TABOADAS
ASTRONOMIC
TRIGONOMET
SPHERICA

TRATADO
DE
TRIGONOMETRIA RECTILINEA E SPHERICA.

POR

MATTHEUS VALENTE DO COUTO,

Director do Observatorio Real da Marinha, e Socio da Academia Real das Sciencias.

SEGUNDA EDIÇÃO.

LISBOA

NA TYPOGRAFIA DA MESMA ACADEMIA.

1819.

Com Privilegio de SUA MAGESTADE.

ARTIGO

EXTRAHIDO DAS ACTAS

DA

ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS

DA SESSÃO DE 16 DE AGOSTO DE 1819.

Determina a Academia Real das Sciencias, que o Tratado de Trigonometria Rectilinea e Spherica, *que lhe offereceo o seu Socio Mattheus Valente do Couto, se imprima á custa da mesma Academia, e debaixo do seu Privilegio.*

Sebastião Francisco de Mendo Trigozo,

Vice-Secretario da Academia.

PRIVILEGIO.

Eu a RAINHA Faço saber aos que este Alvará virem: Que havendo-me representado a Academia das Sciencias estabelecida com Permissão Minha na Cidade de Lisboa, que comprehendendo entre os objectos, que formão o Plano da sua Instituição, o de trabalhar na composição de hum Diccionario da Lingoa Portugueza, o mais completo que se possa produzir; o de compilar em boa ordem, e com depurada escolha os Documentos, que podem illustrar a Historia Nacional, para os dar á luz; o de publicar em separadas Collecções as Obras de Litteratura, que ainda não forão publicadas; o de instaurar por meio de novas Edições as Obras de Auctores de merecimento, e cujos Exemplares forem muito antigos, ou se tiverem feito raros; o de trabalhar exacta e assiduamente sobre a Historia Litteraria destes Reinos; o de publicar as Memorias dos seus Socios, das quaes as que contiverem novos descobrimentos, ou perfeições importantes ás Sciencias, e boas Artes serão publicadas com o titulo de *Memorias da Academia*, ficando as outras para servirem de materia a separadas e distinctas Collecções, nas quaes se dê ao publico em Extractos e Traducções periodicamente tudo o que nas Obras das outras Academias, e nas de Auctores particulares houver mais proprio, e digno da Instrucção Nacional; e finalmente o

de

de fazer compôr, e publicar hum Mappa Civil e Litterario, que contenha as noticias do nascimento, empregos, e habitações das Pessoas principaes, de que se compoem os Estados destes Reinos, Tribunaes, ou Juntas de Administração da Justiça, Arrecadação de Fazenda, e outras particulares noticias, na conformidade do que se pratíca em outras Cortes da Europa: E porque havendo de ser summamente despendiosas, tantas, e tão numerosas as Edições das sobreditas Obras, seria facil que a Academia se arriscasse a baldar a importante despeza, que determina fazer nellas; se Eu não Me dignasse de privilegiar as suas Edições, para que se lhe não contrafizessem, nem se lhe reimprimissem contra sua vontade, ou mandassem vir de fóra impressas, em detrimento irreparavel da reputação da mesma Academia, e das consideraveis sommas que nellas deverá gastar: Ao que tudo Tendo consideração, e ao mais que Me foi presente em Consulta da Real Meza Censoria, á qual Commetti o exame desta louvavel empreza; Querendo animar a sobredita Academia, para que reduza a effeito os referidos uteis objectos, que o estão sendo da sua applicação: Sou Servida Ordenar aos ditos respeitos o seguinte:

Hei por bem, e Ordeno, que por tempo de dez annos contados desde a publicação das Edições, sejão privilegiadas todas as Obras, que a sobredita Academia das Sciencias fizer imprimir e publicar; para que nenhuma Pessoa ou seja natural, ou existente, e moradora nestes Reinos as possa mandar reimprimir, nem introduzir nelles, sendo reimpressas em Paizes Estrangeiros: debaixo das penas de perdimento de todas as Edições que se fizerem, ou introduzirem em contravenção deste Privilegio, as quaes serão apprehendidas a favor da Academia; e de duzentos mil reis de condemnação, que se imporá irremissivelmente ao transgressor, e que será applicada em partes iguaes para o Denunciante, e para o Hospital Real de S. José.

Exceptuo porém da generalidade deste Privilegio aquel-

aquelles casos, em que as Materias, que fizerem o objecto das Obras que publicar a Academia, appareção tratadas com variação substancial, e importante; ou pelo melhor methodo, novos descobrimentos, e perfeições scientificas se achar, que differem das que imprimio a Academia: sendo o exame e confrontação de humas e outras Obras feito na Real Meza Censoria, ao tempo de se conceder a Licença para a impressão das que fazem o objecto desta Excepção: Encarregando muito á mesma Meza o referido exame, e confrontação; para consequentemênte conceder, ou negar a Licença nos casos occorrentes e circunstancias acima referidas. Nesta Excepção Incluo as Obras particulares de cada hum dos Socios; porque estas só poderáõ ser privilegiadas, ou quando forem impressas á custa da Academia, ou quando os seus proprios Auctores Me supplicarem o Privilegio para ellas.

Hei outro sim por bem, e Ordeno, que sejão igualmente privilegiadas pelo referido tempo todas as Edições, que a referida Academia fizer de Manuscriptos, que haja adquirido: com tanto porém que dellas não resulte prejuizo ás Pessoas, que primeiro os houverem adquirido, ou lhes pertenção pelos titulos de Herança, ou de Compra, e tenhão intenção de os imprimir por sua conta. E para que a este respeito haja alguma Regra, que attenda á utilidade publica, e á particular: Determino, que a Academia possa imprimir os referidos Manuscriptos; ou logo que mostrar que seus Donos não querem imprimillos; ou que havendo elles declarado quererem dallos á luz, o não fizerem no prefixo termo de cinco annos, que neste caso lhes serão assignados para os imprimirem.

Hei outro sim por bem, e Ordeno, que na generalidade do Privilegio, que a referida Academia Me supplíca, e lhe Concedo na sobredita conformidade para a reimpressão das Obras ou antigas, ou raras, ou de Auctores existentes, fiquem salvas as Obras, que a Univer-

si-

sidade de Coimbra mandar imprimir; ou porque sejão concernentes aos Estudos das Faculdades, que se ensinão nella; ou porque sendo compostas por Professores della, as mande imprimir a mesma Universidade, como hum testemunho publico dos progressos, e da reputação litteraria dos referidos Professores: E fiquem igualmente salvas as outras Obras, que actualmente estão sendo ou impressas, ou vendidas por algumas Corporações, e por Familias particulares, e que nellas tem em certo modo constituido ha muitos annos huma boa parte da sua subsistencia, e patrimonio: e a cujo beneficio Poderei privilegiallas, ou prorogar-lhes os Privilegios que tiverem.

Hei por bem finalmente, e Ordeno, que na concessão do Privilegio, que igualmente Concedo na sobredita conformidade, para a referida Academia publicar o Mappa Civil e Litterario na fórma acima declarada, fiquem salvos os Privilegios seguintes, a saber: o Privilegio concedido aos Officiaes da Minha Secretaria de Estado dos Negocios Estrangeiros, e da Guerra para a impressão da *Gazeta de Lisboa:* O Privilegio perpetuo da Congregação do Oratorio para a impressão do Diario Ecclesiastico, vulgarmente chamado *Folhinha:* e o Privilegio que Fui servida conceder a Felix Antonio Castrioto para o *Jornal Encyclopedico:* Para que em vista dos referidos Privilegios, e das Edições, que fazem os objectos delles, se haja a Academia de regular por tal maneira na composição do referido Mappa Civil e Litterario, que de nenhum modo fiquem offendidos os mesmos Privilegios, que devem ficar illesos.

E este Alvará se cumprirá sem duvida, ou embargo algum, e tão inteiramente, como nelle se contém.

E pelo que: Mando á Meza do Desembargo do Paço, Real Meza Censoria, Concelhos da Minha Real Fazenda, e Ultramar, Meza da Consciencia e Ordens, Regedor da Casa da Supplicação, Governador da Relação e Casa do Porto, Reformador Reitor da Universidade de Coim-

Coimbra, Senado da Camara da Cidade de Lisboa, e a todos os Corregedores, Provedores, Ouvidores, Juizes, Magistrados, e mais Justiças, ás quaes o conhecimento e cumprimento deste Alvará por qualquer modo pertença, ou haja de pertencer; que o cumprão, guardem, fação cumprir, e guardar inviolavelmente, sem lhe ser posto embargo, impedimento, duvida, ou opposição alguma, qualquer que ella seja: para que a observancia delle seja inteira, e tão litteral, como nelle se contém. E Mando outro sim ao Doutor Antonio Freire de Andrade Enserrabodes, do Meu Conselho, Desembargador do Paço, e Chanceller Mór destes Reinos, que o faça publicar na Chancellaria, e que por ella passe: ordenando, que nella fique registado, e que se registe em todos os lugares, em que deva ficar registado, e conveniente for á sobredita Academia, para a conservação e guarda dos Privilegios, que neste Alvará lhe Tenho concedido. Dado no Palacio de Nossa Senhora da Ajuda aos vinte e dois de Março de mil setecentos oitenta e hum.

RAINHA :

Visconde de Villanova da Cerveira.

Alvará pelo qual Vossa Magestade, pelos motivos nelle mencionados, Ha por bem conceder á Academia das Sciencias, estabelecida com a Sua Real Permissão na Cidade de Lisboa, o Privilegio por tempo de dez annos; para poder imprimir privativamente todas as Obras, de que faz menção: com excepções e modificações, que vão nelle expressas; e com as penas contra os transgressores do referido Privilegio: tudo na fórma acima declarada.

Para Vossa Magestade ver.

Re-

Registado nesta Secretaria de Estado dos Negocios do Reino em o Liv. VI. das Cartas, Alvarás, e Patentes a fl. 93 ỳ. Nossa Senhora da Ajuda 7 de Maio de 1781.

Joaquim José Borralho.

Antonio Freire d'Andrade Enserrabodes. Gratis.

Foi publicado este Alvará na Chancellaria Mor da Corte e Reino, pela qual passou. Lisboa de Maio de 1781.

D. Sebastião Maldonado.

Publique-se, e registe-se nos Livros da Chancellaria Mor do Reino. Lisboa 18 de Maio de 1781.

Antonio Freire d'Andrade Enserrabodes.

Registado na Chancellaria Mor da Corte e Reino no Liv. das Leis a fl. 34 ỳ. Lisboa 19 de Maio de 1781.

Antonio José de Moura.

João Chrysostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá o fez.

Registado na Chancellaria Mor da Corte e Reino no Liv. de Officios e Mercês a fl. 68. Lisboa 21 de Maio de 1781.

Mattheus Rodrigues Vianna.

IN-

INTRODUCÇÃO
Á
TRIGONOMETRIA.

Advertencia.

Vamos tratar agora da Trigonometria rectilinea; e trataremos depois da Trigonometria spherica.

---

1 A Trigonometria rectilinea he a Sciencia, que ensina a resolver pelo calculo (*) o Problema seguinte: *Das seis cousas, os tres lados e os tres angulos, de hum triangulo rectilineo, dadas tres [em que entre hum lado* (**) *] achar huma das outras tres.* Mas para a solução deste Problema fazem-se necessarios os principios seguintes.

2 Sabe-se da Geometria: que (fig. 1.) o valor de qualquer angulo rectilineo *MON* fica determinado pela grandeza do arco *MAN* que os seus lados cortão no circulo *MBN* descripto com hum raio *OA*, e com o

A cen-

(*) Dizemos pelo calculo: Porque a resolução dos triangulos por construcções geometricas, isto he, servindo-nos da escalla decimal, e do transferidor, he pouco exacta.

(**) Porque hum triangulo só póde ficar determinado (segundo os casos da igualdade dos triangulos) nos quatro casos seguintes: Quando forem dados os tres lados; ou dous angulos e hum lado; ou dous lados e o angulo comprehendido; ou dous lados e o angulo opposto ao maior delles; porque, se for o angulo opposto ao menor delles, o problema admitte duas soluções.

centro no vertice O: e que a grandeza do arco MAN fica determinada pelo valor da sua corda MN; e porisso o valor da semicorda PM determinará tambem o valor do semiarco AM, ou do angulo MBN, que tem o vertice na circumferencia. *N.B.* Estas semicordas tambem se chamão senos, como se vai definir na (fig. 2).

Definições das linhas trigonometricas.

3 Seno de hum arco OM he a perpendicular MP, conduzida de hum extremo do arco ao diametro, que passa pelo outro extremo. E se denota assim: Sen. OM.

4 Seno verso do arco OM he a parte OP do diametro, comprehendida entre o extremo do arco e o seno. E se denota assim: Sen. vers. OM.

5 (*) Tangente do arco OM he a parte ON da tangente a hum dos extremos do arco, comprehendida entre esse extremo, e a secante, que passa pelo centro e pelo outro extremo. E se denota assim: Tg. OM.

6 Secante do arco OM he a parte AN da secante, que passa pelo centro e por hum dos extremos do arco, comprehendida entre o dito centro e a tangente ao outro extremo. E se denota assim: Sec. OM.

7 *Construcção.* Faça-se o arco $OM + MB = 90°$; será o arco MB o complemento de OM; (**). Tire-se o raio AB: e tire-se a recta MQ, que seja o seno de BM;

(*) Ainda que na definição entra duas vezes a palavra *tangente*; com tudo facilmente se distinguem: porque a primeira he a tangente trigonometrica, e a segunda a tang. geometrica. Entenda-se o mesmo a respeito das secantes.

(**) Dous arcos, cuja somma faz 90°, chamão-se complementos hum do outro, assim: $(90° - A)$ he o complemento de A; $(45° - A)$ he o complemento de $(45° + A)$; $(90° + A)$ he o complemento de $(-A)$; &c.

BM; e a recta *BF* a tangente de *BM*; será *BQ* o seno verso, e *AF* a secante de *BM*.

8 O Seno; o seno verso; a tangente; e a secante do complemento *BM* de hum arco *OM* chamão-se *Coseno; Coseno verso; Cotangente;* e *Cosecante* desse arco *OM*. E se denotão assim: Cos. *OM*; Cos. vers. *OM*; Cotg. *OM*; e Cosec. *OM*.

9 *Corollario.* Logo pelos numeros (7 e 8) será .....

$MQ = \text{Sen. } BM = \text{Sen. } (90° - OM) = \text{Cos. } OM$;

$BQ = \text{Sen. vers. } BM = \text{Sen. vers. } (90° - OM) = \text{Cos. vers. } OM$;

$BF = \text{tg. } BM = \text{tg. } (90° - OM) = \text{Cotg. } OM$;

$AF = \text{Sec. } BM = \text{Sec. } (90° - OM) = \text{Cosec. } OM$.

Proposições.

10 Seja o raio $AO = r$, o arco $OM = A$: será $MP = \text{Sen. } A$; e $ON = \text{tg. } A$.

11 $AP\ [= MQ = \text{Cos. } OM] = \text{Cos. } A$.

12 $r^2 = \text{Sen.}^2 A + \text{Cos.}^2 A$; por ser $\overline{AM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{AP}^2$.

13 $\text{tg. } A = \frac{r.\ \text{Sen. } A}{\text{Cos. } A}$; e $\text{Cot. } A = \frac{r^2}{\text{tg. } A}$; porque os triangulos similhantes *AON*, *APM*, e *BAF* dão $AP : PM :: AO : ON$; e $ON : AO :: AB : BF$; logo &c.

14 $\text{Sec. } A = \frac{r^2}{\text{Cos. } A}$; porque $AP : AM :: AO : AN$.

Das Linhas trigonometricas positivas e negativas.

LEMMA.

15 *Duas linhas, que [no circulo] estiverem collocadas para partes oppostas, tem signaes contrarios:* isto he, se huma for positiva ou additiva, será a outra negativa

 ou

ou subtractiva. (fig. 3) Seja O o centro do circulo NAM; tomem-se dous arcos AN e AM iguaes, e para partes oppostas. Tire-se a corda MN, que cortará o diametro AB n'um ponto P; serão iguaes as semicordas PN e PM. Digo que se for o arco AM positivo, será o arco $AN = -AM$; e se for a recta PM positiva, será a recta $PN = -PM$.

Demonstração. Produza-se AN até Q; e PN até G. He evidente, que para construir (geometricamente) com os dous arcos AM e AQ hum só arco QAM igual á somma de ambos, he preciso pôr AM em direitura de AQ, e com hum extremo commum A: mas para indicar (algebricamente) que AM se deve ajuntar a AQ; escreve-se a somma assim $QA + AM$. Para construir (geometricamente) com os dous arcos hum só arco QN igual á differença de ambos, he preciso pôr AM sobre AQ, e com hum extremo commum A: mas para indicar (algebricamente) que AM se deve tirar de AQ; escreve-se a differença assim $QA - AM$. O mesmo se póde dizer a respeito das duas rectas PG e PM, &c. Logo duas linhas, que por sua construcção geometrica vierem a ter (no circulo) huma posição directamente opposta, equivalem (nas operações algebricas) a grandezas contrarias, isto he, quando huma for additiva, será a outra subtractiva.

Proposições.

16 Denotem A e B dous arcos, cuja somma $A + B = 180°$, (*) será . . . . .
Sen. $(+A) = +$ Sen. A; isto he, *o Seno de hum arco positivo* $< 180°$ *he positivo.*

Sen.

(*) Dous arcos, cuja somma faz $180°$, chamão-se supplementos hum do outro assim: $(180 - A)$ he o supplemento de A; $(90° + A)$ he o supplemento de $(90° - A)$; $(180° + A)$ he o supplemento de $(-A)$, &c.

Sen. $(-A) = -$ Sen. A; isto he, *o Seno de hum arco negativo* $<$ 180° *he igual ao Seno do arco positivo [tomado com o signal negativo]*.

17 Sen. $(90° + A) =$ Sen. $(90° - A)$; isto he, *o Seno de hum arco* $>$ 90° *he igual ao Seno do seu supplemento [e com o mesmo signal]*.

Demonstrações. Suppondo o arco AM e a recta PM positivos, he pelo (n.° 15) Sen. $(+AM) = +PM = +$ Sen. AM. Mas como Sen. $AN = PN$; e he $AN = -AM$, e $PN = -PM$; logo (substituindo) será.... Sen. $(-AM) = -PM = -$ Sen. AM. A demonstração do (n.° 17) he facil de dar; abaixando de hum ponto da semicircumferencia de hum circulo huma perpendicular sobre o diametro, a qual será seno de qualquer das duas partes da semicircumferencta; e estas partes são supplementos huma da outra.

18 Cos. $(-A) =$ Cos. A; isto he, *o Coseno de hum arco negativo he igual ao Coseno do arco positivo [e com o mesmo signal]*.

19 Cos, $(90° + A) = -$ Cos. $(90° - A)$; isto he, *o Coseno de hum arco* $>$ 90° *he igual ao Coseno do seu supplemento [tomado com o signal negativo]*.

Demonstrações. Pois he (fig. 3) Cos. $AN = OP =$ Cos. AM; e he $AN = -AM$; logo Cos. $(-AM) =$ Cos. AM. Para mostrar o n.° (19): Tome-se o arco $AD = 90°$, e $Dm = DM$, será Cos. $(AD + DM) =$ Cos. $ADm = Op = -OP = -$ Cos. $AM = -$ Cos. $(AD - DM)$.

20 *Coroll.* Conhecidos os valores e signaes dos senos e cosenos, facilmente se acharão os das tang. e cotg. pelo (n° 13) suppondo r $= 1$, da maneira seguinte...

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sen.}(-A) = -\text{Sen.}\,A\\ \text{Cos.}(-A) = +\text{Cos.}\,A\end{array}\right\}\text{logo (13) será}\left\{\begin{array}{l}\text{tg.}\,(-A) = -\text{tg.}\,A.\\ \text{Cot.}\,(-A) = -\text{Cot.}\,A.\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sen.}\,(180°-A) = +\text{Sen.}\,A\\ \text{Cos.}\,(180°-A) = -\text{Cos.}\,A\end{array}\right\}\text{logo}\left\{\begin{array}{l}\text{tg.}\,(180°-A) = -\text{tg.}\,A.\\ \text{Cot.}\,(180°-A) = -\text{Cot.}\,A.\end{array}\right.$$

Scho-

Scholios.

21 As proposições dos numeros (16 e 17) mostrão; *que [quando hum arco for achado por hum seno] póde saber-se o signal do arco, mas não a grandeza delle.* Por exemplo: se o valor de sen. $(x - z)$ sahir positivo, será o arco $(x - z)$ positivo, isto he, $x > z$. Porem como he sen. $(x - z) = \text{Sen.}\,(180^\circ - (x - z))$, fica-se então na incerteza, se o arco que resolve o Problema he $(x - z)$, ou o seu supplemento $(180^\circ - (x - z))$. Mas se o valor de sen. $(x - z)$ sahir negativo, será o arco $(x - z)$ negativo, isto he, $x < z$. Fica-se porem sempre na incerteza a respeito do valor do arco $(x - z)$ ou do seu supplemento.

22 As proposições dos numeros (18 e 19) mostrão, *que [quando o arco for achado por hum coseno] póde saber-se a grandeza do arco, mas não o signal delle:* que vem a ser o contrario, do que se disse em o n.° antecedente, a respeito do arco achado por hum seno. Por exemplo, se Cos. $(x - z)$ sahir positivo, o arco $(x - z)$ póde ser positivo, ou negativo, isto he, $x >$ ou $< z$. Mas neste caso (o signal positivo) mostra que o arco $(x - z)$ ou $(z - x)$ he $< 90.^\circ$ E se Cos. $(x - z)$ sahisse negativo; o arco não seria $(x - z)$, mas sim o seu supplemento $180^\circ - (x - z)$, que então he $> 90.^\circ$

23 Vê-se porem pelo n.° (20) *que quando o arco for achado por huma tangente ou cotangente, póde haver duvida tanto a respeito do signal do arco, como da grandeza delle.* Porem sabendo-se que o arco achado deve ser positivo, então pelo signal $+$ ou $-$, que sahir para o valor da tg., Cot., ou Cos. se póde saber, se o arco he $<$ ou $> 90^\circ$: o que nunca tem lugar, quando o arco for achado por hum seno, como já fica dito.

Das

Das Formulas trigonometricas.

24 Represente r o raio do circulo, que hade medir os angulos A e B, não sendo qualquer delles maior que 90°, teremos a seguinte....

Formula geral.

$$\text{Sen.}(A+B)=\frac{\text{Sen. }A.\text{ Cos. }B+\text{Sen. }B.\text{ Cos. }A}{r}$$

Demonstração. Seja (fig. 4.) OMB hum arco de circulo, cujo raio AO ou $AM=r$; e seja o arco $OM=A$; o arco $MB=B$; a recta $MP=\text{Sen. }A$; $AP=\text{Cos. }A$; $BQ=\text{Sen. }B$; $AQ=\text{Cos. }B$; e $BR=\text{Sen. }OMB=\text{Sen.}(A+B)$. Do ponto Q conduza-se a recta Qm perpendicular à AO, e Qx à BR: será $\text{Sen.}(A+B)=Rx+xB$. Mas os triangulos similhantes AMP, AQm dão $AM : MP :: AQ : Qm$, ou $Rx=\frac{MP\times AQ}{AM}=\frac{\text{Sen. }A\times\text{Cos. }B}{r}$; e os triangulos similhantes AMP, BQx dão $xB=\frac{\text{Sen. }B.\text{ Cos. }A}{r}$; logo he $\text{sen.}(A+B)=Rx+xB=\frac{\text{Sen. }A.\text{ Cos. }B+\text{Sen. }B.\text{ Cos. }A}{r}$.

25 Se na formula geral escrevemos $-B$ em lugar de B, teremos pelos numeros (16 e 18) a seguinte....

$$\text{Sen.}(A-B)=\frac{\text{Sen. }A.\text{ Cos. }B-\text{Sen. }B.\text{ Cos. }A}{r}.$$

26 Se na formula geral escrevermos $90°-A$ em lugar de A; teremos

Sen.

$$\text{Sen.}\left(90^\circ-(A-B)\right)=\frac{\text{Sen.}(90^\circ-A).\text{Cos.}B+\text{Sen.}B.\text{Cos.}(90^\circ-A)}{r};$$

isto he,

$$\text{Cos.}(A-B)=\frac{\text{Cos.}A.\ \text{Cos.}B+\text{Sen.}B.\ \text{Sen.}A.}{r}$$

27 E se nesta ultima, escrevermos $-B$ em lugar de B; teremos....

$$\text{Cos.}(A+B)=\frac{\text{Cos.}A.\ \text{Cos.}B-\text{Sen.}B.\ \text{Sen.}A.}{r}.$$

Dos valores dos Senos e Cosenos em certos limites.

28 Denote r o raio do circulo; serà....
Sen. $0^\circ = o$; porque sendo o arco zero não ha seno.

29 Sen. $30^\circ = \frac{1}{2} r$; porque sen. $30^\circ = \frac{1}{2}$ da corda de 60°; e a corda de $60^\circ = r$.

30 Sen. $45^\circ =$ Cos. 45°; porque (fig. 2) sendo os ang. agud. iguaes o triang. rect. APM he isosceles; logo $PM = AP$.

31 Sen. $45^\circ = r\sqrt{\frac{1}{2}}$; porque sen.^{2} $45^\circ +$ Cos.^{2} $45^\circ = r^2$; logo 2 Sen.^{2} $45^\circ = r^2$; e logo &c.

32 Sen. $90^\circ = r$; o que he facil de vêr.

33 Sen. $135^\circ =$ Sen. 45°.
34 Sen. $150^\circ =$ Sen. 30°.
35 Sen. $180^\circ =$ Sen. $0^\circ = 0$.
} porque os arcos que são supplementos hum do outro tem o mesmo seno pelo n.º (17).

36 Cos. $0^\circ = r$; porque sendo zero o complemento de 90°, he Cos. $0^\circ =$ Sen. $90^\circ = r$.

37 Cos. $30^\circ = r\sqrt{\frac{3}{4}}$; porque Cos.^{2} $30^\circ = r^2 -$ Sen.^{2} 30°; logo &c.

38 Cos. $45^\circ = r\sqrt{\frac{1}{2}}$; porque Cos. $45^\circ =$ Sen. $45^\circ = r\sqrt{\frac{1}{2}}$ pelo n.º (31).

39 Cos. $90^\circ = 0$; porque Cos. 90° ($=$ Sen. 0°) $= 0$.

40 Cos. $135^\circ = -$ Cos. 45°.
41 Cos. $150^\circ = -$ Cos. 30°.
42 Cos. $180^\circ = -$ Cos. $0^\circ = -r$.
} o que facilmente se deduz do numero (19).

Scholio. Conhecidos os valores dos senos e cosenos facilmente se deduzem os das tangentes, cotangentes, secantes, &c., pelas formulas dos numeros (13 e 14). Por exemplo, tg. $45^\circ = \frac{r.\ \text{Sen. } 45^\circ}{\text{Cos. } 45^\circ} = \frac{r.\ \text{Cos. } 45^\circ}{\text{Cos. } 45^\circ} = r$; tg. $90^\circ = \frac{r.\ \text{Sen. } 90^\circ}{\text{Cos. } 90^\circ} = \frac{r.r}{0}$, que he huma quantidade infinita; &c.

Resumo de algumas formulas trigonometricas.

43 Suppondo nas form. dos numeros (24, 25, 26, e 27) $r = 1$; teremos as quatro formulas seguintes . . . .

(*a*) . . . Sen. $(A+B) =$ Sen. A. Cos. $B +$ Sen. B. Cos. A;
(*b*) . . . Sen. $(A-B) =$ Sen. A. Cos. $B -$ Sen. B. Cos. A;
(*c*) . . . Cos. $(A-B) =$ Cos. A. Cos. $B +$ Sen. B. Sen. A;
(*d*) . . . Cos. $(A+B) =$ Cos. A. Cos. $B -$ Sen. B. Sen. A.

44 Destas se deduzem (por somma) as seguintes . . . . .

(*e*) . . . Sen. $(A+B) +$ Sen. $(A-B) = 2$. Sen. A. Cos. B;
(*f*) . . . Sen. $(A+B) -$ Sen. $(A-B) = 2$. Cos. A. Sen. B;
(*g*) . . . Cos. $(A-B) +$ Cos. $(A+B) = 2$. Cos. A. Cos. B;
(*h*) . . . Cos. $(A-B) -$ Cos. $(A+B) = 2$. Sen. A. Sen. B.

45 Destas se deduzem (por divisão) as seguintes . . . . .

(*i*) . . . $\frac{\text{Sen. }(A+B) + \text{Sen. }(A-B)}{\text{Sen. }(A+B) - \text{Sen. }(A-B)} = \frac{\text{tg. } A}{\text{tg. } B}$; (*);

(*l*) . . . $\frac{\text{Cos. }(A-B) + \text{Cos }(A+B)}{\text{Cos. }(A-B) - \text{Cos. }(A+B)} =$ Cot. A. Cot B.

B 46

(*) Porque $\frac{\text{Sen. } A.\ \text{Cos. } B}{\text{Cos. } A.\ \text{Sen. } B} = \frac{\text{Sen. } A}{\text{Cos. } A} \times \frac{\text{Cos. } B}{\text{Sen. } B} = \frac{\text{Sen. } A}{\text{Cos. } A} : \frac{\text{Sen. } B}{\text{Cos. } B} =$ tg. A : tg. B.

46 Se nas duas formulas (i) e (l) do n.° antecedente fizermos $A+B=a$, e $A-B=b$, cujos valores dão $A=\frac{1}{2}(a+b)$, e $B=\frac{1}{2}(a-b)$; teremos as seguintes....

$$(i)' \ldots \frac{\text{Sen.} a + \text{Sen.} b}{\text{Sen.} a - \text{Sen.} b} = \frac{\text{tg.} \frac{1}{2}(a+b)}{\text{tg.} \frac{1}{2}(a-b)};$$

$$(l)' \ldots \frac{\text{Cos.} b + \text{Cos.} a}{\text{Cos.} b - \text{Cos.} a} = \text{Cot.} \tfrac{1}{2}(a+b). \text{Cot.} \tfrac{1}{2}(a-b).$$

47 Se nas formulas (a) e (d) do numero (43) fizermos $A=B$, teremos as duas seguintes ....

$$(a)' \ldots\ldots \text{Sen.}\, 2A = 2. \text{Sen.}\, A. \text{Cos.}\, A;$$
$$(d)' \ldots\ldots \text{Cos.}\, 2A = \text{Cos.}^2 A - \text{Sen.}^2 A.$$

48 Nesta ultima formula (d)' escrevendo primeiramente o valor de $\text{Cos.}^2 A$, e depois o de $\text{Sen.}^2 A$, tirados ambos da formula $1 = \text{Sen.}^2 A + \text{Cos.}^2 A$ do n.° (12) teremos as duas seguintes ....

$$(m) \ldots\ldots \text{Cos.}\, 2A = 1 - 2. \text{Sen.}^2 A;$$
$$(n) \ldots\ldots \text{Cos.}\, 2A = 2. \text{Cos.}^2 A - 1.$$

49 *Advertencia.* Por não interromper o discurso, reservamos para as Notas (I, II, e III.) tratar das Construcções das Taboas dos senos, e seus logarithmos; e do uso das mesmas Taboas. Agora sómente notaremos, que se não póde achar com exactidão hum arco entre 0° e 3°, quando for dado o logarithmo do coseno desse arco; nem entre 87° e 90°, quando for dado o logarithmo do seno: porque em ambos os casos as differenças dos ditos logarithmos são muito pequenas para com ellas se poderem achar (por meio de huma proporção) os arcos com a aproximação de segundos de gráo.

TRI-

TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

Da Resolução dos Triangulos rectilineos.

50 *ADvertencia.* Para resolver qualquer triangulo rectilineo: (1.° Sendo dados dous lados e hum angulo opposto, ou dous angulos e hum lado opposto; 2.° Sendo dados dous lados e o angulo por elles comprehendido; 3.° Sendo dados os tres lados) são precisas as tres seguintes . . . .

Proposições.

51 Em qualquer triangulo rectilineo: *Os lados são entre si como os senos dos angulos oppostos.*

52 *A somma de dous lados he para a sua differença, como a tangente da semisomma dos angulos oppostos, para a tangente da semidifferença dos mesmos angulos.*

53 Se da semisomma dos tres lados tirarmos cada hum dos dous lados do angulo que se busca, teremos dous restos: e será . . . . *O producto dos dous lados, para o producto dos dous restos, como o quadrado do raio, para o quadrado do seno da metade do angulo buscado.* Mas se da semisomma dos tres lados tirarmos sómente o lado opposto ao angulo que se busca, teremos hum resto: e será . . . . *O producto dos lados do angulo que se busca, para o producto da semisomma e resto, como o quadrado do raio, para o quadrado do coseno da metade do angulo buscado.*

 De-

Demonstrações.

A proposição do n.° (51) póde demonstrar-se assim: Sejão a, b, c os lados, e A, B, C os angulos oppostos de hum triangulo rectilineo ABC (fig. 5). Imagine-se o circulo circumscripto a esse triangulo: será (2 e 3) qualquer lado a, ou b, ou c a corda ou o dobro do seno da metade do arco correspondente, mas estas metades são as medidas dos angulos oppostos A, ou B, ou C: logo será $a = 2.\ \text{Sen.}\ A$; $b = 2.\ \text{Sen.}\ B$; $c = 2.\ \text{Sen.}\ C$. Logo he $a : b : c :: 2.\ \text{Sen.}\ A : 2.\ \text{Sen.}\ B : 2.\ \text{Sen.}\ C$; e logo $a : b : c :: \text{Sen.}\ A : \text{Sen.}\ B : \text{Sen.}\ C$.

A proposição do n.° (52) mostra-se assim: Por ser $a : b :: \text{Sen.}\ A : \text{Sen.}\ B$; he $a + b : a - b :: \text{Sen.}\ A + \text{Sen.}\ B : \text{Sen.}\ A - \text{Sen.}\ B$; e logo pela formula $(i)'$ do n.° (46), será $a + b : a - b :: \text{tg.}\left(\frac{A+B}{2}\right) : \text{tg.}\left(\frac{A-B}{2}\right)$

As duas proposições do n.° (53) mostrão-se assim: Seja (fig. 6) o triangulo ABC; do ponto B conduza-se BD perpendicular a AC; seja o lado $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; o segmento $AD = b - x$, $DC = x$; sabe-se (pela Geomet.) que $a^2 - x^2\ (= \overline{BD}^2) = c^2 - (b - x)^2$, logo he $c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$. Mas no triangulo BCD n.° (51) he $\text{Sen.}\ BDC : \text{Sen.}\ CBD :: a : x$, e por ser o triangulo rectangulo em D he $\text{Sen.}\ BDC = \text{Sen.}\ 90° = 1$ raio do circulo, e $\text{Sen.}\ CBD = \text{Sen.}\ (90° - C) = \text{Cos.}\ C$; logo he $1 : \text{Cos.}\ C :: a : x = a.\ \text{Cos.}\ C$; e logo (substituindo este valor de x na formula acima) teremos a seguinte...

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\ \text{Cos.}\ C.$$

Mas pela formula (m) do numero (48) he $\text{Cos.}\ C = 1 - 2\ \text{Sen.}^2 \tfrac{1}{2} C$; logo será $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ (1 - 2\ \text{Sen.}^2 \tfrac{1}{2} C)$; donde se deduz a seguinte: $ab.\ \text{Sen.}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2.\ 2} = \frac{c - a + b}{2} \times \frac{c + a - b}{2} = \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)$, como mo facilmente se verifica. Logo fazendo $\frac{a+b+c}{2} = P$ teremos $ab : (P-a)(P-b) :: 1 : \text{Sen.}^2 \frac{1}{2} C$.

A segunda proposição do n.° (53) mostra-se pelo mesmo estilo, substituindo $2 \text{Cos.}^2 \frac{1}{2} C - 1$ em lugar de Cos. C pela formula (n) do n.° (48); e acharemos ser... $ab : P(P-c) :: 1 : \text{Cos.}^2 \frac{1}{2} C$.

54 Das duas proporções que acabamos de demonstrar, se deduzem as duas equações seguintes...

$$(A) \ldots\ldots \text{Sen.} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(P-a)(P-b)}{a.b}}; \; (*)$$

$$(B) \ldots\ldots \text{Cos.} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{P(P-c)}{a.b}};$$

E destas duas se deduz (pela divisão) a seguinte:

$$(C) \ldots\ldots \text{tg.} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(P-a)(P-b)}{(P-c)P}}.$$

RE-

(*) Esta formula (A) he facil de calcular por logarithmos assim: $\log. \text{Sen.} \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} (\log. (P-a) + \log. (P-b) + C. \log. a + C. \log. b)$. O mesmo se deve entender a respeito de qualquer das outras duas.

RESOLUÇÃO DOS TRIANGULOS RECTILINEOS.

Problemas, qne são determinados.

Problema I.

55 DAdos *os tres lados: achar hum dos angulos.*
Sejão (a, b, c) os lados dados:
Achar o angulo (C). fig. 7.

Solução.

Ache-se $P = \frac{1}{2}(a+b+c)$: e depois calcule-se $\frac{1}{2}C$ por huma das duas (A) e (B) do n.° (54), ou pela (C) do mesmo n.°; tendo porém attenção nas duas primeiras, ao que se disse em o n.° (49); e teremos o angulo $C = 2 \times \frac{1}{2}C$.

Advertencia.

56 Note-se que $P-a$ por ser $= \frac{1}{2}(b+c-a)$ he positivo, pois he $b+c>a$: e por isso tambem são positivos os restos $P-b$, $P-c$. Logo o valor do seno, coseno, ou tangente de $\frac{1}{2}C$ achado pelas equações do n.° (54) não póde ser imaginario. A respeito porém dos signaes $\pm$ do valor real de tang. $\frac{1}{2}C$, deve-se tomar o positivo, porque devende ser o angulo $C<180°$, e positivo, será $\frac{1}{2}C<90°$, logo (23) he tg. $\frac{1}{2}C$ positiva.

Pro-

Problema II. e III.

57 DAdos *dous lados, e o angulo comprehendido:* achar *hum dos outros dous angulos,* ou *o terceiro lado.*
Sejão (a, b) os lados, e (C) o angulo dados:
Achar o angulo (A); ou o lado (c). fig. 7.

Soluções.

(I). Ache-se $A + B = 180° - C$, e teremos a semi-somma $\frac{1}{2}(A + B)$: Calcule-se depois pelo n.° (52) a semi differença $\frac{1}{2}(A - B)$; e teremos $A = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(A - B)$, que será (*) o maior angulo, e por isso ficará opposto ao maior lado a.

(II). Agora já se póde achar o lado c pelo n.° (51) assim: Sen. A : Sen. C : : a : $c = \frac{a.\,\text{Sen.}\,C}{\text{Sen.}\,A}$.

Problema IV.

58 DAdos *dous angulos, e o lado adjacente:* achar *hum dos outros dous lados.*
Sejão (A, B) os angulos, e (c) o lado dados:
Achar o lado a, ou o lado b. fig. 7.

Solução.

Ache-se o angulo $C = 180° - (A + B)$; e depois pelo n.° (51) se achará o lado a; ou o lado b. Advirta-se

(*) O angulo A he $> B$: porque a semi-somma das duas quantidades mais a semidifferença dá sempre a maior dellas.

se que quando a somma $(A+B)$ dos angulos for $< 90^\circ$, então em vez de Sen. C usa-se logo de Sen. $(A+B)$ pelo n.° (17).

Problemas que pódem ficar indeterminados.

Problema V. e VI.

59 DAdos *dous lados, e o angulo opposto a hum delles: achar o angulo opposto ao outro lado; ou o terceiro lado.* Sejão (a, b) os lados, e (B) o angulo dados: Achar o angulo (A); ou o lado (c). fig. 7.

Soluções.

(I). Pelo n.° (51) achar-se-ha A assim Sen. $A = \frac{a.\,\text{Sen.}\,B}{b}$.

(II) Achado A, acha-se depois $C = 180^\circ - (A+B)$; e depois o lado $c = \frac{a.\,\text{Sen.}\,C}{\text{Sen.}\,A}$, pelo n.° (51).

Advertencias.

60 A solução (I) póde ficar indeterminada (pela nota (**) do n.° 1): e o he realmente, se o angulo dado A não for opposto ao maior lado; ou não forem os dous lados iguaes; ou não se achar o seno do angulo buscado igual ao raio: porque em qualquer destes tres casos o valor do angulo A he determinado.

61 A solução (II) tambem he indeterminada, quando o for a primeira (I): porque então o angulo C tem dous valores: Com effeito; sendo A, e $180 - A$ os dous valores do angulo que se busca, será $C = 180^\circ - (A+B)$, e $C = 180^\circ - (180^\circ - A + B) = A - B$; logo $c = \frac{a.\,\text{Sen.}\,(A+B)}{\text{Sen.}\,A.}$ ou $= \frac{a.\,\text{Sen.}(A-B)}{\text{Sen.}\,A.}$.

Ap-

Applicação á resolução dos triangulos rectilineos rectangulos.

62 Para resolver qualquer triangulo rectangulo ABF (fig. 8), basta que (além do angulo recto F) sejão dadas duas cousas, em que entre hum lado. E então (n.°51), por meio da porporção dos *senos dos angulos para os lados oppostos*, se póde sempre resolver o problema. Mas para facilitar em alguns casos as soluções serve de muito a analogia seguinte, $1 : \text{tg.}\, B :: BF : AF$, isto he, Raio : tang. d'um dos ang. agudos :: lado adjacente : lado opposto.

Demonstr. Seja (fig. 8) ABF hum triangulo rectangulo em F: será AB a hypothenusa; AF o lado opposto; e BF o lado adjacente ao angulo agudo B; e será o outro angulo agudo $A = 90° - B$; $\text{Sen.}F = \text{Sen.}90° = \text{raio}$; e $\text{Sen.}A = \text{Sen.}(90° - B) = \text{Cos.}\,B$. Mas (51) he: Sen. F (raio): Sen. $B :: AB : AF$; e Sen. F (raio): Sen. A ou Cos. $B :: AB : BF$; isto he, temos as duas proporções seguintes:

(I) . . . Raio : Sen. $B :: AB : AF$ — isto he, o raio para o seno d'um dos angulos agudos como a hypothenusa para o lado opposto;

(II) . . . Raio : Cos. $B :: AB : BF$ — isto he, o raio para o coseno d'um dos ang. agudos como a hypothenusa para o lado adjacente.

E dividindo a (I) pela (II) teremos $1 : \frac{\text{Sen.}\,B}{\text{Cos.}\,B} :: 1 : \frac{AF}{BF}$, ou $1 : \frac{\text{Sen.}\,B}{\text{Cos.}\,B} :: BF : AF$, e logo pelo n.° (13) será . . . .

(III) . . . Raio : tg. $B :: BF : AF$; como se queria mostrar.

63 *Advertencia.* Usa-se somente da analogia (III), quando (nas duas cousas dadas, e na que se pede) não entra a hypothenusa. Porém no caso de se pedir a hypothenusa, sendo dados os dous lados; então em vez de calcular pela (III) hum dos angulos agudos, para ao depois calcular a hypothenusa pela (I) ou pela (II), póde-se calcular immediatamente a hypothenusa assim: $AB = \sqrt{(\overline{AF}^2 + \overline{BF}^2)}$. Tambem por este modo se póde calcular hum dos lados do triangulo rectangulo AFB, sendo dada a hypothenusa, e outro lado, pois he $AF = \sqrt{(\overline{AB}^2 - \overline{BF}^2)}$, ou $AF = \sqrt{(AB + BF)(AB - BF)}$, e convem saber isto, porque he indispensavel em alguns casos achar primeiramente o lado, do que o angulo opposto.

Exemplo. Dada a hypothenusa AB, e o lado AF, pede-se o angulo B? Teremos pela (I) 1 : Sen. B : : AB : AF; logo he log. Sen. B = log. AF — log. AB (sendo as rectas AB e AF avaliadas em numeros por huma mesma unidade); por tanto se o *log. Sen. B* se achar no caso do n.° (49); então não se poderá achar o angulo B com exactidão até segundos: por isso dever-se-ha calcular primeiramente o lado BF que he $= \sqrt{(AB + AF)(AB - AF)}$; e ao depois poder-se-ha calcular o angulo B com exactidão pela analogia (II), assim . . . 1 : Cos. B : : AB : BF; pois he achado por hum coseno.

64 Deste caso se póde concluir (para qualquer outro) o seguinte: *Quando em qualquer triangulo se não puder achar com exactidão immediatamente a parte, que se pede: deve-se nesse caso calcular primeiramente outra parte do triangulo, e que seja a mais conveniente para que [por meio della] se possa achar com exactidão a parte, que se pede.*

EX-

EXEMPLOS.

Da resolução dos triangulos rectilineos.

ANtes de dar alguns exemplos do uso da Trigonometria rectilinea; diremos, o que se entende por linha vertical, e plano horisontal. *Linha vertical he o fio à prumo*, isto he, o fio que suspende hum peso. E *Plano horisontal he o plano perpendicular à linha vertical*; ou tambem, Plano horisontal he a superficie plana de hum fluido, contido em hum vaso.

Problema.

Achar a distancia horisontal de dous objectos, quando não for possivel medilla immediatamente?

Solução I.

Pede-se (fig. 9) a distancia do ponto A ao ponto B, isto he, pede-se a recta AB; podendo-se medir huma base BC, e medir tambem os angulos ABC e BCA? Isto he, seja $BC = 125^v,6$; $ABC = 30.^\circ 15'$; e $BCA = 35^\circ 40'$; pede-se AB? Então pelo Probl. IV. do (n.° 58) teremos Sen. $65.^\circ 55' : 125^v,6 :: \text{Sen.}35.^\circ 40' : AB = \dfrac{125^v,6.\,\text{Sen.}35.^\circ 40'}{\text{Sen.}\,65.^\circ 55'}$; ou, fazendo o calculo por logarithmos, teremos . . .

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 125,6 & = 2,0989896 \\ \text{log. Sen. } 35.^\circ 40' & = 9.7657197 \\ \text{C. log. Sen. } 65.^\circ 55 & = 0,0395516 \\ \hline \text{log. } AB \; . \; . \; . \; . \; . & \;\; 1,9042609 \\ \hline \end{array}$$

E com o log. AB achar-se-ha nas Taboas ser $AB = 80^v,2$.

 So-

Solução II.

Pede-se (fig. 10) a distancia AB, podendo-se medir o angulo ACB, e as distancias AC e BC. Isto he, seja $ACB = 120^\circ\ 35'$; $AC = 145^v,7$; $BC = 213^v,5$; pede-se AB?

Ache-se pelo Prob. II. do n.° (57) o angulo A opposto ao maior lado BC; e depois pelo Prob. III. achar-se-ha AB. Por tanto acharemos o angulo A, assim . . .
$359^v,2 : 67^v,8 :: \text{tg. } 29.^\circ\ 42.'\ 30'' : \text{tg. } \left(\frac{A-B}{2}\right)$; logo . . .

$$\begin{array}{rl} \text{log. tg. } 29.^\circ\ 42.'\ 30'' & = 9.\ 7563186 \\ \text{log. } 67,8\ \ldots\ldots & = 1.\ 8312297 \\ \text{C. log. } 359,2\ \ldots\ldots & = 7.\ 4446627 \\ \hline \text{log. tg. } \left(\frac{A-B}{2}\right) & = 9.\ 0322120 \end{array}$$

Logo $\frac{A-B}{2} = 6.^\circ\ 8.'\ 49''$; mas esta semidifferença junta á semisomma $29.^\circ\ 42.'\ 30''$ dá $A = 35.^\circ\ 51.'\ 19''$.

Agora para achar AB diremos . . .
$\text{Sen.}35.^\circ\ 51'.19' : 213,5 :: \text{Sen.}120.^\circ\ 35'$, ou $\text{Sen.}59.^\circ\ 25' : AB$; e fazendo o calculo por logarithmos acha-se $AB = 313^v.8$.

Solução III.

Pede-se AB (fig. 11); podendo-se medir huma base DC, e as duas distancias AD e BC; e tambem os angulos ADC e BCD (*). Com effeito: com os dous lados

(*) Esta solução serve, quando os objectos A e B se não poderem vêr ambos do lugar C, e do lugar D.

dos AD e DC, e o angulo ADC por elles comprehendido; calcule-se AC, e o angulo ACD: depois ache-se o angulo $ACB = BCD - DCA$; e finalmente com o angulo ACB, e os dous lados AC e BC, calcular-se-ha a distancia AB, que se pede, pelos Prob. do n.º (57).

Problema.

Achar a altura de hum objecto acima de hum plano horisontal?

Solução I.

Pede-se (fig. 12) a altura AB; podendo medir-se a distancia horisontal CB, e o angulo ACB? Para isso, meça-se huma distancia BC até que o angulo observado BCA não diffira muito de 45°; isto he, seja $BC = 135^{v},5$ e o ang. $ACB = 46.^{\circ}\,30'$; então pelo n.º (62) diremos,

$$1 : \text{tg}.\,46.^{\circ}\,30' :: 135^{v},5 : AB = 135,5.\,\text{tg}.\,46.^{\circ}\,30';$$

e fazendo o calculo por logarithmos acha-se $AB = 142,^{v}8$.

Solução II.

Pede-se (fig. 13) a altura AB, não podendo medir a distancia horisontal BC. Para isso, meça-se outra distancia CD, e os angulos ADC e DCA; então com estes dados do triangulo ADC, acháremos pelo n.º (58) a recta AC. Ora conhecendo AC, e observando o angulo ACB, poderemos no triangulo rectang. ABC achar pelo n.º (62) a altura AB, da maneira seguinte:

Sen. 90°, ou 1 : AC :: Sen. ACB : $AB = AC$. Sen. ACB.

Problema.

Reduzir hum angulo ao plano horisontal?

Pede-se (fig. 14) reduzir o angulo DAC ao plano horisontal BCD, sendo AB huma linha vertical; isto he, reduzir o angulo que tem o vertice em A ao angu-

lo

lo que tem o vertice em B. Para isso: meça-se huma base CD; e meção-se os angulos ADC e DCA, e ACB e ADB. E com estes dados acharemos no triangulo ADC os lados AC e AD. Depois resolveremos os dous triangulos rectangulos ABC e ABD para achar as distancias BC e BD. Isto posto, seja $DC = 125^{v},3$; $BC = 236^{v},4$; e $BD = 347^{v},5$, então como são dados os tres lados no triangulo CBD, acharemos pelo Prob. I. do n.° (55) o angulo B, usando da formula (A) do seno, da maneira seguinte . . . .

$DC = 125,3$
$BC = 236,4$ . . . C. log. $= 7,6263525$
$BD = 347,5$ . . . C. log. $= 7,4590452$
Somma $= 709,2$
$\frac{1}{2}$ Somma $= 354,6$
1.° Resto $= 118,2$ . . . . log. $= 2,0726175$
2.° Resto $= 7,1$ . . . . log. $= 0,8512583$
Somma . . . $18,0092735$
log. Sen. $\frac{1}{2} B = \frac{1}{2}$ Somma . . . $9,0046367$

logo, dobrando o valor do angulo achado, teremos . . . $B = 11.° 36'. 7'',0$.

O mesmo exemplo usando da form. (B) do Coseno.

$DC = 125,3$
$BC = 236,4$ . . . C. log. $= 7,6263525$
$BD = 347,5$ . . . C. log. $= 7,4590452$
Somma $= 709,2$
$\frac{1}{2}$ Somma $= 354,6$ . . . . log. $= 2,5497387$
$\frac{1}{2}$ Som. $- DC = 229,3$ . . . . log. $= 2,3604641$
Somma $= 19,9955405$
log. Cos. $\frac{1}{2} B = \frac{1}{2}$ Somma $= 9,9977702$

logo, dobrando o valor do angulo achado, teremos . . . $B = 11.° 36'. 7'',6$.

NO-

NOTAS Á TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

NOTA I.

Das Taboas dos Senos naturaes e artificiaes.

CHama-se *seno natural* de qualquer arco o numero das partes do raio, que se contém no seno desse arco. Por exemplo, sendo o raio $=1$, he $\frac{1}{2}$ ou $0,5$ o seno natural de 30°: porque (29) he $\text{Sen.}\, 30^\circ = \frac{1}{2}$; e pelo n.° (37) he $\text{Cos.}\, 30^\circ = \sqrt{\frac{1}{4}}$. Vejamos agora como se poderião achar os senos naturaes do todos os mais arcos, sendo o raio $=1$. As formulas (m) e (n) do n.° (48) dão . . . .

$\text{Sen.}\, A = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \text{Cos.} 2A)}$; e $\text{Cos.}\, A = \sqrt{\frac{1}{2}(\text{Cos.}\, 2A - 1)}$: mas sendo $A = 15^\circ$, he $\text{Cos.}\, 2A = \text{Cos.}\, 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; logo $\text{Sen.}\, 15^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})}$; e $\text{Cos.}\, 15^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1)}$.

E continuando por este modo a calcular o seno, e coseno da metade do ultimo arco achado, chegar-se-ha finalmente achar o seno, e o coseno de $0.^\circ\, 1'.\, 45'',5$. Porém como os resultados deste calculo mostrão, que os arcos muito pequenos são entre si como seus senos; logo para achar o sen. $1'$, diremos $0.^\circ\, 1.'\, 45'',5 : 1' ::$ $\text{Sen.}\, 0.^\circ\, 1'.\, 45'',5 : \text{Sen.}\, 1'$ que se busca; e achar-se-ha ser proximamente $\text{Sen.}\, 1' = 0,000291$: multiplicando agora este seno por 2, 3, 4 até 10, teremos $\text{Sen.}\, 2' = 0,000582$, $\text{Sen.}\, 3' = 0,000873$, até $\text{Sen.}\, 10' = 0,00291$. E depois pela formula (f) do n.° (45) que he $\text{Sen.}\,(A + B) =$ $\text{Sen.}\,(A - B) + 2.\, \text{Sen.}\, B.\, \sqrt{(1 - \text{Sen.}^2 A)}$ se poderia achar o seno de 1°, 2°, 3°, até 90°: e com effeito $\text{Sen.}\, 11' =$ $\text{Sen.}\,(10' + 1') = \text{Sen.}\, 9' + 2.\, \text{Sen.}\, 1'.\, \sqrt{(1 - \text{Sen.}^2 9')}$; e assim por diante até $90.^\circ$ Achados os valores dos senos

e

e cosenos podem-se achar (13) os valores numericos das tangentes e cotangentes em partes do raio $= 1$. Advirta-se que as Taboas dos senos naturaes forão calculadas, suppondo o raio do circulo $= 10000000000 = 10.^{10}$

Passemos agora aos senos artificiaes. Chama-se *seno artificial* de hum arco o logarithmo de seno natural desse arco: isto he, sendo o raio $= 1$, será o seno artificial de $30° =$ log. Sen. $30° =$ log. $0,5 = 9,698970$ com hum complemento na characteristica. Isto posto: Buscar-se-hão os logarithmos das tangentes, e cotangentes por meio dos logarithmos achados dos senos e cosenos; porque (13) he log. tg. $A =$ log. Sen. $A + C.$ log. Cos. A; e he log. Cot. $A = C.$ log. tg. A.

NOTA II.

Ainda que no calculo para a construcção das Taboas dos Senos se suppoz o raio $= 10^{10}$; com tudo podemos usar dellas, suppondo o raio $= 1$. Com effeito seja A hum arco de circulo, cujo raio $= 10^{10}$; e a outro arco, cujo raio $= 1$; será $10^{10} : 1 ::$ Sen. A : Sen. a; logo log. Sen. $A = 10 +$ log. Sen. a. Donde se segue, que o log. Sen. A só differe do log. Sen. a em hum complemento; isto he, os logarithmos das Taboas dos Senos tem hum *complemento* de mais, do que deverião ter, se fosse o raio $= 1$. Por tanto no calculo devemos attender a este complemento: como por exemplo pedindo-se o valor do seno natural de $30°$ quando o raio $= 1$; buscar-se-ha o log. Sen. $30°$ que he $= 9.689970$; e com este logarithmo busque-se o numero correspondente, sem attender à characteristica, achar-se-ha 5; mas como o dito logarithmo tem hum complemento, o numero deverá ser 0,5. Advirtindo-se tambem, que quando se toma o complemento do logarithmo de hum seno das Taboas vem o complemento do logarithmo do seno (sendo o raio $= 1$) diminuido de 10; como se póde deduzir da equação acima.

No-

NOTA III.

Do uso das Taboas.

Para fazer uso das Taboas dos logarithmos, ou de quaesquer outras Taboadas, faz-se preciso saber o seguinte:

Sendo dadas duas series, que se correspondão termo por termo; se as differenças entre quaesquer termos da primeira serie forem entre si como as differenças entre os termos correspondentes da segunda: então, sendo dado o numero, que deva existir entre dous termos de huma das series, achar-se-ha o correspondente na outra, pela porporção seguinte: a differença dos numeros de huma das series está para a differença entre o numero dado e o antecedente assim como a differença dos numeros correspondentes da outra serie está para a differença entre o numero que se busca, e o antecedente; e esta differença achada junta-se, ou tira-se do termo antecedente da segunda serie, conforme se vir que seus termos vão augmentando, ou diminuindo. Com effeito . . . .

Seja $\begin{cases} x \text{ qualquer termo da serie } a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \text{\&c.} \\ y \text{ o correspondente na serie } A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ \text{\&c.}; \end{cases}$

e seja $b-a : c-a :: B-A : C-A$, será tambem . . . . $b-a : x-a :: B-A : y-A$; logo $\left(\text{fazendo } P=\frac{B-A}{b-a}\right)$ he

$$y = A + P\,(x-a).$$

Exemplo. Suppostas as observações seguintes . . . .

$$\left.\begin{array}{l} a=3.^{h}\ 10' \ldots A=35.^{\circ}\ 30' \\ b=3.\ 12 \ldots B=35.\ 50 \\ c=3.\ 15 \ldots C=36.\ 20 \end{array}\right\}\text{temos}\begin{cases} b-a=2';\ B-A=20' \\ c-b=3';\ C-A=30. \end{cases}$$

 Sen-

Sendo dado $x = 3.^h\,11'$; pede-se y? Pois he .... $b - a$ $(2')$: $x - a$ $(1')$ :: $B - A$ $(20')$: $y - A = 10'$; logo $y = 35.^\circ\,30' + 10' = 35.^\circ\,40'$.

Quando porém em huma das duas series acima mencionadas não forem as differenças primeiras constantes; mas sim as differenças segundas, isto he, as differenças das differenças primeiras; então, sendo dado x calcular-se-ha y, pelo methodo seguinte:

Ache-se $P = \frac{B - A}{b - a}$, $P' = \frac{C - B}{c - b}$; $Q = \frac{P' - P}{c - a}$: será ....

$$(a) \quad .... \quad y = A + P(x - a) + Q(x - a)(x - b).$$

Com effeito, $x = a$ dá $y = A$; e $x = b$ dá $y = B$.

N.B. Esta he a *Formula das Interpolações*: e serve para calcular y sendo dado x; e vice versa.

Exemplo. Suppostos os dados seguintes:

Senos	*Logarithmos*	Differ. I.	Differ. II.
$a = 1.^\circ\,30'$	$A = 8.417919$		
		$+\,0,004798$	
$b = 1.\ 31$	$B = 8.422717$		$-\,0,000053$
		$+\,0,004745$	
$c = 1.\ 32$	$C = 8.427462$		$-\,0,000051$
		$+\,0,004694$	
$d = 1.\ 33$	$D = 8.432156$		

Sendo dado $x = 1.^\circ\,30'.\,40''$, achar $y = \log.$ Sen. $1.^\circ\,30'.\,40''$? Como as differenças segundas são quasi iguaes, pois differem só na ultima decimal; sommem-se ambas, e tome-se metade; teremos $-\,0,000052$; calcule-se agora $P(x - a) = +\,0,003199$; $Q(x - a)(x - b) = +\,0,000006$; será y ou log. Sen. $1.^\circ\,30'.\,40'' = 8.421124$.

Sendo porém dado y para achar x; seria preciso resolver huma equação do segundo gráo; mas tambem se poderia resolver por equações do primeiro gráo; assim: faça-se $M = A + Qab$; $N = P - Q(a + b)$; então a formula (a) se mudará na seguinte:

$$y = M + Nx + Qx^2;$$

Don-

Donde se tira $x = \frac{y - M}{N + Qx}$; e despresando Qx, teremos o primeiro valor approximado $x' = \frac{y - M}{N}$; e logo $x'' = \frac{y - M}{N + Qx'}$: este valor x'' he já sufficientemente approximado; mas querendo ainda maior approximação, teremos $x = \frac{y - M}{N + Qx''}$. N.B. Se fosse $a = 0$, seria $M = A$; $N = P - bQ$; e logo $y = A + Nx + Qx^2$: equação mais simples, que sempre se póde ter; tirando o primeiro termo a de todos os termos da serie a, b, c, &c.

Quando as differenças $B - A$, $C - B$, &c. dos logarithmos forem muito pequenas, e taes que (sem erro sensivel) se possa suppor $P = 0$, $P' = 0$: então a formula (a) dando $y = A$, não se poderá achar x para hum dado valor de y. Por isso não se poderá achar com exactidão o arco entre 0° e 3° quando for dado o logarithmo do coseno; nem entre 87° e 90° quando só for dado o logarithmo do seno: porque as differenças dos logarithmos dos cosenos no primeiro caso, e a dos senos no segundo, são muito pouco sensiveis para por ellas se poderem obter os arcos com exactidão até segundos de gráo. Note-se tambem que os logarithmos das tangentes de 73° até 90° tem as differenças segundas constantes.

APPENDICE.

A Relação entre as partes de hum triangulo rectilineo (cujos angulos são A, B, C, e os lados oppostos a, b, c) he dada pelas seguintes:

Formulas finitas dos Triangulos rectilineos.

(a) . . . . . $C = 180° - (A + B)$;
(b) . . . . . $c.\ \text{Sen.}\ A = a.\ \text{Sen.}\ C$;
(c) . . . . . $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\ \text{Cos.}\ C$.

Formulas differenciaes dos Triangulos rectilineos.

(a)' . . . . . $dC = -dA - dB$;
(b)' . . . $\frac{dc}{c} + dA.\ \text{Cot.}\ A = \frac{da}{a} + dC.\ \text{Cot.}\ C$;
(c)' . . . $dc = da.\ \text{Cos.}\ B + db.\ \text{Cos.}\ A + dC.b.\ \text{Sen.}\ A$.

Com effeito: para achar (b)': divide-se a differencial de (b) por (b). E para achar (c)': differencia-se (c); fecha-se entre parenthesis o que multiplica da e db; e como qualquer lado de hum triangulo rectilineo he igual á somma dos productos de cada hum dos outros dous lados multiplicado pelo coseno do angulo adjacente; poderemos em lugar dos coefficientes de da e de db escrever $c.\ \text{Cos.}\ B$ e $c.\ \text{Cos.}\ A$; e depois pela (b) se achará o coefficiente de dC; e finalmente dividindo a equação por c, teremos a formula (c)'.

FIM.

INTRODUCÇÃO Á TRIGONOMETRIA SPHERICA.

1 A Sphera póde conceber-se como o volume terminado pela superficie curva, que (fig. 1) a semicircumferencia PMp de hum circulo descreveria em huma revolução completa à roda de hum diametro fixo Pp; que então se chama *Eixo* da sphera, e seus extremos P e p chamão-se *Polos* della.

2 Isto posto: he facil de ver, que qualquer ponto M descreveria nesta revolução inteira huma circumferencia MmM', cujo raio Mq seria perpendicular ao eixo Pp: e por isso será $Mq = \text{Sen.}\, PM$, isto he, qualquer raio Mq he igual ao seno da distancia do seu circulo ao polo.

3 E como as circumferencias dos circulos são entre si como os raios; serão as circumferencias desses circulos da sphera, como os senos de suas distancias ao polo: por tanto sendo MmM' e NnN' duas circumferencias, cujos raios são Mq e Nr, será . . . .
$MmM' : NnN' :: Mq : Nr$, ou $:: \text{Sen.}\, PM : \text{Sen.}\, PN$; e tambem (arco Mm) : (arco Nn) $:: \text{Sen.}\, PM : \text{Sen.}\, PN$. Logo, quando for $PM = 90°$, será $Mm : Nn :: \text{Sen.}\, 90°$ ou o raio : $\text{Sen.}\, PN$ ou $\text{Cos.}\, MN$.

4 Tambem he facil de ver, que a circumferencia MmM' (descripta pelo ponto M) he para qualquer arco Mm, como toda a superficie curva que o arco PM descreveria he para a superficie curva PMm.

N.B.

N.B. Póde-se tambem mostrar isto, como na Geometria se mostra, que hum angulo tem para quatro rectos a mesma razão que o arco correspondente tem para toda a circumferencia.

5 *Advertencia.* Conceberemos agora a sphera como hum volume terminado por huma superficie curva, cujos pontos estão igualmente distantes de hum ponto a que se chama centro. E sabe-se então: que toda a secção, feita na sphera por hum plano, he circulo: e que o maior de todos esses circulos he o que resulta de passar o plano pelo centro da sphera. Supposto isto; facilmente se perceberão as seguintes:

Definições.

6 Os circulos, que tem o mesmo centro, e raio da sphera, chamão-se *circulos-maximos*: e quaesquer outros, *circulos-menores* dessa sphera.

7 *Eixo* de hum circulo he a recta perpendicular, ao plano desse circulo, no centro.

8 *Polos* de qualquer circulo da sphera são os dous pontos, em que o seu eixo encontra a superficie da sphera.

Proposições.

9 *O Polo de hum circulo da sphera dista igualmente de todos os pontos da circumferencia desse circulo.*

Com effeito: as rectas, tiradas do polo para a circumferencia do seu circulo, são iguaes; por serem apothemas da pyramide conica recta, que teria por vertice o polo, e por base o dito circulo.

10 *Corollario.* Quando a dita circumferencia for de circulo-maximo, será a recta (conduzida de qualquer dos seus pontos para o polo) igual a corda de 90°.

11 *Dous circulos-maximos sempre se cortão mutuamente em duas partes iguaes.*

Por

Porque a sua intersecção, passando pelo centro de ambos, he diametro de qualquer delles: e por isso os divide em duas partes iguaes.

12 *Corollario.* Logo se dous arcos de circulos maximos concorrerem fechando espaço na superficie da sphera, será qualqner delles $= 180°$: isto he, se (fig. 2) os dous arcos ABD e ACD de circulos-maximos fecharem o espaço $ABDCA$, será $ABD = 180°$, e $ACD = 180°$.

13 *Definição.* Entenderemos pela palavra *Calote* a superficie de hum segmento spherico menor que hum hemispherio.

14 *Por dous pontos, tomados n'uma calote, não póde passar mais de hum arco de circulo-maximo.*

Porque esses dous pontos e o centro da sphera determinão a posição unica do plano do circulo-maximo, que por elles passa.

15 *O arco de circulo-maximo [comprehendido entre dous pontos de huma calote] he sempre menor que* 180°; *e o minimo* a respeito de qualquer outra curva (traçada na sphera) que tenha os mesmos dous pontos por extremos.

Prova-se: Que he $< 180°$; porque para ser $= 180°$, ainda he preciso, que o dito arco seja (12) produzido de ambas as partes para fóra da calote para poder concorrer com o circulo maximo parallelo á base da mesma calote. E que he o *minimo*; por ser Axioma (*), que entre os ditos dous pontos não póde haver distancia menor (na superficie da sphera) que o arco de circulo-maximo.

16 *Definição.* ANGULO SPHERICO he o angulo que na superficie da sphera formão dous arcos de circulos-maximos.

17 *A medida de hum angulo spherico MPm* (fig. 1) *he o arco Mm, que os seus lados cortão no circulo-maximo descripto do vertice P como polo.*

Por-

(*) Veja-se a respeito deste axioma a Nota I. que vai no fim.

Porque o angulo spherico MPm he proporcional ao arco Mm; como se conclue, do que fica dito em o numero (4).

18 *O angulo spherico MPm he equivalente ao angulo Mqm, que mede a inclinação dos planos de seus lados.*

Porque ambos tem por medida o mesmo arco Mm.

19 *Scholio.* O que se disse na Geometria a respeito do angulo diedro, isto he, do angulo formado por dous planos, tem lugar a respeito do angulo spherico: por isso, os angulos sphericos verticalmente oppostos são iguaes; todos os angulos sphericos a roda de hum vertice commum valem quatro rectos; hum arco de circulo-maximo encontrando outro forma com elle dous angulos, cuja somma vale dous angulos rectos; &c.

20 *O arco de circulo-maximo perpendicular a outro passará pelo polo dessoutro: e reciprocamente.*

Por ser hum arco de circulo-maximo perpendicular a outro; será tambem (19) o plano desse circulo perpendicular ao do outro: e por isso deve passar pelo seu eixo; e logo (8) passará pelo polo. Reciprocamente, se hum arco de circulo-maximo passar pelo polo de outro circulo-maximo, tambem o seu plano passará (8) pelo eixo dessoutro: e por isso lhe será perpendicular.

21 *Scholio.* A distancia PM (fig. 1) de qualquer ponto M da circumferencia MmM' de hum circulo-maximo ao seu polo P pelo n.° (10) he $= 90°$ de hum circulo-maximo PMp, que (20) será perpendicular ao circulo MmM'; isto he, PM he $= 90°$, e perpendicular à MmM'.

22 *Definição.* TRIANGULO SPHERICO he o triangulo que n'uma calote formão tres arcos de circulos-maximos.

23 *Pódem haver sempre dous triangulos sphericos; de que os vertices dos angulos de hum sejão polos dos lados do outro: e cada lado de hum seja supplemento do angulo, cujo vertice he seu polo.*

Na fig. 3 o vertice A seja polo de DE, B de EF,

C

C de DF. Por ser A polo de DE, e B de EF distará (21) o ponto E 90° dos pontos A e B; logo será E polo de AB: da mesma sorte se prova ser D polo de AC, e F de BC. Produzão-se AB e AC até encontrar DE em G e H, será $DH = 90°$, e $GE = 90°$: logo $DE + GH\ [= DH + HE + GH = DH + GE] = 180°$, mas (17) he $GH = BAC$: logo he $DE + BAC = 180°$. Produza-se BA até encontrar EF em I; pois he $BI = 90°$, $AG = 90°$, logo $AB + GI\ [= AB + BG + BI = AG + BI] = 180°$; mas he $GI = DEF$: logo $AB + DEF = 180°$, &c.

Estes triangulos ABC, DEF chamar-se-hão supplementarios hum do outro.

Da igualdade dos triangulos sphericos. (*)

Proposições.

Dous triangulos sphericos são iguaes entre si . . . .

24 Quando os tres lados de hum forem iguaes aos tres lados do outro cada hum a cada hum.

(*) Na fig. 4. Seja ABC hum triangulo spherico. Produza-se AC até completar a circumferencia $ACGE$; e AB e CB até concorrerem no ponto F, e sejão E e G os pontos, onde cortão a circumferencia. Nos triangulos EGF, e ABC (por ser $FE + EB = 180°$ he $= EB + BC$, logo $FE = BC$, &c.) he $FE = BC$; $FG = AB$; e $GE = AC$, e o angulo F por ser $= GBE$ he $= ABC$; $EGF = BAC$; e $GEF = ACB$. Só resta provar (para que estes triangulos sejão iguaes) que a área EFG he $=$ a área ABC. Com effeito: fig. 5. Sejão ABC e EFG os dous triangulos, que tem os lados e angulos iguaes: digo, que tambem as suas areas são iguaes. Porque as circumferencias $AmBCA$ e $EnFGE$ das bases das calotes (em que existem os triangulos) devem ser iguaes; por serem circumscriptas aos triangulos rectilineos iguaes formados pelas cordas dos lados dos triangulos sphericos ABC e EFG. E, por serem iguaes as circumferencias das bases, serão as calotes iguaes. Mas tambem os arcos AmB e EnF (correspondentes

25 Quando os tres angulos de hum forem iguaes aos tres angulos do outro cada hum a cada hum.

26 Quando dous lados de hum forem iguaes a dous lados do outro cada hum a cada hum, e iguaes os angulos que estes lados fórmão.

27 Quando dous angulos de hum forem iguaes a dous angulos do outro cada hum a cada hum; e iguaes os lados adjacentes a estes angulos.

Demonstrações.

As proposições dos numeros (24, 26, e 27) provão-se (como na Geometria) pelo Principio da Superposição, ou verificando a igualdade immediatamente com os dous triangulos propostos quando for possivel, ou verificando-a com hum dos triangulos propostos, e com o trianguló equivalente do outro. A demonstração porém do n.° (25) reduz-se facilmente a do n.° (24) por meio dos triangulos (23) supplementarios dos propostos: pois nestes serão os tres lados de hum respectivamente iguaes aos do outro; logo (24) tambem os angulos destes triangulos serão respectivamente iguaes; e por isso serão respectivamente iguaes entre si os lados dos propostos.

Dous triangulos sphericos pódem não ser iguaes...

28 Quando dous lados de hum forem iguaes a dous lados do outro cada hum a hum, e igual hum dos angulos oppostos a lados iguaes.

29 Quando dous angulos de hum forem iguaes a dous angulos do outro cada hum a cada hum; e igual hum dos lados oppostos a angulos iguaes.

Com

---

aos lados iguaes AB e EF) são iguaes: logo serão iguaes os espaços $AmBA$ e $EnFGE$ fechados por esses arcos, e por esses lados. Vê-se por tanto, que se das calotes iguaes tirarmos esses espaços iguaes; os restos, que são as areas dos triangulos, serão iguaes. Estes triang. chamão-se *equivalentes*, porque se não pódem sobrepôr.

Com effeito: (fig. 2) no triangulo ABC (produzidos AB e AC até D) ter-se-ha BCD, no qual (17) será o angulo $D=A$, o lado BC commum; e póde ser $AB=BD$; e $AC>CD$: logo pódem ser differentes os triangulos ABC e BCD com as condições do n.º (28). Tambem nestes triangulos he $A=D$, BC commum, e póde ser o angulo $BCD=BCA$; e com tudo ser $AC>CD$; o que mostra ter lugar a proposição do n.º (29).

Scholios.

30 As condições (expostas em os numeros 24, 25, 26, 27) necessarias para satisfazer a igualdade dos triangulos sphericos, indicão quaes devem ser os dados precisos para resolver hum triangulo, isto he, quaes devem ser as partes dadas no triangulo para que não possa existir outro triangulo com esses dados differente do proposto; e por tanto *fica determinado hum triangulo* nos quatro casos seguintes: quando forem *dados os tres lados*; ou *os tres angulos*; ou *dous lados, e o angulo comprehendido*; ou *dous angulos, e o lado adjacente*.

31 Porém pelas condições (expostas em os numeros 28, 29) *não fica sempre determinado hum triangulo*; pois pódem haver dous triangulos sphericos differentes, quando forem *dados dous lados, e hum angulo opposto*; ou *dous angulos, e hum lado opposto a hum delles*.

Da relação de grandeza entre os lados, e angulos de hum triangulo spherico.

Em todo o triangulo spherico . . . .

32 *Qualquer lado he* $<180°$;

33 *A somma de dous lados* $>$ *o terceiro*;

34 *A somma dos tres lados* $<360°$.

Demonstrações. Como qualquer triangulo spherico existe te sempre em huma calote: por isso, e pelo n.° (15) facilmente se prova a primeira, e segunda proposição. E a terceira (fig. 2) prova-se assim: por ser $BC < BD + CD$; se ajuntarmos AB e AC a hum e outro membro; teremos $BC + AB + AC < AB + BD + CD + AC$, mas $AB + BD + CD + AC$ he $= 360°$; logo he $BC + AB + AC < 360°$.

Em todo o triangulo spherico . . . .

35 *Qualquer angulo he* $< 180°$.

36 *A differença de dous ang. he* $<$ *o supplemt. do terceiro*;

37 *A somma dos tres angulos he* $> 180°$.

Demonstrações. Na fig. 3. Sendo o triangulo ABC o supplementario de DEF será (23) o lado $AB = 180° - E$, $BC = 180° - F$, $CA = 180° - D$; logo escrevendo os valores de AB, BC, CA em o n.° (33) sahe $180° - E + 180° - F > 180° - D$, e logo $E - D < 180° - F$. Escrevendo porém estes mesmos valores de AB, BC, e AC em o n.° (34) sahe $3 \times 180° - (E + F + D) < 2 \times 180°$, e logo $D + E + F$ he $> 180°$.

Em todo o triangulo spherico . . . .

38 *Se hum lado for* $=$, $>$, *ou* $<$ *outro lado: será o seu angulo opposto* $=$, $>$, *ou* $<$ *o ang. opposto ao outro lado.*

39 *Se a somma de dous lados for* $=$, $>$, *ou* $< 180°$: *será a somma de seus angulos oppostos* $=$, $>$, *ou* $< 180°$.

Demonstrações. Na fig. 6. Se for (no triangulo ABC) o lado $AC = CB$, será o angulo $A = B$; porque tomando o ponto D no meio de AB, e tirando o arco CD de circulo-maximo, será (24) o triangulo ACD igual ao triangulo CDB, logo he $A = B$. A inversa se demonstra facilmente por meio dos triangulos supplementarios na fig. 3 do n.° (23).

Na fig. 6. Se for o angulo $ACB > A$, faça-se $ACD = A$, será $CD = DA$: porém $CD + BD$ he $> BC$, logo $DA + DB$ ou AB he $> BC$. A inversa desta se prova pelos triangulos supplementarios (fig. 3): pois (38)

AB

$AB > BC$ faz $E < F$, e por isso $FD < DE$, e logo (no triangulo ABC) he $ACB > BAC$.

As proposições porém do n.° (39) provão-se na fig. 2. assim: por ser (12) $AB + BD = 180°$, se no triangulo ABC for $AB + BC =, >$, ou $< 180°$, será $AB + BC =, >$, ou $< AB + BD$, logo $BC =, >$, ou $< BD$, e logo (38) o angulo D, ou $A =, >$, ou $< BCD$; ajuntando agora ACB a hum e outro membro, ter-se-ha $A + ACB =, >$, ou $< BCD + ACB$, mas $BCD + ACB$ he $= 180°$, logo $A + ACB$ he $=, >$, ou $< 180°$.

Scholios.

40 Em os numeros (30 e 31) se disse sómente com que dados podia hum triangulo ficar determinado, ou indeterminado; porém não se disse se a grandeza desses dados era, ou não arbitraria. Mas as proposições desde o n.° (32) até o n.° (37) mostrão, que a grandeza dos dados no triangulo não he arbitraria (*): com effeito sejão 80°, 70°, 160° os tres lados de hum triangulo spherico; vejamos se elles satisfazem ás condições dos numeros (32, 33, e 34); não satisfazem a todas, pois não he $80° + 70° > 160°$ conforme o n.° (33): logo não póde existir triangulo com esses dados. Sejão 20°, 120°, 150° os tres angulos dc hum triangulo spherico: vejamos se estes dados satisfazem ás condições dos numeros (35, 36, e 37); não satisfazem a todas; pois não he $120° - 20° < 180° - 150°$ conforme o n.° (36): logo não póde haver triangulo com esses dados.

Quando porém forem dados dous lados, e o angulo por elles comprehendido, ou dous angulos, e o lado adja-

(*) Veja-se a Nota II., em que se mostra, que não póde existir triangulo spherico sem as tres condições dos n.os (32, 33, e 34).

jacente; e for qualquer destas partes $< 180°$, existirá triangulo: como he facil de ver.

41 As proposições dos numeros (38 e 39) juntamente com a nota (*) servem para saber se sempre existirá triangulo, quando forem dados dous lados, e hum angulo opposto; ou dous angulos, e o lado opposto: Com effeito, no triangulo ACB (fig. 12.) Seja $B = 10°$, $AC = 120°$, $BC = 100°$; ora conforme o n.° (38) deve ser $B > A$, isto he, $A < 10°$, mas pelo n.° (39) deve ser $A + B > 180°$, isto he, $A > 170°$; logo será ao mesmo tempo $A < 10°$, e $A > 170°$, o que he impossivel: logo não póde haver triangulo com estes dados.

TRI-

(*) *Em hum triangulo spherico* DBC (fig. 2), denote P o arco perpendicular que de B se abaixaria sobre DCA; e *não seja* $BC = P$, *ou* $= BD$: será *o valor de* BC *intermediario entre o valor de* P, *e hum dos valores dos dois arcos* BD *e* $180° - BD$.

Com effeito (fig. 7) se for DCD' huma semicircumferencia perpendicular a outra $DABD'$, e for $CD > 90°$; será sempre $CD > CA > CB > CD'$, o que he facil de ver; e por isso (na fig. 4) sendo $AB > 90°$, e $P < 90°$, deverá ser $P < BC < AB$, para qne possa existir o triangulo BCD com o lado $CD < 180.°$ Assim se discorrerá nos outros casos, segundo os valores de P e BD comparados com $90°$.

TRIGONOMETRIA SPHERICA.

A Trigonometria spherica he a sciencia, que ensina a resolver o problema seguinte: *Das seis cousas, lados, e angulos de hum triangulo spherico dadas tres; achar huma das outras tres.* Mas para a solução deste problema faz-se necessario demonstrar a seguinte:

Proposição fundamental.

42 Em todo o triangulo spherico, *os senos dos lados são entre si, como os senos dos angulos oppostos.*

Demonstração. Seja (fig. 8) ABC hum triangulo spherico; o ponto D centro da sphera: tire-se BD: do vertice A conduza-se AE perpendicular ao plano CBD, e seja E o ponto, em que esta o encontra: imagine-se passar por AE hum plano, que seja perpendicular a BD no ponto F, e sejão EF e AF as intersecções deste plano com os planos CBD e ABD; serão EF e AF perpendiculares a BD: e por isso será (18) o angulo AFE $=$ ao angulo spherico ABC, e $AF =$ sen. AB. Mas por ser (*) $AE = AF \times$ sen. AFE, será $AE =$ sen. $AB \times$ sen. ABC; e discorrendo semelhantemente se acha ser $AE =$ sen. $AC \times$ sen. ACB, logo he . . .

sen. AB : sen. AC : : sen. ACB : sen. ABC. (**)

Do

(*) No triang. rectilin. rectang. AFE he 1 : Sen. AFE :: AF : AE.

(**) Vejamos se com os dados seguintes $AB = 10°$, $AC = 80°$, $C = 83°$ tomados arbitrariamente póde existir triangulo: ora por es-

Do triangulo complementario.

43 Na fig. 9 o triangulo ABH tenha o angulo AHB recto. Produzão-se BA e HA para E e D até ser cada hum $= 90°$ (*); será D (21) polo de BHF: logo os pontos D, E (distando de B cada hum $90°$) estão (21) em hum arco de circulo-maximo DEF, cujo polo será B: e será DA complemento de AH; EA de AB; DE de EF, isto he, do angulo (17) ABH; e o angulo ADE (que he o mesmo que o arco HF) de BH.

Estes triangulos ABH, ADE chamar-se-hão complementarios hum do outro.

APPLICAÇÃO

A' resolução dos triangulos sphericos rectangulos.

Problema.

44 DEstas seis cousas A, B, H *angulos*, e a, b, h *lados oppostos de hum triangulo spherico* ABH *rectangulo em* H, *dadas duas além do angulo recto, achar huma das outras tres.* (fig. 9).

Solução.

Por meio do triang. ADE *complementario* de ABH, e da *proporção dos senos* (42), se póde resolver o Problema. Mas

---

te n.° (42) acharemos, que he o logarithmo de sen. $ABC = 10,750432$; isto he, que he sen. $ABC >$ o raio, o que he impossivel; e apezar disto os num. (38 e 39) não mostrão a impossibilidade neste caso; mas ella se póde ver pela nota do n.° (41).

(*) Quando no triangulo spherico rectangulo houverem dous lados, cada hum dos quaes seja $> 90°$: produzão-se estes dous lados até concorrerem, e então formar-se-ha hum triangulo rectangulo, em que cada hum de seus lados será $< 90°$: e por isso está sempre no caso da fig. 9. do n.° (43).

Mas para facilitar as soluções serve de muito o theorema seguinte, $1 : \text{tg.}\, B :: \text{sen.}\, a : \text{tg.}\, b$, isto he, *o raio he para a tangente de hum dos angulos obliquos como o seno do lado adjacente para a tangente do lado opposto ao angulo.* Eis-aqui a investigação delle: no triangulo ADE se acha (42) a equação $\text{sen.}\, A.\ \text{sen.}\, AD = \text{sen.}\, ED$, a qual (no triangulo ABH) he $\text{sen.}\, A \cos. b = \cos. B$; mas (42) he $\text{sen.}\, A.\ \text{sen.}\, b = \text{sen.}\, B.\ \text{sen.}\, a$: logo he $\frac{\text{sen.}\, A.\ \text{sen.}\, b}{\text{sen.}\, A.\ \cos. b} = \frac{\text{sen.}\, B}{\cos. B}\ \text{sen.}\, a$, ou $\text{tg.}\, b = \text{tg.}\, B.\ \text{sen.}\, a$. Achar-se-ha por tanto a resolução deste Problema em todos os casos possiveis na Taboada seguinte:

45

Taboa para a resolução dos triangulos sphericos rectangulos.

Partes do triangulo	Proporções que se hão de fazer (*).
a, b, h	$1 : \cos. a :: \cos. b : \cos. h$. (a)
B, A, h	$1 : \text{tg.}\, A :: \cos. h : \cot. B$. (b)
A, b, B	$1 : \text{sen.}\, A :: \cos. b : \cos. B$. (c)
h, a, B	$1 : \cot. a :: \cos. B : \cot. h$. (d)
h, A, a	$1 : \text{sen.}\, A :: \text{sen.}\, h : \text{sen.}\, a$. (e)
B, b, a	$1 : \text{tg.}\, B :: \text{sen.}\, a : \text{tg.}\, b$. (f)

(*) As letras a e b denotão os lados do angulo recto, e h a hypothenusa; A e B os angulos obliquos, oppostos aos lados a e b cada hum a cada hum: e por isso póde-se enunciar qualquer das proporções da Taboa (por ex.) a 1.ª assim: o raio he para o Coseno de hum dos lados do angulo recto como o Coseno de outro lado para o Coseno da hypothenusa. E assim a respeito das outras.

Demonstrações das proporções da Taboa. Pois he (no triangulo ADE) sen. AED ou 1 : sen. D : : sen. DA : sen. AE; logo (no triangulo ABH) será 1 : cos. a : : cos. b : cos. h. No triangulo ADE temos 1 : tg. A : : sen. AE : tg. ED; logo (no triangulo ABH) será 1 : tg. A : : cos. h : cot. B. No triangulo ADE temos 1 : tg. D : : sen. ED : tg. AE; logo (no triangulo ABH) será 1 : cot. a : : cos. B : cot. h. A demonstração das proporções (c), (e), e (f) já ficou dada em o n.º (44).

Scholio.

46 Se no triangulo rectangulo ABH (fig. 9) considerarmos sómente as cinco grandezas a, B, h, A, b; e não o angulo recto H, escriptas em roda de huma circumferencia como se vê na (fig. 10), e chamar-mos á grandeza h, *media* a respeito das duas *conjunctas* A e B; e tambem *media* a respeito das duas *separadas* a e b; e entendermos o mesmo a respeito das outras grandezas, tambem será B media a respeito das conjunctas a e b; e media a respeito das separadas A e b, &c. Isto posto: eis-aqui a regra de Néper para a resolução dos triangulos sphericos rectangulos.

Regra de Néper

Tome-se o complemento dos lados do ang. recto: será

$$\textit{O Coseno da Media} = \textit{ao producto dos} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Senos das} \\ \textit{Separadas.} \end{array} \right.$$

$$\textit{O Coseno da Media} = \textit{ao producto das} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Cotangentes das} \\ \textit{Conjunctas.} \end{array} \right.$$

A demonstração desta regra he facil de dar pelas proporções da Taboa (45); pondo $a = 90^\circ - a'$, $b = 90^\circ - b'$; e mudando ao depois cos. $(90^\circ - a')$ em sen. a',

e

e tg. $(90° - b')$ em cot. b'; ter-se-ha . . . . .
$\cos. h = \text{sen.}\, a'\ \text{sen.}\, b'$, $\cos. b = \cot. B \cot. A$, &c. E assim a respeito das demais.

Advertencias.

47 Quando no triangulo spherico rectangulo for dado hum dos angulos obliquos com o lado opposto; e se pede a hypothenusa, ou o terceiro angulo, ou o lado adjacente; em qualquer destes tres casos o problema ficará indeterminado (excepto o caso de serem iguaes o angulo, e o lado opposto dados) como se póde ver pelo n.° (31), ou tambem pelas analogias (e), (c), e (f) do n.° (45), que dão $\text{sen.}\, h = \frac{\text{sen.}\, a}{\text{sen.} A}$; $\text{sen.}\, A = \frac{\cos.\, B}{\cos.\, b}$; $\text{sen.}\, a = \frac{\text{tg.}\, b}{\text{tg.}\, B}$. Com effeito he $\text{sen.}\, b = \text{sen.}\, (180° - h)$, &c., logo não se sabe que arco resolve o problema. Mas disto não se segue que t do o arco achado por hum seno deva ter sempre dous valores.

48 Vejamos por tanto se os valores das outras partes do triangulo ABH, achadas por hum seno ficão, ou não determinados. A proporção (e) do n.° (45) dá $\text{sen.}\, a = \text{sen.}\, h.\ \text{sen.}\, A$; e $\text{sen.}\, A = \frac{\text{sen.}\, a}{\text{sen.}\, h}$; mas se for (por exemplo) $A > H$, será $A + H > 180°$, e logo (38) e (39) será $a > h$, e $a + h > 180°$; isto he, $a > h$, e $(180° - a) < h$; logo o angulo he a, e não $(180° - a)$. O mesmo tem lugar a respeito dos dous valores de A. Assim o problema ficará pelo n.° (38) determinado neste caso.

49 A respeito das demais partes do triangulo ABH, como são achadas por hum coseno, tangente, ou cotangente ficarão determinadas as suas grandezas pelos sinaes + ou — destas linhas trigonometricas.

APPLICAÇÃO

A' resolução dos triangulos sphericos obliquangulos.

Definições.

50 Dos dous arcos CD e CD' (fig. 7) de circulo-maximo, que do vertice C do triangulo spherico ABC, se pódem conduzir perpendicularmente á base AB; chamar-se-ha *arco perpendicular* do triangulo aquelle, que com os dados do triangulo proposto formar hum triangulo rectangulo, que se possa resolver; por exemplo, se no triangnlo ABC forem dados o angulo B, e o lado BC, será o arco-perpendicular CD, e não CD'.

51 Como o arco-perpendicular constitue sempre hum triangulo somma, ou differença de dous triangulos rectangulos; e a base somma, ou differença de dous arcos; chamar-se-hão estes dous triangulos *triangulos-parciaes* do proposto; e os dous arcos *segmentos da base*; e chamando primeiro segmento ao segmento BD adjacente ao angulo dado B; chamar-se-ha segundo segmento a differença $AB - BD$, ainda no caso de ser $BD > AB$.

Problema geral.

52 *Destas seis cousas, a b, c lados, e A, B, C angulos oppostos do triangulo ABC [fig. 6.], dadas tres; achar huma das outras tres.*

Solução.

Por meio do triangulo (23) supplementario, e dos triang. parciaes do proposto, se póde resolver o Problema; (*).

(*). Mas para facilitar as soluções servem de muito os principios seguintes:

53

Principios para a resolução dos triangulos sphericos obliquangulos.

Seja x o segmento, que for lado do angulo B será (p) $\text{tg.}\,x = \text{tg.}\,a \cos.B$: logo será

$$\left.\begin{array}{l}(q)\ldots\ \dfrac{\text{sen.}\,(c-x)}{\text{sen.}\,x}=\dfrac{\text{cot.}\,A}{\text{cot.}\,B}\\[2ex](r)\ldots\ \dfrac{\cos.\,(c\backsim x)}{\cos.\,x}=\dfrac{\cos.\,b}{\cos.\,a}\end{array}\right\}(^{**})$$

Seja $P = \dfrac{a+b+c}{2}$ será

$$(s)\ldots\ \text{tg.}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,(P-a)\ \text{sen.}\,(P-c)}{\text{sen.}\,(P-b).\ \text{sen.}\,P}}$$

Demonstrações. Pela Taboa do n.° (45), ou pelo n.° (46) se acha facilmente (no triangulo-parcial BCD, sendo $BD = x$) que $\text{tg.}\,CD$ he $= \dfrac{\text{sen.}\,x}{\text{cot.}\,B}$; e $\cos.\,CD = \dfrac{\cos.\,a}{\cos.\,x}$: e (no triangulo-parcial ACD, fig. (6 e 7) que $\text{tg.}\,CD$ he $= \dfrac{\text{sen.}\,(c-x)}{\text{cot.}\,A}$ ou $= \dfrac{\text{sen.}\,(x-c)}{\text{cot.}\,(180^\circ - A)}$; e $\cos.CD = \dfrac{\cos.\,b}{\cos.(c-x)}$ ou $= \dfrac{\cos.\,b}{\cos.\,(x-c)}$: logo igualando os dous valores de $\text{tg.}\,CD$, e de $\cos.\,CD$ ter-se-hão as equações (q) e (r).

A

(*) Ve-se pelos num. (30 e 31) que (não sendo dados os tres lados; ou os tres angulos) em qualquer outra combinação de dados de hum triangulo (fig. 11 e 12) ABC sempre entrará hum lado BC com hum angulo B: e por isso (abaixando a perpendicular CD) se poderá (45) calcular todas as demais partes do triangulo rectangulo parcial CBD; e ao depois será facil resolver o outro triangulo rectangulo ACD.

(**) Os dous principios (q) e (r) podem-se enunciar assim: os senos dos segmentos da base são entre si, como as cotangentes dos angulos adjacentes; e os cosenos dos segmentos, como os cosenos dos lados.

A investigação da equação (s) he a seguinte: pois he $\frac{\cos.\,(c-x)}{\cos.\,x} = \frac{\cos.\,b}{\cos.\,a}$, logo $\frac{\cos.\,c\,\cos.\,x + \text{sen.}\,c\,\text{sen.}\,x}{\cos.\,x} = \frac{\cos.\,b}{\cos.\,a}$; ou $\cos.\,c + \text{sen.}\,c.\,\text{tg.}\,x = \frac{\cos.\,b}{\cos.\,a}$; mas $\text{tg.}\,x = \text{tg.}\,a\,\cos.\,B$; logo será $\cos.\,b = \cos.\,c\,\cos.\,a + \text{sen.}\,c\,\text{sen.}\,a\,\cos.\,B$. Nesta escrevendo $1 - 2\,\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}B$ em lugar (*) de $\cos.\,B$; teremos $\cos.\,b = \cos.\,(a-c) - 2\,\text{sen.}\,c\,\text{sen.}\,a\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}B$; e logo he $\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}B = \frac{\cos.\,(a-c) - \cos.\,b}{2\,\text{sen.}\,c\,\text{sen.}\,a}$, mas he $\cos.\,(a-c) - \cos.\,b = 2\,\text{sen.}\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\text{sen.}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)$ que he $= 2\,\text{sen.}\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)\text{sen.}\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)$ como facilmente se verifica: logo, pondo $\frac{a+b+c}{2} = P$, ter-se-ha . . .

$$\text{(A)} \;.\;.\;.\; \text{Sen.}^2\tfrac{1}{2}B = \frac{\text{sen.}\,(P-c).\,\text{sen.}\,(P-a)}{\text{sen.}\,c.\,\text{sen.}\,a}.\;(^{**})$$

Pelo mesmo estilo se achará ser . . .

$$\text{(B)} \;.\;.\;.\; \text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B = \frac{\text{sen.}\,(P-b)\,\text{sen.}\,P}{\text{sen.}\,c.\,\text{sen.}\,a}.$$

E dividindo a equação (A) pela (B) achar-se-ha . . . .

$$\text{(C)} \;.\;.\;.\; \text{Tg.}^2\tfrac{1}{2}B = \frac{\text{sen.}\,(P-c).\,\text{sen.}\,(P-a)}{\text{sen.}\,(P-b).\,\text{sen.}\,P}$$

: e desta extrahindo a raiz quadrada achar-se-ha a equação (s).

RE-

(*) Pela formula (m) do n.° (48) da Trigon. rectilinea. E para o calculo que se segue veja-se a form. (c) do n.° (43); e a form. (h) do n.° (44) da dita Trigon.

(**) Esta formula (A) he facil de calcular por logarithmos assim: $\log.\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}(\text{C.}\log.\,\text{sen.}\,c + \text{C.}\log.\,\text{sen.}\,a + \log.\,\text{sen.}\,(P-c) + \log.\,\text{sen.}\,(P-a))$.

RESOLUÇÃO DOS TRIANGULOS SPHERICOS.

Problemas que são determinados pelo n.° (30).

Problema I.

54 DAdos *os tres lados:*
achar *hum dos angulos.*
Sejão (a, b, c) os lados dados:
Achar o angulo (B).

Solução.

Ache-se $P = \frac{1}{2}(a + b + c)$: ao depois calcule-se $\frac{1}{2}B$ pela formula (s); ou por huma das duas (A), (B) do n.° antecedente, tendo porém nestas duas ultimas attenção ao que se disse em o n.° (49) da Trigon. rect.: logo será $B = 2 \times \frac{1}{2}B$.

Advertencia.

55 Note-se que $P - c$ por ser $= \frac{a + b - c}{2}$ he positivo; pois (33) he $a + b > c$: e por isso são sempre positivos os restos $P - a$, $P - b$. Logo o valor do seno, coseno, ou tangente de $\frac{1}{2}B$ achado pelas formulas do n.° (53) não póde ser imaginario. A respeito porém dos sinaes $\pm$ do valor real de tg.$\frac{1}{2}B$, deve-se tomar o positivo, porque devendo (35) ser $B < 180°$, será $\frac{1}{2}B < 90°$, logo he tg.$\frac{1}{2}B$ positiva. (*)

Pro-

(*) Sendo $a = 12°$, $b = 15°$, $c = 23°$: acha-se $B = 36° 13' 22'',9$.

Problema II. e III.

56 DAdos *dous lados, com o angulo comprehendido: achar hum dos outros dous angulos; ou o terceiro lado.* Sejão (a, c) os lados, e (B) o angulo dados: Achar o angulo (A); ou o lado (b). (fig. 6).

Soluções.

Ache-se x pela form. $\text{tg.}\, x = \text{tg.}\, a.\ \cos. B$: e depois

se achará $\begin{cases} A \text{ pela form. } (q) \ldots \text{Cot.}\, A = \dfrac{\text{sen.}\,(c-x).\ \cot B}{\text{sen.}\, x} \\ b \text{ pela form. } (r) \ldots \cos.\, b = \dfrac{\cos.\,(c \backsim x).\ \cos.\, a}{\cos.\, x}. \end{cases}$

Advertencia.

57 Para determinar a grandeza dos arcos x, A, b deve-se ter presente o que ficou dito em o n.° (23) da Trig. rect.; e tambem que o seno de hum arco negativo he negativo; e por isso se for $x > c$, em vez de sen. ($c - x$) se escreverá — sen. ($x - c$) pelo n.° (21) da Trig. rect.: e ao depois se attenderá ao sinal de cot. A para achar a grandeza de A (*). Se b for muito pequeno, deve-se (n.° (49) da Trig. rect.) calcular primeiramente A, e ao depois b pela proporção sen. A : sen. B :: sen. a : sen. b. do n.° (42).

Pro-

(*) Seja $\begin{cases} a = 10.° \ 0.' \ 0'' \\ c = 160. \ 8. \ 56,2 \\ B = 170. \ 0. \ 0 \end{cases}$ Achar-se-ha $\begin{cases} x = 170.° \ 8.' \ 56'',2 \\ A = 9. \ 51. \ 19,7 \\ b = 169. \ 51. \ 12,1 \end{cases}$

Advirta-se que sen. ($c - x$) (= sen. ($-10°$)) = $-$ sen. $10°$; cot. B (= cot. $170°$) = $-$ cot. $10°$; e por isso cot. A sahe positiva; e logo $A < 90.°$

Problema. IV.

58 DAdos *os tres angulos:*
achar *hum dos lados.*
Sejão D, E, F os angulos dados:
Achar o lado EF. (fig. 3).

Solução.

Tomem-se os supplementos dos angulos dados D, E, F; ter-se-hão no triangulo ABC (supplementario de DEF) os tres lados AC, AB, e BC: logo (achando o angulo B pelo n.° (54), e tomando o seu supplemento) ter-se-ha o lado pedido EF.

Problema V. e VI.

59 DAdos *dous angulos, com o lado adjacente:*
achar *hum dos outros dous lados;* ou *o terceiro angulo.*
Sejão D, E os angulos, e DE o lado dados:
Achar o lado EF; ou o angulo F. (fig. 3).

Solução.

Este problema reduz-se ao do n.° (56) por meio do triangulo ABC supplementario de DEF: e sendo no triangulo ABC resolvido o Probl. II. e III., se passará ao depois para o triangulo proposto DEF, como se fez em o n.° antecedente.

Problemas que podem ficar indeterminados pelo n.° (31).

Probl. VII., VIII., e IX.

60 DAdos *dous lados com hum angulo opposto:* achar *o angulo opposto ao outro lado*, ou *o terceiro lado;* ou *o angulo por elles comprehendido.*

Sejão (a, b) os lados, e (B) o angulo dados: Achar o ang. (A); ou o lado (c); ou o ang. (C).

Soluções.

(I). Achar-se-ha A pela form. $\text{sen.}\, A = \frac{\text{sen.}\, a\ \text{sen.}\, B}{\text{sen.}\, b}$.

(II). Ache-se x pela form. $\text{tg.}\, x = \text{tg.}\, a \cos.\, B$: e $(c \backsim x)$ pela formula $\cos.\, (c \backsim x) = \frac{\cos.\, x \cos.\, b}{\cos.\, a}$; logo será $c = x \pm (c \backsim x)$.

(III). Achar-se-ha C por meio do triangulo supplementario do proposto: pois resolvendo no supplementario a questão pela solução (III) do n.° (64) se passa ao depois para o triangulo proposto.

Advertencias

61 A solução (I) póde ficar indeterminada, por ser achada por hum seno; e o he realmente, se a Prop. do n.° (38) a não determina.

62 A solução (II) póde ficar indeterminada; pois não se sabe qual dos dous sinaes tem lugar na expressão $x \pm (c \backsim x)$ que he $= c$: por tanto esta questão ficará indeterminada, se a condição de ser (o lado c positivo, e menor que 180°) a não determina: isto he, não deve ser c, ou o seu valor $x + (c \backsim x) \geqq 180°$;

pois

pois se o for, então será $c = x - (c \backsim x)$; nem tambem deve ser c, ou o seu valor $x - (c \backsim x)$ negativo, pois se o for, então será $c = x + (c \backsim x)$.

63 A solução (III) foi aqui posta, só a fim de ver o número das questões, que se pódem resolver com os mesmos dados.

Probl. X., XI., e XII.

6 DAdos *dous angulos, com o lado opposto: achar o lado opposto ao outro angulo*, ou *o terceiro angulo; ou o lado adjacente aos angulos dados.*

Sejão (A, B) os angulos, e (a) o lado dados: Achar o lado (b); ou o ang. (C); ou o lado (c).

Soluções

(I). Achar-se-ha b pela (42) form. $\text{sen.}\,b = \frac{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,B}{\text{Sen.}\,A}$.

(II). Achar-se-ha C por meio do triangulo supplementario; e da solução (II) do n.° (60).

(III). Ache-se x pela form. $\text{tg.}\,x = \text{tg.}\,a\ \cos.B$: achar-se-ha o arco $(c-x)$ pela form. $\text{sen.}\,(c-x) = \frac{\text{sen.}\,x\ \cot.A}{\cot.\,B}$: logo será $c = x + (c - x)$ ou $= x + [180° - (c - x)]$; ou tambem $c = x - (x-c)$ ou $= x - [180° - (x-c)]$; conforme sahir sen. $(c - x)$ positivo, ou negativo.

Advertencias.

65 A solução (I) póde ficar indeterminada, por ser $\text{sen.}\,b = \text{sen.}\,(180° - b)$; e o he realmente, se a proposição do n.° (38) a não determina.

66 A solução (II) depende da advertencia do n.° (62).

67 A solução (III) póde ficar indeterminada por ser o arco $(c - x)$ achado por hum seno; e o he realmente, se a condição de ser ($c < 180°$, e positivo) a não de-

determina; advertindo porém que se o valor de sen. $(c-x)$ sahir negativo, o arco será $(x-c)$, e não $(c-x)$: e por isso se sabe, se o arco achado se deve juntar, ou subtrahir do segmento x; mas fica-se na incerteza a respeito dos dous valores desse arco, por ser achado por hum seno.

EXEMPLOS.

I.

No triang. ABC (fig. 6): Seja $a = 88.^\circ\ 39.'\ 45''$; $b = 70.^\circ\ 27.'\ 38''$; $c = 51.^\circ\ 17.'\ 35''$. Pede-se o ang. B? Pelo n.° 54, será . . . .

	$b = 70.^\circ 27.' 38''$		
	$c = 51.\ 17.\ 35$	. . . C. log. Sen.	$= 0.1077080$
	$a = 88.\ 39.\ 45$	. . . C. log. Sen.	$= 0.0001184$
Som.	$= 210.\ 24.\ 58$		
$\frac{1}{2}$ Som.	$= 105.\ 12.\ 29$		
$\frac{1}{2}$ Som. $- c$	$= 53.\ 54.\ 54$	. . . . log. Sen.	$= 9.9074136$
$\frac{1}{2}$ Som. $- a$	$= 16.\ 32.\ 44$	. . . . log. Sen.	$= 9.4545129$
		Som.	$= 19.4697529$
		log. Sen. $\frac{1}{2} B = \frac{1}{2}$Som.	$= 9.7348764$

Logo $\frac{1}{2} B = 32.^\circ\ 53.'\ 40''$; e logo $B = 65.^\circ\ 47.'\ 20''$.

II.

No triang. rectang. ABH (fig. 9): Seja o ang. $A = 38.^\circ\ 42.'\ 25''$; $a = 11.^\circ 54.' 45'',6$; achar a hypothenusa h? será . . . .

$$\text{Sen. } 38.^\circ\ 42.'\ 25'' : \text{Sen. } 11.^\circ\ 54.'\ 45'',6 :: 1 : \text{Sen. } h.$$

Feito o calculo achar-se-ha ser $h = 19.^\circ\ 16.'\ 28'',3$.

NO-

NOTAS Á TRIGONOMETRIA SPHERICA.

NOTA I.

SE hum arco de circulo-maximo $< 180°$, tiver os mesmos extremos, que tem outro arco de circulo-menor: o arco de circulo-maximo será menor, que o arco de circulo-menor.

Com effeito: imagine-se que (fig. 11) á roda da corda AD (commum aos dous arcos AED de circulo-maximo, e AED de circulo-menor) gire o plano de circulo-menor até se ajustar com o plano de circulo-maximo; digo, que o arco do circulo-menor hade cahir por fóra do arco do circulo-maximo, como representa a fig. 11: porque os centros O e K destes dous circulos devem ficar na perpendicular KO ao meio da corda AD, de cujos extremos A e D distará menos o centro O do circulo menor, que o centro K do circulo-maximo, por ser o raio $AO < AK$. Sejão E e B os pontos em que KO encontra os dous arcos AED, e ABD. Pois he $OA = OB$, e $AK = KE$; e no triangulo AOK he $KO + OA > AK$, logo será $KO + OB$, ou $KB > KE$; e logo o ponto B do circulo-menor cahe fóra do circulo-maximo, por isso o arco do circulo-maximo (sendo interior) he evidentemente menor, que o do circulo-menor.

NOTA II.

Para que se possa formar hum triang. spher. com tres arcos de circ. max. (que lhe possão servir de lados) he preciso que seja; Qualquer delles $< 180°$; A somma de dous $>$ o terceiro; E a somma dos tres $< 360°$.

Com effeito: marquem-se na circumferencia (fig.12) de de hum circulo-maximo tres arcos *AB*, *BC*, e *CD* com as tres sobreditas condições. Do ponto *C* como polo, e com a distancia *CD* descreva-se a semicircumferencia *DEd*, e do ponto *B* como polo, e com *BA* descreva-se outra *AEa*: estas duas semicircumferencias (descriptas em hum hemisferio) devem cortar-se em hum só ponto *E*, por ficarem os extremos de qualquer dellas para partes oppostas a respeito da outra. Porém se faltasse alguma das ditas condições não podia existir triangulo; com effeito: se a somma dos tres arcos fosse $=$, ou $> 360°$; então, ou as duas semicircumferencias *AEa*, e *DEd* sómente se tocavão, ou não se cortavão, por ficarem os extremos de qualquer dellas para a mesma parte a respeito da outra. E o mesmo acconteceria se a somma dos dous arcos fosse $=$, ou $<$ o terceiro. Logo não póde existir triangulo sem as tres mencionadas condições.

AP-

APPENDICE.

A Relação entre quatro das seis partes de hum triangulo spherico póde ser dada por huma equação, ou formula geral. Estas formulas geraes são as quatro seguintes:

Formulas finitas dos Triangulos sphericos.

(A). $\text{Sen.}\, b.\ \text{sen.}\, A = \text{sen.}\, a.\ \text{sen.}\, B.$

(B). $\text{Cos.}\, b = \text{sen.}\, a.\ \text{sen.}\, c.\ \cos.\, B. + \cos.\, a.\ \cos.\, c.$

(C). $\text{Cot.}\, a.\ \text{sen.}\, c. = \text{sen.}\, B.\ \cot.\, A. + \cos.\, c.\ \cos.\, B.$

(D). $\text{Cos.}\, B. = \text{sen.}\, A.\, \text{sen.}\, C.\ \cos.\, b. - \cos.\, A.\ \cos.\, C.$

Demonstrações. Das formulas (q) e (r) do n.º (53), eliminando x por meio da equação (p); ter-se-hão as duas formulas (B) e (C): e na form. (B) pondo $b = 180° - B$, $a = 180° - A$, $c = 180° - C$, $B = 180° - b$, ter-se-ha a formula (D); como he facil de ver.

Formulas differenciaes dos Triangulos sphericos.

(1). $dA.\ \cot.\, A + db.\ \cot.\, b = dB.\ \cot.\, B + da.\ \cot.\, a.$

(2). $db = da.\ \cos.\, C + dc.\ \cos.\, A + dB.\ \text{sen.}\, A.\ \text{sen.}\, c.$

(3). $da.\ \text{sen.}\, C = dA.\ \text{sen.}\, b + \begin{cases} dc.\ \text{sen.}\, A.\ \cos.\, b \\ + dB.\ \text{sen.}\, a.\ \cos.\, C. \end{cases}$

(4). $dB = -dA.\, \cos.\, c - dC.\, \cos.\, a + db.\, \text{sen.}\, a.\ \text{sen.}\, C.$

Demonstrações. A formula differencial (1) se acha, dividindo a differencial da formula (A) pela mesma formula finita (A). A formula (2) se acha, differenciando a formula (B): tirando ao depois o valor de db; e fechando entre parenthesis o que multiplica da e dc: ao depois expulsando $\cos.\, B$ pela mesma formula (B): acha-

se,

se, que o coefficiente de *da* he $\frac{\cos. c - \cos. a \cos. b}{\text{sen}. a. \text{sen}. b}$ que he $= \cos. C$; e o mesmo se faz a respeito do coefficiente de *dc*; e finalmente, escrevendo sen. *B*. sen. *a*. em lugar de sen. *b*. sen. *A*; achar-se-ha a formula (2).

A formula (3) se acha, differenciando a formula (C); e multiplicando-a ao depois por sen. *A*. sen. *a*, achar-se-ha que o coefficiente de *dc* he cos. *c*. cos. *a*. + sen. *c*. sen. *a*. cos. *B* que he $= \cos. b$; e o mesmo se faz a respeito do coefficiente de *dB*; e finalmente eliminando os denominadores dos coefficientes de *dA* e *da* por meio da formula (A), achar-se-ha a equação (3). A demonstração da formula (4) he semelhante a da formula (2).

Advertencias.

Estas formulas differenciaes pódem servir para calcular o effeito, que produz huma pequena variação de huma das partes dadas sobre a parte calculada de hum triangulo spherico; mas para fazer uso destas formulas he preciso ver; se as variações (que entrão na formula de que se fizer uso) são todas addictivas, ou todas subtractivas; ou humas addictivas, e outras subtractivas para se attender aos sinaes dessa formula; porque estas formulas differenciaes são deduzidas na hypotese de terem o mesmo sinal as differenciaes das partes do triangulo. Note-se tambem, que as variações angulares *dA*, *db*, &c. que entrão nestas formulas podem ser tomadas em partes d'hum gráo; e não he preciso o tomallas em partes do raio = 1: porque os angulos, e lados de hum triangulo spherico são medidos por hum mesmo circulo.

FIM.

CATALOGO

Das Obras já impressas, e mandadas publicar pela Academia Real da Sciencias de Lisboa; com os preços, por que cada huma dellas se vende brochada.

dos Originaes da Torre do Tombo com permissão de S. Magestade, e vertidos em Portuguez, de ordem da Academia, por Fr. João de Sousa, 1 vol. 4.° 480

XVII. Observações sobre as principaes causas da decadencia dos Portuguezes na Asia, escritas por Diogo de Couto em fórma de Dialogo, com o titulo de *Soldado Pratico*, publicadas por ordem da Academia Real das Sciencias, por Antonio Caetano do Amaral, Socio Effectivo da mesma, 1 tom. 8.° 480

XVIII. Flora Cochinchinensis, sistens Plantas in Regno Cochinchinae nascentes. Quibus accedunt aliae observatae in Sinensi Imperio, Africa Orientali, Indiaeque locis variis; labore ac studio Joannis de Loureiro, Regiae Scientiarum Academiae Ulyssiponensis Socii: Jussu Academiae in lucem edita, 2 vol. 4.° *mai.* 2400

XIX. Synopsis Chronologica de Subsidios, ainda os mais raros, para a Historia, e Estudo critico da Legislação Portugueza; mandada publicar pela Academia Real das Sciencias, e ordenada por José Anastasio de Figueiredo, Correspondente do Numero da mesma Academia, 2. vol. 4.° 1800

XX. Tratado de Educação Fysica para uso da Nação Portugueza, publicado por ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco José de Almeida, 1 vol. 4.° 360

XXI. Obras Poeticas de Pedro de Andrade Caminha, publicadas de ordem da Academia, 1 vol. 8.° 600

XXII. Advertencias sobre os abusos, e legitimo uso das Agoas mineraes das Caldas da Rainha, publicadas de ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco Tavares, Socio Livre da mesma Academia, *folh.* 4.° 120

XXIII. Memorias de Litteratura Portugueza, 8 vol. 4.° . . . 6400

XXIV. Fontes Proximas do Codigo Filippino, por Joaquim José Ferreira Gordo, 1 vol. 4.° 400

XXV. Diccionario da Lingoa Portugueza, 1 vol. *fol. mai.* . . 4800

XXVI. Compendio da Theorica dos Limites, ou Introducção ao Methodo das Fluxões, por Francisco de Borja Garção Stockler, Socio da Academia, 8.° 240

XXVII. Ensaio Economico sobre o Commercio de Portugal, e suas Colonias, offerecido ao Serenissimo Principe da Beira o Senhor D. Pedro, e publicado de ordem da Academia Real das Sciencias, pelo seu Socio D. José Joaquim da Cunha de Azeredo Coutinho. *Segunda Edição corrigida, e accrescentada pelo mesmo Auctor*, 1 vol. 4.° 480

XXVIII. Tratado de Agrimensura, por Estevão Cabral, Socio da Academia, em 8.° 240

XXIX. Analyse Chymica da Agoa das Caldas, por Guilherme Withering, em Portuguez e Inglez, *folh.* 4.° 240

XXX.

XXX. Principios de Tactica Naval, por Manoel do Espirito Sancto Limpo, Correspondente do Numero da Academia, 1. vol. 8.º 480

XXXI. Memorias da Academia Real das Sciencias, 5 vol. e 1.ª parte do 6.º vol. *fol.* 11000

XXXII. Memorias para a Historia da Capitania de S. Vicente, 1 vol. 4.º 480

XXXIII. Observações Historicas e Criticas para servirem de Memorias ao systema da Diplomatica Portugueza por João Pedro Ribeiro, Socio da Academia, Part. 1. 4.º 480

XXXIV. J. H. Lambert Supplementa Tabularum Logarithmicarum, et Trigonometricarum, 1. vol. 4.º 960

XXXV. Obras Poeticas de Francisco Dias Gomes, 1 vol. 4.º 800

XXXVI. Compilação de Reflexões de Sanches, Pringle &c. sobre as Causas e Prevenções das Doenças dos Exercitos, por Alexandre Antonio das Neves: para distribuir-se ao Exercito Portuguez, *folh.* 12.º . . . . *gr.*

XXXVII. Advertencias dos meios para preservar da Peste. *Segunda edição accrescentada com o* Opusculo de Thomaz Alvares sobre a Peste de 1569, *folh.* 12.º 120

XXXVIII. Hippolyto, Tragedia de Euripides, vertida do Grego em Portuguez, pelo Director de huma das Classes da Academia; *com o texto*, 1 vol. 4.º 480

XXXIX. Taboas Logarithmicas, calculadas até á setima casa decimal, publicadas de ordem da Real Academia das Sciencias por J. M. D. P., 1 vol. 8.º 480

XL. Indice Chronologico Remissivo da Legislação Portugueza posterior á publicação do Codigo Filippino, por João Pedro Ribeiro, 5 vol. 4.º 4500

XLI. Obras de Francisco de Borja Garção Stockler, Secretario da Academia Real das Sciencias, 1.º vol. 8.º 800

XLII. Collecção dos principaes Auctores da Historia Portugueza, publicada com notas pelo Director da Classe de Litteratura da Academia Real das Sciencias, 8 Tom. em 8.º . . . 4800

XLIII. Dissertações Chronologicas, e Criticas, por João Pedro Ribeiro, 3 vol. 4.º 2400

O Tomo IV. Parte I. 400

XLIV. Collecção de Noticias para a Historia e Geografia das Nações Ultramarinas, Tom. I.º Numeros 1.º, 2.º, 3.º, e 4.º 600

O Tomo II. 800

XLV. Hippolyto, Tragedia de Seneca; e Phedra, Tragedia de Racine: traduzidas em verso, pelo Socio da Academia Sebastião Francisco de Mendo Trigozo, *com os textos.* . . . 600

XLVI. Opusculos sobre a Vaccina: Numeros I. até XIII. . 300

XLVII. Elementos de Hygiene, por Francisco de Mello Franco, co, Socio da Academia. *Segunda edição corrigida, e augmentada pelo mesmo Auctor*, 1 vol. 4.º 600

XLVIII. Memoria sobre a necessidade e utilidades do Plantio de novos bosques em Portugal, por José Bonifacio de Andrada e Silva, Secretario da Academia Real das Sciencias, 1 vol. 4.º 400

XLIX. Taboadas Perpetuas Astronomicas para uso da Navegação Portugueza, 1 vol. 4.º 600

L. Elementos de Geometria, por Francisco Villela Barbosa, Socio da Academia Real das Sciencias. *Segunda edição*, 1 vol. 8.º 960

LI. Memoria para servir de Indice dos Foraes das Terras do Reino de Portugal, e seus dominios: por Francisco Nunes Franklin, 1 vol. 4.º 480

LII. Tratado de Policia Medica, no qual se comprehendem todas as materias, que podem servir para organizar hum Regimento de Policia de Saude para o interior do Reino de Portugal, por José Pinheiro de Freitas Soares, 4.º 800

LIII. Tratado de Hygiene Militar e Naval, pelo Socio Joaquim Xavier da Silva, 1 vol. 4.º 400

LIV. Tratado de Trigonometria Rectilinea e Spherica, por Mattheus Valente do Couto, 1 vol. 4.º 300

Estão no prelo as seguintes.

Documentos para a Historia da Legislação Portugueza, pelos Socios da Academia, João Pedro Ribeiro, Joaquim de Santo Agostinho de Brito Galvão, e outros.

Collecção dos principaes Historiadores Portuguezes.

Collecção de Noticias para a Historia e Geografia das Nações Ultramarinas.

Taboas Trigonometricas, por J. M. D. P.

Obras de Francisco de Borja Garção Stockler, Tom. 2.

Obras escolhidas do Padre Vieira.

Grammatica Philosophica da Lingua Portugueza, ou principios da Grammatica Geral applicados á nossa Linguagem, por Jeronymo Soares Barboza.

Principios de Musica, pelo Socio Rodrigo Ferreira da Costa.

Ensaio Dermosographico, ou Succinta e Systematica Descripção das Doenças Cutaneas, &c. por Bernardino Antonio Gomes.

Vendem-se em Lisboa *nas lojas dos* Mercadores de Livros na Rua das Portas de Santa Catharina; *e em* Coimbra, *e no* Porto *tambem pelos mesmos preços.*

ADDITAMENTO A' PAG. V.

Outras demonstrações dos Numeros (18) e (19); e são as seguintes.

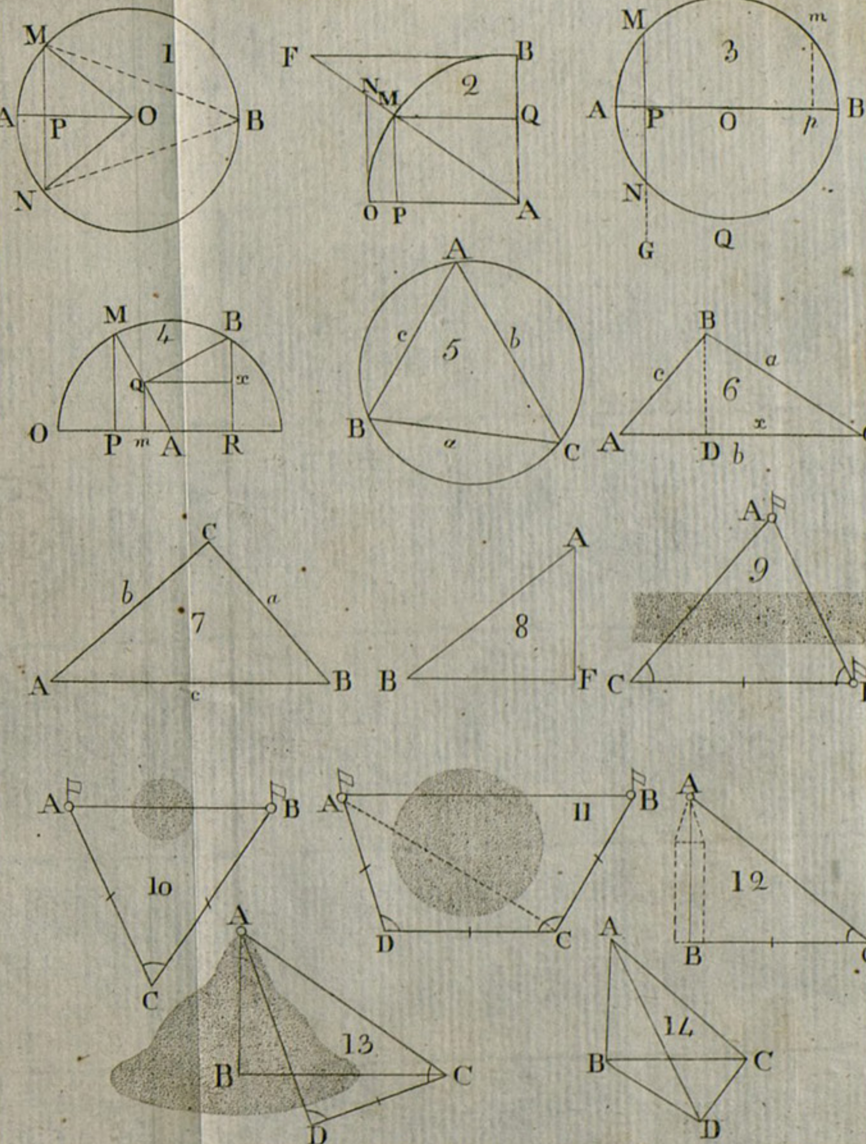
$\text{Cos.}\,(-A) = \text{Sen.}\,(90^\circ - [-A]) = \text{Sen.}\,(90^\circ + A) = \text{Sen.}\,(90^\circ - A) = \text{Cos.}\,A.$

$\text{E Cos.}\,(90^\circ + A) = \text{Sen.}\,(90^\circ - [90^\circ + A]) \ldots\ldots = \text{Sen.}\,(-A) = -\,\text{Sen.}\,A = -\,\text{Cos.}\,(90^\circ - A).$

ERRATAS.

Pag.	*lin.*	*Erros*	*Emendas*
II	30	de A	de A;
V	20	Cos, $(90^\circ + A)$	Cos. $(90^\circ + A)$
14	27	9.689970	9,698970
16	29	$M = A + Qab$	$M = A - Pa + Qab$
24	50	$EnFGE$	$EnFE$
28	19	(na fig. 4)	(na fig. 2)
32	18	a e b	a e h
33	2	cos. b	cos. h
33	13	Sen. b	Sen. h
34	21	$a\ b$	$a,\ b$
38	20	Sen. b.	Sen. b,
42	ult.	$h = 19^\circ\ 16.'\ 28'',3$	$h = 19.^\circ\ 16.'\ 28'',3$; ou $= 160.^\circ\ 43.'31'',7$, pelo (n. 47.).

Trigonomet. Rectilinea.



10 REIS

Trigonomet. Spherica.