UN TEOREMA DE COMPLECION PARA ESPACIOS DE SUCESIONES GENERALIZADAS

José M. García Lafuente

In this paper it is shown a completion theorem of spaces of generalized sequences $\Lambda\{E\}$ introduced by A. Pietsch and R.C. Rosier where Λ is a perfect space of sequences and E a locally convex space. The space $\Lambda\{E\}$ is topologized using the topology of E and a certain collection $\mathcal{M}$ of bounded subset of the dual space $\Lambda^{\times}$ of Λ

0. INTRODUCCION

El dual de Köthe $\Lambda^{\times}$ de un espacio perfecto de sucesiones [1], permite dotar a Λ de una topología deducida de la dualidad natural $(\Lambda\ \Lambda^{\times})$. La extensión de estas ideas a espacios de sucesiones cuyos puntos, en lugar de escalares, son elementos de un cierto espacio localmente convexo, llevó a Pietsch [2] a definir los espacios $\Lambda\{E\}$ de sucesiones (x_n) de E tales que para toda seminorma continua p de E $(p(x_n)\in\Lambda$. Al espacio $\Lambda\{E\}$ se le dota de una topología a partir de la topología de E y de una familia $\mathcal{M}$ de conjuntos acotados de $\Lambda^{\times}$. En [4] , investiga R.C. Rosier ciertas propiedades de los duales de $\Lambda\{E\}$, provistos de la $\mathcal{M}$-topología, caracterizando dichos duales, bajo ciertas condiciones, como elementos del espacio $\Lambda^{\times}\{E'\}$.

En el presente trabajo demostraremos que la envolvente completa de un espacio de sucesiones provisto de la topología normal es también un espacio del mismo tipo.

Se denotará por Λ un espacio de sucesiones numéricas $\beta = (\beta_n)$ al cual se le asocia un nuevo espacio de sucesiones numéricas $\Lambda^{\times}$, llamado α-dual, y formado por las sucesiones $\alpha = (\alpha_n)$ tales que la serie $\Sigma\, \alpha_n\beta_n$ converge absolutamente para todo $\beta \in \Lambda$. Se supondrá adicionalmente que Λ es perfecto, es decir $\Lambda = \Lambda^{\times\times}$. (En particular Λ contiene el subespacio ϕ de sucesiones todos cuyos términos son cero excepto un número finito de ellos). En el espacio α-dual $\Lambda^{\times}$ de Λ seleccionamos una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos verificando

a) Los conjuntos M de $\mathcal{M}$ son acotados, es decir

$\forall\, \beta \in \Lambda \quad \exists\, \rho > 0$ tal que $\Sigma|\alpha_n\beta_n| \leq \rho \qquad \forall\, \alpha \in M$

b) Los conjuntos M de $\mathcal{M}$ son normales, es decir

si $\beta \in M$ y $\beta' \in \Lambda^{\times}$ con $|\beta'_n| \leq |\beta_n|$

para todo n, entonces $\beta' \in M$

c) La familia $\mathcal{M}$ es saturada, es decir

si $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ existe $M \in \mathcal{M}$ con $M_1 \cup M_2 \subset M$

d) La familia $\mathcal{M}$ es invariante por homotecias positivas

$M \in \mathcal{M} \quad \rho > 0$ implica $\rho M \in \mathcal{M}$

e) $\mathcal{M}$ recubre $\Lambda^{\times}$

para todo $\alpha \in \Lambda^{\times}$, existe $M \in \mathcal{M}$ con $\alpha \in M$

Una tal familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\Lambda^{\times}$ se llama sistema generador normal de topología.

1. EL TEOREMA DE COMPLECION

Definición 1

Sea E un espacio localmente convexo, cuya topología está generada por la familia $\mathcal{P}$ de seminormas. Se define el espacio vectorial de sucesiones de puntos de E

$$\Lambda\{E\} = \{x = (x_n) \;/\; x_n \in E \quad y \quad (p(x_n)) \in \Lambda \quad \text{para todo } p \in \mathcal{P}\}$$

Si $\mathcal{M}$ es un sistema generador normal de topología, se dota al espacio vectorial $\Lambda\{E\}$ de la topología localmente convexa definida por las seminormas $\{\pi_{Mp}\}_{M \in \mathcal{M} \quad p \in \mathcal{P}}$ donde

$$\pi_{Mp}(x) = \sup_{\alpha \in M} \Sigma |\alpha_n| \, p(x_n) \qquad \forall\, x \in \Lambda\{E\}$$

El espacio $\Lambda\{E\}$ con esta $\mathcal{M}$-topología, se denota por $\Lambda\{E\}_{\mathcal{M}}$. La $\mathcal{M}$-topología generada por las envolventes normales de conjuntos finitos de $\Lambda^{\times}$, es la menos fina $\mathcal{M}$-topología en $\Lambda\{E\}$. Y se llama topología normal [1] .

Es probado de forma inmediata en [4] la siguiente

Proposición 2

Si E es completo, $\Lambda\{E\}_{\mathcal{M}}$ es completo.

Proposición 3

$\widetilde{\Lambda\{E\}_{\mathcal{M}}} \subset \Lambda\{\tilde{E}\}_{\mathcal{M}}$

Demostración:

Por proposición 2, $\Lambda\{\tilde{E}\}_{\mathcal{N}}$ es un espacio completo que contiene al espacio $\Lambda\{E\}_{\mathcal{N}}$ ya que las seminormas que generan la topología de $\tilde{E}$ son la prolongación continua de las que generan la de E. La conclusión es ahora inmediata.

La proposición precedente se mejora cuando $\Lambda\{E\}$ está provista de la topología normal $\mathcal{N}$.

Proposición 4

Si F es un subespacio denso de E, entonces $\Lambda\{F\}$ es denso en $\Lambda\{E\}_{\mathcal{N}}$

Demostración

Sea $x = (x_n) \in \Lambda\{E\}_{\mathcal{N}}$, p seminorma continua de E, $M \in \mathcal{N}$ (que puede considerarse de la forma $M = \{\alpha\}$, $\alpha \in \Lambda^{\times}$) y $\varepsilon > 0$. Puesto que, $(p(x_n)) \in \Lambda$, se tiene

$$\sum_{N} |\alpha_n| \; p(x_n) < +\infty$$

Sea entonces $m \in N$ tal que

$$\sum_{n>m} |\alpha_n| \; p(x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y para cada $n = 1,2, \ldots m$, tomemos, por hipótesis, puntos $y_n \in F$ tales que

$$p(x_n - y_n) \leq \frac{\varepsilon}{2|\alpha_n| \, m}$$

(si $\alpha_n = o$, entonces $y_n = o$) . Definiendo $z_n = y_n$ si $n \leq m$, $z_n = o$ si $n > m$, se obtiene una sucesión $z = (z_n)$ de puntos de F que pertenecen a $\Lambda\{F\}$ ya que se tiene obviamente $(q(z_n)) \in \phi \subset \Lambda$ $\forall q \in \mathcal{P}$

Además

$$\pi_{Mp}(x-z) = \sum_N |\alpha_n| \, p(x_n - z_n) = \sum_{n \leq m} |\alpha_n| \, p(x_n - y_n) +$$

$$+ \sum_{n > m} |\alpha_n| \, p(x_n) < \varepsilon .$$

Teorema 5

$$\widetilde{\Lambda\{E\}_{\mathcal{N}}} = \Lambda\{\widetilde{E}\}_{\mathcal{N}}$$

Demostración

Consecuencia de las proposiciones 3 y 4

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Köthe. Topological Vector Spaces. (1969) Springer-Verlag
Berlín.

[2] A. Pietsch. Verallgemeinerte Vollkommene Folgenräume. (1962)
Academie-Verlag. Berlín

[3] A. Pietsch. Nukleare Lokalconvexe Räume. (1965)
Academie-Verlag. Berlín

[4] R. C. Rosier. Dual Spaces of Certain Vector Sequence Spaces (1973)
Pac. Jour. of Math. Vol 46, No. 2, 487-501

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias
Badajoz