UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

COLEGIO UNIVERSITARIO DE BURGOS

TOPOLOGIAS ASOCIADAS A LA CONVERGENCIA $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ - UNIFORME

JOSE MARIA GARCIA LAFUENTE

IV REUNION DE LA AGRUPACION DE MATEMATICOS DE EXPRESION LATINA

(PALMA DE MALLORCA, SETIEMBRE 1977)

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

COLEGIO UNIVERSITARIO DE BURGOS

TOPOLOGIAS ASOCIADAS A LA CONVERGENCIA $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ - UNIFORME

JOSE MARIA GARCIA LAFUENTE

IV REUNION DE LA AGRUPACION DE MATEMATICOS DE EXPRESION LATINA

(PALMA DE MALLORCA, SETIEMBRE 1977)

IV REUNION DE LA AGRUPACION DE MATEMATICOS DE EXPRESION LATINA

(Palma de Mallorca, setiembre 1977)

TOPOLOGIAS ASOCIADAS A LA CONVERGENCIA $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-UNIFORME

José María García Lafuente

Universidad de Valladolid. Colegio Universitario de Burgos

CAPITULO 0

INTRODUCCION

A lo largo del trabajo las letras E , F , G denotarán siempre espacios localmente convexos Hausdorff sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (que en general se escribirá K) y el símbolo Γ_E la familia de todas las seminormas continuas en E. Tal familia es separada (no todas las seminormas de Γ_E se anulan sobre un vector no nulo de E) y es filtrante (para todo $\alpha, \alpha' \in \Gamma_E$ existe $\alpha'' \in \Gamma_E$ tal que $\alpha \leq \alpha''$ $\alpha' \leq \alpha''$) Para $h \in E$, $\alpha \in \Gamma_E$ se designará por $|h|_\alpha$ la imagen del vector h por la aplicación α .

El símbolo $\mathcal{L}(E\ F)$ se utiliza siempre para denotar el espacio vectorial sobre K de las aplicaciones lineales continuas de E en F .

La letra $\mathfrak{S}$ designa una familia de conjuntos acotados del espacio E que recubren el espacio y que se supondrá saturada, es decir, si S , S' pertenecen a $\mathfrak{S}$ entonces $S \cup S'$ también pertenece a $\mathfrak{S}$.

En primer lugar introduciremos una topología localmente convexa Hausdorff en el espacio $\mathcal{L}(E\ F)$.

Proposición 0.1.

Para cada $\beta \in \Gamma_F$ y cada $S \in \mathfrak{S}$, se define la aplicación de $\mathscr{L}(E\ F)$ en $\mathbb{R}$ siguiente

$$| \ |_{\beta S} : u \longmapsto |u|_{\beta S} = \sup_{h \in S} |u(h)|_{\beta}$$

Se verifica entonces

a) Para cada $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$ y $u \in \mathscr{L}(E\ F)$, el número $|u|_{\beta S}$ es finito y en consecuencia la aplicación $| \ |_{\beta S}$ está bien definida.

b) Para cada $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$ la aplicación $| \ |_{\beta S}$ es una seminorma.

c) La familia de seminormas $\{| \ |_{\beta S}\}_{\beta \in \Gamma_F \ S \in \mathfrak{S}}$, es separada filtrante.

Demostración:

Es inmediata y se omite.

Definición 0.2.

La topología que sobre $\mathscr{L}(E\ F)$ determina la familia de seminormas de la proposición 0.1. se llama $\mathfrak{S}$-topología o topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de $\mathfrak{S}$ y se denota $\Lambda_{\mathfrak{S}}$. El espacio $\mathscr{L}(E\ F)$ provisto de ella se escribe $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$. Es un espacio localmente convexo Hausdorff.

Puesto que la familia de seminormas que generan la topología $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ es filtrante, un sistema fundamental de entornos de cero en $\mathscr{L}(E\ F)$ viene dado por la familia

$$V_{S\beta\varepsilon} = \{ u \in \mathscr{L}(E\ F) \ / \ |u|_{\beta S} < \varepsilon \}$$

para $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$, $\varepsilon > 0$.

Es obvio que si $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$, entonces $\Lambda_{\mathfrak{S}} \leq \Lambda_{\mathfrak{S}'}$

Algunas $\mathfrak{S}$-topologías tendrán interés preferente. Sea $\mathfrak{S}_s$ (respectivamente $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_{pk}$, $\mathfrak{S}_b$) la familia saturada de todos los conjuntos finitos de E (respectivamente de todos los subconjuntos compactos, precompactos, acotados de E). La $\mathfrak{S}_s$-topología en $\mathscr{L}(E\ F)$ (respectivamente la $\mathfrak{S}_k$- , $\mathfrak{S}_{pk}$- , $\mathfrak{S}_b$-topología en $\mathscr{L}(E\ F)$) , se denotará por Λ_s (respectivamente Λ_k , Λ_{pk} , Λ_b) y se llamará topología simple o topología débil (respectivamente topología de la convergencia compacta, de la convergencia precompacta, de la convergencia acotada o topología fuerte). El espacio vectorial $\mathscr{L}(E\ F)$ provisto de las topologías Λ_s , Λ_k , Λ_{pk} , Λ_b se representará respectivamente por $\mathscr{L}_s(E\ F)$, $\mathscr{L}_k(E\ F)$, $\mathscr{L}_{pk}(E\ F)$, $\mathscr{L}_b(E\ F)$. Puesto que $\mathfrak{S}_s \subset \mathfrak{S}_k \subset \mathfrak{S}_{pk} \subset \mathfrak{S}_b$, se deduce de la observación anterior que

$$\Lambda_s \leq \Lambda_k \leq \Lambda_{pk} \leq \Lambda_b$$

En el estudio de la diferenciación de aplicaciones $f : X \longrightarrow F$ (X abierto de E) es introducida la condición de diferenciabilidad Gâteaux-Lévy, basada em una condición del tipo siguiente

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} t^{-1} r(f ; x ; th) = 0 \qquad (1)$$

donde $x \in X$, $h \in E$ y

$$r(f ; x ; th) = f(x + th) - f(x) - Df(x)h$$

es el resto de f en el punto x y en la dirección h , siendo $Df(x) \in \mathscr{L}(E\ F)$. Distintas condiciones de existencia del límite (1) uniformemente en h variando en los elementos de una familia $\mathfrak{S}$ proveen otras tantas condiciones de diferenciabilidad que se muestran como una generalización suficientemente operativa de la conocida diferencial de Frèchet para aplicaciones entre espacios normados ([1] , [3]) . Dichas condiciones son satisfechas si se exige que la aplicación diferencial $Df : X \longrightarrow \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ dada por $x \longmapsto Df(x)$ sea continua (brevemente que f sea continuamente diferenciable respecto de la $\mathfrak{S}$-topología de $\mathscr{L}(E\ F)$) .

Dentro de este marco de la teoría diferencial parece natural definir convergencias para las aplicaciones diferenciales, para las cuales se mantengan los teoremas clásicos de paso al límite en sucesiones de funciones continuamente diferenciables. Definidas estas convergencias, se prueba que mantienen la propiedad de la diferenciabilidad continua para la función límite (ver [5]). Pero además poseen la propiedad importante de definir topologías en el espacio $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$ de las aplicaciones de un conjunto T en el espacio $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ y para dicha topología la convergencia en el espacio $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$ coincide con la inicialmente definida. El estudio del espacio topológico $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$ así construído es el motivo central del presente trabajo.

CAPITULO 1

CONVERGENCIA $\Lambda_{\mathfrak{G}}$-UNIFORME

En lo que sigue referente a la convergencia de redes de funciones, la letra I denotará un conjunto ordenado por la relación $\geqslant$ filtrante superiormente que será conjunto de índices para las redes de funciones que aparecen.

Definición 1.1.

Sea T un conjunto y sea $\mathfrak{S}$ un recubrimiento saturado cualquiera de E por conjuntos acotados. Para cada $i \in I$ sea $g_i : T \longrightarrow \mathcal{L}(E\ F)$ una aplicación. Diremos que la red funcional $\{g_i\}_{i \in I}$ converge $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente hacia la función $g : T \longrightarrow \mathcal{L}(E\ F)$, cuando para todo entorno W de 0 en $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$, existe $j \in I$ tal que

$$i \geqslant j \qquad x \in T \qquad \Rightarrow \qquad g_i(x) - g(x) \in W$$

Cuando $\mathfrak{S}$ sea alguna de las familias particulares $\mathfrak{S}_s$, $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_{pk}$, $\mathfrak{S}_b$, diremos que la red converge Λ_s-, Λ_k-, Λ_{pk}-, Λ_b-uniformemente, respectivamente

Proposición 1.2.

La red $g_i : T \longrightarrow \mathcal{L}(E\ F)$ $i \in I$ converge $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente hacia la función $g : T \longrightarrow \mathcal{L}(E\ F)$ si y solo si para todo $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$, $\varepsilon > 0$ existe $j \in I$ tal que la condición siguiente se verifica

$$i \geq j \qquad x \in T \qquad \Rightarrow \qquad |g_i(x) - g(x)|_{\beta\, S} < \varepsilon$$

o su equivalente

$$i \geq j \qquad x \in T \qquad h \in S \qquad \Rightarrow \qquad |g_i(x)h - g(x)h|_{\beta} < \varepsilon$$

Demostración:

Consecuencia inmediata de la definición de la topología de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ (definición 0.2.) .

De acuerdo con esta proposición, la convergencia $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniforme es la convergencia uniforme sobre T y sobre cada uno de los conjuntos del recubrimiento $\mathfrak{S}$.

<u>Proposición 1.3.</u>

Supongamos que $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$. Entonces si la red $\{g_i\}$ converge $\Lambda_{\mathfrak{S}'}$-uniformemente hacia g , converge también $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición 1.2..

Es un importante resultado que cuando T es un espacio topológico, las redes $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente convergentes de funciones continuas tienen por límite una función continua. Lo estudiamos en la siguiente proposición.

Proposición 1.4.

Sea T un espacio topológico y para cada $i \in I$ sea $g_i : T \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ una aplicación continua. Si la red $\{g_i\}$ converge $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente hacia $g : T \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$, entonces g es continua.

Demostración:

Sea $x \in T$ y sea $\mathcal{U}$ el filtro de entornos de x en T. Por hipótesis dados $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$, $\varepsilon > 0$, existe $j \in I$ tal que si $i \geqslant j$, $y \in T$ se tiene

$$|g_i(y) - g(y)|_{\beta\, S} < \varepsilon/3 \qquad (1)$$

Sea $i \geqslant j$ fijo. Puesto que $g_i : T \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ es continua, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que siempre que $y \in U$ se tiene

$$|g_i(y) - g_i(x)|_{\beta\, S} < \varepsilon/3 \qquad (2)$$

Se deduce de (1) y (2) que para todo $y \in U$

$$|g(y) - g(x)|_{\beta\, S} < \varepsilon$$

es decir g es continua en x.

La convergencia $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniforme que hemos definido para aplicaciones de T en $\mathcal{L}(E\ F)$ nos va a definir una topología en el espacio de tales aplicaciones. El proceso se basa en la conocida técnica de las "clases de convergencia" de la cual se puede encontrar un estudio completo en [4].

Enunciamos a continuación el resultado fundamental sobre el que se basa dicha construcción.

Lema 1.5.

Sea X un espacio topológico y $\{x_i\}_{i \in I}$ una red en X. Se verifica

(a) Si $x_i = x \quad \forall\, i \in I$, entonces $\{x_i\} \longrightarrow x$.

(b) Si $\{x_i\}$ converge a x, toda subred de $\{x_i\}$ converge a x.

(c) Si $\{x_i\}$ no converge a x existe una subred de $\{x_i\}$ ninguna de cuyas subredes converge a x.

(d) Supongamos que para cada $i \in I$ existe un conjunto ordenado filtrante H_i y sea $D = \{(i\ \lambda)\ /\ i \in I \quad \lambda \in H_i\}$ con el órden filtrante $(i\ \lambda) \geqslant (i'\ \lambda')$ si y solo si $i > i'$ o siendo $i = i'$ se verifica $\lambda \geqslant \lambda'$ en H_i (orden lexicográfico). Entonces si $\{x_i\} \longrightarrow x \quad i \in I$ y si para cada $i \in I$, $\{x^i_\lambda\} \longrightarrow x_i \quad \lambda \in H_i$, existe una subred de $\{x^i_\lambda\}$ $(i\ \lambda) \in D$ que converge a x.

Recíprocamente, supongamos que sobre un conjunto X está definida una familia $\mathcal{C}$ de pares de la forma $(\{x_i\}_{i \in I}\ ;\ x)$ donde $x \in X$ y $\{x_i\}_{i \in I}$ es una red en X (se dice que $\{x_i\}$ converge a x por $\mathcal{C}$ y se escribe $\{x_i\} \xrightarrow{\mathcal{C}} x$) verificando las propiedades (a) hasta (d) anteriores ($\mathcal{C}$ se llama entonces "clase de convergencia"). Existe entonces una topología

$\tau_{\mathcal{F}}$ en X tal que

$$\{x_i\} \xrightarrow{\mathcal{F}} x \qquad \text{si y solo si} \qquad \{x_i\} \dashrightarrow x \text{ por } \tau_{\mathcal{F}}$$

Los conjuntos cerrados de esta topología son aquellos conjuntos $A \subset X$ tales que $A = A^c$ donde

$$A^c = \Big\{ x \in X \ / \ \text{existe una red } \{x_i\} \text{ en } A \text{ tal que } \{x_i\} \xrightarrow{\mathcal{F}} x$$

Demostración:

No se desarrollará ya que puede encontrarse en [4], pero sí se explicitará la subred del apartado (d) porque es el punto más delicado en la demostración de las clases de convergencia. Sobre el conjunto producto cartesiano $\prod_{i \in I} H_i$ se define el orden siguiente: si $L = (\lambda_i)$, $L' = (\lambda'_i) \in \prod_{i \in I} H_i$

$$L \geqslant L' \qquad \text{si y solo si} \qquad \lambda_i \geqslant \lambda'_i \quad \text{en } H_i \quad \forall i \in I$$

Este orden es filtrante por serlo el orden en cada H_i. Sobre el producto cartesiano $H = I \times \prod_{i \in I} H_i$ se define el orden también filtrante

$$(i\ L) \geqslant (i'\ L') \qquad \text{si y solo si} \qquad i \geqslant i' \text{ en } I \text{ y } L \geqslant L' \text{ en } \prod_{i \in I} H_i$$

El conjunto H con el orden definido será el conjunto de índices para la subred de $\{x^i_\lambda\}$ $(i\ \lambda) \in D$ buscada. En efecto, la aplicación

$$\varphi : H \longrightarrow D$$
$$(i\ L) \longmapsto (i\ \lambda_i) \quad \text{donde} \quad L = (\lambda_i)$$

verifica: $\forall (j\ \lambda) \in D$ existe $(i_o\ L_o) \in H$ tal que siempre que $(i\ L) \geqslant (i_o\ L_o)$, $\varphi(i\ L) \geqslant (j\ \lambda)$. Además la subred $\{x^i_{\lambda_i}\}$ $(i\ L) \in H$ converge a x por $\mathcal{C}$ (demostración) .

Lema 1.6.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos clases de convergencia en un conjunto tales que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$. Entonces $\tau_{\mathcal{C}'} \leq \tau_{\mathcal{C}}$.

Demostración:

Por definición la topología $\tau_{\mathcal{C}}$ tiene más cerrados que la topología $\tau_{\mathcal{C}'}$.

Estamos ya en condiciones de probar que la convergencia $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniforme de la definición 1.1. genera topologías .

Definición 1.7.

Sea T un conjunto cualquiera. El espacio de todas las aplicaciones de T en $\mathcal{L}(E\ F)$ será denotado por $\mathcal{L}^T$ (como siempre E y F son espacios localmente convexos Hausdorff)

Proposición 1.8.

Sea T un conjunto cualquiera. Sobre el conjunto $\mathcal{L}^T$ se define la familia $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}$ formada por todos los pares $(\{g_i\}\ i \in I\ ;\ g)$ donde $g \in \mathcal{L}^T$ y $\{g_i\}$ es una red en $\mathcal{L}^T$ que converge $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente hacia g . Entonces $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}$ es una clase de convergencia en $\mathcal{L}^T$.

Demostración:

Se verifican para $\mathcal{E}_{\mathfrak{S}}$ los cuatro axiomas del lema 1.5.

(a) Inmediato

(b) Sea $\{g_i\} \xrightarrow{\mathcal{E}_{\mathfrak{S}}} g$ y sea $\{g_{i_k}\}$ $k \in K$ una subred. Para cada $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$, $\varepsilon > 0$, existe en virtud de la proposición 1.2. un índice $j \in I$ tal que

$$i \geq j \qquad x \in T \quad \Rightarrow \quad |g_i(x) - g(x)|_{\beta S} < \varepsilon$$

y dado $j \in I$ existe $k_o \in K$ tal que si $k \geq k_o$, $i_k \geq j$. Por tanto

$$k \geq k_o \qquad x \in T \quad \Rightarrow \quad |g_{i_k}(x) - g(x)|_{\beta S} < \varepsilon$$

es decir $\{g_{i_k}\}_{k \in K}$ converge por $\mathcal{E}_{\mathfrak{S}}$ a g .

(c) Si $\{g_i\}$ no converge a g por $\mathcal{E}_{\mathfrak{S}}$ entonces por la proposición 1.2., existen $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$, $\varepsilon > 0$ tal que: $\forall\ i \in I \quad \exists\ i' \geq i \quad \exists\ x \in T$ con $|g_{i'}(x) - g(x)|_{\beta S} \geq \varepsilon$
El subconjunto $I' = \{i' \ / \ i \in I\}$ es cofinal en I y la subred $\{g_{i'}\}$ $i' \in I'$ no contiene ninguna subred que converja $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente a g .

(d) Supongamos que $\{g_i\}_{i \in I}$ converge $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente hacia g y que para cada $i \in I$ la red $\{g^i_\lambda\}$ $\lambda \in H_i$ converge $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente a g_i . Sean H , D y φ como en el lema 1.5. Vamos a demostrar entonces que la subred

$\{g^i_{\lambda_i}\}$ $(i\ L) \in H$ donde $L = (\lambda_i)$ converge $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente hacia g. En efecto, dados $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$, $\mathcal{E} > 0$, existe $j \in I$ tal que

$$i \geq j \qquad x \in T \qquad \Longrightarrow \qquad |g_i(x) - g(x)|_{\beta S} < \mathcal{E}/2$$

para cada $i \geq j$ existe $\lambda'_i \in H_i$ tal que

$$\lambda \geq \lambda'_i \qquad x \in T \qquad \Longrightarrow \qquad |g^i_\lambda(x) - g_i(x)|_{\beta S} < \mathcal{E}/2$$

Sea entonces $L' = (\lambda'_i) \in \prod_{i \in I} H_i$ donde λ'_i es arbitrario en H_i si $i \not\geq j$. Entonces para cada $(i\ L) \in H$ con $(i\ L) \geq (j\ L')$ y cada $x \in T$ se tiene

$$|g^i_{\lambda_i}(x) - g(x)|_{\beta S} \leq$$

$$\leq |g^i_{\lambda_i}(x) - g_i(x)|_{\beta S} + |g_i(x) - g(x)|_{\beta S} < \mathcal{E}$$

donde $L = (\lambda_i)$. Es decir $\{g^i_{\lambda_i}\}$ $(i\ L) \in H$ es una subred que converge $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente.

<u>Definición 1.9.</u>

La topología $\tau_{\mathcal{E}_{\mathfrak{S}}}$ sobre $\mathcal{L}^T$ que, de acuerdo con el lema 1.5. y la proposición 1.8., define la clase de convergencia $\mathcal{E}_{\mathfrak{S}}$ se llama topología de la convergencia $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniforme. El espacio $\mathcal{L}^T$ provisto de dicha topología se denotará $\mathcal{L}^T_{\mathfrak{S}}$. Cuando $\mathfrak{S}$ es alguna de las familias particulares $\mathfrak{S}_s$, $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_{pk}$ $\mathfrak{S}_b$, la correspondiente topología $\tau_{\mathcal{E}_{\mathfrak{S}}}$ se denota por τ_s , τ_k , τ_{pk} , τ_b respectivamente y el espacio topológico $\mathcal{L}^T_{\mathfrak{S}}$ por $\mathcal{L}^T_s$, $\mathcal{L}^T_k$, $\mathcal{L}^T_{pk}$, $\mathcal{L}^T_b$ respectivamente.

Proposición 1.10.

Si $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$ entonces $\tau_{\mathcal{B}_{\mathfrak{S}}} \leq \tau_{\mathcal{B}_{\mathfrak{S}'}}$. En particular

$$\tau_s \leq \tau_k \leq \tau_{pk} \leq \tau_b$$

Demostración:

Por la proposición 1.3. $\mathcal{B}_{\mathfrak{S}'} \subset \mathcal{B}_{\mathfrak{S}}$. El lema 1.6. prueba ahora $\tau_{\mathcal{B}_{\mathfrak{S}}} \leq \tau_{\mathcal{B}_{\mathfrak{S}'}}$.

A continuación introduciremos sobre el espacio $\mathcal{L}^T$ de forma natural una estructura de espacio vectorial sobre K .

Definición 1.11.

Para cada f g $\in \mathcal{L}^T$ se define

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad x \in T \qquad (1)$$

donde la suma en el miembro de la derecha de (1) es la suma del espacio vectorial $\mathcal{L}(E\ F)$. Análogamente para $f \in \mathcal{L}^T$ y $c \in K$ se define

$$(c\,f)(x) = c \cdot f(x) \qquad x \in T \qquad (2)$$

Donde el producto por escalar en el segundo miembro de (2) es el producto por escalar del espacio $\mathcal{L}(E\ F)$.

Nuestro próximo objetivo es probar que la topología $\tau_{\mathscr{E}_{\mathfrak{S}}}$ de la definición 1.9. es compatible con la estructura de espacio vectorial de la definición precedente, es decir que $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$ es un espacio vectorial topológico.

Teorema 1.12.

$\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$ es un espacio vectorial topológico.

Demostración:

(a) Continuidad de la suma:

$$\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T} \times \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T} \longrightarrow \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$$

Sean f $g \in \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$ y sean $\{f_i\}_{i \in I}$, $\{g_i\}_{i \in I}$ redes convergiendo a f y g respectivamente para la topología del espacio $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$ (nótese que puede elegirse el mismo conjunto de índices, para ambas). Por el lema 1.5. ello equivale a que $\{f_i\}$ converge a f $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente y $\{g_i\}$ converge a g $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente. En consecuencia dados $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$ $\varepsilon > 0$, existe $j_1 \in I$, $j_2 \in I$ tales que

$$i \geq j_1 \qquad x \in T \quad \Rightarrow \quad |f_i(x) - f(x)|_{\beta S} < \varepsilon/2$$

$$i \geq j_2 \qquad x \in T \quad \Rightarrow \quad |g_i(x) - g(x)|_{\beta S} < \varepsilon/2$$

en consecuencia, siempre que $i \geq \sup(j_1 , j_2)$ resulta

$$|f_i(x) + g_i(x) - (f(x) + g(x))|_{\beta S} < \varepsilon$$

para todo $x \in T$. Por tanto $\{f_i + g_i\} \longrightarrow f + g$

$\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente, lo que prueba la continuidad de la suma en $(f\ g)$.

(b) Continuidad del producto por escalar

$$K \times \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T} \longrightarrow \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$$

Sea $c \in K$, $f \in \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$ y sean $\{c_i\}_{i \in I} \longrightarrow c$ en K y $\{f_i\}_{i \in I} \longrightarrow f$ en $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$. Esto último equivale a que $\{f_i\}$ converge $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente a f. Por tanto dados $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$, $1 > \mathcal{E} > 0$, existen $j_1 \in I$, $j_2 \in I$ tales que -

$$i \geqslant j_1 \qquad \Rightarrow \qquad |c_i - c| < \mathcal{E}$$

$$i \geqslant j_2 \qquad x \in T \qquad \Rightarrow \qquad |f_i(x) - f(x)|_{\beta S} < \mathcal{E}$$

En consecuencia, siempre que $i \geqslant \sup\,(j_1\,,\,j_2)$, $x \in T$

$$|c_i f_i - c\,f|_{\beta S} \leqslant$$

$$\leqslant |c_i - c|\cdot|f_i - f|_{\beta S} + |c|\cdot|f_i - f|_{\beta S} + |c_i - c|\cdot|f|_{\beta S} <$$

$$< \mathcal{E}^2 + |c|\,\mathcal{E} + \mathcal{E}\,|f|_{\beta S} < \mathcal{E}(\,1 + |c| + |f|_{\beta S}\,)$$

lo que prueba $\{c_i f_i\} \longrightarrow c\,f$ $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente y la continuidad del producto por escalar en $(c\ f)$.

CAPITULO 2

SUBESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS DE $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{T}$

En el presente capítulo caracterizaremos subespacios localmente convexos del espacio vectorial topológico $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$.

Definición 2.1.

Un elemento $f \in \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$ se dice que es acotado, si la aplicación $f : T \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ es acotada, es decir si el conjunto $f(T)$ es acotado en el espacio localmente convexo $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$. El conjunto de elementos acotados de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$, que constituye claramente un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$, se denotará por $\mathcal{A}^{T}$.

$\mathcal{A}^{T}$ como subespacio vectorial del espacio vectorial topológico $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$ es a su vez un espacio vectorial topológico. Nuestro próximo objetivo es probar que $\mathcal{A}^{T}$ es un espacio localmente convexo, construyendo al propio tiempo una familia de seminormas generando la topología de $\mathcal{A}^{T}$.

Proposición 2.2.

$\mathcal{A}^{T}$ es un espacio localmente convexo Hausdorff.

Demostración:

En la demostración se construirá una familia de seminormas y se comprobará que generan la topología que $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}^{T}$ induce en $\mathcal{A}^{T}$. Sea $f \in \mathcal{A}^{T}$. Para cada $\beta \in \Gamma_F$; $S \in \mathfrak{S}$, el número

$$\| f \|_{\beta S} = \sup_{x \in T} | f(x) |_{\beta S}$$

es finito, ya que al ser f acotado, $f(T)$ es un conjunto acotado en $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$. De esta forma para cada $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$ queda construída la aplicación

$$\| \ \|_{\beta S} : \mathcal{A}^T \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f \longmapsto \| f \|_{\beta S}$$

comprobándose de inmediato que es una seminorma. Finalmente probamos que la familia de seminormas $\{ \| \ \|_{\beta S} \}_{\beta \in \Gamma_F \ S \in \mathfrak{S}}$ genera la topología del espacio $\mathcal{A}^T$. Para ello bastará ver que un sistema fundamental de entornos de 0 para la topología del espacio $\mathcal{A}^T$ y para la generada por las seminormas es equivalente. Lo cual a su vez se verifica si y solo si toda red que converge a 0 por la topología de $\mathcal{A}^T$, converge a 0 por la topología de las seminormas y recíprocamente. Por definición $\{ f_i \} \longrightarrow 0$ en $\mathcal{A}^T$ cuando para todo $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$, $\varepsilon > 0$ existe $j \in I$ tal que

$$i \geq j \qquad x \in T \qquad \Longrightarrow \qquad | f_i(x) |_{\beta S} < \varepsilon \tag{1}$$

Por otro lado la red $\{ f_i \}$ converge a 0 por la topología de las seminormas, si para toda seminorma $\| \ \|_{\beta S}$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $j \in I$ tal que

$$i \geq j \quad \Longrightarrow \quad \| f_i \|_{\beta S} < \varepsilon \qquad (2)$$

Las condiciones (1) y (2) son obviamente equivalentes. Finalmente veamos que $\mathcal{A}^T$ es Hausdorff. Sea $f \in \mathcal{A}^T$ $f \neq 0$. Existe $x \in T$ con $f(x) \neq 0$. Pero $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ es Hausdorff (ver definición 0.2.), luego existe una seminorma $|\ |_{\beta S}$ en $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ tal que

$$|f(x)|_{\beta S} > 0$$

Por tanto $\|f\|_{\beta S} > 0$ y $\mathcal{A}^T$ es Hausdorff.

La completitud del espacio $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ (para la cual existen conocidas condiciones, ver por ejemplo [2]) se traslada de forma natural al espacio $\mathcal{A}^T$.

<u>Proposición 2.3.</u>

Si $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ es completo, entonces $\mathcal{A}^T$ es completo.

Demostración:

Sea $\{f_i\}$ una red de Cauchy en $\mathcal{A}^T$. Para cada $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$ $\varepsilon > 0$, existe $j \in I$ tal que $i \geq j$, $i' \geq j$ implica

$$\| f_i - f_{i'} \|_{\beta S} < \varepsilon$$

en particular, para cada $x \in T$

$$| f_i(x) - f_{i'}(x) |_{\beta S} < \varepsilon \qquad (1)$$

es decir, para cada $x \in T$, $\{f_i(x)\} \subset \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ es una red de Cauchy que por hipótesis ha de converger a un elemento $f(x) \in \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\,F)$. De este modo queda construída una aplicación $f : T \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\,F)$ dada por $x \longmapsto f(x)$. Veamos finalmente que $f \in \mathcal{A}^T$ y que $\{f_i\} \longrightarrow f$ en $\mathcal{A}^T$. Dejando fijo en (1) $i \geqslant j$ y pasando al límite en i' se deduce

$$| f_i(x) - f(x) |_{\beta S} < \varepsilon$$

y ello para cada $x \in T$. Por tanto

$$\| f_i - f \|_{\beta S} \leq \varepsilon \qquad (2)$$

siempre que $i \geqslant j$. Se deduce en primer lugar

$$\| f \|_{\beta S} \leq \| f - f_i \|_{\beta S} + \| f_i \|_{\beta S} < +\infty$$

es decir $f \in \mathcal{A}^T$ y de la relación (2) se desprende que $\{f_i\} \longrightarrow f$ en $\mathcal{A}^T$.

<u>Proposición 2.4.</u>

Supongamos que T es un espacio topológico y sea C_o el subespacio de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}^T$ de todas las aplicaciones continuas de T en $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\,F)$. Entonces C_o es cerrado en $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}^T$.

Demostración:

Sea $f \in \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}^T$ punto adherente a C_o . Entonces f es límite para la topología $\tau_{\mathcal{B}_{\mathfrak{S}}}$ de una red $\{f_i\} \subset C_o$. Pero de acuerdo con el lema 1.5. ello equivale a que $\{f_i\}$ converge a f $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-uniformemente. Pero como cada f_i es continua, f también lo es (proposición 1.4.), es decir $f \in C_o$.

Proposición 2.5.

Si T es un espacio topológico compacto entonces C_o es un subespacio cerrado de $\mathcal{A}^T$. En particular si $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ es completo, C_o es un subespacio completo de $\mathcal{A}^T$.

Demostración:

Sea $f \in C_o$. De la continuidad de la aplicación $f : T \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ se deduce por hipótesis que $f(T)$ es compacto en $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$. En particular $f(T)$ es acotado, es decir f es acotado en el sentido de la definición 2.1. Por tanto $f \in \mathcal{A}^T$. Que C_o es cerrado se probó en la proposición 2.4. Si $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ es completo, también es completo $\mathcal{A}^T$ (proposición 2.3.) y por tanto C_o , como subespacio cerrado de $\mathcal{A}^T$, también es completo.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Bastiani : Différentiabilité dans les espaces localment convexes ; distructures. Math. Fac. Sci. Univ. Paris (1962)

[2] N. Bourbaki : Espaces vectoriels topologiques. Act. Sci. et Ind. 1189, 1229, 1230 Hermann. Paris (1953)

[3] H. H. Keller : Differential Calculus in locally convex spaces. Springer-Verlag Berlin (1974) (L. N. in M. nº 417)

[4] J. L. Kelley : General Topology. Springer-Verlag Berlin (1975)

[5] J. M. G. Lafuente : Contribución al estudio de aplicaciones diferenciables en espacios localmente convexos. (Tesis Doctoral) Valladolid (1976)

INDICE