Actas VIII Jornadas
Luso Espanholas Matemática, Vol. III
Universidade Coimbra, 1981

UNA CARACTERIZACION DE LA PROPIEDAD DE APROXIMACION EN ESPACIOS BORNOLOGICOS CONVEXOS

Luis Romero Marzal
José María García Lafuente
Universidad de Extremadura - Badajoz

Resumen: *Se introduce en el espacio $C^1(E)$ de funciones diferenciables con derivada acotada en el espacio bornológico convexo E, la noción de convergencia $\mathfrak{B}$-uniforme relativa a una familia de conjuntos estrictamente compactos $\mathfrak{B}$ de E. Se prueba que ciertos espacios bornológicos convexos E, poseen la Propiedad de Aproximación si y solo si la aplicación identidad de E se aproxima $\mathfrak{B}$-uniformemente por aplicaciones de $C^1(E) \otimes E$.*

En el trabajo se establece, en el marco de los espacios bornológicos convexos (e.b.c.), un teorema de densidad análogo al que J.F. Colombeau y R. Meise establecen para funciones de clase C^∞ en e.b.c. [2]

Resultados similares han sido establecido por F. Bombal y González Llavona para funciones de clase C^∞ en espacios de Banach en [1] , por J.B. Prolla y C.S. Guerreiro [7], y por O.T.W. Paques para el caso de funciones holomorfas [6] .

A lo largo de todo el trabajo, E y F serán e.b.c. reales, separados y polares (es decir con base de bornología formada por discos TE-cerrados). El espacio vectorial de aplicaciones lineales y acotadas de E en F provisto de su bornología natural formada por aquellos subconjuntos que transforman acotados en acotados lo denotaremos por $\mathcal{L}_b(E\ F)$. Si $F = \mathbb{R}$ se escribe $E^\times$ por $\mathcal{L}_b(E\ \mathbb{R})$. El espacio $C^1(E\ F)$ está constituído por las funciones f de E en F diferenciables y con derivada f' acotada remitiéndose a [3] para las definiciones y propiedades más inmediatas de la diferenciación de funciones entre e.b.c.

Para cada $f \in C^1(E\ F)$ es válido el siguiente teorema de incrementos finitos establecido en [3] ch. 2. corolario 2.1.; si $a,\ h \in E$ entonces

$$f(a + h) - f(a) \in \overline{\Gamma}_{0 \leq t \leq 1} \ f'(a + t\ h)\ h$$

donde $\overline{\Gamma}$ denota la envolvente absolutamente convexa TE-cerrada.

Un disco B del e.b.c. E se dice que es Banach si el espacio normado E_B generado por B y provisto de la norma asociada a B es espacio de Banach.

Un conjunto K de E se dice que es estrictamente compacto si existe un disco B de E tal que K es compacto en E_B . De acuerdo con [2] se establece la siguiente:

Definición 1

Un e.b.c. se dice que posee la propiedad de aproximación si para cada conjunto estrictamente compacto K de E existe un disco de Banach B tal que:

1. K es compacto en E_B

2. La identidad en E_B puede aproximarse uniformemente en K por operadores lineales continuos en E_B que tienen rango finito.

Definición 2

Sea $\mathcal{B}$ una familia de acotados de E que contiene a todos los conjuntos estrictamente compactos. Diremos que $u_n \in C^1(E\ F)$ converge $\mathcal{B}$-uniformemente hacia $g \in C^1(E\ F)$ cuando: a) para cada $A \in \mathcal{B}$, existe un disco acotado B en F tal que u_n converge a g en F_B uniformemente en A ; b) $u_n'(x)$ converge a $g'(x)$ en $\mathcal{L}_b(E\ F)$, cualquiera que sea $x \in E$.

Teorema 1

Sea E un e.b.c. con la propiedad de aproximación, sea $\mathcal{M}$ la familia de los endomorfismos acotados de rango finito de espacios E_B , cuando B recorre los discos acotados de E . Para cada e.b.c. polar F , toda función $f \in C^2(E\ F)$ se aproxima $\mathcal{B}$-uniformemente por aplicaciones del conjunto $f \circ \mathcal{M}$

Demostración

Sea $A \in \mathcal{B}$ y sea B un disco acotado de E tal que la aplicación identidad en E_B se aproxima por operadores de rango finito en E_B uniformemente sobre A . Dado $\varepsilon > 0$, existe $u \in E_B^* \otimes E_B$ tal que

$$u(x) - x \in \varepsilon B \qquad \forall\ x \in A$$

Sea $C = \overline{\Gamma}\ f'(A + B)\ (B)$. Puesto que f' es acotada y F es polar, C es un conjunto acotado de F , y por el teorema de los incrementos finitos, resulta

$$f(u(x)) - f(x) \in \overline{\Gamma}_{0 \leq t \leq 1} f'(x + t\,(u(x) - x)\,(u(x) - x) =$$

$$= \overline{\Gamma}_{0 \leq t \leq 1} \varepsilon f'(x + t(u(x) - x))\,\left(\frac{u(x) - x}{\varepsilon}\right) \in$$

$$\in \varepsilon \overline{\Gamma} \quad f'(A + B)\,(B) = \varepsilon C$$

para todo $x \in A$.

Con una obvia modificación del razonamiento anterior aplica do a la función derivada f' , se demuestra la condición b) de la definición 2 .

Definición 3

Un e.b.c. se dice posee la C^1-propiedad de aproximación finita, si para cada subespacio E_o de E de dimensión finita y cada e.b.c. F , toda aplicación de $C^1(E_o F)$ puede aproximarse β-uniformemente por aplicaciones de $C^1(E_o) \otimes F$.

Para espacios con C^1-propiedad de aproximación finita, ver [8] ch. 44 .

Teorema 2

Sea E un e.b.c. y β la familia de conjuntos estrictamente compactos de E . Cada proposición implica las siguientes:

a) Para cada e.b.c. F toda aplicación $f \in C^2(E\,F)$ se aproxima β-uniformemente por aplicaciones de $C^1(E) \otimes F$.

b) La aplicación identidad de E se aproxima β-uniformemente por aplicaciones de $C^1(E) \otimes E$

c) E posee la propiedad de aproximación.

Si además E posee la C^1-propiedad de aproximación finita todas las proposiciones son equivalentes.

Demostración

a) $\Longrightarrow$ b) Trivial

b) $\Longrightarrow$ c) Sea K un conjunto estrictamente compacto de E y $u_n \in C^1(E) \otimes E$ una sucesión que converge β-uniformemente hacia la identidad I de E. En particular si $x \in E$, la sucesión $u'_n(x)$ es convergente en $G = \mathcal{L}_b(E\ E)$; es decir existe un disco acotado C en G tal que $u'_n(x)$ converge en G_C hacia I. Sea B la envolvente absolutamente convexa del conjunto acotado $C(K) = \bigcup_{\varphi \in C} \varphi(K)$ (incluyendo eventualmente B en otro disco acotado, puede suponerse que K es compacto en E_B) . Si $\varepsilon > o$, existe entonces $n_o \in N$ tal que

$$u'_n(x) - I \in \varepsilon C \qquad \text{si } n \geq n_o$$

y por tanto

$$\frac{1}{\varepsilon}\,[u'_n(x) - I]\,(K) \subset C(K) \subset B \qquad \text{si } n \geq n_o$$

es decir

$$u'_n(x)(y) - y \in \varepsilon B \qquad \text{si } n \geq n_o \quad y \in K$$

Ello prueba c) considerando las restricciones de $u'_n(x)$ a E_B, que son operadores en E_B de rango finito dimensional

c) $\Longrightarrow$ a)

Por el teorema 1 , para cada e.b.c. F , toda función $f \in C^2(E\,F)$ se aproxima β-uniformemente por funciones $f \circ u \in f \circ \mathfrak{M}$. Por ello dado $A \in \beta$ existe un disco acotado B' en F tal que, dado $\varepsilon > 0$ existe $u \in \mathfrak{M}$ con

$$f(x) - f(u(x)) \in \varepsilon/2\, B' \quad \text{para cada} \quad x \in A \tag{1}$$

Sea C un disco acotado en E tal que $A \subset E_C$, $u \in (E_C)^{x} \otimes E_C$ y sea f_C la restricción de f a $u(E_C)$

$$E_C \xrightarrow{u} E_C \supset u(E_C) \xrightarrow{f_C} F$$

Puesto que u es de rango finito-dimensional, f_C tiene dominio finito dimensional y puesto que E posee, por hipótesis, la C^1- propiedad de aproximación finita, f_C puede aproximarse β-uniformemente por funciones de $C^1(u(E_C)) \otimes F$. Es decir asociado a $u(A) \in \beta$ (nótese que u es lineal acotada) , existe un disco acotado B'' en F y una función $v \in C^1(u(E_C)) \otimes F$ tal que:

$$f_C(y) - v(y) \in \varepsilon/2\, B'' \quad \text{para cada} \quad y \in u(A)$$

o equivalente

$$f_C(u(x)) - v(u(x)) \in \varepsilon/2\, B'' \quad \text{para cada} \quad x \in A \tag{2}$$

De (1) y (2) , tomando un disco acotado $B \supset B' \cup B''$, resulta

$$f(x) - v(u(x)) \in \varepsilon B \quad \text{para cada} \quad x \in A$$

lo que prueba la condición a) de la definición 2 considerando el rango de $v \circ u \in C^1(E) \otimes F$ en F_B .

Para probar finalmente la condición b) de dicha definición, sea D un disco acotado de $\mathcal{L}_b(E\ F)$, $\varepsilon > o$ y $x \in E$. La función $u \in \mathfrak{M}$ de la relación (1) se toma verificando tambien

$$f'(x) - (f \circ u)'(x) \in \varepsilon/2\ D \tag{3}$$

Del mismo modo la función $v \in C^1(u(E_C)) \otimes F$ de la relación (2) se toma verificando tambien:

$$(f_C \circ u)'(x) - (v \circ u)'(x) \in \varepsilon/2\ D . \tag{4}$$

De las condiciones (3) y (4) se concluye finalmente

$$f'(x) - (v \circ u)'(x) \in \varepsilon D$$

lo que prueba totalmente el teorema

B I B L I O G R A F I A

[1] F. BOMBAL GORDON y J.L. GONZALEZ LLAVONA. La propiedad de aproximación en espacios de funciones diferenciables. Revista Academia Ciencias. Madrid 70 (1976) 727-741.

[2] J.F. COLOMBEAU y R. MEISE. C^{∞}-funtions on locally convex and on bornological vector spaces. "Advances un Functional Analysis. Holomorphy and Approximation Theory. (Editor S. Machado). Lecture Notes in Math. Springer-Verlag.

[3] J.F. COLOMBEAU. Differentiation et bornologie, thése. Bordeaux, 1973.

[4] HENRI HOGBE-NLEND. Bornologies and functional analysis. North-Holland.

[5] R. MEISE. Spaces of diferentiable functions and the aproximation property, p. 263-307 in "Approximation Theory and Functional Analysis". J.B. Prolla (Editor), North--Holland Mathematics Studies (1979).

[6] O.T.W. PAQUES. The approximation property for certaine spaces of holomorphic mappings. p. 351-370 in "Approximation Theory and Functional Analysis" J.B. Prolla (Editor), North-Holland Mathematics Studies (1979)

[7] J. B. PROLLA and C.S. GUERREIRO. An extension of Nachbin's theorem to differentiable functions on Banach spaces with the approximation property. Ark Mat. 14 (1976) 251-258.

[8] F. TREVES. Topological Vector Spaces. Dispributions and Kernels. Ed. Academic Press.