(Resumen en) Actas del "6e Congrès du Groupement des Mathématiciens d'Expression Latine" 367-370 Gauthier-Villars, Paris 1982

ESPACIOS SERIES DE POTENCIA NO LOCALMENTE CONVEXOS

José María García Lafuente

Dep. Teoría de Funciones

Facultad de Ciencias

Badajoz (España)

INTRODUCCION

C. Fenske y E. Schock introducen en [3] la clase $\Lambda_\varphi(P)$ de espacios de sucesiones escalares que no son en general localmente convexos y para los cuales es adecuado el estudio de nuclearidad mediante técnicas de dimensión diametral introducidas por C. Bessaga, A. Pelczynski y S. Rolewicz. La nuclearidad basada en una condición del tipo $\delta_r \in l^1$ (donde δ_r es el r-ésimo diámetro de Kolmogoroff) no solo es aplicable a espacios no localmente convexos, sino que lleva de forma natural a distintas generalizaciones de nuclearidad. En este sentido B. Rosenberger introduce en [9] los espacios φ-nucleares y Dubinsky y Ramanujan estudian distintos tipos de $\Lambda(\alpha)$ - nuclearidad. De otro lado en [4] y [6] se demuestra que para el caso localmente convexo coincide esta noción de nuclearidad con la del tipo Pietsch--Grothendieck.

En este trabajo se estudia la clase de espacios $\Lambda_\varphi(P)$ donde la familia P de "escalones" está formada por las sucesiones (ρ^{α_r}) donde (α_r) es una sucesión prefijada y $\rho \in (0\ \rho_0)$. Estos espacios generalizan los espacios series de potencia de Pietsch (ver [7]) de tipo finito (si $\rho_o < +\infty$) o de tipo infinito (si $\rho_o = +\infty$). Se estudian casos particulares para distintos valores de φ, ρ_o, (α_r). Demostramos que $\Lambda_\varphi(P)$ es subespacio de distintos tipos de espacios clásicos del análisis (espacios de sucesiones de decrecimiento rápido, espacios de funciones enteras) Se estudian condiciones de nuclearidad y se dan condiciones para que $\Lambda_\varphi(P)$ sea (isomorfo a) un espacio serie de potencias $\Lambda(P)$ de Pietsch.

Notaciones. $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números enteros no negativos. Por $\xi = (\xi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ se denota una sucesión de escalares que, salvo indicación en contra, son reales o complejos. Para los conceptos y resultados fundamentales de la teoría de los espacios vectoriales topológicos (resp. espacios localmente convexos nucleares) que aparecen sin demostrar, se remite a [5] (resp. [7]).

1. Sea Φ el conjunto de funciones $\varphi: [0\ \infty) \longrightarrow [0\ \infty)$ continuas, subaditivas, estrictamente crecientes y que satisfacen $\varphi(0) = 0$. Para cada $\varphi \in \Phi$, se define

$$l_\varphi = \left\{ \xi = (\xi_r) \quad / \quad \sum_{r=0}^{\infty} \varphi(|\xi_r|) < +\infty \right\}$$

que es un espacio vectorial y que, según se comprueba de inmediato, solo depende del comportamiento de φ en un intervalo arbitrariamente pequeño $[0\ \varepsilon]$. Por un resultado de [2] se puede suponer además que φ es una función cóncava, es decir

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(u) + \varphi(v)\right] \leq \varphi\left(\frac{1}{2}(u+v)\right) \qquad \forall\ u\ v \in [0\ \infty)$$

y que $\varphi(1) = 1$. En particular la relación

$$\varphi(t) \geq t \qquad \forall\ t \in [0\ 1]$$

es satisfecha por cada $\varphi \in \Phi$. De esta última relación se deduce $l_\varphi \subset l^1$. En lo sucesivo $\varphi \in \Phi$ se supondrá fijada y verificando las anteriores condiciones.

Ejemplo 1.1. Para $0 < p \leq 1$, la función $\varphi_p(t) = t^p$, $t \in [0 \infty)$, satisface $\varphi_p \in \Phi$.

Ejemplo 1.2.

$$\varphi_{\log}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ -(\log t)^{-1} & \text{si } t \in (0 \; e^{-2}) \\ at + b & \text{si } t \geq e^{-2} \end{cases}$$

con $a, b \geq 0$ elegidos de modo que $\varphi_{\log} \in \Phi$.

2. Un espacio vectorial topológico E con base de entornos de 0 $\mathcal{U}$, se dice que es nuclear [3], si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ con $V \subset U$ tal que

$$\sum_{r=0}^{\infty} \delta_r(V\ U) < +\infty \qquad (1)$$

donde $\delta_r(V\ U)$ es el r-ésimo diámetro de V respecto de U , definido como el inferior de todos los números $\delta > 0$ tales que existe un subespacio vectorial F de dimensión a lo sumo r , para el cual $V \subset \delta U + F$. Según se demuestra en [3] , la condición (1) equivale a $\{\delta_r(V\ U)\} \in l^p$ para algún $p > 0$ (resp. para todo $p > 0$) y la definición precedente es independiente de la base $\mathcal{U}$ elegida. Para un estudio completo de las propiedades de los diámetros δ_r ver [11].

3. Sea P una familia de sucesiones escalares $\rho = (\rho_r)$ tales que

a) $\rho_r \geq 0 \qquad \forall \rho \in P$

b) $\forall\ s \in N \quad \exists\ \rho \in P$ con $\rho_s > 0$.

c) $\forall \rho, \sigma \in P \quad \exists\ \tau \in P$ con $\tau_r \geq \max(\rho_r, \sigma_r) \quad \forall r \in N$.

Para $\varphi \in \Phi$ se define en [3] el espacio de sucesiones escalares

$$\Lambda_\varphi(P) = \left\{ \xi = (\xi_r) \ / \ p_\rho(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \varphi(|\xi_r|\rho_r) < +\infty \quad \forall \rho \in P \right\}$$

sobre el cual la familia $U_{\rho\varepsilon} = p_\rho^{-1}([0\ \varepsilon])$ define una topología Hausdorff (no localmente convexa en general). En el presente trabajo estudiaremos el espacio $\Lambda_\varphi(P)$ generado por la familia de sucesiones $P = (\rho^{\alpha_r})$ donde α : $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \ldots$ es una sucesión fija y donde ρ varía en el intervalo finito o infinito $(0\ \rho_0)$. El correspondiente espacio $\Lambda_\varphi(P)$ se escribe $\Lambda_\varphi(\rho_0 \alpha)$ y una base de entornos de 0 en este espacio está constituída por los conjuntos

$$U_{\rho\varepsilon} = \left\{ \xi = (\xi_r) \ / \ \sum_{r=0}^{\infty} \varphi(|\xi_r|\rho^{\alpha_r}) \leq \varepsilon \right\}$$

$\varepsilon > 0$, $0 < \rho < \rho_o$.

Ejemplo 3.1. $\Lambda_{id}(\rho_o\alpha)$ es el espacio serie de potencias $\Lambda(P)$ definido en [7] 6.1.5. , que en lo sucesivo se denotará $\Lambda(\rho_o\alpha)$ y que se llama de tipo finito o infinito según que $\rho_o < +\infty$ ó $\rho_o = +\infty$. $\Lambda(\rho_o\alpha)$ es un espacio localmente convexo Hausdorff cuya topología está definida por las seminormas p_ρ , funcional de Minkowski del entorno $U_\rho = U_{\rho 1}$.

Ejemplo 3.2. Si $\alpha_r = r$ y $\rho_o = +\infty$, $\Lambda_\varphi(\rho_o\alpha)$ es un subespacio del espacio Γ de funciones enteras complejas. En efecto, para cada $\xi \in \Lambda_\varphi(\rho_o\alpha)$, se define $f_\xi(\rho) = \sum_{r=0}^{\infty} \xi_r \rho^r$, $\rho \in \mathbb{C}$. Claramente $f_\xi \in \Gamma$ pues

$$\sum_{r=0}^{\infty} |\xi_r \rho^r| \leq \sum_{r=0}^{\infty} \varphi(|\xi_r|\,|\rho|^r) < +\infty \qquad \forall \rho \in \mathbb{C}$$

Ejemplo 3.3. Si $\alpha_r = \log(r+1)$ y $\rho_o = +\infty$, $\Lambda_\varphi(\rho_o\alpha)$ es un subespacio del espacio s de sucesiones de decrecimiento rápido. En efecto, si $\xi \in \Lambda_\varphi(\rho_o\alpha)$, para cada $k \in N$

$$\sum_{r=0}^{\infty} |\xi_r|\,(r+1)^k \leq \sum_{r=0}^{\infty} \varphi(|\xi_r|\, k^{\log(r+1)}) < +\infty$$

en particular, $\lim_r |\xi_r|\,(r+1)^k = 0$ para cada $k \in N$. Es decir $\xi \in s$.

Ejemplo 3.4. Para cada $\varphi \in \Phi$, el espacio $\Lambda_\varphi(\rho_o\,\alpha)$ es un subespacio del espacio serie de potencias $\Lambda(\rho_o\,\alpha)$. Además la aplicación inmersión I: $\Lambda_\varphi(\rho_o\,\alpha) \hookrightarrow \Lambda(\rho_o\,\alpha)$ es continua para las respectivas topologías. Ello es consecuencia inmediata de la concavidad de la función φ.

Si la función $\varphi \in \Phi$ y la sucesión (α_r) se fijan, existe un solo espacio $\Lambda_\varphi(\rho_o\,\alpha)$ cualquiera que sea el valor finito ρ_o. En concreto

Proposición 3.5. Si $\rho_o < +\infty$ y $\rho_1 < +\infty$, entonces $\Lambda_\varphi(\rho_o\,\alpha)$ es isomorfo a $\Lambda_\varphi(\rho_1\,\alpha)$.

Demostración:

La correspondencia $(\xi_r) \longrightarrow (\xi_r(\frac{\rho_o}{\rho_1})^{\alpha_r})$ es claramente un isomorfismo de $\Lambda_\varphi(\rho_o\,\alpha)$ en $\Lambda_\varphi(\rho_1\,\alpha)$.

Mayor interés tienen los espacios de sucesiones $\Lambda_\varphi(\rho_o\,\alpha)$ cuando la sucesión (α_r) no es acotada pues

Proposición 3.6. Si $\lim_r \alpha_r = \lambda < +\infty$, entonces $\Lambda_\varphi(\rho_o\,\alpha) = l_\varphi$.

Demostración:

Sea $\xi \in l_\varphi$. Para $0 < \rho < \rho_o$ se define

$$\beta = \begin{cases} \rho^{\lambda} & \text{si} \quad \rho \geq 1 \\ \rho^{\alpha_o} & \text{si} \quad \rho < 1 \end{cases}$$

Puesto que $\beta\xi \in 1_\varphi$, resulta

$$\sum_{r=0}^{\infty} \varphi(|\xi_r|\rho^{\alpha_r}) \leq \sum_{r=0}^{\infty} \varphi(|\xi_r|\beta) < +\infty$$

es decir $\xi \in \Lambda_\varphi(\rho_o\alpha)$. Recíprocamente, sea $\xi \in \Lambda_\varphi(\rho_o\alpha)$; por la proposición 3.5. podemos suponer $\rho_o > 1$. Sea entonces $1 < \rho < \rho_o$ y sea r_o un índice tal que

$$\frac{\rho^\lambda}{2} \leq \rho^{\alpha_r} \qquad \text{si} \quad r \geq r_o$$

Puesto que

$$\sum_{r=r_o}^{\infty} \varphi(|\xi_r|\frac{\rho^\lambda}{2}) \leq \sum_{r=r_o}^{\infty} \varphi(|\xi_r|\rho^{\alpha_r}) < +\infty$$

se concluye que $\frac{\rho^\lambda}{2}\xi$, y por tanto ξ , pertenece a 1_φ.

En el ejemplo 3.1. se mostró que si $\varphi = id$ el espacio $\Lambda_\varphi(\rho_o\alpha)$ es localmente convexo. Veremos a continuación que la condición $\varphi = id$ es necesaria para que $\Lambda_\varphi(\rho_o\alpha)$ sea localmente convexo.

<u>Teorema 3.7.</u> $\Lambda_\varphi(\rho_o\alpha)$ es localmente convexo si y solo si es isomorfo al espacio serie de potencias $\Lambda(\rho_o\alpha)$.

Demostración:

A la vista del ejemplo 3.4. basta probar que la inmersión continua $I : \Lambda_\varphi(\rho_o\alpha) \hookrightarrow \Lambda(\rho_o\alpha)$ es suprayectiva y abierta; para ello, notemos que, por hipótesis, para cada $0 < \rho < \rho_o$ y $\varepsilon > 0$ existen

$0 < \sigma < \sigma_o$ y $\delta > 0$ tal que

$$\bar{\Gamma}\, U_{\sigma\delta} \subset U_{\rho\varepsilon} \tag{1}$$

donde Γ denota envolvente absolutamente convexa. Supongamos demostrado que el conjunto

$$M = \left\{ \xi = (\xi_r) \in \Lambda_\varphi(\rho_o\, \alpha) \;\; / \;\; \sum_{r=0}^{\infty} |\xi_r|\, \sigma^{\alpha_r} \leqslant \varphi^{-1}(\delta) \right\}$$

satisface

$$M \subset \bar{\Gamma}\, U_{\sigma\delta} \tag{2}$$

Por (1) y (2) se tendría entonces $M \subset U_{\rho\varepsilon}$, es decir para ρ σ δ ε dados anteriormente, se verifica

$$(\xi_r) \in \Lambda_\varphi(\rho_o \alpha)\,, \quad \sum_{r=0}^{\infty} |\xi_r|\, \sigma^{\alpha_r} \leqslant \varphi^{-1}(\delta) \quad \Rightarrow \quad \sum_{r=0}^{\infty} \varphi(|\xi_r|\rho^{\alpha_r}) \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

De la relación precedente se deduce que I es suprayectiva y también que I es abierta pues si W es el entorno

$$\left\{ (\xi_r) \in \Lambda(\rho_o\, \alpha) \;\; / \;\; \sum_{r=0}^{\infty} |\xi_r|\, \sigma^{\alpha_r} \leqslant \varphi^{-1}(\delta) \right\},$$

se verifica por (3) $I(U_{\rho\varepsilon}) \supset W$. Ello prueba el teorema a falta de la relación (2). Para probar dicha relación observemos que cada $\xi = (\xi_r) \in M$ es límite en $\Lambda_\varphi(\rho_o\, \alpha)$ de sus secciones finitas $\xi^n = \sum_{r=0}^{n} \xi_r e_r$ donde e_r es el r-ésimo vector unitario. Se tiene

$$\xi^n = \sum_{r=0}^{n} \lambda_r\, \sigma^{-\alpha_r}\, \varphi^{-1}(\delta)\; e_r$$

donde $\lambda_r = \xi_r\, \sigma^{\alpha_r} (\varphi^{-1}(\delta))^{-1}$ verifica $\sum_{r=0}^{\infty} |\lambda_r| \leqslant 1$ por definición de M , y donde $\sigma^{-\alpha_r}\varphi^{-1}(\delta)\, e_r \in U_{\sigma\delta}$ para cada $r \in N$ por definición de $U_{\sigma\delta}$. Por tanto $\xi^n \in \Gamma\, U_{\sigma\delta}$ y $\xi = \lim_n \xi^n \in \bar{\Gamma}\, U_{\sigma\delta}$ como se quería demostrar

4. Estudiaremos en esta sección propiedades de nuclearidad de los espacios $\Lambda_\varphi(\rho_o\, \alpha)$. El siguiente resultado de [3] permite evaluar los diámetros en $\Lambda_\varphi(\rho_o\, \alpha)$.

<u>Teorema 4.1.</u> (C. Fenske , E. Schock). Si $0 < \rho < \sigma < \rho_o$, para cada $r \in N$ se tiene

$$\delta_r(U_\sigma\, U_\rho) = (\rho\,\sigma^{-1})^{\alpha_r}$$

Resulta entonces el siguiente criterio tipo Pietsch-Grothendieck de nuclearidad para espacios $\Lambda_\varphi(\rho_o\, \alpha)$.

<u>Teorema 4.2.</u> Sea $\rho_o = +\infty$ (resp. $\rho_o < +\infty$) . El espacio $\Lambda_\varphi(\rho_o\, \alpha)$ es nuclear si y solo si existe $q \in (0\ 1)$ (resp. para cada $q \in (0\ 1)$) co

$$\sum_{r=0}^{\infty} q^{\alpha_r} < +\infty$$

Demostración:

Consecuencia del teorema 4.1. y de las definiciones de la sección 2 .

Proposición 4.3. La topología localmente convexa del espacio serie de potencias nuclear $\Lambda(\rho_0 \alpha)$ puede ser definida por la familia de seminormas

$$q_\rho(\xi) = \sup_r |\xi_r| \rho^{\alpha_r} \qquad 0 < \rho < \rho_0$$

Demostración:

Supondremos que el espacio serie de potencias es de tipo infito (el caso tipo finito se demuestra análogamente). Para cada $0 < \rho < \rho_0$ se tiene obviamente $q_\rho \leq p_\rho$. Por otro lado si $0 < \rho < \rho_0$ y si $q \in (0\ 1)$ es el número dado en el teorema 4.2. por nuclearidad, entonces los números $\sigma = q\rho^{-1}$ y $M = \sum_{r=0}^{\infty} q^{\alpha_r}$ satisfacen

$$p_\sigma(\xi) \leq M \quad q_\rho(\xi) \qquad\qquad \forall\ \xi \in \Lambda(\rho_0 \alpha)$$

como se quería demostrar.

Terminamos el trabajo estableciendo un criterio de convexidad local de $\Lambda_\varphi(\rho_0 \alpha)$ que depende solo de φ y de α .

Proposición 4.4. Si $\rho_0 = +\infty$ (resp. $\rho_0 < +\infty$) y si para un $q \in (0\ 1)$ (resp. para cada $q \in (0\ 1)$) se verifica

$$\sum_{r=0}^{\infty} \varphi(q^{\alpha_r}) < +\infty \tag{1}$$

entonces $\Lambda_\varphi(\rho_0 \alpha)$ es localmente convexo.

Demostración:

En las hipótesis de este teorema el espacio $\Lambda_\varphi(\rho_o\,\alpha)$ se dice que es φ-nuclear [9]. Supongamos $\rho_o = +\infty$ (si $\rho_o < +\infty$ se procede análogamente). Probaremos que $\Lambda_\varphi(\rho_o\,\alpha)$ es isomorfo a un subespacio del espacio localmente convexo $\Lambda(\rho_o\,\alpha)$, para lo cual hay que demostrar que la inmersión continua $I : \Lambda_\varphi(\rho_o\,\alpha) \hookrightarrow \Lambda(\rho_o\,\alpha)$ del ejemplo 3.4. es abierta. Sea $0 < \rho < +\infty$ y $\varepsilon > 0$. Si $q \in (0\ 1)$ es el número dado en las hipótesis, el número $\sigma = \rho\, q^{-1}$ satisface $\sum_{r=0}^{\infty} \varphi((\rho\,\sigma^{-1})^{\alpha_r}) < +\infty$ y por tanto existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{r=0}^{\infty} \varphi(\delta(\rho\,\sigma^{-1})^{\alpha_r}) \leq \varepsilon \qquad (2)$$

Por otro lado la relación (1) implica en particular $\sum_{r=0}^{\infty} q^{\alpha_r} < +\infty$, es decir $\Lambda(\rho_o\,\alpha)$ es nuclear (teorema 4.2.) . Por la proposición 4.3. el conjunto

$$V = \left\{ \xi = (\xi_r) \in \Lambda(\rho_o\,\alpha) \ / \ \sup_r |\xi_r|\, \sigma^{\alpha_r} \leq \delta \right\}$$

es entoences un entorno de 0 en $\Lambda(\rho_o\,\alpha)$. Puesto que $(\xi_r) \in V$ si y solo si $|\xi_r|\,\rho^{\alpha_r} \leq \delta(\rho\,\sigma^{-1})^{\alpha_r}$ para cada $r \in N$ resulta finalmente de la relación (2) que $V \subset I(U_{\rho\varepsilon})$ como se quería demostrar.

REFERENCIAS

[1] C. BESSAGA , A. PELCZYNSKI , S. ROLEWICZ. On diametral approximative dimension and linear homogeneity of F-spaces. Bull. Acad. Poln. Sci. 9, 677-683. (1961)

[2] C. BESSAGA, A. PELCZYNSKI, S. ROLEWICZ. Some properties of the norm of F-spaces. Studia Math. 16, 183-192 (1957)

[3] C. FENSKE , E. SCHOCK. Nuklearität und lokale konvexität von Folgenraümen. Diese Nachr. 45, 327-335 (1970)

[4] C. FENSKE , E. SCHOCK. Uber die diametrale Dimension von lokalkonvexen Raümen. Ges. f. Math. und Datenverarbeitung Bonn 10 (b) 13-22 (1969)

[5] G. KOTHE. Topological vector spaces I. Berlin 1969

[6] B.S. MITIAGIN. Approximate dimension and basis in nuclear spaces. Russ. Math. Surveys 16, 59-127 (1961)

[7] A. PIETSCH. Nulcear locally convex spaces. Berlin 1972

[8] M.S. RAMANUJAN. Power series spaces $\Lambda(\alpha)$ and Associated $\Lambda(\alpha)$-nuclearity. Math. Ann. 189, 161-168 (1970)

[9] B. ROSENBERGER. φ-nukleare Raüme. Math. Nachr. 52, 147-160 (1972)

[10] B. ROSENBERGER. Universal generators for varieties of nuclear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 184, 275-290 (1973)

[11] T. TERZIOGLU. Die diametral dimension von lokalkonvexen Raümen. Collectanea Math.. 20, 49-99 (1969)