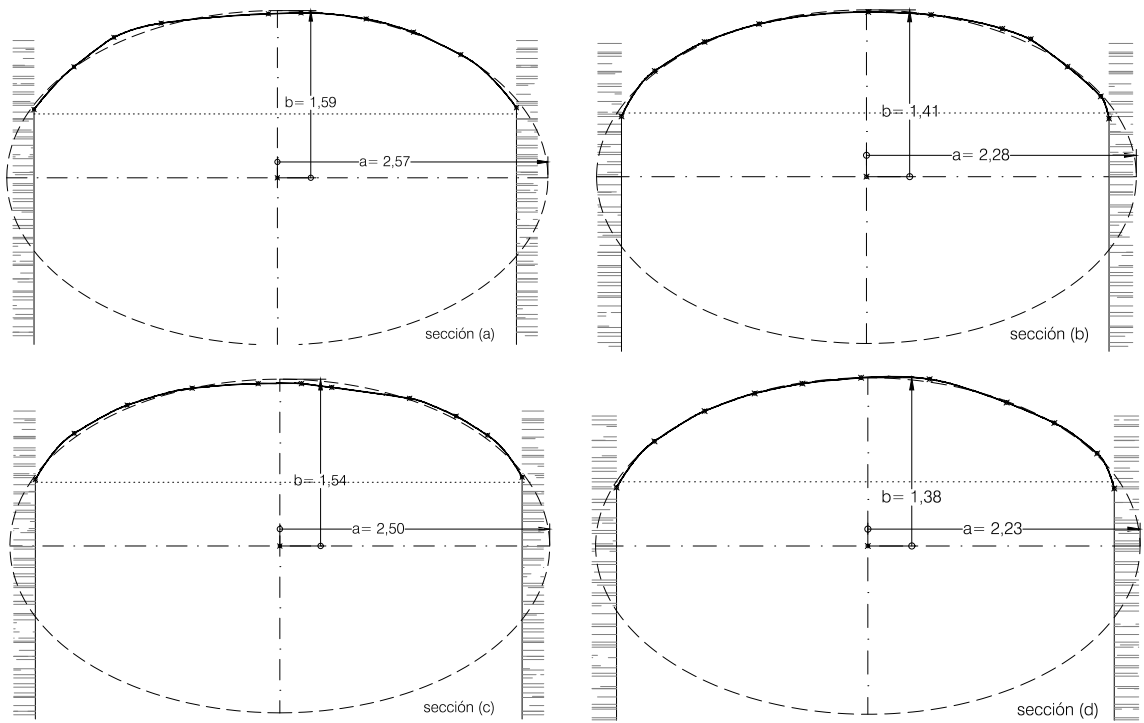
	A	B	C	D	E	F
Directriz:						
Seguras1 (a-c)	8.25413	0.0	21.68765	1.15558	-50.7491	-149.28398
Seguras1 (b-d)	14.96142	0.0	39.01252	-0.29923	-12.48401	-582.68258
Generatriz:						
Seguras1 (a)	2.50589	0.0	6.55872	0.15035	-28.7272	15.02311
Seguras1 (b)	1.87964	0.0	4.91952	-0.03759	-23.41693	18.6194
Seguras1 (c)	2.53446	0.0	6.63578	-0.15207	-28.93198	14.72001
Seguras1 (d)	2.02778	0.0	5.30842	-0.04056	-24.94956	18.55165



Las Seguras de Ovando. Bóveda 2

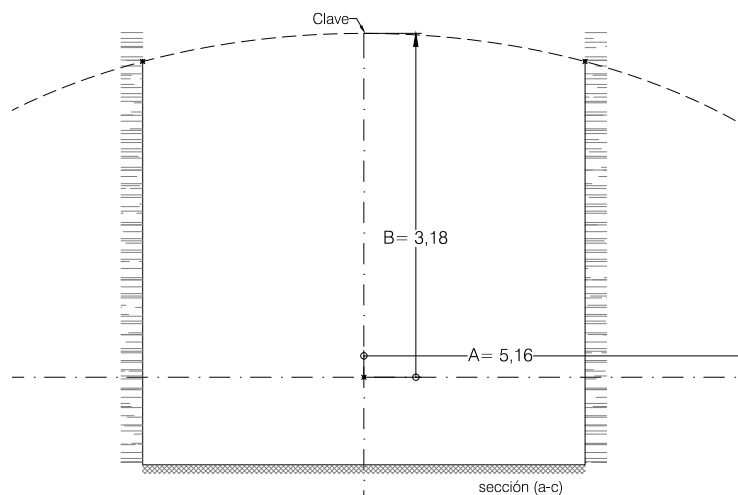


Planta bóveda

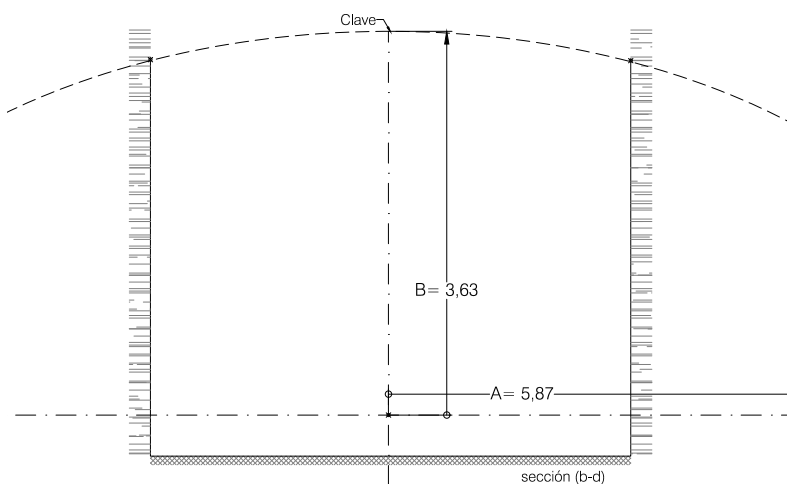


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

## Las Seguras de Ovando. Bóveda 2 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada



Sección directriz b-d. Elipse ajustada

## Parámetros de las cónicas ajustadas

	A	B	C	D	E	F
Directriz:						
Seguras2 (a-c)	10.13149	0.0	26.6256	0.0	-43.13347	-252.28792
Seguras2 (b-d)	13.15513	0.0	34.4569	0.52621	-26.87638	-448.03881
Generatriz:						
Seguras2 (a)	2.53128	0.0	6.62548	-0.10125	-28.75457	14.42877
Seguras2 (b)	1.97684	0.0	5.17562	-0.03954	-24.32544	18.35122
Seguras2 (c)	2.37776	0.0	6.22503	-0.04756	-27.70136	16.01636
Seguras2 (d)	1.89338	0.0	4.95508	-0.07574	-23.48706	18.4511

### C.7. Casa Malpartida de Cáceres I

Casa Malpartida de Cáceres I (bóvedas 1 y 2)

---

Localización: Avd. de la Constitución nº 9  
Malpartida de Cáceres (Cáceres)  
39° 26' 51,32"N – 6° 30' 21,04"W

Dat. catastral:

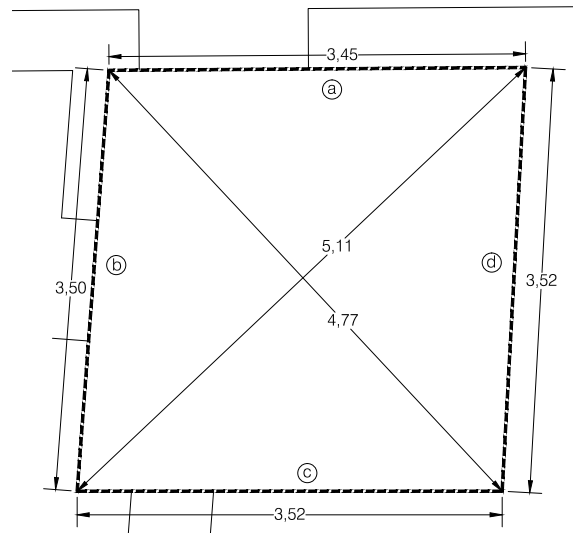
Tipo Arquitectura: Vivienda  
Uso: Residencial  
Sup. construcción: 131 m<sup>2</sup>  
Año: 1930 (aprox.)

---

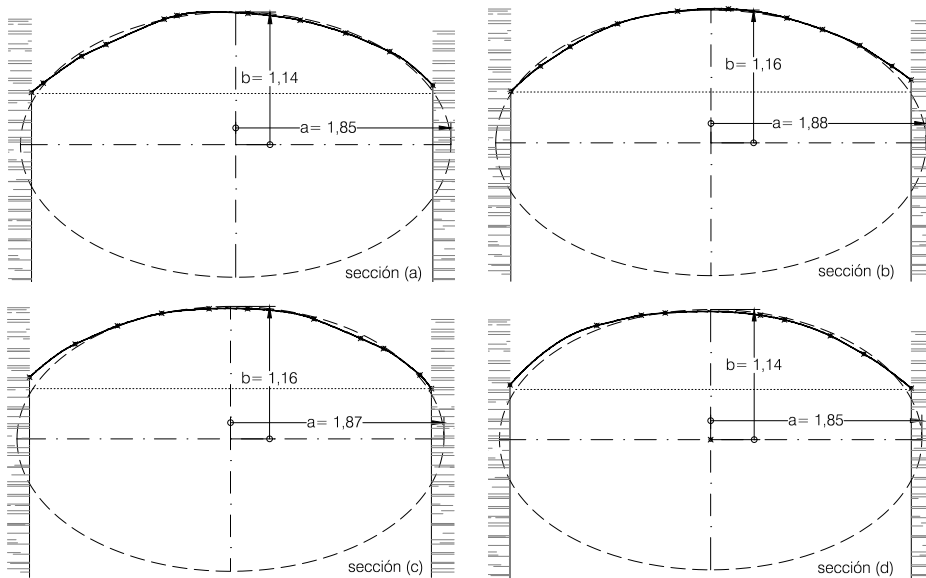
Fotografía



Malpartida de Cáceres I. Bóveda 1

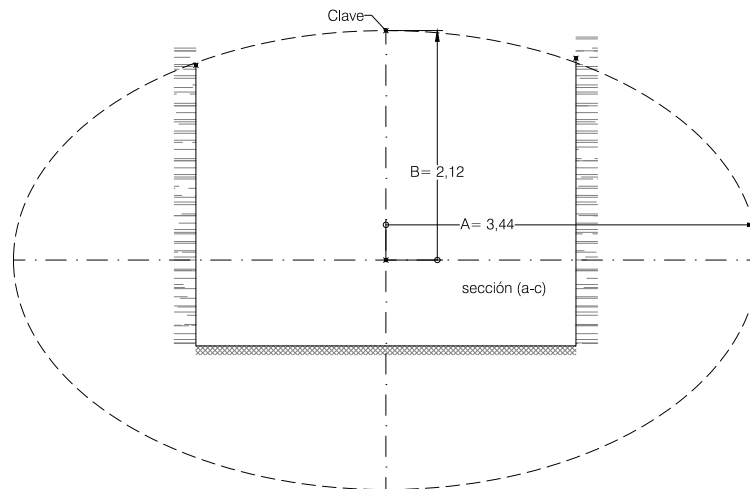


Planta bóveda

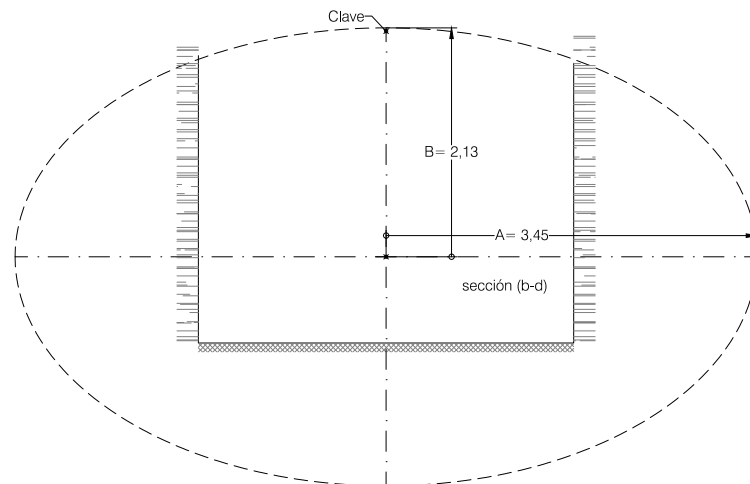


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

Malpartida de Cáceres I. Bóveda 1 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada

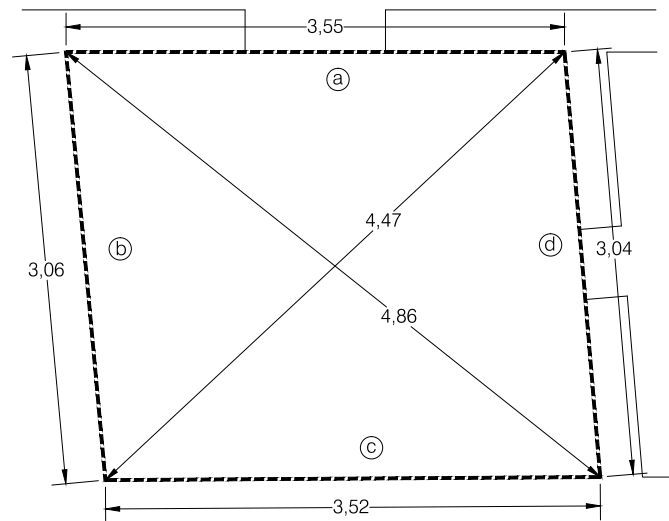


Sección directriz b-d. Elipse ajustada

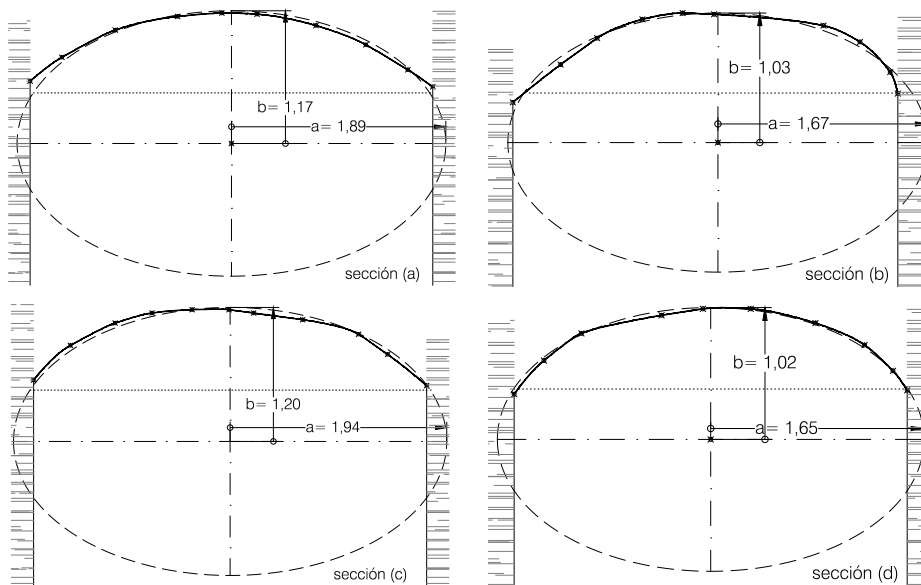
Parámetros de las cónicas ajustadas

	A	B	C	D	E	F
Directriz:						
Malpar1 (a-c)	4.4521	0.0	11.6554	0.0	-18.41553	-44.61686
Malpar1 (b-d)	4.5369	0.0	11.87492	0.90738	-18.99987	-46.22999
Generatriz:						
Malpar1 (a)	1.30188	0.0	3.40772	-0.07811	-10.35946	3.43792
Malpar1 (b)	1.3549	0.0	3.54569	0.0	-10.14067	2.44654
Malpar1 (c)	1.34096	0.0	3.51188	0.0	-10.18444	2.67442
Malpar1 (d)	1.30874	0.0	3.4262	0.0	-10.62122	3.74746

## Malpartida de Cáceres I. Bóveda 2

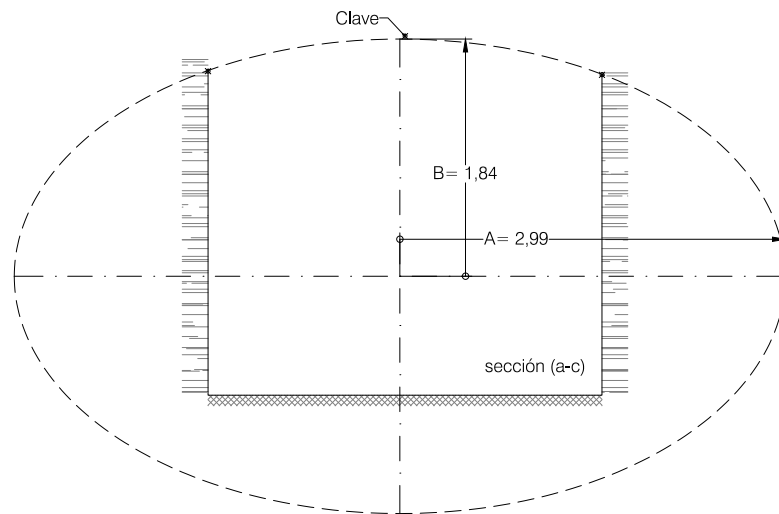


Planta bóveda

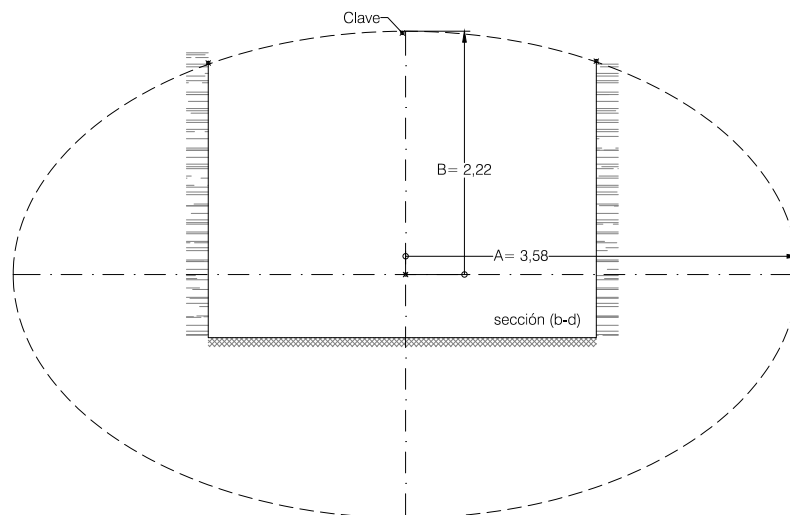


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

Malpartida de Cáceres I. Bóveda 2 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada



Sección directriz b-d. Elipse ajustada

Parámetros de las cónicas ajustadas

		A	B	C	D	E	F
Directriz:	Malpar2 (a-c)	3.37457	0.0	8.91022	0.26997	-16.57302	-22.35632
	Malpar2 (b-d)	4.91952	0.0	12.80924	0.90738	-15.1149	-58.55204
Generatriz:	Malpar2 (a)	1.36656	0.0	3.575882	0.0	-9.51184	1.43872
	Malpar2 (b)	1.06502	0.0	2.7889	-0.213	-8.3667	3.31543
	Malpar2 (c)	1.4352	0.0	3.75584	0.0	-9.99055	1.25331
	Malpar2 (d)	1.03429	0.0	2.70932	0.0	-8.07376	3.21274

**C.8. Casa palacio Los Becerra**

Casa palacio Los Becerra (bóvedas 1 y 2)

---

Localización: Plaza de San Jorge nº 2

Cáceres

39° 28' 25,80"N – 6° 22' 13,58"W

Dat. catastral:

Tipo Arquitectura: Casa solariega

Uso: Industrial (Fundación M. Calles y C. Ballesteros)

Sup. construcción: 913 m<sup>2</sup>

Año: s. XV - XVI

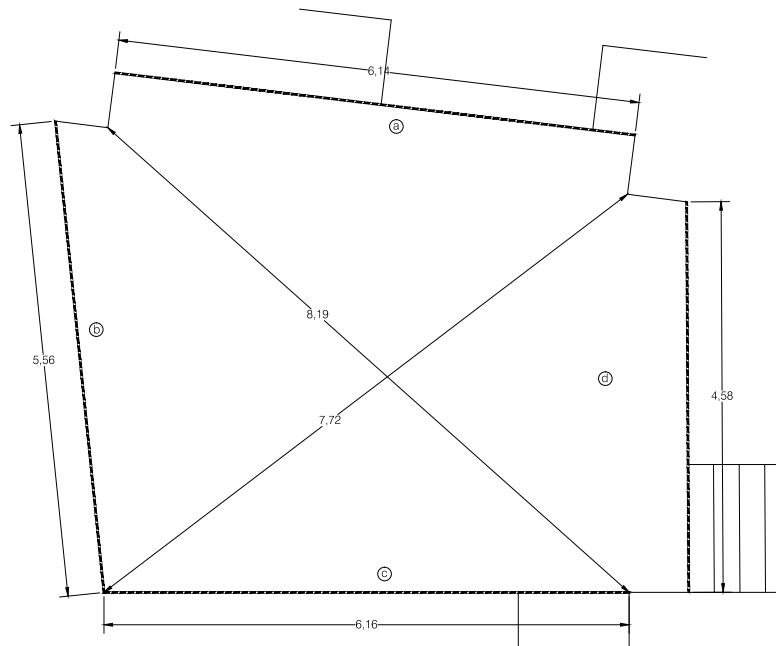
---

Fotografía

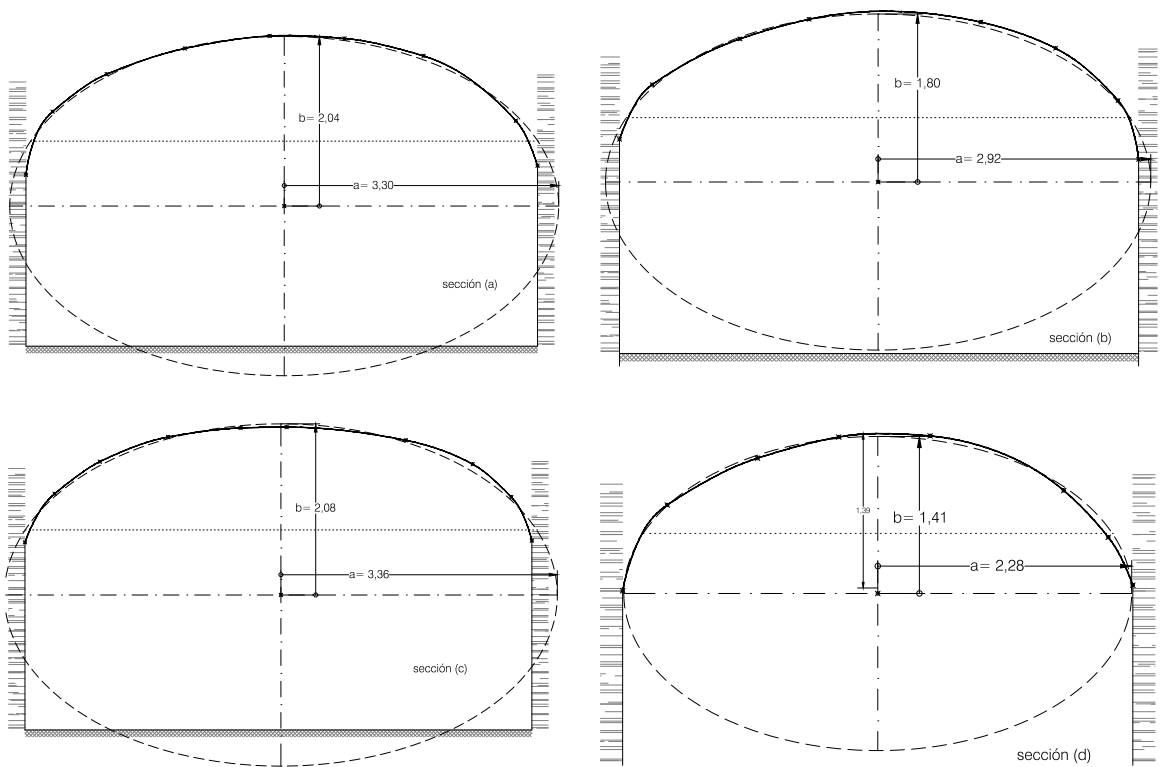




Casa palacio Los Becerra. Bóveda 1

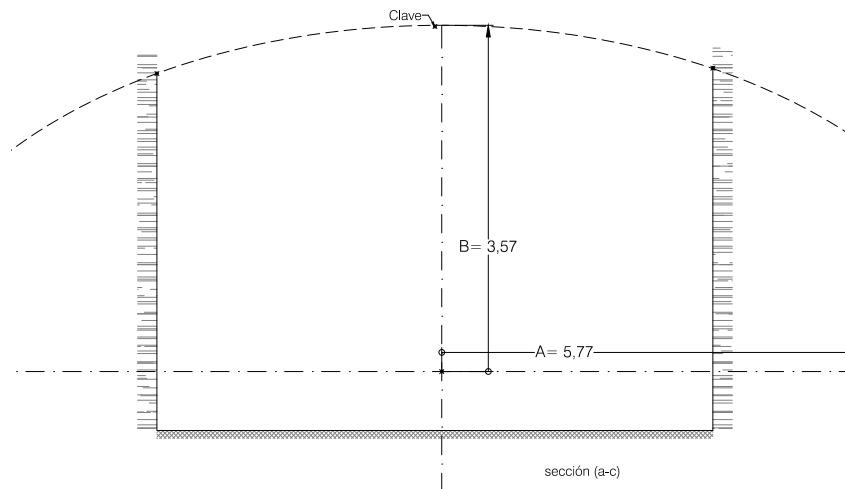


Planta bóveda

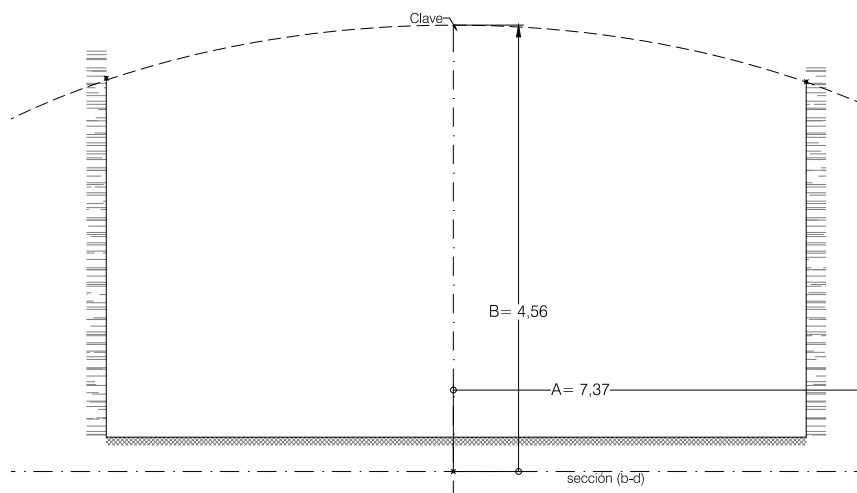


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

## Casa palacio Los Becerra. Bóveda 1 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada

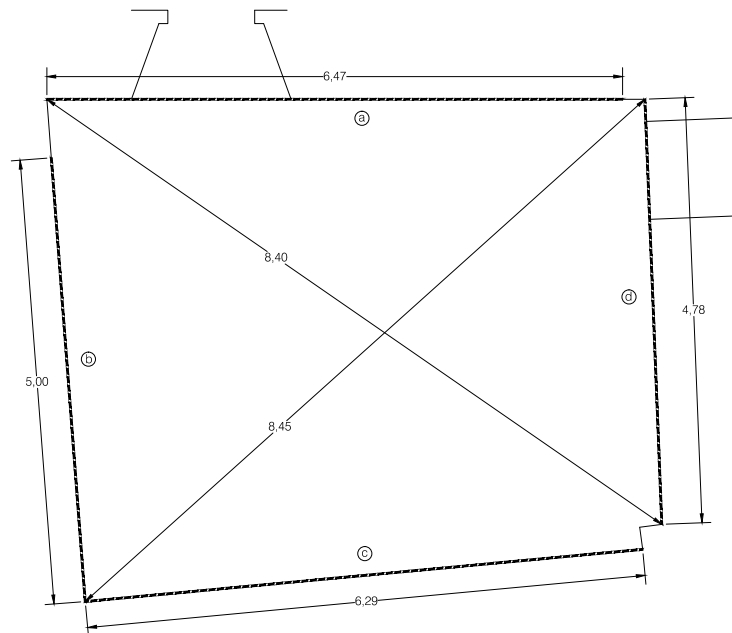


Sección directriz b-d. Elipse ajustada

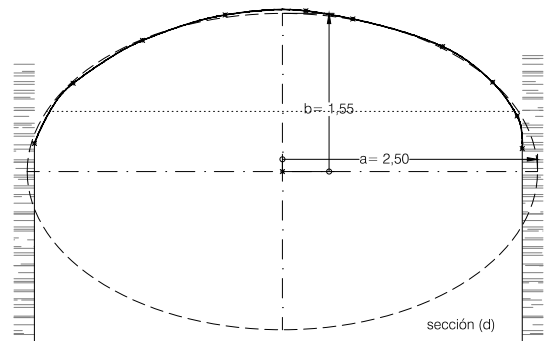
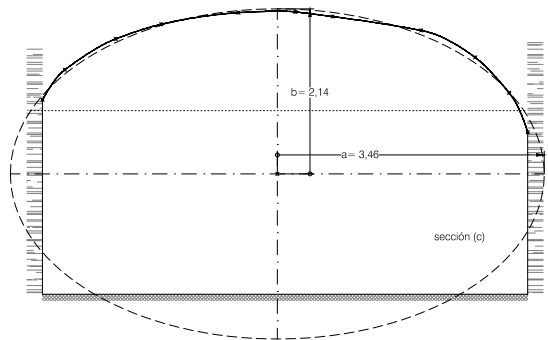
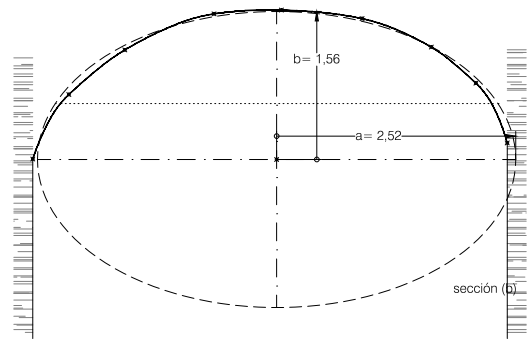
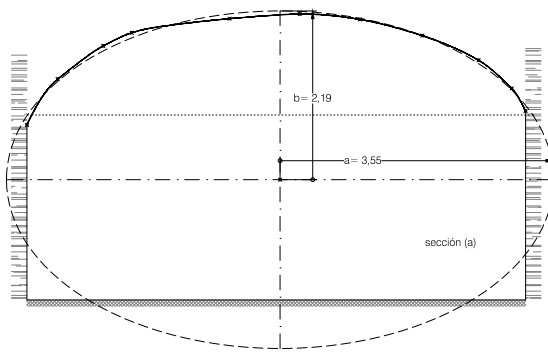
Parámetros de las cónicas ajustadas

		A	B	C	D	E	F
Directriz:	Becerra1 (a-c)	12.72349	0.0	33.32753	-1.78129	-40.65959	-411.57893
	Becerra1 (b-d)	20.82097	0.0	54.30216	1.24926	38.01151	-1123.95286
Generatriz:	Becerra1 (a)	4.15344	0.0	10.8768	-0.24921	-36.7636	-14.10722
	Becerra1 (b)	3.25803	0.0	8.53224	0.06516	-31.39865	1.08883
	Becerra1 (c)	4.32224	0.0	11.3165	-0.25933	-37.11811	-18.47189
	Becerra1 (d)	1.97965	0.0	5.18473	0.0198	-22.81281	14.83019

Casa palacio Los Becerra. Bóveda 2

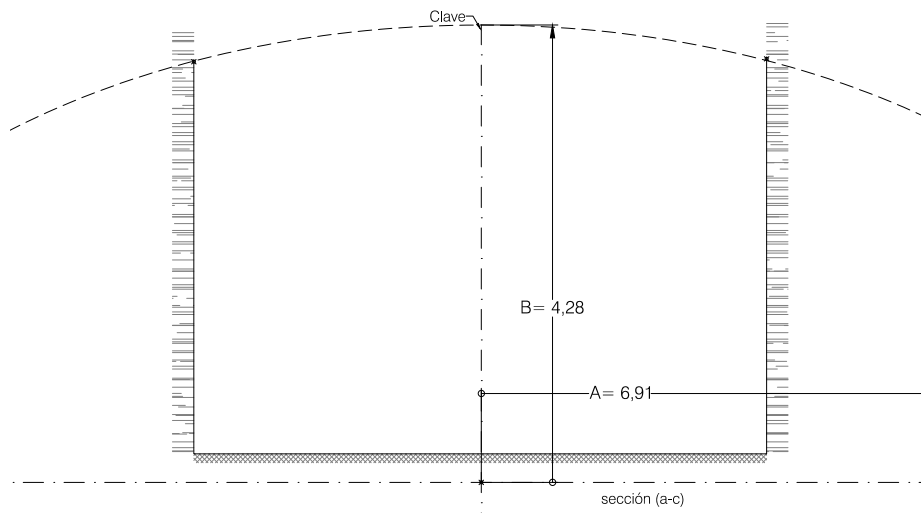


Planta bóveda

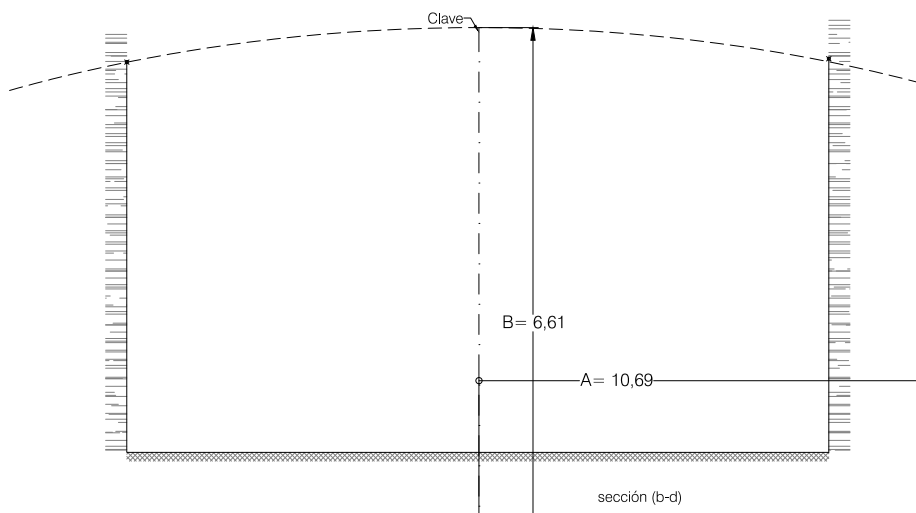


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

## Casa palacio Los Becerra. Bóveda 2 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada



Sección directriz b-d. Elipse ajustada

## Parámetros de las cónicas ajustadas

		A	B	C	D	E	F
Directriz:	Becerra2 (a-c)	18.28418	0.0	47.77574	-0.36568	25.7989	-870.05543
	Becerra2 (b-d)	43.65245	0.0	114.36164	-0.87305	594.68051	-4219.07646
Generatriz:	Becerra2 (a)	4.80486	0.0	12.58121	-0.48049	-39.25337	-29.82136
	Becerra2 (b)	2.42114	0.0	6.34032	-0.33896	-26.75617	12.88883
	Becerra2 (c)	4.57532	0.0	11.97852	0.91506	-37.37299	-25.6089
	Becerra2 (d)	2.3963	0.0	6.27502	-0.1917	-26.73161	13.43613

### C.9. Cáceres. Plaza Mayor

---

Cáceres. Plaza Mayor (bóveda 1)

---

Localización: Plaza Mayor nº 38

Cáceres

39° 28' 29,07"N – 6° 22' 20,48"W

Dat. catastral: 6129231QD2762G0001QG

Tipo Arquitectura: Vivienda

Uso: Vivienda, comercio

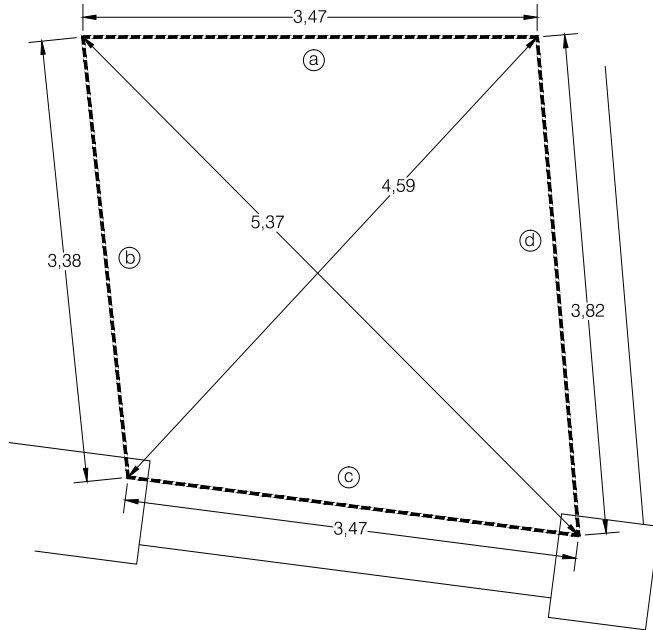
Sup. construcción: 266 m<sup>2</sup>

Año: 1900

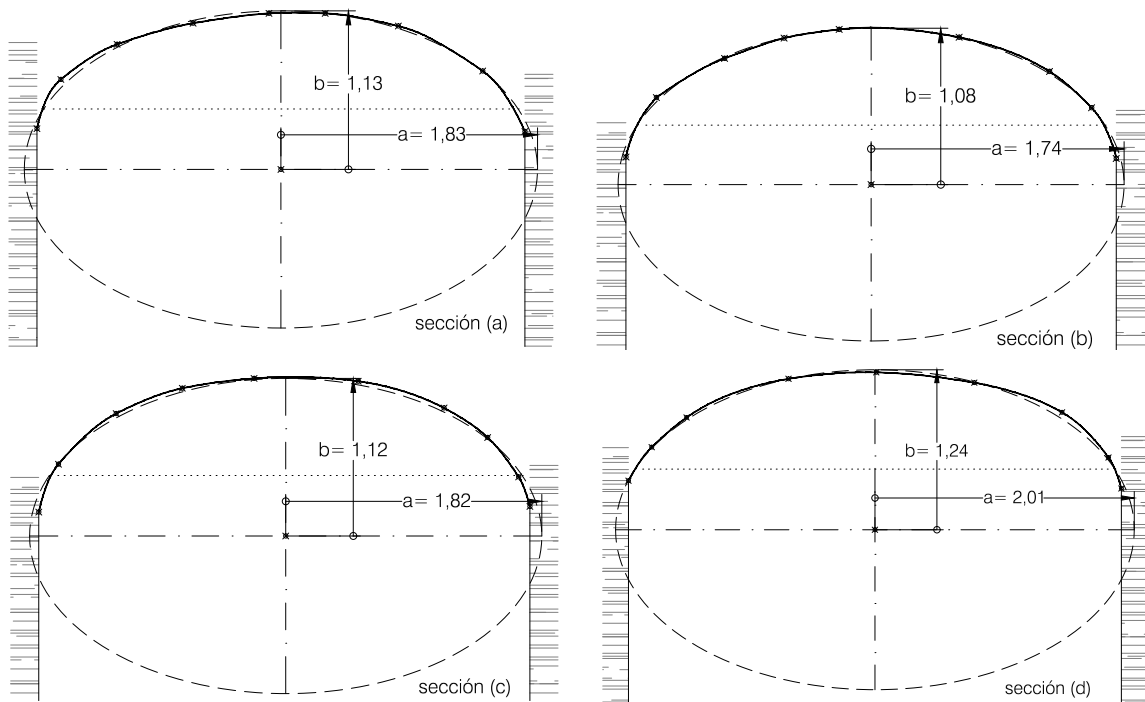
---

#### Fotografía



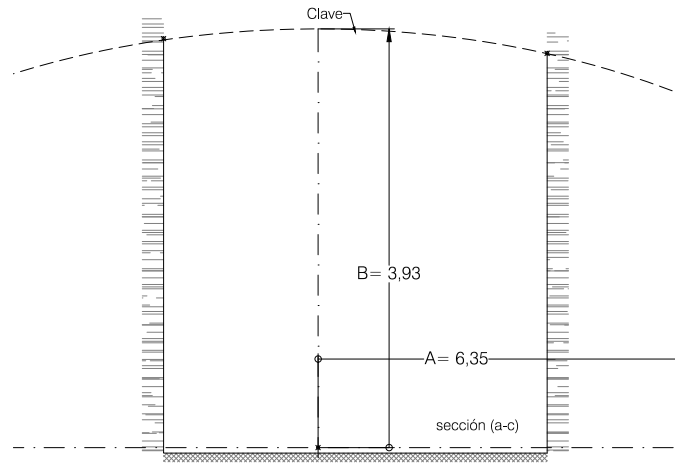


Planta bóveda

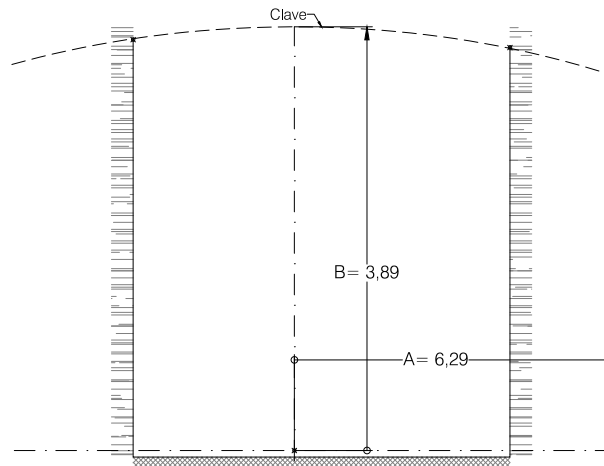


Secciones por generatriz en muros y elipses ajustadas

Cáceres. Plaza Mayor. Bóveda 1 (cont.)



Sección directriz a-c. Elipse ajustada



Sección directriz b-d. Elipse ajustada

Parámetros de las cónicas ajustadas

	A	B	C	D	E	F
Directriz:						
CáceresPM (a-c)	15.45276	0.0	40.37332	10.81693	-4.03733	-411.57893
CáceresPM (b-d)	15.15545	0.0	39.61444	7.57772	-4.75373	-599.28474
Generatriz:						
CáceresPM (a)	1.27238	0.0	3.33063	0.0	-17.5857	18.97529
CáceresPM (b)	1.16208	0.0	3.04154	0.0	-16.72845	19.4671
CáceresPM (c)	1.26113	0.0	3.30149	-0.02522	-18.29025	21.16852
CáceresPM (d)	1.5376	0.0	4.02404	0.01538	-20.4421	19.77415





## Anexo D

### Textos originales. Reproducción

#### D.1. «Elementos». Traducción de Rodrigo Zamorano

Rodrigo Zamorano, cosmógrafo y matemático español (Medina de Rioseco - Valladolid- 1542 - Sevilla, 1620). Fue profesor en las universidades de Valladolid y de Salamanca. En 1575 fue nombrado Catedrático de Cosmografía de la Casa de Contratación de Sevilla y en 1586 ocupó el puesto de Piloto Mayor. Llegó a construir instrumentos para pilotar con gran pericia y destreza lo que le llevó en 1579 al nombramiento de encargado de la fabricación de instrumentos en la Casa de Contratación de Sevilla. También desarrolló una intensa actividad en cosmología y especialmente en la elaboración de mapas, colaborando con Pedro Sarmiento de Gamboa en mapas para la exploración del estrecho de Magallanes. En 1586 fue nombrado piloto mayor de la Casa de Contratación, nombramiento que no estuvo exento de polémica y fue destituido del cargo en 1596. Rehabilitado en el cargo en 1598 se mantuvo en el hasta su retiro definitivo en 1613 debido a su edad y a su estado de salud.

Sus trabajos más notables fueron los libros de náutica Compendio del arte de navegar (Sevilla, 1582) y Repertorio y cronología de la razón de los tiempos (Sevilla, 1585). Tradujo del griego al castellano —al romance— parte los *Elementos* de Euclides, del libro I al libro VI, dedicados a la geometría del plano. Está considera como la primera traducción y fue impresa en Sevilla, en casa de Alonso de la Barrera, en 1576 con el título: *Los seis primeros libros de la Geometria de Euclides. Traduzidos en lengua Española por Rodrigo Çamorano Astrologo y Mathematico, y Cathedratico de Cosmographia por su Majestad en la casa de Contratacio de Seuilla*, Sevilla, 1576 (ref. [10]).

Es una traducción fiel del texto en griego, siguiendo la tradición renacentista

de la época, en la que se conserva la redacción del texto original, sin añadidos ni comentarios, como reza en el folio 7, en la dedicatoria de Zamorano: *Al curioso lector*.

Ni he querido poner en ellos comentarios, scholios, ni additiones (que pudiera) por que el auctor fue en esto tan ingenioso que el que quisiere, con facilidad puede, atendiendo bien a la letra, perceber el sentido y demonstracion de lo que el enseña.

Figura D.1: Extracto de la dedicatoria (folio 7)

Esta versión de Zamorano es, en su conjunto, excelente, como señala en la introducción que hace Luis Vega en el libro *Elementos* (ref. [10]). Es por ello que se ha tomado como texto de referencia básico en el desarrollo de lo que se expone en este Trabajo.

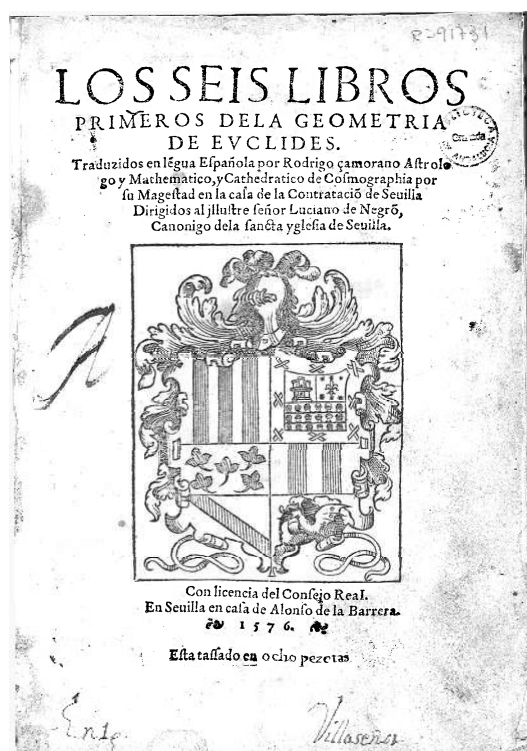


Figura D.2: Portada de los *Elementos* de Euclides en la edición de Rodrigo Zamorano, primera en lengua castellana, (Sevilla 1576)

En adelante se muestran algunas páginas del libro de Zamorano que se han utilizado en este Trabajo.

D.1.1. Libro I, proposición 47, folio 34

LIBRO PRIMERO DE

¶ En los triangulos rectangulos el quadrado que es hecho de el lado q̄ esta opuesto al angulo recto es yqual a los dos quadrados q̄ son hechos de los lados q̄ cōtienen el angulo recto,

Sea el triangulo rectángulo.  $ABC$ . q̄ tenga recto el angulo  $BAC$ . digo que el quadrado q̄ es hecho del lado  $BC$ . es yqual a los quadrados q̄ se hazen de  $BA$ . y de  $AC$ . Describase, por la. 46. dela.  $BC$ . el quadrado.  $BDEC$ , y por la misma, de la  $BA$ . y dela,  $AC$ . los quadrados.  $ABZL$ .  $ACKT$ . y por el p̄cto  $A$ . tirese.  $AL$ . paralela cō la.  $BD$ .  $CE$ , por la proposició. 31, y por la. 1. petició tirese  $AD$ .  $CZ$ . y por q̄ los ángulos.  $BAC$ .  $BAL$  son rectos. Luego tiradas dos lineas rectas.  $AC$ .  $AL$ . desde vna linea recta.  $AB$ . y desde vn p̄cto en ella.  $A$ . no hacia vnas mismas ptes hacé de vna y otra pte ángulos yguales a dos rectos, por la. 14. p̄posició ) luego é derecho esta la.  $AC$ . dia.  $AI$  y por esto también  $BA$  esta é derecho de.  $AT$  y por q̄ el angulo.  $DBC$ . es yqual al angulo.  $ZBA$ . por q̄ cada vno dellos es recto: p̄gase comū el angulo  $ABC$ . Luego todo  $DBA$  es yqual a todo el angulo  $ZBC$ . y por q̄ las dos.  $AB$ .  $BD$ . son yguales a las dos  $BZ$ .  $BC$ . la vna a la otra, y el ángulo.  $DBA$  es yqual al angulo.  $ZBC$ . luego la basis.  $AD$ , por la. 4. p̄posició, es yqual a la basis.  $ZC$ . y el triangulo.  $ABD$ . al triangulo.  $ZBC$ . es también yqual. Y el paralelogramo.  $BL$ , por la. 4. es doblo del triangulo.  $ABD$  por

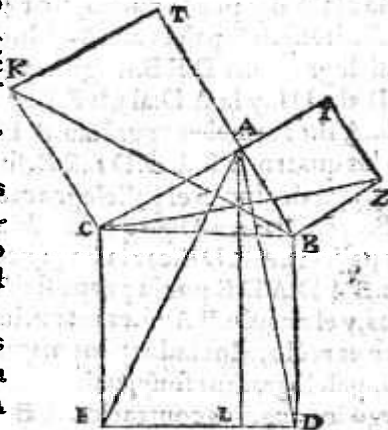


Figura D.3: *Los Elementos*. Edición de Rodrigo Zamorano, Libro I, proposición 47, folio 34a

## D.1.2. Libro I, proposición 47, folio 34b

EVCLIDES. 34.

porq̄ tiene vna misma basis q̄ es. B D . y esta en vnas mismas paralelas, es a saber. D B. A L. y tãbié el quadrado. l B. por la misma, es doblo del triángulo. Z B C. porq̄ tiene la misma basis q̄ es. B Z. y esta en vnas mismas paralelas, es a saber. Z B. l C. y las cosas q̄ son doblo de cosas yguales, por la. 6. comun senténcia, entre si son yguales, Luego el paralelogrãmo. B L. es y gual al quadrado. l B. Semejãtente si, por la. 1. petición, se tirã. A E. B K. se demostrara el paralelogrãmo. C L. ser y gual al quadrado, T C, Luego todo el quadrado. B D E C, es y gual a los dos quadrados, l B, T C, Y el quadrado, B D E C, es hecho de la, B C, y los quadrados, l B, C T, son hechos de la, B A A C, Luego el quadrado q̄ de el lado. B C. se hizo es y gual a los quadrados q̄ son hechos de los lados, B A, A C, luego en los triangulos rectángulos, el quadrado q̄ es hecho del lado q̄ esta. oppuesto al angulo recto y lo que mas se sigue como é el theorema, que se hauia de demostrar,

Theorema. 34. Proposición. 48.

¶ Si el quadrado que es hecho de vno de los lados del triángulo fuere y gual a aq̄llos quadrados que de los demas lados del triángulo: el angulo comprehendido de los dos lados restantes del triangulo, sera recto.

¶ El quadrado que es hecho del vn lado. B C. del triangulo. A B C. sea y gual a aq̄llos quadrados que son hechos de los lados. B A. A C. digo que el angulo. B A C. es recto. Saque se (por la. 11. propositiõ) desde el punto. A. la. A D. en angulos rectos con la linea recta. A C. y (por la. 3. proposicion) ponga se. A D. y gual a la. A B. y (por la. 1. petitiõ) tire se. D C. y porque es y gual. D A. a la. A B. el quadrado

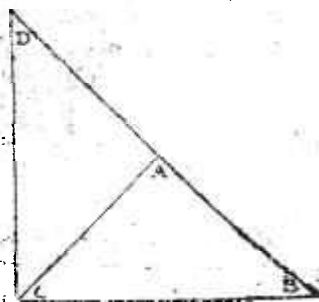


Figura D.4: *Los Elementos*. Edición de Rodrigo Zamorano, Libro I, proposición 47, folio 34b

D.1.3. Libro II, proposición 11, folio 17

«Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la recta entera y una de sus partes sea igual —equivalente— al cuadrado de la parte restante»

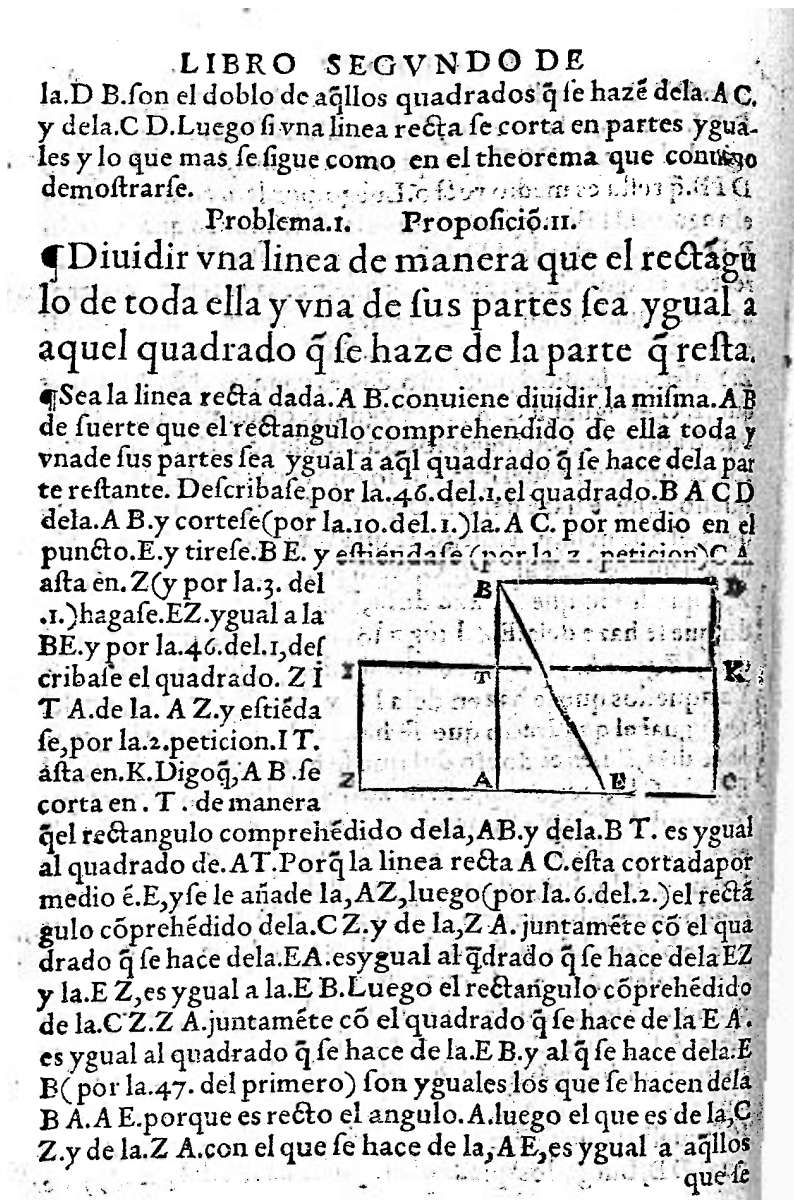


Figura D.5: *Los Elementos*. Edición de Rodrigo Zamorano, Libro II, proposición 11, folio 17

## D.1.4. Libro II, proposición 11, folio 17 v.

«Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la recta entera y una de sus partes sea igual —equivalente— al cuadrado del la parte restante»

EVCLIDES. 42.

que se hacen de la. B A. y de la. A E. quitese por común el de la A E. luego el rectángulo que resta cõprehendido de la. C Z. y de la. Z A. es ygual al quadrado que se hace de la. A B. Y el que es de la. C Z. y de la. Z A. es el mismo. Z K. porque. Z A. es ygual a la misma. Z I. Y el que se hace de la. A B. es el mismo. A D. luego. Z I. es ygual al mismo. A D. Quitese el común. A K. luego el que resta. Z T. es ygual al. T D. y T D. es el que de la. A B. y de la. B T. Porque es ygual, A B. a la. B D. y el. Z T. es el que de A T. Luego el rectángulo cõprehendido de la. A B. y de la. B T. es ygual a aquel quadrado q̄ se hace de la. T A. Esta pues la línea recta dada. A B. diuidida en. T. de manera q̄ el rectángulo cõprehendido de la. A B. y de la. B T. sea ygual a aq̄l quadrado que se hace de la. A T. lo qual conuino hazerle.

Theorema. 11. Proposicion. 12.

En los triangulos de angulo obtuso el quadrado que se hace del lado opuesto al angulo obtuso tanto es mayor que aquellos quadrados q̄ se hacen de los lados que cõprehenden el angulo obtuso, quanto es el rectángulo cõprehendido dos veces debajo de vno de los que cõprehenden el angulo obtuso (sobre el qual estendido cae vna perpédicula) y del que es tomado fuera debajo de la perpédicula asta el angulo obtuso.

Sea el triangulo de angulo obtuso. A B C. que tenga el angulo. B A C. obtuso y tirese desde el pũcto, B. la línea. B D. perpendicular sobre la, C E. estendida, por la. 12. del. 1. Digo q̄ el quadrado de la. B C. es mayor que los de la. B. y de la. A C. por el rectángulo cõprehendido dos veces debaxo de la. C A. y de la. A D. Pues por q̄ la línea recta. C D. es cortada como quiera  
en el

Figura D.6: *Los Elementos*. Edición de Rodrigo Zamorano, Libro II, proposición 11, folio 17 v.

## D.1.5. Libro VI, definición 3, folio 96

«Se dice que una recta está dividida en extrema y media razón cuando la recta entera es a la parte mayor como ésta es a la parte menor»

EVCLIDES. 96.  
**LIBRO SEXTO DE**  
 LOS ELEMENTOS DE EVCLIDES  
 Megarense philosopho  
 Griego.

¶ Definiciones.

1. ¶ Semejâtes figuras rectilneas son las que vno a vno tienen los angulos yguales, y los lados que contienen a los angulos yguales son proporcionales.
2. Figuras reciprocas son, quando en la vna y otra figura los terminos antecedentes, y los conseqüentes fueren racionales.
3. Dize se ser diuidida vna linea recta con razon extrema y media quando fuere que como se ha toda a la mayor parte, así la mayor a la menor.
4. La altura de cada figura es la perpédicular tirada desde la punta asta la basis.
5. La razon se dize constar de dos o mas razones quando las quâtidades de las razones multiplicadas hazen alguna quantidad.

N 4      Sea

Figura D.7: *Los Elementos*. Edición de Rodrigo Zamorano, Libro VI, definición 3, folio 96a

## D.1.6. Libro VI, proposición 29, folio 117 a.

«Sobre una recta dada acomodar un paralelogramo igual a un rectilíneo dado, y que exceda en una figura paralelograma semejante a uno dado»

EUCLIDES. 117

**I**B. es mayor que C. Y en quanto es mayor. I B. que no. C. en tal exceso se hara el paralelogramo. K L M N. (por la. 25. del 6.) y gual al paralelogramo. D. y semejante y semejantemente puesto. Y porque el paralelogramo. D. es semejante a. I B. luego tambien. K M. es semejante al mismo. I B. Sea pues de semejante razon. K L, con. I E. y. L M. cō. I Z, y porque es y gual. I B. a los dos. C. K M. luego. I B. mayor es que. K M. luego mayor es. I E. que no. K L. y. I Z. que no. L M. pōgase pues por la. 3. del. 1.) la. I X. y gual a la. K L. y la. I O. y gual a la. L M. y cumplase el paralelogramo. X I O P. luego. I P. es y gual y semejante a la. K M. Pero. K M. es semejante a. I B. luego tambien. I P. es semejante a. I B. luego (por la. 26. del. 6.) I P. esta con. I B. sobre vna misma diagonal, sea su diagonal. I P B. y hagase la figura. Pues porque. B I. es y gual a los dos. C, K M. de los quales. I P. es y gual con. K M. luego el gnomō. F G H. es y gual cō C. que resta. Y porque. O R. es y gual con. X S. luego todo. O B es y gual con. X B. pero. X B. es y gual con. Q E. Porque el lado. A E. es y gual al lado. E B. luego Q E. es y gual con. O B. pōgase por común. X S. luego todo. Q S. es y gual a todo el gnomon. F G H. y esta demostrado q̄ el gnomō. F G H. es y gual al rectilíneo. C. luego. Q S. es y gual al rectilíneo. C. luego sobre la linea recta dada. A B. se aliento el paralelogramo. Q S. y gual al rectilíneo. C. y falto por vna figura paralelograma. P B. q̄ es semejante al paralelogramo. D. porque el paralelogramo P B. es semejante al paralelogramo. K M. q̄ era lo propuesto.

Problema. 9. Proposicion. 29.

¶ Sobre vna linea recta dada a commodar vn paralelogramo y gual a vn rectilíneo dado, y que exceda en vna figura paralelograma semejante a vno dado.

¶ Sea la linea recta dada. A B. y el rectilíneo dado a cuyo

Q. y gual

Figura D.8: *Los Elementos*. Edición de Rodrigo Zamorano, Libro VI, proposición 29, folio 117a





## D.1.8. Libro VI, proposición 30, folio 118 a.

«Dividir un segmento en extrema y media razón»

EVCLIDES. 118

Problema. 10. Proposición. 30.

¶ Dividir vna linea recta dada terminada cō extrema y media razón.

¶ Sea la linea recta dada terminada.  $A B$ . cōniene diuidir cō extrema y media razón la linea recta.  $A B$ . haga se el quadrado de la.  $AB$  (por la. 46. del. 1.) y sea.  $BC$ . y (por la. 29. del. 6.) assi se fe sobre la.  $AC$ . el parallelogrāmo.  $CD$ . y gual al mismo.  $BC$ . y q̄ es figura parallelograma exceda por el.  $AD$ . seme jante al quadrado.  $BC$ . y es quadrado.  $BC$ . luego t̄bien es quadrado.  $AD$ . y por que.  $BC$ . es y gual al mismo.  $CD$ . quite se el comū  $CE$ . luego el  $BZ$ . q̄ resta es y gual al que resta.  $AD$ . y es tambien equiangulo. luego (por la. 14. del sexto) son reciprocos los lados de los mismos.  $BZ$ .  $DA$ . que est̄ junto a y guales angulos. Luego es que como se ha.  $ZE$ . con.  $DE$ . assi se ha.  $AE$ . con.  $EB$ . y es  $ZE$ . y gual a la.  $AC$ . esto es ala misma.  $AB$ . y la linea.  $ED$ . a la linea.  $AE$ . luego es que como.  $BA$ . con.  $AE$ . assi la.  $AE$ . con la.  $EB$ . y es mayor la.  $AB$ . que la.  $AE$ . luego mayor es la.  $AE$ . que la.  $EB$ . luego la linea recta.  $AB$ . es diuidida en el punto.  $E$ . con razón extrema y media y su mayor parte es.  $AE$ . lo q̄l cōuino hazer se

¶ De otra manera. ¶ Sea la linea recta dada.  $AB$ . cōniene diuidir la misma.  $AB$ . cō razón extrema y media. Cortese la.  $AB$ . en.  $E$  (por la. 11. del. 2.) de manera q̄ el rectangulo comprehendido debaxo dela.  $AB$ . y dela.  $BE$ . sea y gual al quadrado de la.  $EA$ . Pues por q̄ el rectangulo que es contenido debaxo dela.  $AB$ . y dela.  $BE$ . es y gual al quadrado de la.  $EA$ . luego (por la. 17. de este) como la  $BA$ . cō la.  $AE$ . assi la.  $AE$ . con la.  $EB$ . luego la.  $AB$ . es diuidida con razón extrema y media. Lo qual conuenia hazer se.

Q. 2. Theo

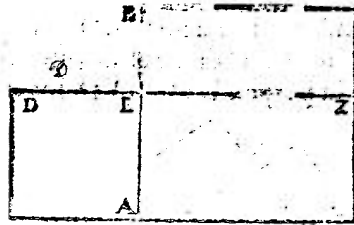


Figura D.10: *Los Elementos*. Edición de Rodrigo Zamorano, Libro VI, proposición 30, folio 118a

D.1.9. Libro IV, proposición 15, folio 70 a.

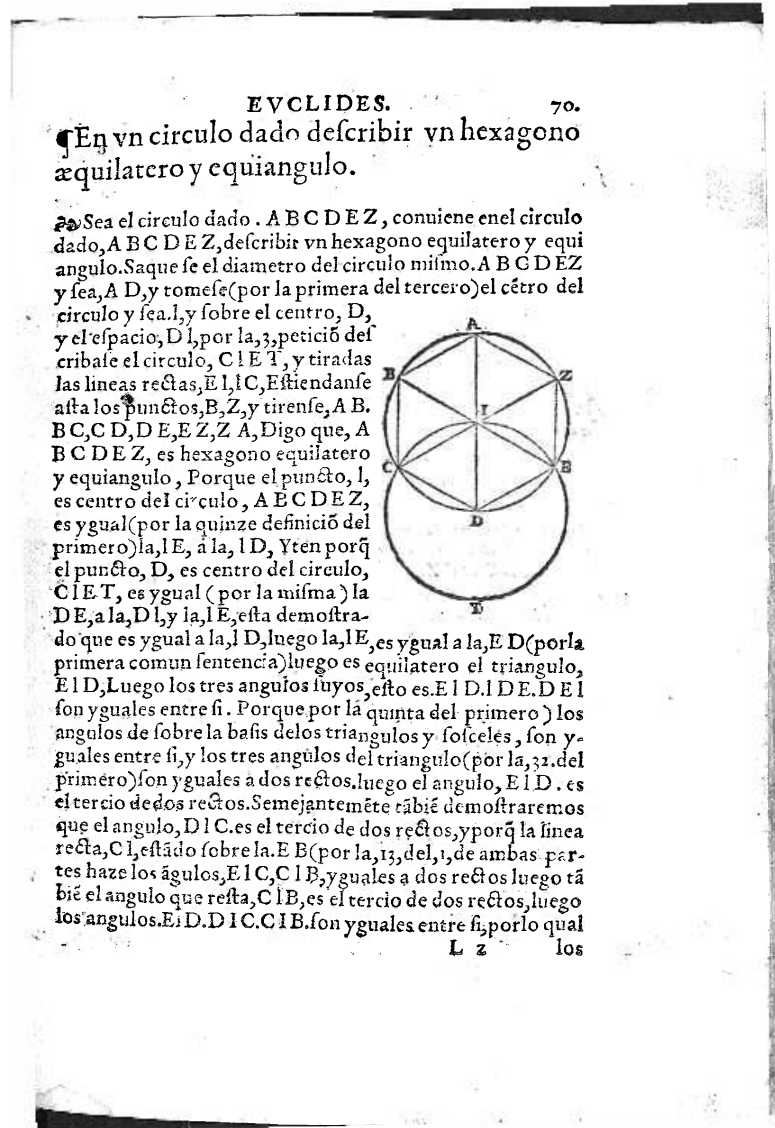


Figura D.11: *Los Elementos*. Edición de Rodrigo Zamorano, Libro IV, proposición 15, folio 70a

## D.1.10. Libro IV, proposición 15, folio 70 r.

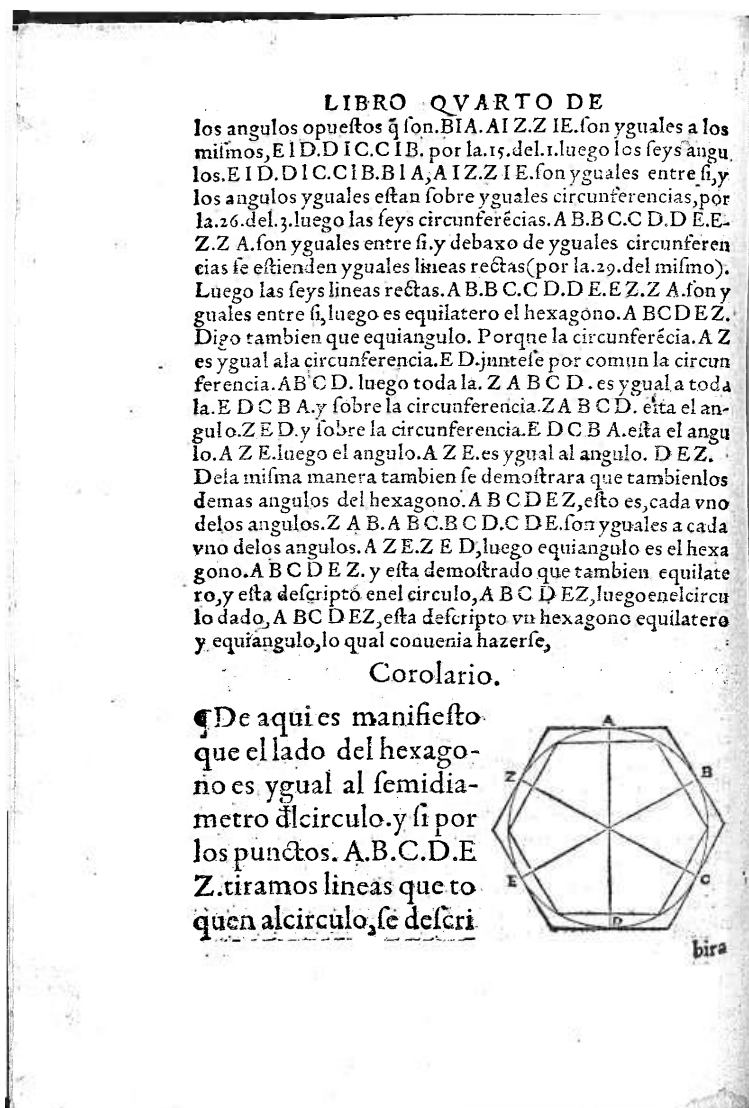


Figura D.12: *Los Elementos*. Edición de Rodrigo Zamorano, Libro IV, proposición 15, folio 70b

## D.2. «Libro primo d'architettura». Sebastiano Serlio

Sebastiano Serlio, arquitecto y escultor italiano (1475-1554 o 1555). En 1537 comenzó la publicación de un tratado de arquitectura compuesto de siete libros que aparecieron por separado. En España fue traducido por Francisco de Villalpando (1552) <sup>1</sup>.



Figura D.13: Portada del *Libro primo d'architettura* de Sebastiano Serlio, Edición de Francesco de Franceschi, Venecia 1566.

<sup>1</sup> (ref. [1]), tomo 21, p. 10068.

## D.2.1. Libro I, folio 15

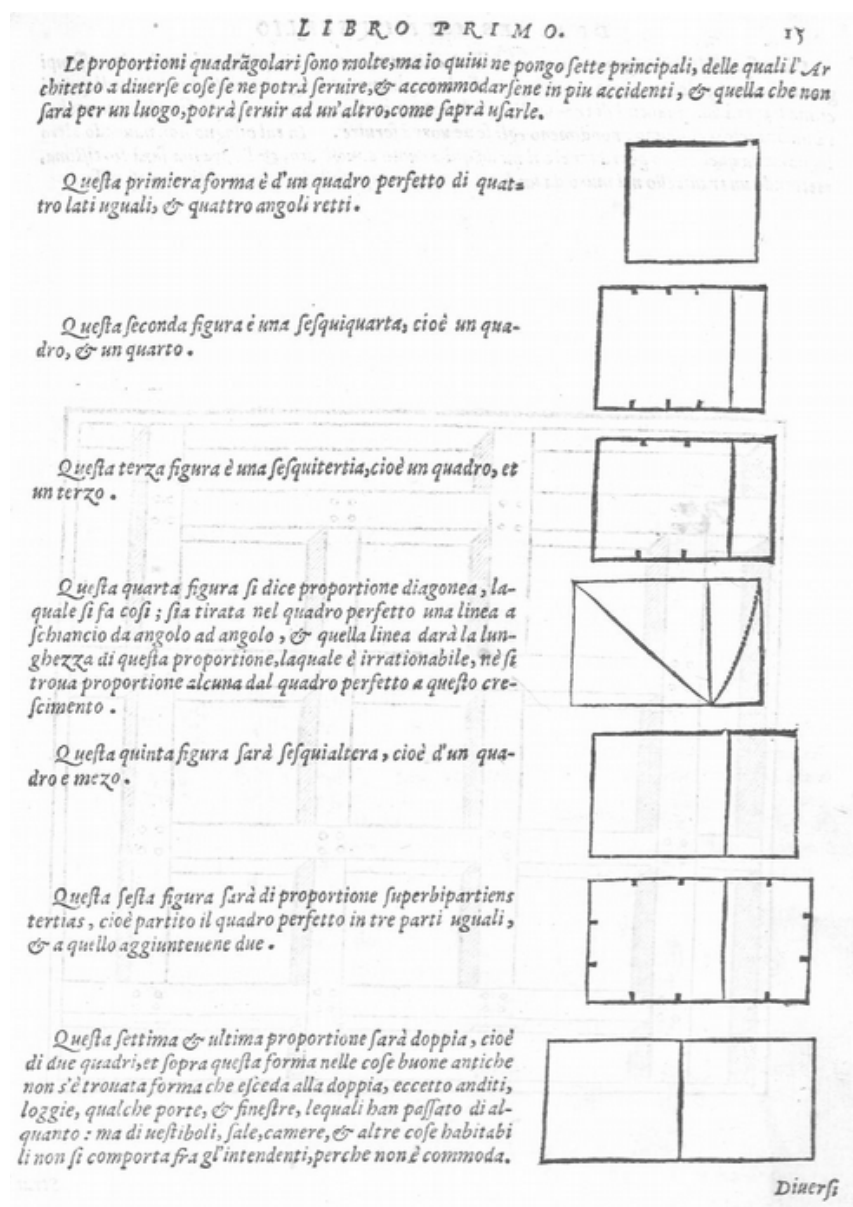


Figura D.14: *Libro primo d'architettura*. Sebastiano Serlio,  
Libro I, folio 15

## D.2.2. Libro I, folio 11b

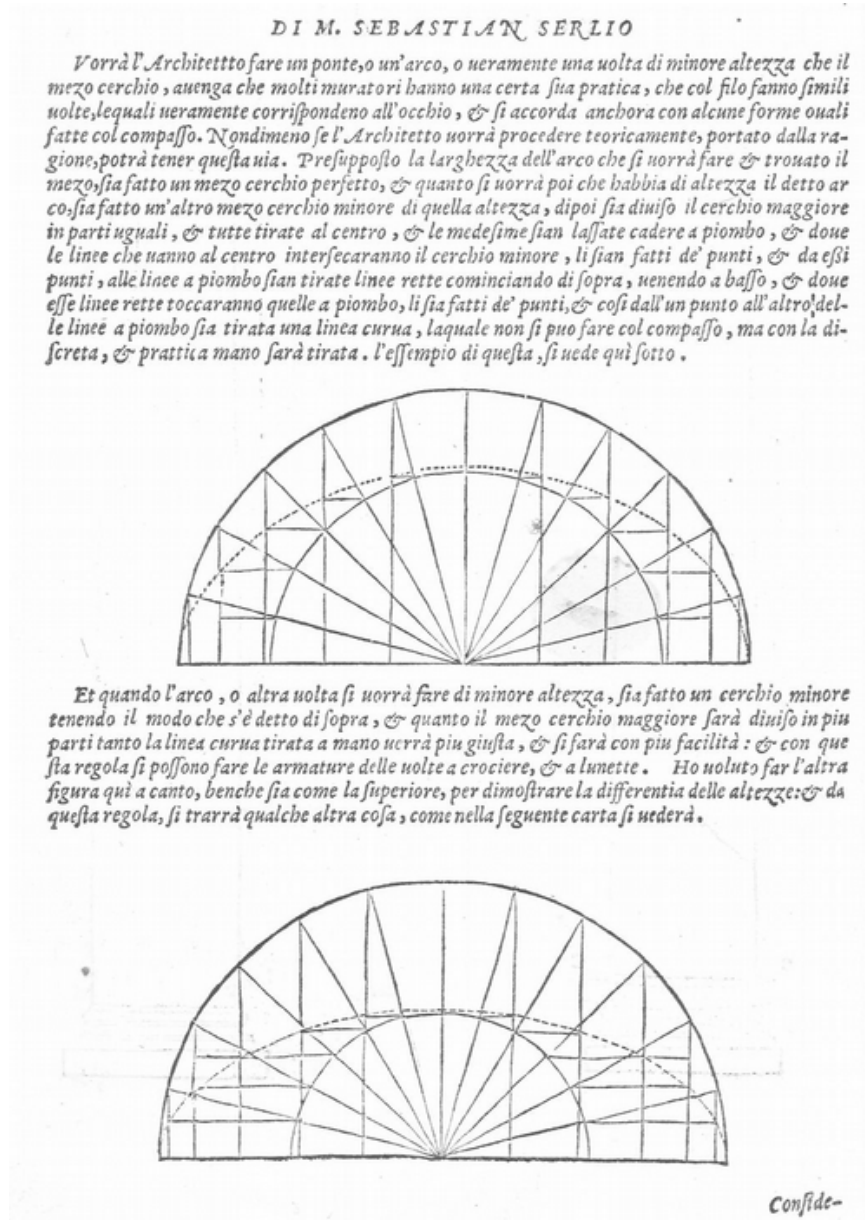


Figura D.15: *Libro primo d'architettura*. Sebastiano Serlio, Libro I, folio 11b

### D.3. «Libro de Arquitectura». Hernán Ruiz

Hernán Ruiz, llamado *el Joven*, arquitecto español hijo del también arquitecto «Hernan Ruis el biexo». El manuscrito fue escrito en Sevilla en el s. XVI.

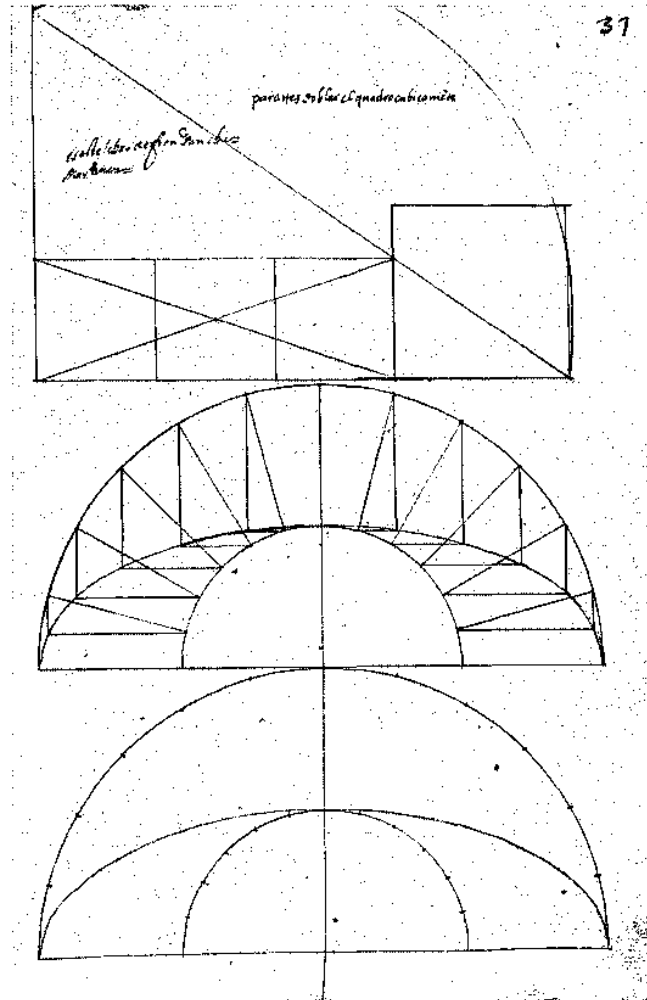


Figura D.16: Hernan Ruiz, folio 37





### D.5. «Livre de portraiture». Villard de Honnecourt

Villard de Honnecourt, arquitecto y dibujante francés (mediados del s. XIII), su álbum de croquis, de 33 folios (biblioteca nacional de París), contiene planos de construcciones, máquinas de guerra, escenas de combate, escenas religiosas inspiradas en la *Leyenda áurea*, estudios de animales y desnudos <sup>2</sup>.



Figura D.18: *Livre de portraiture* de Villard de Honnecourt, manuscrito c.a. 1220-1240, folio 18v.

<sup>2</sup> (ref. [1]), tomo 12, p. 5526.

## Referencias bibliográficas

- [1] *Grand dictionnaire encyclopédique Larousse*. Ed. Planeta, Barcelona, 5ª edición, 1993.
- [2] Albarrán, José: *Bóvedas de ladrillo que se ejecutan sin cimbra*, volumen Revista quincenal. IV parte: conclusión de *15 de Abril de 1885*. Memorial de Ingenieros del Ejército, Madrid, 1885.
- [3] Almagro Gorbea, Antonio: *Un aspecto constructivo de las bóvedas en Al-Andalus*. Fasc. 1. Al-Qantara. Revista de estudios árabes, Vol XXII, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2001.
- [4] Alsina, Claudi y Enric Trias Ruiz: *Lecciones de Álgebra y Geometría*. Gustavo Gili, Barcelona, 1984.
- [5] Auguste Choisy, Francois: *L'art de bâtir chez les byzantins*. Librairie de la Société Anonyme de Publications Périodiques, Paris, 1883.
- [6] Auguste Choisy, Francois: *El arte de construir en Bizancio*, volumen Colección dirigida por Santiago Huerta Fernández de *Textos sobre Teoría e Historia de las Construcciones*. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 1ª edición, 1997.
- [7] Bails, Benito: *Diccionario de Arquitectura Civil*. Imprenta de la viuda de Ibarra, Madrid, 1802.
- [8] Boguerin, Francisco Javier: *Construcción de bóvedas de ladrillo sin auxilio de cimbras ni yeso*, volumen Tomo I, revista nº 12 de *Revista de Obras Públicas*. Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, Madrid, 1855.
- [9] Durerro, Alberto: *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*. 1525.
- [10] Euclides: *Elementos*. Traducción de María Luisa Puertas Castaño. Gredos S.A., Madrid, 1ª edición, 1991. (Tres volúmenes).
- [11] Fortea Luna, Manuel y Vicente López Bernal: *Patología de bóvedas de doble curvatura*, volumen Actas del Tercer Congreso Nacional de la Construcción (Sevilla). Eds. A. Graciani, S. Huerta, E. Rabasa, M. tabales, Sevilla, 2000.
- [12] Fortea Luna, Manuel y Vicente López Bernal: *Bóvedas Extremeñas. Proceso constructivo y análisis estructural de bóvedas de arista*. Colegio Oficial de Arquitectos de Extremadura, Badajoz, 3ª edición, 2012.
- [13] Gelabert, Joseph: *Verdaderes traces de l'art de picapedrer*. Manuscrito, Biblioteca del Consell Insular de Mallorca, 1653.
- [14] Ger y Lóbez, Florencio: *Tratado de Construcción Civil*. Establecimiento tipográfico La Minerva Extremeña, Badajoz, 1898.
- [15] González Rodriguez, Alberto: *Extremadura popular: casas y pueblos*. Diputación Provincial de Badajoz, Badajoz, 2ª edición, 2005.
- [16] Hernan, Ruiz el Joven: *Libro de Arquitectura*, volumen Manuscrito c. 1550. Estudio y edición crítica de Pedro Navascues Palacio. Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Madrid, 1974.

- [17] Honnecourt, Villard de: *Livre de portraiture*. Manuscrito 1220-1240, Ed. Akal, Madrid, 2001.
- [18] Martínez Salas, José: *Elementos de Matemáticas*. Gráficas Andrés Martín S.A., Valladolid, 3ª edición, 1969.
- [19] Navarro de Zuñiga, Javier: *Imágenes de la perspectiva*. Siruela S.A., Madrid, 1ª edición, 1996.
- [20] Pacioli, Luca: *La divina proporción*. Traducción de Ricardo Resta. Editorial Losada, Buenos Aires, 1ª edición, 1946.
- [21] Pacioli, Luca: *La divina proporción*. Traducción de Juan Calatrava. Ediciones Akal, Madrid, 4ª edición, 2008.
- [22] Rosa, J.A. Ruiz de la: *Traza y simetría de la Arquitectura en la Antigüedad y el Medievo*. Ed. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, Sevilla, 1987.
- [23] Ruiz Felipe, Jesús: *El método demostrativo de Euclides en los Elementos*. Revista Digital de la Sociedad de Información nº17. Ed. Cefalea, 1ª edición, nº17 octubre 2009.
- [24] San Nicolás, Fr. Lorenzo de: *Arte y uso de Architectura*. 1ª edición, 1639.
- [25] Sanz García, M.ª Agripina y Moratalla de la Hoz, Ascensión: *Geometría en la Arquitectura*, volumen Geometría y Arquitectura (I) de *Cuadernos del Instituto Juan de Herrera de la Escuela de Arquitectura de Madrid nº 32-02*. Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, Madrid, 1ª edición, 1998.
- [26] Sanz García, M.ª Agripina y Moratalla de la Hoz, Ascensión: *Geometría y Proporción*, volumen Geometría y Arquitectura (III) de *Cuadernos del Instituto Juan de Herrera de la Escuela de Arquitectura de Madrid nº 82-01*. Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, Madrid, 1ª edición, 2000.
- [27] Serlio, Sebastiano: *Libro primo d'architettura*. Ed. Francesco de Franceschi, 1ª edición, 1566.
- [28] Tarrío Carrodegas, Santiago: *La Arquitectura. Fundamentos geométricos de la construcción medieval*. Escuela Técnica Superior de la Coruña, La Coruña.
- [29] Vitruvio Polion, Marco Lucio: *Los diez libros de Arquitectura*. Manuscrito 1ª traducción al castellano por Lázaro de Velasco, en Biblioteca Pública de Cáceres Rodrigo Moñino, 1564.
- [30] Vitruvio Polion, Marco Lucio: *Los diez libros de Arquitectura*. Traducción de José Luis Oliver Domingo. Alianza Forma, Madrid, 1ª edición, 1997.
- [31] Várilli, Joseph C.: *Elementos de Geometría Plana*. Editorial de la Universidad de Costa Rica, San José, 1ª edición, 1988.
- [32] Zamorano, Rodrigo: *Los seis libros primeros de la geometría de Euclides*. Ed. Alonso de Barrera, 1ª edición, 1576.