EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **20**, Núm. 3, 307 – 340 (2005)

# Suites Spectrales de Hochschild-Serre à Coefficients dans un Espace Semi-Normé*

A. Bouarich

*Faculté des Sciences et Téchniques, Université Cadi Ayyad, BP.* 523, *Beni Mellal, Maroc*
*e-mail: bouarich@fstbm.ac.ma*

(Presented by A.M. Cegarra)

AMS *Subject Class.* (2000): 55M35, 55T05 *Received August* 30, 2004

## 1. Introduction

1.1. Motivation. La cohomologie bornée réelle a été introduite par M. Gromov [11] dans le but de trouver une borne inférieure au volume minimal d'une variété différentielle. Le plus important des résultats obtenus par Gromov [11] est que la cohomologie bornée réelle d'un espace topologique connexe par arcs $X$ est égale à la cohomologie bornée réelle de son groupe fondamental $\pi_1(X)$. Ce résultat ramène l'étude et la recherche des méthodes de calcul des espaces de cohomologie bornée réelle au cas des groupes discrets.

Notons que les espaces de cohomologie bornée réelle au sens de Gromov sont des espaces vectoriels réels semi-normés. Ainsi, depuis 1981, on ne trouve dans la littérature que des résultats qui portent sur la structure de Banach et la dimension des espaces de cohomologie bornée réelle de degré deux et trois (cf. [1], [18], [20], ...) ou des travaux qui cherchent à donner une interprétation géométrique aux classes de cohomologie bornée de degré deux (cf. [14], [2], ...).

Ces résultats ont motivé la recherche des méthodes de calcul des espaces de cohomologie bornée au sens de Gromov notamment en utilisant la machinerie des suites spectrales. Ainsi, par exemple, A. Noskov [21] a associé à une extension de groupes discrets, $1 \to G \to \Gamma \to \Pi \to 1$, une suite spectrale de Hochschild-Serre $(E_r^{*,*}, d_r)$ qui converge vers la cohomologie bornée du groupe $\Gamma$. De même, N. Monod et M. Burger [19], ont introduit la cohomologie bornée continue pour les groupes topologiques localement compacts généralisant ainsi la cohomologie bornée au sens de Gromov des groupes dis-

*Recherche menée dans le cadre du Programme Thématique d'Appui à la Recherche Scientifique PROTARS III.

crets. De même, pour la donnée d'une extension de groupes topologiques localement compacts $1 \to G \to \Gamma \to \Pi \to 1$ ils ont établit l'existence de la suite spectrale de Hochschild-Serre $(E_r^{*,*}, d_r)$ en cohomologie bornée. Cependant, pour que Noskov [21] et Monod et Burger [19] arrivent à expliciter le second terme $E_2^{p,q}$ ils étaient obligés de supposer que les espaces de cohomologie bornée du groupe $G$ soient des espaces de Banach. Donc, les deux théorèmes de [21] et [19] laissent ouverte la question de l'expression des deux premiers termes de la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée dans le cas général.

L'objectif principal de notre travail est d'expliciter les deux premiers termes $E_1^{*,*}$ et $E_2^{*,*}$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée sans faire des hypothèses supplémentaires. Pour atteindre cet objectif nous allons introduire la notion de cohomologie bornée d'un groupe discret à coefficients dans un espace vectoriel réel semi-normé. Cette notion de cohomologie bornée généralise en même temps la cohomologie usuelle des groupes discrets et la cohomologie bornée au sens de Gromov. Ensuite, dans un deuxième temps, nous nous proposons de refaire les éléments de la théorie des suites spectrales classiques (cf. [8], [10], [17],...) dans la catégorie des complexes différentiels d'espaces vectoriels réels semi-normés. Puis, comme application de cette théorie, pour toute extension de groupes discrets $1 \to G \to \Gamma \to \Pi \to 1$ nous associerons une suite spectrale de Hochschild-Serre $(E_r^{*,*}, d_r)$ qui converge vers la cohomologie bornée du groupe $\Gamma$ et dont les deux premiers termes $E_1^{p,q}$ et $E_2^{p,q}$ seront explicités sans faire d'hypothèses ni sur les groupes $G, \Gamma$ et $\Pi$ ni sur leurs espaces de cohomologie bornée.

1.2. Commentaire topologique. Suite aux recommandations du rapporteur de l'ancienne version de cet article, nous préférons d'abord discuter quelques points sur la topologie quotient des espaces vectoriels réels semi-normés avant d'exposer les principaux théorèmes et résultats que nous démontrerons dans cet article.

Étant donné un espace vectoriel réel semi-normé $(E, \|\cdot\|_E)$ et un sous-espace vectoriel $F \subseteq E$ muni de la topologie induite; on définit sur l'espace vectoriel quotient $E/F$ la semi-norme $\|\cdot\|_{E/F}$ donnée par l'expression,

$$\text{si} \quad z \in E/F \quad \text{alors} \quad \| z \|_{E/F} := \inf\{\| x \|_E \ /\forall x \in z\}.$$

Il est facile de démontrer que relativement à la semi-norme $\|\cdot\|_{E/F}$ la surjection canonique $q : E \to E/F \to 0$ devient continue et ouverte.

Rappelons que la donnée d'une surjection linéaire continue, $p : E \to F \to 0$, induit une bijection continue $\bar{p} : E/\mathrm{Ker}(p) \to F$ telle que $p = q \circ \bar{p}$. En général, l'application inverse $\bar{p}^{-1} : F \to E/\mathrm{Ker}(p)$ n'est pas continue (cf. [9] exercice 2 du chapitre 12, page 58). Par contre, on sait que si une surjection linéaire continue $p : E \to F \to 0$ vérifie la condition d'inversibilité qui s'énonce comme suit :

$$\exists k > 0, \forall y \in F \Longrightarrow \exists x \in E, p(x) = y \quad \text{et} \quad \| x \|_{E} \leq k \| y \|_{F}$$

on en déduit que l'application inverse $\bar{p}^{-1} : F \to E/\mathrm{Ker}(p)$ vérifie l'inégalité suivante,

$$\| \bar{p}^{-1}(y) \|_{E/\mathrm{Ker}(p)} = \inf\{\| x \| \,/ \forall x \in \bar{p}^{-1}(y) = x + \mathrm{Ker}(p)\} \leq k \| y \|_{F}, \ \forall y \in F$$

qui prouve bien que la bijection canonique $\bar{p} : E/\mathrm{Ker}(p) \to F$ est un homéomorphisme. Ainsi, en conséquence de la condition d'inversibilité, nous déduisons que les espaces vectoriels topologiques semi-normés $E/\mathrm{Ker}(p)$ et $F$ sont équivalents.

Notons que lorsque les espaces vectoriels réels $E$ et $F$ sont des espaces de Banach, grâce au théorème de l'application ouverte (cf. [6], [23]) ; on démontre que tout opérateur linéaire continu surjectif $p : E \to F \to 0$ vérifie la condition d'inversibilité et que par conséquent la bijection canonique $\bar{p} : E/\mathrm{Ker}(p) \to F$ est un isomorphisme de Banach.

Nous attirons l'attention du lecteur qu'il n'y a pas de théorème de l'application ouverte pour les opérateurs linéaires continus entre les espaces vectoriels réels semi-normés. Ceci explique que la plus part des bijections continues que nous construirons ci-dessous ne soient pas nécéssairement des homéomorphismes. Cependant, dans la section 4, nous allons prouver que l'absence de la condition d'inversibilté ne nous empêchera pas d'expliciter les deux premiers termes $E_1^{*,*}$ et $E_2^{*,*}$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée.

1.3. Présentation des résultats. Tous les groupes que nous considérons ici seront supposés discrets.

Définition 1. Soient $G$ un groupe discret et $V$ un espace vectoriel réel semi-normé (resp. de Banach). On dit que $V$ est un $G$-module borné (resp. de Banach) s'il est muni d'une action linéaire du groupe $G$ telle que chaque élément $g \in G$ induit un opérateur linéaire continu $g : V \to V$ de norme $\| g \| \leq 1$. On note par $g.v$ l'action de $g$ sur un élément $v \in V$.

Pour tout $G$-module borné $V$ on désigne par $C_b^n(G;V)$ l'espace vectoriel réel des $n$-cochaînes bornées non homogènes, $c : G^n \to V$. La différentielle de degré $n \geq 0$ d'une $n$-cochaîne $c \in C_b^n(G;V)$ est définie par l'expression,

$$\begin{aligned}\delta_n(f)(g_1, \cdots, g_{n+1}) = &g_1.f(g_2, \cdots, g_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^i f(g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1, \cdots, g_n).\end{aligned}$$

La cohomologie du complexe différentiel $(C_b^*(G;V), \delta_*)$ s'appelle cohomologie bornée du groupe $G$ à coefficients dans le $G$-module borné $V$ et se note par, $H_b^*(G,V) := \mathrm{Ker}(\delta_n)/\mathrm{Im}(\delta_{n-1})$.

Notons que sur l'espace vectoriel $C_b^n(G;V)$ des cochaînes bornées non homogènes on définit une semi-norme naturelle donnée par,

$$\text{si} \quad c \in C_b^n(G;V) \quad \text{alors} \quad \| c \|_\infty = \sup\{\| c(g) \|_V \ / g \in G^n\}.$$

La semi-norme $\| \cdot \|_\infty$ induit donc une semi-norme par passage aux espaces vectoriels quotient $H_b^n(G;V) := \mathrm{Ker}(\delta_n)/\mathrm{Im}(\delta_{n-1})$. En particulier, quand l'espace $V = \mathbb{R}$ on obtient un complexe différentiel $(C_b^*(G;\mathbb{R}), \delta_*)$ dont les termes sont espaces de Banach et dont les espaces de cohomologie $H_b^*(G,\mathbb{R})$ s'appelle : cohomologie bornée réelle au sens de Gromov. Notons que le second espace de cohomologie bornée réelle $H_b^2(G,\mathbb{R})$ est un espace de Banach (cf. [15]), mais de façon générale, lorsque l'entier $n \geq 3$, l'espace de cohomologie bornée réelle $H_b^n(G;\mathbb{R})$ n'est pas un espace de Banach (cf. [22]).

Dans la section 2 nous étudierons quelques propriétés élémentaires de la cohomologie bornée à coefficients dans un $G$-module borné. De même, nous démontrons le résultat principal suivant qui jouera un rôle crucial pour expliciter le second terme $E_2^{p,q}$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée avec coifficients.

Proposition principale. *Soit $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$ une extension de groupes discrets. Alors, pour tous les entiers $p \geq 1$ et $q \geq 0$ on a :*

$$H_b^p(\Pi, \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], V)) := H^p(\mathcal{F}_b^*(\Pi, \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], V))) = 0.$$

*Où $\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}]$ désigne l'espace vectoriel réel engendré par le produit cartésien $\Gamma^{q+1}$ et $\mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], V)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires continus $p : \mathbb{R}[\Gamma^{q+1}] \to V$ qui sont invariants par l'action du groupe $G$ qu'on va définir dans 2.1 (voir expression (3)).*

Dans la section 3 nous nous proposons de refaire la théorie des suites spectrales dans la catégorie des espaces semi-normés. Plus précisément, nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME PRINCIPALE A. *Soit $(K^*, d_*)$ un complexe différentiel d'espaces vectoriels semi-normés que l'on suppose muni d'une filtration décroissante régulière $F^pK^n \subset F^{p-1}K^n$ qui induit à son tour une filtration décroissante sur l'espace semi-normé $H^n(K^*, d_*)$ en posant :*

$$F^pH^{p+q}(K^*, d_*) := \operatorname{Im}(j^p : H^{p+q}(F^pK^*, d_*) \to H^{p+q}(K^*, d_*).$$

*Alors, il existe une suite spectrale $(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$ qui possède les propriétés suivantes :*

1. *Pour chaque entier naturel $r \geq 0$ il existe une bijection canonique continue,*
$$E_{r+1}^{p,q} \overset{\sim}{\to} H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r).$$
2. *Il existe une bijection canonique continue définie sur $E_1^{p,q}$ dans l'espace d'homologie relative*
$$H^{p+q}\left(\frac{F^pK^*}{F^{p+1}K^*}\right)$$
*qui envoie la différentielle $d_1$ sur l'opérateur de bord associé au triplet $(F^pK^*, F^{p+1}K^*, F^{p+2}K^*)$.*
3. *Il existe une bijection canonique continue qui envoie la somme directe*
$$E_\infty^n = \bigoplus_{p=0}^{p=n} E_\infty^{p,n-p}$$
*sur la somme directe*
$$\bigoplus_{p=0}^{p=n} \frac{F^pH^n(K^*, d_*)}{F^{p+1}H^n(K^*, d_*)} \simeq H^{p+q}(K^*, d_*).$$
*Autrement dit, la suite spectrale $(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$ convergent vers l'espace de cohomologie $H^n(K^*, d_*)$ :*
$$E_1^{p,q} \overset{\sim}{\to} H^{p+q}\left(\frac{F^pK^*}{F^{p+1}K^*}\right) \Longrightarrow H^{p+q}(K^*, d_*).$$

Dans la section 4, malgré que les bijections canoniques continues $E_{r+1}^{p,q} \overset{\sim}{\to} H^{p,q}(E_r, d_r)$ ne sont pas des homéomorphismes; nous allons démontrer qu'à chaque extension de groupes discrets $1 \to G \overset{i}{\to} \Gamma \overset{\sigma}{\to} \Pi \to 1$ on pourra lui associer une suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée dont les propriétés essentielles sont énoncées dans le :

Théorème principal B. *Soient $1 \to G \overset{i}{\to} \Gamma \overset{\sigma}{\to} \Pi \to 1$ une extension de groupes discrets et $V$ un $\Gamma$-module borné. Alors, il existe une suite spectrale $(E_r^{p,q}, d_r)$ de complexes différentiels semi-normés qui ont les propriétes suivantes :*

1. *Il existe une bijection canonique continue du terme $E_1^{p,q}$ dans l'espace vectoriel semi-normé $C_b^p(\Pi, H_b^q(G,V))$ des $p$-cochaînes non homogènes bornées sur le groupe $\Pi$ à valeurs dans l'espace vectoriel semi-normé $H_b^q(G,V)$.*
2. *Il existe une bijection canonique continue du terme $E_2^{p,q}$ dans l'espace de cohomologie bornée $H_b^p(\Pi, H_b^q(G,V))$ associé au complexe différentiel des cochaînes non homogènes bornées $(C_b^*(\Pi, H_b^q(G,V)), d_\Pi)$.*
3. *La suite spectrale $(E_r^{p,q}, d_r)$ converge vers la cohomologie bornée du groupe $\Gamma$ à valeurs dans le $\Gamma$-module borné $V$ :*
$$E_2^{p,q} \overset{\sim}{\to} H_b^p(\Pi, H_b^q(G,V)) \Longrightarrow H_b^{p+q}(\Gamma, V).$$

En utilisant que les techniques élémentaires des suites spectrales, le théorème principal B nous permet de dégager les deux suites exactes suivantes :

1) Cas de cohomologie bornée à de coefficients dans un $G$-module borné $V$ :

$$0 \to H_b^1(\Pi, V^G) \overset{\sigma_b^*}{\to} H_b^1(\Gamma, V) \overset{i_b^*}{\to} H_b^1(G,V)^\Pi \overset{d_2}{\to} H_b^2(\Pi, V^G) \overset{\sigma_b^*}{\to} H_b^2(\Gamma, V).$$

2) Cas de cohomologie bornée à coefficients dans un espace de Banach $V$ muni d'une $G$-action triviale (i.e $\forall g \in G, \forall v \in V,\ g \cdot v = v$) :

$$0 \to H_b^2(\Pi, V) \overset{\sigma_b^*}{\to} H_b^2(\Gamma, V) \overset{i_b^*}{\to} H_b(G,V)^\Pi \overset{d_3}{\to} H_b^3(\Pi, V) \overset{\sigma_b^*}{\to} H_b^3(\Gamma, V).$$

Notons que ces deux suites exactes se trouvent dans [21] et [19]. Notons aussi que dans [3] et [4], en travaillant en cohomologie bornée réelle sans appliquer l'outil des suites spectrales; nous avons établit la suite exacte à quatre termes

$$0 \to H_b^2(\Pi, \mathbb{R}) \overset{\sigma_b^*}{\to} H_b^2(\Gamma, \mathbb{R}) \overset{i_b^*}{\to} H_b(G,\mathbb{R})^\Pi \overset{\delta}{\to} H_b^3(\Pi, \mathbb{R})$$

où $\delta$ est un opérateur linéaire continu. Actuellement, dans le papier [5] nous avons démontré que l'opérateur $\delta$ est égal à la différentiel $d_3$.

## 2. Cohomologie bornée d'un groupe discret à coefficients dans un espace vectoriel semi-normé

Cette section sera consacrée à la définition de la notion de cohomologie bornée d'un groupe discret $G$ à coefficients dans un $G$-module borné $V$. Pour cela nous allons suivre la méthode algébrique classique qui consiste à démontrer que la catégorie des $G$-modules bornés admet suffisamment d'objets injectifs (cf. [16]). En conséquence de ceci, comme dans le cas de cohomologie usuelle (cf. [16]) ou dans le cas de cohomologie bornée au sens de Gromov [7] et [15], nous pourrons définir la colohomologie bornée avec coefficients sans ambiguïté en n'utilisant que le complexe différentiel des cochaînes bornées non homogènes. Ensuite, nous donnerons certaines propriétés élémentaires de la colohomologie bornée avec coefficients qui sont nécessaires pour le développement des résultats de cet article.

2.1. Exemples de $G$-modules bornés. Dans ce paragraphe, nous donnerons des exemples de $G$-modules bornés que nous allons utiliser pour définir la notion de cohomologie bornée et aussi pour établir la suite spectrale de Hochschild-Serre relativement à cette cohomologie.

Définition 2. Soient $G$ un groupe discret et $V$ un espace vectoriel réel semi-normé (resp. de Banach). On dit que $V$ est un $G$-module borné (resp. de Banach) s'il est muni d'une action linéaire du groupe $G$ telle que chaque élément $g \in G$ induit un opérateur linéaire borné $g : V \to V$ de norme $\| g \| \leq 1$. On note par $g.v$ l'action de $g$ sur un élément $v \in V$.

1) Soient $G$ un groupe et $\mathbb{R}[G]$ l'espace vectoriel réel engendré par les éléments de $G$. Puisque le groupe $G$ agit sur lui même par translation à droite, cette action induit sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[G]$ une structure de $G$-module borné lorsque l'on munit par la norme de type $\ell_1$, c'est-à-dire si $z = \sum_{i=1}^{i=n} a_i g_i \in V$ alors $\| z \|_1 = \sum_{i=1}^{i=n} | a_i |$.
2) Dans l'exemple 1), si pour un entier $n \geq 1$ on remplace le groupe $G$ par le produit cartésien $G^n$ on obtient des $G$-modules bornés que l'on note par $\mathbb{R}[G^n]$. Le complété du $G$-module borné $\mathbb{R}[G^n]$ relativement à la norme $\ell_1$ sera noté $C_n^{\ell_1}(G, \mathbb{R})$.
3) Soit $V$ un $G$-module borné. On désigne par $\mathcal{F}_b^n(G, V)$ l'espace vectoriel des applications bornées sur le produit cartésien $G^n$ à valeurs dans l'espace vectoriel semi-normé $V$. Pour tout élément $f \in \mathcal{F}_b^n(G, V)$ on définit sa semi-

norme en posant :

$$\| f \|_\infty = \sup\{\| f(g_1, \cdots, g_n) \|_V \ / \ g_1, \cdots, g_n \in G\}.$$

Notons que l'espace vectoriel semi-normé $(\mathcal{F}_b^n(G,V),\ \|\cdot\|_\infty)$ est canoniquement isomorphe avec l'espace vectoriel réel des opérateurs linéaires continus $\mathcal{L}(\mathbb{R}[G^n], V)$. Notons aussi que si on suppose que l'espace $V$ est un espace de Banach il en résulte que l'espace des opérateurs linéaires continus $\mathcal{L}(\mathbb{R}[G^n], V)$ est topologiquement isomorphe avec l'espace de Banach $\mathcal{L}(C_n^{\ell_1}(G,\mathbb{R}), V)$ où $C_n^{\ell_1}(G,\mathbb{R})$ désigne le complété de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[G^n]$ muni de la norme $\ell_1$ définie dans l'exemple 1).

Sur l'espace vectoriel semi-normé $(\mathcal{F}_b^n(G,V),\ \| . \|_\infty)$ on fait agir le groupe $G$ de façon linéaire en posant pour tout élément $f \in \mathcal{F}_b^n(G,V)$ :

$$(g \bullet f)(g_1, \cdots, g_n) = g.f(g^{-1}g_1, \cdots, g^{-1}g_n) \in V, \quad \forall g, g_1, \cdots, g_n \in G.$$

Et, ainsi, puisque les opérateurs linéaires $f \in \mathcal{F}_b^n(G,V) \xrightarrow{g} g \bullet f \in \mathcal{F}_b^n(G,V)$ sont continus il en résulte que l'espace vectoriel semi-normé $(\mathcal{F}_b^n(G,V),\ \| . \|_\infty)$ est un $G$-module borné. Ajoutant aussi que lorsque l'espace $V$ est un Banach, en munissant l'espace de Banach $(\mathcal{L}(C_n^{\ell_1}(G,\mathbb{R}), V), \|\cdot\|_\infty)$ par la $G$-action (1) on obtient un $G$-module de Banach.

4) Soient $E$ et $F$ deux $G$-modules bornés. Sur l'espace des opérateurs linéaires bornés $\mathcal{L}(E,F)$ on définit une structure de $G$-module borné en faisant agir le groupe $G$ sur les éléments $p \in \mathcal{L}(E,F)$ de la manière suivante :

$$(g \bullet p)(v) = g.p(g^{-1}.v), \quad \forall g \in G, \forall v \in E. \tag{1}$$

Il résulte de cet exemple que le sous-espace des opérateurs bornés $G$-invariants est égal à l'espace des opérateurs $G$-équivariants :

$$\mathcal{L}_G(E,F) := \mathcal{L}(E,F)^G := \{p \in \mathcal{L}(E,F) / \forall g \in G, g \bullet p = p\}. \tag{2}$$

Ainsi, en particulier, si on pose $E = \mathbb{R}[G^n]$ alors pour tout $G$-module borné $V$ on déduit qu'on a un isomorphisme :

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}[G^{n+1}], V)^G = \mathcal{F}_b^{n+1}(G,V)^G \simeq \mathcal{F}_b^n(G,V) = \mathcal{L}(\mathbb{R}[G^n], V).$$

5) Soient $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$ une extension de groupes discrets et $V$ un $\Gamma$-module borné. Sur l'espace semi-normé des opérateurs $G$-invariants $\mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma], V)$ nous allons définir une structure de $\Pi$-module borné de la manière suivante.

Considérons une section ensembliste $s : \Pi \to \Gamma$ de la surjection $\sigma$ (i.e. $\sigma \circ s(\alpha) = \alpha$) et pour tous les éléments $\alpha \in \Pi$ et $\gamma \in \Gamma$ posons :

$$\alpha \star f(\gamma) \quad = \quad s(\alpha).f(s(\alpha)^{-1}\gamma), \qquad \forall f \in \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma], V). \tag{3}$$

En utilisant le fait que les opérateurs $f \in \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma], V)$ sont $G$-invariants, on vérifie facilement que l'action $\star$ est bien définie et qu'elle ne dépend pas de la section ensembliste choisie $s : \Pi \to \Gamma$. De même, notons que si on remplace le groupe $\Gamma$ par un produit cartésien $\Gamma^n$ on obtient une structure de $\Pi$-module borné sur l'espace semi-normé $\mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^n], V)$.

La proposition suivante est fondamentale pour toutes les constructions de cette section.

Proposition 1. ([12, Ch. I, Prop. 1, p. 28]) *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels. On désigne par $E \otimes F$ le produit tensoriel algébrique de $E$ et $F$.*

*Pour un couple de semi-normes $\alpha$ et $\beta$ définies sur $E$ et $F$ respectivement, l'application $\| \cdot \| : E \otimes F \to \mathbb{R}^+$ définie par :*

$$\| u \| = \inf\{\textstyle\sum_{n\geq 0} \alpha(x_n).\beta(y_n) \mid u = \sum_{n\geq 0} x_n \otimes y_n\}, \quad \forall u \in E \otimes F,$$

*est une semi-norme telle que pour tout espace vectoriel semi-normé $V$ l'espace semi-normé des applications bilinéaires continues $B(E, F; V)$ est canoniquement isomorphisme à l'espace semi-normé des applications linéaires bornées $\mathcal{L}(E \otimes F, V)$.*

Le produit tensoriel $E \otimes F$ munit par la semi-norme $\| \cdot \|$ s'appelle : produit tensoriel topologique projectif [12].

Pour l'existence de la suite spectrale de Hochschild-Serre le lemme suivant est fondamental.

Lemme 1. *Soit $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$ une extension de groupes discrets. Soient $E$ un $\Pi$-module borné, $F$ et $V$ deux $\Gamma$-modules bornés. Alors il existe un isomorphisme canonique entre $\Gamma$-modules bornés :*

$$\mathcal{L}_\Pi(E, \mathcal{L}_G(F, V)) \simeq \mathcal{L}_\Gamma(E \otimes F, V) \tag{4}$$

*où $E \otimes F$ désigne le produit tensoriel topologique projectif des deux espaces semi-normés $E$ et $F$ sur lequel la structure de $\Gamma$-module borné est donnée par l'action diagonale suivante :*

$$\gamma \bullet (x \otimes y) = \sigma(\gamma).x \otimes \gamma.y, \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall x \in E, \forall y \in F. \tag{5}$$

*Démonstration.* D'après la proposition 1, en oubliant les structures de Γ-modules bornés et en appliquant le principe de l'associativité, on obtient un isomorphisme d'espaces semi-normés :

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, V)) \equiv \mathcal{L}(E \otimes F, V)$$

qui est donné par l'application isométrique suivante :

$$\begin{array}{llll} \Psi : \mathcal{L}(E \otimes F, V) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, V)) & \\ \quad f & \longrightarrow & \quad \widetilde{f} : E & \longrightarrow \ \mathcal{L}(F, V) \\ & & \qquad x & \longrightarrow \ f(x, -) \end{array}$$

Pour conclure il suffit de montrer que l'isométrie $\Psi$ est compatible avec la structure de Γ-modules bornés. Puisque $E$ est un Π-module borné, on peut le considérer comme un Γ-module borné sur lequel le sous-groupe $G$ agit trivialement, c'est-à-dire pour tous $g \in G$ et $x \in E$ on a $g.x = \sigma(g) \cdot x = x$.

Soient $x$ un vecteur fixé dans $E$ et $f \in \mathcal{L}_\Pi(E \otimes F, V)$. Alors pour tous les éléments $g \in G$ et $y \in F$ on a :

$$f(x, -)(g.y) = f(x \otimes g.y) = f(\sigma(g).x \otimes g.y) = g.f(x \otimes y) = g.f(x, -)(y).$$

Ceci montre que $f(x, -) \in \mathcal{L}_G(F, V)$.

Enfin, pour $\alpha \in \Pi$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que $\sigma(\gamma) = \alpha$ on a pour les éléments $x \in E$ et $y \in F$ :

$$f(\alpha.x \otimes y) = f(\alpha.x \otimes \gamma.\gamma^{-1}.y) = \gamma.f(x \otimes \gamma^{-1}.y).$$

D'où $\Psi(f) \in \mathcal{L}_\Pi(E, \mathcal{L}_G(F, V))$. ∎

2.2. $G$-MODULES BORNÉS RELATIVEMENT INJECTIFS. Dans ce paragraphe, nous donnerons la définition d'injectivité relative. Cette notion permet de montrer que la cohomologie bornée d'un groupe discret $G$ à coefficients dans un $G$-module borné est bien fondée.

DÉFINITION 3. Soient $E$ et $F$ deux $G$-modules bornés.

1. Un monomorphisme $0 \to E \xrightarrow{i} F$ de $G$-modules bornés est dit admissible s'il possède un inverse à gauche dans la catégorie des espaces semi-normés, c'est-à-dire ; s'il existe un morphisme borné $r \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $r \circ i = id_E$.

2. Soit $V$ un $G$-module borné. On dit que $V$ est relativement injectif si chaque fois qu'on se donne un $G$-monomorphisme admissible $0 \to E \overset{r}{\underset{}{\leftrightarrows}} F$ et un morphisme $\alpha \in \mathcal{L}_G(E, V)$ il existe un morphisme $\beta \in \mathcal{L}_G(F, V)$ tel que $\beta \circ i = \alpha$.

Le lemme suivant donne des exemples de $G$-modules bornés relativement injectifs qui joueront un rôle essentiel dans la définition de la cohomologie bornée avec coefficients.

LEMME 2. *Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout $G$-module borné $V$ le $G$-module borné $\mathcal{L}(\mathbb{R}[G^n], V)$ est relativement injectif.*

*Démonstration.* Puisque pour tout entier $n \geq 1$ on a l'isomorphisme de $G$-modules bornés :

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}[G^{n+1}], V) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}[G], \mathcal{L}(\mathbb{R}[G^n], V))$$

il suffit qu'on prouve le lemme dans le cas où l'entier $n = 1$.

Soient $0 \to E \overset{r}{\underset{i}{\leftrightarrows}} F$ un $G$-monomorphisme admissible et $\alpha : E \to \mathcal{L}(\mathbb{R}[G], V)$ un $G$-morphisme. Pour tout vecteur $x \in F$ fixé posons :

$$\beta(x)(g) = \alpha(r(g.x))(1), \quad \forall g \in G.$$

Il est clair que $\beta(x) : \mathbb{R}[G] \to V$ définit un opérateur linéaire borné. De plus, comme pour tous $g$ et $g'$ éléments du groupe $G$ on a : $\beta(g.x)(g') = \alpha(r(g'g.x))(1) = \beta(x)(g'g) = g.\beta(x)(g')$ ceci implique donc que $\beta : F \to \mathcal{L}(\mathbb{R}[G], V)$ est un $G$-morphisme.

D'autre part, notons que si on prend $x \in E$ et $g \in G$ on peut écrire, $\beta(x)(g) = \alpha(r(g.x))(1) = \alpha(g.x)(1) = \alpha(x)(g)$. Ceci montre finalement que le $G$-morphisme $\beta$ prolonge le morphisme $\alpha$ sur l'espace $F$. ∎

2.3. RÉSOLUTIONS RELATIVEMENT INJECTIVES DE $G$-MODULES BORNÉS. Tous les complexes différentiels que nous considérons ci-dessous seront supposés de degré positif.

Un complexe différentiel $(K^*, d_*)$ est dit semi-normé (resp. de $G$-modules bornés) si pour tout entier, $n \in \mathbb{N}$, $K^n$ est un espace semi-normé (resp. un $G$-module borné) et $d_n : K^n \to K^{n+1}$ un opérateur linéaire continu (resp. $G$-equivariant) tel que $d_{n+1} \circ d_n = 0$. Un morphisme de complexes différentiels semi-normés (resp. $G$-modules bornés) est une suite d'opérateurs linéaires continus (resp. $G$-equivariants) $f_*$ qui commutent dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & K^{n-1} \arrow[r, "d^K_{n_1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & K^n \arrow[r, "d^K_n"] \arrow[d, "f_n"'] & K^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & {} \\
{} \arrow[r] & L^{n-1} \arrow[r, "d^L_{n-1}"] & L^n \arrow[r, "d^L_n"] & L^{n+1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

On dira que deux morphismes $f_*, g_* : (K^*, d^K_*) \to (L^*, d^L_*)$ sont homotopes lorsqu'il existe une famille d'opérateurs linéaires continus $h_n : K^n \to L^{n-1}$ tels que,

$$d^{L^*}_{n-1} \circ h_n + h_{n+1} \circ d^{K^*}_n = f_n - g_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Précisons que lorsque les morphismes $f^*, g^* : (K^*, d^K_*) \to (L^*, d^L_*)$ sont $G$-équivariants l'homotopie $h_n : K^n \to L^{n-1}$ doit être $G$-équivariant.

Définition 4. Soient $(K_*, d_*)$ un complexe différentiel d'espace semi-normés et $V$ un espace vectoriel semi-normé.

1. Si les termes $K_n$ du complexe différentiel $(K_*, d_*)$ sont des $G$-modules bornés relativement injectifs on dira que $(K_*, d_*)$ est un complexe différentiel relativement injectif.
2. Quand il existe un opérateur linéaire continu $\varepsilon : V \to K_0$ tel que le complexe différentiel augmenté :

$$0 \longrightarrow K_{-1} = V \xrightarrow{\varepsilon} K_0 \xrightarrow{d_0} K_1 \xrightarrow{d_1} K_2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

   est exacte (i.e. $\mathrm{Im}(d_n) = \mathrm{Ker}(d_{n+1})$) on dira que $(K_*, d_*)$ est une résolution cohomologique de l'espace vectoriel $V$.
3. On dira que le complexe différentiel $(K_*, d_*)$ possède une homotopie contractante si, il existe une suite d'opérateurs continus $s_n : K_n \to K_{n-1}$ tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $s_{n+1} \circ d_n + d_{n-1} \circ s_n = id_{K_n}$ et $d_{-1} \circ s_0 = id_{K_0}$ avec $\| s_n \| \leq 1$.
4. Un complexe différentiel munit d'une homotopie contractante $(K_*, d_*, s_*)$ s'appelle résolution cohomologique forte de l'espace vectoriel $V$ et se note,

$$\varepsilon : V \to I^* \text{ ou } 0 \to V \underset{\varepsilon}{\overset{s_0}{\rightleftarrows}} K_0 \underset{d_0}{\overset{s_1}{\rightleftarrows}} K_1 \underset{d_1}{\overset{s_2}{\rightleftarrows}} K_2 \underset{d_2}{\overset{s_3}{\rightleftarrows}} \cdots$$

La proposition suivante montre que la famille des complexes différentiels d'espaces vectoriels semi-normés relativement injectifs satisfait à la propriété classique de prolongement des $G$-morphismes de complexes différentiels. Sa preuve sera omise, car ; elle est analogue au cas classique [13].

PROPOSITION 2. *Soient* $(U_*, d_*, s_*)$ *une résolution cohomologique forte de* $G$*-modules bornés et* $(V_*, d_*)$ *un complexe différentiel de* $G$*-modules bornés relativement injectifs. Alors, tout* $G$*-morphisme* $u : U_{-1} \to V_{-1}$ *se prolonge en un morphisme de complexes différentiels de* $G$*-modules bornés unique à homotopie prés.*

De la proposition on déduit immédiatement que toutes les résolutions cohomologiques fortes d'un $G$-module borné par des $G$-modules bornés relativement injectifs sont homotopes. Ci-dessous, à tout $G$-module borné nous allons associer un exemple de résolutions fortes dite : résolution standard.

Notons que d'après la proposition, pour tout $G$-module borné $V$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ le $G$-module borné des n-cochaînes bornées homogènes,

$$\mathcal{F}^n_{b,0}(G, V) := \mathcal{L}(\mathbb{R}[G^{n+1}], V)$$

est relativement injectif. On munit le complexe des cochaînes bornées homogènes $\mathcal{F}^*_{b,0}(G, V)$ par la différentielle ordinaire,

$$d_n(f)(g_0, g_1, \cdots, g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{i=n+1} (-1)^i f(g_0, \cdots, \widehat{g}_i, \cdots, g_{n+1}), \tag{6}$$

où $\widehat{g}_i$ veut dire omettre la composante $g_i$. De même, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute cochaîne bornée homogène $f \in \mathcal{F}^n_{b,0}(G, V)$ on pose,

$$s_0(f) = f(1) \quad \text{et} \quad s_n(f)(g_0, \cdots, g_n) = f(g_0, \cdots, g_n, 1),$$

on définit ainsi une homotopie contractante $s_n : \mathcal{F}^n_{b,0}(G, V) \to \mathcal{F}^{n-1}_{b,0}(G, V)$. En effet, le complexe différentiel des cochaînes bornées homogènes,

$$0 \to V \underset{\varepsilon}{\overset{s_0}{\rightleftarrows}} \mathcal{F}^0_{b,0}(G, V) \underset{d_0}{\overset{s_1}{\rightleftarrows}} \mathcal{F}^1_{b,0}(G, V) \underset{d_1}{\overset{s_2}{\rightleftarrows}} \mathcal{F}^2_{b,0}(G, V) \underset{d_2}{\overset{s_3}{\rightleftarrows}} \cdots$$

réalise une résolution cohomologique forte du $G$-module borné $V$ par des $G$-modules bornés relativement injectifs. La résolution $(\mathcal{F}^*_{b,0}(G, V), d_*, s_*)$ s'appelle résolution standard du $G$-module borné $V$.

DÉFINITION 5. Soient $G$ un groupe discret et $V$ un $G$-module borné. Soit $\varepsilon : V \to I^*$ une résolution cohomologique forte relativement injective du $G$-modules borné $V$,

$$0 \to V \underset{\varepsilon}{\overset{s_0}{\rightleftarrows}} K_0 \underset{d_0}{\overset{s_1}{\rightleftarrows}} K_1 \underset{d_1}{\overset{s_2}{\rightleftarrows}} K_2 \underset{d_2}{\overset{s_3}{\rightleftarrows}} \cdots$$

dont le sous-complexe différentiel des vecteurs $G$-invariants est noté par :

$$(I^*)^G := K_0^G \overset{d_0}{\to} K_1^G \overset{d_1}{\to} K_2^G \overset{d_2}{\to} \cdots .$$

Les espaces de cohomologie $H_b^n(G,V) := H^n((I^*)^G)$ s'appellent groupes de cohomologie bornée du groupe discret $G$ à coefficients dans le $G$-module borné $V$. Ces groupes sont des espaces vectoriels topologiques pour la semi-norme induite :

$$x \in H_b^n(G,V) = \frac{\mathrm{Ker}(d_n : K_n^G \to K_{n+1}^G)}{\mathrm{Im}(d_{n-1} : K_{n-1}^G \to K_n^G)} \implies \| x \|_\infty = \inf\{\| z \|_{K^n} / z \in x\}.$$

Puisque les résolutions cohomologiques fortes du $G$-module borné $V$ par des $G$-modules bornés relativement injectifs sont homotopes entre elles (cf. proposition 2), il en résulte donc; que les espaces de cohomologie bornée $H_b^n(G,V)$ ne dépendent pas de la résolution cohomologique forte relativement injective choisie. Par conséquent, pour définir la cohomologie bornée d'un groupe discret à coefficients dans un $G$-module borné $V$ il suffit qu'on considère le sous-complexes différentiel des cochaînes $G$-invariantes de la résolution standard $(\mathcal{F}_b^*(G,V), d_*, s_*)$ du $G$-module borné $V$ qui est canoniquement isomorphe au complexe différentiel des cochaînes bornées non homogènes :

$$C_b^n(G,V) := (\mathcal{F}_{b,0}^n(G,V))^G = \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[G^{n+1}],V) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}[G^n],V)$$

dont la différentielle $\delta_n$ est donnée par l'expression,

$$\delta_n(f)(g_1,\cdots,g_{n+1}) = g_1.f(g_2,\cdots,g_{n+1}) +$$
$$\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^i f(g_1,\cdots,g_i g_{i+1},\cdots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1,\cdots,g_n).$$

Notons que le passage des cochaînes bornées non homogènes au cohaînes homogènes $G$-invariantes et inversement se fait suivant la règle :

$$\begin{array}{rcl} n\text{-cochaîne non homogène} & \longleftrightarrow & n\text{-cochaîne homogène } G\text{-invariante} \\ f(g_1,\cdots,g_n) & \longleftrightarrow & g_0.f(g_0^{-1}g_1, g_1^{-1}g_2,\cdots,g_{n-1}^{-1}g_n) \\ F(1,g_1,g_1g_2,\cdots,g_1g_2\cdots g_n) & \longleftrightarrow & F(g_0,\cdots,g_n) \end{array}$$

Par ailleurs, notons que la manière de définir la cohomologie bornée à partir des cochaînes bornées non homogènes nous permet de voir rapidement qu'on a $H_b^0(G,V) = V^G$ et que le premier espace de cohomologie bornée :

$$H_b^1(G,V) \equiv \frac{\{f \in C_b^1(G,V) \mid f(g_1g_2) = g_1.f(g_2) + f(g_1), \forall g_1, g_2 \in G\}}{\{f \in C_b^1(G,V) \mid \exists v \in V, \forall g \in G, f(g) = g.v - v\}}.$$

Observons que si on suppose la semi-norme $\|\cdot\|_V$ est identiquement nulle sur l'espace $V$ il en résulte que pour tout groupe discret $G$ les groupes de cohomologie bornées $H_b^*(G,V)$ coïncident avec les groupes de cohomologie ordinaire $H^*(G,V)$ (cf. [16]). D'autre part, si on suppose que $V$ est un espace de Banach, dans ce cas ; les espaces $H_b^*(G,V)$ coïncident avec les espaces de cohomologie bornée du groupe $G$ au sens de M. Gromov [11].

De même, notons que si on suppose que le groupe $G$ agit trivialement sur l'espace semi-normé $V$ on déduit que $H_b^1(G,V)$=$H^1(G, \mathrm{Ker}(\|\cdot\|_V))$, car ; dans un espace vectoriel réel semi-normé tout sous-groupe borné est nécessairement contenu dans le noyau de dégénérescence de la semi-norme $\mathrm{Ker}(\|\cdot\|_V)$. Ainsi, en particulier, si $V$ est un espace normé on aura $H_b^1(G,V) = 0$.

Pour plus d'informations sur les propriétés du groupe $H_b^1(G,V)$ quand $V$ est un espace de Banach voir l'article de A. Noskov [20].

Pour terminer ces généralités sur la notion de cohomologie bornée nous énoncerons quelques propriétés communes entre la cohomologie bornée à coefficients dans un espace semi-normé et la cohomologie ordinaire.

PROPOSITION 3. ([15]) *Soient $G$ un groupe discret et $V$ un $G$-module borné. Pour tout élément fixé $g_0 \in G$ on note par $i_{g_0} : G \to G$ l'automorphisme intérieur qui lui est associé. Alors l'opérateur $(i_{g_0})_b : H_b^n(G,V) \to H_b^n(G,V)$ est égal à l'identité.*

*Démonstration.* Si $(U_*, d_*, s_*)$ désigne une résolution cohomologique forte relativement injective du $G$-module borné $V$, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n(v) = g_0^{-1}.v$ nous obtenons un morphisme de résolutions cohomologiques forte telle que pour tout élément $g$ de $G$ et tout vecteur $v$ de $V$ on a : $u_n(i_{g_0}(g).v) = u_n(g_0gg_0^{-1}.v) = gg_0^{-1}.v = gu_n(v)$. Ceci montre que les opérateurs $u_n$ sont des $G$-morphismes. Comme les opérateurs $u_n$ sont égaux à l'identité sur les vecteurs $G$-invariants ; l'automorphisme intérieur $i_{g_0}$ induit donc l'identité sur la cohomologie bornée du groupe $G$ à coefficients dans $V$. ∎

COROLLAIRE 1. *Soient $\Gamma$ un groupe discret et $G \subset \Gamma$ sous-groupe normal. Alors, la conjugaison dans le groupe $\Gamma$ induit une action isométrique du groupe quotient $\Gamma/G$ sur les espaces semi-normé $H_b^n(G,V)$.*

Les résultats de la proposition 3 et du corollaire 1 permettent de démontrer le :

Corollaire 2. *Soient* $\Gamma$ *un groupe discret et* $G \subset \Gamma$ *sous-groupe normal. Alors, l'injection canonique* $i : G \to \Gamma$ *induit un opérateur continu* $i_b : H_b^n(\Gamma, V) \to H_b^n(G, V)$ *qui prend ses valeurs dans le sous-espace des vecteurs* $\Gamma/G$*-invariants.*

*Démonstration.* Notons d'abord que l'opérateur $i_b : H_b^n(\Gamma, V) \to H_b^n(G, V)$ est induit par le morphisme composé $\varphi : \mathcal{L}_\Gamma(\mathbb{R}[\Gamma^{n+1}], V) \hookrightarrow \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{n+1}], V) \xrightarrow{i^*} \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[G^{n+1}], V)$ ; où le sous-groupe $G$ agit par conjugaison sur le groupe $\Gamma$.

D'autre part, observons que la restriction de tout n-cocycle $f \in \mathcal{L}_\Gamma(\mathbb{R}[\Gamma^{n+1}], V)$ sur le groupe $G$ définit un n-cocycle $f \circ i$ qui est $\Gamma$-invariant. Ainsi, puisque le groupe $G$ agit trivialement sur l'espace $H_b^n(G, V)$ ; la classe de cohomologie représentée par le n-cocycle $f \circ i$ appartient donc à l'espace des vecteurs $\Gamma/G$-invariants : $[f \circ i] \in H_b^n(G, V)^{\Gamma/G}$. ∎

2.4. Cohomologie bornée des groupes moyennables. Dans ce paragraphe, nous allons introduire la notion de groupes discrets $G$ moyennable par rapport à un $G$-module borné $V$. Ensuite, nous allons étudier leur cohomologie bornée avec coefficients. Tous les résultats que nous établirons dans ce paragraphe seront utiliser ci-dessous dans la section 3 pour calculer l'aboutissement $E_\infty^{*;*}$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre.

Définition 6. Soient $\Pi$ un groupe discret et $V$ un $\Pi$-module borné. On dit que le groupe $\Pi$ est $V$-moyennable s'il existe un opérateur linéaire continu $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}[\Pi], V) \to V$ (une moyenne) tel que :

1. Pour une application constante $f : \Pi \to V$ de valeur $a \in V$ vue comme élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}[\Pi], V)$ on a, $\mu(f) = a$.
2. Pour tous les éléments $\alpha$ de $\Pi$ et $f$ de $\mathcal{L}(\mathbb{R}[\Pi], V)$ on a $\mu(\alpha \bullet f) = \alpha \bullet \mu(f)$ où $\bullet$ désigne l'action définie par (1).

La proposition suivante montre que la cohomologie bornée d'un groupe $V$-moyennables est nulle.

Proposition 4. *Soient* $\Pi$ *un groupe discret et* $V$ *un* $\Pi$*-module borné. Si le groupe* $\Pi$ *est* $V$*-moyennable alors pour tout entier naturel* $n \neq 0$ *on a,* $H_b^n(\Pi, V) = 0$.

*Démonstration.* Soit $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}[\Pi], V) \to V$ une moyenne sur le groupe $\Pi$. Pour tout n-cocycle borné homogène $\Pi$-invaraint $f \in \mathcal{L}_\Pi(\mathbb{R}[\Pi^{n+1}], V)$ et pour tout élément $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \Pi^n$ désignons par

$$f_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)} : \Pi \to V$$

l'application bornée définie par l'expression,

$$f_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}(\alpha) = f(\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in V, \quad \forall \alpha \in \Pi,$$

et dont la moyenne sera notée $h(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) := \mu(f_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)})$.

Pour conclure que la classe de cohomologie $[f] = 0 \in H_b^n(\Pi, V)$ nous allons démontrer que la cochaîne $h \in \mathcal{L}_\Pi(\mathbb{R}[\Pi^n], V)$ et que son cobord $d_{n-1}h = f$.

1) Puisque $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}[\Pi], V) \to V$ est un opérateur borné et le n-cocycle $f$ est borné sur le produit cartésien $\Pi^{n+1}$ ceci entraîne que pour tout élément $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \Pi^n$ on a :

$$\| h(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \|_V = \| \mu(f_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}) \|_V \leq \| \mu \| \,.\, \| f_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)} \| \leq \| \mu \| \,.\, \| f \|_\infty .$$

D'où $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[\Pi^n], V)$.

D'autre part, comme on sait que l'opérateur $\mu$ est $\Pi$-équivariant ; donc pour tout élément $(\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \Pi^{n+1}$ on aura :

$$\begin{aligned}(\alpha \bullet h)(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) &= \alpha.\mu(\beta \to f(\beta, \alpha^{-1}\alpha_1, \cdots, \alpha^{-1}\alpha_n)) \\ &= \alpha.\mu(\beta \to \alpha^{-1}.f(\alpha\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)) \\ &= \alpha.\mu(\alpha^{-1} \bullet f_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}) = h(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).\end{aligned}$$

D'où $h \in \mathcal{L}_\Pi(\mathbb{R}[\Pi^n], V)$.

2) Le cobord de la cochaîne bornée homogène $h$ se calcule en utilisant l'expression de la différentielle $d_{n-1}$ définie par l'expression (6) :

$$\begin{aligned}d_{n-1}h(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) &= \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i h(\alpha_0, \cdots, \widehat{\alpha}_i, \cdots, \alpha_n) \\ &= \mu(\beta \to \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i f(\beta, \alpha_0, \cdots, \widehat{\alpha}_i, \cdots, \alpha_n)) \\ &= \mu(\beta \to -df(\beta, \alpha_0, \cdots, \alpha_n) + f(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)) \\ &= f(\alpha_0, \cdots, \alpha_n).\end{aligned}$$

D'où $f = d_{n-1}h$ et $[f] = 0 \in H_b^n(\Pi, V)$. ∎

Lemme 3. *Soient* $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$ *une extension de groupes discrets et* $V$ *un* $\Gamma$*-module borné. Alors pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$ *le groupe* $\Pi$ *est* $\mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{n+1}], V)$*-moyennable. La structure de* $\Pi$*-module borné de l'espace vectoriel semi-normé* $\mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{n+1}], V)$ *est définie par l'expression* (3).

*Démonstration.* Observons que puisque, d'après le lemme 1, on sait que le $\Pi$-module borné $\mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{n+1}], V)$ est canoniquement isomorphe au $\Pi$-module borné $\mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma], \mathcal{L}(\mathbb{R}[\Gamma^n], V))$ ; cette démonstration se réduit donc au cas $n = 0$.

Soit $f : \Pi \to \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma], V)$ une application bornée. Pour tout élément $\gamma \in \Gamma$ on pose :

$$\mu(f)(\gamma) = f(\sigma(\gamma))(\gamma) \in V.$$

Puisque $f$ est bornée sur le groupe $\Pi$ ceci entraîne que $\mu(f) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[\Gamma], V)$. De même, puisqu'on sait que l'opérateur $f(\sigma(\gamma)) \in \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma], V)$ on déduit que pour tout élément $g \in G$ on a l'expression,

$$\begin{aligned} g \bullet \mu(f)(\gamma) &= g.\mu(f)(g^{-1}\gamma) = g.f(\sigma(g^{-1}\gamma))(g^{-1}\gamma) \\ &= g.f(\sigma(\gamma))(g^{-1}\gamma) = \mu(f)(\gamma), \end{aligned}$$

qui signifie que l'expression de $\mu$ réalise un opérateur linéaire continu,

$$\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}[\Pi], \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma], V)) \to \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma], V).$$

Notons aussi que si $f : \Pi \to \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma], V)$ est constante de valeur $a \in \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma], V)$ on aura,

$$\mu(f)(\gamma) = f(\sigma(\gamma))(\gamma) = a(\gamma) \Longrightarrow \mu(f) = a, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Autrement dit, l'opérateur $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}[\Pi], \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma], V)) \to \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma], V)$ vérifie la propriété 1) de la définition 6. Et, donc ; pour conclure que $\mu$ définit une moyenne au sens de la définition 6 il nous reste qu'à vérifier que $\mu$ est $\Pi$-invariant.

En effet, d'après l'action du groupe $\Pi$ définie par l'expression (3), si on considère une section ensembliste $s : \Pi \to \Gamma$ pour $\sigma$ on peut alors écrire pour tous $\alpha \in \Pi$ et $\gamma \in \Gamma$ :

$$\begin{aligned} \alpha \star \mu(f)(\gamma) &= s(\alpha).f(\sigma(s(\alpha)^{-1}\gamma))(s(\alpha)^{-1}\gamma) \\ &= s(\alpha).f(\alpha^{-1}\sigma(\gamma))(s(\alpha)^{-1}\gamma) \\ &= \mu(\alpha \star f)(\gamma). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mu$ est $\Pi$-invariant et il s'agit donc d'une moyenne du groupe $\Pi$ à valeur dans le $\Pi$-module borné $\mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{n+1}], V)$. ∎

La proposition principale de cette section est maintenant un corollaire immédiat de la proposition 5 et du lemme 3.

Proposition principale. Soit $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$ une extension de groupes discrets. Alors, pour tous les entiers $p \geq 1$ et $q \geq 0$ on a :

$$H_b^p(\Pi, \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], V)) := H^p(C_b^*(\Pi, \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], V))) = 0.$$

Dans la section 4 (cf. paragraphe 4.1), cette proposition jouera un rôle clef dans la convergence de la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée avec coefficients. En effet, c'est grâce à elle qu'on pourra calculer l'aboutissement $E_\infty^{*,*}$ de la suite spectrale associée au complexe différentiel double de $\Gamma$-modules bornés $K^{p,q} = C_b^p(\Pi, \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], V))$ constitués par les $p$-cochaînes définies sur le groupe $\Pi$ bornées et non homogènes.

## 3. Suites spectrales dans la catégorie des espaces vectoriels semi-normés

Dans cette section, nous allons démontrer le théorème principal A par lequel à un complexes différentielles d'espaces vectoriels réels semi-normés filtrés nous nous proposons d'associer une suite spectrale qui converge vers l'homologie du complexe différentiel donné.

3.1. Cas des complexes différentiels filtrés. Soit $(K^*, d_*)$ un complexe différentiel d'espaces vectoriels semi-normés de degré $r = +1$. On dit que $(K^*, d_*)$ possède une filtration décroissante positive si pour tout entier $n \geq 0$, il existe une famille de sous-espaces vectoriels $F^pK^n \subset F^{p-1}K^n$ tels que $d_n(F^pK^n) \subset F^pK^{n+1}$ et que pour tout entier $p$ négatif $F^pK^* = K^*$. Les termes $F^pK^n$ seront munis par la topologie induite. De même, on dira que la filtration décroissante positive $F^*K^*$ est régulière quand elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall q \geq 0, \quad \exists n(q) \geq 0, \quad \forall p > n(q) \quad \Longrightarrow F^pK^q = 0. \tag{7}$$

À chaque complexe différentiel filtré on associe les sous-espaces vectoriels topologiques suivants :

- $Z_r^{p,q} = \{x \in F^pK^{p+q} \mid d_{p+q}x \in F^{p+r}K^{p+q+1}\}$ ;
- $B_r^{p,q} = \{x \in F^pK^{p+q} \mid \exists y \in F^{p-r}K^{p+q-1}, d_{p+q-1}y = x\}$ ;

– et $E_r^{p,q} = \dfrac{Z_r^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}}$ que l'on suppose munit de la structure topologique quotient. Il s'agit donc d'un espace vectoriel semi-normé.

Notons que par construction des sous-espaces $Z_r^{p,q}$ et $B_r^{p,q}$, on vérifie facilement qu'on a les deux types d'inclusions :

$$d_{p+q}(Z_r^{p,q}) \subset Z_r^{p+r,q-r+1} \text{ et } d_{p+q}(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}) \subset Z_{r-1}^{p+1+r,q-r} + B_{r-1}^{p+r,q-r+1}$$

qui montrent qu'en passant aux espaces quotient la différentielle $d_n : K^n \to K^{n+1}$ induit une famille d'opérateurs bornés $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ de norme $\| d_r^{p,q} \| \leq \| d_{p+q} \|$ tels que $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$. Ceci signifie donc que pour tout entier $r \geq 0$ fixé le couple $(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$ est un complexe différentiel d'espaces vectoriels semi-normés bi-gradués.

Avec les notations ci-dessus nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal A que nous démontrerons ci-dessous dans une série de paragraphes.

Théorème principal A. Soit $(K^*, d_*)$ un complexe différentiel d'espaces vectoriels semi-normés que l'on suppose muni d'une filtration décroissante régulière $F^pK^n \subset F^{p-1}K^n$ qui induit à son tour une filtration décroissante sur l'espace semi-normé $H^n(K^*, d_*)$ en posant :

$$F^pH^{p+q}(K^*, d_*) := \mathrm{Im}(j^p : H^{p+q}(F^pK^*, d_*) \to H^{p+q}(K^*, d_*).$$

Alors, il existe une suite spectrale $(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$ qui possède les propriétés suivantes :

1. Pour chaque entier naturel $r \geq 0$ il existe une bijection canonique continue,
$$E_{r+1}^{p,q} \stackrel{\sim}{\to} H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r).$$
2. Il existe une bijection canonique continue définie sur $E_1^{p,q}$ dans l'espace d'homologie relative $H^{p+q}(F^pK^*/(F^{p+1}K^*))$ qui envoie la différentielle $d_1$ sur l'opérateur de bord associé au triplet $(F^pK^*, F^{p+1}K^*, F^{p+2}K^*)$.
3. Il existe une bijection canonique continue qui envoie la somme directe $E_\infty^n = \bigoplus_{p=0}^{p=n} E_\infty^{p,n-p}$ sur $\bigoplus_{p=0}^{p=n} \frac{F^pH^n(K^*,d_*)}{F^{p+1}H^n(K^*,d_*)} \simeq H^{p+q}(K^*, d_*)$. Autrement dit, la suite spectrale $(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$ convergent vers l'espace de cohomologie $H^n(K^*, d_*)$ :
$$E_1^{p,q} \stackrel{\sim}{\to} H^{p+q}\left(\frac{F^pK^*}{F^{p+1}K^*}\right) \Longrightarrow H^{p+q}(K^*, d_*).$$

3.2. Homologie du complexe différentiel $(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$. Rappelons que puisque le noyau et l'image de la différentielle $d_r^{*,*}$ sont donnés respectivement par (cf. [10], page 77) :

$$\mathrm{Ker}(d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_{r+1}^{p+r,q-r+1}) = \frac{Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}}$$

et

$$\mathrm{Im}(d_r^{p-r,q+r-1} : E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q}) = \frac{B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}}$$

il en résulte que les espaces d'homologie du complexe $(E_r^{*,*}, d_r)$ sont donnés par le quotient :

$$H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r) := \frac{\mathrm{Ker}(d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_{r+1}^{p+r,q-r+1})}{\mathrm{Im}(d_r^{p-r,q+r-1} : E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q})} = \frac{\dfrac{Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}}}{\dfrac{B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}}}.$$

Ainsi, comme le troisième théorème d'isomorphisme est valable pour les groupes topologiques (cf. [9] chapitre 12, page 56) on déduit que la bijection canonique (simplification) :

$$\varphi_{r+1}^{p,q} : \frac{Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}} \longrightarrow H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$$

est un homéomorphisme pour la topologie quotient.

Observons aussi que si on considère la surjection canonique suivante

$$Z_{r+1}^{p,q} \longrightarrow \frac{Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}$$

dont le noyau est égal à $Z_{r+1}^{p,q} \bigcap (B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})$, en utilisant le deuxième théorème d'isomorphisme appliqué aux groupes topologiques ; on déduit alors que l'application de factorisation définit une bijection qui est en général seulement continue (cf. [9] exercice 2 du chapitre 12, page 58),

$$\Psi_{r+1}^{p,q} : \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{Z_{r+1}^{p,q} \bigcap (B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})} \longrightarrow \frac{Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}.$$

D'autre part, puisque les espaces $B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1} = Z_{r-1}^{p+1,q-1}$, $Z_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r-1}^{p+1,q-1} = Z_r^{p,q}$ et $B_r^{p,q} \subseteq Z_{r+1}^{p,q}$ on déduit que l'espace quotient

$$\frac{Z_{r+1}^{p,q}}{Z_{r+1}^{p,q} \cap (B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})} = E_{r+1}^{p,q}$$

et que l'application composée,

$$e_{r+1}^{p,q} = \varphi_{r+1}^{p,q} \circ \Psi_{r+1}^{p,q} : E_{r+1}^{p,q} \longrightarrow H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r^{*,*}) \tag{8}$$

est une bijection continue. Ceci donc démontre la première affirmation du théorème principal A :

Proposition 5. *Pour tout entier $r \geq 0$ il existe une bijection linéaire canonique continue $e_r^{p,q} : E_{r+1}^{p,q} \to H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r^{*,*})$.*

3.3. Identification du complexe différentielle $(E_1^{*,*}, d_1^{*,*})$. Puisque par définition des sous-espaces $Z_r^{p,q}$ et $B_r^{p,q}$ on a les égalités,

$$Z_0^{p,q} = F^pK^{p+q}, \quad Z_{-1}^{p+1,q-1} = F^{p+1}K^{p+q} \quad \text{et que} \quad B_{-1}^{p,q} = F^{p+1}K^{p+q}$$

il en résulte donc que le terme

$$E_0^{p,q} = \frac{Z_0^{p,q}}{Z_{-1}^{p+1,q-1} + B_{-1}^{p,q}} = \frac{F^pK^{p+q}}{F^{p+1}K^{p+q}}.$$

Ainsi grâce à cette égalité, en passant au quotient ; on voit aisément que la différentielle $d_*$ du complexe filtré $K_*$ induit la différentielle $d_0^{*,*}$ du terme $E_0^{*,*}$. Par conséquent, si on passe aux groupes d'homologie on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
e_1^{p,q} & : & E_1^{p,q} & \longrightarrow & H^{p+q}\left(\dfrac{F^pK^*}{F^{p+1}K^*}\right) = H^{p+q}(E_0^{p,*}, d_0) \\
& & d_1^{p,q}\Big\downarrow & & \partial^{p+q}\Big\downarrow \\
e_1^{p+1,q} & : & E_1^{p+1,q} & \longrightarrow & H^{p+q+1}\left(\dfrac{F^{p+1}K^*}{F^{p+2}K^*}\right) = H^{p+q+1}(E_0^{p+1,*}, d_0)
\end{array}$$

dans lequel le morphisme $\partial^*$ désigne l'opérateur de bord associé à la suite exacte courte de complexes différentiels [10],

$$0 \to \frac{F^{p+1}K^*}{F^{p+2}K^*} \to \frac{F^pK^*}{F^{p+2}K^*} \to \frac{F^pK^*}{F^{p+1}K^*} \to 0.$$

Tandis que les applications $e_1^{p,q}$ et $e_1^{p+1,q}$ désignent les bijections canoniques continues définies ci-dessus par l'expression (8). Ceci démontre bien la seconde affirmation du théorème principal A :

PROPOSITION 6. *La bijection canonique*

$$e_1^{p,q} : E_1^{p,q} \to H^{p+q}\left(\frac{F^pK^*}{F^{p+1}K^*}\right)$$

*envoie la différentielle $d_1^{*,*}$ sur l'opérateur de bord $\partial^*$ associé au triplet de sous-complexes $(F^pK^*, F^{p+1}K^*, F^{p+2}K^*)$.*

3.4. IDENTIFICATION DE L'ABOUTISSEMENT $E_\infty^{p,q}$. Pour tout couple d'entiers $(p,q)$ et pour tout complexe différentiel d'espaces vectoriels semi-normés $(K^*, d_*)$ muni d'une filtration décroissante on associe les sous-espaces vectoriels topologqiues suivants :

- $Z_\infty^{p,q} = \{x \in F^pK^{p+q}/d_{p+q}x = 0\}$ ;
- $B_\infty^{p,q} = \{x \in F^pK^{p+q}/\exists y \in K^{p+q-1}, d_{p+q-1}y = x\}$ ;
- et, $E_\infty^{p,q} = Z_\infty^{p,q}/(B_\infty^{p,q} + Z_\infty^{p+1,q-1})$ que l'on munit de la structure topologique quotient.

Notons que si pour tout entier $p \geq 0$ on désigne par $j^p : H^n(F^pK^*, d_*) \to H^n(K^*, d_*)$ le morphisme canonique qui est induit par l'inclusion $F^pK^* \subset K^*$ alors, en posant pour tout entier $n \geq 0$ ;

$$F^pH^n(K^*, d_*) = \operatorname{Im}(j^p : H^n(F^pK^*, d_*) \to H^n(K^*, d_*)) \tag{9}$$

on obtient une filtration décroissante de l'espace semi-normé $H^n(K^*, d_*)$. Le terme général de cette filtration sera noté $F^pH^n(K^*, d_*) \subseteq H^n(K^*, d_*)$ et sera muni par la topologie induite.

Le fait que le sous-espace $Z_\infty^{p,q}$ est formé que par les cocycles de degré total $p+q=n$ de filtration $p$ cela implique que la surjective canonique,

$$Z_\infty^{p,q} \to \frac{F^pH^{p+q}(K^*, d_*)}{F^{p+1}H^{p+q}(K^*, d_*)},$$

qui envoie un cocycle sur sa classe de cohomologie modulo le sous-espace $F^{p+1}H^{p+q}(K^*, d_*)$ est bien définie. Ainsi, puisque le noyau de cette application est égal au sous-espace vectoriel $B_\infty^{p,q} + Z_\infty^{p+1,q-1}$ (preuve algébrique) ceci permet de définir une bijection linéaire canonique continue :

$$e_\infty^{p,q} : E_\infty^{p,q} \longrightarrow Gr_{p,q}(H^n(K^*, d_*)) := \frac{F^pH^{p+q}(K^*, d_*)}{F^{p+1}H^{p+q}(K^*, d_*)}. \tag{10}$$

Ainsi, par ce qui précède nous avons démontré la troisième affirmation du théorème principal A :

PROPOSITION 7. *Il existe une bijection canonique continue qui envoie la somme directe* $E_\infty^n = \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$ *sur* $\bigoplus_{p+q=n} Gr_{p,q}(H^n(K^*, d_*)) \simeq H^n(K^*, d_*)$.

3.5. CAS DES COMPLEXES DIFFÉRENTIELS DOUBLES. Soit $(K^{*,*}, d_v, d_h)$ un complexe différentiel double d'espaces vectoriels semi-normés définis dans le premier quadrant. C'est-à-dire, pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ le terme $K^{p,q}$ est un espace vectoriel semi-normé avec $K^{p,q} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$, et que $d_v : K^{p,q} \to K^{p+1,q}$ et $d_h : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$ sont deux différentielles continues qui vérifient la relation de commutation, $d_v d_h = d_h d_v$.

On désignera par $(\mathrm{Tot}(K^{*,*}), d_*)$ le complexe différentiel total associé au complexe différentiel double $(K^{*,*}, d_v, d_h)$ dont les composantes homogènes sont définies par :

$$\mathrm{Tot}(K^{*,*})^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}, \quad \text{et où} \quad d_* = d_h + (-1)^p d_v.$$

Grâce à ces notations, si maintenant on munit le complexe différentiel $(\mathrm{Tot}(K^{*,*}), d_*)$ par les deux filtrations décroissantes naturelles horizontale et verticle,

$$F_v^p \,\mathrm{Tot}(K^{*,*}) = \sum_{i \geq p} K^{i,j} \qquad \text{et} \qquad F_h^q \,\mathrm{Tot}(K^{*,*}) = \sum_{j \geq q} K^{i,j},$$

le résultat du théorème principal A permet de déduire qu'on aura deux suites spectrales $E_{r,h}^{*,*}$ et $E_{r,v}^{*,*}$ qui convergent simultanément vers l'espace de cohomologie $H^*(\mathrm{Tot}(K^{*,*}), d_*)$.

## 4. ÉTUDE DE LA SUITE SPECTRALE DE HOCHSCHILD-SERRE

Dans cette section, étant donnée une extension $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$ de groupes discrets ; nous allons lui associer une suite spectrale $(E_r^{p,q}, d_r)$ de Hochschild-Serre en cohomologie bornée à coefficients dans un $\Gamma$-module borné $V$. La suite spectrale $(E_r^{p,q}, d_r)$ sera dégagée à partir du complexe différentiel double des cochaînes non homogènes bornées sur le groupe $\Pi$,

$$K^{p,q} := C_b^p(\Pi, U^q) \qquad \text{où} \qquad U^q := \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], V).$$

En suite, sans faire aucune hypothèse ni sur la cohomologie bornée du sous-groupe $G \subset \Gamma$ ni sur celle du groupe quotient $\Pi = \Gamma/G$ ; nous allons démontrer que les termes $E_1^{p,q}$ et $E_2^{p,q}$ sont donnés par les expressions explicites décrites dans le :

THÉORÈME PRINCIPAL B. Soient $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$ une extension de groupes discrets et $V$ un $\Gamma$-module borné. Alors il existe une suite spectrale de complexes différentiels semi-normés $(E_r^{p,q}, d_r)$ qui possèdent les propriétés suivantes :

1. Il existe une bijection canonique continue du terme $E_1^{p,q}$ dans l'espace semi-normé $C_b^p(\Pi, H_b^q(G,V))$ des $p$-cochaînes non homogènes bornées sur le groupe $\Pi$ à coefficients dans l'espace semi-normé $H_b^q(G,V)$.
2. Il existe une bijection canonique continue du terme $E_2^{p,q}$ dans $H_b^p(\Pi, H_b^q(G,V))$ espace de cohomologie bornée associé au complexe différentiel $(C_b^*(\Pi, H_b^q(G,V)), d_\Pi)$.
3. La suite spectrale $(E_r^{p,q}, d_r)$ converge vers la cohomologie bornée du groupe $\Gamma$ à coefficients dans le $\Gamma$-module borné $V$ :

$$E_2^{p,q} \xrightarrow{\sim} H_b^p(\Pi, H_b^q(G,V)) \Longrightarrow H_b^{p+q}(\Gamma, V).$$

Notons que l'énoncé du théorème principal B améliore le théorème analogue de [21] et de [19] qui ont identifié le terme $E_2^{p,q}$ uniquement dans le cas où les espaces de cohomologie bornée $H_b^q(G,V)$ sont des espaces de Hausdorff.

COROLLAIRE 3. *Si pour tout entier* $n > 0$, $H_b^n(G,\mathbb{R}) = 0$, *alors* $\sigma : \Gamma \to \Pi \to 1$ *induit une isométrie* $\sigma_b : H_b^*(\Pi,\mathbb{R}) \to H_b^*(\Gamma,\mathbb{R})$.

*Démonstration.* Puisque pour tout entier $n > 0$ on a $H_b^n(G,\mathbb{R}) = 0$ ceci entraîne que $E_2^{m,n} = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. D'où $E_\infty^n = E_\infty^{n,0} \simeq E_2^{n,0} = H_b^n(\Pi,\mathbb{R})$. ∎

COROLLAIRE 4. *En cohomologie bornée à coefficients dans un* $\Gamma$*-module borné* $V$ *on a la suite exacte suivante :*

$$0 \to H_b^1(\Pi, V^G) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^1(\Gamma, V) \xrightarrow{i_b} H_b^1(G,V)^\Pi \xrightarrow{d_2} H_b^2(\Pi, V^G) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^2(\Gamma, V).$$

*En particulier, quand* $V$ *est un espace de Banach sur lequel le groupe* $\Gamma$ *agit trivialement on a :*

$$0 \to H_b^2(\Pi, V) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^2(\Gamma, V) \xrightarrow{i_b} H_b(G,V)^\Pi \xrightarrow{d_3} H_b^3(\Pi, V) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^3(\Gamma, V).$$

La preuve du corollaire 4 repose sur le lemme classique suivant.

Lemme 4. *Soit* $(K^*, d)$ *un complexe différentiel munit d'une filtration décroissante positive* $F^*K^*$*. Alors on a les deux propositions suivantes :*

1. *Pour tout triplet entiers naturels positifs* $p$, $q$ *et* $r$ *tels que* $\max(p, q+1) < r$ *on a :* $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q}$.
2. *Pour tout entier naturel* $n \geq 1$ *on a la suite exacte :*

$$0 \to E_\infty^{0,n-1} \to E_n^{0,n-1} \xrightarrow{d_n} E_n^{n,0} \to E_\infty^{n,0} \to 0.$$

*Démonstration.* 1) Puisque pour tout entier naturel $p < 0$ ou $q < 0$ on a $E_0^{p,q} = 0$ ceci implique que les deux termes $E_r^{p-r,q+r-1}$ et $E_r^{p+r,q-r+1}$ sont identiquement nuls dès que l'entier naturel $r > \max(p, q+1)$. Autrement dit, sous cette dernière condition le terme $E_r^{p,q}$ est formé que par les cocycles de la différentiel $d_r$ et ne contient aucun cobord non nul.
2) D'après la proposition 1) pour tout entier naturel $n > 0$ on a les isomorphismes suivants : $E_\infty^{0,n-1} = \cdots = E_{n+1}^{0,n-1}$ et $E_\infty^{n,0} = \cdots = E_{n+1}^{n,0}$. Donc pour établir la suite exacte énoncée il suffit de remarquer qu'on a par définition $E_{n+1}^{0,n-1} = \mathrm{Ker}(d_n : E_n^{0,n-1} \to E_n^{n,0})$ et que

$$E_{n+1}^{n,0} = \frac{E_n^{n,0}}{\mathrm{Im}(d_n : E_n^{0,n-1} \to E_n^{n,0})}.$$

∎

*Démonstration du corollaire* 3. La première suite exacte du corollaire s'obtient en composant les deux suites exactes suivantes : $0 \to E_\infty^{1,0} \simeq E_2^{1,0} \to E_\infty^1 \to E_\infty^{0,1} \to 0$, $0 \to E_\infty^{0,1} \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to E_\infty^{2,0} \to 0$, et puis, on compose avec l'injection canonique $0 \to E_\infty^{2,0} \to E_\infty^2$.

Si on suppose que le groupe $\Gamma$ agit trivialement sur l'espace de Banach $V$ ceci entraîne alors que le premier groupe de cohomologie bornée à coefficients dans $V$ est nul pour les trois groupes discrets $G$, $\Pi$ et $\Gamma$. Ainsi, il en résulte qu'on a les isomorphismes : $E_\infty^{2,0} = E_2^{2,0}$, $E_3^{0,2} = E_2^{0,2}$ et $E_3^{3,0} = E_2^{3,0}$.

Finalement, pour établir la deuxième suite exacte du corollaire il suffit qu'on compose les suites exactes $0 \to E_\infty^{2,0} \to E_\infty^2 \to E_\infty^{0,2} \to 0$ et $0 \to E_\infty^{0,2} \to E_3^{0,2} \xrightarrow{d_3} E_3^{3,0} \to E_\infty^{3,0} \to 0$ avec de l'injection canonique $0 \to E_\infty^{3,0} \to E_\infty^3$. ∎

4.1. Convergence de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Ce paragraphe est consacré à la démonstration du troisième proposition du théorème principal B qui affirme que la suite spectrale de Hochschid-Serre converge vers la cohomologie bornée de l'extension $\Gamma$ du groupe $G$ par le groupe $\Pi$.

Soit $\Gamma$ une extension du groupe $G$ par le groupe $\Pi$ ; et soit $V$ un $\Gamma$-module borné. Considérons le complexe double des cochaînes non homogènes bornées,

$$K^{p,q} = C_b^p(\Pi, U^q) \quad \text{où} \quad U^q = \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], V)$$

que l'on munit des deux différentielles horizontale et verticale définies respectivement pour toute cochaîne de type $(p,q)$, $f \in K^{p,q}$, comme suit :
i) $d_\Pi : K^{p,q} \to K^{p+1,q}$ désigne la différentielle ordinaire des p-cochaînes non homogènes bornées sur $\Pi$ à valeurs dans le $\Gamma$-module borné $U^q = \mathcal{L}_G(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], V)$.
ii) $d_U : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$ désigne la différentielle définie de la manière suivante. Pour tout élément $\alpha \in \Pi^p$ on a : $(d_U f)(\alpha) = d_q(f(\alpha))$, où $d_q$ est la différentielle ordinaire de la q-cochaîne homogène bornée $f(\alpha) \in U^q$ (cf. expression (6)).

Rappelons sue selon les discutions du paragraphe 3.5, puisque les deux différentielles $d_\Pi$ et $d_U$ vérifient la relation de commutation, $d_\Pi \circ d_U = d_U \circ d_\Pi$, on pourra maintenant associer au complexe double $(K^{*,*}, d_\Pi, d_U)$ deux suites spectrales $E_{r,h}^{*,*}$ et $E_{r,v}^{*,*}$ qui convergent tous les deux vers la cohomologie du complexe différentiel total,

$$(\mathrm{Tot}(K^{*,*}), d_* = d_\Pi + (-1)^p d_U).$$

Proposition 8. *La suite spectrale $E_{r,h}^{*,*}$ dégénère au premier terme. C'est-à-dire on a*

$$E_{r,h}^{p,q} = 0, \quad \forall p \geq 1, \forall q \geq 0.$$

*En conséquence, l'aboutissement $E_{\infty,h}^n = H_b^n(\Gamma, V)$ et que la suite spectrale $E_{r,v}^{p,q}$ converge vers $H^{p+q}(\Gamma, V)$.*

*Démonstration.* 1) En effet, puisque la seconde filtration $F_h^q(\mathrm{Tot}K^{*,*}) = \sum_{j \geq q} K^{i,j}$ ; la proposition 6 implique que le premier terme,

$$E_{1,h}^{p,q} = H^{p+q}\left(\frac{F_h^q(\mathrm{Tot}K^{*,*})}{F_h^{q+1}(\mathrm{Tot}K^{*,*})}, d_\Pi\right) = H^{p+q}(C_b^*(\Pi, U^q, d_\Pi) = H_b^p(\Pi, U^q).$$

Ainsi, comme d'après le lemme 3 on sait que le groupe $\Pi$ est $U^q$-moyennable ; la proposition 4 implique donc que le terme $E_{1,h}^{p,q} = 0$ pour tous les entiers $p \geq 1$ et $q \geq 0$.
2) Maintenant, grâce à la dégénérescence de la suite spectrale $E_{r,h}^{p,q}$ nous allons démontrer que la suite spectrale de Hochschild-Serre converge en calculant son aboutissement $E_\infty^{*,*}$.

En effet, puisque on sait que pour tout les entiers $p > 1$ et $q \geq 0$ l'espace $E_{1,h}^{p,q} = 0$ on aura donc, $E_{2,h}^{p,q} = 0, \forall p > 1, q \geq 0$. D'autre part, comme pour tous les entiers $q \geq 0$ on sait que l'espace,

$$E_{1,h}^{0,q} = H_b^0(\Pi, U^q) = (U^q)^\Pi = (\mathcal{L}_G \mathbb{R}([\Gamma^{q+1}], V))^\Pi,$$

est isomorphe avec l'espace $\mathcal{L}_\Gamma(\mathbb{R}[\Gamma^{q+1}], V)$ des $q$-cochaînes homogènes bornées $\Gamma$-invariantes ceci implique que le terme,

$$E_{2,h}^{0,q} = H^{0,q}(E_{1,h}^{*,*}, d_1) = H_b^q(\Gamma, V), \forall q \geq 0.$$

Ainsi, de ce qui précède ; on conclut que le terme $E_{\infty,h}^{n} = E_{\infty,h}^{0,n} = E_{2,h}^{0,n} = H_b^n(\Gamma, V)$, et que par conséquent les deux suites spectrales $E_{r,h}^{p,q}$ et $E_{r,v}^{p,q}$ convergent vers l'espace de cohomologie bornée $H_b^{p+q}(\Gamma, V)$. ∎

4.2. Calcul du terme $(E_{1,v}^{p,q}, d_1^{*,*})$. Dans ce paragraphe, nous nous proposons de démontrer la première proposition du théorème principal B dont le but est d'identifier le premier terme $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée.

Rappelons que dans la section 3.3, nous avons vu que le terme $E_{0,v}^{p,*}$ associé à la filtration décroissante $F_v^p(\mathrm{Tot}K^{*,*})$ est égal au complexe différentiel quotient $\dfrac{F_v^p(\mathrm{Tot}K^{*,*})}{F_v^{p+1}(\mathrm{Tot}K^{*,*})} = E_{0,v}^{p,*}$. Ainsi, en utilisant le fait que la filtration verticale $F_v^p(\mathrm{Tot}(K^{*,*})) = \sum_{i \geq p} K^{i,j}$ on déduit immédiatement que le complexe différentiel,

$$(E_{0,v}^{p,*}, d_0) = (C_b^p(\Pi, U^*), (-1)^p d_U).$$

Notons que d'après l'expression de la différentielle $(-1)^p d_U$ du complexe $C_b^p(\Pi, U^*)$ on voit que les espaces des cocycles et des cobords sont donnés respectivement par,

$$Z^q(E_{0,v}^{p,*}, d_0^*) = C_b^p(\Pi, Z^q(U^*)) \quad \text{et} \quad B^q(E_{0,v}^{p,*}, d_0^*) = C_b^p(\Pi, B^q(U^*)).$$

Par conséquent, la cohomologie du complexe différentiel $(E_{0,v}^{p,*}, d_0) = (C_b^p(\Pi, U^*), (-1)^p d_U)$ est égale à l'espace quotient,

$$H^{p,q}(E_{0,v}^{*,*}, d_0) := \frac{Z^q(E_{0,v}^{p,*}, d_0^*)}{B^q(E_{0,v}^{p,*}, d_0^*)} = \frac{C_b^p(\Pi, Z^q(U^*))}{C_b^p(\Pi, B^q(U^*))}.$$

Dans le reste de ce paragraphe nous allons munir l'espace vectoriel quotient $H^{p,q}(E_{0,v}^{*,*}, d_0)$ par la structure topologique associée à la semi-norme naturelle $|||\cdot|||_\infty$ définie de la manière suivante :

Pour tout p-cocycle borné non homogène $f : \Pi^p \to Z^q(U^*)$ qui représente la classe de cohomologie $x = [f] \in H^{p,q}(E_{0,v}^{*,*}, d_0)$ on pose :

$$|||\, x \,|||_\infty = \inf\{\|\, g \,\|_\infty \mid g \in C_b^p(\Pi, Z^q(U^*)) \ \text{ avec } \ f - g \in C_b^p(\Pi, B^q(U^*))\}.$$

Observons que le $p$-cocycle borné non homogène $f : \Pi^p \to Z^q(U^*)$ qui représente une classe de cohomologie $x = [f] \in H^{p,q}(E_{0,v}^{*,*}, d_0)$ permet de construire une nouvelle $p$-cochaîne non homogène bornée $f^\bullet \in C_b^p(\Pi, H_b^q(G, V))$ définie de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccc} f^\bullet : & \Pi^p & \to & H_b^q(G, V) := \dfrac{Z^q(U^*)}{B^q(U^*)} \\ & \alpha & \to & f^\bullet(\alpha) := [f(\alpha)]. \end{array}$$

Sur l'espace vectoriel $C_b^p(\Pi, H_b^q(G, V))$ des $p$-cochaînes non homogènes bornées sur le groupe $\Pi$ à valeurs dans l'espace vectoriel semi-normé $H_b^q(G, V)$ on définit la topologie associée à la semi-norme naturelle suivante :

$$\|\, f^\bullet \,\|_\bullet = \sup\{\|\, [f(\alpha)] \,\|_\infty \mid \forall \alpha \in \Pi^p\}$$

où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la semi-norme standard définie sur l'espace quotient $H_b^q(G, V) = Z^q(U^*)/B^q(U^*)$.

Proposition 9. *Relativement aux semi-normes $|||\cdot|||_\infty$ et $\|\cdot\|_\bullet$ l'application linéaire*

$$\begin{array}{rcccc} \pi_{p,q} : & H^{p,q}(E_{0,v}^{*,*}, d_0) = & \dfrac{C_b^p(\Pi, Z^q(U^*))}{C_b^p(\Pi, B^q(U^*))} & \to & C_b^p(\Pi, H_b^q(G, V)) \\ & & [f] & \to & f^\bullet \end{array}$$

*est un homéomorphisme.*

*Démonstration.* 1) $\pi_{p,q}$ est continue : En effet, si on considère un $p$-cocycle borné non homogène $f \in C_b^p(\Pi, Z^q(U^*))$ on aura pour tout $\alpha \in \Pi^p$ une classe de cohomologie $[f(\alpha)] \in H_b^q(U^*) = H_b^q(G, V)$ dont la semi-norme,

$$\begin{aligned}\| [f(\alpha)] \|_\infty &= \inf\{\| z \|_\infty /z \in [f(\alpha)]\} \leq \| f(\alpha) \|_\infty \\ &\leq \| f \|_\infty = \sup\{\| f(\alpha) \|_\infty /\alpha \in \Pi^p\}.\end{aligned}$$

Donc, si on passe à la borne supérieure dans l'inégalité $\| [f(\alpha)] \|_\infty \leq \| f \|_\infty$ sur tous les éléments $\alpha \in \Pi^p$ on obtient, $\| f^\bullet \|_\bullet \leq \| f \|_\infty$ . Puisque pour tout $p$-cocycle borné non homogène $g \in C_b^p(\Pi, Z^q(U^*))$ tel que $f - g \in C_b^p(\Pi, B^q(U^*))$ on sait que la classe de cohomologie,

$$f^\bullet(\alpha) = [f(\alpha)] = [g(\alpha)] = g^\bullet(\alpha),$$

on déduit que l'inégalité $\| f^\bullet \|_\bullet \leq \| f \|_\infty$ peut s'écrire en effet sous la forme,

$$\| f^\bullet \|_\bullet \leq \| g \|_\infty, \quad \forall g \in C_b^p(\Pi, Z^q(U^*)) \quad \text{tel que} \quad f - g \in C_b^p(\Pi, B^q(U^*)).$$

Ainsi, si on remarque que $f^\bullet = \pi_{p,q}([f]))$ alors en passant à la borne inférieure dans la dernière inégalité tout en faisant varier les $p$-cocycles bornés non homogènes $g \in C_b^p(\Pi, Z^q(U^*))$ tel que $f - g \in C_b^p(\Pi, B^q(U^*))$ on obtient l'inégalité suivante,

$$\| \pi_{p,q}([f])) \|_\bullet = \| f^\bullet \|_\bullet \leq \inf\{\| g \|_\infty /f - g \in C_b^p(\Pi, B^q(U^*))\} = ||| [f] |||_\infty,$$

qui prouve que l'application linéaire $\pi_{p,q} : H^{p,q}(E_{0,v}^{*,*}, d_0) \to H_b^p(\Pi, H_b^q(G, V))$ est continue.

2) $\pi_{p,q}$ est injective : En effet, si pour un certain $p$-cocycle $f : \Pi^p \to Z^q(U^*)$ borné non homogène on a, $\pi_{p,q}([f]) = f^\bullet = 0$, il en résulte que pour tout $\alpha \in \Pi^p$ on a $[f(\alpha)] = 0 \in H_b^q(G, V)$. Ceci implique donc que le $p$-cocycle $f : \Pi^p \to Z^q(U^*)$ prend ses valeurs dans le sous-espace des cobords $B^q(U^*) \subseteq Z^q(U^*)$. D'où, $[f] = 0 \in \dfrac{C_b^p(\Pi, Z^q(U^*))}{C_b^p(\Pi, B^q(U^*))}$.

3) $\pi_{p,q}$ est surjective : Étant donné un réel $\varepsilon > 0$ une p-cochaîne $y : \Pi^p \to H_b^q(G, V)$ bornée non homogène élément de l'espace $(C_b^p(\Pi, H_b^q(G, V)), \| \cdot \|_\bullet)$ ; on se propose de montrer qu'il existe une $p$-cochaîne bornée non homogène $f : \Pi^p \to Z^q(U^*)$ telle que $\pi_{p,q}([f]) = f^\bullet = y$.

En effet, si pour tout élément $\alpha \in \Pi^p$ on applique la définition standard de la semi-norme $\| \cdot \|_\infty$ définie sur l'espace de cohomologie $H_b^q(G, V) = \dfrac{Z^q(U^*)}{B^q(U^*)}$

on peut alors trouver un $p$-cocycle $f_{\varepsilon,y}(\alpha) \in Z^q(U^*)$ tel que

$$[f_{\varepsilon,y}(\alpha)] = y(\alpha) \in H_b^q(G,V) \quad \text{et que} \quad \| f_{\varepsilon,y}(\alpha) \|_{Z^q(U^*)} < \varepsilon + \| y(\alpha) \|_\infty .$$

Notons que si on considère l'application $f_{\varepsilon,y} : \Pi^p \to Z^q(U^*)$ qui associe à $\alpha \in \Pi^p$ le $q$-cocycle $f_\varepsilon(\alpha)$ on obtient ainsi une $p$-cochaîne bornée élément de l'espace vectoriel $C_b^p(\Pi, Z^q(U^*))$ car pour tous les éléments $\alpha \in \Pi^p$ on a,

$$\begin{aligned} \| f_{\varepsilon,y}(\alpha) \|_{Z^q(U^*)} &< \varepsilon + \| y(\alpha) \|_\infty \leq \varepsilon + \sup\{\| y(\alpha) \|_\infty \, /\forall \alpha \in \Pi^p\} \\ &= \varepsilon + \| y \|_\bullet < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque par définition de la cochaîne bornée $f_{\varepsilon,y}$ on a pour tout $\alpha \in \Pi^p$ :

$$\begin{aligned} \pi_{p,q}([f_{\varepsilon,y}])(\alpha) = f^\bullet_{\varepsilon,y}(\alpha) = [f_{\varepsilon,y}(\alpha)] = y(\alpha) \implies \\ \pi_{p,q}([f_{\varepsilon,y}]) = f^\bullet_{\varepsilon,y} = y \in C_b^p(\Pi, H_b^q(G,V)) \end{aligned}$$

on conclut donc que l'application linéaire $\pi_{p,q}$ est surjective.
4) Un inverse linéaire continu de l'application $\pi_{p,q}$ : Rappelons que d'après le paragraphe précèdent, étant donné un réel $\varepsilon > 0$ on a trouvé un $p$-cocycle borné $f_{\varepsilon,y} \in C_b^p(\Pi, Z^q(U^*))$ tel que pour tout $\alpha \in \Pi^p$ on a $\| f_{\varepsilon,y}(\alpha) \|_{Z^q(U^*)} < \varepsilon + \| y(\alpha) \|_\infty$ et avec $\pi_{p,q}([f_{\varepsilon,y}]) = f^\bullet_{\varepsilon,y} = y$.

Notons que la classe de cohomologie trouvée $[f_{\varepsilon,y}] \in H^{p,q}(E_{0,v}^{p,q}, d_0^*)$ ne depend que de la classe seule $y \in C_b^p(\Pi, H_b^q(G,V))$. Parce que si on considère un autre réel $\varepsilon' > 0$ on peut trouver un $p$-cocycle borné $f_{\varepsilon',y} \in C_b^p(\Pi, Z^q(U^*))$ tel que pour tout $\alpha \in \Pi^p$ on a,

$$\| f_{\varepsilon',y}(\alpha) \|_{Z^q(U^*)} < \varepsilon' + \| y(\alpha) \|_\infty$$

avec $\pi_{p,q}([f_{\varepsilon',y}]) = f^\bullet_{\varepsilon',y} = y$. Ainsi par injectivité de l'application $\pi_{p,q}$ on déduit qu'on a,

$$\begin{aligned} \pi_{p,q}([f_{\varepsilon,y}]) = f^\bullet_{\varepsilon,y} = y = \pi_{p,q}([f_{\varepsilon',y}]) = f^\bullet_{\varepsilon',y} \implies \\ [f_{\varepsilon,y}] = [f_{\varepsilon',y}] = [f_y], \quad \forall \varepsilon > 0, \varepsilon' > 0. \end{aligned}$$

Observons maintenant que si on considère l'application linéaire suivante,

$$\begin{array}{rccc} \lambda_{p,q} : & C_b^p(\Pi, H_b^q(G,V)) & \to & \dfrac{C_b^p(\Pi, Z^q(U^*))}{C_b^p(\Pi, B^q(U^*))} \\ & y & \to & [f_y] \end{array}$$

on obtient ainsi une application linéaire qui réalise un inverse continu pour l'application bijective $\pi_{p,q}$. En effet, l'application linéaire $\lambda_{p,q}$ est continue parce que de l'inégalité,

$$\| f_{\varepsilon,y}(\alpha) \|_{Z^q(U^*)} < \varepsilon + \| y(\alpha) \|_\infty, \forall \alpha \in \Pi^p,$$

on tire l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \| [f_{\varepsilon,y}(\alpha)] \|_\infty \leq & \| f_{\varepsilon,y}(\alpha) \|_{Z^q(U^*)} < \varepsilon + \| y(\alpha) \|_\infty \\ & \leq \varepsilon + \sup\{\| y(\alpha) / \forall \alpha \in \Pi^p\} = \varepsilon + \| y \|_\bullet . \end{aligned}$$

Et, comme on sait que la classe de cohomologie $[f_{\varepsilon,y}] = [f_y]$ et que la semi-norme

$$||| [f_y] |||_\infty = \inf\{\| g \|_\infty / \forall g \in C_b^p(\Pi, Z^q(U^*)) \ \text{ avec } \ f_y - g \in C_b^p(\Pi, B^q(U^*)\}$$

on déduit alors que l'inégalité précédente implique qu'on a, $||| [f_y] |||_\infty \leq \varepsilon + \| y \|_\bullet$ .

Finalement, si on fait tendre le réel $\varepsilon > 0$ vers zéro on obtient l'inégalité,

$$\| \lambda_{p,q}(y) \|_\infty = \| [f_y] \|_\infty \leq \| y \|_\bullet,$$

qui montre que l'application linéaire $\lambda_{p,q}$ est continue et que par conséquent l'application linéaire $\pi_{p,q} : H^{p,q}(E_{0,v}^{*,*}, d_0) \to C_b^p(\Pi, H_b^q(G, V))$ est un homéomorphisme. ∎

Maintenant, si on regroupe les résultats des propositions 5 et 9 qu'on vient de démontrer ; on conclut qu'il existe une bijection canonique continue qui envoie le premier terme $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée sur l'espace des $p$-cochaînes bornées non homogènes $C_b^p(\Pi, H_b^q(G, V))$. Ceci donc démontre la première proposition du théorème principal B.

4.3. Calcul du terme $E_{2,v}^{p,q}$. Dans ce paragraphe, nous allons achever la preuve du théorème principal B en démontrant la proposition suivante qui identifie le second terme $E_2^{p,q}$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre.

Proposition 10. *Il existe une bijection canonique continue qui envoie le second terme $E_2^{p,q}$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre sur l'espace de cohomologie bornée $H_b^p(\Pi, H_b^q(G, V))$ du complexe différentiel $(C_b^*(\Pi, H_b^q(G, V)), d_\Pi)$.*

*Démonstration.* Notons qu'il est classique de vérifier que l'application composée $\pi_{p,q} \circ e_1^{p,q}$ envoie la différentielle $d_1^{*,*}$ du premier terme $E_{1,v}^{p,q}$ sur la différentielle $d_\Pi$ des $p$-cochaînes bornées non homogènes sur le groupe $\Pi$ à valeurs dans l'espace $H_b^q(G,V)$. Autrement dit pour chaque couple d'entiers $p$ et $q$ on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
E_1^{p,q} & \xrightarrow{e_1^{p,q}} & H^{p+q}\left(\dfrac{F^pK^*}{F^{p+1}K^*}\right) = H^{p+q}(E_0^{p,*}, d_0) & \xrightarrow{\pi_{p,q}} & C_b^p(\Pi, H_b^q(G,V)) \\
{\scriptstyle d_1^{p,q}}\downarrow & & {\scriptstyle \partial^{p+q}}\downarrow & & {\scriptstyle d_\Pi^{p,q}}\downarrow \\
E_1^{p+1,q} & \xrightarrow{e_1^{p+1,q}} & H^{p+q+1}\left(\dfrac{F^{p+1}K^*}{F^{p+2}K^*}\right) = H^{p+q+1}(E_0^{p+1,*}, d_0) & \xrightarrow{\pi_{p+1,q}} & C_b^{p+1}(\Pi, H_b^q(G,V))
\end{array}$$

Ainsi, comme le morphisme des complexes différentiels semi-normés

$$\pi_{*,*} \circ e_1^{*,*} : (E_1^{*,*}, d_1) \to (C_b^*(\Pi, H_b^*(G,V)), d_\Pi)$$

est bijectif continu, donc ; par passage aux espaces de cohomologie on obtient des homomorphismes bijectifs continus,

$$(\pi_{p,q} \circ e_1^{p,q})_* : H^{p,q}(E_1^{*,*}, d_1) \to H_b^p(\Pi, H_b^q(G,V)).$$

D'autre part, puisque d'après la proposition 5 on sait que le morphisme canonique $e_2^{p,q} : E_2^{p,q} \to H^{p,q}(E_1^{*,*}, d_1)$ est une bijection continue ; on déduit finalement que l'application composée

$$E_{2,v}^{p,q} \xrightarrow{e_2^{p,q}} H^{p,q}(E_1^{*,*}, d_1) \xrightarrow{(\pi_{p,q} \circ e_1^{p,q})_*} H_b^p(\Pi, H_b^q(G,V))$$

est une bijection continue. ∎

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier le rapporteur de l'article qui m'a suggéré ses précieuses remarques qui m'ont permis de refaire l'article et nettoyer la preuve des deux théorèmes principaux A et B développés respectivement dans les sections 3 et 4.

## RÉFÉRENCES

[1] BARGE, J. AND GHYS, E., Surfaces et cohomologie bornée, *Invent Math.,* **92** (1988), 509–526.

[2] BAVARD, CH., Longueur stable des comutateurs, *L'Enseignement Math.,* **37** (1991) 504–514.

[3] BOUARICH, A., "Suites Exactes en Cohomologie Bornée Réelle," Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 1994.

[4] BOUARICH, A., Suites exactes en cohomologie bornée réelle des groupes discrets, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **320** (I) (1995), 1355 – 1359.

[5] BOUARICH, A., Expression de la différentielle $d_3$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie bornée réelle, *en préparation.*

[6] BREZIS, H., "Analyse Fonctionnelle." Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[7] BROOKS, R., Some remarks on bounded cohomology, *Ann of Maths. Studis,* **97** (1981), 53 – 63.

[8] CARTAN, H. AND EILENBERG, "Homology algebra," Princeton : Princeton University Press, 1956.

[9] DIEUDONNÉ, J., "Eléments d'Analyse," Tome II, Gauthier-Villars, 1982.

[10] GODEMENT, R., "Théorie des Faisceaux," Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, 1962.

[11] GROMOV, M., Volume and bounded cohomology, *Math IHES,* **56** (1982), 5 – 99.

[12] GROTHENDIECK, A., "Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires," Mem. of American Soc. 16, 1966.

[13] GUICHARDET, A., "Cohomologie des Groupes Topologiques et des Algèbres de Lie," Cedic-Nathan, 1980.

[14] GHYS, É., Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée In The Lefschetz conference, *Contemporary Math.,* **58** (III) (1987), 199 – 231.

[15] IVANOV, N., Fundation of the theory of bounded cohomology, *J. of Soviet Math.,* **37** (1987), 1090 – 1115.

[16] MACLANE, S., "Homology," Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[17] MCCLEARY, J., "User's Guide To Spectral Sequence," Publich or perish, Inc., Wilmington, Delaware (USA), 1985.

[18] MITSUMATSU, Y., Bounded cohomology and $\ell_1$-homology of surfaces, *Topology* **23** (4) (1984), 465 – 474.

[19] MONOD, N. AND BURGER, M., Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory, *GAFA, Geom. Funct. Anal.,* **12** (2002), 219 – 280.

[20] NOSKOV, A., Bounded cohomology of discrete groups with coefficients, *Leningrad Maths. J.,* **2** (5) (1991), 1067 – 1084.

[21] NOSKOV, A., The Hochschild-Serre spectral sequence for bounded cohomology, *Contemporary Mathematics,* **131** (1992), 613 – 629.

[22] SOMA, S., The zero-norme subspace of bounded cohomology, *Comment. Math. Helv.,* **72** (4) (1197), 582 – 592.

[23] YOSIDA, K., "Functional Analysis," Springer-Verlag, Berlin, 1966.