UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Facultad de Ciencias

Máster Universitario de formación del profesorado de educación secundaria

Trabajo Fin de Máster

I.E.S. Zurbarán (Badajoz)
Departamento de matemáticas

Tutor de prácticas: Antonio Campos Hernández

Director TFM: Manuel Ángel Fernández Leno

Nazaret Trejo Arroyo
15 de junio de 2022

Introducción

La presente memoria recoge la descripción y el análisis de las prácticas docentes realizadas entre los meses de marzo y mayo de 2022 en el I.E.S. Zurbarán de Badajoz. Si bien es cierto que se recogen todas las actividades realizadas, se hace especial énfasis en la unidad didáctica de *Álgebra* impartida en dos grupos de 1º ESO.

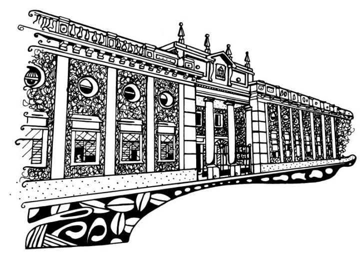
Invitamos al lector a consultar el siguiente *diario de prácticas* realizado con *Google Sites*, en el cual se hace un análisis más detallado del periodo de prácticas: `https://sites.google.com/alumnos.unex.es/practicas-nazaret`.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del centro de prácticas

1.1. Entorno sociocultural



El I.E.S. Zurbarán de Badajoz es un centro público de gran tamaño, por lo que acoge a estudiantes que provienen de todos los puntos de la ciudad. El centro está situado en la Avenida de Huelva, zona de mucho tráfico comercial y de gran interés cultural. Por esta zona también nos encontramos la mayor parte de los edificios gubernamentales, como la *Delegación del Gobierno en Extremadura* o la *Dirección Provincial de Badajoz de la Tesorería General de la Seguridad Social*.

Esta zona de Badajoz es muy rica en cuanto a cultura; en las proximidades del centro están situados distintos museos, como el *Museo Extremeño e Iberoamericano de Arte Contemporáneo* (MEIAC) o el *Museo del Carnaval de Badajoz*, y salas de exposiciones, como antiguo *Hospital Provincial*, que ha sido recientemente reformado y que se usa para fines culturales. Esta localización facilita la organización de visitas culturales, lo que supone una mejora sustancial en la educación extraescolar de los alumnos.

1.2. Recursos

1.2.1. Recursos materiales

El centro cuenta con buenos recursos tecnológicos y audiovisuales, sin embargo, en ocasiones no funcionan todo lo bien que nos gustaría. Cabe decir también que el centro está dotado de un sistema de megafonía mediante el cual se hacen llamamientos.

En cuanto a las aulas, distribuidas en tres plantas, nos encontramos con dos tipos: aulas 'normales', a una única altura, y aulas tipo *anfiteatro*, con filas de asientos distribuidas a distintas alturas. Todas ellas, además, cuentan con pizarra de tiza, aunque también hay aulas dotadas de pizarras blancas de rotulador. En algunas aulas, la calidad de las pizarras de tiza deja mucho que desear; escribir en ellas supone un reto pues los trazos de tiza casi no se marcan, lo que dificulta la visibilidad. El mobiliario de las aulas es sencillo, con mesas individuales (salvo en las aulas tipo anfiteatro). Por los pasillos nos encontramos con taquillas, estando asignada una a cada alumno.

Con respecto a los medios digitales, cada aula cuenta con una pizarra digital y un proyector, así como con un ordenador para uso exclusivo del profesor. No hay ordenadores para los alumnos en las aulas, sino que el centro dispone de ordenadores portátiles almacenados en *muebles-cargador*, cerrados con llave, distribuidos por el centro.

1.2.2. Recursos humanos: profesorado y alumnado

El Claustro en el curso actual está formado por 120 profesores, divididos en Departamentos que se coordinan para llevar a cabo las programaciones didácticas, evaluaciones... Además, el centro cuenta con un Departamento de Orientación formado por: un orientador, un educador social, un profesor de pedagogía terapéutica, una profesora de audición y lenguaje y un profesor técnico de formación profesional, una profesora del programa IMPULSA y dos profesoras de REMA.

En cuanto al alumnado, actualmente en el centro hay matriculados en torno a 1100 alumnos. En general, a este centro asisten chicos y chicas que residen en cualquier punto de la ciudad, con nivel socio-económico familiar medio-bajo.

1.3. Enseñanzas del centro

El I.E.S. Zurbarán ofrece enseñanzas en régimen diurno y en régimen nocturno (para Bachillerato y Ciclos Formativos). Antes de empezar a enumerar las enseñanzas que oferta el centro, es necesario hacer una puntualización sobre el *horario general* del centro.

Jornada escolar. Dada la situación de pandemia que hemos vivido durante los dos últimos años, a fin de evitar aglomeraciones y contacto entre alumnos, se han establecido distintos tramos horarios en las enseñanzas de régimen diurno. De esta forma, cada ciclo de ESO, así como el Bachillerato, comienza y finaliza las clases a distintas horas. La duración de las sesiones es de 55 minutos en todos los ciclos.

En las enseñanzas en régimen nocturno no ha sido necesario realizar tramos horarios dado el que número de alumnos es mucho menor, siendo el horario establecido de 16:15 a 22:00, con un recreo de 15 minutos.

En cuanto a las enseñanzas que ofrece el centro:

- Enseñanzas de ESO al completo, pudiéndose elegir en 3º ESO entre Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas y Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. También en 3º ESO se puede optar por cursar el programa PMAR.
- Enseñanzas de Bachillerato, en régimen diurno y nocturno, pudiéndose elegir entre las modalidades de Ciencias o de Humanidades y Ciencias Sociales.

En las enseñanzas de ESO se ofertan dos secciones bilingües: la sección bilingüe español-inglés y la sección bilingüe español-francés.

En relación a los ciclos formativos, también en horario diurno y nocturno:

- Grado Superior de Enseñanza y Animación Socio-Deportiva.
- Grado Superior de Acondicionamiento Físico.
- Grado Medio de Conducción de Actividades Físico-Deportivas en el Medio Natural.

1.4. Programas y proyectos

1. **Secciones bilingües.** En la sección bilingüe español-inglés y en la español-francés se cuenta con personas nativas venidas al centro para fomentar el contacto con otras culturas y familiarizarse aún más con el idioma.

2. **Aprender a Aprender.** El objetivo es favorecer el aprendizaje autónomo del estudiante, sobre todo en los primeros cursos de ESO. Así, a la hora de evaluar, es necesario tener en cuenta los procedimientos de trabajo del alumno.

3. **Programa LIBRARIUM y Proyecto REBEX.** Relacionados con la lectura, tienen como objetivo formar un club de lectura sólido en el centro así como dinamizar el uso de la biblioteca.

4. **Programa de Mejora del Aprendizaje y del Rendimiento (PMAR).** Tiene como objetivo que los alumnos con dificultades de aprendizaje puedan conseguir el título de graduado en ESO por la vía ordinaria empleando metodologías adaptadas a sus necesidades. Está vigente en 2º y 3º ESO y conduce a 4º ESO, curso en el cual, si fuera necesario, el alumno podría incorporarse al programa PRAGE.

5. **Programa de Refuerzo y Atención en Grupo Específico (PRAGE).** El objetivo es favorecer el éxito académico de los alumnos que presentan dificultades de aprendizaje. Las enseñanzas se orientan desde un punto de vista práctico, y se concibe como una medida extraordinaria de atención a la diversidad y como continuación del programa PMAR

6. **Plan Igualdad de Género.** Tiene como objetivo *coeducar*, es decir, en educar en igualdad de oportunidades, respetando y valorando las diferencias para acabar con la carga que suponen los estereotipos y prejuicios de género.

Proyectos Europeos

1. **Erasmus+ Grado Superior 2021-2027: Erasmus Charter for Higher Education 2021-2027**

2. **Intercambio escolar La Roche-sur-Yon (Pays de la Loire - France).**

3. **Intercambio lingüístico con la Gumley House Convent School (Londres).**

4. **Intercambio escolar Schiller-Gymnasium de Offenburg (Alemania).**

Capítulo 2

Análisis sobre la intervención docente

Durante mis prácticas docentes he impartido dos unidades didácticas:

- Unidad didáctica de *Álgebra* en dos grupos de 1º ESO.
- Unidad didáctica de *Cuerpos en el espacio. Áreas y volúmenes* en 2º ESO.

He optado por desarrollar en esta memoria la unidad didáctica de Álgebra. Sobre el porqué de esta decisión:

- Creo que es una unidad didáctica bastante delicada, pues los alumnos de 1º ESO no han estudiado nada de álgebra durante su etapa de Educación Primaria, por lo que suponía una especia de *reto* para mí explicar este tema.
- He tenido la oportunidad de impartir esta unidad didáctica en dos grupos distintos, lo que da pie a un análisis más amplio; por ejemplo, me he encontrado con dificultades diferentes en ambos grupos.
- Para impartir esta unidad he tenido más tiempo, tanto a la hora de prepararla como a la hora de impartirla pues, por tema de falta de tiempo, en 2º ESO no empecé con la unidad de Geometría hasta después de Semana Santa.

2.1. Identificación de la unidad didáctica

La unidad didáctica corresponde al tercer nivel de concreción curricular en el marco normativo fijado por la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMLOE), que completa a la Ley Orgánica de Educación (LOE). Los contenidos que forman parte de la unidad didáctica se ajustan a lo que se recoge en el Decreto 98/2016 por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Extremadura, a partir del currículo básico dispuesto en el Real Decreto 1105/2014.

2.1.1. Datos generales

La unidad didáctica se denomina *Álgebra*, y se imparte en el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria, dentro de la asignatura de Matemáticas. Además, es el único tema destinado al álgebra en este curso. Esta unidad se imparte durante el tercer trimestre del curso y, como su propio nombre indica, forma parte del segundo bloque, *Números y Álgebra*.

2.1.2. Justificación

El *Álgebra* es una rama de las Matemáticas que resulta fundamental a distintos niveles; además, desde el punto de vista académico, el bloque algebraico cobra cada más importancia. Introducir en 1º ESO el mundo algebraico no es tarea fácil pues, para ello, necesitamos elevar el *nivel de abstracción*. Justamente de aquí, del *razonamiento abstracto*, es de donde emana la riqueza del Álgebra, y por ende, de todas las Matemáticas. Dando significado a variables que en un principio no designan nada, somos capaces de representar situaciones de la vida cotidiana, creando así el *lenguaje algebraico*. Y no solo eso, sino que haciendo uso de herramientas algebraicas, como son las *ecuaciones*, podemos encontrar la solución a problemas que nos atañen en nuestro día a día. Todo esto, además, favorece el desarrollo del *pensamiento lógico* y el *razonamiento simbólico* del alumnado desde edades tempranas, lo que les prepara para el pensamiento crítico y para la toma de decisiones.

Mi objetivo a la hora de impartir la unidad didáctica era, precisamente, que los alumnos fueran conscientes de la *potencia* que tiene el Álgebra dentro de las Matemáticas. Justo por este motivo, la mayor parte de los problemas que planteo en la unidad están contextualizados en situaciones de la vida diaria: coger un autobús o un taxi, ir a hacer la compra... En definitiva, quería conseguir que tuvieran una idea somera de que el Álgebra abstracta conforma una herramienta muy potente a la hora de comprender el mundo que nos rodea. Como decía Galileo Galilei: *"la Matemática es el alfabeto con el Dios creó el mundo"*, y nuestro objetivo debe ser intentar descifrarlo, de nuevo, usando Matemáticas.

2.1.3. Características de los grupos

Como he comentado al comienzo del capítulo, he impartido la unidad didáctica de Álgebra en dos grupos de 1º ESO, siendo ambos grupos pertenecientes a la sección bilingüe de inglés.

En cuanto al número de alumnos, son grupos bastante reducidos, justamente por pertenecer a la sección bilingüe, por lo que se trabaja muy bien con ellos; concretamente, en un grupo tenemos 16 alumnos, y en el otro 22. Se trata de clases bastante buenas, en las que los alumnos suelen estar motivados por aprender; sí es verdad que en ambos grupos nos encontramos con gente muy tímida a la que le cuesta mucho preguntar dudas y participar en clase. Desde el primer día me doy cuenta de este hecho por lo que cuando llega el momento de la impartición de mi unidad intento crear un ambiente agradable en clase para favorecer que se pierda el 'miedo' a preguntar y a equivocarse.

En cuanto a alumnos con necesidades educativas especiales, solo nos encontramos con una chica que está recién diagnosticada de TDAH, por lo que aún no dispone de adaptaciones curriculares; se estaba barajando ponérselas en un futuro. El resto de alumnos tienen un muy buen rendimiento académico, de hecho hasta hay un chico en uno de los grupos con diagnóstico de altas capacidades. Si bien es cierto que resulta curioso que en dos grupos de 1º ESO únicamente nos encontremos con una alumna TDAH, esto se debe a que en el I.E.S. Zurbarán han juntado a todos los alumnos de 1º ESO que tienen dificultades de aprendizaje en un único grupo; grupo al que también he tenido acceso y del que hablaré más adelante en el capítulo dedicado a *Otras Actividades*. De esta forma, los alumnos que nos encontramos en las clases de la sección bilingüe están 'seleccionados' y, por tanto, son alumnos con un nivel medio-alto.

2.2. Objetivos didácticos

Antes de comenzar con los objetivos didácticos que se pretenden alcanzar con esta unidad didáctica, creo que es importante resaltar el hecho de que, en 1º ESO, es la primera vez que los alumnos se enfrentan a una unidad didáctica de Álgebra. Por tanto, *empezamos de cero*, sin ningún tipo de conocimiento previo sobre el tema, más allá del conocimiento base que se tiene que tener de la matemática en el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria.

Los principales objetivos didácticos a alcanzar con esta unidad didáctica son:

- Introducir a los alumnos en el álgebra y en particular en el lenguaje algebraico, de manera que sean capaces de traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico.
- Saber operar con monomios.
- Conocer y comprender el concepto de ecuación y saber diferenciar una ecuación de una expresión algebraica.
- Comprender el concepto de solución de una ecuación, sabiendo razonar cuándo un número es o no solución.
- Aprender a resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita de distintos tipos: ecuaciones sencillas y ecuaciones con paréntesis. Dado que los dos grupos de 1º ESO a los que imparto la unidad didáctica tienen un nivel educativo bastante alto, me planteo como objetivo también la resolución de ecuaciones con denominadores.
- Plantear y resolver problemas, generalmente contextualizados en la vida cotidiana, utilizando ecuaciones de primer grado con una incógnita.

2.3. Contenidos

Los contenidos de esta unidad didáctica, de acuerdo con el Decreto 98/2016, están extraídos de dos bloques; el Bloque I de *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*, y el Bloque II de *Números y Álgebra.* Los contenidos concretos son los que se enumeran a continuación:

1.1. Planificación del proceso de resolución de problemas.

1.2. Análisis y comprensión del enunciado.

1.3. Reflexión sobre los resultados: revisión de operaciones, asignación de unidades e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación.

2.20. Iniciación al lenguaje algebraico. Monomios y polinomios.

2.21. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.

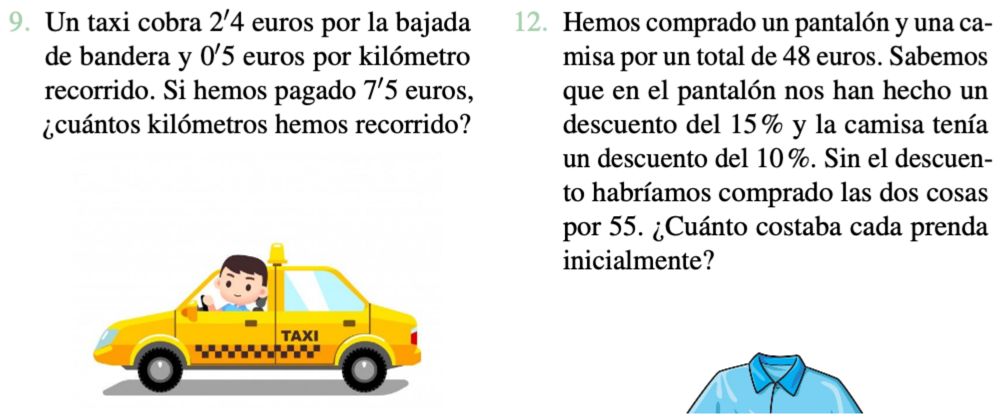
2.22. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.

Cabe hacer una puntualización sobre el punto 2.20.; aunque en el currículo está recogido el hecho de que en 1º ESO se introduzca el concepto de *polinomio*, yo he optado por *no* introducirlos explícitamente. Es decir, los alumnos han trabajado con polinomios a la hora de operador con monomios, sin embargo, para no introducir más nomenclatura y, sobre todo, por falta de tiempo, no les he definido en ningún momento lo que es un polinomio. Creo que no era estrictamente necesario y que no aportaba nada, más allá de la definición teórica.

2.4. Adquisición de las competencias clave

Las *competencias clave* trabajadas en esta unidad didáctica han sido:

1. *Competencia en comunicación lingüística (CCL)*:
   - Lectura en clase de los apuntes de elaboración propia elaborados para impartición de la unidad.
   - Lectura comprensiva de los enunciados de los problemas.
   - Redacción de las respuestas a las preguntas planteadas en los enunciados de los problemas.
2. *Competencia matemática y básica en ciencia y tecnología (CMCT)*:
   - Aplicación de las ecuaciones para la resolución de problemas que representan situaciones de la vida cotidiana.
   - Valorar la importancia que tienen las matemáticas en nuestro día a día.
3. *Competencia Digital (CD)*:


9. Un taxi cobra $2'4$ euros por la bajada de bandera y $0'5$ euros por kilómetro recorrido. Si hemos pagado $7'5$ euros, ¿cuántos kilómetros hemos recorrido?

12. Hemos comprado un pantalón y una camisa por un total de 48 euros. Sabemos que en el pantalón nos han hecho un descuento del 15 % y la camisa tenía un descuento del 10 %. Sin el descuento habríamos comprado las dos cosas por 55. ¿Cuánto costaba cada prenda inicialmente?

Figura 2.1: Problemas que tratan sobre la vida cotidiana

- Proyección en el aula de vídeos explicativos sobre qué es el Álgebra y sobre el método de resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

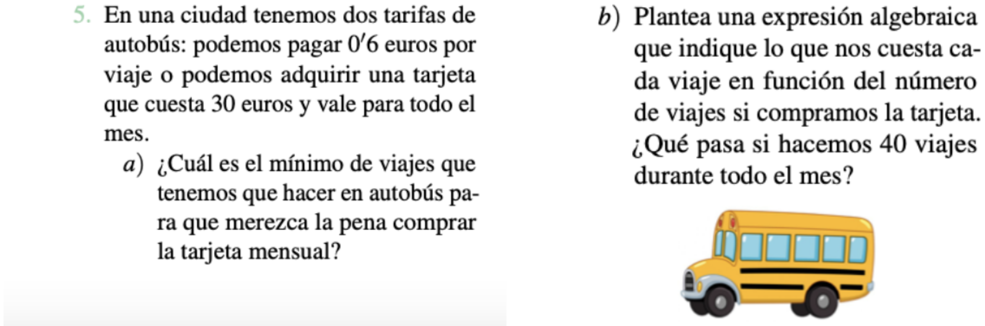
4. *Aprender a Aprender (AA)*:
   - Favorecer el razonamiento autónomo del alumno proponiendo retos algebraicos para introducir los distintos conceptos.
   - Favorecer el trabajo individual, dándoles tiempo para que sean ellos los que planteen los problemas y expongan los procedimientos a sus compañeros en pizarra.

5. *Competencias sociales y cívicas (CSC)*:
   - Respetar el turno de palabra de los compañeros.
   - Corregir o expresar de forma educada que un procedimiento matemático no es correcto.

6. *Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE)*:
   - Fomentar el razonamiento individual para buscar distintas formas de resolver un problema en el que intervienen ecuaciones.
   - Aplicar las soluciones obtenidas en problemas contextualizados en el día a día para saber cuáles de las posibles opciones es la más rentable.

2.5. Metodología

A lo largo de toda la unidad didáctica la metodología empleada ha sido, en su mayor parte, tradicional y expositiva, intentado que participaran en las clases el mayor número de alumnos posibles, ya fuese de forma voluntaria o bajo elección mía. Es cierto que me



5. En una ciudad tenemos dos tarifas de autobús: podemos pagar $0'6$ euros por viaje o podemos adquirir una tarjeta que cuesta 30 euros y vale para todo el mes.

a) ¿Cuál es el mínimo de viajes que tenemos que hacer en autobús para que merezca la pena comprar la tarjeta mensual?

b) Plantea una expresión algebraica que indique lo que nos cuesta cada viaje en función del número de viajes si compramos la tarjeta. ¿Qué pasa si hacemos 40 viajes durante todo el mes?

Figura 2.2: Problema del día a día que trabaja la competencia SIEE

hubiese gustado trabajar más la competencia clase de *Aprender a Aprender* proponiendo, por ejemplos, retos matemáticos para realizar en clase y en grupos. Sin embargo, esto no ha sido posible por falta de tiempo.

Durante las clases el material utilizado han sido los apuntes de elaboración propia que se adjuntan en el Anexo **??**. Decidí elaborar dichos apuntes porque en el Departamento de Matemáticas del I.E.S. Zurbarán se empleaban los libros de la editorial Bruño, sin embargo, no me gustó cómo enfocaba dicho libro el tema de Álgebra. De hecho, no contenía nada relacionado con monomios ni, por tanto, con operaciones con monomios, contenido que hay que impartir pues está recogido tanto en el Decreto 98/2016 como en la Programación Didáctica del departamento. La estructura de los apuntes es similar a la de un libro de texto:

- Una introducción sobre *qué es el Álgebra* al comienzo de la unidad. Al ser un tema que les suele asustar mucho intento introducirlo de una forma atractiva, planteando retos sencillos que son capaces de resolver sin mucha dificultad.

- Después de cada explicación teórica siempre incluyo un ejemplo resulto que facilite la comprensión de los conceptos y para que les sirva de 'guía' a la hora de enfrentarse ellos solo a un ejercicio.

- Al final de cada sección se proponen algunos ejercicios que engloban todo lo expuesto en dicha sección.

- Al final de los apuntes dedico un capítulo exclusivamente a ejercicios y problemas, como puede verse en la Figura 2.3. Además, como creo que la resolución de problemas es una parte fundamental, y más en esta unidad didáctica, en la parte dedicada a problemas, les doy los pasos generales a seguir cuando hay que plantear y resolver un problema en el que están involucradas las ecuaciones, y resuelvo uno básico siguiendo cada uno de estos pasos.

Soy consciente de que los apuntes que he elaborado son un poco ambiciosos, sin embargo, he decidido hacer unos apuntes bastante completos para que los alumnos puedan

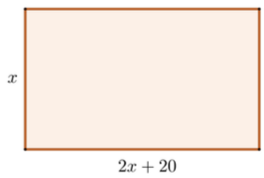
3.2 Problemas

Antes de ponermos a resolver problemas tenemos que aprender a resolver problemas en los que aparecen ecuaciones. Para ello, vamos a dar una serie de pasos que tenemos que seguir siempre que tengamos que resolver un problema:

- ♡ Leer el problema despacio y, si fuera necesario, leerlo más de una vez.
- ♡ Extraer los datos que nos proporciona el enunciado.
- ♡ ¿Qué nos preguntan? Localizar cuál es la incógnita.
- ♡ Una vez que extraemos los datos y localizamos la incógnita, podemos pasar a plantear la ecuación.
- ♡ Resolvemos la ecuación.
- ♡ Respondemos la pregunta que nos hacía el enunciado del problema con el valor de la incógnita que hayamos obtenido.

■ **Ejemplo.** Hemos vallado una finca en forma de rectángulo con 520 metros de valla. Sabemos que el largo de la finca mide el doble que el ancho más 20 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?

En este tipo de problemas suele ayudar mucho hacer un dibujo:



Datos:

- Perímetro de la finca $= 520$ metros.
- El ancho de la finca mide: x.
- El largo de la finca mide: $2x+20$.

Pergunta: ¿dimensiones de la finca?

Lo primero que tenemos que tener claro es que el perímetro de una figura plana es la suma de las longitudes de todos sus lados. Por tanto, en el caso del rectángulo el perímetro es:

$$\text{Perímetro } = 2\cdot\text{Ancho} + 2\cdot\text{Ancho}$$

Con los datos que nos da el problema:

$$520 = \text{Perímetro } = 2\cdot\text{Ancho} + 2\cdot\text{Alto} = 2(2x+20)+2x$$

Luego, la ecuación que tenemos que resolver es $2(2x+20)+2x=520$. Siguiendo los pasos para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita:

$$2(2x+20)+2x=520 \Rightarrow 4x+40+2x=520 \Rightarrow 6x=480 \Rightarrow x=80$$

Por tanto, la finca mide 80 metros de ancho y 180 metros de largo. ■

Figura 2.3: Una parte de la sección de problemas

consultar cualquier dudas que les pueda surgir. Además, he incluido ejercicios de distintos niveles pensando en los alumnos con más dificultades de aprendizaje así como en los alumnos que tienen un nivel superior al resto de la clase.

En general, he trabajado este tema de una forma muy activa con los alumnos. Siempre que el tiempo me lo permitía, hacía que fueran los alumnos los que corrigieran los ejercicios en la pizarra y los explicaran a sus compañeros. Además, como suele pasar, siempre eran los mismos los que se prestaban voluntarios por lo que en muchas ocasiones era yo misma la que elegía a los alumnos que tenían que salir a la pizarra. De hecho, muchos ponían la 'excusa' de no tener hechas las tareas o de no saber cómo se hacía el ejercicio para no salir a la pizarra, sin embargo, era algo que a mí no me importaba, pues creo que donde mejor se aprende es en la pizarra. De esta forma conseguí que los chicos y chicas fueran perdiendo el miedo a equivocarse y que cada vez fueran más los que quisieran salir a la pizarra.

Quiero comentar que, ya el primer día que entré en el aula, observé que los alumnos tenían gran dependencia de la calculadora; la usaban hasta para hacer una suma sencilla que deberían ser capaces de realizar de cabeza. Creo que esto favorece el hecho de que, como veremos después, no sepan realizar operaciones con números enteros. Durante el desarrollo de mi unidad didáctica no he dejado que usen la calculadora; siempre he intentado que las cuentas que tuvieran que realizar fueran sencillas. Tampoco dejé que la usaran en el examen. Esta idea no ha sido bien acogida por los alumnos, sin embargo, no creo que sea necesario el uso de la calculadora en una unidad didáctica de álgebra.

Finalmente, quiero mencionar que para las vacaciones de Semana Santa elaboré una serie de ejercicios, contenidos también en el Anexo **??**, sobre la contado de la unidad hasta eso momento para intentar que al volver no hubiesen olvidado todo. Estos ejercicios se entregaron fotocopiados y me los tenían que entregar hechos el primer día después de las vacaciones para que yo los corrigiera, pues contaban un 10 % de la nota del tema.

2.5.1. Recursos empleados

Durante la impartición de las clases se han usado recursos de distinta índole, para favorecer el aprendizaje y rendimiento de los alumnos. Todas las clases se han desarrollado en el aula del correspondiente grupo y, en su inmensa mayoría, las clases se han apoyado tanto en la pizarra tradicional como en la pizarra digital.

1. *Apuntes de Álgebra*: texto de elaboración propia que recoge todo el contenido que hay que impartir en esta unidad. Sirven como base para el posterior estudio del alumno así como guión para la impartición de las clases.

2. *Material de refuerzo*: como son los ejercicios mandados para realizar durante las vacaciones de Semana Santa y la relación de ejercicios y problemas de repaso que preparé para que tuvieran material extra a la hora de estudiar para el examen.

3. *Pizarra tradicional de tiza.* Todas las explicaciones se han realizado en pizarra pues, al estar en un grupo de 1º ESO, he intentado ser muy meticulosa y ordenada en las explicaciones, indicando constantemente a los alumnos los conceptos más importantes y cuáles son las notas que deben tomar en sus cuadernos. La forma que me resultaba más cómoda era a través del uso de la pizarra.

4. *Pizarra digital.* Para evitar que tuvieran que traer a clase todos los días los apuntes fotocopiados, hice uso de la pizarra digital para proyectarlos y que todos pudieran seguirlos en el desarrollo de la clase. De esta forma, además, evito las típicas situaciones de *'se me han olvidados los apuntes en casa'*.

5. *Google Classroom.* A través de esta herramienta digital les hago llegar el material, como son los apuntes de la unidad, o las fotocopias de repaso.

2.5.2. Organización de las clases

La rutina de las clases era la siguiente:

- Empezábamos la clase revisando y corrigiendo las tareas que se habían mandado el día anterior, así como repasando oralmente y entre todos algunos de los conceptos más importante explicados hasta ese momento. Idealmente, había pensado en no dedicar más de 10-15 minutos a esta parte, sin embargo, había días que esto nos llevaba más de la mitad de la sesión, pues habían surgido muchas dificultades a la hora de realizar las tareas. Tampoco era al que me importara demasiado pues de esta forma también repasaba los conceptos explicados en días anteriores; soy bastante partidaria de un *desarrollo cíclico* de las unidades didácticas, es decir, a la vez que introducimos conceptos nuevos vamos repasando los anteriores. Esta metodología favorece que los alumnos lleven la unidad *al día* más fácilmente.

- Posteriormente, procedía a introducir los nuevos conceptos que correspondiesen en cada sesión y se hacían ejemplos en pizarra para reforzar la explicación. Incluso intentaba que fuesen los propios alumnos los que me guiasen en la resolución de estos ejemplos para comprobar si se habían comprendido los conceptos. También se dejaba tiempo para que preguntaran dudas.

- Se mandaban tareas para realizar en casa que, si quedaba tiempo, podían comenzar a realizar en clase.

2.6. Secuenciación y temporalización

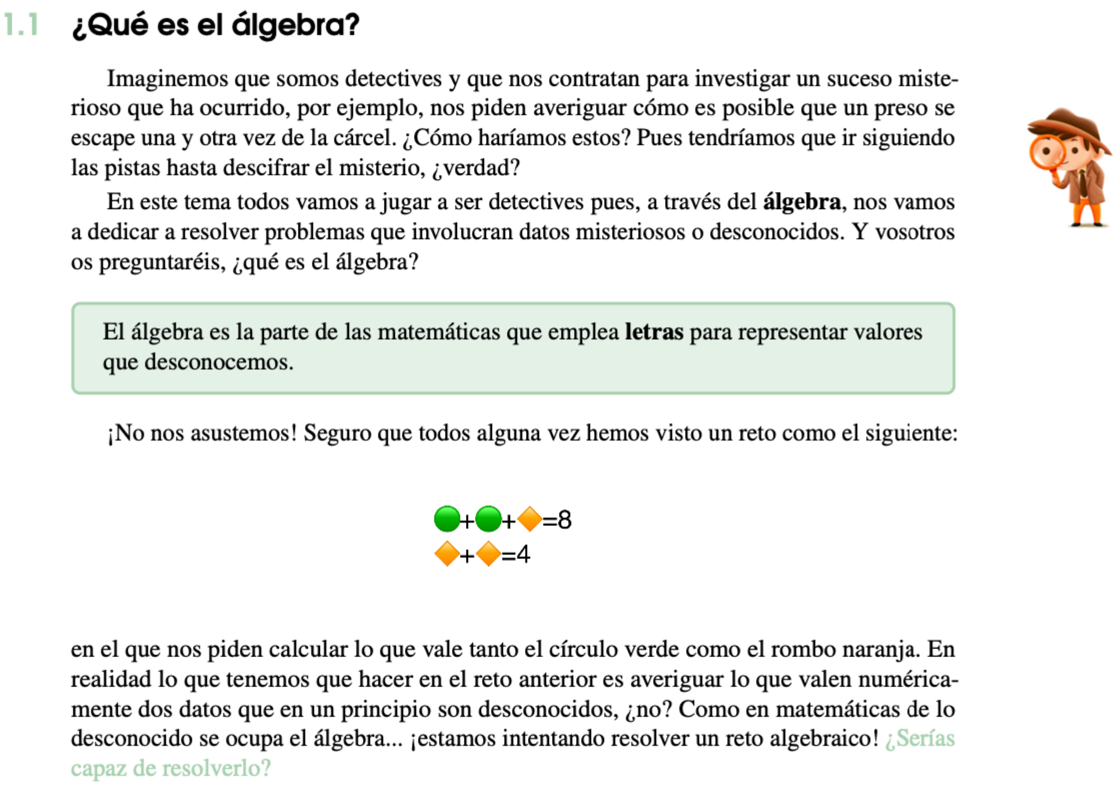
He impartido la unidad didáctica en 15 sesiones, incluyendo la sesión dedicada a la prueba escrita.

Comienzo a impartir la unidad didáctica el día 31 de marzo, fecha muy próxima a las vacaciones de Semana Santa y a la Semana Cultural del centro, que se celebra del 4 al 8 de abril. Por este motivo mi idea es introducirlos en el lenguaje algebraico, expresiones algebraicas y monomios antes de irnos de vacaciones, mandar algunos ejercicios de refuerzo para que realicen durante la Semana Santa (que contarán para la nota final) y dejar para después de vacaciones la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita y la resolución de problemas. La Semana Cultural del centro supone un 'inconveniente' para mí a la hora de la impartición de la unidad pues, debido a una actividad que realizaron los alumnos de uno de los grupos, se descuadraron las sesiones y finalmente impartí una sesión más en un grupo que en otro.

Más específicamente, la unidad didáctica se desarrolló de la siguiente forma:

1. *Fase de introducción:* abarcando únicamente la primera sesión. En ella, empiezo proyectando un vídeo sobre qué es el Álgebra en la pizarra. Además, aprovechan

que estamos en un grupo perteneciente a la sección bilingüe de inglés, dicho vídeo está en inglés: https://www.youtube.com/watch?v=NybHckSEQBI. De esta forma, intento que tengan una idea general de qué es lo que se trata de hacer en esta parte de las Matemáticas. Posteriormente al vídeo, leemos la introducción a la unidad que incluí en mis propios apuntes y resolvemos entre todos el reto que se planteaba.



1.1 ¿Qué es el álgebra?

Imaginemos que somos detectives y que nos contratan para investigar un suceso misterioso que ha ocurrido, por ejemplo, nos piden averiguar cómo es posible que un preso se escape una y otra vez de la cárcel. ¿Cómo haríamos estos? Pues tendríamos que ir siguiendo las pistas hasta descifrar el misterio, ¿verdad?

En este tema todos vamos a jugar a ser detectives pues, a través del **álgebra**, nos vamos a dedicar a resolver problemas que involucran datos misteriosos o desconocidos. Y vosotros os preguntaréis, ¿qué es el álgebra?

> El álgebra es la parte de las matemáticas que emplea **letras** para representar valores que desconocemos.

¡No nos asustemos! Seguro que todos alguna vez hemos visto un reto como el siguiente:

●+●+◆=8
◆+◆=4

en el que nos piden calcular lo que vale tanto el círculo verde como el rombo naranja. En realidad lo que tenemos que hacer en el reto anterior es averiguar lo que valen numéricamente dos datos que en un principio son desconocidos, ¿no? Como en matemáticas de lo desconocido se ocupa el álgebra... ¡estamos intentando resolver un reto algebraico! ¿Serías capaz de resolverlo?

Figura 2.4: Introducción a la unidad didáctica

2. *Fase de desarrollo:* abarca doce sesiones, de la segunda a la decimosegunda. Aquí es donde se incluyen las explicaciones de carácter teórico, así como la realización de la mayor parte de ejercicios. Además, en esta sección también proyecto un vídeo llegados a la sección de ecuaciones sobre la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, también en inglés: https://www.youtube.com/watch?t=548s&v=l3XzepNO3KQ.

   Dadas las vacaciones de Semana Santa, esta fase empieza a finales de marzo, antes de las vacaciones, y finaliza los últimos días de abril.

3. *Fase de síntesis:* abarca una única sesión, la del 3 de mayo. Para esta sesión no planeo y dejo la hora de clase para que los alumnos pregunten las dudas que tengan y para repasar los puntos del tema en los que tengan más dificultades. Esta sesión sirve como repaso para el examen que tiene lugar en la sesión del día siguiente. Además, también analizamos los ejercicios de repaso extra que se les hicieron llegar por Classroom en días anteriores (véase el final del Anexo **??**) y, por la tarde, les subo estos ejercicios resueltos a Classroom para que puedan comprobar si los tienen bien resueltos de cara a la prueba escrita.

4. *Fase de evaluación:* abarca una única sesión, y en ella tiene lugar la prueba escrita evaluable.

Fase	**Número**	**Contenido**
Introducción	1	Introducción a la unidad usando el vídeo y los apuntes
Desarrollo	2	Traducción al lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas
	3	Elementos de una expresión algebraica y valor numérico
	4	Monomios. Grado de un monomio
	5	Operaciones con monomios: suma y resta
	6	Operaciones con monomios: producto y cociente
	7	Introducción a las ecuaciones. Ecuaciones sencillas
	8	Ecuaciones sencillas y con paréntesis
	9	Ecuaciones con paréntesis. Ecuaciones con denominadores
	10	Ecuaciones con denominadores
	11	Ecuaciones con denominadores. Resolución de problemas
	12	Resolución de problemas
	13	
Síntesis	14	Repaso para la prueba escrita
Evaluación	15	Prueba escrita evaluable

Cuadro 2.1: Secuenciación y temporalización de la unidad

2.7. Actividades de enseñanza-aprendizaje

En esta sección expongo las actividades que considero más importantes y que he realizado con los alumnos durante el desarrollo de la unidad didáctica, así como las dificultades encontradas durante el desarrollo de las misma y los objetivos que buscaba conseguir a través ellas.

En un primer momento me planteé realizar un cuestionario usando la plataforma *Kahoot!* o alguna similar que sirviera como evaluación inicial. Sin embargo, esta idea al final no la llevé a la práctica principalmente por dos motivos:

- En un grupo de 1º ESO los alumnos suelen tener entre 12-13 años, por lo que la mayoría aún no disponen de teléfono móvil propio para llevar al aula y poder realizar la actividad.

- Al ser una unidad en la cual el contenido es totalmente nuevo no tenía muy claro cómo enforcar dicha evaluación inicial.

Por tanto, como ya he mencionado en varias ocasiones previamente, el desarrollo de la unidad didáctica se ha llevado a cabo de forma tradicional, usando medios digitales como la pizarra digital.

2.7.1. Resolución de ejercicios

Aquí quiero destacar sobre todo la resolución de ejercicios sobre *traducción al lenguaje algebraico*, que son los que se prestan a poder tener cierta relación con nuestra vida cotidiana. El resto de ejercicios el tema son fundamentalmente mecánicos o teóricos, aunque también hablaremos de algunos de ellos.

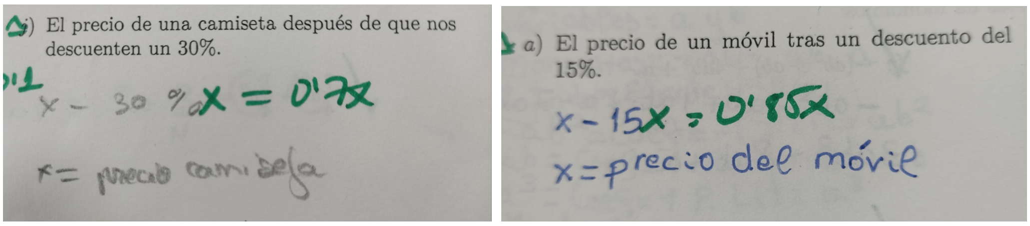
1. *Traducción al lenguaje algebraico-Ejercicio 1 (página 8) y ejercicio 1 (página 25)*. Ambos son exclusivamente de traducir al lenguaje algebraico, sin embargo, he hecho que este ejercicio sea distinto a cualquiera del estilo que encontramos en un libro de texto. He introducido sentencias a traducir en relación con muchas situaciones, de forma que se trabaja con números pares, impares, múltiplos, porcentajes, áreas y perímetros...

   1. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes expresiones:
      a) María tenía ahorrada una cantidad desconocida de dinero. Por su cumpleaños sus padres le regalan 20 euros más. ¿Cuánto dinero tiene María ahora?
      b) Desconocemos lo que mide la base de un rectángulo pero sabemos que su altura mide 4 cm. ¿Cuánto vale su perímetro?
      c) El triple de un número menos su doble.
      d) La edad de una persona hace 5 años.
      e) Lo que cuesta un producto si nos hacen una rebaja del 20 %.
      f) La mitad de un número.
      g) Un número par.
      h) La suma de dos números consecutivos.

   Figura 2.5: Ejercicio 1 (página 8) sobre traducción a lenguaje algebraico

   Al realizar este tipo de actividades mi objetivo era que los alumnos se familiarizaran con el concepto de *dato desconocido* o *incógnita*, y que supieran identificarlas para que, llegados a la resolución de problemas, les resultara mucho más sencillo el planteamiento de los mismos. Introduje enunciados sencillos de traducir en los cuales se identifica sin mucho trabajo cuál es la incógnita, como es el caso del apartado a) del ejercicio de la Figura 2.5. Por otro lado, también creí que era una buena idea trabajar con enunciados más complejos, como en los que intervienen aumentos o disminuciones porcentuales. Justo de esto trataba la unidad didáctica anterior, por lo que esto sirve, además, para que los alumnos vean que todos los conceptos matemáticos están relacionados.

En cuanto a las dificultades encontradas en este tipo de ejercicios, cabe destacar una en particular, y está relacionada con lo que explicaba anteriormente. Cuando los alumnos traducen al lenguaje algebraico un enunciado del tipo *lo que cuesta un producto si nos hacen una rebaja del 20 %* saben identificar sin ningún problema lo que significa la incógnita, sin embargo, su respuesta siempre era: $x - 20\,\%$. Tuve que repetir en multitud de ocasiones que el $20\,\%$ en sí mismo no significa nada, que se tiene que calcular sobre alguna cantidad. Aún así, era un error que cometían con mucha frecuencia.



(a) (b)

Figura 2.6: Ejemplo del error comentado anteriormente

También surgían dificultades a la hora de traducir al lenguaje algebraico enunciados que involucraban áreas y perímetros. Los alumnos no sabían diferenciar el área del perímetro, y generalmente tenían más problemas a la hora de saber lo que era el perímetro que el área. Esto no me preocupó demasiado pues lo asocié al hecho de que aún no habían estudiado nada del bloque de Geometría en el presente curso, por lo que eran conceptos que tenían 'oxidados'.

Por último, mencionar que me llamó mucha la atención que fueran capaces de escribir la expresión algebraica correspondiente a un número par. Considero que el darse cuenta de que cualquier número par se expresa de la forma $2x$ es algo complejo para 1º ESO, sin embargo, con un poco de ayuda se dieron cuenta de ello.

2. *Ejercicios sobre monomios.* Hicimos ejercicios de distintos tipos: indicar los elementos y el grado de un monomio, de monomios semejantes, de operaciones con monomios... Así como alguno más complejo que comentaré posteriormente.

En cuento a ejercicios 'tipo' de monomios, realizamos en clase los dos siguientes:

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Estudia el coeficiente, la parte literal y el grado de los siguientes polinomios:

   a) $-10x^2y$
   b) a^3b
   c) $6nm^4$
   d) $11a^2b^3$
   e) xy^6
   f) $-8s^7t$
   g) xya^7b^2
   h) $-12x^5s^2$

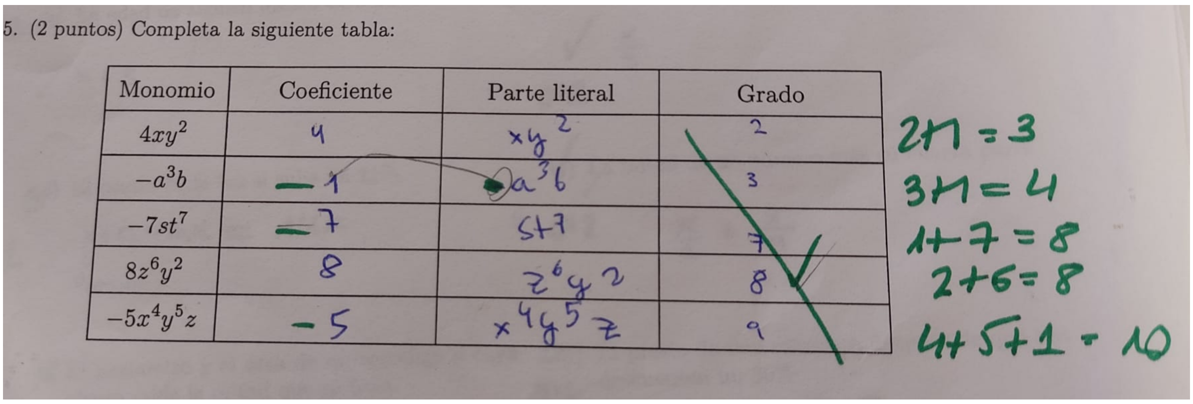
2. ¿Son semejantes los siguientes monomios?

   a) x^2y y x^4y^2
   b) a^5b^2 y $5a^5b^2$
   c) $-n^2m^4$ y $3m^4n^2$
   d) $11a^2$ y a^5
   e) x^2y^6 y $3y^6x^2$
   f) s^2t^3 y $10s^4t^2$
   g) xya^7b^2 y x^2a^7
   h) $-12x^5s^2$ y x^5s^2

Figura 2.7: Ejercicios sobre monomios realizados en clase

El concepto de *monomios semejantes* lo comprendieron sin mayor dificultad. Sin embargo, en ejercicios como el número uno de la Figura 2.7 tenían problemas a la hora de identificar los *coeficientes* cuando estos eran igual a 1 o a -1; al no aparecer ningún número delante de la parte literal en varias ocasiones me dijeron que el monomio *no* tenía coeficiente. Fue un error que fuimos trabajando en clase y que finalmente conseguí eliminar. También surgían problemas cuando los coeficientes eran números negativos; en ese caso, no sé muy bien por qué, asignaban el signo a la parte literal. En relación al cálculo de grados no había muchos problemas, no obstante sí que hubo alumnos a los que les costó entender el concepto de *grado de un monomio.*

Como podemos ver en la Figura 2.8, había algunos alumnos que consideraban que el grado de un monomio era la mayor potencia de la parte literal.



5. (2 puntos) Completa la siguiente tabla:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$4xy^2$	4	xy^2	2
$-a^3b$	-1	a^3b	3
$-7st^7$	-7	st^7	7
$8z^6y^2$	8	z^6y^2	8
$-5x^4y^5z$	-5	x^4y^5z	9

$2+1=3$
$3+1=4$
$1+7=8$
$2+6=8$
$4+5+1=10$

Figura 2.8: Errores comunes en la resolución de ejercicios de monomios

Las operaciones con monomios en las que más dificultades encontré fueron la suma y la resta, pues tenían que tener en cuenta qué monomios de los que formaban la operación eran semejantes. En general, el producto y el cocientes de monomios no dieron muchos problemas; eso sí, tuve que recordar en clase cómo se multiplicaban y cómo se dividían potencias con la misma base.

Además de los típicos ejercicios sobre indicar los elementos de un monomio y de operaciones con monomios, incluí el ejercicio 3 de la página 10, que requiere un poco más de madurez y control sobre el concepto de monomio. Se realizó en clase, entre todos, y la verdad es que salió mejor de lo que me esperaba.

3. Escribe monomios con las siguientes características:
- *a*) **De grado 2 y cuyo coeficiente sea 4.**
- *b*) **Que tenga el mismo grado que el monomio x^5 pero con dos variables en la parte literal.**
- *c*) **De grado 3 cuyo valor numérico en $x = 2$ sea 8.**
- *d*) **Con el mismo grado que el monomio $7x^2y^3$ pero cuya parte literal tenga únicamente una variable.**

Figura 2.9: Ejercicio 3 página 10

3. *Ejercicios sobre ecuaciones.* Empezamos resolviendo ecuaciones sencillas por *tanteo* para que comprendieran en qué consistía resolver una ecuación. En general, este tipo de ejercicios no dieron muchos problemas pues los hicimos en clase entre todos.

■ **Ejemplo.** Ecuaciones de primer grado:

$$3x+1=10 \quad , \quad 2x-2=x \quad , \quad -x+1=3$$

Figura 2.10: Ejemplos de ecuaciones que resolvimos por tanteo

Posteriormente comenzamos a resolver ecuaciones un poco más complejas, en las que ya nos encontrábamos incógnitas en ambos miembros. Para ello, les enseñé a *trasponer términos* y me di cuenta de que esto es algo que cuesta mucho a los alumnos de 1º ESO, por lo que tuve que repetirlo varias veces en la pizarra con varias ejemplos. Poco a poco fueron comprendiendo el procedimiento por lo que les mandé algunos ejercicios de ecuaciones sencillas para que practicaran. En un principio les indiqué que escribieran todos los pasos de resolución para que comprendieran bien lo que estaban haciendo.

Fue necesarios hacer varios ejercicios de este tipo para que cogieran confianza y seguridad en el proceso de resolución de ecuaciones antes de pasar a resolver ecuaciones con paréntesis.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. **Resuelve, paso por paso, las siguientes ecuaciones:**

   a) $3x+2=-x$
   b) $21x=42$
   c) $7x=21$
   d) $2x-10=x$
   e) $-5x=20-x$
   f) $8x+1=17$

Figura 2.11: Ejercicio de resolución de ecuaciones sencillas

La mayor dificultad que encontré a la hora de introducir las ecuaciones con paréntesis era, justamente, eliminar los paréntesis. Aunque es algo que deberían manejar con cierta soltura, tuve que repetir en más de una ocasión que, para quitar un paréntesis, había que multiplicar el número de fuera por cada uno de los términos de dentro del paréntesis, y no solo por el primero, como solían hacer ellos. Tras hacer muchos ejemplos en pizarra, conseguí que la mayoría comprendieran el procedimiento. He de decir que al llegar a este tipo de ecuaciones intenté que mecanizaran el proceso de trasposición de términos para 'ahorrar' pasos en la resolución ya que, especificar todos los pasos cuando son ecuaciones más complejas, puede llevar a error. Esto al principio llevó a confusión pues no conseguían darse cuenta de que en realidad estaban haciendo lo mismo pero sin ponerlo explícitamente.

2. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

   a) $2x+5(3x-1)=x-13$
   b) $5-4(2x-3)=2x+7$
   c) $5x-3(4x-2)=4(2x-1)$
   d) $5-4(3x+2)=4-5(3x-1)$

Figura 2.12: Ejercicio de ecuaciones con paréntesis realizado en clase

Por último, dado que el nivel de los grupos era bastante alto y aunque no sea contenido propio de 1º ESO, decidí introducir las ecuaciones con denominadores. Las introduje poco a poco; empezamos despejando incógnitas de ecuaciones muy sencillas en las que únicamente había un denominador. Además, indiqué en los apuntes cuáles eran los pasos para resolver este tipo de ecuaciones.

Como era de esperar, al resolver este tipo de ecuaciones las dificultades surgían al eliminar denominadores. Aunque recordaban cómo se calculaba el *mínimo común múltiplo*, a la hora de multiplicar los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo, se dejaban sin multiplicar los términos de la ecuación que no tenían denominador, es decir, los números enteros. Esto hacía que la solución obtenida en la ecuación no fuese la correcta. De nuevo, conseguí solventar este error, en su inmensa mayoría, tras hacer muchos ejemplos en pizarra.

Por último, introduje las ecuaciones ‘especiales’: ecuaciones sin solución y ecuaciones con infinitas soluciones. Aunque en los apuntes realicé una sección de teoría en la que las introducía, como puede verse en la Figura 2.14, en clase las introduje haciendo uso de ejemplos, pues creí que así resultaría más sencillo para los alumnos.

c) $\boxed{\frac{x}{2}+2=6}$

- ♡ Tenemos una ecuación con denominadores, luego el primer paso es eliminar dichos denominadores. Como el único denominador que tenemos es 2, el mínimo común múltiplo también es 2. Por tanto, multiplicamos por 2 todos los términos:

$$\frac{x}{2}+2=6 \overset{(\cdot 2)}{\Rightarrow} x+2\cdot 2=6\cdot 2 \Rightarrow x+4=12$$

- ♡ No tenemos paréntesis, por lo que pasamos a trasponer los términos. Para ello, basta sumar -4 en ambos miembros:

$$x+4=12 \overset{+(-4)}{\Rightarrow} x+4+(-4)=12+(-4) \Rightarrow x+4-4=12-4 \Rightarrow x=8$$

En este paso ya hemos obtenido la incógnita despejada, por lo que hemos terminado.

Así, $\boxed{x=8}$ es la solución de la ecuación $\frac{x}{2}+2=6$.

Figura 2.13: Ecuaciones con denominadores sencillas

2.7.2. Actividad relacionada con la sección bilingüe

En una de las sesiones dedicadas a la unidad didáctica contamos con la ayuda del auxiliar de conversación de la sección bilingüe de inglés. Aprovechamos para desarrollar esta sección íntegramente en inglés, y en ella realizamos la actividad que se incluye al final del Anexo **??** sobre resolución de ecuaciones.

Como mencionaré más adelante en el capítulo de *Propuestas de Mejora*, esta sesión no se desarrolló todo lo bien que hubiésemos esperamos siendo los motivos variados, como también allí expongo.

2.7.3. Resolución de problemas

Desde mi punto de vista, es una de las partes fundamentales de esta unidad didáctica. Haciendo uso de los problemas no solo se evalúa la capacidad del alumno para resolver una ecuación, sino que también evalúas su comprensión lectora y capacidad de razonamiento a la hora de plantear el problema. En su mayor parte, los problemas que hemos realizado a lo largo de la unidad han sido problemas contextualizados, para intentar que vieran que las matemáticas en general, y de las ecuaciones en particular, tienen muchas

2.3.2 Ecuaciones especiales

Hasta este momento únicamente nos hemos encontrado con ecuaciones de primer grado con una incógnita que solo tenían una solución. Pero, ¿todas tienen únicamente una solución? La respuesta es no, hay ecuaciones de primer grado con una incógnita que tienen infinitas soluciones, así como ecuaciones de primer grado con una incógnita que no tienen solución. Veamos algunos ejemplos.

▪ **Ejemplo.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x+2(-x+1)=2$ *b*) $4x+4(-x+1)=10$

- $\boxed{2x+2(-x+1)=2}$ Eliminamos paréntesis y trasponemos términos:

$$2x+2(-x+1)=2 \Rightarrow 2x-2x+2=2 \Rightarrow 2x-2x=2-2 \Rightarrow 0=0$$

♡ Al resolver la ecuación hemos obtenido la igualdad $0=0$, que siempre es cierta. Esto nos indica que la ecuación se verifica siempre, independientemente del valor que tome la x.

♡ Así, la ecuación $2x+2(-x+1)=2$ tiene infinitas soluciones, pues cualquier número cumple la igualdad.

- $\boxed{4x+4(-x+1)=10}$ Eliminamos paréntesis y trasponemos términos:

$$4x+4(-x+1)=10 \Rightarrow 4x+4(-x)+4=10 \Rightarrow 4x-4x+4=10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0x=6 \Rightarrow 0=6$$

♡ Al resolver la ecuación hemos obtenido la igualdad $0=6$, que nunca es cierta. Esto nos indica que la ecuación nunca se a cumplir, independientemente del valor que tome la x.

♡ Así, la ecuación $4x+4(-x+1)=10$ no tiene solución.

▪

Figura 2.14: Ecuaciones especiales

aplicaciones directas en nuestro día a día. Son chicos y chicas de 1º ESO por lo que, además de enseñarles a resolver el problema, tienes que dedicar unos minutos a explicarles qué es la *bajada de bandera de un taxi* o cómo funciona el *servicio de autobús urbano de Badajoz*. Esto me pareció una parte muy bonita pues muchas veces nos centramos tanto en la parte académica que nos olvidamos de todas las implicaciones que podemos tener los profesores en la vida de los alumnos más allá de las aulas. Idealmente me encantaría que todos se hubiesen enterado de cómo se resolvía el problema pero el simple hecho de que ahora sepan más o menos cómo tienen que coger un autobús y lo que les pueden ayudar las matemáticas en ello me produce mucha satisfacción.

Dentro de todos los problemas que hemos hecho dentro de clase, quiero destacar algunos que se alejan de ser los típicos que encontramos en una relación de problemas de ecuaciones, y que son, en su mayoría, de elaboración propia.

1. *Problema de la fruta (Problema 3)*. El objetivo de este problema es que vean otra aplicación de las ecuaciones en el día a día. Su resolución no generó muchas

dificultades; el planteamiento lo realizamos en clase entre todos.

3. **He ido a comprar fruta y en total me he gastado 6 euros. Sabiendo que entre plátanos y manzanas he comprado 5 kilos de fruta, y que los plátanos costaban 2 euros el kilo y las manzanas 1 euro el kilo, ¿cuántos kilos de cada fruta he comprado?**

Figura 2.15: Problema fruta

2. *Problema de los billetes de autobús (Problema 5)*. Este problema ya lo he mencionado anteriormente, se incluye en la Figura 2.16, y lo cierto es que fue uno de los que más gustó en ambos grupos. La mayoría no sabía cómo se cogía un autobús por lo que dediqué unos minutos a explicarlo; noté lo sencillo que es hacer que a unos chicos de 12-13 años te presten atención en clase de matemáticas cuando las ven con una aplicación directa.

5. **En una ciudad tenemos dos tarifas de autobús: podemos pagar $0'6$ euros por viaje o podemos adquirir una tarjeta que cuesta 30 euros y vale para todo el mes.**
   a) **¿Cuál es el mínimo de viajes que tenemos que hacer en autobús para que merezca la pena comprar la tarjeta mensual?**
   b) **Plantea una expresión algebraica que indique lo que nos cuesta cada viaje en función del número de viajes si compramos la tarjeta. ¿Qué pasa si hacemos 40 viajes durante todo el mes?**

Figura 2.16: Problema de los billetes de autobús

3. *Problema del taxi (Problema 9)*. Con este problema (véase la Figura) se dio una situación parecida a la del problema anterior. De nuevo, es un problema sencillo, que más que por su dificultad matemática estaba pensado para que se dieran cuenta de lo relevantes que pueden ser las ecuaciones en el día a día.

4. *Problema de las rebajas (Problema 12)*. Este problema era de un nivel un poco superior al resto, por lo que lo propuse como un reto. De nuevo, simula una situación de la vida real, y es un intento porque comprendan cómo funcionan los descuentos desde el punto de vista de Álgebra.

9. Un taxi cobra 2′4 euros por la bajada de bandera y 0′5 euros por kilómetro recorrido. Si hemos pagado 7′5 euros, ¿cuántos kilómetros hemos recorrido?

Figura 2.17: Problema del taxi

Me pareció muy buena idea proponer este problema porque justo la unidad didáctica anterior trataba sobre *Proporciones y Porcentajes*. De esta forma pueden comprobar que todo en matemáticas está relacionado y que hay continuidad en el temario.
Por otro lado, es cierto que en el planteamiento de este problema tuve que ayudarles, pues no era tan sencillo como los que habíamos realizado hasta el momento. La mayor dificultad surgió a la hora de identificar la incógnita, pues hay que distinguir entre los precios sin descuento y los precios con descuento.

12. Hemos comprado un pantalón y una camisa por un total de 48 euros. Sabemos que en el pantalón nos han hecho un descuento del 15 % y la camisa tenía un descuento del 10 %. Sin el descuento habríamos comprado las dos cosas por 55. ¿Cuánto costaba cada prenda inicialmente?

2.8. Evaluación

La evaluación de la unidad didáctica se realiza de forma tradicional, es decir, se realiza un examen escrito que es lo que supone el mayor peso de la nota del tema. No obstante, el trabajo diario, la participación en clase y la entrega de la actividad evaluable de Semana Santa también tienen relevancia en la nota.

2.8.1. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables

El Cuadro 2.2 muestra la relación entre los contenidos del Bloque II del currículo trabajados en la unidad y los criterios de evaluación junto los estándares de aprendizaje evaluables.

Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**	**Competencias claves**
1. Iniciación al lenguaje algebraico. Monomios y polinomios. 2. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. 3. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.	1. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer grado y constrastando los resultados obtenidos.	1.1 Comprueba, dada una ecuación, si un número (o números) es (son) solución de la misma. 1.2. Resuelve ecuaciones de primer grado con una incógnita. 1.3. Plantea y resuelve problemas sencillos mediante ecuaciones de primer grado.	CCM, CMCT CD, AA, CSC, SIEE

Cuadro 2.2: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de la unidad didáctica impartida

2.8.2. Instrumentos de evaluación y criterios de calificación

La evaluación de la unidad didáctica la llevo a cabo teniendo en cuenta los siguientes puntos:

1. *Trabajo diario y participación en clase.* Valoro muy positivamente el hecho de que haya una constancia a lo largo del desarrollo de la unidad didáctica por parte del alumno, por ejemplo, llevando hechas las tareas que se mandaron en la sesión anterior. Los alumnos que, además de llevar las tareas realizadas, las tenga bien realizadas obtienen mayor puntuación.

   Otro punto muy importante para mí es la actitud que el alumno muestra hacia la asignatura. Valoro muy positivamente que haya una actitud activa en las sesiones, preguntando dudas y respondiendo cuando yo hago alguna pregunta, así como ofreciéndose voluntarios a la hora de realizar ejercicios en la pizarra. Ni falta hace decir que se valora el buen comportamiento, cosa que no dio demasiado problema en ninguno de los grupos en los que imparto docencia.

2. *Prueba escrita.* Se realiza el finalizar la unidad didáctica y su objetivo no es otro que comprobar cuál es el grado de adquisición de los conceptos fundamentales de la unidad por parte del alumno.

3. *Entrega de tareas evaluables.* Ejercicios que se han de entregar resueltos tras volver de las vacaciones de Semana Santa.

En cuanto a los criterios de calificación, estos son los siguientes:

- La prueba escrita tiene un peso del 80 %.
- La participación en clase y el trabajo diario tiene un peso del 10 %.
- La entrega de las tareas evaluables tiene un peso del 10 %.

Para tener todas las notas perfectamente organizadas he usado una *hoja de cálculo* realizada con el programa *Numbers*. A continuación adjunto las tablas correspondientes a cada uno de los grupos.

Nº	Alumno	Tareas y participación (10%)								Actividad (10%)	Examen (80%)								Nota final	Nota	Observaciones
1	[redacted]	0	0,25	1	0,75	0,5	0	**0,50**	**0,43**	5,2	0,5	0,5	1	2	0,25	1	1,5	**6,75**	**6,35**	**6,40**	
2	[redacted]	0,75	1	1	0,75		0	**0,25**	**0,63**	7,7	0,8	0,5	0,8	1,5	0,75	0	0,75	**5,1**	**5,48**	**5,50**	
3	[redacted]	1	0,75	1	1	1		**1,00**	**0,96**	3,1	1	0,5	1,2	0,75	1	0,5	1,5	**6,45**	**6,43**	**6,40**	
4	[redacted]	1	1	1	1	0,5	0,75	**1,00**	**0,89**	6,9	1	0,9	1,6	1,5	1,25	1	1,25	**8,5**	**8,38**	**8,40**	
5	[redacted]	1	1	1	1	0,75	0,5	**1,00**	**0,89**	3,1	0,25	0,5	0,8	1,25	1	0,5	1,5	**5,8**	**5,84**	**5,90**	
6	[redacted]	0,5	0,5		0,75	0		**0,50**	**0,45**	8,1	0	0,5	0,8	0,75	0	0	1,25	**3,3**	**3,90**	**4,00**	
7	[redacted]	0,5	1	1	1	1	1	**1,00**	**0,93**	2,3	0,25	0,5	1	1	0,5	0	1,5	**4,75**	**4,96**	**5,00**	Repitió en 3º de primaria. Dislexia
8	[redacted]	1	1	1	1	1	1	**1,00**	**1,00**	7,2	1	0,75	1,8	2	1,5	1	1,5	**9,55**	**9,36**	**9,40**	
9	[redacted]	1	0,5	1	1	0,5	1	**0,50**	**0,79**	7,3	1	0,75	2	1	1	1	1,5	**8,25**	**8,12**	**8,10**	
10	[redacted]	1	0,5	1	1	0	1	**0,25**	**0,68**	5,3	0,75	1	2	2	1,25	1	1,5	**9,5**	**8,81**	**8,90**	Diagnostico de altas capacidades
11	[redacted]	1	0	0	0	0		**0,75**	**0,29**	8	1	0,75	1,2	1	1	0	1,5	**6,45**	**6,25**	**6,30**	
12	[redacted]	0,5	0	0	0,75	0	0	**0,25**	**0,21**	5,5	0,75	1	2	1,75	1,25	1	1,5	**9,25**	**8,16**	**8,20**	
13	[redacted]	1	0	0,5	1	0	0,75	**0,25**	**0,50**	7,3	1	0,75	0,8	1,75	1,25	0	1,5	**7,05**	**6,87**	**7,00**	
14	[redacted]	0,5	0	0,75	0,5	0		**0,25**	**0,33**	6,2	0,8	0,25	0,2	0,75	1,5	0,75	1	**5,25**	**5,15**	**5,20**	
15	[redacted]	1	1	1	1	1	1	**0,25**	**0,89**	9,5	1	0,75	1,7	1,25	1,25	0,75	1	**7,7**	**8,00**	**8,00**	
16	[redacted]	1	1		1	1	1	**0,50**	**0,92**	5,5	0,9	1	1,75	1,5	1,25	0	1,25	**7,65**	**7,59**	**7,60**	

Figura 2.18: Seguimiento de 1ºESO B

Nº	Alumno	Tareas y participación (10%)							Actividad (10%)	Examen (80%)								Nota final	Nota	Observaciones
1	[redacted]	1	0,5	1	1	0,75	**1,00**	**0,88**	6,3	1	0,75	1,2	0,75	1,5	0	0,25	**5,45**	**5,87**	**5,90**	Alergías antihistamínicos.
2	[redacted]	1	0,75	0	0,75	0,25	**1,00**	**0,63**	5,7	0,9	0,5	1,5	2	1	1	1	**7,9**	**7,52**	**7,50**	
3	[redacted]	1	0,75	0,75	0,75	0,75	**1,00**	**0,83**	5	1	0,75	0,8	1	1,5	1	1,5	**7,55**	**7,37**	**7,40**	
4	[redacted]	0,25	0,25	1	1	0	**1,00**	**0,58**	3	0	0,5	0,5	1	0,5	0,25	1	**3,75**	**3,88**	**3,90**	
5	[redacted]	1	0,75	0,75	0,75	1	**1,00**	**0,88**	8,7	1	0,75	1,2	1,25	0,75	0	0,75	**5,7**	**6,31**	**6,30**	Gramíneas. Antihistamínicos. Avisar a Urgencias Adeslas. 902322237
6	[redacted]	0,5				0,75	**0,50**	**0,58**	3,8	0,25	0	0,7	0,25	0,5	0	1	**2,7**	**3,12**	**3,10**	ETOSUXIMIDA FAES 250 mg (1-0-2). Ausencias
7	[redacted]			1	1	0	**0,25**	**0,56**	0	0,25	0,5	0,5	1	0,75	0	0,5	**3,5**	**3,36**	**3,40**	
8	[redacted]	0,5	0	0,75	0,75	0	**0,25**	**0,38**	6	1	0,25	0,4	0,25	1	0,5	1,5	**4,9**	**4,90**	**4,90**	
9	[redacted]	1	0,5	0,5	1	0	**0,50**	**0,58**	3,7	0,5	0,25	1	1	0,25	0	0,75	**3,75**	**3,95**	**4,00**	
10	[redacted]	1	0,25	0,5	1	0	**1,00**	**0,63**	5,3	0,9	0,75	0,4	0,5	1,25	0,25	0,5	**4,55**	**4,80**	**4,80**	
11	[redacted]	1	1	1	1	0	**1,00**	**0,83**	9,5	1	0,5	1,8	1,5	1	0,25	1,5	**7,55**	**7,82**	**7,80**	
12	[redacted]	1	0,25	1	1	0,75	**0,50**	**0,75**	8,3	0,2	0,75	1	0	0,75	0	0,75	**3,45**	**4,34**	**4,30**	
13	[redacted]	1	0,5	1	1	0	**0,25**	**0,63**	7,5	0,25	0,5	0,8	1,25	1	0	1,25	**5,05**	**5,42**	**5,40**	
14	[redacted]	1	0,75	0,75	0,5	0	**1,00**	**0,67**	8	1	0,75	1,5	1,25	1	1	1,5	**8**	**7,87**	**7,90**	
15	[redacted]	1	0,5	1	1	0	**1,00**	**0,75**	6,6	0,9	0,75	1,7	1	1	0,5	1	**6,85**	**6,89**	**6,90**	
16	[redacted]	1	0,5	0,5	1	0	**0,50**	**0,58**	8,25	1	0,75	1,1	1,25	1	1	1,5	**7,6**	**7,49**	**7,50**	Alergías. Aerius, Auamys, Terbasmin
17	[redacted]	0,75	0,75	1	0	0	**0,50**	**0,50**	8,1	0	0,25	1,2	0,5	0,5	0	0	**2,45**	**3,27**	**3,30**	
18	[redacted]	0,75	0,5	1	0,5	1	**1,00**	**0,79**	6,2	0,5	0,4	1,6	1,75	0,5	0,75	1,25	**6,75**	**6,81**	**6,80**	
19	[redacted]		0,5	1	1	0,75	**0,50**	**0,75**	8,2	0	0,25	0,6	0,4	1,5	1	1	**4,75**	**5,37**	**5,40**	
20	[redacted]	0	0	0	0,25	0	**0,25**	**0,08**	5,3	0,75	0,5	1,4	0	0,75	0,25	0,25	**3,9**	**3,73**	**3,70**	
21	[redacted]	1		1	1	0	**0,50**	**0,70**	7	1	0,75	1,2	1,75	0,75	0,75	1,5	**7,7**	**7,56**	**7,60**	
22	[redacted]	0,75	1	0,5	0,75	0	**0,75**	**0,63**	3,2	0,5	0,5	1,2	1,5	1	0	0,5	**5,2**	**5,11**	**5,10**	

Figura 2.19: Seguimiento de 1ºESO C

2.8.3. Análisis de los resultados obtenidos

En ambos grupos realicé la misma prueba escrita, que se incluye en el Anexo **??**. No tuve necesidad de hacer dos modelos de examen pues había suficiente separación entre los alumnos por lo que era muy difícil que se copiaran durante la realización del mismo.

Me sorprendió mucho que, aún siendo la misma unidad didáctica, explicada por la misma persona, y evaluada con el mismo examen, obtuve resultados bastante distintos en ambos grupos. Antes de analizar los resultados en sí, analicemos el propio examen.

En mi opinión es un examen muy completo con el cual se evalúan todos los conceptos introducidos en la unidad. Mi miedo a la hora de poner el examen era plantear una prueba demasiado larga y que los alumnos no dispusieran del tiempo necesario para hacerla. Sin embargo, en ninguno de los dos grupos surgió este problema y, en general, todos lograron terminar dentro de los 55 minutos de clase. Es más, en 1º ESO B incluso hubo alumnos que terminaron en 30-35 minutos. Únicamente la chica diagnosticada de TDAH en 1º ESO B necesitó un poco más de tiempo, que le di sin problemas.

En cuento a las preguntas del examen:

- Las dos primeras preguntas del examen están relacionadas con expresiones algebraicas: elementos y valor numérico.

1. (1 punto) En cada expresión algebraica, indica las variables, los monomios, los elementos de cada monomio, y si tiene término independiente o no.

   a) $xyz + z - 10$ *b)* $-a^2b + b - 5a$

2. (1 punto) Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $2xy - x^2 + y - 7$ para $x = 2$ e $y = -4$ *b)* $8z^3 + z^2 - z$ para $z = \frac{1}{2}$

- La tercera pregunta es sobre operaciones con monomios; en ella se mezclan sumas, restas, productos y cocientes.

3. (2 puntos) Realiza las siguientes operaciones con monomios:

   a) $xy - x^3 + 3xy + y - 2x^3 =$

   b) $-(ab + a) - 2(ab + b - 4a) =$

   c) $7 \cdot 2x =$

   d) $(7a^3b^2) \cdot (5a^5b^7) =$

   e) $(4x^2y^7) : (2xy^5) =$

   f) $(12xyz^5) : (xyz) =$

   g) $2nm + n - m =$

   h) $(10n^2m^7) \cdot (-4n^3m^8t) =$

   i) $(8ab^2) : (ab^2) =$

   j) $10x - 3x - 7x =$

- La cuarta es de resolución de ecuaciones: una ecuación sin solución, una ecuación con paréntesis y dos ecuaciones con denominadores.

4. (2 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $2x - 7 = x + x + 7$

   b) $-2(3x + 7) + 2x = -2x + 3(-x + 2)$

   c) $\frac{x+1}{2} + \frac{x}{3} - 2 = \frac{2x-1}{6} - \frac{5x}{4} + 1$

   d) $\frac{-x}{3} + \frac{x+10}{5} = x - 6$

- La quinta pregunta es de teoría. Personalmente me parece fundamental acostumbrar a los alumnos a estudiar teoría en la asignatura de matemáticas, por lo que tenía claro que iba a poner una pregunta de teoría en el examen. Además, desde el primer día que comencé a impartir la unidad informé a los alumnos de este hecho: en el examen iba a entrar teoría relacionada con los conceptos mas importantes del tema, por lo que había definiciones y conceptos de los apuntes que se tenían que estudiar. La idea de poner teoría no es otra que intentar evitar la mecanización total de los procesos, para así lograr que el alumno tenga cierto conocimiento de lo que está haciendo más allá de las cuentas.

5. ($1'5$ puntos) Teoría:

   a) Indica en qué se diferencian una ecuación y una expresión algebraica.

   b) ¿Se pueden sumar todos los monomios? Indica cómo se llaman los monomios que se pueden sumar y lo que tienen dichos monomios.

   c) ¿Qué es el grado de un monomio?

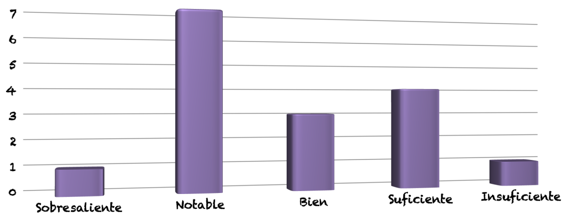
- Las dos últimas preguntas son dos problemas, ninguno de los dos de un nivel demasiado alto. El primero, que yo creía que era el más sencillo, fue el que más dificultad supuso por el hecho de que la mayoría no sabía lo que era el perímetro de un rectángulo (lo confundían con el área). El segundo problema era igual que uno que habíamos realizado en clase pero contextualizado de forma distinta, por lo que bastantes alumnos consiguieron, al menos, plantearlo.

6. (1 punto) El perímetro de un rectángulo mide 24 cm. Si sabemos que la altura mide el doble que la base, ¿cuánto mide cada lado?

7. ($1'5$ puntos) En una ferretería venden tres tipos de cajas de tornillos: la caja pequeña, la caja mediana y la caja grande. En la caja mediana hay del doble de tornillos que en la caja pequeña y en el caja grande hay el triple de tornillos que en la caja pequeña más cuatro. Compro una caja de cada tipo y en total tengo 400 tornillos. ¿Cuántos tornillos hay en cada caja?

Sobresaliente	1	6,25 %
Notable	7	43,75 %
Bien	3	18,75 %
Suficiente	4	25,00 %
Insuficiente	1	6,25 %

(a)



(b)

Figura 2.20: Resultados obtenidos en 1º ESO B

Los resultados obtenidos en el examen son, en mi opinión, muy satisfactorios, siendo significativamente mejores en 1º ESO B que los que se obtuvieron en 1º ESO C. La nota media obtenida en la unidad es de 6'96 en 1º ESO B y de 5'6 en 1º ESO C. En las imágenes 2.20 y 2.21 podemos ver esto con más detalles. Cabe mencionar que, a gran parte de los alumnos, el hecho de que el trabajo diario contase un 10 % de la nota les ha hecho perder calificación pues, en general, no solían llevar las tareas realizadas.

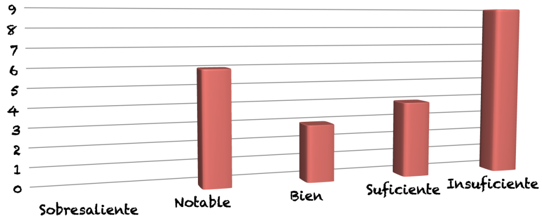
Errores más comunes cometidos en la prueba escrita

En cuanto a los errores más frecuentes cometidos en el examen, hay que destacar que, en general, no saben operar ni con números enteros ni con fracciones. Esto ha hecho que casi ningún alumno tenga correctamente realizado el ejercicio número dos. En la Figura 2.22a vemos un ejemplo; este alumno sabe realizar potencias con fracciones (cosa que tampoco es muy frecuente), sin embargo, no sabe operar correctamente con ellas.

Me sorprendió gratamente que, en la primera ecuación del ejercicio número cuatro del examen, ecuación que no tenía solución, y en la que finalmente se obtenía una expresión

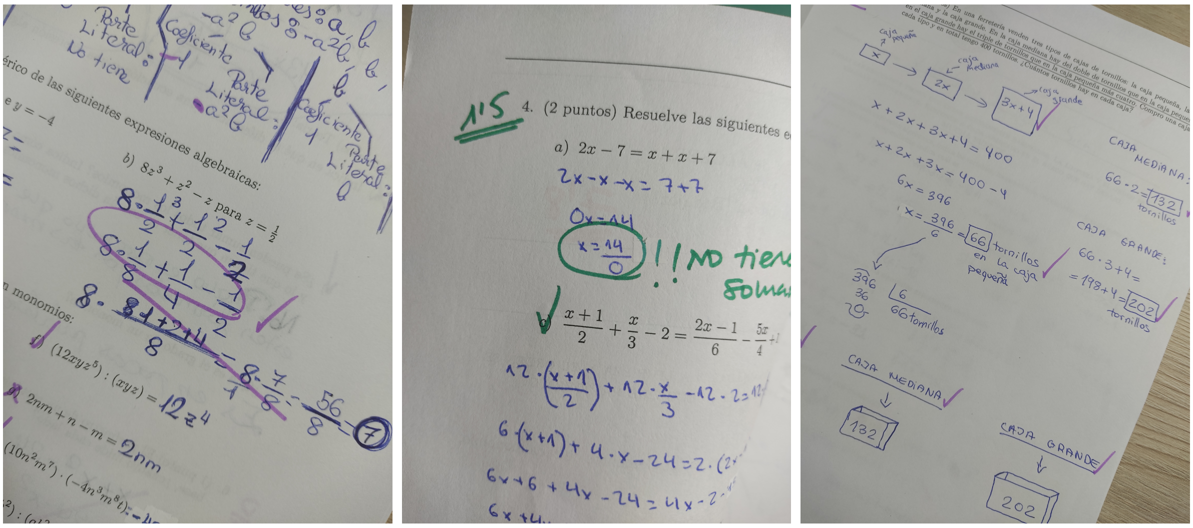
Sobresaliente	0	0,00 %
Notable	6	27,27 %
Bien	3	13,64 %
Suficiente	4	18,18 %
Insuficiente	9	40,91 %

(a)



(b)

Figura 2.21: Resultados obtenidos en 1º ESO C



(a) Errores al operar con fracciones (b) Error al despejar dividiendo por 0 (c) Examen de sobresaliente

Figura 2.22: Análisis del examen

del tipo $0x = 14$, únicamente una alumna despejara la x dividiendo por 0, como se observa en la Figura 2.22b. En general, todos supieron identificar el tipo de ecuación que era. Aunque observe en varios exámenes que a los alumnos les daba 'miedo' escribir $0x = 14$ por lo que, para ellos $2x - 2x = x$.

Finalmente, también quiero destacar cosas positivas, y es que hay en particular una chica que hizo un examen excelente. No obtuvo un 10 por confundirse en cosas muy *tontas*, sin embargo, muestra una madurez matemática en el examen que no creo que sea propia de su edad, como se puede ver en la Figura 2.22c. Su examen es el primero de los adjuntados en el Anexo **??**.

En último lugar, he creído adecuado adjuntar al final del Anexo **??** el examen correspondiente a la alumna diagnosticada con TDAH. En él se puede observar como la chica tiene serias dificultades con las matemáticas, sin embargo, intenta realizar todos los ejercicios e incluso plantea y casi resuelve correctamente el último problema.

Capítulo 3

Propuestas de mejora

En líneas generales, estoy muy satisfecha con los resultados obtenidas en las unidades didácticas impartidas, aunque creo que siempre se puede realizar una crítica constructiva que ayude a la mejorara futura.

3.1. Contenidos

La unidad didáctica de Álgebra ha supuesto todo un reto para mí; ya de por sí impartir clase en grupos de 1º ESO no es una tarea sencilla, impartir el tema de Álgebra lo hace aún más difícil. Sin embargo, también tengo que decir que lo he disfrutado mucho y que los alumnos en estos cursos son, en general, muy agradecidos.

Los apuntes elaborados eran de un nivel bastante alto pero, como desde el principio observé que eran grupos con bastante potencial, no me pareció mala idea realizar unos apuntes exigentes. Creo que es fundamental sentar bien la base de Álgebra en 1º ESO para que, llegados a niveles superiores, resulte mucho más sencillo introducir nuevos conceptos.

Algunos puntos a mejorar en cuanto a los contenidos de la unidad didáctica son los siguientes:

- De haber contado con un poco más de tiempo me hubiese gustado *dictar* los principales conceptos teóricos para que cada alumno hiciera de su cuaderno su propio 'libro de apuntes'. Sí que es verdad que en algunas ocasiones lo hice pero me llevaba mucho tiempo pues no estaban acostumbrados a tomar apuntes.

- Otra propuesta de mejora es respecto a los apuntes elaborados; en concreto, sobre la *numeración de los ejercicios*. En los apuntes voy alternando teoría y ejercicios relacionados con los conceptos introducidos con anterioridad y, al final incluyo una sección formada íntegramente por ejercicios y problemas. Durante la impartición de la unidad me he dado cuenta de que la numeración empleada no ha sido la más correcta; debería haber realizado una numeración de forma continua, y que no hubiese a lo largo de los apuntes dos ejercicios numerados igual. Es cierto que cuando yo me refería a un ejercicio en particular siempre indicaba su número y la página en la que se encontraba, sin embargo, al estar acostumbrados a trabajar con libros de textos en los cuales la numeración se realiza de forma continua, esto pareció no ser suficiente.

- Hubo conceptos que se introdujeron de forma teórica en los apuntes pero que, llegado el momento de explicarlo en clase, lo hice a través de ejercicios. Un ejemplo de esto son las *ecuaciones equivalentes*; en los apuntes conté de forma teórica lo que eran, sin embargo, cuando llegamos a este punto en clase preferí hacerlo mediante ejemplos para facilitar la comprensión por parte de los alumnos.

  Esto me hace pensar que planteé una unidad didáctica demasiado teórica para impartirla en grupos de 1º ESO pues, es cierto que no están acostumbrados a tener que estudiar teoría en la asignatura de Matemáticas.

- La principal aplicación práctica de esta unidad se ve reflejada en la resolución de problemas; además, mi corta experiencia me dice que es la parte que los alumnos más disfrutan. Yo únicamente dispuse de tres sesiones para la realización de problemas. Sinceramente creo que me hubiesen venido muy bien algunas sesiones más, pues hace falta que los alumnos practiquen mucho para que cojan destreza.

3.2. Actividades de enseñanza-aprendizaje

Las actividades que se pueden desarrollar en una unidad didáctica de Álgebra no van mucho más allá de *ejercicios teóricos* que sirven para afianzar los conceptos introducidos en clase. En mi opinión, a resolver una ecuación se aprender resolviendo ecuaciones, por lo que me he enfocado en realizar muchos ejercicios 'iguales' hasta que he conseguido que los alumnos manejen con destreza los elemento principales de la unidad didáctica.

Me pareció muy buena idea introducirles en la unidad haciendo uso de un reto que todos conocían y que habían intentado resolver. De hecho, creo que esta actividad fue mu bien acogida por los alumnos. Justo por este motivo creo que hubiese sido buena idea incluir más retos este tipo a lo largo de la unidad, cosa que no hice, de nuevo, por miedo a quedarme sin tiempo para explicar la unidad completa.

En función de las dudas de los alumnos, he obtenido las siguiente conclusiones:

- En la primera parte del tema, dedicada a expresiones algebraicas y a monomios, los problemas surgen principalmente debido a una falta de base. Es curioso como han asimilado sin mucha dificultad el concepto de *sustituir* una variable por su valor numérico, sin embargo, se confunden a la hora de hacer las cuentas; no saben colocar paréntesis cuando operan con números enteros, no manejan con la suficiente destreza las operaciones con fracciones... Todo esto puede observarse con más detalle en la Figura 3.1. Por tanto, a la hora de realizar estos ejercicios en pizarra me di cuenta que tenía que ir mucho más despacio para que los alumnos pudieran seguir los razonamientos.

- A la hora de resolver ecuaciones con paréntesis nos encontramos con un problema principal: no tienen claro cómo se quitan paréntesis. En un principio este paso

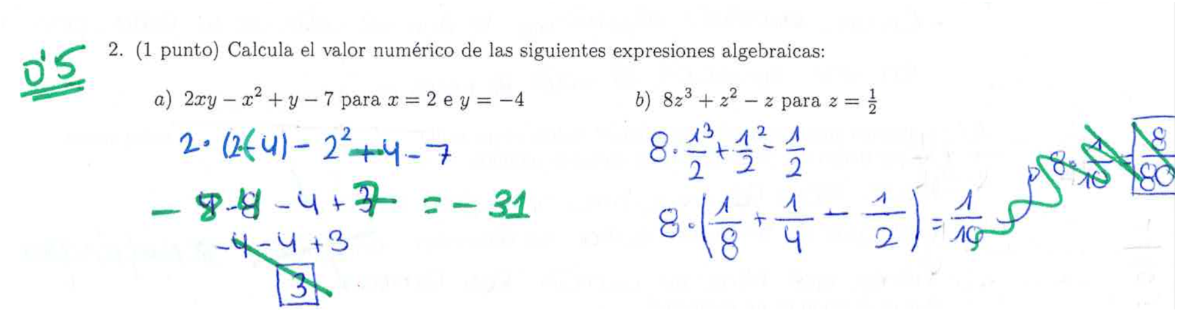


Figura 3.1: Fallos comunes a la hora de realizar operaciones con números enteros

lo di por conocido pues es contenido que deben manejar pero finalmente, dadas todas las dudas que surgieron, tuve que retroceder para repasar cómo se eliminaban los paréntesis. Tengo que decir que, por muchas veces que lo repitiera, los alumnos seguían, en general, cometiendo los mismos fallos, por lo que hubiese sido enriquecedor hacer más ejercicios de resolución de ecuaciones con paréntesis.

- Una situación análoga a la expuesta en el punto anterior se dio también a la hora de resolver ecuaciones con denominadores. Es cierto que la mayoría recordaba lo que era el *mínimo común múltiplo* y cómo se calculaba. Sin embargo, cuando procedían a resolver ecuaciones con denominadores únicamente multiplicaban las fracciones, dejando los números enteros (si es que intervenían en la ecuación) tal y como estaban en un principio. Esto hacía que obtuvieran soluciones erróneas.

  Para tratar de solucionar esto lo que hacía era resolver las ecuaciones con denominadores paso por paso en la pizarra, repitiendo constantemente los pasos a seguir, y les 'obligaba' a ellos a hacerlo así en sus respectivos cuadernos. Sin embargo, Antonio, mi tutor, llegó un momento en el que les dijo que se podían salta el paso inicial y multiplicar directamente por el número que resultaba al simplificar el mínimo común múltiplo con el denominador que teníamos inicialmente. Esto acrecentó aún más el error que he comentado unas líneas más arriba: los términos que no tenían denominador los dejaban sin multiplicar. Para evitar esto debí haber sido firme en mi decisión de que escribieran todos los pasos; no obstante, dada mi corta experiencia, confié en las explicaciones de mi tutor.

- Otro fallo muy frecuente, y que también se puede observar en la Figura 3.2, es que no saben cuándo es necesario colocar paréntesis. En un principio en este punto es cierto que no hice demasiado énfasis, pues para mí era algo obvio, pero me di cuenta de que para los alumnos no lo era. Así pues es un punto a mejorar significativamente de cara a volver a impartir esta unidad didáctica.

- Para terminar quiero mencionar que me hubiese gustado llevar a cabo actividades en inglés, dado que estábamos en grupos bilingües. Creí que la mejor opción era impartir la unidad didáctica completa en español dada la dificultad intrínseca que

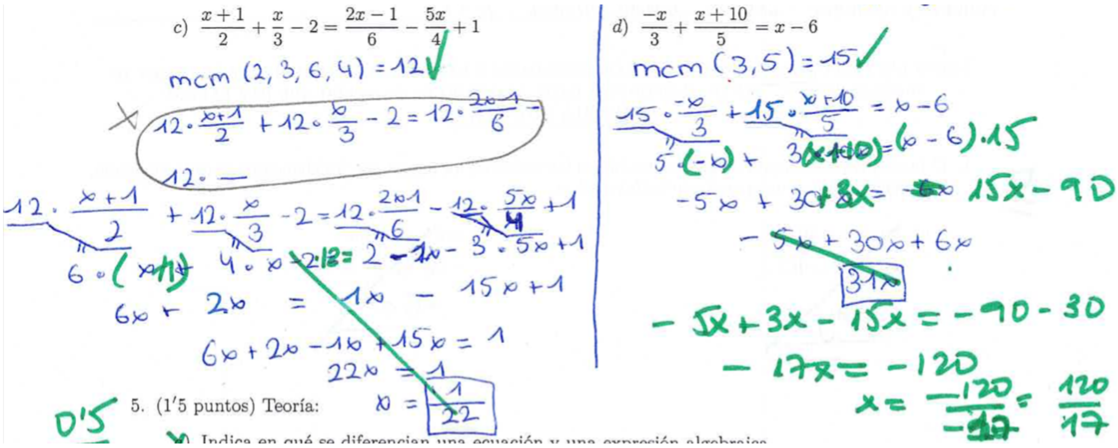


Figura 3.2: Ejemplo de un examen en el que se pueden observar los errores que he comentado anteriormente

ya tenía. A mi tutor le pareció buena idea por lo que así lo hice. Si bien es cierto que los alumnos lo agradecieron mucho, me hubiese gustado tener tiempo para desarrollar ejercicios y problemas en lengua inglesa. La única actividad que se realizó en inglés durante la unidad didáctica es la que se incluye al final del anexo **??** y que se llevó a cabo con el auxiliar de conversación.

Antes de terminar, mencionar que creo que hubiese sido buena idea llevar a cabo alguna actividad que *rompiera* con la rutina dentro del aula. En la unidad didáctica de Álgebra creo que no es muy difícil plantear actividades tipo *Scape Room* en las cuales los alumnos tengan que resolver acertijos mediante ecuaciones para lograr abrir distintas cajas fuertes en las que se esconden *pistas* para acceder al siguiente nivel. No fue factible realizarlas por falta de tiempo, pero considero que es una propuesta a considerar bastante interesante para futuras unidades didácticas.

3.3. Temporalización

La mayor parte de los problemas que han surgido en la temporalización de la unidad han sido por la falta de tiempo. Cabe mencionar que en un principio programo la unidad didáctica en treces sesiones: una de introducción, diez de desarrollo, una de síntesis y la sesión restante para la prueba escrita. Sin embargo, a medida que impartía la unidad me daba cuenta de que esa planificación era demasiado exigente, y más teniendo en cuenta diversos factores que comentaré a continuación, por lo que finalmente empleé dos sesiones adicionales, es decir, empleé quince sesiones.

Comencé a impartir la unidad didáctica el día 31 de marzo, fecha muy próxima a las vacaciones de Semana Santa y a la Semana Cultural del centro, que se celebraba del 4 al 8 de abril. Por este motivo tuve que realizar una temporalización de la unidad de forma que dejase cerrados ciertos puntos antes de irnos de vacaciones. Esto, además, favoreció a que pudiera mandar una relación de tareas sobre lo que habíamos estudiado de Álgebra hasta ese momento (de nuevo, se remite al lector al Anexo **??** para consultar dicha tarea).

Durante la Semana Cultural únicamente conté con dos sesiones completas, pues el resto de horas de Matemáticas estaban ocupadas con diversas actividades culturales. Además, al estar en un grupo bilingüe, cada dos semanas en una hora de la asignatura de Matemáticas participaba la persona nativa inglesa como auxiliar de conversación, es decir, esa sesión se impartía íntegramente en inglés. Esto tenía sus puntos positivos y sus puntos negativos:

- El principal punto positivo es que los alumnos se veían 'obligados' a comunicarse en inglés durante toda la sesión, lo que les ayudaba a ganar soltura de conversación y vocabulario de la lengua inglesa relacionado con las Matemáticas.

- Sin embargo, surgía un problema, desde mi punto de vista muy importante, en el desarrollo de esta sesiones, y es que esta persona nativa no tenía demasiado conocimiento en el área de Matemáticas. Por tanto, la metodología en estas sesiones era la siguiente:

  - Antonio hablaba con el auxiliar de conversación y le explicaba qué se iba a hacer en la sesión correspondiente.
  - Le daba indicaciones específicas de cómo se realizaban los ejercicios que se llevarían a cabo en esa sesión, no obstante, esto no siempre funcionaba correctamente.

Por ejemplo, la sesión dedicada a la resolución de ecuaciones que compartió con nosotros, en la que se realizó la actividad contenida en el anexo **??**, no fue demasiado bien dado que no sabía cómo se resolvían ecuaciones. Por este motivo, era imposible que lo explicara correctamente a los alumnos, por lo que acabamos tomando el control de la sesión Antonio y yo. Todo esto hacía que estas sesiones no fueran productivas matemáticamente hablando.

En resumidas cuentas, no me ha sido fácil realizar la temporalización de la unidad didáctica, y me hubiese venido muy bien contar con todas las sesiones que perdí, por unos motivos u otros, durante el desarrollo de la misma.

Una vez expuestos todos los problemas 'externos' que me surgieron, procedo a enumerar algunas propuestas que me hubiese gustado llevar a cabo dentro del aula pero que no hice, de nuevo, por falta de tiempo.

- A la hora de realizar y corregir ejercicios durante las sesiones, creo que habría sido muy buena práctica que fueran los propios alumnos los que salieran a la pizarra a realizar los ejercicios. Es cierto que esta metodología la desarrollé en varias ocasiones pero llevaba mucho más tiempo del planificado por lo que no era una práctica habitual.

- En relación con el punto anterior, aprovecharía que el alumno está corrigiendo en la pizarra para que fue él mismo el que explicara el proceso de resolución a sus compañeros. De esta forma creo que es muy sencillo detectar cuáles son los puntos en los que surgen más dudas para hacer más énfasis en ellos.

- Los problemas que realizamos en clase en su mayoría los planteé yo en la pizarra, aunque es cierto que siempre pedía la colaboración del alumnado. Creo que hubiese sido muy positivo haber dejado tiempo para que cada uno planteara los problemas de forma individual y que después se formara un pequeño debate en el aula en el cual 'discutieran' entre ellos sobre las distintas formas de plantear el problema, sobre cuál era la correcta e incluso sobre si había más de una forma de abordar dicho problema.

3.4. Evaluación

Como dije con anterioridad, mi mayor miedo a la hora de plantear la prueba escrita era no saber controlar bien el tiempo; no quería poner ni un examen demasiado corto ni demasiado largo. Finalmente creo que la extensión del examen fue la correcta. Es cierto que en en el segundo grupo en el que realicé el examen, hubo alumnos que no necesitaron más de media hora para terminar. Esto me sorprendió pues en el primer grupo no había sucedido. El resto de alumnos sí que necesitaron la sesión completa para finalizar la prueba, por lo que no creo que hubiese sido buena idea incluir más ejercicios.

Como propuestas de mejora en cuanto a la evaluación quiero destacar:

- No soy partidaria de dar mucho peso de la nota a la calificación obtenida en la prueba escrita, por lo que me hubiera gustado tener tiempo para realizar más trabajos evaluables, cuya nota supusiera un porcentaje de la nota final.

- Podría haber incluido una o dos preguntas con puntuación extra por si había alumnos que terminaban con antelación; de hecho, echando la vista atrás, habría sido bastante útil.

- Como no tenía directrices específicas sobre la metodología a emplear con la alumna recién diagnosticada de TDAH, le planteé el mismo examen que al resto de sus compañeros. Mientras tenía lugar la prueba caí en la cuenta de que habría sido buena idea tomar algunas medidas que ayudaran a la alumna a realizar el examen: darle las preguntas una por una, controlarle el tiempo que tiene para cada pregunta... De hecho, esta chica no se supo organizar bien el tiempo y fue la única que precisó de unos minutos más para finalizar, que obviamente le di.

  Cuando finalizó la prueba hablé con mi tutor y le comenté que si era necesario no me importaba repetirle el examen, ahora sí, tomando algunas medidas específicas. Finalmente no fue necesario pues esta chica aprobó, obteniendo una calificación de cinco puntos (su examen es el último de los incluidos en el Anexo **??**).

Capítulo 4

Otras actividades realizadas

Además de la unidad didáctica de Álgebra que imparto en los grupos de 1º ESO bilingüe, imparto la unidad didáctica de *Cuerpos en el espacio. Áreas y volúmnes* en un grupo de 2º ESO, también bilingüe. También doy algunas clases en otro grupo de 1º ESO, así como en un grupo de 2º Bachillerato de Ciencias.

También es cierto que antes de explicar íntegramente las unidades didácticas, mi tutor me dejó dar algunas clases sueltas con el fin de ir conociendo a los alumnos; a modo de toma de contacto.

4.1. Observación y docencia en 1º ESO

Mi tutor también imparte clase de matemáticas a un grupo de 1º ESO que no pertenece a la sección bilingüe. Dicho grupo está formado por todos los alumnos de 1º ESO del centro que tienen dificultades de aprendizaje, es decir, la mayor parte de los alumnos que forman este grupo son ACNEAES.

En este grupo no imparto una unidad didáctica completa, sino que imparto algunas clases sueltas con el permiso de mi tutor, sobre todo de corrección de problemas. Pero antes de empezar a hablar de la docencia, voy a proceder a describir al grupo.

El grupo está formado, oficialmente, por 11 alumnos, y digo oficialmente porque una de las alumnas no asiste a clase por decisión parental; me comenta Antonio que estuvo yendo los primeros días y posteriormente dejó de ir con el apoyo de sus padres. Por lo tanto, realmente nos encontramos con 10 alumnos dentro del aula.

Ya el primer día Antonio me cuenta que es una clase difícil y con muy bajo nivel educativo (entorno al 50 % tienen nivel de 5º/6º de primaria, habiendo repetido la mayor parte de ellos algún curso de EP). Además, en esta clase nos encontramos con alumnos con problemas de diversa índole:

- Tenemos un alumno diagnosticado de TDHA y otro diagnosticado de TDHA + Dislexia. Este último, además, tiene dificultades en la lectura y en la escritura por lo que se recomienda hacerle pruebas orales.

- Un alumno con problemas físicos: *hemiparexia izquierda*, problemas visuales, además de un porcentaje de minusvalía reconocida por el CADEX. Es un chico que se fatiga mucho visualmente y con la escritura; tiene dificultades en el lenguaje.

- Fuera del carácter académico nos encontramos con un chico huérfano.

En general, es una clase que necesita atención individualizada constantemente. Por otro lado, un par de días a la semana tres alumnos, en la hora de matemáticas, salen de clase y reciben apoyo por parte de un profesor pedagogo-terapeuta (PT) del centro, que se coordina con Antonio para ver qué conocimientos es necesario reforzar en cada sesión.

En cuanto a los ajustes curriculares en matemáticas, y según la información que me han proporcionado, solo eran necesarios para la chica que no asiste a clase. Sin embargo, al ser un curso en el cual nos encontramos con un nivel educativo muy bajo, y en la cual los alumnos tienen serios problemas de aprendizaje, los profesores que les imparten clases han acordado bajar el nivel global de las explicaciones e ir más despacio, poniendo muchos ejemplos y repitiendo durante varios días las mismas explicaciones para intentar que todos los alumnos sigan el ritmo de la clase.

Cunado me incorpora al grupo, están finalizando la unidad didáctica del *Sistema Métrico Decimal*. Los primeros días los dedico a ir conociendo a los alumnos y a ver cómo trabaja cada uno. Me paseo por el aula mientras Antonio explica en la pizarra para ir resolviendo dudas y llamar la atención cuando los alumnos se despistan, intentando así que no pierdan el hilo, aunque ciertamente es difícil. En seguida me doy cuenta de que la metodología empleada por Antonio con este grupo se basa en la repetición; además, también observo que la *atención individualizada* es fundamental con alumnos de estas características.

A finales de la primera semana se realiza el examen de esta unidad didáctica, que se lleva a cabo con ordenador, a través de cuestionarios de *Thatquiz*. Antonio me comenta que trabajar con ordenador hace que se concentren mejor y que se tomen más en serio las tareas, por lo que los resultados suelen ser mejores. En mi opinión esto ocurre porque llega un punto que hasta los propios alumnos se aburren y desconectan de las explicaciones del profesor. En otras palabras, según lo que yo observo, creo que la repetición no es la mejor metodología para grupos como este, sino que grupos como este precisan de metodología más activas para que no pierdan el interés por la asignatura.

La unidad didáctica que se imparte posteriormente es la dedicada a la *Proporcionalidad* y los *Porcentajes*. El desarrollo de esta unidad didáctica conlleva a Antonio casi un mes, y es en esta unidad en la cual yo imparto algunas clases de problemas y ejercicios. Pretendo hacer las sesiones más dinámicas, de forma que sean ellos los que guíen el desarrollo de las clases. A la hora de corregir, saco a alumnos a la pizarra, y la verdad es que me sorprende que la mayoría quiera participar en clase. Aún así, tengo que decir que mantener el control de este grupo es mucho más difícil que en el resto.

Sinceramente, creo que dedicar un mes a esta unidad didáctica es demasiado tiempo, y con esto lo único que se consigue es 'aburrir' a los alumnos. Las pruebas de evaluación de este tema no se hacen a traves de *Thatquiz*, sino que se plantea una prueba escrita tradicional. Antonio me deja corregir algunos de estos exámenes y la verdad es que hay resultados muy diversos: corrijo tanto un examen de notable alto como un examen de insuficiente muy bajo. Aunque sí que es cierto que en general los resultados no son demasiado bajos, teniendo en cuenta el grupo en el que nos encontramos.

Antonio me recomienda no impartir la unidad didáctica de *Álgebra* en este grupo, como sí que estoy haciendo en los otros dos grupos de 1º ESO. Hay diversas razones para tomar esta decisión:

- La unidad de Álgebra se comienza a impartir en este grupo a mediados/finales de abril, luego es imposible que yo imparta la unidad didáctica completa, pues habría que dedicar, como mucho, 10 sesiones, lo que resulta imposible sobre todo por las características del grupo.

- Antonio decide que se va a impartir la unidad didáctica con mucha menos profundidad con la que se imparte en los otros dos grupos, lo cual dificulta mucho el poder emplear mis apuntes pues estos tienen un nivel bastante alto.

Por tanto, durante el tiempo se imparte esta unidad me dedico únicamente a observar y a resolver algunas dudas que me preguntan mientras Antonio explica en pizarra. Como he dicho antes, en este grupo funciona muy bien el hecho de que haya dos responsables en el aula, por lo que he observado gran diferencia desde el primer día que llegué hasta este momento; ahora que los alumnos se han familiarizado conmigo no es necesario que Antonio pare la explicación global cuando surge una duda, sino que me preguntan a mí.

4.2. Observación y docencia en 2º ESO

En este grupo, perteneciente a la sección bilingüe de inglés, imparto la unidad didáctica de *Cuerpos en el espacio. Áreas y volúmenes.* Antes de analizar cómo ha sido el desarrollo de la unidad didáctica, voy hablar de las características del grupo así como del periodo de observación.

Nos encontramos con una clase formada por 21 alumnos, de los cuales únicamente 8 son chicos. En líneas generales es un clase que trabaja bien, en la que no nos encontramos con ningún alumno que precise de necesidades educativas especiales. Desde el primer momento observo que es una clase muy colaborativa, aunque también es cierto que los alumnos tienden a hablar bastante; hay que tenerlos trabajando constantemente para que no se descontrolen. Me doy cuenta de que hay entorno a dos/tres alumnos a los que se le dan especialmente bien las matemáticas y que no presentan dificultades ni en la explicaciones teóricas ni a la hora de resolver ejercicios. Por otro lado, nos encontramos a una chica que tiene bastante dificultades a la hora de seguir la clase y de realizar los ejercicios propuestos.

Cuando me incorporé al aula acaban de comenzar la unidad didáctica de *Sistemas de ecuaciones lineales*. Durante esta unidad imparto algunas clases para ir conociendo cómo funciona el grupo y para ir conociendo a los alumnos. Concretamente, impartí una clase teórica sobre el *método de reducción* para la resolución de sistemas, en la que las sensaciones fueron bastantes buenas; les expliqué intuitivamente cómo funcionaba el método y después deje que fuesen ellos los que dedujeran cómo se aplicaba el método de forma matemática. Para mi sorpresa la mayoría consiguió entender de forma razonada y sin mucha dificultad por qué este método funciona.

Durante el desarrollo de este tema también colaboro con Antonio usando *Geogebra* para la explicación del *método gráfico* de resolución de sistemas lineales; mientras él realiza los ejemplos en la pizarra, yo voy dibujando las rectas en *Geogebra* y viendo cuáles son sus posiciones relativas para estudiar si el sistema tiene o no solución. Por último, Antonio me dejó impartir algunas clases prácticas de resolución de problemas que, sinceramente, fue las que más disfruté. Observé lo que todos ya sabíamos: la dificultad a la hora de resolver un problema surge en el planteamiento.

Además, de cara a la prueba escrita y comprobando que había algunos alumnos que 'mezclaban' los tres métodos de resolución, decidí realizar unas notas a modo de resumen que les ayudaran para preparar el examen. Adjunto estas notas en el Anexo **??**.

4.2.1. Unidad didáctica

En cuanto a la unidad didáctica impartida, como dije anteriormente, pertenece al bloque de geometría, y está dedicada al cálculo de áreas y volúmenes. Para la impartición de esta unidad también elaboro mis propios apuntes pues no me termina de convencer cómo se trata en el libro de Bruño que es el que usan en el centro. Lo que hago en los apuntes de elaboración propia es fusionar los temas 11 y 12 del libro en un único tema, para que así tengan una idea más global de lo que es la geometría. Estos apuntes se adjuntan en el Anexo **??**.


BLOQUE IV. GEOMETRÍA 193
10. Semejanza. Teoremas de Thales y Pitágoras 195
1. Figuras semejantes 196
2. Teorema de Thales 198
3. Relaciones en figuras semejantes 200
4. Teorema de Pitágoras 202
11. Cuerpos en el espacio 217
1. Elementos básicos en el espacio 218
2. Poliedros 220
3. Prismas y cilindros 222
4. Pirámides y conos 224
12. Áreas y volúmenes 235
1. Unidades de volumen 236
2. Área y volumen del ortoedro, el prisma y el cilindro 238
3. Área y volumen de la pirámide, el cono y la esfera 240
4. Área y volumen del tronco de pirámide y tronco de cono 242
Practica con TEXTOS 255
Evaluación de BLOQUE 257

Figura 4.1: Bloque de geometría en el libro de 2º ESO de Bruño

La elaboración de estos apuntes me ha llevado mucho más tiempo que la elaboración de los apuntes para la unidad didáctica de Álgebra de 1º ESO pues, al ser un tema de goemetría, quería hacer unos apuntes muy visuales y realizar los dibujos que están incluidos con *GeoGebra* conlleva tiempo. He decidido eliminar del tema todo lo relacionado con troncos de cono y con troncos de pirámides; al no ir muy bien de tiempo, y para asegurarme que lo que está se puede contar bien y sin correr demasiado para que los alumnos se enteren adecuadamente, he pensado que era mejor idea dejarlo fuera.

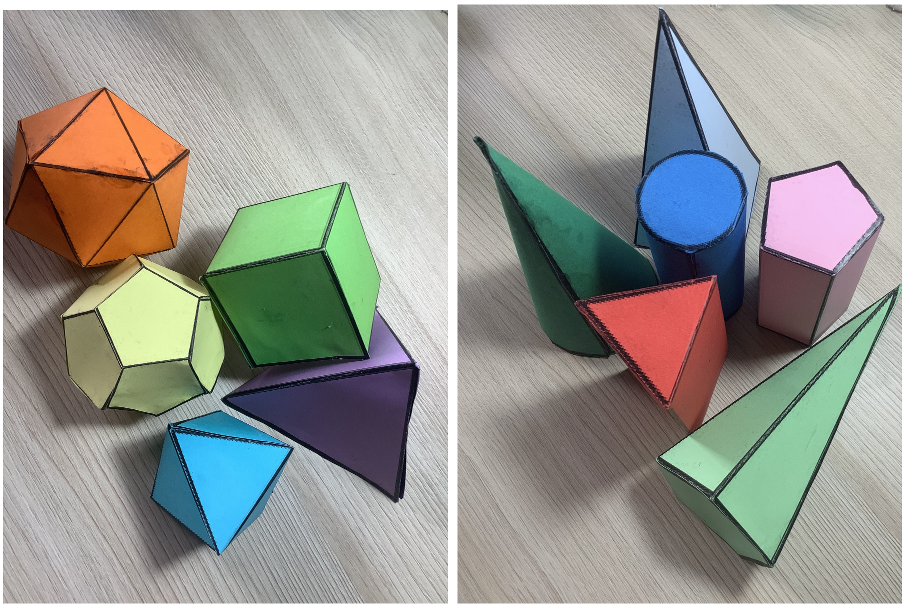
Imparto la unidad en ocho sesiones: una primera sesión de introducción, seis sesiones de desarrollo y una última sesión dedicada a la prueba escrita. Es una secuenciación del tema muy exigente pues la he impartido en pocas sesiones, no obstante obtuve muy buenos resultados.

Fase	**Número**	**Contenido**
Introducción	1	Introducción. El espacio: sus elementos y dimensiones. Posiciones relativas de rectas y planos en el espacio.
Desarrollo	2	Introducción a los poliedros. Poliedros regulares. Teorema de Euler
	3	Primas. Desarrollo plano. Áreas y volúmenes.
	4	Pirámides. Desarrollo plano. Áreas y volúmenes.
	5	Introducción a los cuerpos redondos y cuerpos de revolución. Cilindros. Desarrollo plano. Áreas y volúmenes.
	6	Conos. Desarrollo plano. Áreas y volúmenes.
	7	Esfera. Área y volumen. Repaso general de cara al examen.
Evaluación	8	Prueba escrita

Cuadro 4.1: Secuenciación y temporalización

Para el desarrollo del tema elaboro también materia manipulativo: construyo poliedros en cartulina y que usaremos en clase, sobre todo en el apartado del *Teorema de Euler*, para contar caras, vértices y aristas. Construyo tanto los *cinco sólidos platónicos*, primas y pirámides, un cono y un cilindro. Este material fue mucho más útil de lo que me imaginé en un principio; como los alumnos no tienen demasiada visión espacial les ayudó mucho tener en sus manos los poliedros para familiarizarse con ellos.

Durante la impartición de la unidad también hago mucho uso de Geogebra. En la primera clase, por ejemplo, lo uso para que vean gráficamente en 3D las diferentes posiciones relativas entres rectas, planos y restas y planos. Posteriormente lo empleo para dibujar desarrollos planos, sobre todo de prismas y pirámides. En concreto, para el desarrollo plano de un prisma empleo la siguiente construcción de Geogebra que también elaboré yo misma: `https://www.geogebra.org/m/ygefyner`. Además, aprovecho esto para hacerles darse cuenta de que conforme aumenta el número de lados del polígono de la base, este se aproxima cada vez más a un círculo. Sinceramente creo que este tema es muy agradecido a la hora de la utilización de medios tecnológicos y, además, los alumnos en general lo agradecen mucho y les resulta mucho más sencillo comprender los conceptos cuando se les introducen de forma visual.



(a) Sólidos platónicos (b) Prismas, pirámides y cuerpos redondos

Figura 4.2: Material manipulativo elaborado

Cuando estudiamos áreas y volúmenes de los prismas y las pirámides les proyecto el siguiente vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=9ThPQHK2tpw. En él pueden ver claramente por qué el volumen de una pirámide se tiene que multiplicar por $\frac{1}{3}$.

En cuento a la metodología empleada en este tema una cosa tenía clara, y es que no quería que los alumnos concibieran este tema como una lista de fórmulas que han de memorizar para poder aprobar el examen, sino que quería que comprendieran de dónde procedía cada fórmula y que de esta forma no precisaran de memorizar ninguna. En el caso de las áreas, todas se han deducido de los desarrollos planos (excepto el de la esfera, claro). Un caso a destacar es el del cono; se puede deducir la fórmula de su área tratando al sector circular que forma su desarrollo plano como un *triángulo curvilíneo* de base $2\pi R$ y de altura G, la generatriz del cono. De esta forma, como la fórmula del área del triángulo es bien conocida por todos no tiene ninguna dificultad calcular el área de un cono, véase la Figura 4.3.

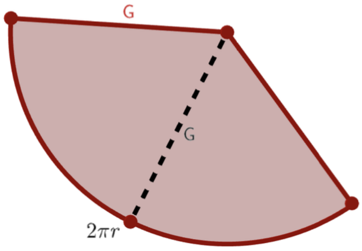
Para los volúmenes les explico que lo que hay que hacer ir 'rellenando' el poliedro con polígonos regulares de la forma de la base hasta completar todo el poliedro. Por tanto, como dichos polígonos son planos, van a caber tantos polígonos como altura tenga el poliedro.

La verdad es que creo que esta idea funciona muy bien, o al menos a mí me ha funcionado muy bien, pues con este método los alumnos no tienen el típico 'miedo' de llegar al examen y que se les olviden las fórmulas.

- Todos sabemos calcular el área de la base, pues es el área de un círculo:

$$A_B = \pi r^2$$

- Lo difícil es calcular el área lateral. Para ello, vamos a considerar el sector circular como un 'triángulo curvilíneo', tal que su altura es la generatriz del cono y su base es el perímetro del círculo que forma la base del cono. Por tanto:



$$A_L = \frac{2\pi r \cdot G}{2} = \pi r \cdot G$$

Luego, en total, el área del cono se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$A_{\text{Cono}} = \pi r^2 + \pi r \cdot G = \pi r(r+G)$$

Figura 4.3: Cálculo del área del cono

En cuanto a la forma de evaluar, la llevo a cabo del siguiente modo:

- La prueba escrita tiene un peso del 90 %.
- El trabajo diario y la participación en clase tiene un peso del 10 %.

Me hubiese gustado no darle tanto peso a la nota del examen, pero nos encontramos con el mismo problema: el tiempo. Es una unidad en la que podría haber llevado a cabo algún proyecto cuya nota hubiese supuesto un porcentaje de la nota del tema. Aún así, los resultados obtenido en la prueba escrita son buenos, como veremos a continuación. El examen está incluido en el Anexo **??** y contiene preguntas sobre todos los conceptos introducidos en la unidad, la mayoría análogas a las que habíamos realizado en clase. De hecho, introduje problemas contextualizados para que vieran que la geometría tiene muchas aplicaciones en nuestro día a día más allá de los libros de texto.

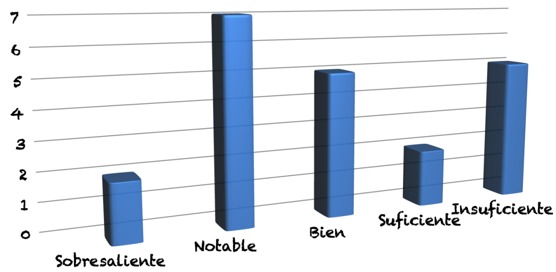
Nº	Alumno	Tareas y participación (10%)							Examen (90%)								Nota final	Nota
1	[redacted]	1	1	1	0,5		**0,50**	**0,80**	0,75	1,5	1,5	1,5	0,75	1,5	0,5	8,00	**8,00**	**8,00**
2	[redacted]	1	1	0	1	1	**1,00**	**0,83**	1	1	0,5	0,75	0,75	1,5	1	6,50	**6,68**	**6,70**
3	[redacted]	1	1	0	1	0	**1,00**	**0,67**	1	1	1,5	1	0,75	0,75	0,5	6,50	**6,52**	**6,50**
4	[redacted]	1	1	1	1	1	**1,00**	**1,00**	0,75	1	1,25	1	1	1,25	0,5	6,75	**7,08**	**7,10**
5	[redacted]	1	1	0,5	0,5	1	**1,00**	**0,83**	1	0,75	1,5	1,5	0	1	0,5	6,25	**6,46**	**6,50**
6	[redacted]	1	0,5	0	0		**0,75**	**0,45**	0,5	1	1,25	1	0,25	0,25	0,25	4,50	**4,50**	**4,50**
7	[redacted]	0,75	1	1	0,75	0	**1,00**	**0,75**	1,5	1,25	1,5	1,5	1,5	0,5	0,5	8,25	**8,18**	**8,20**
8	[redacted]	1	1	1	0,75	1	**0,50**	**0,88**	0,75	0,8	0,8	1	0,75	1	0,5	5,60	**5,92**	**5,90**
9	[redacted]	1	1	0	0,5	1	**0,50**	**0,67**	1,25	1,25	0,75	1	0,75	1,25	0,5	6,75	**6,74**	**6,70**
10	[redacted]	0,75	1	0	0	0	**1,00**	**0,46**	1	0,4	0,5	0,5	0,25	1,25	0,5	4,40	**4,42**	**4,40**
11	[redacted]	1	1	1	1	1	**1,00**	**1,00**	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1	10,00	**10,00**	**10,00**
12	[redacted]	1	0	0,5	0,75	0,5	**0,75**	**0,58**	1	0,5	1	0,25	0,75	0,25	0,25	4,00	**4,18**	**4,20**
13	[redacted]	1	1	1	1	1	**1,00**	**1,00**	1,5	1,5	0,75	1	1,5	1,5	0,5	8,25	**8,43**	**8,40**
14	[redacted]	1	0,75	1	0	0	**0,50**	**0,54**	1,5	0,75	0,5	1	0	0,25	0	4,00	**4,14**	**4,10**
15	[redacted]	1	1	0	0	0	**0,75**	**0,46**	1,25	1,5	1	1,5	0,25	0,5	0,5	6,50	**6,31**	**6,30**
16	[redacted]	1	1	1	0,75	0,75	**0,50**	**0,83**	1,5	1	1,5	1	1	1,5	1	8,50	**8,48**	**8,50**
17	[redacted]	0,75	1	0	0,25	0	**0,75**	**0,46**	0,5	1	0,75	1,5	0,25	1,5	0	5,50	**5,41**	**5,40**
18	[redacted]		1	0	0,25	0	**0,25**	**0,30**	0,75	0,2	0,7	0,5	0	0	0	2,15	**2,24**	**2,20**
19	[redacted]			1	0,75	1	**0,50**	**0,81**	1	0,8	1,5	1,5	0,75	1,5	1	8,05	**8,06**	**8,00**
20	[redacted]	1	1	0,5	0,75	1	**0,75**	**0,83**	1,5	1,25	1,5	1,5	0,75	1,5	0,5	8,50	**8,48**	**8,50**
21	[redacted]	1	1	1	0,75	1	**0,75**	**0,92**	1,5	1,25	1,5	1,5	1,5	1,5	0,5	9,25	**9,24**	**9,20**

Figura 4.4: Seguimiento de 2º ESO C

Al igual que hice en los grupos de 1º ESO, para llevar la cuenta tanto de las notas de trabajo diario como del examen, realicé una hoja de cálculo. Los resultados obtenidos se incluyen en la imagen 4.4. Centrándonos en las calificaciones finales de la unidad didáctica, tenemos lo siguiente:

Sobresaliente	2	9,52 %
Notable	7	33,33 %
Bien	5	23,81 %
Suficiente	2	9,52 %
Insuficiente	5	23,81 %

(a)



(b)

Figura 4.5: Resultados obtenidos en 2º ESO C

En cuento a los errores más frecuentes cometidos en la prueba escrita hay que destacar:

- El error en los cálculos a la hora de aplicar el *Teorema de Euler* para realizar el ejercicios número dos, aunque todos se sabían la fórmula.
- La resolución del ejercicio cinco. Este ejercicio se había realizado forma idéntica en clase, sin embargo, muchos alumnos tienen dificultades sobre todo a la hora de resolver la ecuación de segundo grado que hay que resolver para hallar la solución al problema.
- La dificultad a la hora de trabajar con notación científica en el ejercicio número siete. La mayoría prefiere trabajar con números muy grandes en vez de usar potencias de base 10. Un ejercicio análogo se realizó en clase el día antes del examen, e hice mucho *hincapié* en que tuvieran cuidado al trabajar con números tan grandes con la calculadora.

En el Anexo **??** adjunto los dos mejores exámenes de la presente unidad didáctica.

4.3. Observación y docencia en 2º Bachillerato

Durante mi segunda de semana de prácticas, del 21 al 25 de marzo, Vicente Gonzalez Valle me permite acompañarle en sus clases de 2º Bachillerato. Vicente imparte tanto Matemáticas II, en el Bachillerato de Ciencias, como Matemáticas orientadas a las Ciencias Sociales II, en el Bachillerato de Ciencias Sociales. Sin embargo, solo le acompaño a las clases de Matemáticas II por dos motivos: incompatibilidad de horario con las horas de clase que tengo con Antonio y a que me comenta que en el bachillerato de ciencias sociales lo que está haciendo es repasar el contenido de todo el curso pues ya ha terminado completamente el temario. Sí que es cierto que el viernes 25 le acompaño a vigilar el examen de Estadística y Probabilidad que hace a los alumnos de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales. Aprovecho para ver qué examen ha puesto y me habla un poco de la clase. El examen se realiza en el salón de actos del centro pues Vicente me comenta que el examen anterior se realizó en clase y que ciertos alumnos copiaron. Para evitar que esto se repita procede a hacer hacer el examen en un lugar donde los alumnos puedan estar más distanciados, como es el salón de actos.

En cuanto a Matemáticas II, cuando me incorporo a sus clases están dando el tema de *'Vectores en el espacio'*; concretamente, están contando el producto escalar, el vectorial y el mixto. En general puedo observar que la clase es bastante buena (cosa que luego me confirma Vicente), son trabajadores y da la sensación de que tienen ganas de aprender. Incluso cuando tienen que hacer ejercicios o problemas y encuentran dificultades se ayudan entre ellos, cosa que me parece muy positiva. Y, a diferencia de lo que ocurre en ESO, es más fácil mantener el control de la clase, pues raramente hay que llamar la atención.

Las clases son bastante dinámicas, teniendo los alumnos un papel muy activo durante la clase. Los primeros minutos se dedican a resolver dudas que puedan haber surgido durante la realización de las tareas que se mandaron para casa el día anterior. Posteriormente se procede a introducir conceptos nuevos (los días que yo estuve se introdujo el producto vectorial y el mixto), y se intenta que los alumnos entiendan la herramienta matemática que tienen delante: para qué sirve, qué aplicaciones tiene... Se hacen algunos ejemplos prácticos para afianzar los conceptos y se mandan tareas. Normalmente Vicente deja 5/10 minutos por ejercicio para que ellos la piensen antes de hacerla en la pizarra. Finalmente se hace el ejercicio en la pizarra y se resuelven las dudas que hayan podido surgir. El miércoles 23 se dedica la clase a repasar la unidad anterior, que trataba sobre matrices y sistemas de ecuaciones con parámetros, pues el jueves 24 se examinan de ese tema. Además, Vicente en ese examen también incluye algunos problemas de probabilidad y estadística para que los alumnos tengan la obligación de repasarlo de cara a la EBAU. En general parece que tienen los conceptos bastante claros y que entienden bastante bien lo que se hace en cada ejercicio.

Vicente me propone impartir una clase de problemas de geometría relacionados con el producto escalar, vectorial y mixto el lunes 28. Acepto encantada. Me informa él de los problemas que debo contar en clase: son todos del libro de problemas de Selectividad/EBAU que él mismo ha realizado. Me preparo dichos problemas en casa, teniendo en cuenta los puntos más delicados de cada ejercicio y donde es recomendable incidir más.

Las sensaciones de la clase que impartí el lunes 28 son bastante buenas. A pesar de que estaba un poco nerviosa, creo que fue bastante bien. Hice los problemas en pizarra, explicando los conceptos teóricos que se usaban en cada uno de ellos. En algunos dejé 5/10 minutos para que ellos lo plantearan en su cuaderno antes de resolverlo yo, siguiendo con la metodología de Vicente. Hice preguntas para que fueran ellos los que me dieran las ideas de los que había que hacer en cada caso y para que razonaran todo el proceso de resolución, intentado evitar que memoricen los procedimientos como si fueran 'recetas'.

4.4. Guardias

Nada más llegar al centro el primer día de prácticas, mi tutor tiene una hora de guardia de 11:30 a 12:15. Aprovecho para enterarme de cómo funcionan las guardias; generalmente, cada profesor tiene guardia dos horas a la semana, repartidas en dos días diferentes (Antonio tiene guardias los lunes y los miércoles). Al ser un centro tan grande, en cada hora siempre hay más de un profesor de guardia por lo que, para organizarse correctamente, cuentan con un cuadrante de guardias y con un coordinador de guardias por cada hora, que es un profesor que está de guardia en esa hora, por ejemplo, Antonio es el coordinador de guardias tanto el lunes como el miércoles en sus horas de guardias. Cada vez que un profesor entra de guardia en un determinado grupo porque ha faltado algún docente, se apunta en el cuadrante de guardias del día y la hora correspondiente; se apunta tanto la fecha como el tiempo que ha estado de guardia (hay veces que las guardias no son de sesiones completas pues, como los horarios en el centro están escalonados, puede ser que la guardia finalice más tarde de la hora a la cual el profesor que la está cubriendo tenga que irse a su próxima clase, por lo que es necesario otro docente para finalizar la guardia). Cuando hay más profesores de guardias que guardias que cubrir entra a la guardia el profesor que menos tiempo de guardia lleve hecho hasta ese momento.

Entro con Antonio en varias guardias, pero recuerdo especialmente la que hicimos el primer día de prácticas. Fue en una clase de 2º ESO; cuando llegamos los alumnos estaban todos levantados, gritando y armando mucho jaleo en el aula. Le pregunté a Antonio y me comentó que era un grupo difícil de controlar, cosa que yo ya había notado. Intentamos poner orden y que cada uno ocupe su sitio, lo que no resulta ser una tarea fácil. Antonio manda silencio y les pide que se pongan a trabajar cada uno en las tareas que tenga. Esto, como era de esperar, no tiene mucho éxito, pues a los 10 minutos estaban, de nuevo, todos hablando con un tono de voz bastante elevando. Volvemos mandar a callar y hay alumnos que hasta nos responden con no demasiada educación por lo que es necesario ponerse un poco más serios. Así es como discurre toda la guardia; Antonio y yo somos los únicos que intentamos dedicar la hora a trabajar pues los alumnos parecen no tener demasiadas ganas de aprovechar el tiempo.

4.5. Semana Cultural

La semana cultural del centro se celebra del 4 al 8 de abril, siendo el día del centro el día 8. El hilo conductor de la semana cultural es una actividad que van realizar todos los cursos de la ESO con sus correspondientes profesores: un *Pasapalabra*. En particular, en el caso de la asignatura de matemáticas, la idea es elaborar un rosco de pasapalabra con conceptos matemáticos estudiados desde 1º ESO hasta 4º ESO, con un nivel medio, para que todos los alumnos de ESO sean capaces de resolverlo.

Nosotros resolvemos el pasapalabra el día 4 de abril en 1º ESO B, el 5 de abril en 1º ESO C y 1º ESO A y el 6 de abril en 2º ESO C. En general es una actividad que les gusta mucho a los alumnos y que resulta bastante amena. El día del centro habrá una final de Pasapalabra en la cual el rosco estará formado por conceptos que involucren a todas las asignaturas y que habrán sido sacados de los *roscos* que se han ido haciendo a lo largo de la semana. Pasarán a jugar esta final los dos grupos que obtengan más puntuación en cada uno de los roscos realizados con anterioridad.

Además de la actividad mencionada antes, en la semana cultural del centro se realizan otras actividades:

1. El departamento de educación física realiza una excursión a la Sierra de Alor, en Olivenza, en la que los alumnos realizan una ruta senderista.

2. El departamento de ética elabora un taller sobre el ciberbullying con un grupo de 3º ESO. En él los alumnos graban un corto simulando un caso de ciberbullying que se da tanto dentro como fuera del aula. Comienzan a hacer acosar a un chico vía redes sociales y posteriormente el acoso continua dentro del centro escolar. En el corto participan tanto el acosado, los acosadores, como el entorno más cercano de la víctima: amigos y familia. Simulan escenas en las que la victima no puede más y hasta intenta suicidarse, así como escenas en las cuales aparece el equipo directivo del centro hablando con los acosadores e imponiendo un castigo. Este corto lo van proyectando por las clases (en 1º ESO B lo proyectan el viernes 8 en la hora de matemáticas) para hacer ver a los alumnos que hay que evitar este tipo de comportamientos y denunciarlos si eres testigo de alguno de ellos. Al final del corto incluyen también una breve entrevista que realizan a algunos alumnos del instituto Zurbarán preguntándoles sobre si han sufrido alguna vez algún tipo de bullying. Sorprende ver que hay muchos, muchos alumnos que alguna vez se han visto acosados y que no han recibido la ayuda que precisaban por tener miedo a visibilizar la situación.

Finalmente, en el día del centro hay diversas actividades, además de la final de Pasapalabra mencionada con anterioridad. En la hora del recreo se ofrece un desayuno de chocolate con churros en el patio del centro al que está invitado todo el personal del centro.

Capítulo 5

Autoevaluación

Las prácticas docentes han supuesto una experiencia muy gratificante y enriquecedora para mí, tanto a nivel personal como a nivel profesional. Es cierto que a mí nunca me había llamado especialmente la atención la docencia en la etapa de Educación Secundaria y el Bachillerato, sin embargo, y gracias a las prácticas, me he dado cuenta de que es algo que me gusta más de lo que yo me había imaginado.

En parte, mi falta de interés por la enseñanza en institutos venía condicionada por mi etapa como estudiante de ESO y Bachillerato, dado que mis compañeros de clase nunca tuvieron demasiado interés en aprender. Esto hacía aún más difícil la labor del docente, y hastiaba a algunas personas (como a mí misma) que sí que tenían inquietudes y querían aprender. Ahora que se han tornado los papeles y que he sido yo la que se ha puesto delante de los alumnos para intentar que trasmitirle conocimientos veo las cosas desde otra perspectiva.

Me he dado cuenta de que, en general, el alumnado tiene mucho más potencial del que nos dejan ver, y que no lo suelen emplear por pura vagancia. Gracias a esto he aprendido que gran parte de la labor del profesorado consiste en conseguir que el alumnado *explote* todo el potencial que tiene. Para lograr esto los docentes han de ingeniárselas trazando actividades y propuestas que resulten atractivas para todas las personas que tienes sentadas delante. No obstante, esto presenta algunas dificultades.

Por un lado, nos encontramos con un currículo de deja muy poco margen de movimiento. Además, el hecho de que las prácticas únicamente se realicen durante dos meses dificulta aún más la situación. Yo, personalmente, a la hora de plantear las unidades didácticas impartidas he contado con total libertad por parte de mi tutor, sin embargo, sí es cierto que me he tenido que adaptar a la temporalización que él tenía establecida. Lo que quiero decir con esto es que, desde mi punto de vista, es más sencillo planificar una asignatura cuando la impartes tú de forma completa que cuando te tienes que coordinar con otro profesor para impartir, como mucho, dos meses de docencia.

Por otro lado, la extensión y rigidez del currículo juegan en contra de un aprendizaje significativo por parte del alumnado. Me da la sensación de que a día de hoy nos preocupamos más de impartir todos los contenidos del currículo que de que el alumno aprenda el contenido de una forma relevante. Esto hace que el alumno tenga cada vez menos ganas de aprender, hecho que se puede observar, sobre todo, en la asignatura de Matemáticas y en la repulsión que tienen la mayoría hacia ella. Con esto no quiero decir que no se impartan todos los contenido del currículo, sino que intentemos dejar a un lado las enseñanzas *puramente mecánicas* y *memorísticas* para acercar el conocimiento al alumno de forma que le genere interés y curiosidad. En asignaturas como Matemáticas me parece fundamental que el alumno conozca *el porqué* de las cosas, y que no se limite a reproducir un procedimiento o a aplicar una fórmula que ha memorizado y que no comprende.

Dejando a un lado el currículo, y centrándonos en otros aspectos que también son importantes, he tenido la suerte de poder trabajar, junto a mi tutor, con un grupo de alumnos más problemático y que presentaban claras dificultades de aprendizaje. Dado que, como hemos mencionado anteriormente, el currículo no es un documento flexible, en grupos como este es necesario desviarse ligeramente de él. Tras pasar muchas horas con este grupo aprendí algunas técnicas que funcionaban bastante bien con ellos. Sin embargo, cuando llegué el primer día me planteé qué es lo que haría si me tuviera que enfrentar yo solo a ellos y llegué a la conclusión de que no disponía de las herramientas necesarias para trabajar con este tipo de alumnos. Creo que el máster, asignaturas como *Procesos educativos y realidad escolar*, deberían enfocarse desde un punto de vista más práctico para enseñar al futuro docente a lidiar con este tipo de situaciones, dado que son una realidad en cualquier centro. Sí que es cierto que en la asignatura *Psicología y educación del adolescente* hemos tratado con situaciones conflictivas desde un punto de vista práctico, motivo por el cual pienso que es una de las asignaturas del máster más útiles a la hora de enfrentarte a las prácticas, no obstante, es insuficiente.

En cuanto a la experiencia como docente, ya adelanté al comienzo de la autoevaluación que me ha parecido muy enriquecedora, y me ha hecho darme cuenta de muchos aspectos que resultan fundamentales a la hora de impartir una clase. Saber Matemáticas es un requisito necesario pero no suficiente para impartir una buena clase de Matemáticas; resulta imprescindible que seamos conscientes de que la visión que tenemos nosotros de las Matemáticas no es la misma que tiene un alumno que cursa la ESO o el Bachillerato. Es preciso también hacer un análisis exhaustivo sobre los contenidos que se quieren impartir y sobre las dificultades que puede encontrar un alumno en ellos; aspectos que para nosotros resultan obvios para el alumno no lo son, y en esto siento que me ha ayudado mucho la asignatura de *Didáctica de las Matemáticas*. Algo que ya sospechaba y que he terminado de confirmar con las prácticas docentes es lo difícil que resulta el uso de las TIC en el aula. Dada la falta de medios tecnológicos de los centros, conlleva mucho tiempo hacer una actividad empleando nuevas tecnologías. Por otro lado, es innegable que los recursos tecnológicos ofrecen un gran apoyo dentro del aula, como aprendimos en la asignatura de *Metodología y Aprendizaje de las Matemáticas*.

Las prácticas han supuesto un claro aprendizaje para mí, y quizá lo más importante que he aprendido se puede resumir en la siguiente frase: dar clase es mucho más difícil de lo que parece. El primer día que te enfrentas a un grupo de alumnos no sabes cómo mantener el control, cómo mandarlos callar, cómo gestionar el aula... Al final creo que todos acabamos haciendo caso a nuestra intuición y poco a poco aprendemos técnicas que nos funcionan. Es fundamental tener una buena organización de las sesiones, no obstante, dicha organización no es inquebrantable, pues las clases son bastante imprevisibles. En cierto modo, y según mi corta experiencia, lo que funciona es ir *compensando* unas sesiones con otras para lograr impartir todo el contenido.

A modo de resumen decir que, pese al todo el trabajo y las dificultades encontradas, he disfrutado y aprendido muchísimo tanto de mi labor como docente como de los alumnos, pues ellos también tienen mucho que enseñarnos a nosotros. No imaginado nunca que esta experiencia me hubiese aportado tanto. Espero haber aportado yo lo mismo a todos los chicos y chicas que me han tenido como profesora de Matemáticas.

Bibliografía

[1] *Decreto 98/2016 por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Extremadura.*

[2] Matemáticas 1º ESO - Expresiones algebraicas. https://www.matematicasonline.es/cidead/1esomatematicas/impresos1/1quincena7.pdf.

[3] Página web del I.E.S Zurbarán. https://ieszurbaranbad.educarex.es.

[4] Álgebra 1º ESO. https://cutt.ly/OJGZzyt.

[5] Blasco, F. Apuntes Marea Verde 2º ESO; capítulo 7: Cuerpos Geométricos. Volúmenes. https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/2ESO/2_07_Cuerpos.pdf.

[6] Cabeza, J. M. A., and Saez, I. M. *Matemáticas 2º ESO.* Bruño, 2015.

[7] Caro, R. Apuntes Marea Verde 1º ESO; capítulo 11: Álgebra. https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/1ESO/1%2011%20algebra.pdf.

[8] Luque, A. J. Problemas de ecuaciones de primer grado. https://cutt.ly/OJGZA2o.

[9] Medina, R. G. Problemas de ecuaciones de 1º eso. https://selectividad.intergranada.com/ESO/Material/Problemas%20de%20Ecuaciones_1eso.pdf.

[10] Rogrigo, J., Hernández, R., and Encabo, J. A. Apuntes Marea Verde 2º ESO; capítulo 6: Longitudes y Áreas. semejanzas. https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/2ESO/2_06_Longitudes.pdf.

[11] Santiago, J. C. Tema 12: Cuerpos Geométricos. http://paramisalumnosdematematicas.blogspot.com/p/2-eso-tema-12-cuerpos-geometricos.html.

[12] Santiago, J. C. Tema 13: Áreas y Volúmenes. http://paramisalumnosdematematicas.blogspot.com/p/2-eso-tema-13-areas-y-volumenes.html.

Anexos

Anexos A

Material de elaboración propia para la UD de Ágebra

A continuación adjunto todo el material que he elaborado para la impartición de la unidad didáctica de Álgebra en 1º ESO:

- Apuntes. Al final de los apuntes hay una sección de problemas y ejercicios; los ejercicios son los típicos ejercicios sobre álgebra básica que se encuentran en cualquier libro de 1º ESO. Los problemas tienen distinta procedencia: alguno son ideas propias, otros son los problemas básicos sobre áreas y edades que se usan para introducirlos en la resolución de problemas mediante ecuaciones, y hay otros que la idea está tomada de los apuntes de *Marea Verde*, como indico justo debajo del problema.
- Hoja de ejercicios para Semana Santa.
- Actividad sobre la resolución de ecuaciones que se llevó a cabo con el auxiliar de conversación de la sección bilingüe de inglés.
- Ejercicios de repaso.
- Examen.

Como mencioné anteriormente en el departamento de matemáticas del centro se trabaja con la editorial Bruño y a mí personalmente no me gustaba demasiado dicho libro pues, además de que creía que no estaban del todo claras las cosas, no se trabajaba nada de la parte de monomios.

Por último mencionar que he intentado que estos apuntes sean bastante visuales para que nos les resulte demasiado tedioso enfrentarse a ellos, ya que no suelen estar acostumbrados a leer apuntes con 12/13 años. Las cosas más importantes de teoría las encuadré en cuadros de colores para que supieran qué se tenían que aprender pues, como les avisé desde el principio de la unidad didáctica, en el examen iba a entrar una pregunta de teoría; teoría muy sencilla y que se ha repasado todos los días en clase, pero creo que es bueno que se acostumbren a estudiar teoría en la asignatura de matemáticas.

Ecuaciones de primer grado

1 ESO – I.E.S Zurbarán

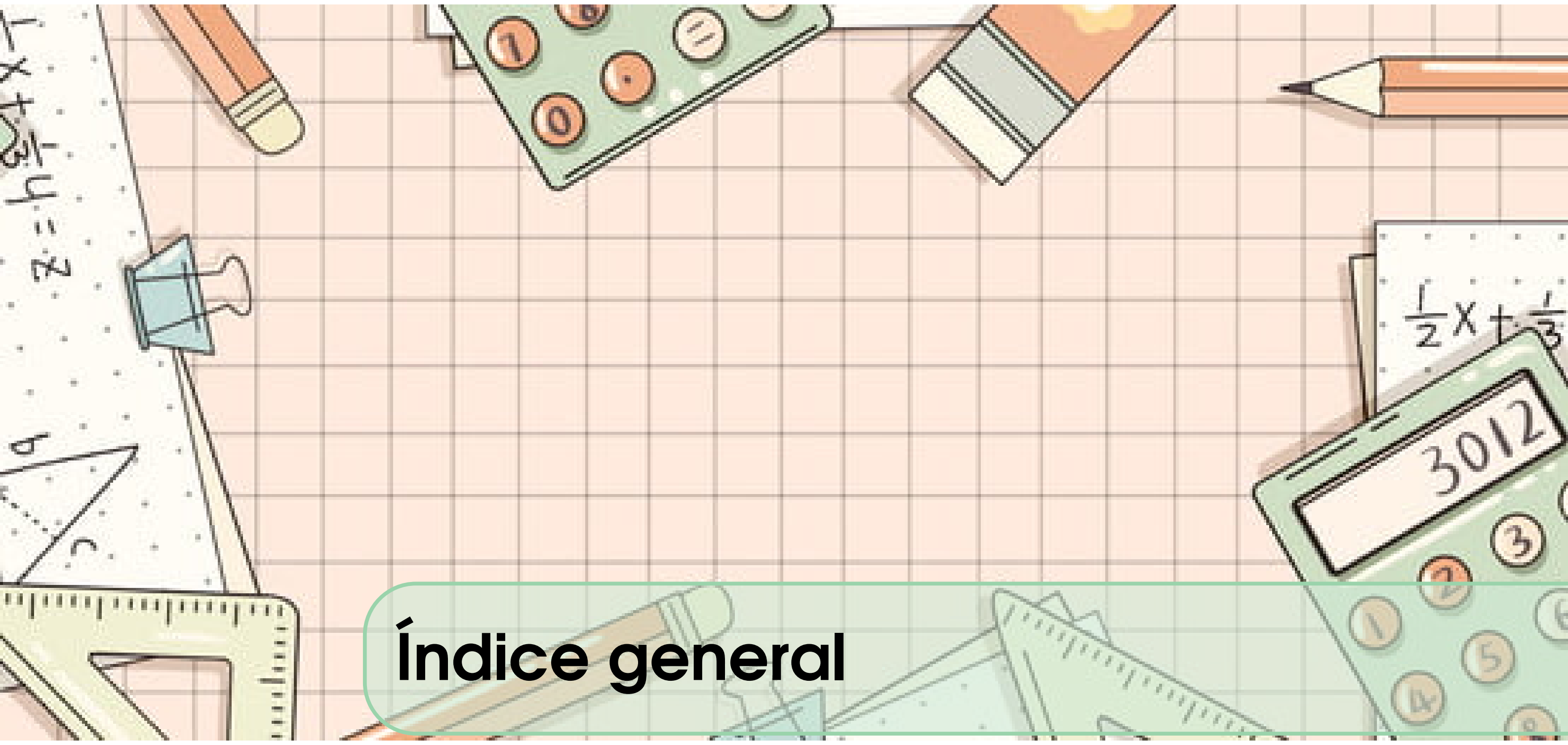
Nazaret Trejo Arroyo

SUMMER RESEARCH INTERNSHIP, UNIVERSITY OF WESTERN ONTARIO

GITHUB.COM/LAURETHTEX/CLUSTERING

This research was done under the supervision of Dr. Pauline Barmby with the financial support of the MITACS Globalink Research Internship Award within a total of 12 weeks, from June 16th to September 5th of 2014.

First release, August 2014



Índice general

1. El lenguaje algebraico

1.1 ¿Qué es el álgebra?

Imaginemos que somos detectives y que nos contratan para investigar un suceso misterioso que ha ocurrido, por ejemplo, nos piden averiguar cómo es posible que un preso se escape una y otra vez de la cárcel. ¿Cómo haríamos estos? Pues tendríamos que ir siguiendo las pistas hasta descifrar el misterio, ¿verdad?

En este tema todos vamos a jugar a ser detectives pues, a través del **álgebra**, nos vamos a dedicar a resolver problemas que involucran datos misteriosos o desconocidos. Y vosotros os preguntaréis, ¿qué es el álgebra?

> El álgebra es la parte de las matemáticas que emplea **letras** para representar valores que desconocemos.

¡No nos asustemos! Seguro que todos alguna vez hemos visto un reto como el siguiente:

🟢+🟢+🔶=8
🔶+🔶=4

en el que nos piden calcular lo que vale tanto el círculo verde como el rombo naranja. En realidad lo que tenemos que hacer en el reto anterior es averiguar lo que valen numéricamente dos datos que en un principio son desconocidos, ¿no? Como en matemáticas de lo desconocido se ocupa el álgebra... ¡estamos intentando resolver un reto algebraico! ¿Serías capaz de resolverlo?

1.2 Traducción al lenguaje algebraico

Estamos acostumbrados a comunicarnos empleando el lenguaje natural, que es con el que hablamos con nuestros compañeros, con nuestros padres o con el que mandamos un mensaje por WhatsApp, y que todos somos capaces de entender.

También conocemos el lenguaje numérico que es el que hemos empleado hasta ahora en la asignatura de matemáticas para trasmitir la información, y que usa números y operaciones. Además, todos sabemos traducir del lenguaje natural al lenguaje matemático.

■ **Ejemplo.**

Lenguaje natural	$\Longrightarrow$	Lenguaje numérico
Juan tenía 5 libros y se ha comprado 4 libros más. ¿Cuántos tiene en total?		$5+4=9$

■

Definición. El **lenguaje algebraico** es el que emplea números y letras, relacionados mediante operaciones.

Ahora tenemos que aprender a traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico, pero no nos asustemos, es algo muy sencillo. El siguiente ejemplo seguro que nos ayuda.

■ **Ejemplo.**

Lenguaje natural	$\Longrightarrow$	Lenguaje algebraico
En mi ciudad este año hay tres tiendas más que el año pasado		$x+3$

- Número de tiendas que había el año pasado $\Longrightarrow$ cantidad desconocida $\Longrightarrow x$.
- Número de tiendas nuevas que hay este año respecto al año pasado $\Longrightarrow 3$.
- Número total de tiendas que hay actualmente en mi ciudad $\Longrightarrow x+3$.

■

Definición. Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras relacionados mediante operaciones.

Una expresión algebraica está formada por los siguientes elementos:

- Variable: símbolo que representa un número desconocido. Se suele denotar con la letra x.

> ¡Cuidado!
> Generalmente a una variable se le denota con la letra x, sin embargo, podríamos elegir cualquier otra letra del abecedario.

- Monomios: cada uno de los sumandos de la expresión algebraica. En un monomio podemos distinguir a su vez:
  - Parte literal: variable o variables que forman el monomio. Estas variables pueden tener exponentes que tienen que ser números enteros positivos.
  - Coeficiente: número que multiplica a la parte literal.
- A un monomio que no tiene parte literal se le llama término independiente.

Ten en cuenta que...

★ Cuando un número está multiplicando a una variable el signo $\times$ del producto no se escribe para evitar confundirlo con la variable x.

★ Normalmente, el producto de un coeficiente por su parte literal se escribe sin poner ningún signo en medio, por ejemplo, $2x$.

■ **Ejemplo.** 1. Escribe las variables, los monomios, los coeficientes y las partes literales de la expresión algebraica $3x+4x+7$.

Variables	Monomios					
	$3x$		$4x$		7	
	Coeficiente	Parte literal	Coeficiente	Parte literal	Coeficiente	Parte literal
x	3	x	4	x	7	No tiene $\Rightarrow$ Término independiente

2. Escribe las variables, los monomios, los coefiecientes y las partes literales de la expresión algebraica $2ab+a-7b$.

Variables	Monomios					
	2ab		a		-7b	
	Coeficiente	Parte literal	Coeficiente	Parte literal	Coeficiente	Parte literal
a,b	2	ab	1	a	-7	b

3. Escribe las variables, los monomios, los coefiecientes y las partes literales de la expresión algebraica $-x^2+yx+2y$.

Variables	Monomios					
	$-x^2$		yx		$2y$	
	Parte literal	Coeficiente	Parte literal	Coeficiente	Parte literal	Coeficiente
x,y	x^2	-1	yx	1	y	2

■

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes expresiones:
   a) María tenía ahorrada una cantidad desconocida de dinero. Por su cumpleaños sus padres le regalan 20 euros más. ¿Cuánto dinero tiene María ahora?
   b) Desconocemos lo que mide la base de un rectángulo pero sabemos que su altura mide 4 cm. ¿Cuánto vale su perímetro?
   c) El triple de un número menos su doble.
   d) La edad de una persona hace 5 años.
   e) Lo que cuesta un producto si nos hacen una rebaja del 20 %.
   f) La mitad de un número.
   g) Un número par.
   h) La suma de dos números consecutivos.
2. Escribe las variables, los monomios, los coeficientes y las partes literales de las siguientes expresiones algebraicas y di si tienen término independiente o no:

   a) $5a+10a-8$
   b) $6xy+x-2y$
   c) $3n-5n+7$
   d) $-2y+b-1$
   e) $-11x+x$
   f) $20m+12-n$

3. Actualmente Alberto tiene 3 años más que María. Si x representa la edad actual de Alberto, escribe en lenguaje algebraico la suma de las edades de ambos dentro de 7 años.

1.3 Valor numérico de una expresión algebraica

Definición. El valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al dar un valores numéricos a las variables de la expresión y realizar las operaciones.

■ **Ejemplo.** Halla el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para el valor de la variable que se incida en cada caso:

a) $2x+5x+6$ para $x=2$:

$$2\cdot 2+5\cdot 2+6=4+10+6=20$$

b) y^2+3y para $y=6$:

$$6^2+3\cdot 6=36+18=54$$

c) $4n+5m+1$ para $n=2$ y $m=5$:

$$4\cdot 2+5\cdot 5+1=8+25+1=34$$

d) $-3a+4a+a$ para $a=10$:

$$-3\cdot 10+4\cdot 10+10=-30+40+10=20$$

■

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Halla el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes:
   a) $-2x^2+3y+1$ para $x=$ día de tu cumpleaños e $y=$ mes en el que naciste.
   b) $4a+11b^3$ para $a=7$ y $b=1$.
   c) $10x^4-2+3x$ para $x=1$ y $x=-1$.
   d) $6x+3y+10-y$ para $x=\frac{1}{2}$ e $y=-2$.
2. ¿Verdadero o falso?
   a) El valor numérico de la expresión algebraica x^5+y-2 para $x=1$ e $y=-1$ es 2.
   b) El valor numérico de la expresión algebraica $4n+2-n$ para $n=4$ es 20.
   c) El valor numérico de la expresión algebraica $11a+7a+a$ para $a=2$ es 38.

1.4 Monomios

Definición. Un monomio es una expresión algebraica formada un único término.

Ejemplo. Las siguientes expresiones algebraicas son algunos ejemplos de monomios:

$$3x^2 \quad , \quad 4y^6 \quad , \quad 2a \quad , \quad 6a^2b \quad , \quad 5x^4y^7 \quad , \quad nm^2$$

■

Un monomio es una expresión algebraica formada por el producto de un número por una o varias letras.

Definición. El grado de un monomio es la suma de los exponentes de la parte literal.

Ejemplo. Estudia el coeficiente, la parte literal y el grado de los monomios $4a$, $5x^2y$ y $-2n^3m^4$.

a) El coeficiente del monomio $4x$ es 4, su parte literal es x y su grado es 1.
b) El coeficiente del monomio $5x^2y$ es 5, su parte literal es x^2y y su grado es la suma del exponente de la x y de la y, es decir, $2+1=3$.
c) El coeficiente del monomio $-2n^3m^4$ es -2, su parte literal es n^3m^4y y su grado es la suma del exponente de la n y de la m, es decir, $3+5=7$.

Organizamos la información en una tabla:

		Coeficiente	Parte Literal	Grado
Monomio	$4a$	4	a	1
	$5x^2y$	5	x^2y	$1+2=3$
	$-2n^3m^4$	-2	n^3m^4	$3+4=7$

■

Definición. Se dice que dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

■ **Ejemplo.** Los monomios $4x^2$ y x^2 sí son semejantes mientras que los monomios $4n^2m$ y $4nm^3$ no lo son por no tener la misma parte literal. ■

¡Cuidado!
Para saber si dos monomios son semejantes únicamente hay que mirar la parte literal, sin tener en cuenta los coeficientes.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Estudia el coeficiente, la parte literal y el grado de los siguientes polinomios:

a) $-10x^2y$	*e*) xy^6
b) a^3b	*f*) $-8s^7t$
c) $6nm^4$	*g*) xya^7b^2
d) $11a^2b^3$	*h*) $-12x^5s^2$

2. ¿Son semejantes los siguientes monomios?

a) x^2y y x^4y^2	*e*) x^2y^6 y $3y^6x^2$
b) a^5b^2 y $5a^5b^2$	*f*) s^2t^3 y $10s^4t^2$
c) $-n^2m^4$ y $3m^4n^2$	*g*) xya^7b^2 y x^2a^7
d) $11a^2$ y a^5	*h*) $-12x^5s^2$ y x^5s^2

3. Escribe monomios con las siguientes características:
   a) De grado 2 y cuyo coeficiente sea 4.
   b) Que tenga el mismo grado que el monomio x^5 pero con dos variables en la parte literal.
   c) De grado 3 cuyo valor numérico en $x = 2$ sea 8.
   d) Con el mismo grado que el monomio $7x^2y^3$ pero cuya parte literal tenga únicamente una variable.

1.4.1 Operaciones con monomios

Ahora que ya sabemos lo que son los monomios tendremos que saber cómo se opera con ellos. Igual que pasa con los números, los monomios se pueden sumar, restar, multiplicar... Pero ¡cuidado!, hay que seguir ciertas reglas.

★ **SUMA Y RESTA DE MONOMIOS.** Los más importante para sumar y restar monomios es saber que solo se pueden sumar monomios semejantes. Es decir, solo podemos sumar y restar monomios que tengan la misma parte literal. En resumen:
   - Solo podemos sumar o restar monomios semejantes.

- Si los monomios no son semejantes la suma o resta se deja indicada.
- Cuando en una expresión algebraica aparecen a la vez monomios que son semejantes y monomios que no son semejantes solo podemos sumar o restar los semejantes.

Para sumar (o restar) monomios se suman (o se restan) los coeficientes y dejan igual las partes literales.

■ **Ejemplo.** ¿Es posible sumar los monomios $3x^2$ y $7x^2$? ¿Y los monomios $4ab^2$ y a^3b? En caso afirmativo realiza la operación.

1. SÍ es posible sumar los monomios $3x^2$ y $7x^2$ pues tienen la misma parte literal, que es x^2. La suma vale:
$$3x^2+7x^2=(3+7)x^2=10x^2$$
2. Sin embargo, NO es posible sumar los monomios $4ab^2$ y a^3b pues no tienen la misma parte literal:
   - Parte literal de $4ab^2=ab^2$.
   - Parte literal de $a^3b=a^3b$.

   Por tanto, la suma se deja indicada:
$$4ab^2+a^3b$$

■

★ **PRODUCTO Y COCIENTE DE UN MONOMIO POR UN NÚMERO.** Cuando multiplicamos o dividimos un monomio por un número distinto de cero por el resultado vuelve a ser un monomio.

Para multiplicar o dividir un monomio por un número no nulo se multiplica o se divide el coeficiente del monomio por dicho número y se deja igual la parte literal.

■ **Ejemplo.** Calcula el producto del monomio $4x^2y$ por $4, -1$ y 6 y su cociente por 2.

- Si multiplicamos por 4 obtenemos:
$$4(4x^2y)=(4\cdot 4)x^2y=16x^2y$$
- Si multiplicamos por -1 obtenemos:
$$-1(4x^2y)=(-1\cdot 4)x^2y=-4x^2y$$
- Si multiplicamos por 4 obtenemos:
$$6(4x^2y)=(6\cdot 4)x^2y=24x^2y$$
- Si hacemos el cociente de 2 obtenemos:
$$(4x^2y):2=(4:2)x^2y=2x^2y$$

■

★ **PRODUCTO DE MONOMIOS.** A diferencia de lo que ocurría con la suma, todos los monomios se pueden multiplicar entre sí. El resultado de multiplicar dos monomios vuelve a ser un monomio.

Para multiplicar dos o más monomios procedemos de la siguiente forma:
- ♡ Empezamos multiplicando los coeficientes.
- ♡ A continuación, multiplicamos las partes literales recordando cómo se hacía el producto de potencias con la misma base.

■ **Ejemplo.** Multiplica los siguientes monomios:

- $2x^4y^5$ y $10xy$
$$(2x^4y^5)(10xy) = (2\cdot 10)(x^4y^5xy) = 20(x^4xy^5y) = 20(x^{4+1}y^{5+1}) = 20x^5y^6$$
- $7ab$ y $2xy$
$$(7ab)(xy) = 7abxy$$
- $2m^4nt$ y $3m^3n^2$
$$(2m^4nt)(3m^3n^2) = (2\cdot 3)(m^4ntm^3n^2) = 6(m^{4+3}n^{1+2}t) = 6m^7n^3t$$

■

★ **COCIENTE DE MONOMIOS.** Tenemos que tener en cuenta de que al dividir dos monomios el resultado no siempre va a ser un monomio.

Para dividir dos monomios procedemos de la siguiente forma:
- ♡ Empezamos dividiendo sus coeficientes.
- ♡ A continuación, dividimos las partes literales recordando cómo se hacía el cociente de potencias con la misma base.

■ **Ejemplo.** Realiza los siguientes cocientes de monomios:

- $(2x^3y):(xy)$
$$(2x^3y):(xy) = \frac{2x^3y}{xy} = (2:1)(x^3y:xy) = 2(x^{3-1}y^{1-1}) = 2x^2$$
- $(4a^4b^5):(3a^2b)$
$$(4a^4b^5):(3a^2b) = \frac{4a^4b^5}{3a^2b} = (4:3)(a^4b^5:a^2b) = \frac{4}{3}(a^{4-1}b^{5-1}) = \frac{4}{3}a^3b^4$$
- $(10x^6y):(x^5)$
$$(10x^6y):(x^5) = \frac{10x^6y}{x^5} = (10:1)(x^6y:x^5) = 10(x^{6-5}y) = 10xy$$

- $(2m^2n) : (m^2n)$

$$(2m^2n) : (m^2n) = \frac{2m^2n}{m^2n} = (2:1)(m^2n : m^2n) = 2(m^{2-2}n^{1-1}) = 2m^0n^0 = 2$$

- $(2xy) : (x^3y^2)$

$$(2xy) : (x^3y^2) = \frac{2xy}{x^3y^2} = (2:1)(xy : x^2y^3) = 2(x^{1-2}y^{1-3}) = 2x^{-1}y^{-2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Exponentes negativos $\Rightarrow$ No es un monomio.

■

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a) $2xy + 3xy$
b) $3x^2y^5 + xy + 19x^2y^5$
c) $-ab + a^2b + 7a^2b + ab$
d) $(2xy)(3x^3y^6)$
e) $(8n^4)(2nm^5)$
f) $xy^3 + 2x + 3y$
g) $(2a^4b^7) : (4ab)$
h) $(2nm^5)(5a^6b^2)$
i) $-2xy + 3x^2 + 10xy$
j) $(4s^3t) : (2t)$
k) $(x^7y^4) : (2xy)$
l) $ab + a^2b - ab$
m) $(4s^2)(3st^4)$
n) $(xyt)(2t^2)$
o) $(3ab^4) : (-12ab^3)$
p) $(10x^5y) : (5x^5y)$

2. Ecuaciones

2.1 ¿Qué es una ecuación?

Definición. Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo. Si tienes las expresiones algebraicas $4x$ y $8x+1$ y las unimos mediante un signo '$=$' obtenemos la siguiente ecuación:

$$4x = 8x + 1$$

■

En una ecuación podemos distinguir las siguientes partes:

- Miembro: cada una de las expresiones algebraicas que igualamos. La expresión que se coloca a la izquierda del '$=$' es el primer miembro y la que se coloca a la derecha del '$=$' es el segundo miembro.
- Incógnitas: variables o cantidades desconocidas. Cuando todas las letras de la ecuación son iguales estamos ante una ecuación con una única incógnita.
- Grado: mayor de los exponentes que aparecen en la incógnitas.
- Solución: valores de las incógnitas que verifican la ecuación.

¡Cuidado!

A diferencia de lo que ocurría en las expresiones algebraicas, donde podíamos dar cualquier valor a la variable, en las ecuaciones esto no es así. En la mayoría de las ecuaciones que nosotros vamos a estudiar únicamente tendremos una solución.

Ejemplo. ¿Los valores $x = 1$ y $x = 2$ son soluciones de la ecuación $2x + x = 3$?

Lo que tenemos que hacer es sutituir la x por cada uno de los valores dados y comprobar si se verifica o no la igualdad.

- $\boxed{x=1}$
$$2\cdot(1)+1=2+1=3 \Rightarrow x=1 \text{ sí es solución}$$
- $\boxed{x=2}$
$$2\cdot(2)+2=4+2=6\neq 1 \Rightarrow x=2 \text{ no es solución}$$

■

■ **Ejemplo.** Distingue cada uno de los elementos de las ecuaciones $3x=x+2$ y $10x=y-1$.

Ecuación	Miembros		Incógnitas	Grado
	Primer miembro	Segundo miembro		
$3x=x+1$	$3x$	$x+1$	x	1
$10x=y-1$	$10x$	$y-1$	x,y	1

■

Definición. Resolver una ecuación consiste en hallar todas sus posibles soluciones.

■ **Ejemplo.** Vamos a resolver la ecuación $2x+1=9$. En dicha ecuación estamos buscando un número de forma que al calcular su doble y sumarle 1 obtenemos 9. A nada que pensamos nos damos cuenta de que el número buscado es 4, pues

$$2\cdot 4+1=8+1=9$$

Así, la solución a la ecuación $2x+1=9$ es $x=4$.

¿Existen más soluciones para esta ecuación? O, dicho de otra forma, ¿existe otro número cuyo doble más 1 sea 9? Es sencillo darse cuenta de que no. Por tanto, nuestra ecuación tiene una única solución. ■

■ **Ejemplo.** Consideremos ahora la ecuación $x^2=4$. Es decir, estamos buscando números cuyo cuadrado es 4. Es fácil darse cuenta de que el número 2 verifica la ecuación anterior, pues:

$$2^2=4$$

Por tanto, una solución de la ecuación $x^2=4$ es $x=2$. ¿Existen más soluciones? Pues sí, esta ecuación tiene otra solución, $x=-2$ pues:

$$(-2)^2=4$$

Luego, la ecuación $x^2=4$ tiene dos soluciones: $x=2$ y $x=-2$. ■

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Para las siguientes ecuaciones, comprueba cuáles de los valores dados es solución:

   a) $3x+2=11$ para $x=8$ y $x=3$
   b) $4x+2=2x$ para $x=1$ y $x=-1$
   c) $-x+1=3$ para $x=-2$ y $x=4$
   d) $2x+3=4$ para $x=1$ y $x=\frac{1}{2}$

2. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

   a) $x^2=9$
   b) $x+y=1$
   c) $5x+y^2=10$
   d) $x+y^3=1$
   e) $x^2+y^2=1$
   f) $x+10=3x$

4. Traduce al lenguaje algebraico el siguiente enunciado y comprueba que $x=300$ es solución de la ecuación resultante: 'Al precio inicial de un teléfono móvil le han hecho un descuento del 25 % y tras el descuento hemos pagado 225 euros'.

2.2 Ecuaciones equivalentes

Definición. Se dice que dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

▪ **Ejemplo.** Las ecuaciones $x+1=2$ y $2x+2=4$ tienen como solución $x=1$, luego son ecuaciones semejantes. Sin embargo, las ecuaciones $x+1=2$ y $x+1=7$ NO son semejantes pues la primera tiene como solución $x=1$ y la segunda $x=6$. ▪

¿Cómo se obtienen ecuaciones equivalentes? Tenemos que tener en cuenta las siguientes propiedades:

♡ Si sumamos o restamos el mismo valor en los dos términos de una ecuación obtenemos una ecuación equivalente a la que teníamos inicialmente.

♡ Si multiplicamos o dividimos por una cantidad no nula en los dos términos de una ecuación obtenemos una ecuación equivalente a la ecuación inicial.

▪ **Ejemplo.** Obtén una ecuación equivalente a la ecuación $2x+4=10$.

- Una forma de obtener una ecuación equivalente a la dada es sumar, por ejemplo, -4 en ambos miembros:

$$2x+4+(-4)=10+(-4)\Rightarrow 2x+4-4=10-4\Rightarrow 2x=6\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{ las ecuaciones } 2x+4=10 \text{ y } 2x=6 \text{ son semejantes.}$$

- Obtengamos una ecuación equivalente de otra forma. Si observamos bien la ecuación $2x+4=10$ nos damos cuenta de que podemos dividir por 2 en ambos miembros:

$$(2x+4):2=10:2\Rightarrow (2:2)x+(4:2)=5\Rightarrow x+2=5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{ las ecuaciones } 2x+4=10 \text{ y } x+2=5 \text{ son semejantes.}$$

■

¡Cuidado!
Como hemos podido observar en el ejemplo anterior, cuando nos dan una ecuación, NO hay una única ecuación semejante a ella, sino que podemos encontrar muchas ecuaciones semejantes a la ecuación inicial.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Obtén al menos dos ecuaciones semejantes a cada una de las ecuaciones siguientes:

   a) $3x+10=x$
   b) $2x^2=10$
   c) $x+1=9$
   d) $4x=6$
   e) $-x+1=0$
   f) $-5x+7=25$

2. De las siguientes ecuaciones di cuáles son equivalentes y por qué:

   a) $2x+1=4$
   b) $3x+1=1$
   c) $6x+2=2$
   d) $2x=3$

2.3 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita son las únicamente que utilizaremos y que aprenderemos a resolver nosotros este año.

Si nos hemos ido enterando del resto del tema ya estaríamos en condiciones de saber lo que es una ecuación de primer grado con una incógnita. Pero por si aún no nos ha quedado del todo claro, vamos a repasarlo.

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

⇓	⇓	⇓
igualdad entre expresiones algebraicas	mayor exponente de la variable es 1	todas las letras son iguales

■ **Ejemplo.** Ecuaciones de primer grado:

$$3x+1=10 \quad , \quad 2x-2=x \quad , \quad -x+1=3$$

■

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones de primer grado con una incógnita? Razona tu respuesta.

a) $3x+y=3$
b) $x^2-1=0$
c) $-4x+1=x$
d) $x+y=1$
e) $x^4-x+1=10$
f) $3x+8=20$

Ahora que ya conocemos las ecuaciones de primer grado con una incógnita, el siguiente paso es aprender a resolverlas. Recordemos que resolver una ecuación es encontrar sus soluciones, es decir, el valor o los valores de la incógnita que verifican la igualdad.

♡ La mayoría de las ecuaciones de primer grado con una incógnita solo tienen una solución. Más adelante veremos algún ejemplo especial.

2.3.1 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para resolver ecuaciones lo primero que tenemos que saber es cómo se despeja la incógnita. Seguro esto que lo entendemos mejor con un ejemplo.

■ **Ejemplo.** Despeja la incógnita de las siguientes ecuaciones:

- $\boxed{2x=10}$ Para despejar la x basta dividir por 2 en los dos miembros de la ecuación:

$$2x=10 \overset{(:2)}{\Rightarrow} x=5$$

- $\boxed{x+1=2}$ En este caso basta con sumar -1 en ambos miembros de la ecuación:

$$x+1=2 \overset{+(-1)}{\Rightarrow} x=2-1=1$$

- $\boxed{x-7=4}$ Aquí en suficiente con sumar 7 en ambos miembros:

$$x-7=4 \overset{(+7)}{\Rightarrow} x=4+7=11$$

- $\boxed{\frac{x}{2}=4}$ Basta con multiplicar por 2 en ambos miembros:

$$\frac{x}{2}=4 \overset{(\cdot 2)}{\Rightarrow} x=2\cdot 4=8$$

■

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita se resuelven siguiendo los siguientes pasos:

- ♡ Si hay denominadores se eliminan multiplicando todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- ♡ Si hay paréntesis se aplica la propiedad distributiva para eliminarlos.
- ♡ Se trasponen los términos, es decir, se dejan a un lado de la igualdad todos términos literales y al otro los términos independientes.
- ♡ Se opera con los términos semejantes.
- ♡ Se despeja la incógnita.

■ **Ejemplo.** Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $2x+1=5$

b) $3(x+1)=3$

c) $\dfrac{x}{2}+2=6$

d) $\dfrac{x+3}{4}+2x=3$

a) $\boxed{2x+1=5}$

- ♡ Como no hay ni denominadores ni paréntesis pasamos al tercer paso: trasponer los términos. Vamos a dejar a la izquierda del '=' los términos literales y a la derecha los números. Para ello, sumamos -1 en ambos miembros:

$$2x+1=5 \overset{+(-1)}{\Rightarrow} 2x+1+(-1)=5+(-1) \Rightarrow 2x+1-1=5-1 \Rightarrow 2x=4$$

- ♡ Hemos obtenido una expresión de la que directamente podemos despejar la incógnita. Para ello, basta dividir por 2 en ambos miembros:

$$2x=4 \overset{(:2)}{\Rightarrow} x=\frac{4}{2}=2$$

Luego, $\boxed{x=2}$ es la solución de la ecuación $2x+1=5$.

b) $\boxed{3(x+1)=3}$

- ♡ En esta ecuación no hay denominadores pero sí hay paréntesis. Se aplica la propiedad distributiva para eliminarlos:

$$3(x+1)=3 \Rightarrow 3x+3=3$$

- ♡ Trasponemos los términos, y para ellos sumamos -3 en ambos miembros:

$$3x+3=3 \overset{+(-3)}{\Rightarrow} 3x+3+(-3)=3+(-3) \Rightarrow 3x+3-3=3-3 \Rightarrow 3x=0$$

- ♡ Ya podemos despejar la incógnita dividiendo por 3 en cada miembro:

$$3x=0 \overset{(:3)}{\Rightarrow} \frac{3x}{3}=\frac{0}{3} \Rightarrow \frac{3}{3}x=0 \Rightarrow x=0$$

Luego, $\boxed{x=0}$ es la solución de la ecuación $3(x+1)=3$.

c) $\boxed{\dfrac{x}{2}+2=6}$

♡ Tenemos una ecuación con denominadores, luego el primer paso es eliminar dichos denominadores. Como el único denominador que tenemos es 2, el mínimo común múltiplo también es 2. Por tanto, multiplicamos por 2 todos los términos:

$$\frac{x}{2}+2=6 \overset{(\cdot 2)}{\Rightarrow} x+2\cdot 2=6\cdot 2 \Rightarrow x+4=12$$

♡ No tenemos paréntesis, por lo que pasamos a trasponer los términos. Para ello, basta sumar -4 en ambos miembros:

$$x+4=12 \overset{+(-4)}{\Rightarrow} x+4+(-4)=12+(-4) \Rightarrow x+4-4=12-4 \Rightarrow x=8$$

En este paso ya hemos obtenido la incógnita despejada, por lo que hemos terminado.

Así, $\boxed{x=8}$ es la solución de la ecuación $\frac{x}{2}+2=6$.

d) $\boxed{\dfrac{x+3}{4}+2x=3}$

♡ De nuevo, tenemos denominadores, por lo que lo primero que tenemos que hacer es eliminarlos. El mínimo común múltiplo es 4, por lo que multiplicamos por 4 todos los términos de la ecuación:

$$\frac{x+3}{4}+2x=3 \overset{(\cdot 4)}{\Rightarrow} 4\cdot\left(\frac{x+3}{4}\right)+4\cdot(2x)=4\cdot 3 \Rightarrow \frac{4(x+3)}{4}+(4\cdot 2)x=12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{4}{4}(x+3)+8=12 \Rightarrow (x+3)+8=12$$

♡ El siguiente paso es quitar los paréntesis:

$$(x+3)+8=12 \Rightarrow x+3+8=12 \Rightarrow x+11=12$$

♡ Por último, trasponemos términos sumando -11 en ambos miembros de la ecuación:

$$x+11=12 \overset{+(-11)}{\Rightarrow} x+11+(-11)=12+(-11) \Rightarrow x+11-11=12-11 \Rightarrow x=1$$

Luego, $\boxed{x=1}$ es la solución de la ecuación $\frac{x+3}{4}+2x=3$.

∎

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Resuelve, paso por paso, las siguientes ecuaciones:

   a) $3x+2=-x$
   b) $21x=42$
   c) $7x=21$
   d) $2x-10=x$
   e) $-5x=20-x$
   f) $8x+1=17$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $2x+5(3x-1)=x-13$
   b) $5-4(2x-3)=2x+7$
   c) $5x-3(4x-2)=4(2x-1)$
   d) $5-4(3x+2)=4-5(3x-1)$

Comprobación de la solución

Hay un truco para saber si hemos resuelto bien una ecuación: basta con sustituir la solución en la ecuación y comprobar si se verifica la igualdad.

■ **Ejemplo.** Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la soluciones obtenidas:

a) $2x-3(x+1)=21$ *b*) $\dfrac{x}{3}+2x=14$

- $\boxed{2x-3(x+1)=21}$
  - ♡ Resolvemos la ecuación. Empezamos eliminando paréntesis y después trasponemos términos:
  $$2x-3(x+1)=21 \Rightarrow 2x-3x-3=21 \Rightarrow -x=24 \Rightarrow x=-24$$
  - ♡ Luego, la solución es $\boxed{x=-24}$
  - ♡ Comprobamos la solución. Para ello, sustituimos la x por -24 en la ecuación $2x-3(x+1)=21$ y vemos si se verifica la igualdad.
  $$2\cdot(-24)-3(-24+1)=-24-3\cdot-48-3\cdot(1)=-48+72-3=21$$
  - ♡ Por tanto, la solución es correcta.
- $\boxed{\dfrac{x}{3}+2x=14}$
  - ♡ Resolvemos la ecuación. Empezamos eliminando denominadores:
  $$\frac{x}{3}+2x=14 \overset{\cdot 3}{\Rightarrow} x+6x=42 \Rightarrow 7x=46 \Rightarrow x=6$$
  - ♡ Luego, la solución es $\boxed{x=6}$
  - ♡ Comprobamos la solución. Para ello, sustituimos la x por 6 en la ecuación $\frac{x}{3}+2x=14$ y vemos si se verifica la igualdad.
  $$\frac{6}{3}+2\cdot 6=2+12=14$$
  - ♡ Por tanto, la solución es correcta.

■

2.3.2 Ecuaciones especiales

Hasta este momento únicamente nos hemos encontrado con ecuaciones de primer grado con una incógnita que solo tenían una solución. Pero, ¿todas tienen únicamente una solución? La respuesta es no, hay ecuaciones de primer grado con una incógnita que tienen infinitas soluciones, así como ecuaciones de primer grado con una incógnita que no tienen solución. Veamos algunos ejemplos.

■ **Ejemplo.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x+2(-x+1)=2$ *b*) $4x+4(-x+1)=10$

- $\boxed{2x+2(-x+1)=2}$ Eliminamos paréntesis y trasponemos términos:

$$2x+2(-x+1)=2 \Rightarrow 2x-2x+2=2 \Rightarrow 2x-2x=2-2 \Rightarrow 0=0$$

  ♡ Al resolver la ecuación hemos obtenido la igualdad $0=0$, que siempre es cierta. Esto nos indica que la ecuación se verifica siempre, independientemente del valor que tome la x.
  ♡ Así, la ecuación $2x+2(-x+1)=2$ tiene infinitas soluciones, pues cualquier número cumple la igualdad.

- $\boxed{4x+4(-x+1)=10}$ Eliminamos paréntesis y trasponemos términos:

$$4x+4(-x+1)=10 \Rightarrow 4x+4(-x)+4=10 \Rightarrow 4x-4x+4=10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0x=6 \Rightarrow 0=6$$

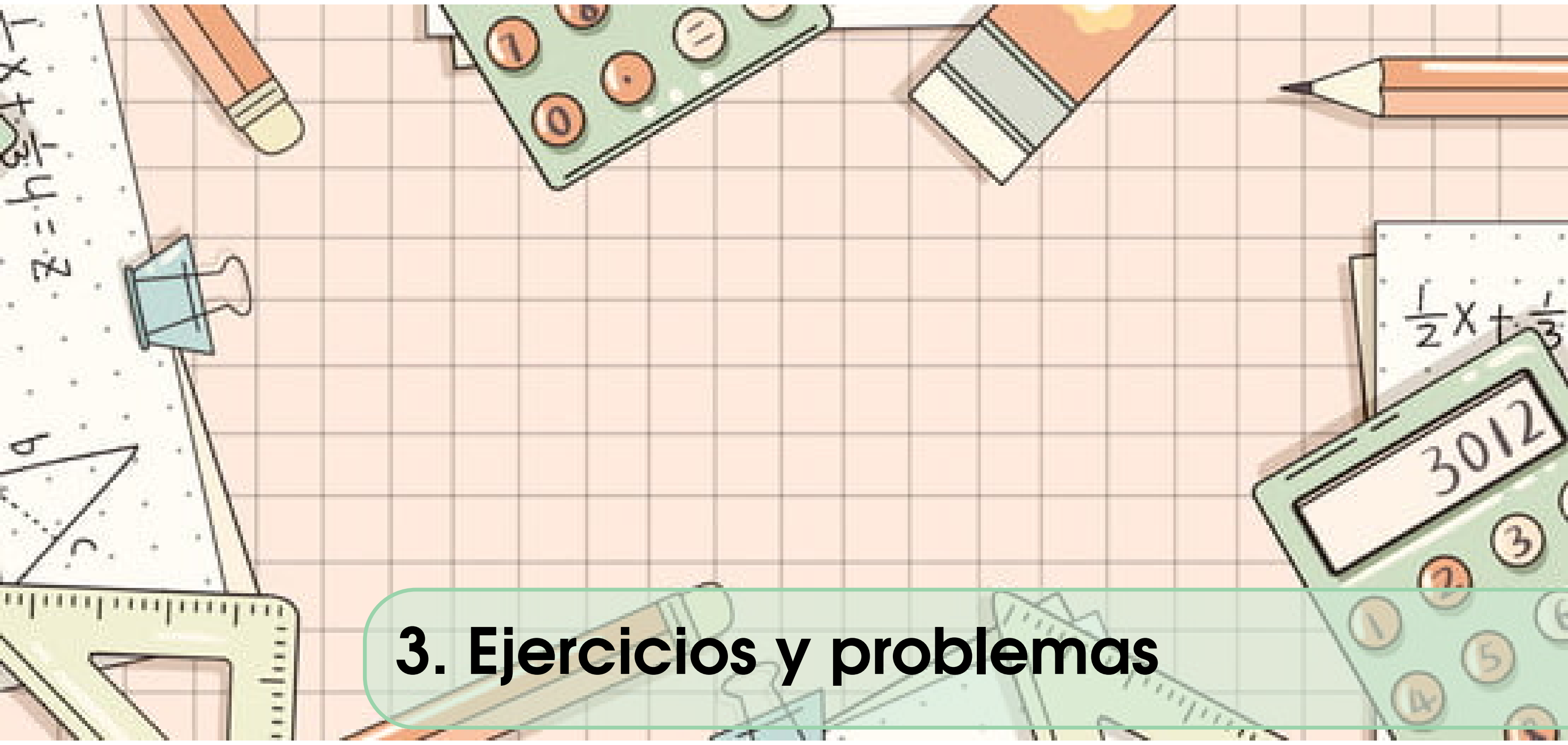
  ♡ Al resolver la ecuación hemos obtenido la igualdad $0=6$, que nunca es cierta. Esto nos indica que la ecuación nunca se a cumplir, independientemente del valor que tome la x.
  ♡ Así, la ecuación $4x+4(-x+1)=10$ no tiene solución.

■

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Resuelva las siguientes ecuaciones indicando razonadamente el número de soluciones que tiene cada una. En caso de que tenga una única solución, comprueba que la solución que has obtenido es correcta:

   a) $x+x=2x$
   b) $3x=2x$
   c) $x+1=x+2$
   d) $-4x+2=x$
   e) $10x+2=x+2$
   f) $5x-x+10=4x+10$



3. Ejercicios y problemas

3.1 Ejercicios

LENGUAJE ALGEBRAICO

1. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes expresiones:
   a) Un número impar.
   b) Lo que pagamos por un producto cuando nos hacen un descuento del 25 %.
   c) La edad que tendrá una persona que ves por la calle dentro de 6 años.
   d) El precio que tendrá la luz si sube un 11 %.
   e) Los múltiplos de 12.
   f) El área de un triángulo de base 4.
   g) El perímetro de un rectángulo de altura 3.
   h) El producto de tres números consecutivos.
   i) La suma de un número par y uno impar.
   j) Una cuarta parte de un precio.

2. Expresa en lenguaje algebraico el siguiente enunciado y prueba que $x = 10$ es solución: "No sé cuántos libros tengo. Pero sí que sé que si al doble de la cantidad de libros que tengo le sumo 3 tendré 23 libros".

3. En las siguientes expresiones algebraicas, escribe la variable, los monomios, indicando términos literales y coeficientes, y los términos independientes:
   a) $a^2 + b + 3$
   b) $n^3m + m$
   c) $-8x + y - 2$
   d) $5x^2 + 10$

4. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores indicados:
   a) $-3n + m - 7$ para $n = 1, m = -1$
   b) $3x + y - z$ para $x = 1, y = 0, z = 1$
   c) $s^2t - 5$ para $s = 2, t = -4$
   d) $a^3b + a + b$ para $a = -2, b = 4$

MONOMIOS

5. ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios? Razona tu respuesta.
   a) $x^{-1}y^2$
   b) $2ab^3$
   c) $7xy+6x-y$
   d) $ab^2c^3d^4$
6. Realiza las siguientes operaciones con monomios:
   a) $(x^2y)-(3x^2y)$
   b) $(4a^3b)\cdot(-b^2)$
   c) $11x-21x$
   d) $(10s^3t^4):(5st)$
   e) $(xy^3)+(x^2y)$
   f) $(ab^7)+(-ab^7)$
   g) $(xyz)\cdot(x^3y^2)$
   h) $(a^3b):(2a^2b)$
   j) $(x^{11}y)-x+(x^{11}y)-x^{11}$
   k) $(a^4b^8):(3a^2b^3)$
   l) $(3x^5y^2)\cdot(4x^6y^2)$
   m) $(ab)\cdot(a^5b^3c)$
   n) $(xy^2)+(x^3y)$
   o) $(8xy^2):(4xy)$
   p $(3xy)\cdot(4a^2b)$
7. Escribe en cada caso un monomio que verifique las condiciones pedidas:
   a) De grado 3, con dos variables y cuyo coeficiente sea 4.
   b) Con coeficiente igual a -5 y cuyo valor numérico en 2 sea -10.
   c) Con la misma parte literal que el monomio $4x^3y$ pero de forma que su valor numérico en $x=1$ sea negativo.
   d) Semejante pero no igual al monomio a^3b^4.
8. Estudia el coeficiente, la parte literal y el grado de los siguientes monomios:
   a) $-11x^4y$
   b) $7a^8b^5$
   c) $-3x^2y^9$
   d) $10st^3$
9. Escribe sin paréntesis y simplifica todo lo posible:
   a) $5x-(3x+x)$
   b) $-(9a+3)+(7-3a)$
   c) $2s^2-3x-(5s^2-4x)$
   d) $a^3b-2(a+b)-4a$

ECUACIONES

10. En las siguientes ecuaciones, escribe el primer miembro, el segundo miembro y la variable:
    a) $7(x+5)=3x-4$
    b) $y+6+5y=(y-3)$
    c) $-9m+3=2m-3+m$
    d) $-(z+1)+3=7-5z$
11. Traspón los términos de las siguientes ecuaciones hasta tener las partes literales a un lado de la igualdad y los términos independientes al otro:
    a) $3b-4(-b+1)=10$
    b) $-(y+1)+2y=y-7$
    c) $3x+1=2x-3$
12. Dadas las siguientes ecuaciones, comprueba cuál de los valores dados es solución:
    a) $2x+3=1 \quad x=1, x=-1$
    b) $-x+7=6x \quad x=2, x=1$
    c) $3+x=10x \quad x=\frac{1}{3}, x=\frac{1}{2}$
    d) $2x+1=11 \quad x=-8, x=5$
    e) $\frac{x}{2}=x+1 \quad x=3, x=-2$
    f) $2x-1=x \quad x=-1, x=-1$
    g) $7x+5=-x \quad x=0, x=\frac{-5}{8}$
    h) $12x=0 \quad x=-1, x=0$

13. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones de primer grado?

a) $x+y=2$
b) $x^2y=-7$
c) $-8x+1=x$
d) $ab=2$
e) $3x+y=2$
f) $x^4=9$

14. De las siguientes ecuaciones, identifica aquellas que sean ecuaciones de primer grado con una incógnita:
a) $x+y=0$
b) $-x+10=-7x$
c) $x^3+y=2$
d) $2a=20-2a$

15. Indica cuáles de las siguientes ecuaciones son equivalentes:

a) $2x+3=5$
b) $x-1=2$
c) $4x-5=7$
d) $7x-4=3$

16. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $2+5x=4x+7$
b) $4x-5=1+3x$
c) $8-5x-4=-6x+6$
d) $4x+8+2x=5x-1$

17. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $3x+2(4x-1)=x+18$
b) $1-3(x+1)=2x+13$
c) $5x-4(2x+3)=2x-17$
d) $4x+5-7x=2(3x-6)-1$
d) $2x+10-8x=3(8x-1)$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $7x+3(5x-3)-5(x+1)=7(2x+2)$
b) $9x-5(x+1)=17$

19. Resuelve las siguientes ecuaciones, indicando cada uno de los pasos que hay que seguir:
a) $\dfrac{3x}{2}+\dfrac{4x+1}{3}=-\dfrac{5}{2}$
b) $\dfrac{4x}{3}-\dfrac{2x-5}{2}=\dfrac{3x}{4}$
c) $\dfrac{x}{6}-\dfrac{2x-3}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{5x-2}{3}$
d) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{4x+5}{6}=\dfrac{7x-1}{3}+\dfrac{1}{2}$

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $2x-\dfrac{4x-3}{2}-5=\dfrac{6x+1}{3}-\dfrac{1}{6}$
b) $\dfrac{5x-3}{4}-3x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4x+5}{8}$

21. Resuelve y comprueba la solución:
a) $7+2(x-3)=9-5(2x+1)$
b) $\dfrac{x+1}{4}-\dfrac{x-3}{6}=x+\dfrac{5}{2}$

22. Resuelve las siguientes ecuaciones e indica si tienen o no solución:
a) $x-3=2+x$
b) $\dfrac{x}{2}=1-x+\dfrac{3x}{2}$
c) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=\dfrac{x}{6}$
d) $2x-1=3x+3-x-4$

Ejercicio extra. Completa la siguiente tabla:

Ecuación	Miembros		Incógnitas	Grado
	Primer miembro	Segundo miembro		
	$x+10$	$2x$		
$x=2y+31$				
	$4x+12$	y		
$7x+8y=20$				

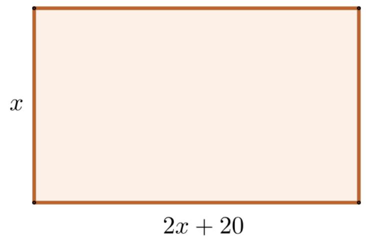
3.2 Problemas

Antes de ponermos a resolver problemas tenemos que aprender a resolver problemas en los que aparecen ecuaciones. Para ello, vamos a dar una serie de pasos que tenemos que seguir siempre que tengamos que resolver un problema:

- ♡ Leer el problema despacio y, si fuera necesario, leerlo más de una vez.
- ♡ Extraer los datos que nos proporciona el enunciado.
- ♡ ¿Qué nos preguntan? Localizar cuál es la incógnita.
- ♡ Una vez que extraemos los datos y localizamos la incógnita, podemos pasar a plantear la ecuación.
- ♡ Resolvemos la ecuación.
- ♡ Respondemos la pregunta que nos hacía el enunciado del problema con el valor de la incógnita que hayamos obtenido.

■ **Ejemplo.** Hemos vallado una finca en forma de rectángulo con 520 metros de valla. Sabemos que el largo de la finca mide el doble que el ancho más 20 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?

En este tipo de problemas suele ayudar mucho hacer un dibujo:



Datos:

- Perímetro de la finca $= 520$ metros.
- El ancho de la finca mide: x.
- El largo de la finca mide: $2x+20$.

Pergunta: ¿dimensiones de la finca?

Lo primero que tenemos que tener claro es que el perímetro de una figura plana es la suma de las longitudes de todos sus lados. Por tanto, en el caso del rectángulo el perímetro es:

$$\text{Perímetro } = 2\cdot\text{Ancho}+2\cdot\text{Ancho}$$

Con los datos que nos da el problema:

$$520 = \text{Perímetro } = 2\cdot\text{Ancho}+2\cdot\text{Alto} = 2(2x+20)+2x$$

Luego, la ecuación que tenemos que resolver es $2(2x+20)+2x = 520$. Siguiendo los pasos para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita:

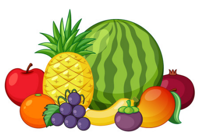
$$2(2x+20)+2x = 520 \Rightarrow 4x+40+2x = 520 \Rightarrow 6x = 480 \Rightarrow x = 80$$

Por tanto, la finca mide 80 metros de ancho y 180 metros de largo. ■

PROBLEMAS

1. La suma de dos números consecutivos es 21. ¿Cuáles son esos números?
2. En una familia, la suma de las edades de los hijos es de 37 años. El hijo mediano es 3 años mayor que el pequeño, y el hijo grande es 7 años mayor que el pequeño. Calcula la edad de cada uno.

3. He ido a comprar fruta y en total me he gastado 6 euros. Sabiendo que entre plátanos y manzanas he comprado 5 kilos de fruta, y que los plátanos costaban 2 euros el kilo y las manzanas 1 euro el kilo, ¿cuántos kilos de cada fruta he comprado?



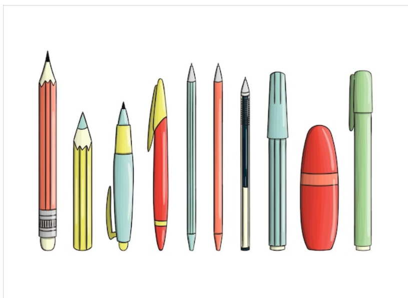
4. Un ciclista recorre 120 kilómetros en tres días. El segundo día recorre el doble de distancia que el primer día, y el tercer día recorre tres veces más que el primero. ¿Cuántos kilómetros recorre cada día?
5. En una ciudad tenemos dos tarifas de autobús: podemos pagar $0'6$ euros por viaje o podemos adquirir una tarjeta que cuesta 30 euros y vale para todo el mes.
   a) ¿Cuál es el mínimo de viajes que tenemos que hacer en autobús para que merezca la pena comprar la tarjeta mensual?
   b) Plantea una expresión algebraica que indique lo que nos cuesta cada viaje en función del número de viajes si compramos la tarjeta. ¿Qué pasa si hacemos 40 viajes durante todo el mes?

6. En una granja podemos contar 55 animales entre cerdos y avestruces. Sabemos que en total hay 160 patas. ¿Cuántos animales de cada tipo hay en la granja?
7. Alberto ha sacado un 8 en un examen de 9 preguntas. Sabemos que en la primera pregunta ha obtenido 1 puntos, mientras que en la última tiene 0 puntos pues la dejó en balnco. También sabemos que el resto de preguntas ha obtenido la misma puntuación. ¿Cuál ha sido esa puntuación? [Problema basado en uno visto en los apuntes de Marea Verde].
8. Alba dedica $\frac{2}{3}$ del tiempo que estudia al día a estudiar las materias que le gustan, y le sobran 60 minutos para el resto de materias. ¿Cuánto tiempo estudia Alba cada día? [Problema basado en uno visto en los apuntes de Marea Verde].

9. Un taxi cobra $2'4$ euros por la bajada de bandera y $0'5$ euros por kilómetro recorrido. Si hemos pagado $7'5$ euros, ¿cuántos kilómetros hemos recorrido?

10. En mi monedero tengo 20 monedas entre monedas de $0'5$ y de 1 euro. Sabiendo que tengo en total 15 euros, ¿cuántas monedas tengo de cada tipo?

11. En una papelería venden cajas de bolígrafos de distintos tamaños. Sabemos que la caja mediana contiene 40 bolígrafos más que la caja pequeña, y que la caja grande contiene el doble de bolígrafos que la caja mediana. Compramos una caja de cada tipo y en total tenemos 240 bolígrafos. ¿Cuántos bolígrafos contiene cada caja?



12. Hemos comprado un pantalón y una camisa por un total de 48 euros. Sabemos que en el pantalón nos han hecho un descuento del 15 % y la camisa tenía un descuento del 10 %. Sin el descuento habríamos comprado las dos cosas por 55. ¿Cuánto costaba cada prenda inicialmente?

13. Hemos comprado una lavadora por 400 euros, después de que nos hicieran una descuento del 20 %. ¿Cuál era el precio inicial de la lavadora?

14. Hemos gastado la mitad de un depósito de gasolina. Posteriormente, lo hemos repuesto con 35 litros y el depósito ha quedado lleno hasta sus $4/5$ partes. ¿Cuál es la capacidad del depósito?
15. Un padre le dice a su hija: "Hace 5 años tenía el triple de edad que tú". Si las edades actuales de los dos suman 50, ¿cuántos años tiene cada uno?

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y MONOMIOS
1 ESO
I.E.S. Zurbarán (Badajoz)
Nazaret Trejo Arroyo

Nombre: ______________________________

TODAS LAS RESPUESTAS TIENEN QUE ESTAR DEBIDAMENTE RAZONADAS.
LA LIMPIEZA Y EL ORDEN SE VALORAN POSITIVAMENTE. RESPONDE A CADA APARTADO EN EL HUECO QUE HAY DEBAJO.
LA NOTA OBTENIDA EN ESTOS EJERCICIOS SUPONDRÁ UN 10% DE LA NOTA DEL TEMA.

1. (2 puntos) Traduce al lenguaje algebraico, indicando en cada caso lo que significa la variable.

a) El precio de un móvil tras un descuento del 15%.

b) La suma de un número par y de uno impar.

c) La edad de alguien dentro de 5 años.

d) El precio de la luz si sube un 11%.

e) El perímetro y el área de un rectángulo cuya altura mide la mitad que su base.

f) El dinero que tengo después de gastarme 15 euros.

g) La suma de tres números consecutivos.

h) La tercera parte de un número.

i) La mitad de un número más su cuarta parte.

j) El precio de una camiseta después de que nos descuenten un 30%.

2. (2 puntos) Calcula el valor numérico de cada expresión algebraica para los valores dados en cada caso. Haz todos los cálculos necesarios.

a) $ab + a^2 - b$ para $a = 2$ y $b = 3$

b) $s - 4st + t^2 - s^3$ para $s = -1$ y $t = 5$

c) $-2m^2 + nm + n^3 - 7$ para $m = -3$ y $n = -1$

d) $3x + 7 - x^2$ para $x = \frac{1}{2}$

3. (2 puntos) Realiza las siguientes sumas y restas de monomios:

a) $7x^2 + 14x^2 =$

b) $4x + 5x - 9x =$

c) $x^2 + x^2y - 3x^3 + x + 7x^2y =$

d) $\dfrac{1}{2}x + x =$

e) $\dfrac{7}{4}a^2 + \dfrac{1}{4}a^2 =$

f) $-(ab^3 + ab) + 4ab^3 + a - 7ab =$

g) $-(x^2 + y) - (-3xy + x^2) =$

h) $7x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{5}{2}x^3 + 2x^2 + \dfrac{3}{2}x^3 =$

i) $2a^2b + \dfrac{3}{2}a^2 - \dfrac{5}{2}a^2b - 10a^2 =$

j) $7a + 8a - a + 2a =$

k) $s^3 + 4st + 2s^3 - 10st =$

l) $\frac{10}{3}x + \frac{4}{3}xy - \frac{1}{3}xy =$

m) $3ab^2 + a^2 - (4a^2 - ab^2) - (7ab^2 + a^2) =$

n) $x^2y^3 + y^3 - x^2 - 7x^2y^3 + 4x^2 =$

4. (2 puntos) Dadas las siguientes expresiones algebraicas, indica las variables, los monomios y si hay o no término independiente. En cada monomio indica su parte literal y su coeficiente.

a) $-ab^2 + ab + a^3 - 1$

b) $x^2 + xy - y$

c) $-a^3 + 4$

d) $s^3t^2 + t - s$

5. (2 puntos) Completa la siguiente tabla:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$4xy^2$			
$-a^3b$			
$-7st^7$			
$8z^6y^2$			
$-5x^4y^5z$			

Name: Date:

Topic: Class:

Main Ideas/Questions	Notes/Examples	
One-Step Equations	1. $m + 12 = 10$ $-12 \ -12$ $\boxed{m=-2}$	2. $-2 = g - 9$ $+9 \ +9$ $\boxed{7=g}$
	3. $\frac{-7y}{-7} = \frac{-91}{-7}$ $\boxed{y=13}$	4. $9 \cdot \frac{a}{9} = -4 \cdot 9$ $\boxed{a=-36}$
Fractions To "get rid" of a fraction, multiply by the reciprocal	5. $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x = 10 \cdot \frac{3}{2}$ $\boxed{x=15}$	6. $\frac{9}{4} \cdot \frac{4}{9}w = -8 \cdot \frac{9}{4}$ $\boxed{w=-18}$
	7. $\frac{-5}{6} \cdot -\frac{6}{5}k = 12 \cdot \frac{-5}{6}$ $\boxed{k=-10}$	8. $-2 \cdot -\frac{1}{2}m = -9 \cdot -2$ $\boxed{m=18}$
Two-Step Equations	**To Solve a Two-Step Equation:** 1. Undo the Addition/Subtraction (to remove constant term) 2. Undo the Multiplication/Division (to remove coefficient)	
	9. $6x + 8 = 50$ $-8 \ -8$ $\frac{6x}{6} = \frac{42}{6}$ $\boxed{x=7}$	10. $2n - 5 = 11$ $+5 \ +5$ $\frac{2n}{2} = \frac{16}{2}$ $\boxed{n=8}$
	11. $13 = -4k + 9$ $-9 \ \ -9$ $\frac{4}{-4} = \frac{-4k}{-4}$ $\boxed{k=-1}$	12. $7 - 3y = 34$ $-7 \ \ -7$ $\frac{-3y}{-3} = \frac{27}{-3}$ $\boxed{y=-9}$

	13. $\frac{x}{2} - 7 = 9$ $+7 \ +7$ $2 \cdot \frac{x}{2} = 16 \cdot 2$ $\boxed{x=32}$	14. $11 = \frac{c}{-5} + 8$ $-8 \ \ -8$ $-5 \cdot 3 = \frac{c}{-5} \cdot -5$ $\boxed{-15=c}$
	15. $\frac{3}{5}x + 22 = 28$ $-22 \ -22$ $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}x = 6 \cdot \frac{5}{3}$ $\boxed{x=10}$	16. $-\frac{1}{3}m + 1 = -7$ $-1 \ -1$ $-3 \cdot -\frac{1}{3}m = -8 \cdot -3$ $\boxed{m=24}$
	17. $-10 + \frac{7}{4}p = -38$ $+10 \ \ +10$ $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4}p = -28 \cdot \frac{4}{7}$ $\boxed{p=-16}$	18. $15 = 9 - \frac{1}{2}x$ $-9 \ -9$ $-2 \cdot 6 = -\frac{1}{2}x \cdot -2$ $\boxed{-12=x}$
Watch Out!	**The examples below are different in that the multiplication/division is done FIRST, followed by the addition/subtraction.**	
	19. $8 \cdot \frac{x+11}{8} = -3 \cdot 8$ $x + 11 = -24$ $-11 \ -11$ $\boxed{x=-35}$	20. $-2 \cdot \frac{n-5}{-2} = -7 \cdot -2$ $n - 5 = 14$ $+5 \ +5$ $\boxed{n=19}$
	21. $-6 \cdot 1 = \frac{a-13}{-6} \cdot -6$ $-6 = a - 13$ $+13 \ \ +13$ $\boxed{7=a}$	22. $9 \cdot 4 = \frac{w+8}{9} \cdot 9$ $36 = w + 8$ $-8 \ \ -8$ $\boxed{28=w}$

Two-Step Equation Maze!

Directions: Use your solutions to navigate through the puzzle. **SHOW ALL STEPS!!!!**

Start!

$4x + 10 = -26$

$-10 \quad -10$

$4x = -36$

$\frac{4x}{4} = \frac{-36}{4}$

$x = -9$

-4

$\frac{x}{3} + 10 = 15$

$-10 \quad -10$

$3 \cdot \frac{x}{3} = 5 \cdot 3$

$x = 15$

15

$9 - 2x = 35$

$-9 \quad -9$

$\frac{-2x}{-2} = \frac{26}{-2}$

$x = -13$

-13

$\frac{2}{3}x + 15 = 17$

$-15 \quad -15$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x = 2 \cdot \frac{3}{2}$

$x = 3$

9 | -9 | -8 | -2 | 48 | -22 | 3

$\frac{x-7}{4} = -2$

14

$\frac{1}{2}x + 13 = 9$

$-13 \quad -13$

$2 \cdot \frac{1}{2}x = -4 \cdot 2$

$x = -8$

8

$\frac{3}{4}x - 9 = 27$

4

$-5x - 10 = 10$

$+10 \quad +10$

$\frac{-5x}{-5} = \frac{20}{-5}$

$x = -4$

-14 | 24 | 44 | 11 | -4 | -4 | 0

$8 - \frac{1}{3}x = 16$

$-8 \quad -8$

$3 \cdot -\frac{1}{3}x = 8 \cdot -3$

$x = -24$

6

$-12x - 17 = -89$

$+17 \quad +17$

$\frac{-12x}{-12} = \frac{-72}{-12}$

$x = 6$

5

$-2 \cdot -8 = \frac{x+11}{-2} \cdot -2$

$16 = x + 11$

$-11 \quad -11$

$5 = x$

-5

$19 - \frac{5}{2}x = 34$

-72 | -24 | -6 | 17 | 4 | 48 | -6

$28 - 32x = 92$

7

$5 - x = 12$

$-5 \quad -5$

$\frac{-x}{-1} = \frac{7}{-1}$

$x = -7$

-7

$13 - \frac{3}{2}x = 37$

$-13 \quad -13$

$-\frac{2}{3} \cdot -\frac{3}{2}x = 24 \cdot -\frac{2}{3}$

$x = -16$

-16

END!

☺

EXPRESIONES ALGEBRAICAS, MONOMIOS Y ECUACIONES
1 ESO
I.E.S. Zurbarán (Badajoz)
Nazaret Trejo Arroyo

Nombre y apellidos: ______________________________

LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES SON UN REPASO PARA EL EXAMEN.
REALÍZALAS EN TU CUADERNO CON CALMA Y PRESTANDO ATENCIÓN :)

1. Traduce al lenguaje algebraico, indicando en cada caso lo que significa la variable.

   a) El precio de una camiseta en la que nos hacen un rebaja del 25%.
   b) La suma de 4 número consecutivos.
   c) El producto de un número par y uno impar.
   d) El perímetro y el área de un triángulo en el que la altura mide el doble que la base.
   e) El precio de la gasolina si ha subido un 23%.
   f) La mitad de un número más su tercera parte.

2. Calcula el valor numérico de cada expresión algebraica para los valores dados en cada caso. Haz todos los cálculos necesarios.

   a) $a^3b^2 - a^2 - b + 10$ para $a = 1$ y $b = -2$
   b) $2s^2t - 4st - s^3$ para $s = 2$ y $t = 3$
   c) $6m^3 + n^2m - n^4 + 12$ para $m = -1$ y $n = 4$
   d) $3x^2 + 7 - x^3$ para $x = \frac{1}{2}$

   <u>EJEMPLO RESUELTO:</u> Calcula el valor numérico de la expresión albegraica $x^3 - 2x^2 + 10$ para $x = \frac{1}{2}$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10 = \frac{1}{2^3} - 2\cdot\frac{1}{2^2} + 10 = \frac{1}{8} - 2\cdot\frac{1}{4} + 10 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 10 =$$
$$= \frac{1}{8} - \frac{4}{8} + \frac{80}{8} = \frac{1-4+80}{8} = \frac{77}{8}$$

3. Realiza las siguientes sumas y restas de monomios:

   a) $8ab^3 - a^3 + 3a^2b + 4a^3$
   b) $-(xy^2 - x) + 3xy^2 - 2(xy + 4x) - 10y$
   c) $-2nm^3 + nm - 10n^5 + 2n^5 + nm^3$
   d) $(3a^6b^9)\cdot(4a^2b^3)$
   e) $(6x^2y^5z^2)\cdot(xy^2z^3)$
   f) $(-2s^3t^4)\cdot(-st)$
   g) $(4x^7y^8z^3) : (2x^6yz)$
   h) $(-8a^6b^4c^9) : (-8a^3b^2c)$
   i) $(4z^7t^5) : (4z^7t^5)$
   j) $(10a^5b^6c) : (10ab)$

4. Dadas las siguientes expresiones algebraicas, indica las variables, los monomios y si hay o no término independiente. En cada monomio indica su parte literal y su coeficiente.

   a) $-4xy + x - y^2 + 5$
   b) $-7nm + n^2$
   c) $-2xyz + z^3 - 1$
   d) $-3s^4t + t^8 - w$

5. Completa la siguiente tabla:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$-x^3y^7$			
$-4a^5b^8$			
$15s^2t^9z^3$			
$-8z^3y^4$			
$5x^3y^6z^8$			

Te recuerdo que el grado de un monomio es la suma de los exponentes de su parte literal.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $-2x+5=6x-12+x$

b) $2(-3x-10)+15-3x=-3x-5(-2x+7)$

c) $2(3x-4)=3(2x+1)$

d) $-10(x+4)=-40$

e) $\dfrac{2x+1}{3}-2(x+3)-10=\dfrac{-4x+7}{6}-\dfrac{x}{4}$

f) $\dfrac{5x}{2}-20+3(-x+1)=\dfrac{3x-4}{5}+10$

g) $-2(4x-1)=\dfrac{x-2}{5}+\dfrac{x}{3}-8$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución:

a) $\dfrac{x-1}{2}+10=2\,(x+10)$

b) $2(x+1)=6x-2$

c) $\dfrac{3(x-2)}{5}+10-\dfrac{x}{5}=2(x+2)$

d) $-7(2x+3)=7x$

e) $\dfrac{5x}{3}+\dfrac{1}{2}-3(x-1)=\dfrac{13x}{6}$

f) $-8x+2(x+1)-9=-3x+2$

8. Llevo leídas $\frac{2}{5}$ de las páginas de un libro. Si leo 100 páginas más iré justo por la mitad del libro. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

9. En un examen había 40 preguntas. Cada pregunta bien contestada te suma 2 puntos, mientras que cada fallo te resta un punto. ¿Cuántas preguntas acertó Miriam si obtuvo 26 puntos y contestó a todas las preguntas?

10. El ancho de una sala mide $\frac{2}{3}$ su largo. Si el ancho midiera 3 metros más y el largo 3 metros menos, la sala sería cuadrada. ¿Cuáles son las dimensiones de la sala?

11. Tengo 50 euros. Con ese dinero podría ir en taxi al cine, entrar a ver una película, volver en taxi a casa, y aún me sobraría 18 euros. Sabiendo que cada viaje en taxi me cuesta el doble que la entrada del cine, ¿cuánto me cuesta cada cosa?

12. Una madre tiene 4 veces la edad de su hija. Dentro de 5 años, la madre tendrá el triple de años que la hija. ¿Cuántos años tienen actualmente cada una?

Matemáticas divertidas :) ¿Conseguiré leerte la mente?

- Piensa un número.
- Multiplícalo por 2.
- Suma 9.
- Suma el número que pensaste inicialmente.
- Divide por 3.
- Suma 4.
- Resta el número que pensaste al principio.

¿Cuánto te queda finalmente? A ver si lo adivino... ¿Te ha salido 7? Ahora solo te queda intentar averiguar cómo lo he hecho :)

EXAMEN de ÁLGEBRA
1 ESO
I.E.S. Zurbarán (Badajoz)

Nombre y apellidos: ______________________________

Todas las respuestas tienen que estar debidamente razonadas. La limpieza y el orden se valoran positivamente. Responde a cada apartado en el hueco que hay debajo.
MUCHA SUERTE :)

1. (1 punto) En cada expresión algebraica, indica las variables, los monomios, los elementos de cada monomio, y si tiene término independiente o no.

   a) $xyz + z - 10$

   b) $-a^2b + b - 5a$

2. (1 punto) Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $2xy - x^2 + y - 7$ para $x = 2$ e $y = -4$

   b) $8z^3 + z^2 - z$ para $z = \frac{1}{2}$

3. (2 puntos) Realiza las siguientes operaciones con monomios:

   a) $xy - x^3 + 3xy + y - 2x^3 =$

   b) $-(ab + a) - 2(ab + b - 4a) =$

   c) $7 \cdot 2x =$

   d) $(7a^3b^2) \cdot (5a^5b^7) =$

   e) $(4x^2y^7) : (2xy^5) =$

   f) $(12xyz^5) : (xyz) =$

   g) $2nm + n - m =$

   h) $(10n^2m^7) \cdot (-4n^3m^8t) =$

   i) $(8ab^2) : (ab^2) =$

   j) $10x - 3x - 7x =$

4. (2 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 7 = x + x + 7$

b) $-2(3x+7) + 2x = -2x + 3(-x+2)$

c) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x}{3} - 2 = \dfrac{2x-1}{6} - \dfrac{5x}{4} + 1$

d) $\dfrac{-x}{3} + \dfrac{x+10}{5} = x - 6$

5. ($1'5$ puntos) Teoría:

a) Indica en qué se diferencian una ecuación y una expresión algebraica.

b) ¿Se pueden sumar todos los monomios? Indica cómo se llaman los monomios que se pueden sumar y lo que tienen dichos monomios.

c) ¿Qué es el grado de un monomio?

6. (1 punto) El perímetro de un rectángulo mide 24 cm. Si sabemos que la altura mide el doble que la base, ¿cuánto mide cada lado?

7. (1′5 puntos) En una ferretería venden tres tipos de cajas de tornillos: la caja pequeña, la caja mediana y la caja grande. En la caja mediana hay del doble de tornillos que en la caja pequeña y en el caja grande hay el triple de tornillos que en la caja pequeña más cuatro. Compro una caja de cada tipo y en total tengo 400 tornillos. ¿Cuántos tornillos hay en cada caja?

Anexos B

Material de elaboración propia para la UD de Geometría

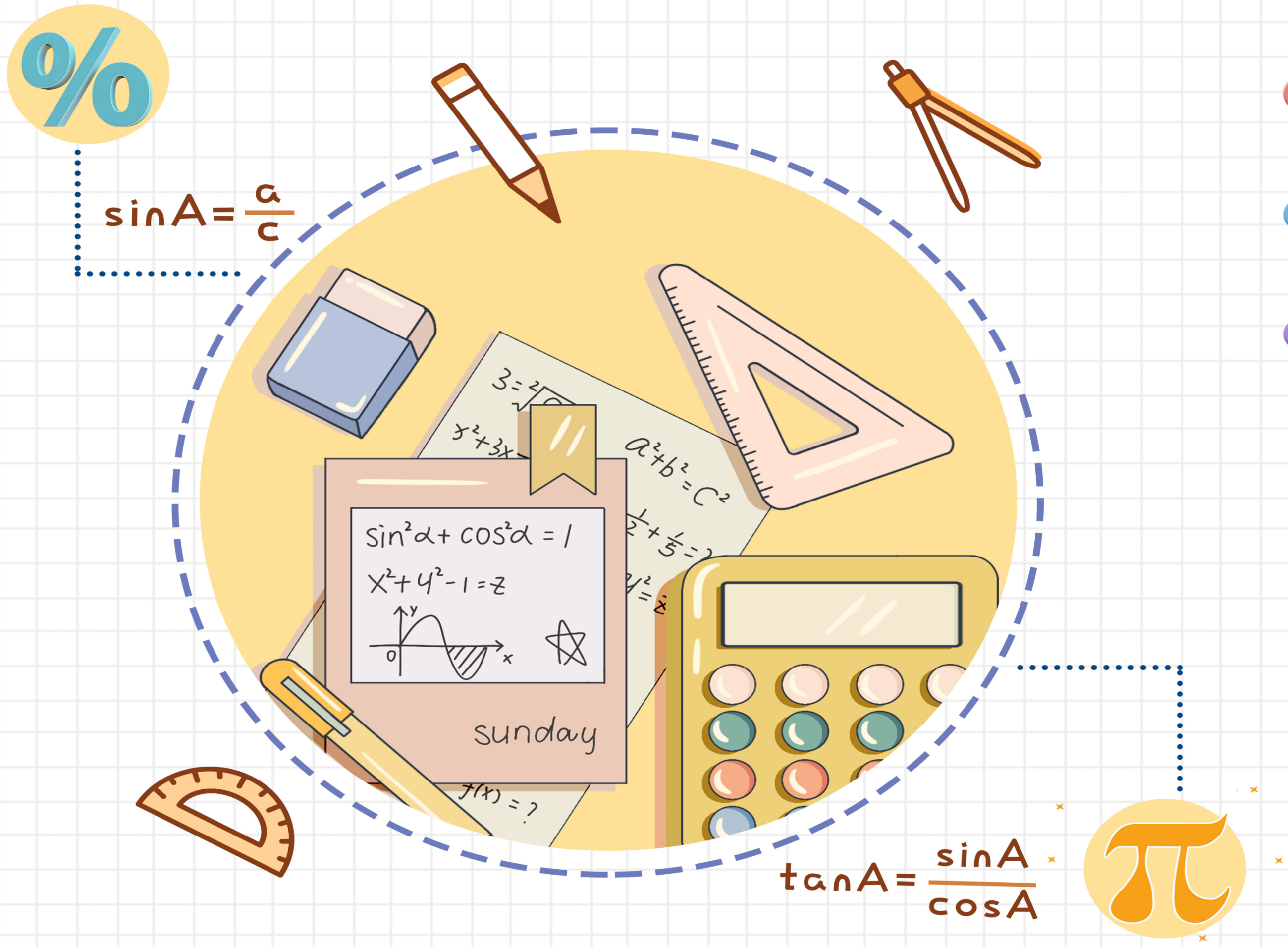
Al igual que para la unidad didáctica de álgebra, para impartir el tema de *Cuerpos en el espacio. Áreas y volúmenes* en 2º ESO también he hecho apuntes propios. Como dije antes, en el libro este tema estaba separado en dos temas, y personalmente no me gustaba, así que decidí fusionarlos. Todos los dibujos y figuras que en los apuntes aparecen están hechos con *Geogebra*, herramienta que también empleé mucho en clase en durante el desarrollo de la unidad didáctica.

El formato es prácticamente el mismo que en los apuntes de álgebra, si bien es cierto que al estar en 2º ESO he intentado que sean unos apuntes un poco más formales.

Áreas y volúmenes

2º ESO - IES Zurbarán

Nazaret Trejo Arroyo

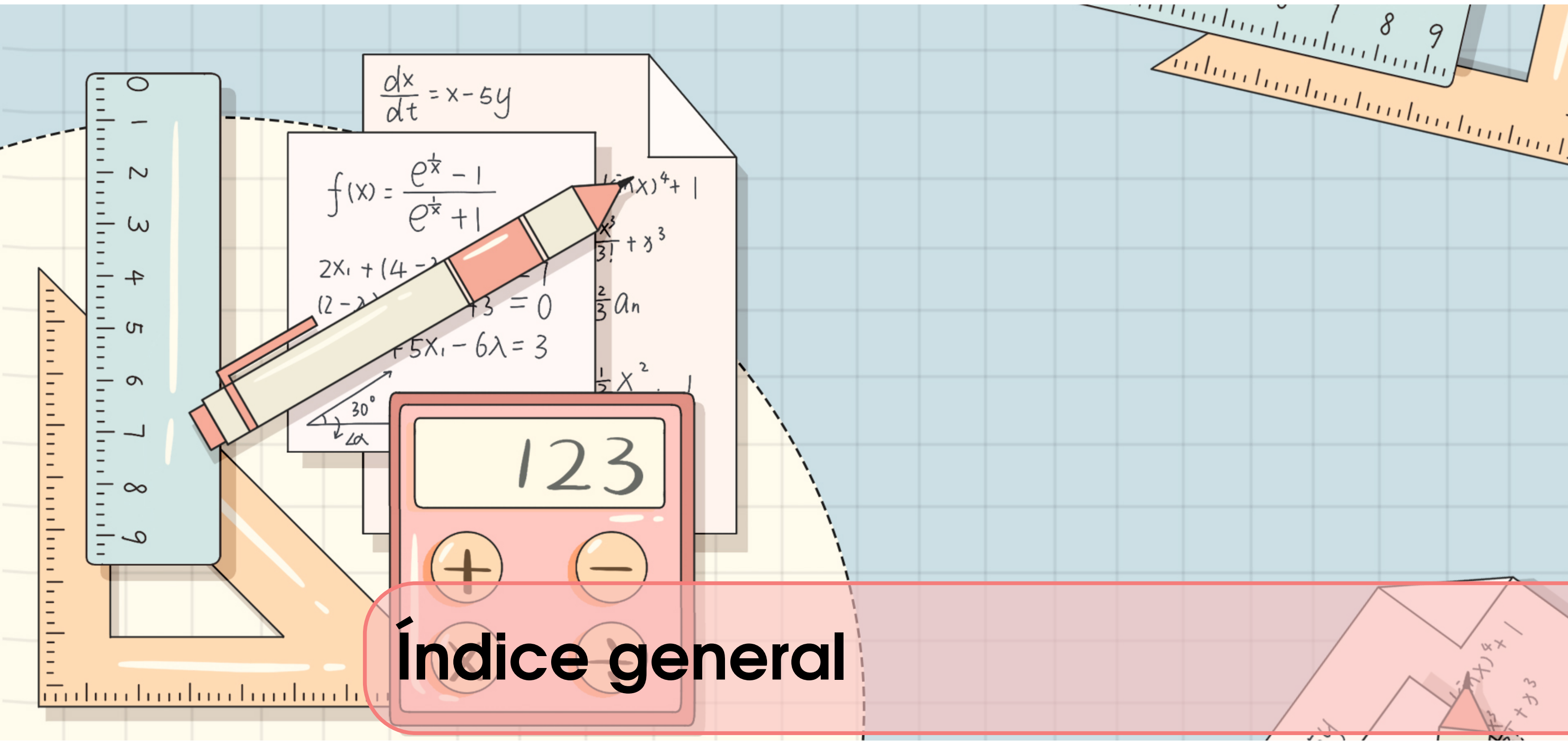


SUMMER RESEARCH INTERNSHIP, UNIVERSITY OF WESTERN ONTARIO

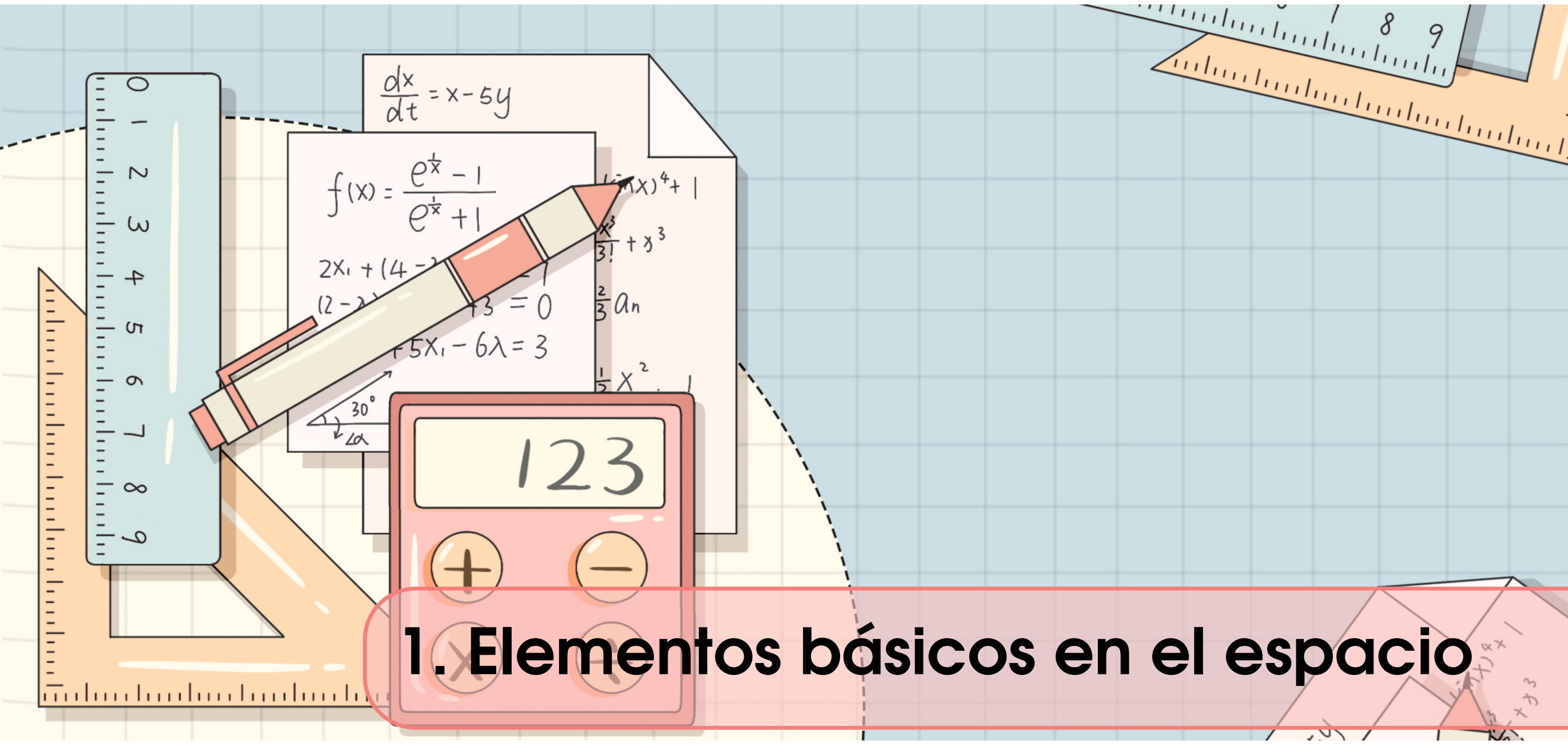
GITHUB.COM/LAURETHTEX/CLUSTERING

This research was done under the supervision of Dr. Pauline Barmby with the financial support of the MITACS Globalink Research Internship Award within a total of 12 weeks, from June 16th to September 5th of 2014.

First release, August 2014



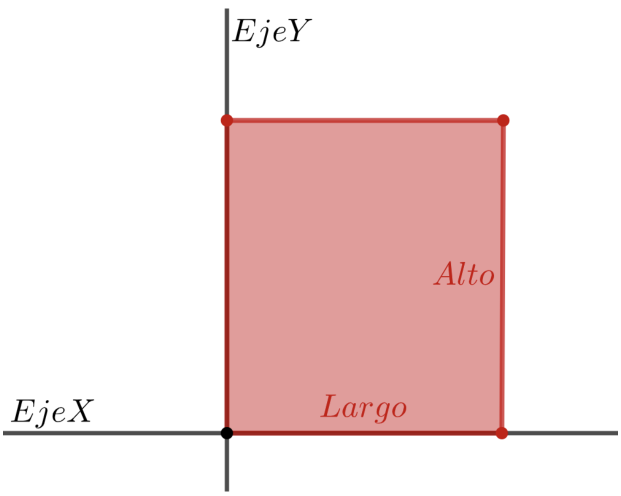
Índice general



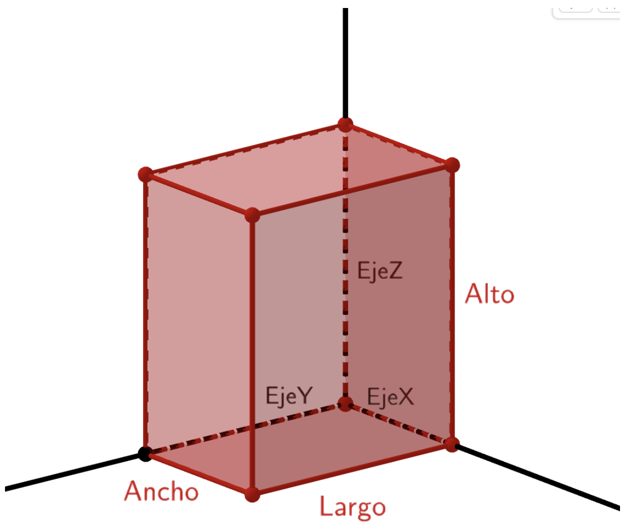
1. Elementos básicos en el espacio

1.1 Dimensiones en el espacio

A diferencia de lo que ocurría en el plano, donde solo teníamos dos dimensiones, el largo y el alto, en el espacio podemos distinguir tres dimensiones: el largo, el alto y el ancho.



(a) Dimensiones en el plano



(b) Dimensiones en el espacio

1.2 Puntos, rectas y planos

Definición. Un punto es un elemento del espacio que no tiene ni largo, ni ancho, ni alto. Es decir, los puntos son los elementos del espacio con dimensión 0.

Los puntos se representan usando letras mayúsculas: A, B, P...

Para hacernos una idea de lo que es un punto podemos pensar en un grano de arena muy, muy pequeño, tan pequeño que no tenga grosor.

Definición. Una recta es una sucesión de puntos alineados que no tiene ni principio ni fin. Una recta tiene longitud pero no tiene ni ancho ni alto, es decir, es un elemento del espacio con dimensión 1.

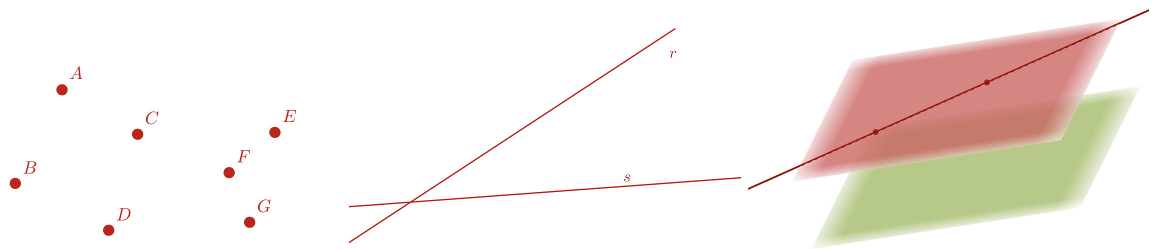
Las rectas se representan usando letras minúsculas: r, s, t...

Intuitivamente, podemos pensar que una recta es como un hilo muy tenso, sin principio ni fin, y que tampoco tiene grosor.

Definición. Un plano es una superficie infinita del espacio donde podemos trazar puntos y rectas. Un plano tiene dos dimensiones: longitud y anchura, pero no tiene altura.

Los planos se representan mediante la letra griega pi, π.

Intuitivamente, podemos pensar en un plano como una sábana muy larga y ancha que no tenga ni principio ni fin, es decir, que sea infinita.



(a) Puntos (b) Rectas (c) Planos

Figura 1.1: Elementos básicos del espacio

1.3 Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Rectas paralelas

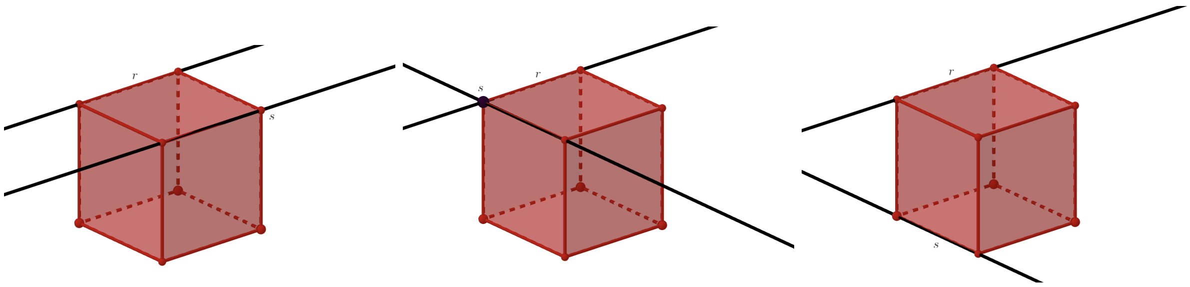
Definición. Dos restas en el espacio son paralelas si están situadas en el mismo plano y se cortan en ningún punto.

Rectas secantes

Definición. Dos rectas en el espacio son secantes si están situadas en el mismo plano y se cortan en un único punto.

Rectas que se cruzan

Definición. Dos rectas en el espacio se cruzan si no están situadas en el mismo plano y no se cortan en ningún punto.



(a) Rectas paralelas (b) Rectas secantes (c) Rectas que se cruzan

Figura 1.2: Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

1.4 Posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio

Recta contenida en plano

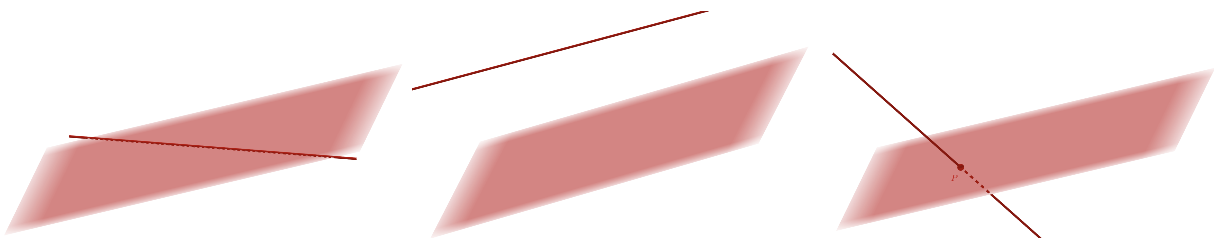
Definición. Una recta está contenida en un plano si todos los puntos de la recta pertenecen al plano.

Recta paralela a plano

Definición. Un recta y un plano son paralelos si no tienen ningún punto en común.

Recta secante a plano

Definición. Un recta y un plano son secantes si la recta corta al plano en un punto.



(a) Recta contenida en plano (b) Recta paralela a plano (c) Recta secante a plano

Figura 1.3: Posiciones relativas de un recta y un plano en el espacio

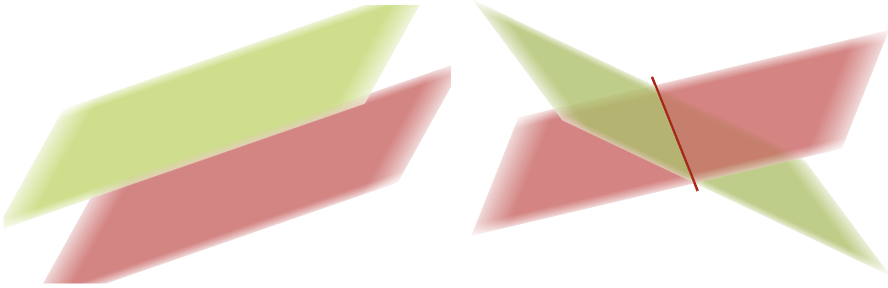
1.5 Posiciones relativas de dos planos en el espacio

Planos paralelos

Definición. Dos planos son paralelos cuando no tienen ningún punto en común

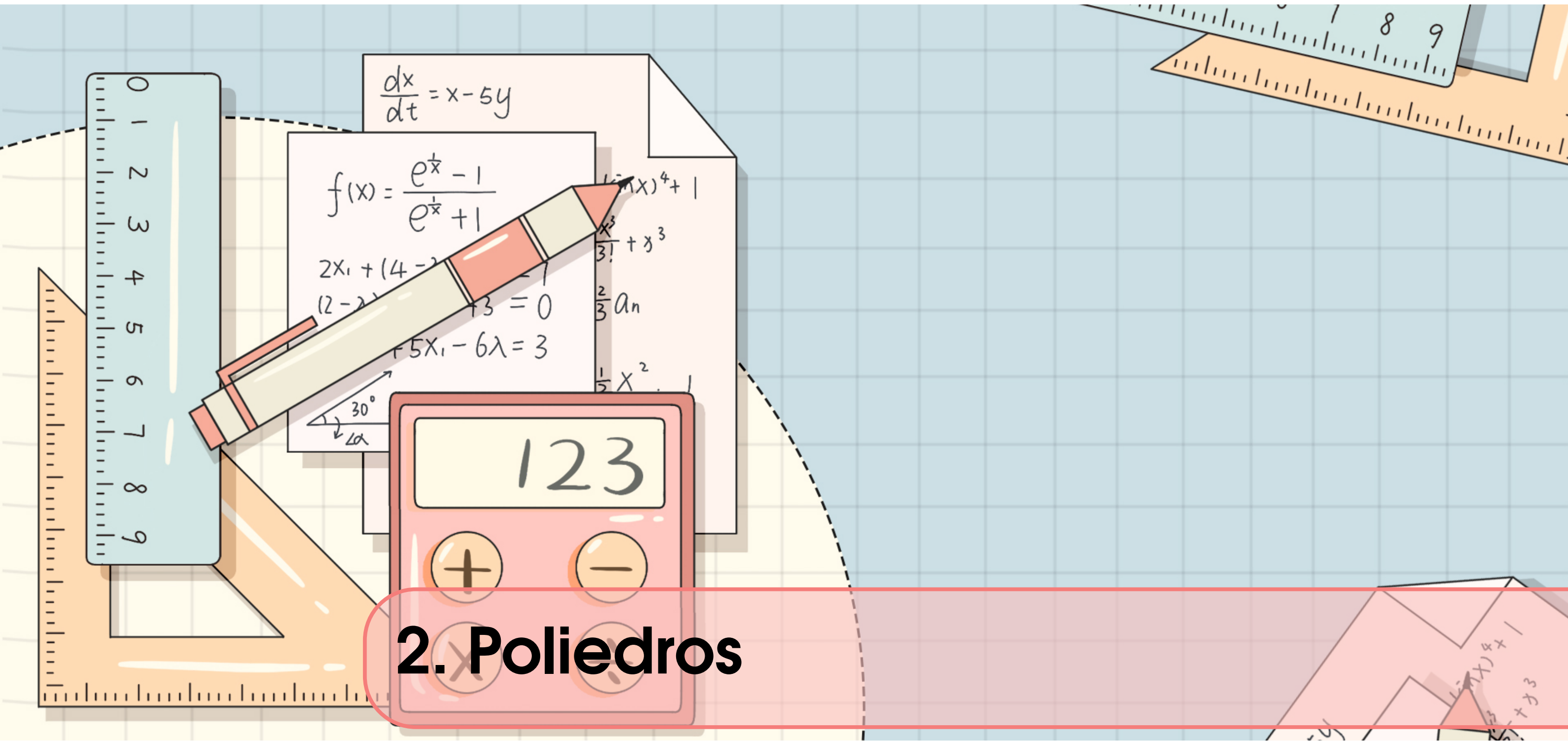
Planos secantes

Definición. Dos planos son secantes cuando se corta en un una recta.



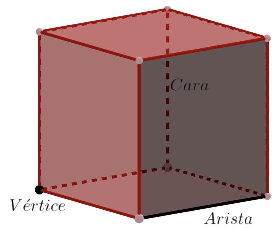
(a) Planos paralelos (b) Planos secantes

Figura 1.4: Posiciones relativas de dos planos en el espacio



2. Poliedros

2.1 Poliedros

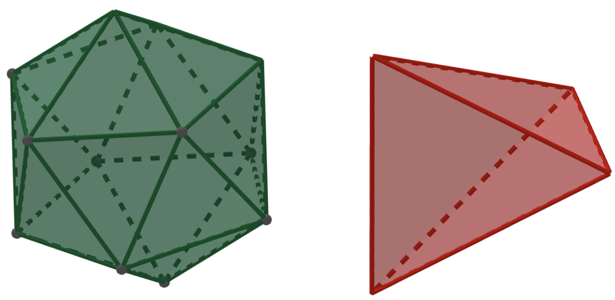


Definición. Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por polígonos. En un poliedro podemos distinguir los siguientes elementos:

- ♡ Caras: cada uno de los polígonos que forman el poliedro.
- ♡ Aristas: intersección de dos caras.
- ♡ Vértices: puntos donde se cortan dos o más aristas.

2.1.1 Clasificación de poliedros

Definición. Un poliedro es regular si todas sus caras son polígonos regulares iguales y, además, en cada vértice concurren el mismo número de aristas. A un poliedro que no es regular se le llama irregular.



(a) Poliedro regular (b) Poliedro irregular

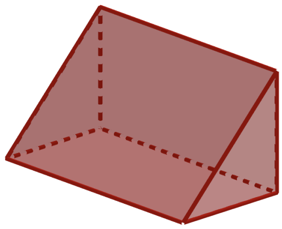
Figura 2.1: Ejemplo de un poliedro regular y de uno irregular

2.1.2 Teorema de Euler

Teorema 2.1.1 En un poliedro convexo, el número de caras menos el número de aristas más el número de vértices es igual a 2:

$$C - A + V = 2$$

■ **Ejemplo.** Comprueba que se verifica el teorema de Euler para el poliedro de la imagen.

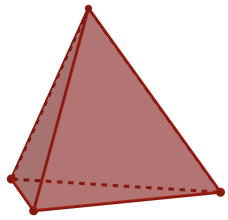


Contamos el número de caras, aristas y vértices, obteniendo:
- ♡ Número de caras: 5
- ♡ Número de aristas: 9
- ♡ Número de vértices: 6

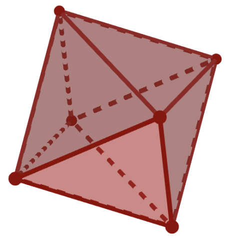
Según el Teorema de Euler debería verificarse que $5 - 9 + 6 = 2$, lo cual es claramente cierto, pues $-4 + 6 = 2$. ■

2.1.3 Construcción de poliedros regulares

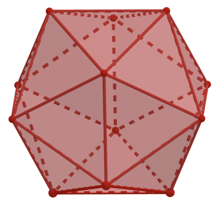
Solo existen 5 poliedros regulares, y son los llamados sólidos platónicos. Dichos poliedros regulares son: el tetraedro, el octaedro, el icosaedro, el cubo o hexaedro y el dodecaedro.



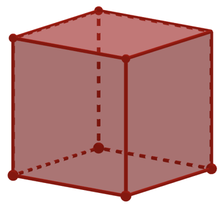
- ♡ TETRAEDRO. Todas sus caras son triángulos equiláteros y concurren tres caras en un mismo vértice.



- ♡ OCTAEDRO. Todas sus caras son triángulos equiláteros y concurren cuatro caras en un mismo vértice.

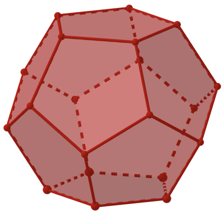


- ♡ ICOSAEDRO. Todas sus caras son triángulos equiláteros y concurren cinco caras en un mismo vértice.



- ♡ CUBO O HEXAEDRO. Todas sus caras son cuadrados y concurren tres caras en un mismo vértice.

♡ DODECAEDRO. Todas sus caras son pentágonos y concurren tres caras en un mismo vértice.



Ejercicios para practicar

1 Completa la siguiente tabla y comprueba que se verifica el teorema de Euler para los 5 poliedros regulares.

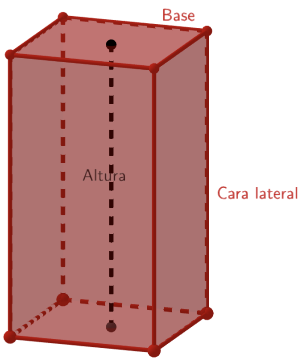
	Número de caras	Número de aristas	Número de vértices	Teorema de Euler
Tetraedro				
Octaedro				
Icosaedro				
Cubo				
Dodecaedro				

2 Dibuja en tu cuaderno un poliedro regular y un poliedro irregular distinto a los que aparecen en los apuntes.

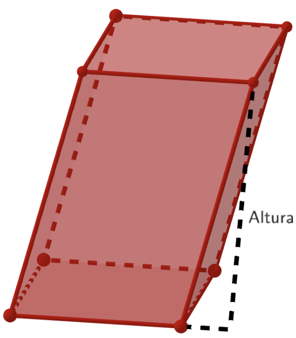
2.2 Prismas

Definición. Un prisma es un poliedro que tiene como bases a dos polígonos paralelos e iguales, y cuyas caras laterales son paralelogramos. La altura de un prisma es la distancia que hay entre sus bases.

Podemos distinguir dos tipos de prismas, los prismas rectos y los prismas oblicuos.



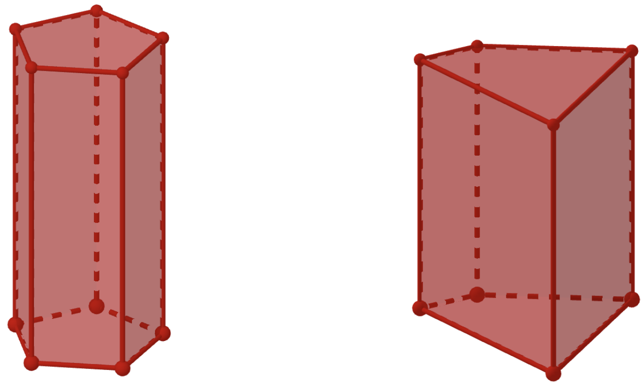
(a) Prisma recto



(b) Prisma oblicuo

Figura 2.2: Ejemplo de un prisma recto y de uno oblicuo

Definición. Un prisma es regular si es recto y sus bases son polígonos regulares.

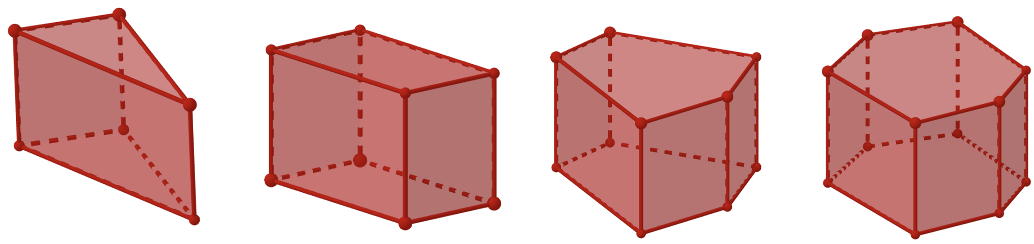


(a) Prisma regular (b) Prisma irregular

Figura 2.3: Ejemplo de un prisma regular y de uno irregular

También podemos clasificar los prismas, tanto los regulares como los irregulares, en funcíon del polígono que forma la base:

- ♡ Prisma triangular: las bases del prisma son triángulos.
- ♡ Prisma cuadrangular: las bases del prisma son cuadriláteros.
- ♡ Prisma pentagonal: las bases del prisma son pentágonos.
- ♡ Prisma hexagonal: las bases del prisma son hexágonos.



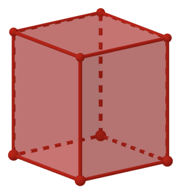
(a) Prisma triangular (b) Prisma cuadrandular (c) Prisma pentagonal (d) Prisma hexagonal

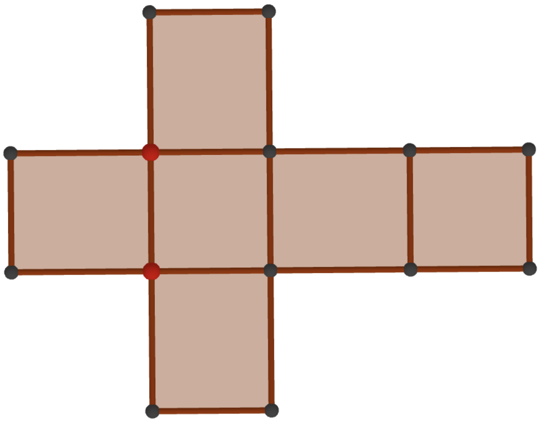
2.2.1 Desarrollo plano de un prisma regular

El desarrollo plano de un prismas regular está formado por dos polígonos regulares, que son las bases del prisma, y tantos rectángulos iguales como aristas tenga la base.

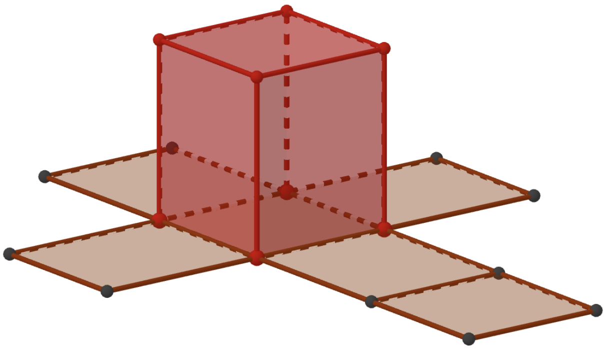
■ **Ejemplo.** Construye el desarrollo plano del prisma de la imagen.

Tenemos un prisma regular cuyas bases son cuadrados por lo que su desarrollo plano es el siguiente:





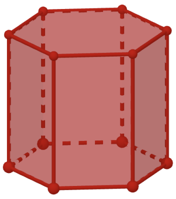
(a) Desarrollo plano



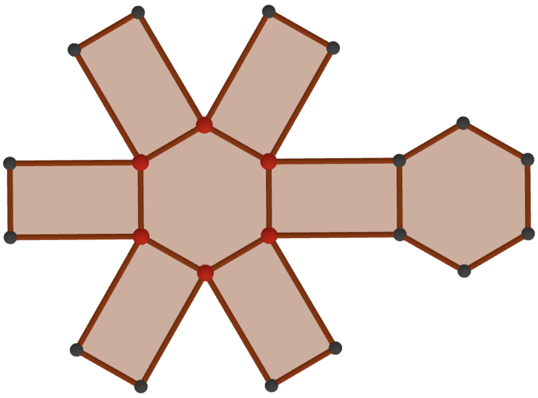
(b) Prisma sobre su desarrollo plano

■

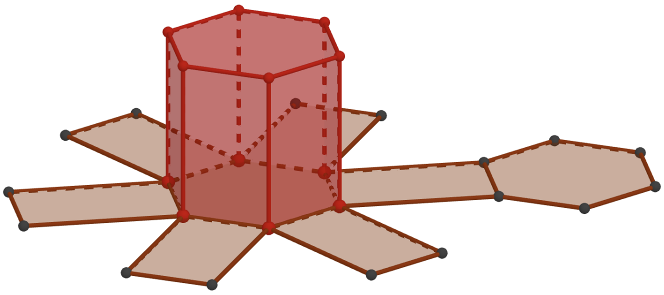
■ **Ejemplo.** Construye el desarrollo plano del prisma de la imagen.



Ahora nos encontramos con un prisma regular cuyas bases son hexágonos regulares, es decir, es un prisma hexagonal regular, por lo que su desarrollo plano es el siguiente:



(a) Desarrollo plano

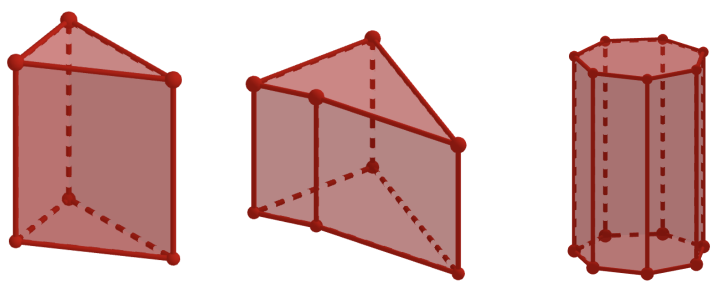


(b) Prisma sobre su desarrollo plano

■

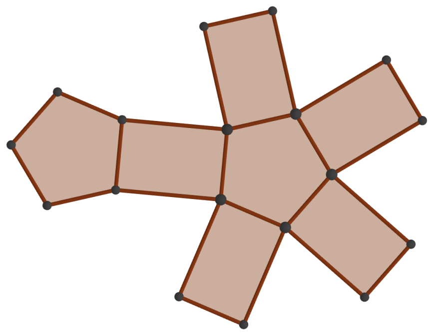
Ejercicios para practicar

1. Dibuja en tu cuaderno un prisma regular pentagonal y un prisma irregular cuadrangular.
2. Realiza los desarrollos planos de los dos prismas del ejercicio anterior.
3. Clasifica los siguientes prismas:



(a) (b) (c)

4. ¿A qué prisma corresponde el siguiente desarrollo plano? Dibújalo en tu cuaderno.



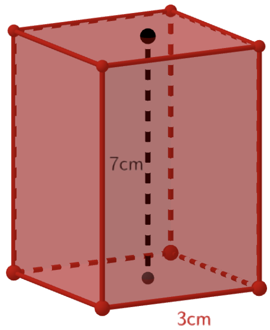
2.2.2 Área y volumen de un prisma

> ¡Ten en cuenta!
> Para calcular el área de cualquier poliedro basta con calcular las áreas de cada uno de los polígonos que formas sus caras y después sumarlas.

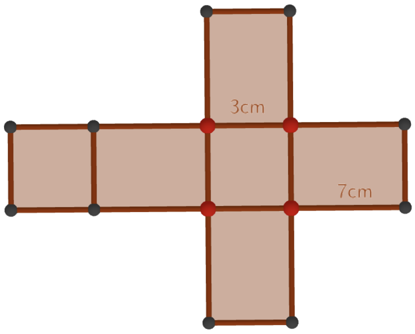
Área

♡ El área de un prisma se deduce de su desarrollo plano. Ya sabemos que el desarrollo plano de un prisma está formado por dos bases iguales, que son polígonos regulares, y tanto rectángulos iguales como aristas tenga la base.

■ **Ejemplo.** Halla el área del siguiente prisma regular cuadrangular:



(a) Prisma cuadrangular



(b) Desallorro plano

♡ Cada una de las bases del prisma es un cuadrado cuyo lado mide 3 cm, por lo que su área será:

$$A_B = 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}^2$$

♡ Cada una de las caras del prisma es un rectángulo cuya base mide 3 cm y cuya altura mide $7cm$. Por tanto el área será:

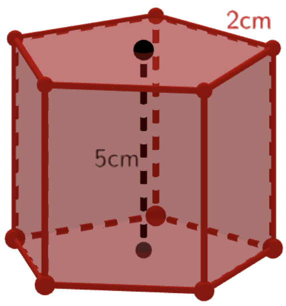
$$A_R = 3 \cdot 7 = 21 \text{ cm}^2$$

En el prisma tenemos 2 bases y 4 caras, por lo que el área total del prisma es:

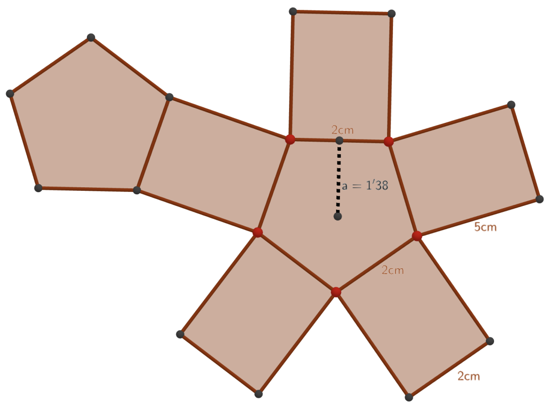
$$A_T = 2A_B + 4A_R \Rightarrow A_T = 2 \cdot 9 + 4 \cdot 21 = 18 + 84 = 102 \text{ cm}^2$$

■

■ **Ejemplo.** Halla el área del siguiente prisma regular pentagonal cuya base es un pentágono regular de apotema $1'68$ cm.



(a) Prisma pentagonal



(b) Desallorro plano

♡ Cada una de las bases del prisma es un pentágono cuyo lado mide 3 cm y cuya apotema mide $1'68$ cm. Recordando la fórmula del área de un pentágono tenemos que:

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2} \Rightarrow A_B = \frac{2 \cdot 5 \cdot 1'68}{2} = 5 \cdot 1'68 \Rightarrow A_B = 8'1$$

♡ Cada una de las caras del prisma es un rectángulo cuya base mide 2 cm y cuya altura mide 5cm. Por tanto el área de cada rectángulo será:

$$A_R = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}^2$$

En total, como el prisma tiene dos bases y cinco caras, su área será:

$$A_T = 2A_B + 5A_R \Rightarrow A_T = 2 \cdot 8'1 + 5 \cdot 10 = 16'2 + 50 = 66'2 \text{ cm}^2$$

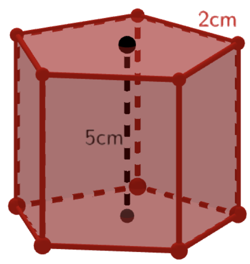
■

Volumen

♡ El volumen de un prisma se obtiene multiplicando el área de la base por la altura:

$$V = A_B \cdot h$$

■ **Ejemplo.** Calcula el volumen del prisma de la imagen.



Tenemos un prisma regular cuya base es un pentágono de lado 2 cm y apotema $a = 1'68$ cm. Además, también sabemos que la altura del prisma es de 5 cm. El área de la base es:

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2} \Rightarrow A_B = \frac{5 \cdot 2 \cdot 1'68}{2} = 5 \cdot 1'68 \Rightarrow A_B = 8'1\text{cm}$$

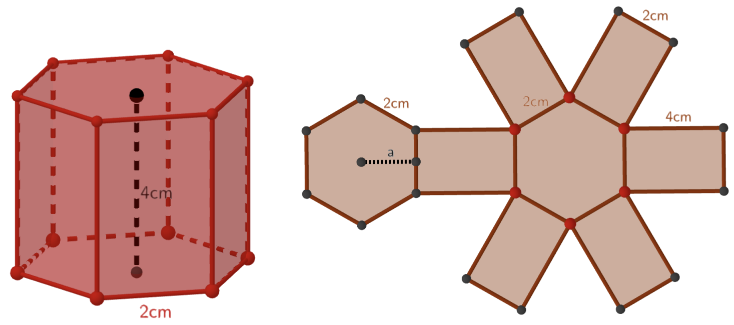
Así, el volumen del prisma es:

$$V = A_B \cdot h \Rightarrow V = 8'1 \cdot 5 = 40'5\text{cm}^3$$

■

Ejercicios para practicar

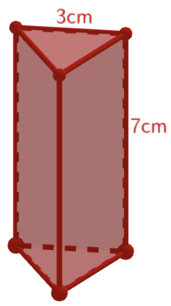
1. Halla el área y el volumen del siguiente prisma regular hexagonal:



(a) Prisma hexagonal (b) Desallorro plano

2. Dibuja en tu cuaderno un prisma regular cuadrangular tal que el lado de la base mida 2 cm y su altura sea de 5 cm. Calcula su área y su volumen.

3. Realiza el desarrollo plano del siguiente prisma regular triangular en tu cuaderno. Después, calcula su área y su volumen.

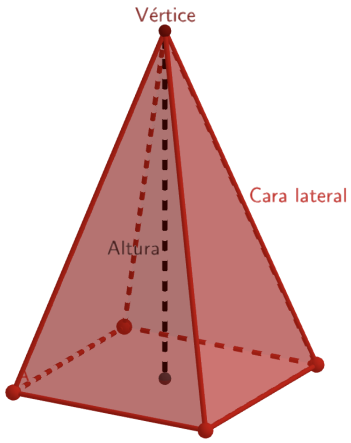


2.3 Pirámides

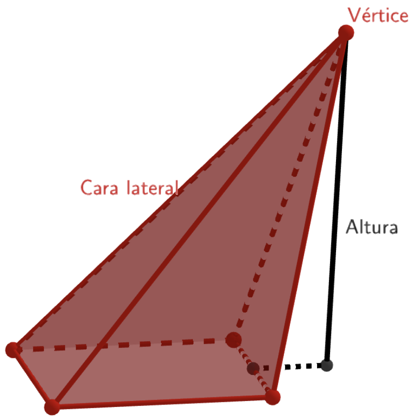
Definición. Una pirámide es un poliedro que tiene como base un polígono cualquiera, y cuyas caras laterales son triángulos con un vértice en común, que es el vértice de la pirámide. La altura de una pirámide es la distancia que hay entre la base y el vértice de la pirámide.

Al igual que en el caso de los prismas, podemos distinguir pirámides rectas y pirámides oblicuas.

Definición. Una pirámide es recta si sus caras son triángulos isósceles. A las pirámides que no son rectas se les llama oblicuas.



(a) Pirámide recta



(b) Pirámide oblicua

Un pirámide es regular si es recta y su base es un polígono regular. Si no es regular, decimos que la pirámide es irregular.

También podemos clasificar las pirámides en función del polígono regular que tengan como base:

- ♡ Pirámide triangular: la base de la pirámide es un triángulo.
- ♡ Pirámide cuadrangular: la base de la pirámide es un cuadrilátero.
- ♡ Pirámide pentagonal: la base de la pirámide es un pentágono.
- ♡ Pirámide hexagonal: la base de la pirámide es un hexágono.

Ejercicios para practicar

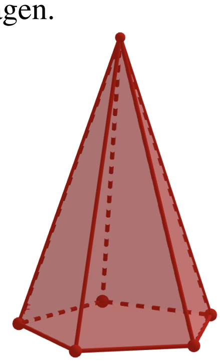
1. Dibuja en tu cuaderno una pirámide triangular regular, una pirámide cuadrangular recta, una pirámide pentagonal regular y una pirámide hexagonal oblicua.

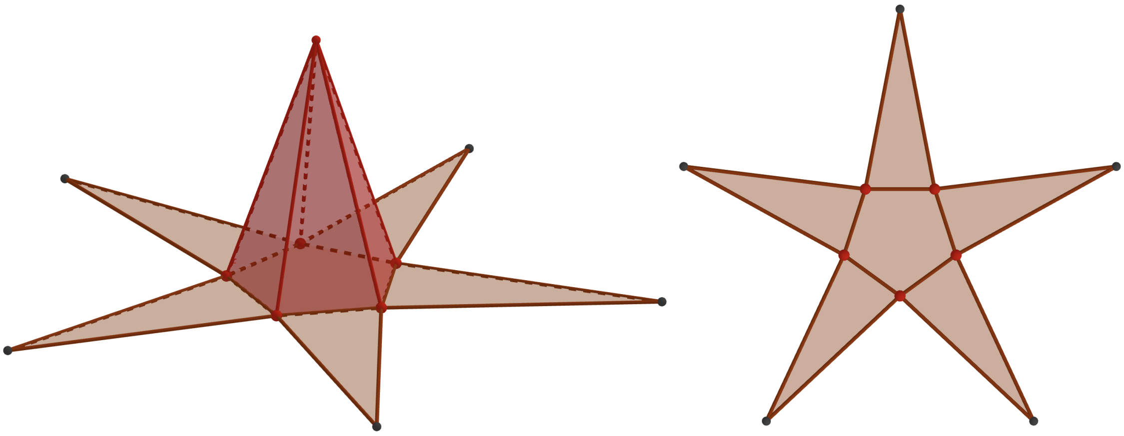
2.3.1 Desarrollo plano de una pirámide

El desarrollo plano de una pirámide está formado por un polígono regular, que es la base de la pirámide, y tanto triángulos como aristas tenga la base.

■ **Ejemplo.** Construye el desarrollo plano de la pirámide de la imagen.

Tenemos una pirámide regular cuya base es un pentágono regular, por lo que su desarrollo plano es el siguiente:





(a) Desarrollo plano (b) Pirámide sobre su desarrollo plano

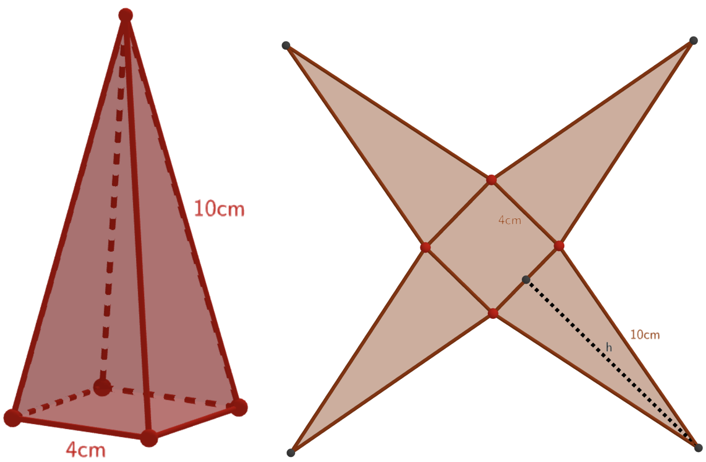
■

2.3.2 Área y volumen de una pirámide

Área

♡ El área de una pirámide se deduce de su desarrollo plano. Ya sabemos que el desarrollo plano de una pirámide está formado por una base, que es un polígono regular, y tanto triángulos iguales como aristas tenga la base.

■ **Ejemplo.** Calcula el área de la siguiente pirámide:

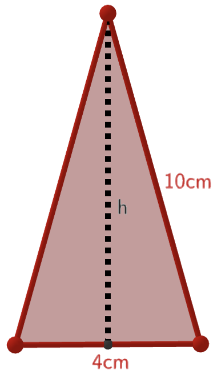


(a) Pirámide cuadrangular (b) Desarrollo plano

♡ La base de la pirámide es un cuadrado de 4 cm de lado, por lo que el área de la base es:

$$A_B = l^2 \Rightarrow A_B = 4^2 = 16\text{cm}^2$$

♡ Cada una de las caras de la pirámide es un triángulo isósceles de base 4 cm y cuyo otro lado mide 10 cm. Para calcular al área dicho triángulo necesitamos conocer la altura, que la averiguaremos usando el teorema de Pitágoras.



Mirando el dibujo del margen observamos que, dividiendo el triángulo inicial, podemos formar dos triángulos rectángulos con base 2 cm e hipotenusa 10 cm. Aplicando el teorema de Pitágoras hallaremos la medida del cateto que falta, que es la altura del triangulo inicial:

$$10^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow 100 - 4 = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{96} = 9'8 \text{ cm}$$

Conocida la altura, podemos calcular el área de cada triángulo:

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_T = \frac{4 \cdot 9'8}{2} = 2 \cdot 9'8 \Rightarrow A_T = 19'6 \text{ cm}^2$$

Por tanto, como la pirámide dada tiene 4 caras, su área será:

$$A = A_B + 4 \cdot A_T \Rightarrow A = 16 + 4 \cdot 19'6 = 94'4 \text{ cm}^2$$

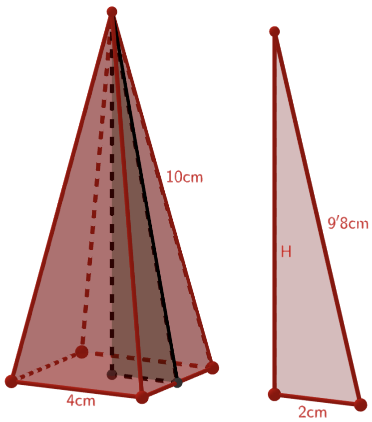
■

Volumen

♡ El volumen de una pirámide es igual a un tercio del área de la base por la altura de la pirámide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

■ **Ejemplo.** Calcula el volumen de la pirámide del ejemplo anterior.



♡ El área del cuadrado de la base es 16cm^2.

♡ Calculemos H, que es la altura de la pirámide. El dibujo del margen seguro que nos ayuda. Basta aplicar el teorema de Pitágoras al triangulo interior que se forma en la pirámide para calcular su altura, sabiendo que la hipotenusa de dicho triángulo mide $9'8$ cm por lo calculado en el ejemplo anterior.

$$9'8^2 = H^2 + 2^2 \Rightarrow 96 = H^2 + 4 \Rightarrow H = \sqrt{92} = 9'6 \text{ cm}^2$$

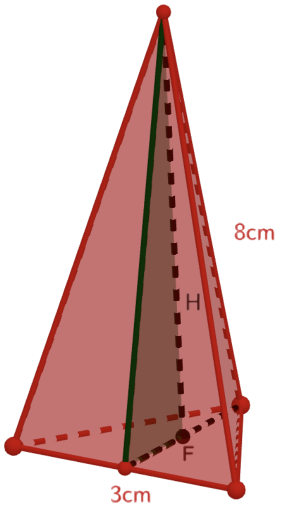
Por tanto, el volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 9'6 = 51'16 \text{ cm}^3$$

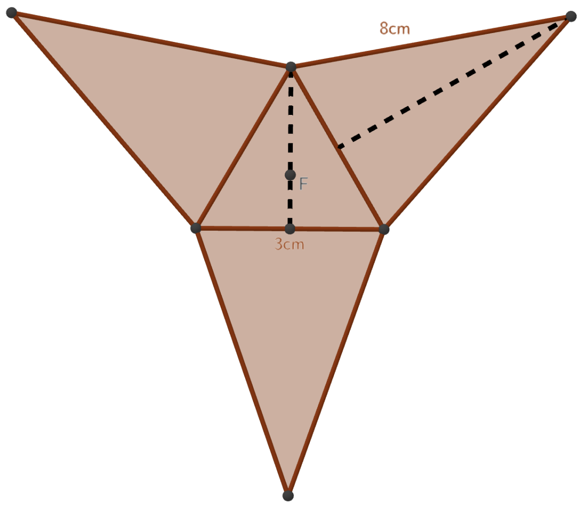
■

Ejercicios para practicar

1. Calcula el área y el volumen volumen de la siguiente pirámide triangular regular.
Pista: el punto F está colocado a $\frac{1}{3}$ de la altura del triángulo que forma la base de la pirámide.

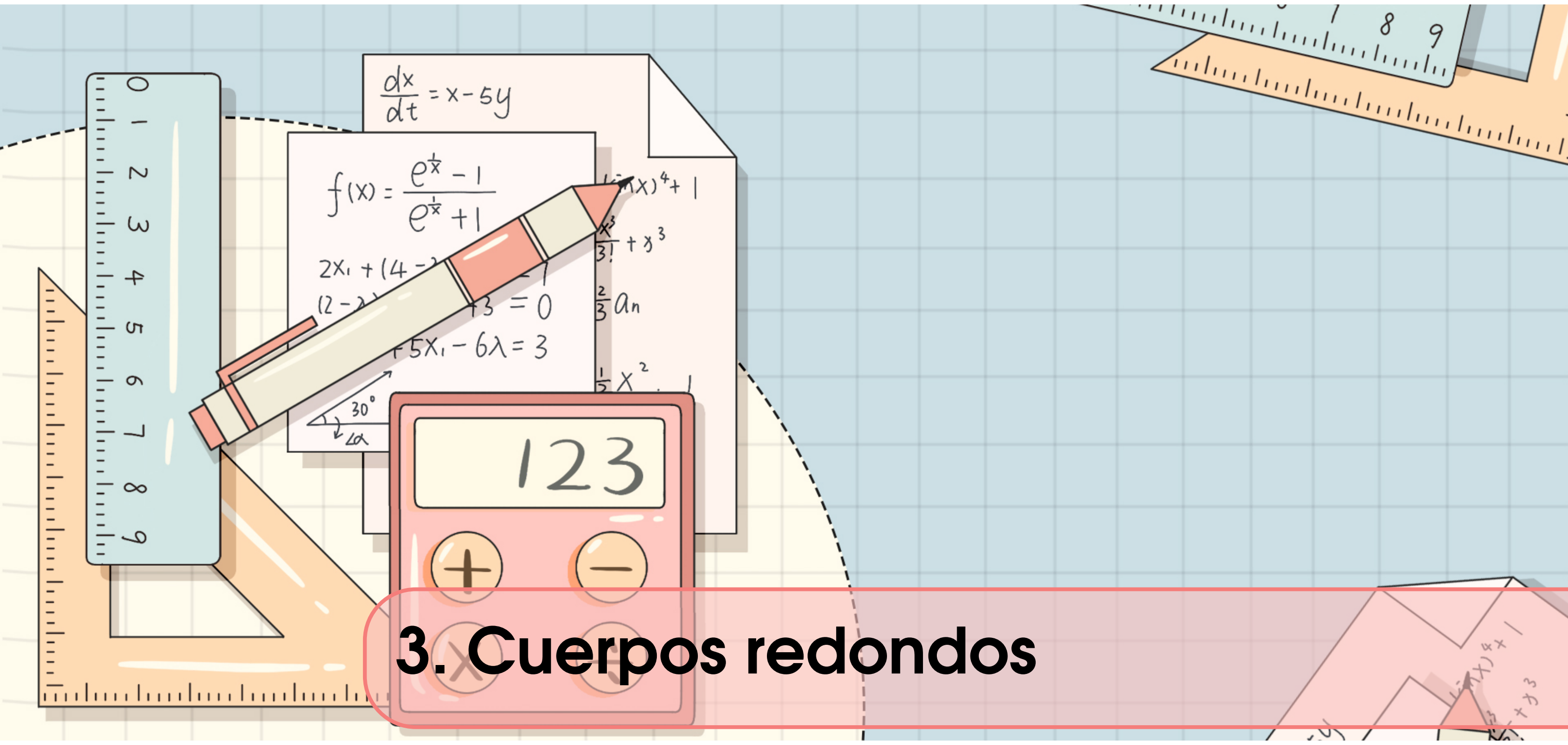


(a) Pirámide triangular



(b) Desarrollo plano

2. Supongamos que tenemos una pirámide cuadrangular regular cuyo volumen es de 40 cm^3 y cuya altura mide 5 cm. ¿Cuánto mide el lado del polígono que forma la base?



3. Cuerpos redondos

Definición. Un cuerpo redondo es un cuerpo geométrico que tiene alguna de sus caras curvas.

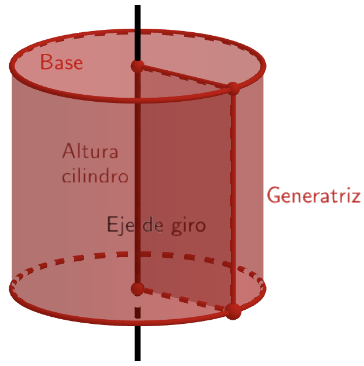
Los principales cuerpos redondos son: el cilindro, el cono y la esfera.

3.1 Cilindros

Definición. Un cilindro recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

Los elementos de un cilindro son los siguientes:

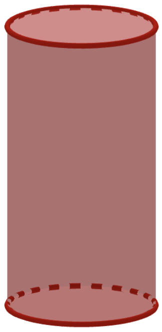
- ♡ La altura del cilindro es el lado del rectángulo que se hace girar para construir el cilindro.
- ♡ Las bases del cilindro son los dos círculos que se forman durante el giro.
- ♡ La generatriz del cilindro es el lado del rectángulo opuesto al que gira.



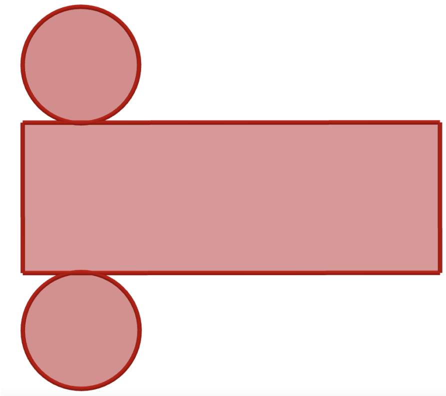
3.1.1 Desarrollo plano de un cilindro

Definición. El desarrollo plano de un cilindro está formado por dos círculos, que forman las bases, y un rectángulo que forma la superficie lateral del cilindro.

■ **Ejemplo.** Desarrollo plano de un cilindro recto: ■



(a) Cilindro



(b) Desarrollo plano

3.1.2 Área y volumen de un cilindro

Área

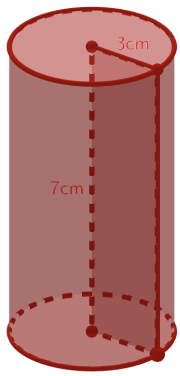
♡ El área de un cilindro se deduce de su desarrollo plano. Ya sabemos que el desarrollo plano de un cilindro está formado por dos bases, que son dos círculos, y una cara lateral que es un rectángulo.

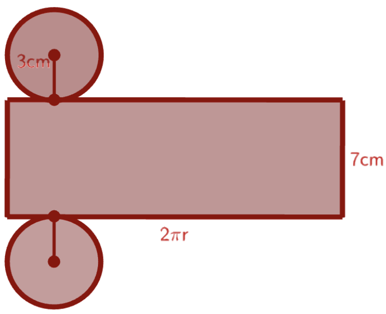
■ **Ejemplo.** Calcula el área del cilindro que se forma al hacer girar un rectángulo de base 3 cm y de altura 7 cm.

♡ Cada una de las bases del cilindro son círculos de 3cm de radio, por lo que el área de cada base es:

$$A_B = \pi r^2 \Rightarrow A_B = \pi 3^3 = 9\pi \text{ cm}^2$$

♡ Calculemos el área lateral. Para ello, recordemos que la base del rectángulo que forma la cara lateral es igual al perímetro del círculo que forma la base.





Por tanto, el área lateral del cilindro es:

$$A_L = h \cdot 2\pi r \Rightarrow A_L = 7 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 = 21\pi \text{ cm}^2$$

En total, el área del cilindro es:

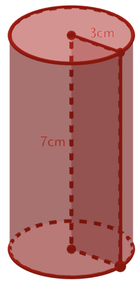
$$A_T = 2 \cdot A_B + A_L \Rightarrow A_T = 2 \cdot 9\pi + 21\pi = 30\pi \text{ cm}^2$$

■

Volumen

♡ El volumen de un cilindro se calcula multiplicando el área de su base, que es un círculo, por la altura del cilindro.

■ **Ejemplo.** Calcula el volumen del cilindro que resulta en el ejemplo anterior.



♡ El área de la base es:

$$A_B = \pi r^2 \Rightarrow A_B = \pi 3^3 = 9\pi \text{ cm}^2$$

♡ La altura del cilindro es de 7 cm.

Por tanto, el volumen del cilindro es:

$$V = A_B \cdot h \Rightarrow V = 9\pi \cdot 7 = 63\pi \text{ cm}^3$$

■

Ejercicios para practicar

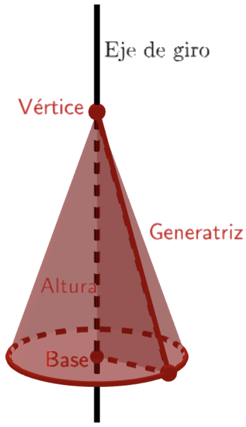
1. Dibuja el desarrollo plano de un cilindro.
2. Calcula el área y el volumen de un cilindro tal que el radio del círculo de la base mide 4 cm y la altura es de 10 cm.
3. Si sabemos que el área de un cilindro es de 40π cm^2 y que su altura mide 7 cm, ¿cuánto mide el radio de la base?
4. El volumen de un cilindro es de 10 cm^3 y el radio de la base mide 2 cm, ¿cuánto mide la altura de dicho cilindro?

3.2 Conos

Definición. Un cono recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus lados.

Los elementos de un cono son los siguientes:

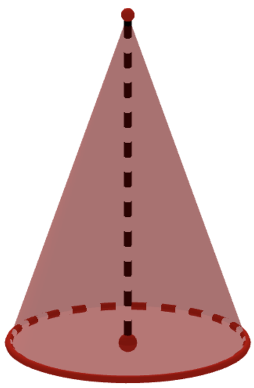
- ♡ La altura del cono es igual a la altura del triángulo rectángulo que se hace girar para construir dicho cono.
- ♡ Las base del cono es el círculo que se forma durante el giro.
- ♡ La generatriz del cono es la hipotenusa del triangulo que gira. Para calcular la generatriz de un cono usamos el teorema de Pitágoras:
$$G^2 = R^2 + h^2$$
- ♡ El vértice del cono coincide con el vértice del triángulo que gira.



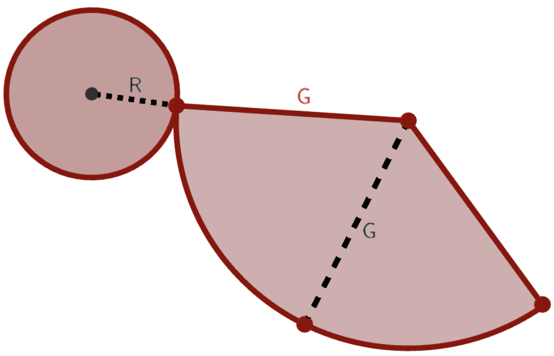
3.2.1 Desarrollo plano de un cono

Definición. El desarrollo plano de un cono está formado por un círculo, que forma la base, y un sector circular que forma la superficie lateral.

■ **Ejemplo.** Desarrollo plano de un cono recto: ■



(a) Cono



(b) Desarrollo plano

3.2.2 Área y volumen de un cono

Área

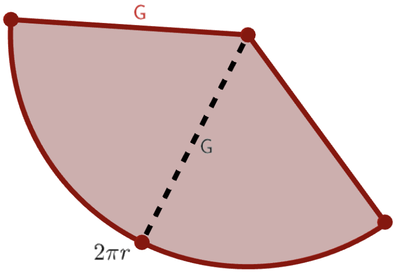
- ♡ El área de un cono también la podemos deducir de su desarrollo plano, aunque esta es un poco más difícil. Ya sabemos que en el desarrollo plano de un cono tenemos un círculo, que forma la base, y un sector circular que forma la cara lateral. Por tanto:

$$A_{\text{Cono}} = A_B + A_L$$

- Todos sabemos calcular el área de la base, pues es el área de un círculo:

$$A_B = \pi r^2$$

- Lo difícil es calcular el área lateral. Para ello, vamos a considerar el sector circular como un 'triángulo curvilíneo', tal que su altura es la generatriz del cono y su base es el perímetro del círculo que forma la base del cono. Por tanto:

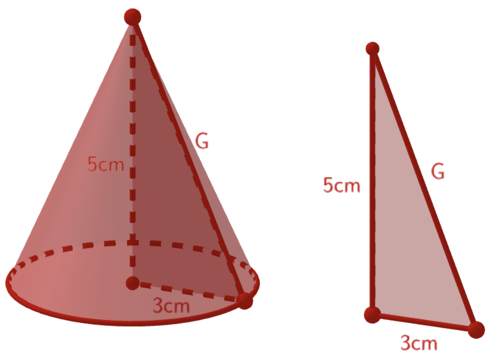


$$A_L = \frac{2\pi r \cdot G}{2} = \pi r \cdot G$$

Luego, en total, el área del cono se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$A_{\text{Cono}} = \pi r^2 + \pi r \cdot G = \pi r(r+G)$$

■ **Ejemplo.** Calcula el área del cono que se forma al hacer gira un triángulo rectangulo de base 3 cm y de cateto 5 cm.



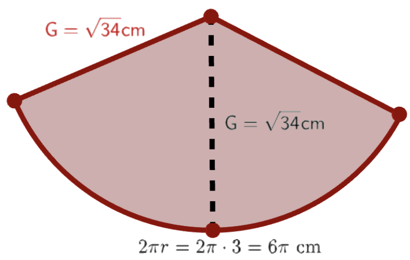
Antes de nada, calculemos la generatriz del cono, es decir, la hipotenusa del triángulo de la imagen anterior. Para ello, solo tenemos que aplicar el teorema de Pitágoras:

$$G^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow G = \sqrt{34} \text{ cm}$$

♡ El área de la base es el área de un círculo de radio 3cm:

$$A_B = \pi r^2 \Rightarrow A_B = 9\pi \text{ cm}^2$$

♡ Ya solo nos queda calcular el área del sector circular del margen. Recordemos que vamos trabajar con los sectores circulares como si fueran triángulos curvilíneos, por lo que para calcular dicho área basta aplicar la fórmula del área de un triángulo, pues conocemos todos los datos.



$$A_L = \frac{1}{2} \cdot 6\pi \cdot \sqrt{34} = 3\pi \cdot \sqrt{34} \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área total del cono es:

$$A_{\text{Cono}} = A_B + A_L \Rightarrow A_{\text{Cono}} = 9\pi + 3\pi \cdot \sqrt{34} = 3\pi(3+\sqrt{34}) \text{ cm}^2$$

■

Volumen

♡ El volumen de un cono es igual a $\frac{1}{3}$ del área de la base, que es un círculo, por la altura del cono:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

■ **Ejemplo.** Calcula el volumen del cono que resulta del ejemplo anterior.

♡ El cono del ejemplo anterior tiene como base un círculo de radio 3 cm, por tanto:

$$A_B = 9\pi \text{ cm}^2$$

♡ La altura de un cono coincide con la altura del triángulo rectángulo que se hace girar para obtener el cono, por tanto, en este caso $h = 5$ cm.

Luego, el volumen del cono es:

$$V = A_B \cdot h \Rightarrow V = 9\pi \cdot 5 = 45\pi \text{ cm}^3$$

■

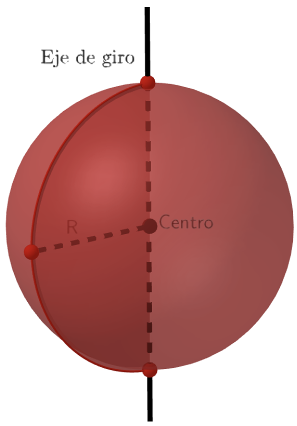
Ejercicios para practicar

1. Dibuja el desarrollo plano de un cono.
2. Calcula el área y el volumen de un cono tal que el radio del círculo de la base mide 3 cm y la altura es de 7 cm.
3. Si sabemos que el área de un cono es de 100π cm^2 y que su generatriz mide 20 cm, ¿cuánto mide el radio de la base?
4. El volumen de un cono es de 15 cm^3 y el radio de la base mide 3 cm, ¿cuánto mide la altura de dicho cono?

3.3 Esferas

Definición. Una esfera es un cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar un semicírculo alrededor de su diámetro.

En una esfera podemos distinguir el centro, el radio y el diámetro.



3.3.1 Área y volumen de una esfera

Área

La esfera es un cuerpo geométrico particular, pues no tiene desarrollo plano. Por tanto, para calcular su área, y posteriormente su volumen, tendremos que emplear una fórmula que hemos de memorizar.

El área de una esfera de radio r viene dada por la siguiente expresión:

$$A_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2$$

Volumen

Al igual que pasaba con el área, calcular el volumen de una esfera es mucho más difícil que calcular el volumen de cualquier otro cuerpo geométrico, por tanto en el caso del volumen de la esfera también tendremos que estudiarnos la fórmula.

El volumen de una esfera de radio r viene dado por la siguiente expresión:

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

■ **Ejemplo.** Calcula el área y el volumen de una esfera de 5 cm de diámetro.

♡ Lo primero con lo que tenemos que tener cuidado es con el hecho de que nos están dando el diámetro y no el radio. Como el diámetro nos dicen que mide 5 cm, el radio medirá $2'5$ cm.

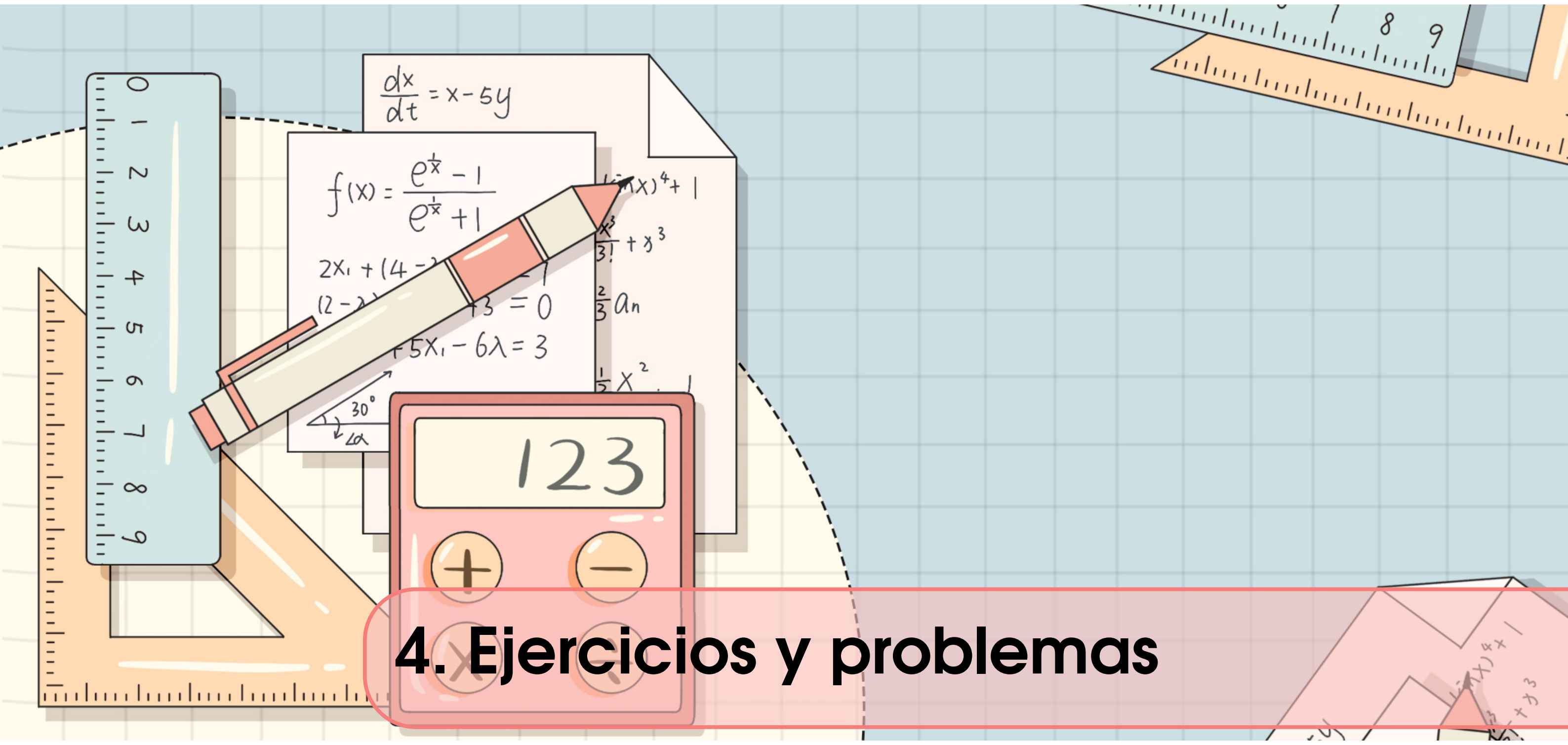
♡ El área de la esfera es:

$$A = 4\pi \cdot (2'5)^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

♡ El volumen de la esfera es:

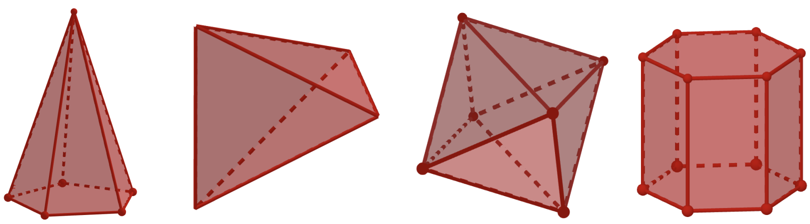
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (2'5)^3 = \frac{125}{6}\pi \text{ cm}^3$$

■



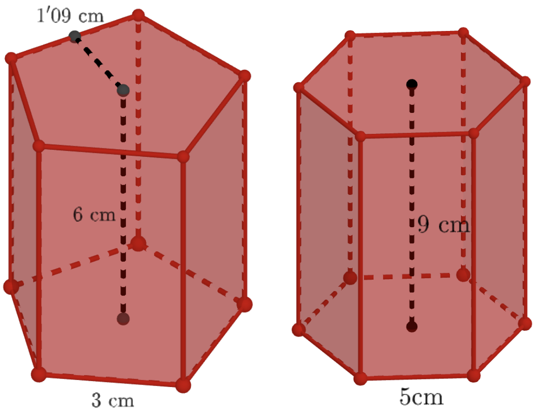
4. Ejercicios y problemas

1. Clasifica los siguientes poliedros:



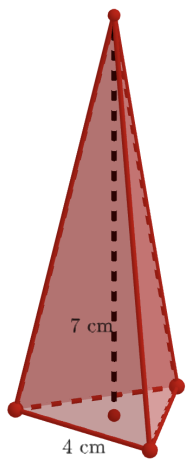
(a) (b) (c) (d)

2. Comprueba que se verifica el teorema de Euler para los poliedros del ejercicio anterior.
3. Haz el desarrollo plano de los siguientes prismas y calcula el área y el volumen:

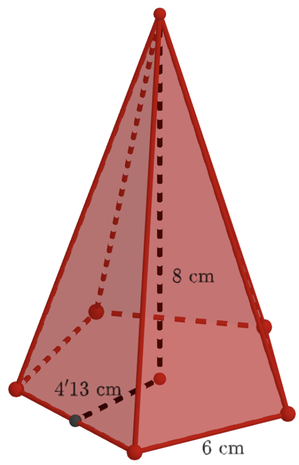


(a) Pentagonal regular (b) Hexagonal regular

4. Sabemos que un poliedro tiene 20 caras y 45 vértices, ¿cuántas aristas debe tener?
5. Dibuja un prisma pentagonal irregular y haz su el desarrollo plano.
6. Tenemos un prisma triangular regular cuyo volumen es de 30 cm^3. Si sabemos que el lado del triángulo que forma la base mide 3cm, ¿cuánto mide la altura del prisma?
7. Dibuja un pirámide cuadrangular irregular y haz su desarrollo plano.
8. Calcula el área y el volumen de las siguientes pirámides:

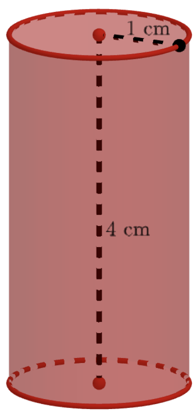


(a) Triangular regular

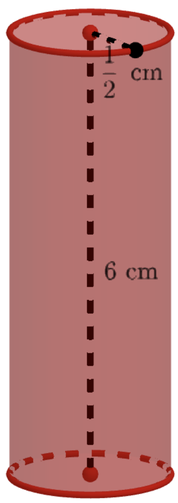


(b) Pentagonal regular

9. El área total de una pirámide cuadrangular regular es 50 cm^2. Si la altura del triángulo de la cara lateral mide 5 cm, ¿cuánto mide el lado del polígono de la base?
10. Calcula el área y el volumen de los siguientes cilindros:

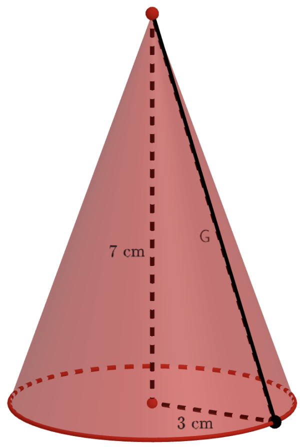


(a)

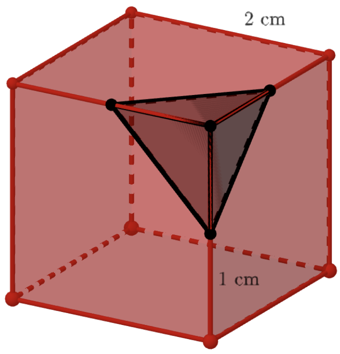


(b)

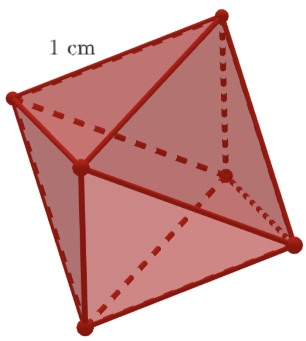
11. Dibuja el desarrollo plano del siguiente cono. Después, calcula su área y su volumen.



12. Calcula el volumen que queda si a un cubo de arista 2 cm le quitamos el tetraedro de arista 1 cm dibujado en negro.



13. Calcula el área y el volumen del siguiente octaedro:



14. Para entrar en el museo de Louvre tenemos que pasar a través de una pirámide de cristal de base cuadrada de 20 m de altura y cuyo volumen es $8207'5$ metros cúbicos.
    a) Calcula el lado de su base.
    b) Calcula la cantidad de cristal (en metros cuadrados) necesarios para su construcción.
15. Si una sandía tiene un volumen de 400 cm^3, ¿cuál es su área?
16. Calcula el radio de la Tierra sabiendo que su superficie es de $510'1$ millones de km^2. ¿Cuál es su volumen?

EXAMEN de ÁREAS y VOLÚMENES
2 ESO
I.E.S. Zurbarán (Badajoz)

Nombre y apellidos: ______________________________

Todas las respuestas tienen que estar debidamente razonadas. La limpieza y el orden se valoran positivamente. Responde a cada pregunta en el hueco que hay debajo.
MUCHA SUERTE :)

1. ($1'5$ puntos) Teoría:

   a) ¿Qué dice el teorema de Euler?

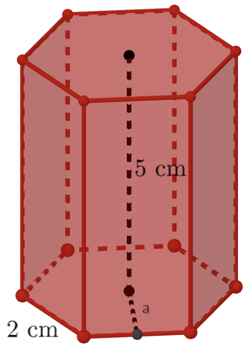
   b) ¿Qué es un prisma regular?

   c) ¿Cómo se llaman los cuerpos redondos que se generan haciendo girar una figura plana alrededor de un eje? Escribe los ejemplos que hemos visto en clase e indica con qué figura plana se genera cada uno.

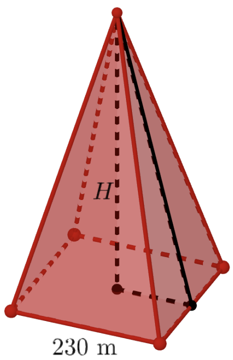
2. ($1'5$ puntos) Completar la siguiente tabla ayudándote del teorema de Euler:

	Número de caras	Número de aristas	Número de vértices
Octaedro		12	
Dodecaedro			12
	20	30	
Pirámide hexagonal regular		12	
Prisma heptagonal regular			14

3. ($1'5$ puntos) Dibuja el desarrollo plano del siguiente prisma y calcula su área y su volumen.

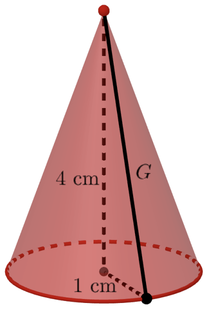


4. ($1'5$ puntos) La pirámide de Keops es la más grande de todas las pirámide de Egipto. Es una pirámide de base cuadrada cuya altura es $H = 138$ metros. Sabiendo que el lado de la base mide 230 metros, calcula su área y su volumen. Ayúdate de su desarrollo plano.



5. ($1'5$ puntos) Sabemos que un rascacielos de forma cilíndrica tiene un área de 1000π m^2. Si el rascacielos tiene una altura de 100 metros, ¿cuánto mide el radio de su base?

6. ($1'5$ puntos) Dibuja el desarrollo plano del siguiente cono y después calcula su área y su volumen.



7. (1 punto) Calcula el radio del planeta Marte sabiendo que su superficie es de $144'8$ millones de km^2. ¿Cuál es su volumen?

Anexos C

Material de Repaso: Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2^{o} ESO

I.E.S Zurbarán (Badajoz) – 2º ESO C

Métodos de resolución de sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

Nazaret Trejo Arroyo

1. Introducción

Definición 1.1. Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una expresión de la forma

$$ax + by = c$$

donde x e y son las **incógnitas**, a, b son los **coeficientes** que acompañan a las incógnitas y c es el **término independiente**.

Una **solución** de una ecuación lineal con dos incógnitas es un par de valores (x, y) que verifiquen la ecuación.

Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene siempre infinitas soluciones.

1.1. Interpretación gráfica de las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas.

Una ecuación lineal con dos incógnitas siempre representa una **recta** del plano. Para representar dicha recta se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se despeja la incógnita que resulte más fácil de despejar.
2. Se hace una tabla dando valores a la x y a la y.
3. Se representan los puntos obtenidos en el plano coordenado.
4. Se unen los puntos mediante una recta.

Ejemplo 1.2. *Representa gráficamente las soluciones de la ecuación* $3x+5y = 7$.

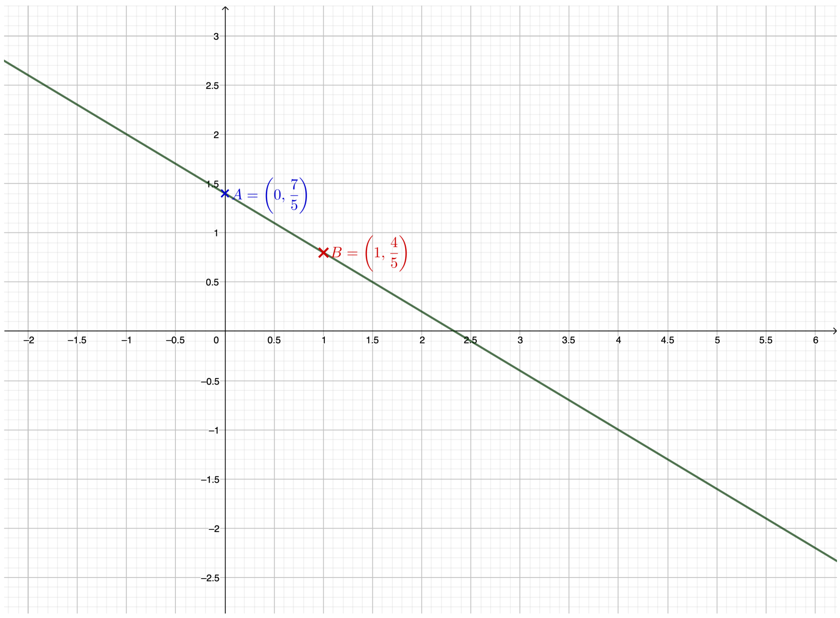
Empezamos despejando una de las incógnitas de la ecuación, por ejemplo, la y:

$$y = \frac{7 - 3x}{5}$$

A continuación, construimos la tabla de valores:

x	y
0	$\frac{7}{5}$
1	$\frac{4}{5}$

Hemos obtenido los puntos $A = (0, \frac{7}{5})$ y $B = (1, \frac{4}{5})$, de forma que al representarlos y unirlos conseguimos la **recta solución** de la ecuación lineal con dos incógnitas. En otras palabras, todos los puntos de la recta representada son solución de la ecuación $3x + 5y = 7$.



2. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

es un conjunto de dos ecuaciones lineales, cada una con dos incógnitas, de forma que **las dos ecuaciones han de verificarse a la vez**. Se representa de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

Una **solución** de un sistema es un par de valores (x, y) que **verifica las dos ecuaciones del sistema a la vez**.

2.1. Resolución gráfica de un sistema lineal. Ya sabemos que cada una de las ecuaciones correspondientes a un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas representa una recta, por tanto, pata calcular gráficamente la solución de un sistema lo que tenemos que hacer es:

1. Representar la recta correspondiente a la primera ecuación.
2. Representar la recta correspondiente a la segunda ecuación.
3. La solución al sistema es el corte de ambas rectas.

Ejemplo 2.1. *Resuelve gráficamente el siguiente sistema lineal:*

$$\left.\begin{aligned} 5x + 4y &= 7 \\ 2x + y &= 10 \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Solución. Trabajaremos con cada ecuación del sistema de forma individual.

1. **Primera ecuación.** La primera ecuación del sistema es $5x + 4y = 7$. Despejamos, por ejemplo, la y de forma que nos queda:

   $$y = \frac{7 - 5x}{4}$$

   Procedemos ahora a realizar la tabla de valores:

x	y
0	$\frac{7}{4}$
1	$\frac{1}{2}$

   Representamos los puntos $A = (0, \frac{7}{4})$ y $B = (1, \frac{1}{2})$ en el plano coordenado y los unimos, de forma que la solución a la primera ecuación es la **recta verde** de la imagen 2.1.

2. **Segunda ecuación.** La segunda ecuación del sistema es $2x + y = 10$, de la cual lo más sencillo es despejar la y:

   $$y = 10 - 2x$$

   Realizando la tabla de valores se obtiene:

x	y
0	10
1	8

   Representamos los puntos $C = (0, 10)$ y $D = (1, 8)$ en el plano coordenado y los unimos, de modo que la solución a la segunda ecuación es la **recta naranja** de la imagen 2.1.

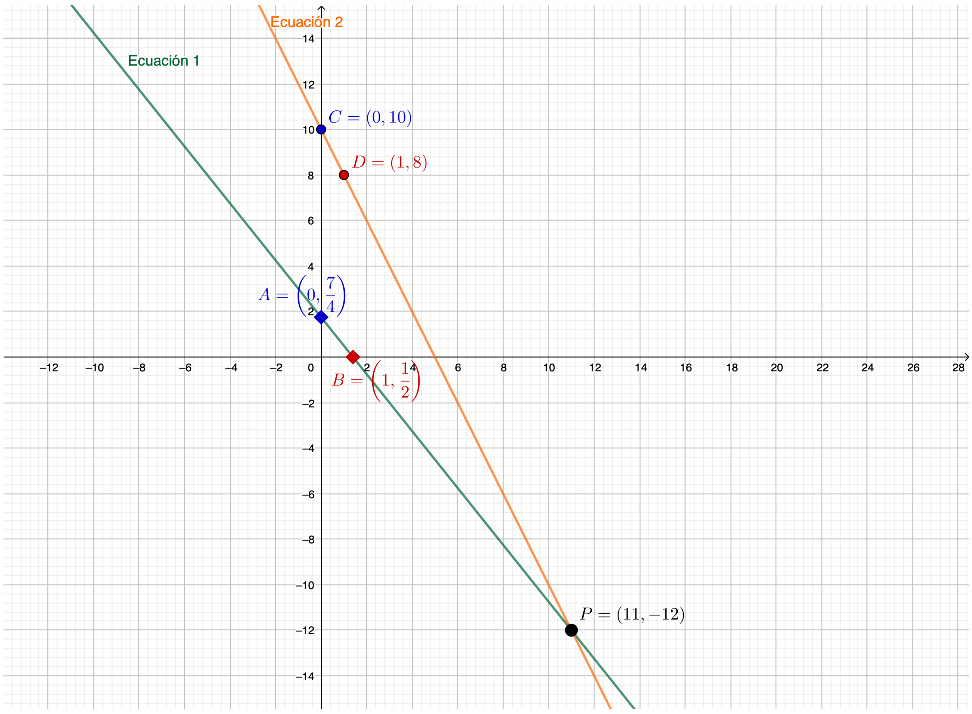


FIGURA 1. Resolución gráfica del sistema 2.1

El punto de corte de ambas recta es el punto $P = (11, -12)$, luego dicho punto es el **punto solución** del sistema que nos pedían resolver. Es decir, la solución del sistema es $\boxed{(x, y) = (11, -12).}$ ☺

El método gráfico de resolución de sistemas lineales **no siempre es cómodo** ya que, como pasa en el caso anterior, las rectas que forman el sistema pueden cortarse para valores muy grandes de la x o de la y, por lo que el dibujo puede que incluso se saliese de la página de nuestro cuaderno. Por tanto, existen otros métodos de resolución de sistemas lineales que generalmente suelen resultar más cómodos. Un poquito más adelante los conoceremos.

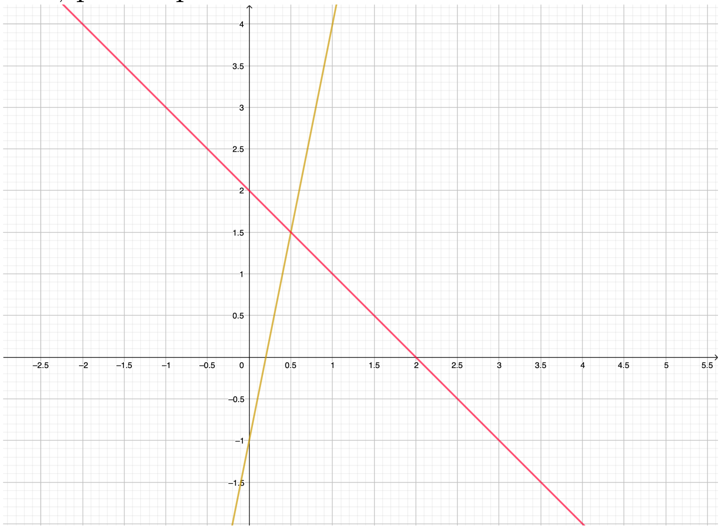
3. Número de soluciones de un sistema lineal

Ya sabemos que cuando tenemos un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas cada una de las ecuaciones representa una recta, y que la solución al sistema no es más que el corte de ambas rectas. Ahora bien, pensemos un momento... ¿dos rectas siempre se tienen que cortar? Y, en el caso que se corten, ¿únicamente se pueden cortar en un punto?

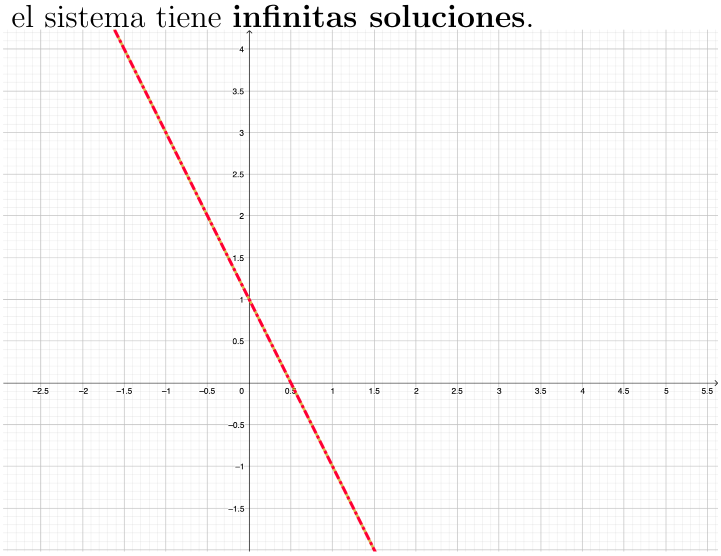
Pues con poco que pensemos nos damos cuenta de que la respuesta a ambas preguntas es **no**; las **rectas paralelas nunca se cortan** y las **rectas coincidentes**

se cortan en todos los puntos, pues dos rectas que son coincidentes en realidad son la misma recta. De esta forma, podemos hacer la siguiente clasificación de los sistemas lineales en función de su número de soluciones:

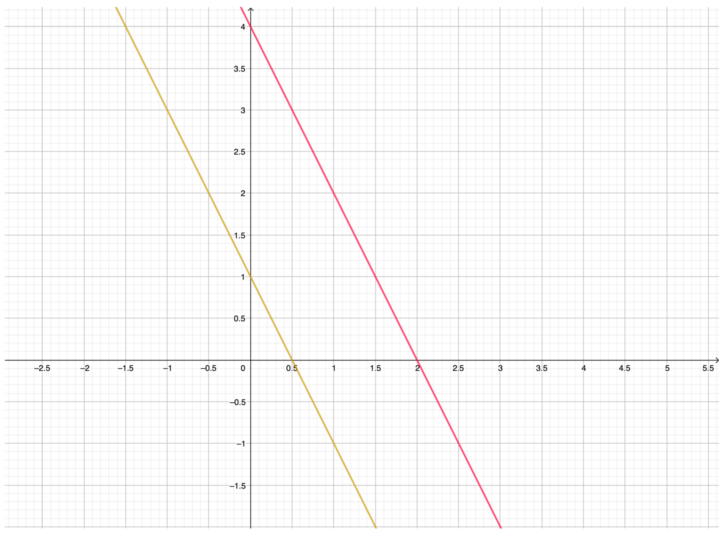
1. **Sistemas compatibles**. Las dos rectas que forman el sistema se cortan. Dentro de este caso podemos distinguir otros **dos casos**, dependiendo de **si las rectas se cortan en un único punto o en infinitos puntos**:
   - **Sistema compatible determinado.** Las dos rectas se cortan en **un único punto**, por lo que **el sistema tiene una única solución**.



   - **Sistema compatible indeterminado**. Las dos rectas del sistema se cortan en **infinitos puntos**, es decir, las dos **rectas** son **coincidentes**. Por tanto el sistema tiene **infinitas soluciones**.



2. **Sistemas incompatibles.** Las **dos rectas** que forman el sistema **no se cortan**, por lo que el **sistema no tiene solución**.



4. Otros métodos de resolución de sistemas lineales

Como ya adelantamos antes, el método gráfico de resolución de sistemas no siempre funciona adecuadamente, pues la rectas pueden cortarse en puntos muy grandes que ni siquiera seamos capaces de dibujar. Pero esto no significa que no podamos resolver el sistema, pues existen otros métodos de resolución que acuden en nuestra ayuda. ¡Vamos a conocerlos!

1.– Método de sustitución.

Como bien indica su nombre, el *método de sustitución* se basa en *sustituir* lo que vale una de las incógnitas, que hemos despejado previamente de una de las ecuaciones, en la otra ecuación. Veamos un ejemplo para aclarar las ideas:

Ejemplo 4.1. *Resolver mediante el método de sustitución el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 1 \\ x - y = 4 \end{array}\right\}$$

Solución. Si observamos las ecuaciones que forman parte del sistema nos damos cuenta de que lo más sencillo es despejar la x de la segunda ecuación, de forma que nos queda

$$x = 4 + y$$

Ahora que ya hemos despejado x de la primera ecuación la podemos sustituir en la segunda ecuación, que es la ecuación que aún no hemos usado, de modo que obtenemos:

$$2x + y = 1 \overset{x=4+y}{\Longrightarrow} 2(4 + y) + y = 1$$

Miremos bien lo que hemos obtenido: tenemos una ecuación de primer grado con una única incógnita, que ya sabemos resolver:

$$2(4+y)+y=1 \Longrightarrow 8+2y+y=1 \Longrightarrow 8+3y=1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 3y=1-8 \Longrightarrow 3y=-7 \Longrightarrow \boxed{y=\frac{-7}{3}}$$

Una vez que ya sabemos lo que vale la y, podemos sustituir su valor en la expresión $x=4+y$ para conocer lo que vale la x:

$$x=4+y \overset{y=\frac{-7}{3}}{\Longrightarrow} x=4-\frac{7}{3} \Longrightarrow x=\frac{12-7}{3} \Longrightarrow \boxed{x=\frac{5}{3}}$$

Por tanto, la solución al sistema es

$$(x,y)=\left(\frac{5}{3},\frac{-7}{3}\right)$$

Como tenemos una única solución el sistema es **compatible determinado**. ☺

Antes de seguir con el siguiente método vamos a enumerar una serie de pasos que podemos seguir siempre que queremos resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de sustitución.

PASOS A SEGUIR

1. Elegimos la incógnita que queremos despejar.
2. Elegimos la ecuación de la que vamos a despejar la incógnita que hemos seleccionado en el paso anterior.
3. Despejamos la incógnita.
4. Sustituimos la expresión obtenida en la ecuación que aún no hemos usado.
5. Resolvemos la ecuación con una incógnita que hemos obtenido, obteniendo ya un valor numérico para una de las incógnitas.
6. Sustituimos el valor numérico obtenido antes en cualquiera de las ecuaciones iniciales para obtener el valor numérico de la otra incógnita.

2.– Método de igualación.

El *método de igualación* se basa en *igualar* las expresiones que hemos obtenido al despejar la **misma** incógnita de las dos ecuaciones el sistema.

EJEMPLO 4.2. *Resolver mediante el método de igualación el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ x-y=4 \end{array}\right\}$$

Solución. Vamos a despejar, por ejemplo, la x de ambas ecuaciones, de forma que obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ x-y=4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} x=\frac{1-y}{2} \\ x=4+y \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

Como en un sistema de ecuaciones se tienen que verificar las dos ecuaciones a la vez, el valor que toma la x en la primera ecuación ha de ser **igual** al valor que toma la x en la segunda ecuación. Por este motivo, podemos igualar las dos expresiones de la x obtenidas en 4.1:

$$\frac{1-y}{2}=4+y$$

Así, hemos obtenido una ecuación de primer grado con una única incógnita, la y, que ya sabemos resolver:

$$\frac{1-y}{2}=4+y \Longrightarrow 1-y=2(4+y) \Longrightarrow 1-y=8+2y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -3y=7 \Longrightarrow \boxed{y=\frac{-7}{3}}$$

Ya que conocemos el valor numérico de la y, podemos sustituir dicho valor en alguna de las ecuaciones iniciales del sistema para calcular lo que vale la x. Tomamos, por ejemplo, la segunda ecuación:

$$x-y=4 \Longrightarrow x-\left(\frac{-7}{3}\right)=4 \Longrightarrow \boxed{x=\frac{5}{3}}$$

☺

Veamos los pasos generales a seguir para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación.

PASOS A SEGUIR

1. Elegimos la incógnita que queremos despejar.
2. Despejamos la incógnita elegida de las dos incógnitas del sistema.
3. Igualamos las expresiones obtenidas, de forma que obtenemos una ecuación de primer grado con una única incógnita.
4. Resolvemos la ecuación obtenida en el paso anterior y obtenemos el valor numérico correspondiente a una de las incógnitas.
5. Sustituimos el valor numérico que hemos obtenido en el paso anterior en cualquiera de las ecuaciones iniciales para obtener el valor numérico de la otra incógnita.

3.– Método de reducción.

Al *método de reducción* también se le conoce como **método de eliminación**, pues lo que buscamos es 'eliminar' una de las incógnitas.

El objetivo de este método es obtener un sistema lineal **equivalente** al dado, pero de forma que los coeficientes correspondientes a una misma incógnita sean **opuestos**.

Generalmente, para aplicar este método lo que hacemos es **operar con las dos ecuaciones del sistema a la vez**, ya sea sumándolas (o restándolas), multiplicando una de ellas por un número y después sumando (o restando), o incluso multiplicando las dos ecuaciones por ciertos números y después sumando (o restando). Para saber qué tenemos que hacer en cada caso tenemos que mirar bien el sistema que tenemos que resolver. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.3. *Resolver mediante el método de reducción el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ x-y=4 \end{array}\right\}$$

Solución. En este sistema que nos dan es bastante sencillo aplicar el método de reducción pues, si nos fijamos bien, la y tiene signos opuestos en ambas ecuaciones, por lo que si sumamos ambas ecuaciones conseguiremos eliminar dicha incógnita:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ x-y=4 \end{array}\right\} \stackrel{E_1+E_2}{\Longrightarrow} 3x=5 \Longrightarrow \boxed{x=\frac{5}{3}}$$

Ya que conocemos lo que vale la x basta elegir cualquiera de las dos ecuaciones del sistema inicial y sustituir el valor $x=\frac{5}{3}$ para obtener lo que vale y. Tomamos, por ejemplo, la segunda ecuación y sustituimos:

$$x-y=4 \Longrightarrow \frac{5}{3}-y=4 \Longrightarrow y=\frac{5}{3}-4 \Longrightarrow \boxed{y=\frac{-7}{3}}$$

☺

Enunciemos los pasos generales que hemos de seguir para resolver un sistema de ecuaciones lineales aplicando el método de reducción.

$\boxed{\textit{PASOS A SEGUIR}}$

1. Observamos el sistema que tenemos que resolver y decidimos cuál de las incógnitas es más fácil de eliminar.
2. Una vez que sabemos la incógnita que vamos a eliminar, procedemos a operar con las ecuaciones.
   a) Si los coeficientes correspondientes a alguna de las incógnitas son opuestos (es decir, tienen distinto signo) en ambas ecuaciones pasamos al paso 3.

b) Si los coeficientes de las incógnitas de una de las ecuaciones no son opuestos con los coeficientes de las incógnitas de la otra ecuación, hay que multiplicar las ecuaciones por los números adecuados de forma que obtengamos coeficientes opuestos.

3. Sumamos ambas ecuaciones para eliminar una de las incógnitas.
4. En el paso anterior hemos obtenido una ecuación lineal con una única incógnita que ya sí sabemos resolver.
5. El valor numérico obtenido se sustituye en algunas de las ecuaciones iniciales del sistema para encontrar el valor numérico correspondiente a la otra incógnita.

¡CUIDADO! Cuando multiplicamos una ecuación por un número tenemos que multiplicar la ecuación entera, sin olvidarnos del término independiente.

Hagamos otro ejemplo que nos ayude a entender mejor el método de reducción.

Ejemplo 4.4. *Resuelve aplicando los pasos del método de reducción el siguiente sistema lineal:*

$$\left.\begin{aligned} 3x+5y&=-12\\ 4x-7y&=25 \end{aligned}\right\}$$

Solución.

- El primer paso es **elegir la incógnita que queremos eliminar**; en este caso elegimos la x.
- Seguimos con el paso 2. Como podemos observar los coeficientes de las incógnitas de la primera ecuación **no** son opuestos a los coeficientes de las incógnitas de las segunda ecuación, por lo que tendremos que multiplicar las ecuaciones por ciertos números.
  - Coeficiente de la x en la primera ecuación$= 3$
  - Coeficiente de la x en la segunda ecuación$= 4$

  Sabemos que el **mínimo común múltiplo** de 3 y de 4 es 12, y $12 = 3 \cdot 4$. Por tanto, basta multiplicar por -4 la primera ecuación y por 3 la segunda ecuación:

$$\left.\begin{aligned} 3x+5y&=-12\\ 4x-7y&=25 \end{aligned}\right\} \overset{(-4)\cdot E_1 \text{ y } 3\cdot E_2}{\Longrightarrow} \left.\begin{aligned} -12x-20y&=48\\ 12x-21y&=75 \end{aligned}\right\}$$

- Ahora basta con sumar las dos ecuaciones del último sistema para obtener una ecuación que solo depende de y, pues las x se eliminan:

$$-41y = 123 \Longrightarrow y = \frac{-123}{41} \Longrightarrow \boxed{y = -3}$$

- Para acabar, sustituimos lo que vale y en la primera ecuación del sistema y obtenemos lo que vale x:

$$3x + 5y = -12 \overset{y=-3}{\Longrightarrow} 3x + 5(-3) = -12 \Longrightarrow 3x = -12 + 15 \Longrightarrow \boxed{x = 1}$$

Por tanto, la solución del sistema es el punto $\boxed{(x, y) = (1, -3).}$ ☺

Anexos D

Exámenes resueltos de la UD de Álgebra

EXAMEN de ÁLGEBRA
1 ESO
I.E.S. Zurbarán (Badajoz)

9'4

Nombre y apellidos: [redacted]

TODAS LAS RESPUESTAS TIENEN QUE ESTAR DEBIDAMENTE RAZONADAS. LA LIMPIEZA Y EL ORDEN SE VALORAN POSITIVAMENTE. RESPONDE A CADA APARTADO EN EL HUECO QUE HAY DEBAJO.

MUCHA SUERTE :)

1

1. (1 punto) En cada expresión algebraica, indica las variables, los monomios, los elementos de cada monomio, y si tienen término independiente indica cuál es.

   a) $xyz + z - \underline{10}$ término independiente

   3 monomios
   - xyz: P.l = x, y, z; Coe = 1
   - z: P.l = z; Coe = 1
   - -10: P.l = no tiene; Coe = −10

   b) $-a^2b + b - 5a$

   3 monomios
   - $-a^2b$: P.l = a, b; Coe = −1
   - b: P.l = b; Coe = 1
   - $-5a$: P.l = a; Coe = −5

0'75

2. (1 punto) Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $2xy - x^2 + y - 7$ para $x = 2$ e $y = -4$

   $2 \cdot 2 \cdot (-4) - 2^2 - 4 - 7 =$

   $= 4 \cdot (-4) + 4 - 4 - 7 =$

   $-16 - 7 = -23$

   b) $8z^3 + z^2 - z$ para $z = \frac{1}{2}$

   $8\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$

   $8 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \cancel{\frac{64 \cdot 8 + 8 - 8}{8}} = \boxed{\frac{512}{8}}$ $\boxed{64}$

   $512 \mid 8$, 32, 0, 64

   $= \frac{8 + 2 - 4}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

1'8

3. (2 puntos) Realiza las siguientes operaciones con monomios:

   a) $xy - x^3 + 3xy + y - 2x^3 =$ $\boxed{4xy + 3x^3 + y}$

   b) $-(ab + a) - 2(ab + b - 4a) =$ $\boxed{-2a^2b^2 - 3a^2 + b}$

   c) $7 \cdot 2x =$ $\boxed{14x}$

   d) $(7a^3b^2) \cdot (5a^5b^7) =$ $\boxed{35a^{8}b^{9}}$

   e) $(4x^2y^7) : (2xy^5) =$ $\boxed{2xy^2}$

   f) $(12xyz^5) : (xyz) =$ $\boxed{12z^4}$

   g) $2nm + n - m =$ $\boxed{2nm + n - m}$

   h) $(10n^2m^7) \cdot (-4n^3m^8t) =$ $\boxed{-40n^5m^{15}t}$

   i) $(8ab^2) : (ab^2) =$ $\boxed{8}$

   j) $10x - 3x - 7x =$ $\boxed{0}$

4. (2 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones:

2

a) $2x - 7 = x + x + 7$

$2x - x - x = 7 + 7$

$0 = 14$ ✓

no tiene solución

b) $-2(3x+7) + 2x = -2x + 3(-x+2)$

$-6x - 14 + 2x = -2x - 3x + 6$

$-6x + 2x + 2x + 3x = 6 + 14$

✓ $\boxed{x = 20}$

m.c.m(2,3,6,4 = 12)

c) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x}{3} - 2 = \dfrac{2x-1}{6} - \dfrac{5x}{4} + 1$

$6(x+1) + 4x - 24 = 2(2x-1) - 3(5x) + 12$

$6x + 6 + 4x - 24 = 4x - 2 - 15x + 12$

$6x + 4x - 4x + 15x = -2 + 12 - 6 + 24$

$21x = 28$

$x = \boxed{\dfrac{28}{21}}$ ✓

d) $\dfrac{-x}{3} + \dfrac{x+10}{5} = x - 6$ → m.c.m (3,5 = 15)

$-5x + 3(x+10) = 15x - 90$

$-5x + 3x + 30 = 15x - 90$

$-5x + 3x - 15x = -90 - 30$

$-17x = -120$

✓ $x = \dfrac{-120}{-17} = \dfrac{120}{17}$

5. (1'5 puntos) Teoría:

1'5

✓ a) Indica en qué se diferencian una ecuación y una expresión algebraica.

Porque una ecuación es la igualdad de dos expresiones algebraicas. La expresión algebraica es la combinación de números y letras relacionados mediante operaciones.

✓ b) ¿Se pueden sumar todos los monomios? Indica cómo se llaman los monomios que se pueden sumar y lo que tienen que tener en común dichos monomios.

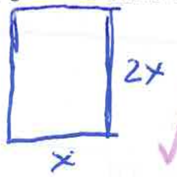
Solo se pueden sumar (o restar) monomios semejantes, es decir tienen en común su parte literal.

✓ c) ¿Qué es el grado de un monomio?

Es la suma de todos sus exponentes, que se encuentran en la parte literal.

6. (1 punto) El perímetro de un rectángulo mide 24 cm. Si sabemos que la altura mide el doble que la base, ¿cuánto mide cada lado?

1



✓

x = base

$2x$ = altura

✓ $x + 2x + x + 2x = 24$

$6x = 24$

✓ $x = \dfrac{24}{6} = \boxed{4}$ cm mide cada lado

7. (1'5 puntos) En una ferretería venden tres tipos de cajas de tornillos: la caja pequeña, la caja mediana y la caja grande. En la caja mediana hay del doble de tornillos que en la caja pequeña y en el caja grande hay el triple de tornillos que en la caja pequeña más cuatro. Compro una caja de cada tipo y en total tengo 400 tornillos. ¿Cuántos tornillos hay en cada caja?

1'5

caja pequeña — caja mediana — caja grande

$\boxed{x} \longrightarrow \boxed{2x} \longrightarrow \boxed{3x+4}$

$$x + 2x + 3x + 4 = 400$$

$$x + 2x + 3x = 400 - 4$$

$$6x = 396$$

$$x = \frac{396}{6} = \boxed{66}$$ tornillos en la caja pequeña

$$396 \,\underline{|\,6\,}$$
$$36 \quad 66 \text{ tornillos}$$
$$0$$

CAJA MEDIANA:

$66 \cdot 2 = \boxed{132}$ tornillos

CAJA GRANDE:

$66 \cdot 3 + 4 =$

$= 198 + 4 = \boxed{202}$ tornillos

Tornillos en cada caja:

CAJA PEQUEÑA → $\boxed{66}$

CAJA MEDIANA → $\boxed{132}$

CAJA GRANDE → $\boxed{202}$

EXAMEN de ÁLGEBRA
1 ESO
I.E.S. Zurbarán (Badajoz)

5'1

Nombre y apellidos: [redacted]

TODAS LAS RESPUESTAS TIENEN QUE ESTAR DEBIDAMENTE RAZONADAS. LA LIMPIEZA Y EL ORDEN SE VALORAN POSITIVAMENTE. RESPONDE A CADA APARTADO EN EL HUECO QUE HAY DEBAJO.
MUCHA SUERTE :)

0'25

1. (1 punto) En cada expresión algebraica, indica las variables, los monomios, los elementos de cada monomio, y si tienen término independiente indica cuál es.

   a) $xyz + z - 10$

   términos independiente

   variables

   b) $-a^2b + b - 5a$

   monomio

   términos independientes.

0'5

2. (1 punto) Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $2xy - x^2 + y - 7$ para $x = 2$ e $y = -4$

   $2 \cdot 2(-4) - 2^2 + (-4) - 7$

   $4 - 4 - 4 - \cancel{4} - 7 = -31$

   $\cancel{-23}$

   b) $8z^3 + z^2 - z$ para $z = \frac{1}{2}$

   $8\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)$

   $\cancel{\frac{48 + 64 - 16}{2} = \frac{86}{2}} = 43$

1

3. (2 puntos) Realiza las siguientes operaciones con monomios:

   a) $xy - x^3 + 3xy + y - 2x^3 =$ $2x^6y$

   b) $-(ab + a) - 2(ab + b - 4a) =$ $2ab$

   c) $7 \cdot 2x =$ $8x$ 14

   d) $(7a^3b^2) \cdot (5a^5b^7) =$ $35a^8b^9$

   e) $(4x^2y^7) : (2xy^5) =$ $2x^1y^{12}$

   f) $(12xyz^5) : (xyz) =$ $12xyz^5$

   g) $2nm + n - m =$ $2n^2$

   h) $(10n^2m^7) \cdot (-4n^3m^8t) =$ $40n^5m^{15}t$

   i) $(8ab^2) : (ab^2) =$ $8ab^4$

   j) $10x - 3x - 7x =$ $0x$

1

4. (2 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 7 = x + x + 7$

$2x - x - x = 7 + 7$

$0 = 0x = 14$

NO solución

b) $-2(3x+7) + 2x = -2x + 3(-x+2)$

$-6x - 14 + 2x = -2x + (-3x) + 6$

$-6x + 2x + 2x + 3x = 14 + 6$

$1x = 20$

c) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x}{3} - 2 = \dfrac{2x-1}{6} - \dfrac{5x}{4} + 1$

$\dfrac{6x}{12} + \dfrac{4x}{12} - 2 = \dfrac{2x-1}{12} - \dfrac{15x+1}{12}$

$\dfrac{6x}{12} + \dfrac{4x}{12} - \dfrac{2x-1}{12} + \dfrac{15x}{12} = 2 + 1$

En el folio $\dfrac{24x}{12} = 3$

d) $\dfrac{-x}{3} + \dfrac{x+10}{5} = x - 6$

$\dfrac{-5x}{15} + \dfrac{3x+10}{15} = x - 6$

$\dfrac{-5x}{15} + \dfrac{3x+10}{15} - x = -6$

$\dfrac{-18x}{15} = -6$

0'5

5. (1'5 puntos) Teoría:

a) Indica en qué se diferencian una ecuación y una expresión algebraica.

La expresión algebraica es cuando con los números se encuentran similitudes. En la ecuación se operan números con las mismas letras.

b) ¿Se pueden sumar todos los monomios? Indica cómo se llaman los monomios que se pueden sumar y lo que tienen que tener en común dichos monomios.

La misma parte literal

No, todos no tienen que tener ~~el término igual~~, se llaman ~~términos independientes o dependientes~~.

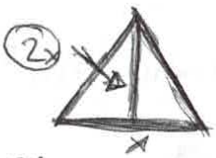
monomios semejantes

c) ¿Qué es el grado de un monomio?

Es el número que está elevado un monomio.

0

6. (1 punto) El perímetro de un rectángulo mide 24 cm. Si sabemos que la altura mide el doble que la base, ¿cuánto mide cada lado?



$= 24cm$

$x = 2x \cdot 3 = \boxed{6x}$

$P = 24cm$

Altura $= 2x$

x

CUENTAS

$$\begin{array}{r} 148 \\ +64 \\ \hline 112 \\ -16 \\ \hline 86 \end{array}$$

86 | 2
06 43
0

$xy - \boxed{x^3} + 3xy + y - \boxed{2x^3}$

$xy - \cancel{3}xy = \cancel{2}xy$

$\cancel{\xi}x^3 - 2x^3 = 1x3$

$1xy + 1x^3 + y$

$2xy \quad \cancel{x}^3 = 2x^3$

2 | 2
1 |

3 | 3
1 |

6 | 2
3 | 3
1 |

4 | 2
2 | 2
1 |

$2^2 \cdot 3 = 12$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 15 \\ \hline 25 \\ -1 \\ \hline 24 \end{array}$$

24 | 12
00 2

3 | 3
1 |

5 | 5
1 |

$5 \cdot 3 = 15$

$$\begin{array}{r} 400 \\ -14 \\ \hline 396 \end{array}$$

396 | 5
046 55'2
010
00

$\frac{112}{72}$

4. –

c) $\frac{\cancel{x}+1}{2} + \frac{x}{3} - 2 = \frac{2x-1}{6} - \frac{5x}{4} + 1$

$12\left(\frac{x+1}{2}\right) + 12\frac{(x)}{3} - 12 \cdot 2 = 12\frac{(2x-1)}{6} - 12\left(\frac{-5x}{4}\right) + 12 \cdot 1$

$: 2 \qquad : 3$

$6(x+1) + 4x \; 24 = 2(2x-1) - 3(-5x) + 12$

$\cancel{72(2x-1)\,8(2x-1)\,3(-4x)+12}$

$6x + 4x \cdot 2x - 1 - 4x = 24 + 72 - 48 + 12$

$10x = -87 - 48 + 12 =$

$\cancel{-87 - 50 = 127}$

1'5

7. (1′5 puntos) En una ferretería venden tres tipos de cajas de tornillos: la caja pequeña, la caja mediana y la caja grande. En la caja mediana hay del doble de tornillos que en la caja pequeña y en el caja grande hay el triple de tornillos que en la caja pequeña más cuatro. Compro una caja de cada tipo y en total tengo 400 tornillos. ¿Cuántos tornillos hay en cada caja?

caja pequeña	x
caja mediana	x 2
caja grande	x 3 +4

(+) → 400

$$\begin{cases} x + x\,2 + x\,3 + 4 = 400 \\ x + x\,2 + x\,3 = -4 + 400 \\ 6\cancel{x5} = 396 \\ x = \dfrac{396}{\cancel{5}\,6} = \boxed{\cancel{55'2}\ 66} \end{cases}$$

Anexos E

Exámenes resueltos de la UD de Geometría

EXAMEN de ÁREAS y VOLÚMENES
2 ESO
I.E.S. Zurbarán (Badajoz)

Nombre y apellidos: [redacted]

8'5

TODAS LAS RESPUESTAS TIENEN QUE ESTAR DEBIDAMENTE RAZONADAS. LA LIMPIEZA Y EL ORDEN SE VALORAN POSITIVAMENTE. RESPONDE A CADA PREGUNTA EN EL HUECO QUE HAY DEBAJO.

MUCHA SUERTE :)

1'5

1. (1'5 puntos) Teoría:

a) ¿Qué dice el teorema de Euler?

El teorema de Euler dice que si sumas las caras y los vértices y después le restas las aristas es igual a dos

$C+V-A=2$

b) ¿Qué es un prisma regular?

Un prisma regular es un poliedro en el que sus bases son polígonos regulares, paralelos e iguales y que las caras laterales están formadas por paralelogramos. La altura es la distancia de sus bases

c) ¿Cómo se llaman los cuerpos redondos que se generan haciendo girar una figura plana alrededor de un eje? Escribe los ejemplos que hemos visto en clase e indica con qué figura plana se genera cada uno.

Se llaman cuerpos de revolución. Ejemplos:

- Cilindro: Se genera haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados
- Cono: Se genera haciendo girar un triángulo alrededor de uno de sus lados
- Esfera: Se genera haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro.

1

2. (1'5 puntos) Completar la siguiente tabla ayudándote del teorema de Euler:

	Número de caras	Número de aristas	Número de vértices
Octaedro	8	12	6
Dodecaedro	12	22	12
Icosaedro	20	30	12
Pirámide hexagonal regular	7	12	7
Prisma heptagonal regular	9	21	14

3. (1'5 puntos) Dibuja el desarrollo plano del siguiente prisma y calcula su área y su volumen.

1'5

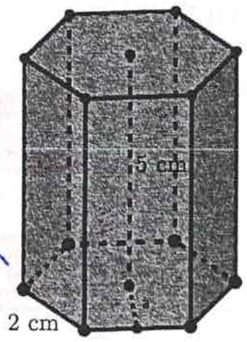
$a \to$ 2 △ 1, a

$2^2 = a^2 + 1^2$ ✓

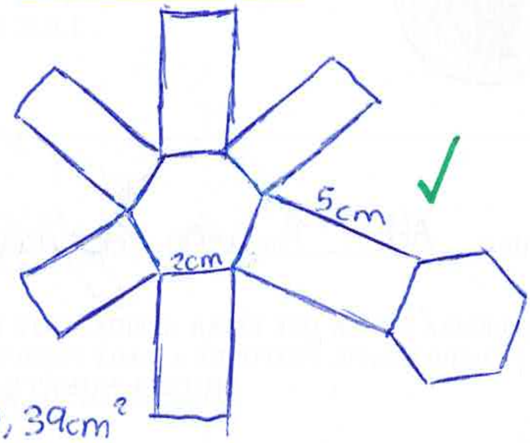
$4 = a^2 + 1$

$a^2 = 4 - 1 = 3$

$a = \sqrt{3}$



Desarrollo plano:



✓

Área

$A_B = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \simeq 10{,}39 cm^2$

$A_R = b \cdot a = 2 \cdot 5 = 10 cm^2$

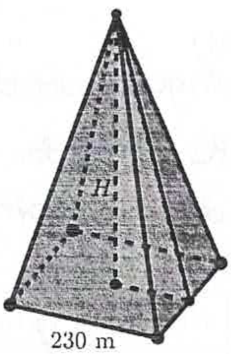
$A_T = 2A_B + 6A_R = 20{,}78 + 60 = \boxed{80{,}78 cm^2}$ ✓

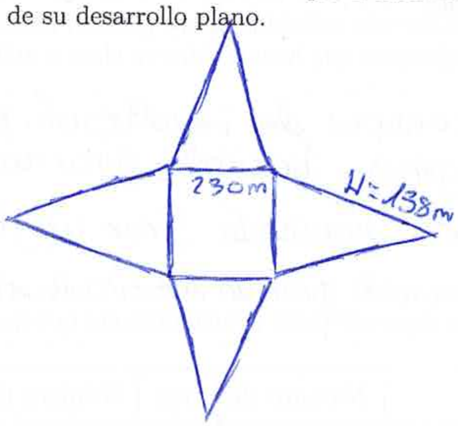
Volumen

$V = A_B \cdot h = 10{,}39 \cdot 5 = \boxed{51{,}95 cm^3}$ ✓

4. (1'5 puntos) La pirámide de Keops es la más grande de todas las pirámide de Egipto. Es una pirámide de base cuadrada cuya altura es $H = 138$ metros. Sabiendo que el lado de la base mide 230 metros, calcula su área y su volumen. Ayúdate de su desarrollo plano.

1





Área

$A_B = \ell^2 = 230^2 = 52900 m^2$

$A_{TR} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{230 \cdot 138}{2} = 15870 m^2$

H = 138 m es la altura de la pirámide, no la altura del triángulo que forma la cara lateral.

$A_T = A_B + 4A_{TR} = 52900 + 31740 = \boxed{84640 m^2}$

Volumen

$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 52900 \cdot 138 = \boxed{2433400 m^3}$ ✓

Alba Risueño Moriñigo

5. (1'5 puntos) Sabemos que un rascacielos de forma cilíndrica tiene un área de 1000π m^2. Si el rascacielos tiene una altura de 100 metros, ¿cuánto mide el radio de su base?

1

$A = 1000\pi \, m^2 \quad A = 2\pi r^2 + h \cdot 2\pi r \Rightarrow 1000\pi = 2\pi r^2 + 100 \cdot 2\pi r \Rightarrow$

$\Rightarrow 1000\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi} r^2 + 200\cancel{\pi} r \Rightarrow 1000 = 2r^2 + 200r$

esto no es b ← b = 200!

$\boxed{0 = 2r^2 + 200r - 1000}$ ✓

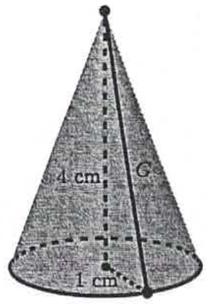
$r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-1000)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 8000}}{4} =$

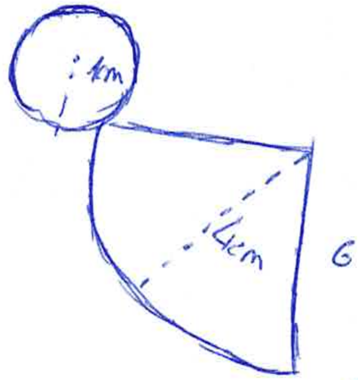
$= \dfrac{-2 \pm \sqrt{8004}}{4} = \dfrac{-2 \pm 89,47}{4} = \dfrac{87,47}{4} = \cancel{\boxed{21,87cm}}$

4'77

6. (1'5 puntos) Dibuja el desarrollo plano del siguiente cono y después calcula su área y su volumen.

1'5





G =

$G^2 = 4^2 + 1^2$

$G^2 = 16 + 1$

$G^2 = 17$

$G = \sqrt{17}$ ✓

Área

$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = 1\pi cm^2$

$A_L = \pi r G = \pi \cdot 1 \cdot \sqrt{17} = \pi\sqrt{17} = 12,95cm$

$A_T = A_B + A_L = \pi + 12,95$ ✓ $= \cancel{12,95\pi \simeq 40}$

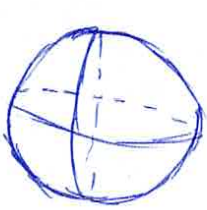
$\boxed{40,68cm}$

Volumen

$V = \dfrac{1}{3} A_B \cdot h = \dfrac{1}{3} \pi \cdot 4 \simeq 1,05 \cdot 4 \simeq \boxed{4,05 cm^3}$ ✓

7. (1 punto) Calcula el radio del planeta Marte sabiendo que su superficie es de 144'8 millones de km^2. ¿Cuál es su volumen?

1/1



Superficie = 144,8 mill de km^2
↓
144800000

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow 144.800.000 = 4\pi r^2$

$r^2 = \dfrac{144.800.000}{4\pi}$

$r^2 = \dfrac{144.800.000}{12,57}$

$r = \sqrt{11519490,85} = \boxed{3394,04km}$ ✓

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot (3394,04)^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3,909766931 \cdot 10^{10} =$

$= 4,19 \cdot 3,909766931 \cdot 10^{10} = \boxed{1,638192344 \cdot 10^{11} m^3}$ ✓

EXAMEN de ÁREAS y VOLÚMENES
2 ESO
I.E.S. Zurbarán (Badajoz)

10

Nombre y apellidos: [redacted] 2ºC

TODAS LAS RESPUESTAS TIENEN QUE ESTAR DEBIDAMENTE RAZONADAS. LA LIMPIEZA Y EL ORDEN SE VALORAN POSITIVAMENTE. RESPONDE A CADA PREGUNTA EN EL HUECO QUE HAY DEBAJO.

MUCHA SUERTE :)

1'5

1. (1'5 puntos) Teoría:

   a) ¿Qué dice el teorema de Euler?

   El teorema de Euler funciona en todos los poliedros convexos, y lo que expresa es que $\underset{\text{Caras}}{C} - \underset{\text{Aristas}}{A} + \underset{\text{Vertices}}{V} = 2$

   b) ¿Qué es un prisma regular?

   Un prisma recto con sus ~~caras~~ bases ~~iguales~~. polígonos regulares

   c) ¿Cómo se llaman los cuerpos redondos que se generan haciendo girar una figura plana alrededor de un eje? Escribe los ejemplos que hemos visto en clase e indica con qué figura plana se genera cada uno.

   Cuerpos de revolución.

   Rectángulo → Cilindro
   Triángulo → Cono
   Círculo → Esfera

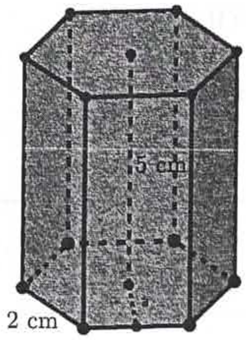
2. (1'5 puntos) Completar la siguiente tabla ayudándote del teorema de Euler:

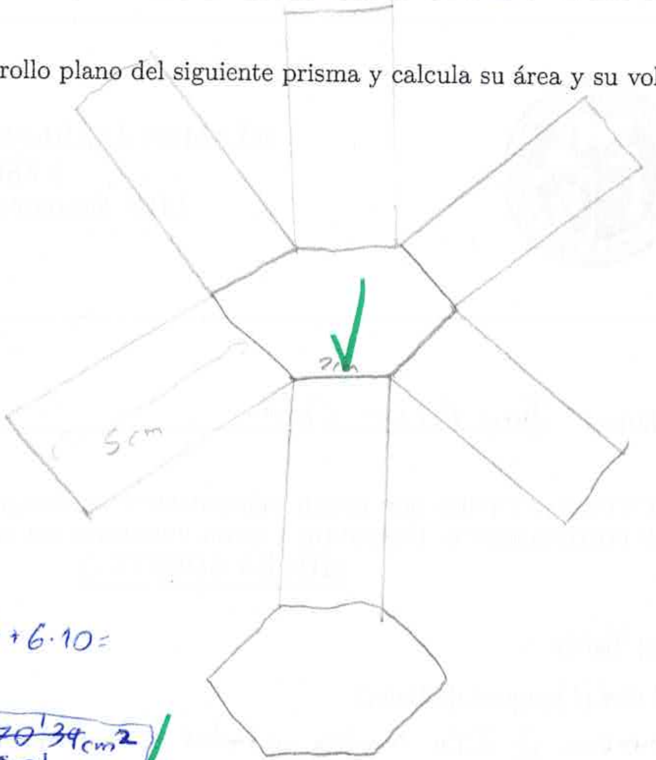
1'5

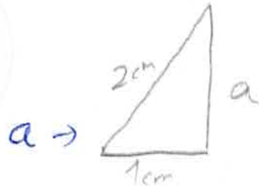
	Número de caras	Número de aristas	Número de vértices
Octaedro	8	12	6
Dodecaedro	12	30	12
Icosaedro	20	30	12
Pirámide hexagonal regular	7	12	7
Prisma heptagonal regular	9	21	14

3. (1'5 puntos) Dibuja el desarrollo plano del siguiente prisma y calcula su área y su volumen.

1'5







Pitágoras:

$1^2 + a^2 = 2^2$; $a^2 = 3$;

$a = \sqrt{3}$

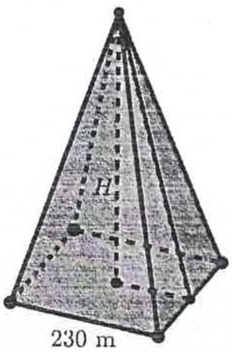
$$A_P = 2A_B + \overset{6}{n} \cdot \overset{5\cdot 2 = 10}{A_T} = 2 \cdot \frac{P \cdot a}{2} + 6 \cdot 10 =$$

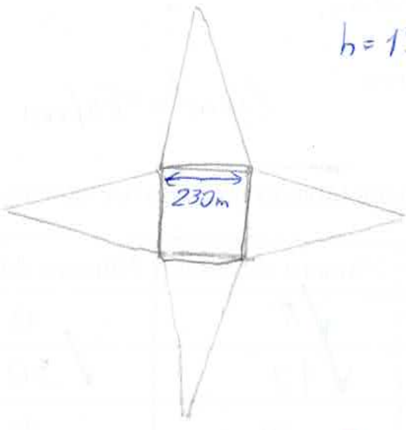
$$= 2 \cdot \frac{12 \cdot a}{2} + 60 = 26\sqrt{3} + 60 \simeq \boxed{\cancel{70'34}\,cm^2 \quad 80'78}$$

$$V_P = \underbrace{A_B}_{\frac{12\cdot\sqrt{3}}{2} \simeq 10'39} \cdot h = 10'39 \cdot 5 = \boxed{51'98\,cm^3}$$

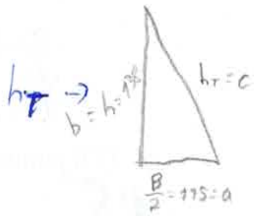
4. (1'5 puntos) La pirámide de Keops es la más grande de todas las pirámide de Egipto. Es una pirámide de base cuadrada cuya altura es $H = 138$ metros. Sabiendo que el lado de la base mide 230 metros, calcula su área y su volumen. Ayúdate de su desarrollo plano.

1'5





$h = 138m$



$a^2 + b^2 = c^2$;

$115^2 + 138^2 = c^2 = 32269$;

$c = \sqrt{32269} \simeq 179'64\,m$

$$A_P = \overset{230^2 = 52900}{A_B} + n\underbrace{A_T}_{\frac{b \cdot h_T}{2}} = 52900 + \frac{4 \cdot 230 \cdot 179'64}{2} = \boxed{\cancel{73558'6}\,m^2}$$

135.534'4

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{A_B}_{52900} \cdot \underbrace{h}_{138} = \boxed{2.433.400\,m^3}$$

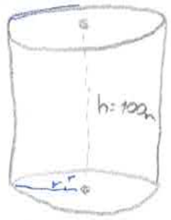
Jaime García Calero

5. (1'5 puntos) Sabemos que un rascacielos de forma cilíndrica tiene un área de 1000π m^2. Si el rascacielos tiene una altura de 100 metros, ¿cuánto mide el radio de su base?

1'5

$$2^\circ \text{ Paso} \Rightarrow r = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 4 \cdot 2(-1000)}}{2 \cdot 2} = \frac{-200 \pm \sqrt{40000 + 8000}}{4} =$$

$$= \frac{-200 \pm \sqrt{48000}}{4} = \frac{-200 \pm 219'09}{4} \begin{cases} + \dfrac{19'09}{4} \approx \boxed{4'77 \text{ m}} \\ - \text{ No sense} \end{cases}$$



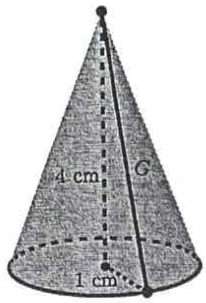
$Á: 1000\pi \, m^2$

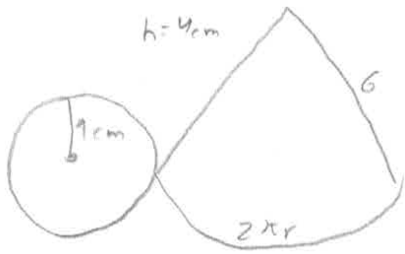
$$Á_C = 2A_B + A_r ; 1000\pi m^2 = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot 100 = 2\pi r^2 + 200\pi r ; \boxed{2\pi r^2 + 200\pi r - 1000\pi = 0}$$

1° Paso

6. (1'5 puntos) Dibuja el desarrollo plano del siguiente cono y después calcula su área y su volumen.

1'5



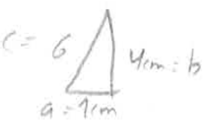


$\pi \cdot 1^2 = \pi$

$$Á_K = A_B + A_r = \pi + \sqrt{17}\pi \approx \boxed{16'09 \text{ m}^2}$$

$$V_K = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \approx \boxed{4'19 \text{ m}^3}$$

G → Pitágoras



$1^2 + 4^2 = G^2 ; 17 = G^2 ; G = \sqrt{17}$

7. (1 punto) Calcula el radio del planeta Marte sabiendo que su superficie es de 144'8 millones de km^2. ¿Cuál es su volumen?

1

$$Á_E = 4\pi r^2 = 144'8 \cdot 10^6 ; r^2 = \frac{144'8 \cdot 10^6}{4\pi} \approx 1'15 \cdot 10^7 ; \cancel{1'15 \text{ millones de km}}$$

$$r = \sqrt{1'15 \cdot 10^7} \approx \boxed{3391'16 \text{ km}}$$

$$V_E = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3391'16^3 \approx \boxed{1'63 \cdot 10^{11} \text{ km}^3}$$

$3'90 \cdot 10^{10}$ km^3