UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

Trabajo fin de grado

Espacios D´Atri

Carlos Cañada Moreno

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

FACULTAD DE CIENCIAS

Doña Teresa Arias Marco, profesora del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura.

INFORMA:
Que Carlos Cañada Moreno ha realizado bajo su dirección el Trabajo de Fin de Grado.
Considera que la memoria reúne los requisitos necesarios para su evaluación.

Badajoz, julio de 2023.

Fdo. Dª Teresa Arias Marco

Índice general

Resumen

Este trabajo se centrará, fundamentalmente, en definir y caracterizar los espacios D'Atri dentro de su correspondiente contexto histórico.
En el Capítulo 1 o Preliminares se recogen las definiciones y conceptos básicos esenciales para la correcta comprensión del resto del trabajo. Se demuestran, además en el mismo, algunos teoremas necesarios para la prueba de ciertos resultados del siguiente capítulo.
En el capítulo central de este trabajo se introduce el concepto de espacio D'Atri y se desarrolla el punto de vista que presentaron D'Atri y H. K. Nickerson en 1969 en [3], consiguiendo una serie de caracterizaciones, primeramente a raíz de la propia definición y, posteriormente, a través de unas ecuaciones algebráicas obtenidas a partir del tensor curvatura y el concepto de geodésica conocidas como las condiciones de Ledger.

Abstract

This work will focus, fundamentally, on defining and characterizing the D'Atri spaces within their corresponding historical context.
In Chapter 1 or Preliminares, the definitions and basic concepts essential for the correct understanding of the rest of the work are collected. In addition, some theorems necessary for the proof of certain results in the next chapter are demonstrated.
In the central chapter of this work, the concept of D'Atri space is introduced and the point of view presented by D'Atri and H. K. Nickerson in 1969 in [3] is developed, achieving a series of characterizations, firstly through root of the definition itself and, later, through some algebraic equations obtained from the curvature tensor and the concept of geodesic known as the Ledger conditions.

Capítulo 1

Preliminares

Una variedad riemanniana, (M, g), se dice que es D'Atri si la simetría por geodésicas conserva la forma de volumen, salvo signo.

Con el objetivo de entender esta definición se desarrolla este trabajo, y para hacerlo autocontenido, en el primer capítulo recordamos los conceptos básicos necesarios estudiados en el Grado en Matemáticas. Por ello, hemos dividido este capítulo en cuatro apartados que se centrarán en los conceptos de forma de volumen, de variedad riemanniana y de geodésica.

1.1. Tensores y formas lineales

En este primer apartado recordaremos conceptos algebráicos necesarios para poder entender la noción de forma de volumen, siguiendo [12]. En toda esta sección K denota un cuerpo totalmente ordenado.

Definición 1.1.1. Sea E un K-espacio vectorial, se define espacio dual, y se denota como E^*, al espacio vectorial $E^* := \{\omega : E \longrightarrow K,\ K\text{-lineal}\}$.

A los vectores de este espacio se les conoce como formas lineales.

Nota 1.1.2. *Fijada una base* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *de* E*, definimos base dual al siguiente conjunto de formas lineales* $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ *que cumple* $\omega^i(e_j) = \delta_{ij}$.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & si\ i \neq j \\ 1, & si\ i = j \end{cases}$$

Definición 1.1.3. Dado un espacio vectorial E y su espacio dual E^*. Se dice que la aplicación $T^{(p,q)} : E \times ...^p ... E \times E^* \times ...^q ... \times E^* \longrightarrow K$ es un tensor de orden covariante p y contravariante q si es lineal en todos sus argumentos.

Definición 1.1.4. Sea E un K-espacio vectorial de dimensión n, sea $\{e_1, ..., e_n\}$ una base de E y $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ su base dual. Entonces el conjunto de los (r, s)-tensores sobre E, $T^{(r,s)}(E)$ forman un K-espacio vectorial de dimensión n^{r+s}, donde $\{w^{i1} \otimes ... \otimes w^{ir} \otimes e_{j1} \otimes ... \otimes e_{js} : i_1, ..., i_r; j_1, ..., j_s = 1, ..., n\}$ es una base del espacio. Es decir, todo tensor $T \in T^{(r,s)}(E)$ se puede expresar como $T = \sum_{i_1,...,i_r,j_1,...,j_s=1}^n t_{i_1,...,i_r}^{j_1,...,j_s} w^{i1} \otimes ... \otimes w^{ir} \otimes e_{j1} \otimes ... \otimes e_{js}$, con $t_{i_1,...,i_r}^{j_1,...,j_s} \in K$.

Nota 1.1.5. *En este contexto y a lo largo del trabajo, utilizaremos el convenio de notación de Einstein, el cual consiste en abreviar la escritura omitiendo los sumatorios cuyos índices ocupen todos los posibles valores. En este sentido, si queremos expresar dentro de un espacio vectorial de dimensión* n *que un vector* u *se expresa como combinación lineal de los vectores de una base* $\{e_1, ..., e_n\}$*, lo denotaremos como* $u = \lambda^i \cdot e_i$ *en vez de* $u = \sum_{i=1}^n \lambda^i \cdot e_i$.

Definición 1.1.6. Centraremos nuestro estudio en los tensores puramente covariantes. Estos pueden ser de dos tipos:

- Un tensor T es **simétrico** si para todo $e_1, \ldots, e_r$ vectores de E y $\sigma \in S_q$, donde S_q denota las permutaciones de orden $q \in \mathbb{N}$, cumple que $T(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(r)}) = T(e_1, \ldots, e_r)$.
- Un tensor T es **hemisimétrico** si cumple que $T(e_1, \ldots, e_r) = 0$ si y solo si existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $e_i = \sum_{j \neq i} \lambda^j e_j$, donde $\lambda^j \in K$.

Nota 1.1.7. *Si la característica del cuerpo es distinta de dos, la definición de tensor hemisimétrico es equivalente a la siguiente afirmación: Para todo $e_1, .., e_r$ vectores de E y $\sigma \in S_q$, donde S_q son las permutaciones de orden q, $T(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(r)}) = sig(\sigma)T(e_1, ..., e_r)$ donde $sig(\sigma)$ es el signo de la permutación σ.*

Definición 1.1.8. Sea E un espacio vectorial. Denotaremos $\Lambda^r(E)$ al subespacio de $T^{(r,0)}(E)$, donde $T^{(r,0)}(E)$ es el espacio de los tensores puramente covariantes. Además, si $\{e_1, ..., e_n\}$ es base de E, entonces $\{e_{i1} \wedge .... \wedge e_{ir}\}_{i_1,...,i_r=1,...,n}$ es base del subespacio $\Lambda^r(E)$, donde $x \wedge y := x \otimes y - y \otimes x$.

Nota 1.1.9. *Los espacios de tensores hemisimétricos de orden k tienen dimensión $\binom{n}{k}$, donde n es la dimensión del espacio E.*

Como consecuencia de esta nota, sabemos que si n es la dimensión del espacio E, $\Lambda^k(E) = 0$ para todo $k > n$, luego mostraremos especial atención cuando $k = n$, en este caso a las n-formas se las denomina formas de volumen.

Nota 1.1.10. *Sea E un K-espacio vectorial de dimensión n. Al tener el espacio $\Lambda^n(E)$ dimensión $\binom{n}{n} = 1$, para todas ω, ω' formas de volúmen, existe $\lambda \in K$ tal que $\omega = \lambda\omega'$.*

Definición 1.1.11. Sea E un K-espacio vectorial de dimensión n y sea ω una forma de volumen no nula. Al par (E, ω) se denomina K-espacio vectorial orientado. En este contexto, dada otra forma de volumen ω', decimos que ω' conserva la orientación si $\lambda > 0$, donde λ es el escalar que cumple $\omega = \lambda \cdot \omega'$. Por otro lado, decimos que ω' invierte la orientación si $\lambda < 0$.

Nota 1.1.12. *Dados un endomorfismo $T \in End_k(E)$ y $\{e_1, ..., e_n\}$ una base de E tales que la matriz asociada a T tenga coordenadas (t_{ij}), denominamos determinante de T al escalar*

$$|T| = sig(\sigma)t_{1\sigma(1)} \cdot .... \cdot t_{n\sigma(n)}$$

Definición 1.1.13. Dados $\{u_1, ..., u_n\}$ vectores de E y $\{e_1, ..., e_n\}$ base de dicho espacio, el volumen de $\{u_1, ..., u_n\}$ en dicha base es el escalar

$$(\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^n)(v_1, ..., v_n) = |A|$$

donde A es la matriz de los vectores $\{u_1, ..., u_n\}$ en la base $\{e_1, ..., e_n\}$ y $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ es la base dual de $\{e_1, ..., e_n\}$.

1.2. Geometría diferencial

Una variedad riemanniana (M, g) consta de dos objetos, M que denominaremos variedad diferenciable, y g que denominaremos métrica. En este apartado analizaremos las variedades diferenciables y las herramientas sobre las mismas. A partir de [11], dividimos esta sección en cuatro apartados.

1.2.1. Variedad diferenciable

Una variedad diferenciable es un objeto que localmente se comporta como un espacio euclídeo. A lo largo de este apartado recordaremos su definición, así como su estructura analítica y topológica.

Definición 1.2.1. Una variedad diferenciable M de dimensión n es un conjunto sobre el que se puede seleccionar una colección de subconjuntos de M, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, y asociado a cada uno de ellos una aplicación inyectiva, $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$, para cada $\alpha \in I$, que cumple las siguientes propiedades:

1. Para cada α; $\phi_\alpha(U_\alpha)$ es un subespacio abierto de $\mathbb{R}^n$.

2. Para cada α, β; $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$.

3. Cada vez que $U_\alpha \cap U_\beta$ sean distintos del vacío, las funciones de transición $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ son difeomorfismos.

4. M está recubierta por una cantidad numerable de subconjuntos U_α, es decir, $M = \cup_{\alpha\in I} U_\alpha$, con $I \subseteq \mathbb{N}$.

5. Cada vez que tomamos $p, q \in M$, $p \neq q$, para cada $\alpha \in I$; bien existe algún U_α tal que $p, q \in U_\alpha$ ó bien existen conjuntos disjuntos U_α y U_β con $p \in U_\alpha$ y $q \in U_\beta$.

Nota 1.2.2. *A cada par* (U_α, ϕ_α) *se le denomina carta coordenada y al conjunto* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$*, se denomina atlas de* M*.*

Nota 1.2.3. *Por otro lado, si en la definición de una variedad diferenciable cambiamos en la propiedad 3 la exigencia de que las funciones de transición sean difeomorfas obtenemos:*

- ***Variedad topológica****, si son homeomorfas.*
- ***Variedad*** C^r*, si son* C^r*-difeomorfas.*
- ***Variedad analítica****, si son homeomorfas analíticas reales.*
- ***Variedad compleja****, si son homeomorfas holomorfas.*
- ***Variedad orientada****, si son difeomorfas que conservan la orientación.*

Para poder dotar a una variedad diferenciable de una estructura topológica es necesaria la siguiente proposición.

Proposición 1.2.4. *Todo atlas sobre un conjunto* M *define una única topología sobre* M *que lo convierte en un espacio topológico Hausdorff y 2 AN. Más aún, sus cartas son homeomorfismos sobre la imagen y, por tanto,* M *es localmente un espacio euclídeo de dimensión* n*.*

Una vez definido el espacio, procedemos a ver cómo relacionamos estas variedades.

Definición 1.2.5. Sean M y N dos variedades diferenciables de dimensiones m y n. Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ se dice diferenciable si, para cada carta $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de M y cada carta $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de N, la aplicación $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V)$ es diferenciable. Si, además, la aplicación f es biyectiva y su inversa es diferenciable, entonces f es difeomorfismo y diremos que M y N son difeomorfas.

Nota 1.2.6. *En el caso particular de* $M = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ *con el atlas estándar, se conoce a* f *con el nombre curva diferenciable.*

El hecho de que cada U_α esté fuertemente relacionado con un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ hace que, si denotamos $(u^1, ..., u^n)$ las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$, entonces definimos las funciones coordenadas en U_α como $x^i := u^i \circ \phi_\alpha$. En este contexto, (U_α, ϕ_α) también se representa $(U_\alpha, (x^1, ..., x^n))$ y se denomina sistema coordenado. Por otro lado, al igual que ocurre en $\mathbb{R}^n$, viendo las funciones coordenadas x^i en U_α como variables, podemos derivar respecto de ellas.

Teorema 1.2.7. *Si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, podemos comprobar si es diferenciable usando coordenadas.*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}|_p := \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial u^i}|_{\phi(p)}, \tag{1.1}$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ denotan los cambios infinitesimales de una función en la dirección x^i.

A continuación, definiremos una herramienta que usaremos posteriormente conocida como particiones de la unidad.

Definición 1.2.8. Sea M una variedad diferenciable y $\{U_\alpha\}_{\in I}$ un recubrimiento por abiertos de M. Una partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de funciones diferenciables $\{\phi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}\}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $0 \leq \phi_\alpha(p) \leq 1$, $\forall p \in M$.

2. *Sop* $\phi_\alpha \subset U_\alpha$.

3. La familia de cerrados $\{Sop\ \phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es localmente finita.

4. $\sum_{\alpha \in I} \phi_\alpha(p) = 1$, para todo $p \in M$.

Para finalizar, introducimos las funciones mesetas, que nos ayudarán a comprobar que algunos conceptos como el de conexión, Definición 1.1.8, o el de métrica, Definición 1.3.26, están bien definidos.

Definición 1.2.9. Sea M una variedad diferenciable, sea U un abierto de M y sea A un subconjunto cerrado de M tal que $A \subset U \subset M$. Se dice que una función diferenciable $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función meseta si cumple:

- $0 \leq \psi(p) \leq 1$, para todo $p \in M$.

- $\psi(p) = 1$ para todo $p \in A$.
- Sop $\psi \subset U$.

1.2.2. Espacio tangente

Una vez definidas las estructuras con las que vamos a trabajar, un concepto interesante que se puede profundizar en [11] es el de espacio tangente, el cual surge al estudiar el comportamiento de la variedad de una forma local. Para ello es necesaria la definición de derivación dentro de un espacio de gérmenes.

Definición 1.2.10. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$, dadas $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : U' \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, donde U y U' son entornos de p; decimos que f y g son equivalentes si $\exists W \subset U \cap U'$, con $p \in W$, tal que $f|_W = g|_W$. A cada clase de equivalencia de esta relación lo denominaremos germen. Al conjunto de todos los gérmenes lo denotaremos como $C^\infty(M)$ y se le conoce como espacio de gérmenes.

Definición 1.2.11. Sea M una variedad diferenciable y sea $p \in M$. Una derivación en p es una aplicación lineal $V : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $f, g \in C^\infty(M)$ cumple $V(f \cdot g) = f(p) \cdot V(g) + g(p) \cdot V(f)$.

A través de la ecuación (1.1) vemos que, dado $(U, (x^1, ..., x^n))$ un entorno coordenado y $p \in U$, $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ son derivaciones en p.

Definición 1.2.12. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Al conjunto de todas las derivaciones de $C^\infty(M)$ en p se le denomina espacio tangente de M en p y se denota T_pM.

Proposición 1.2.13. *En un entorno coordenado $(U, (x^1, ..., x^n))$, tal que p está contenido en U, T_pM tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial, donde $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ es una base.*

Con la finalidad de relacionar espacios tangentes entre variedades diferenciables a partir de aplicaciones diferenciables, surge el concepto de diferencial de una aplicación en un punto.

Definición 1.2.14. Sea $F : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables, $p \in M$. Entonces, para cada $V \in T_pM$, en un entorno de $F(p)$ la diferencial de la aplicación F en p es

$$\begin{aligned} F_{*p} :& T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N \\ & V \mapsto F_{*p}(V), \end{aligned}$$

tal que para cada $g \in C^\infty(N)$, $F_{*p}(V)(g) \circ F = V(g \circ F)$.

Proposición 1.2.15. *Sean $F : M \longrightarrow N$ y $G : N \longrightarrow P$ dos aplicaciones entre variedades diferenciables y sea $p \in M$.*

1. $F_{*p} : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ *es* $\mathbb{R}$*-lineal.*
2. $(G \circ F)_{*p} = G_{*F(p)} \circ F_{*p}$.
3. $(Id_M)_{*p} = Id_{T_pM}$.
4. F *es difeomorfismo local si y solo si* F_{*p} *es isomorfismo y* $(F_{*p})^{-1} = (F^{-1})_{*F(p)}$.

Terminamos la sección analizando el espacio dual del espacio tangente.

Definición 1.2.16. Sea M una variedad diferenciable y sea $p \in M$. Llamamos espacio cotangente, y lo denotamos T_p^*M, al espacio dual de T_pM,

$$T_p^*M = \{\phi : T_pM \longrightarrow \mathbb{R},\ \mathbb{R} - \text{lineal}\}.$$

Una forma de obtener covectores a través de las funciones $C^\infty(M)$ es utilizando el operador diferencial exterior en un punto.

Definición 1.2.17. Sea M una variedad diferenciable y sea $p \in M$. Se define la diferencial exterior en p como la siguiente derivación.

$$\begin{aligned} d_p :& C^\infty(M) \longrightarrow T_p^*M \\ & f \mapsto d_pf \end{aligned}$$

Donde para cada $V \in T_pM$, $d_pf(V) := V(f)$.

Nota 1.2.18. *Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$ y $(U, (x^1, ..., x^n))$ entorno coordenado de p. Entonces $\{d_px^1, ..., d_px^n\}$ forman una base de T_p^*M que, además, es la base dual de $\{\frac{\partial}{dx^1}|_p, ..., \frac{\partial}{dx^n}|_p\}$.*

1.2.3. Fibrado tangente

Tras el estudio de los aspectos básicos del espacio tangente, generalizamos a toda la variedad estos conceptos, abstrayendo el punto donde nos encontramos.

Definición 1.2.19. Sea M una variedad diferenciable, definimos el fibrado tangente asociado a M, y lo denotamos por TM, como la unión disjunta de los espacios tangentes en todos los puntos $p \in M$

$$TM := \cup_{p\in M} T_pM.$$

Nota 1.2.20. *El fibrado tangente viene equipado con una aplicación que denominamos proyección y denotamos por π*

$$\begin{aligned} \pi :&TM \longrightarrow M \\ &(p, V) \mapsto \pi(p, V) := p. \end{aligned}$$

Con esta aplicación, podemos dotar a TM de una estructura topológica.

Nota 1.2.21. *El fibrado tangente TM posee una topología natural que lo convierte en variedad diferenciable de dimensión $2n$, donde n es la dimensión de la variedad diferenciable M en la que la aplicación π es diferenciable.*

Dotado TM de una estructura de variedad diferenciable, podemos definir los campos de vectores.

Definición 1.2.22. Sea M variedad diferenciable, denominamos campo de vectores Y sobre M a la aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} Y :&M \longrightarrow TM \\ &p \mapsto Y_p \in T_pM \subset TM. \end{aligned}$$

Al conjunto de los campos de vectores los denotaremos como $\mathcal{T}(M)$.

Nota 1.2.23. *En un entorno* $(U,(x^1,...,x^n))$ *de* $p \in M$*, podemos escribir* Y *como combinación lineal de los vectores coordenados* $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}$*,* $Y_p = y^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$*, donde* $y^i : M \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $i = 1,...,n$*, son funciones diferenciables.*

Lema 1.2.24. *Sea* M *una variedad diferenciable y sea* $p \in M$*. Entonces, fijado* $V \in T_pM$*, existe un campo de vectores diferenciables* $X \in \mathcal{T}(M)$ *tal que* $X_p = V$*.*

Proposición 1.2.25. $\mathcal{T}(M)$ *tiene una estructura de* $C^\infty(M)-$*módulo.*

Más aún, este es libre pues $\{V_1,...,V_n\}, V_i \in \mathcal{T}(M), i = 1,..,n$ *es un sistema de referencia global de* M *si, para todo punto* p *en* M*,* $\{V_{1p},...,V_{np}\}$ *es base del espacio* T_pM*.*

Por otra parte, diremos que el sistema de coordenadas es local si cumple la condición anterior para todo punto p *en* U*, siendo* U *un abierto de* M*.*

Veamos cómo los campos de vectores actúan frente a las funciones $C^\infty(M)$.

Proposición 1.2.26. *Dados* $Y \in \mathcal{T}(M)$ *y* f *función diferenciable definida sobre* M*, definiendo la aplicación* $Y(f)$ *de la forma*

$$\begin{aligned} Y(f) :&M \longrightarrow \mathbb{R} \\ &p \mapsto (Y(f))(p) := Y_p(f), \end{aligned}$$

se obtiene que, para cada $f, g \in C^\infty(M)$*, el campo de vectores* Y *es una derivación, pues cumple:*

- $Y(f + g) = Y(f) + Y(g)$.
- $Y(f \cdot g) = f \cdot Y(g) + g \cdot Y(f)$.

En este contexto, es necesario introducir una operación en el espacio de los campos de vectores denominada Corchete de Lie, que controla la conmutatividad del producto de campos de vectores.

Definición 1.2.27. Sea M una variedad diferenciable. Dados $V, W \in \mathcal{T}(M)$, se define corchete de Lie, y se denota como $[V, W]$, al siguiente campo de vectores diferenciables.

$$\begin{aligned} [V, W] :& C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) \\ & f \longmapsto [V, W](f) := V(W(f)) - W(V(f)). \end{aligned}$$

Proposición 1.2.28. *Sea M una variedad diferenciable. Para todo $V, W, X \in \mathcal{T}(M)$, se cumple:*

1. *Bilinealidad,* $\forall a, b \in \mathbb{R}$
   - $[aV + bW, X] = a[V, X] + b[W, X]$.
   - $[V, aW + bX] = a[V, X] + b[W, X]$.
2. *Antisimetría,* $[V, W] = -[W, V]$.
3. *Identidad de Jacobi,* $[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X, [V, W]] = 0$.
4. *Sean* $f, g \in C^\infty(M)$*, entonces,* $[fV, gW] = f \cdot g[V, W] + f \cdot V(g)W - g \cdot W(f)V$.

Al ser la imagen del Corchete de Lie un campo de vectores, podemos obtener su expresión en coordenadas.

Nota 1.2.29. *Sea M una variedad diferenciable y $V, W \in \mathcal{T}(M)$, sea $(U, (x^1, ..., x^n))$ un abierto coordenado de M en el que $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ y $W = W^i \frac{\partial}{\partial x^j}$.*

$$[V, W] = \left(\sum_i V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = \left(V(W^j) - W(V^j) \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

1.2.4. Campo de tensores

Siguiendo con la dinámica de generalización de conceptos, sea M una variedad diferenciable y sea un punto $p \in M$. Teniendo en cuenta que T_pM es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, podemos considerar $T^{(r,s)}(T_pM)$ el espacio de los tensores r-covariantes y s-contravariantes en p y denotarlo como $T_p^{(r,s)}M$.

De manera análoga al fibrado tangente, podemos introducir el fibrado de los (r,s)-tensores sobre M de la siguiente manera.

$$T^{(r,s)}M = \cup_{p\in M} T_p^{(r,s)}M. \tag{1.2}$$

El fibrado de los (r,s)-tensores sobre M tiene una topología natural y una estructura diferenciable que lo convierte en una variedad diferenciable de dimensión $n + n^{r+s}$.

Definición 1.2.30. Sea M variedad diferenciable, denominamos campo de (r,s)-tensores sobre M a la aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} T^{(r,s)} :& M \longrightarrow T^{(r,s)}M \\ & p \mapsto T_p^{(r,s)} \in T_p^{(r,s)}M \subset T^{(r,s)}M. \end{aligned}$$

Al conjunto de los campos de (r,s)-tensores lo denotaremos como $\mathcal{T}^{(r,s)}(M)$.

Nota 1.2.31. *En un entorno $(U,(x^1,...,x^n))$ de M, para cada $p \in U$ podemos escribir $T_p^{(r,s)}$ como combinación lineal de los tensores coordenados, $T_p^{(r,s)} = t_{i_1,...,i_r}^{j_1,...,j_s}(p) d_p x^{i_1} \otimes ... \otimes d_p x^{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x_1^j}|_p \otimes .... \otimes \frac{\partial}{\partial x_s^j}|_p$, donde cada $t_{i_1,...,i_r}^{j_1,...,j_s} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $i_1,...,i_r, j_1,...,j_s = 1,...,n$, son funciones diferenciables.*

Sea M una variedad diferenciable y sea p un punto de M. Denotando $T_p^r M$ al espacio de los tensores puramente covariantes de orden r en p, veamos cómo podemos relacionar estos tipos de espacios a través del concepto de pullback.

Definición 1.2.32. Dada $F : M \longrightarrow N$ diferenciable entre variedades diferenciables y sea $p \in M$. Para cada $r \geq 0$, se define el pullback de F para campos de tensores $T_{F(p)}^r N$ como la aplicación

$$\begin{aligned} F^* :& T_{F(p)}^r N \longrightarrow T_p^r M \\ & T_{F(p)}^r \mapsto F^*(T_{F(p)}^r). \end{aligned}$$

Donde, dados $\{X_{1p},...,X_{rp}\} \in T_pM$, $F^*(T_{F(p)}^r)(X_{1p},...,X_{rp}) := T_{F(p)}^r(F_{*p}(X_{1p}),...,F_{*p}(X_{rp}))$.

Proposición 1.2.33. *Sean $F : M \longrightarrow N$ y $G : N \longrightarrow P$ aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables, sea $p \in M$ y sean $S^k_{F(p)} \in T^k_{F(p)}N$ y $T^l_{F(p)} \in T^l_{F(p)}N$.*

1. $F^* : T^k_{F(p)}N \longrightarrow T^k_p M$ *es* $\mathbb{R}$ *lineal.*
2. $F^*(S^k_{F(p)} \otimes T^l_{F(p)}) = F^*(S^k_{F(p)}) \otimes F^*(T^l_{F(p)})$.
3. $(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : T^k_{G\circ F(p)}P \longrightarrow T^k_p M$.
4. $(Id_N)^* S = S$.

Una vez vistas estas propiedades que nos resultarán útiles, podemos generalizar aún más el concepto de pullback, si abstraemos el punto.

Definición 1.2.34. Dada $F : M \longrightarrow N$ diferenciable entre variedades diferenciables y sea $T \in \mathcal{T}^r(N)$, definimos un r-campo de tensores en M, F^*T, denominado pullback de T por F.

$$
\begin{aligned}
F^*T : M &\longrightarrow T^r M \\
p &\mapsto (F^*T)_p := F^*(T^r_{F(p)}),
\end{aligned}
$$

donde $F^*(T^r_{F(p)})$ es la imagen de la aplicación que acabamos de estudiar.

Así, al igual que en la Proposición 1.2.32, veamos las propiedades del pullback de tensores puramente covariantes.

Proposición 1.2.35. *Sean $F : M \longrightarrow N$ y $G : N \longrightarrow P$ aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables y sean $S \in \mathcal{T}^k(N)$ y $T \in \mathcal{T}^l(N)$,*

1. $F^*(S \otimes T) = F^*(S) \otimes F^*(T)$.
2. $F^*(S) \in \mathcal{T}^k(M)$.
3. $F^* : \mathcal{T}^k(N) \longrightarrow \mathcal{T}^k(M)$ *es* $\mathbb{R}$*-lineal.*
4. $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.
5. $(Id_N)^*(S) = S$.

Nota 1.2.36. *Dado $F : M \to N$ aplicación diferenciable entre variedades diferenciables, si F es difeomorfismo, podemos relacionar los tensores $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$ con los tensores de N.*

Denotando $F_* : \mathcal{T}^{(r,s)}(M) \to \mathcal{T}^{(r,s)}(N)$ y $F^* : \mathcal{T}^{(r,s)}(N) \to \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$ los isomorfismos, dado $S \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$.

$$F_*S(X_1, ..., X_r, \omega^1, ..., \omega^s) := S((F^{-1})_*(X_1), ..., (F^{-1})_*(X_r), F^*\omega^1, ..., F^*\omega^s),$$

para $X_1, ..., X_r \in \mathcal{T}N$ y $\omega^1, ..., \omega^s \in \mathcal{T}^*N$.

Así, este operador de existir, cumple las mismas propiedades descritas en la Proposición 1.2.35.

Una vez vistas las propiedades importantes del pullback, pasamos a particularizar la teoría de campo de tensores, cuando estos son hemisimétricos.

Definición 1.2.37. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $p \in M$. Consideramos el espacio de los tensores hemisimétricos sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial T_pM, $\Lambda^r(T_pM)$.

Al ser $\Lambda^r T_pM$ subespacio vectorial por la Definición 1.1.8, y al igual que en la Definición 1.2.19, denotamos a

$$\Lambda^r M = \cup_{p\in M} \Lambda^r_p M.$$

Nota 1.2.38. *De forma análoga a los otros fibrados, sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $\Lambda^r M$ tiene una topología natural y una estructura diferenciable que lo convierte en una variedad diferenciable de dimensión $n + \binom{n}{r}$. En este caso, dado un punto $p \in M$ y un entorno coordenado $(U, (x^1, ..., x^n))$, una base de este espacio es $\{d_p x^{i_1} \wedge ... \wedge d_p x^{i_r}\}_{i_1 < ... < i_r \leq n}$.*

Denotando como $\Omega^r(M)$ al espacio de las r-formas donde, en este contexto, una r-forma es un campo de tensores hemisimétrico de orden r, podemos obtener un resultado importante observando el comportamiento del pullback de una aplicación diferenciable.

Lema 1.2.39. *Si $F : M \longrightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables.*

1. $F^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r M$ *es* $C^\infty(M)-$*lineal.*

2. $F^*(\omega \wedge \nu) = F^*(\omega) \wedge F^*(\nu)$*, con* $\omega \in \Omega^r(N)$ *y* $\nu \in \Omega^k(N)$*.*

3. *Sea* $(V, (y^1, ..., y^n))$ *una carta coordenada de* N*,*

$$F^*(\sum_{1 \leq i_1 \leq ..., \leq i_r \leq n} \omega_{i_1,...,i_r} dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_r}) = \sum_{1 \leq i_1 \leq ..., \leq i_r \leq n} (\omega_{i_1,...,i_r} \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge ... \wedge d(y^{i_r} \circ F). \tag{1.3}$$

Proposición 1.2.40. *Sea* $F : M \longrightarrow N$ *una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables de dimensión* n*, sean* $(U, (x^1, ..., x^n))$ *y* $(V, (y^1, ..., y^n))$ *entornos coordenados de* M *y* N*. Si* $g \in C^\infty(V)$*, entonces, en* $U \cap F^{-1}(V)$ *se cumple la siguiente igualdad.*

$$F^*(g \cdot dy^1 \wedge ... \wedge dy^n) = (g \circ F)(det F_*)(dx^1 \wedge ... \wedge dx^n). \tag{1.4}$$

La derivada exterior tiene las siguientes propiedades.

Teorema 1.2.41. *Para cada* M *variedad diferenciable, existe una única aplicación lineal* $d^r : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{r+1}(M)$ *definida para cada entero* $r \geq 0$*, que denominaremos derivada exterior, y que cumple las siguientes propiedades.*

1. *Si la función* $f \in C^\infty(M)$*, entonces* df *es la diferencial definida de* f*, es decir,* $df(X) = X(f), \forall X \in \mathcal{T}(M)$*.*

2. *Si* $\omega \in \Lambda^r(M)$ *y* $\nu \in \Lambda^k(M)$*, entonces* $d(\omega \wedge \nu) = dw \wedge \nu + (-1)^r \omega \wedge d\nu$*.*

3. $d \circ d = 0$*.*

Ahora, fijando una carta coordenada $(U, (x^1, ..., x^n))$ *y* $\omega \in \Lambda^r(M)$*, tenemos las siguientes propiedades.*

1. $d\omega = d(\sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_r \leq n} \omega_{i_1,...,i_r} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}) = \sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_r \leq n} (\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1,...,i_r}}{dx^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r})$*.*

2. *Si* $G : M \longrightarrow N$ *es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables, entonces el pullback* $G^* : \Lambda^r(N) \longrightarrow \Lambda^r(M)$ *conmuta con* d*, es decir,* $\forall \omega \in \Lambda^r(N)$*,* $G^*(d^r \omega) = d^r(G^*(\omega))$*.*

Acabamos este apartado con la noción de orientación en variedades diferenciables.

Definición 1.2.42. Decimos que una variedad diferenciable M es orientable si es posible definir una n-forma diferenciable $\omega \in \Lambda^n(M)$ sobre M que no se anule en ningún punto de M.

De este modo, podemos apreciar que esta definición coincide con la dada en la Nota 1.2.3.

Definición 1.2.43. Sea M una variedad diferenciable y ω una forma de volumen que cumple las condiciones de la definición anterior, fijando ω, denominaremos variedad diferenciable orientada al par (M, ω).

Usando las propiedades de los espacios vectoriales orientados podemos obtener los siguientes resultados.

Nota 1.2.44. *Sean M una variedad diferenciable, ω y ω' dos formas de volumen, entonces existe una función $f \in C^\infty(M)$ tal que para todo punto p de M, $\omega_p = f(p) \cdot \omega'_p$.*

A partir de esta nota obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2.45. *Sea (M, ω) una variedad orientada. Dada ω' otra forma de volumen de M, decimos que ω' conserva la orientación si para todo punto p de M, $\omega_p = f(p) \cdot \omega'_p$, tal que $f(p) > 0$. Por otro lado, decimos que invierte la orientación si $f(p) < 0$ para todo $p \in M$.*

Analizando las aplicaciones diferenciables obtenemos la siguiente nota.

Nota 1.2.46. *Sea $F : (M, \omega) \longrightarrow (N, \omega')$ un difeomorfismo local. Decimos que F conserva la orientación si $F^*(\omega') = \lambda \cdot \omega$, donde λ es una función $C^\infty(M)$ tal que para todo punto $p \in M$, $\lambda(p) > 0$. Por otro lado, decimos que F invierte la orientación si $\lambda(p) < 0$ para todo punto p en M.*

1.3. Geometría riemanniana

Aquí desarrollaremos la geometría riemanniana que necesitaremos para poder entender qué es una curva geodésica, qué es un entorno normal y el propio concepto de variedad riemanniana. Para ello seguiremos [1].

1.3.1. Conexiones

El objetivo fundamental de introducir este concepto es la idea de que para derivar necesitamos la dirección hacia dónde derivamos y qué derivamos.

Definición 1.3.1. Sea M una variedad diferenciable, una conexión lineal es una aplicación

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) &\longrightarrow \mathcal{T}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y, \end{aligned} \tag{1.5}$$

que cumple las siguientes propiedades.

1. Es $C^\infty(M)$-**lineal** en la primera coordenada,

   $$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \quad f, g \in C^\infty(M), \quad X, Y, Z \in \mathcal{T}(M).$$

2. Es $\mathbb{R}$-**lineal** en la segunda coordenada,

   $$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad X, Y, Z \in \mathcal{T}(M).$$

3. ∇ satisface la **regla del producto** o de **Leibniz**,

   $$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f(\nabla_X Y) \quad f \in C^\infty(M), \quad X, Y \in \mathcal{T}(M).$$

Utilizando funciones meseta en esta definición, a partir de la Definición 1.2.9, se puede apreciar que es una aplicación local. Sin embargo, se puede extender a toda la variedad a través de las particiones de la unidad, usando la Definición 1.2.8.

Podemos generalizar el concepto de conexión para campos de tensores de cualquier orden.

Definición 1.3.2. Sean M variedad diferenciable. Se define una conexión lineal sobre cada (r, s)-fibrado tensorial, $T^{(r,s)}(M)$, y lo denotaremos como ∇, a la siguiente aplicación.

$$\begin{aligned} \nabla :& \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}^{(r,s)}(M) \longrightarrow \mathcal{T}^{(r,s)}(M) \\ & (X, T) \mapsto \nabla_X T, \end{aligned}$$

que cumple:

1. Sobre $C^{\infty}(M)$, ∇ está definida por la derivada de funciones, $\nabla_X f := X(f)$, para todo $X \in \mathcal{T}(M)$, $f \in C^{\infty}(M)$.

2. Sobre $\mathcal{T}(M)$, ∇ coincide con la definida previamente.

3. Cumple la regla de Leibniz con respecto al producto tensorial, es decir, para todo $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$, $T' \in \mathcal{T}^{(r',s')}(M)$, $X \in \mathcal{T}(M)$

   $\nabla_X(T \otimes T') = \nabla_X T \otimes T' + T \otimes (\nabla_X T')$.

4. ∇ conmuta con las contracciones C_i^j, es decir

   $\nabla_X(C_i^j T) = C_i^j(\nabla_X T)$, para todo $X \in \mathcal{T}(M)$, $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$.

Definición 1.3.3. Sean M una variedad diferenciable, ∇ una conexión lineal, $X \in \mathcal{T}(M)$ y $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$, denotaremos $\nabla_X^n T$ con $n \in \mathbb{N}$ a la derivada covariante n-ésima, que consiste en fijar la primera coordenada X e ir derivando sucesivamente la imagen de $\nabla_X T$.

En este contexto, podemos obtener una generalización de la regla del producto o de Leibniz para la $n-$ésima derivada covariante.

Proposición 1.3.4. *Sean M variedad diferenciable, ∇ una conexión, $X \in \mathcal{T}(M)$, $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$ y $T' \in \mathcal{T}^{(r',s')}(M)$ entonces*

$$\nabla_X^n(T \otimes T') = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \nabla_X^{n-i} T \otimes \nabla_X^i T'.$$

Donde $\nabla_X^0 T = T$.

Demostración. Podemos demostrar este resultado por inducción, pues para el caso $n = 1$ es la propia definición de la regla de Leibniz, luego suponemos cierto hasta n y veamos hasta $n+1$.

$$\begin{aligned}
\nabla_X^{n+1}(T\otimes T') &= \nabla_X\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\nabla_X^{n-i}T\otimes\nabla_X^{i}T'\right) = \sum_{i=0}^{n}\nabla_X\left(\binom{n}{i}\nabla_X^{n-i}T\otimes\nabla_X^{i}T'\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\nabla_X^{n-i+1}T\otimes\nabla_X^{i}T' + \nabla_X^{n-i}T\otimes\nabla_X^{i+1}T'\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\nabla_X^{n-i+1}T\otimes\nabla_X^{i}T' + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\nabla_X^{n-i}T\otimes\nabla_X^{i+1}T'.
\end{aligned}$$

Ahora, haciendo un cambio de índices y aplicando las propiedades de la combinatoria, concluimos la demostración, pues

$$\begin{aligned}
\nabla_X^{n+1}(T\otimes T') &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\nabla_X^{n-i+1}T\otimes\nabla_X^{i}T' + \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\nabla_X^{n-i+1}T\otimes\nabla_X^{i+1}T'\\
&=\binom{n}{0}\nabla_X^{n+1}T\otimes\nabla_X^{0}T' + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\nabla_X^{n-i+1}T\otimes\nabla_X^{i}T'\\
&\quad+\binom{n}{i-1}\nabla_X^{n-i+1}T\otimes\nabla_X^{i}T' + \binom{n}{n}\nabla_X^{0}T\otimes\nabla_X^{n+1}T'\\
&=\binom{n+1}{0}\nabla_X^{n+1}T\otimes\nabla_X^{0}T' + \sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}\nabla_X^{n+1-i}T\otimes\nabla_X^{i}T'\\
&\quad+\binom{n+1}{n+1}\nabla_X^{0}T\otimes\nabla_X^{n+1}T'\\
&=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\nabla_X^{n+1-i}T\otimes\nabla_X^{i}T'.
\end{aligned}$$

■

Como consecuencia de estas propiedades, obtenemos una forma de expresar la derivada de un tensor como la diferencia entre la derivada de una función y la suma de las imágenes de dicho tensor aplicados a distintos vectores y formas.

Proposición 1.3.5. *Sea M variedad diferenciable y ∇ una conexión lineal, dados $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$, $X, Y_i \in \mathcal{T}(M)$, $i = 1, ..., r$ y $\omega^j \in \mathcal{T}^*(M)$, $j = 1, ..., s$, se cumple que*

$$(\nabla_X T)(Y_1, ..., Y_r, \omega^1, ..., \omega^s) =$$
$$= \nabla_D(T(D_1, ..., D_p, \omega^1, ..., \omega^s)) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, ..., \nabla_X Y_i, ..., Y_r, \omega^1, ..., \omega^s)$$
$$- \sum_{j=1}^{s} T(Y_1, ..., Y_p, \omega^1, ..., \nabla_X \omega^j, \omega^s).$$

Si para conocer una derivada necesitamos la dirección y el objeto, abstrayendo estos conceptos, obtenemos la definición de derivada total.

Definición 1.3.6. Sean M variedad diferenciable, ∇ conexión lineal y $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$, entonces la aplicación $\nabla T : \mathcal{T}(M)^{r+1} \times \mathcal{T}^*(M)^s \longrightarrow C^\infty(M)$, definida por

$$\nabla T(X; Y_1, ..., Y_r, \omega^1, ..., \omega^s) := (\nabla_X T)(Y_1, ..., Y_r, \omega^1, ..., \omega^s)$$

se denomina derivada covariante total de T.

1.3.2. Geodésica, aplicación exponencial, bola exponencial

Intuitivamente, entendemos el concepto de geodésica como la curva que minimiza la distancia entre dos puntos. Como sabemos, en el espacio euclídeo estas son lineas rectas, pero esto no siempre se cumple en general en una variedad. El objetivo de este apartado es definir estas curvas de forma precisa.

Definición 1.3.7. Sean M una variedad diferenciable, I un subintervalo de $\mathbb{R}$ y una curva diferenciable $\gamma : I \longrightarrow M$. Un campo de vectores a lo largo de γ es una aplicación diferenciable $V : I \longrightarrow TM$, tal que $V_t \in T_{\gamma(t)}M$, para todo $t \in I$. Al espacio de los campos de vectores a lo largo de una curva lo denotamos por $\mathcal{T}(\gamma)$.

Nota 1.3.8. *Dada $V' \in \mathcal{T}(\gamma)$, se dice que es extensible si existe $V \in \mathcal{T}(M)$ tal que $V'_t = V_{\gamma(t)}, \forall t \in I$.*

Para poder ver que la conexión solo depende de una curva y del valor del campo de vectores en un punto, es necesario definir las curvas integrales.

Definición 1.3.9. Sea M una variedad diferenciable y sea $V \in \mathcal{T}(M)$. Decimos que una curva diferenciable $\gamma : J \longrightarrow M$ es curva integral de V si $\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}, \forall t \in J \subseteq \mathbb{R}$.

Podemos apreciar que está bien definida gracias a este teorema.

Teorema 1.3.10. *Sean M una variedad diferenciable, $V \in \mathcal{T}(M)$ y $(U, (x^1, ..., x^n))$ un abierto de M. De existir una curva $\gamma : I \longrightarrow M$ integral de V, tendría la siguiente expresión en coordenadas $\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$*

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (\gamma^i)'(t)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\gamma(t)} \\ &= V^i_{\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\gamma(t)}.\end{aligned}$$

Y la existencia de esta curva se reduce a la resolución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned}&(\gamma^1)'(t) = V^1(\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t)). \\ &... \\ &(\gamma^n)'(t) = V^n(\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t)).\end{aligned}$$

Además, añadiendo la condición inicial $(\gamma^1(0), ..., \gamma^n(0)) = (p^1, ..., p^n)$ para algún punto $p = (p^1, ..., p^n) \in U$, tenemos garantizada la existencia y unicidad de la curva integral, al menos, en un entorno del punto p.

Nota 1.3.11. *Sea M una variedad diferenciable, sea $V \in \mathcal{T}(M)$, sea $J \subset \mathbb{R}$ abierto y sea $\gamma : J \to M$ la curva integral de V. Sea $a \in \mathbb{R}$ y consideramos $J + a = \{t + a : t \in J\}$. Entonces, la curva*

$$\begin{aligned}\beta : &J + a \longrightarrow M \\ &t \mapsto \beta(t) := \gamma(t - a)\end{aligned}$$

es curva integral.

Una vez hecho un breve análisis de las curvas integrales, estamos en disposición del siguiente Lema.

Lema 1.3.12. *Sea M variedad diferenciable, ∇ una conexión lineal y sea $p \in M$.*

Dados $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, $(\nabla_X Y)_p$ solo depende de p y del valor de Y a lo largo de una curva integral de X que pasa por p.

A través del Lema anterior, vemos que tiene sentido definir la conexión a lo largo de una curva.

Definición 1.3.13. Sea M una variedad diferenciable, ∇ una conexión lineal, para cada $\gamma : I \longrightarrow M$ curva diferenciable, se define la conexión a lo largo de esa curva como el único operador $\partial_t^\nabla : \mathcal{T}(\gamma) \longrightarrow \mathcal{T}(M)$ que cumple las siguientes propiedades.

- $\partial_t^\nabla(aV' + bV'') = a\partial_t^\nabla(V') + b\partial_t^\nabla(V'')$ para todo $V', V'' \in \mathcal{T}(\gamma)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\partial_t^\nabla(f \cdot V') = \partial_t^\nabla(f)V' + f\partial_t^\nabla(V')$ para todo $f \in C^\infty$, $V' \in \mathcal{T}(\gamma)$.
- Sea $V' \in \mathcal{T}(\gamma)$ extensible, entonces cualquiera de sus extensiones $V \in \mathcal{T}(M)$ cumple $(\partial_t^\nabla(V'))_{t_0} = (\nabla_{\gamma'(t)}V)_{\gamma(t_0)}$.

Definición 1.3.14. Sea M variedad diferenciable y ∇ una conexión lineal. Una curva diferenciable $\gamma : I \longrightarrow M$ es una curva geodésica si cumple $\partial_t^\nabla(\gamma'(t)) = 0$.

Nota 1.3.15. *Dadas una variedad diferenciable M, una conexión lineal ∇ y $\gamma : I \longrightarrow M$ curva geodésica, dependiendo de cómo sea el intervalo I, obtenemos los siguientes casos particulares de curva geodésica:*

- *Llamamos geodésica maximal a aquella curva que no puede extenderse a una geodésica definida en un intervalo J que contenga estrictamente al intervalo I.*
- *Una geodésica se denomina completa si $I = \mathbb{R}$.*

Gracias a herramientas estudiadas de ecuaciones diferenciales sabemos que, dados $p \in M$, $V \in T_pM$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, existe un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $t_0 \in I$ y una curva geodésica $\gamma : I \longrightarrow M$ tal que $\gamma(t_0) = p$ y $\gamma'(t_0) = V$. Además, dos geodésicas de este tipo coinciden en su dominio. En este caso, se suele denotar a la curva geodésica que cumple estas condiciones puntuales como $\gamma_{(p,V)}$ ó γ_V.

Nota 1.3.16. *Que una curva diferenciable sea geodésica depende de la conexión lineal ∇ y de la parametrización. Fijada ∇, toda parametrización que hace a γ una geodésica está determinada, salvo transformaciones afines.*

$$t \longrightarrow \alpha t + \beta : \alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

Con esta propiedad llegamos a uno de los resultados fundamentales de curvas geodésicas. El denominado Lema de Homogeneidad.

Lema 1.3.17. *Sean M variedad diferenciable, $s, t \in \mathbb{R}$, ∇ una conexión lineal, $p \in M$, $v \in T_pM$ y γ_v, γ_{sv} dos curvas geodésicas tales que $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma_v'(0) = v$; $\gamma_{sv}(0) = p$ y $\gamma_{sv}'(0) = sv$. Entonces, $\gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st)$ cada vez que ambos lados de la igualdad estén bien definidos.*

A continuación, veremos un resultado que será clave para garantizar la existencia de la aplicación exponencial, concepto que definiremos posteriormente.

Teorema 1.3.18. *En la variedad diferenciable M con una conexión lineal definida sobre ella ∇ existe un campo $G \in \mathcal{T}(TM)$ cuyas curvas integrales son levantamientos de geodésicas de M, es decir, si $\beta(t)$ es la curva integral de G, entonces $\beta(t) = (\gamma(t), \gamma'(t))$, donde $\gamma(t)$ es una curva geodésica en M.*

A este campo se le conoce con el nombre de campo geodésico y de él surge el siguiente corolario.

Corolario 1.3.19. *Sea M variedad diferenciable y ∇ una conexión lineal, la existencia de un campo geodésico $G \in \mathcal{T}(TM)$ implica la existencia de un campo $X \in \mathcal{T}(M)$ tal que $\nabla_X X = 0$.*

Con este corolario damos paso a la definición de aplicación exponencial.

Definición 1.3.20. Sea E un subespacio de TM definido por $E := \{(p, v) \in TM : \gamma_{(p,v)}$ está definida en un intervalo abierto que contiene al intervalo $[0, 1]\}$.

A dicho subespacio lo denominaremos dominio de la aplicación exponencial.

Definición 1.3.21. Se llama aplicación exponencial a la aplicación diferenciable

$$
\begin{aligned}
exp : & E \longrightarrow M \\
& (p, v) \mapsto exp(p, v) := \gamma_{(p,v)}(1).
\end{aligned}
$$

Además, fijado p en M, la aplicación exponencial restringida a p, exp_p, es la aplicación exp restringida al conjunto $E_p := E \cap (\{p\} \times T_pM)$. Con ello, E tiene la propiedad de ser un subespacio abierto y estrellado en TM que contiene al origen. Además, podemos definir, para cada punto $(p, v) \in TM$, la geodésica $\gamma_{(p,v)}(t) := exp_p(tv)$.

Acabamos esta sección viendo las definiciones de entornos y coordenadas normales.

Teorema 1.3.22. *Para cualquier punto $p \in M$, existe un entorno V del origen del T_pM y un entorno U de la variedad tal que $exp_p : V \longrightarrow U$ es difeomorfismo.*

Este teorema nos garantiza la existencia de entornos normales.

Definición 1.3.23. Sea M una variedad diferenciable, un entorno U se denomina entorno normal de p si es difeomorfo a un entorno abierto y estrellado V de $0 \in T_pM$.

Además, por ser exp_p difeomorfismo en U y sabiendo que T_pM es isomorfo a $\mathbb{R}^n$, podemos construir una carta $\phi = E^{-1} \circ exp^{-1}$, donde $E : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_pM$ es el isomorfismo entre ambos espacios que mantiene el valor de las coordenadas, $E((\alpha^1, ..., \alpha^n)) = \alpha^i E_i$, donde $\{E_i\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Conociendo la existencia de esta carta, estamos en disposición de definir las denominadas coordenadas normales.

Definición 1.3.24. Sea U un entorno normal de un punto $p \in M$. Un sistema de coordenadas $(u^1, ..., u^n)$ sobre U se denomina normal si $u^i(exp_p(t^k e_k)) = t^i$, donde $\{e_i\}$ es una base arbitraria de T_pM.

De esta definición surgen las siguientes propiedades.

Proposición 1.3.25. *Sea M variedad diferenciable, ∇ una conexión lineal y sea $(u^1, ..., u^n)$ una carta coordenada normal centrada en $p \in M$.*

1. *Para cualquier vector $v = v^i \frac{\partial}{\partial u^i} \in T_pM$, si $\gamma_{(p,v)}$ es una curva geodésica, esta se representa en coordenadas normales por el segmento radial $\gamma_v(t) = tv = (tv^1, ..., tv^n)$, mientras que $\gamma(t) \in U$.*

2. *Las coordenadas de p son $(0, ..., 0)$.*

1.3.3. Métrica riemanniana

Una métrica riemanniana es una herramienta de las variedades riemannianas, que surge al generalizar la noción de métrica euclídea a otros espacios.

Nos permite conocer conceptos métricos tales como la distancia entre dos puntos o el volumen de un conjunto de campos de vectores.

Definición 1.3.26. Sea M una variedad diferenciable, una métrica riemanniana g sobre M es un campo de tensores de tipo $(2, 0)$

$$\begin{aligned} g : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y) &\longmapsto g(X, Y). \end{aligned} \tag{1.6}$$

que cumple las siguientes dos propiedades:

1. Es **simétrica**, es decir, $g(X, Y) = g(Y, X)$.

2. Es **definida positiva**, es decir, $g(X, X) \geq 0$ y $g(X, X) = 0 \iff X = 0$.

Con esta noción de métrica, podemos volver a definir todos los conceptos que conocemos del álgebra relacionados con el producto escalar.

Definición 1.3.27. Dado $X_p \in T_pM$, diremos que la norma de X_p es $|X_p| = \|X_p\| = \sqrt{g_p(X_p, X_p)}$.

Definición 1.3.28. Dados dos vectores $Xp, Y_p \in T_pM$, definimos su ángulo como el único valor $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos(\theta) := \frac{g_p(X_p, Y_p)}{\|X_p\|\|Y_p\|}$.

Definición 1.3.29. Dos vectores $X_p, Y_p \in T_pM$ son ortogonales si $g_p(X_p, Y_p) = 0$.

Al igual que ocurría con las conexiones, se comprueba que es un concepto local usando las funciones mesetas, y se puede globalizar a toda la variedad a través de las particiones de la unidad, con ello se verifica que toda variedad diferenciable es una variedad riemanniana. Gracias a esta generalización, la teoría del producto escalar antes definida se puede ampliar a campos de vectores.

Definición 1.3.30. Sea (M, g) una variedad riemanniana, entonces decimos que una referencia local $\{E_1, ..., E_n\}$ es ortonormal si $g(E_i, E_j)(p) = g_p((E_i)_p, (E_j)_p) = \delta_{ij}$, para todo p en U, siendo U un abierto de M donde E_i estén definidos, $i = 1, .., n$.

Nota 1.3.31. *Para probar la existencia de la referencia local ortonormal definida en un punto p, basta con utilizar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt.*

Una vez conocida la teoría del producto escalar para campos de vectores, definimos las aplicaciones que relacionan las variedades riemannianas.

Definición 1.3.32. Sean (M, g), (N, h) dos variedades riemannianas. Una aplicación $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ es una aplicación isométrica si

$$g_p(X_p, Y_p) = h_{\phi(p)}(\phi_{*p}(X_p), \phi_{*p}(Y_p)),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ y todo $p \in M$. Además, si la aplicación es difeomorfismo, entonces se le denomina isometría.

De esta definición surgen los siguientes conceptos.

Nota 1.3.33. *Denotando $I(M)$ al conjunto de isometrías que valoran en M, podemos notar que forman un grupo con la aplicación composición "$\circ$".*

Definición 1.3.34. Sea (M, g) una variedad Riemanniana, decimos que M es homogénea si $I(M)$ como grupo es transitiva, es decir, si para todos $p, q \in M$, existe una isometría ψ tal que $\psi(p) = q$.

Si $\{E_1, ..., E_n\}$ denota un sistema de referencia en M, al ser la métrica un tensor $(2,0)$, sobre esta aplicación se le puede asociar una matriz G cuyas coordenadas definimos $g_{ij} := g(E_i, E_j)$. Esta matriz la podemos relacionar con las formas de volúmenes a partir de su determinante.

Proposición 1.3.35. *Sea (M, g) una variedad riemanniana y sea $(U, (x^1, ..., x^n))$ un abierto coordenado de M. Sea ω una n-forma de volumen que viene expresada por la igualdad $\omega = w_{1,..,n} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$, donde $\{dx^1, .., dx^n\}$ denota la base dual de $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$. Entonces, tenemos que $\omega_{1,...,n} = \sqrt{|G|}$, donde $|G|$ denota el determinante de la matriz asociada a la métrica g.*

Demostración. Para demostrar esta proposición probaremos que $\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}) = \sqrt{|G|}$.

Sea $\{E_1, ..., E_n\}$ base ortonormal orientada positiva en U y A la matriz cambio de base de $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$ a $\{E_1, ..., E_n\}$. Por la Definición 1.1.13 tenemos que $\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}) = |A|$. Por otro lado, sabemos que si G es la matriz de la métrica g en la base $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$, entonces $G = (A^t \cdot Id \cdot A)$, ya que $\{E_1, ..., E_n\}$ es base ortonormal. Relacionando estas dos igualdades obtenemos $|G| = |A|^2$ y concluimos que $\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}) = \sqrt{|G|}$. ∎

Antes de dar paso a relacionar las conexiones con las métricas, presentamos el siguiente operador.

Definición 1.3.36. Sea M variedad diferenciable y ∇ una conexión lineal. Se define el operador torsión asociado a ∇ como la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_\nabla : &\mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M) \\ &(X, Y) \longmapsto \mathrm{Tor}_\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Nota 1.3.37. *Se dice que ∇ es simétrico cuando $Tor_\nabla = 0$.*

Una vez definido este operador, damos paso a relacionar el concepto de conexión con el de métrica riemanniana.

Definición 1.3.38. Una conexión ∇ sobre una variedad riemanniana (M, g) se dice compatible con g si cumple

$$\nabla_X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

para todo campo de vectores diferenciables X, Y, Z.

Nota 1.3.39. *Sea (M, g) variedad riemanniana, y ∇ una conexión lineal. Es trivial comprobar que ∇ es compatible con g si y solo si $\nabla g = 0$.*

Con ello, podemos enunciar el teorema fundamental de la geometría riemanniana.

Teorema 1.3.40. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Entonces, existe una única conexión ∇ sobre M que es compatible con g y es simétrica. A esta conexión se le denomina conexión de Levi-Civita.*

Nota 1.3.41. *A partir de ahora supondremos que estamos trabajando con la conexión de Levi-Civita.*

Proposición 1.3.42. *Toda isometría $\phi : (M, g) \longrightarrow (M', g')$ aplica la conexión de Levi-Civita ∇ asociada a g en la conexión de Levi-Civita ∇' asociada a g', es decir:*

$$\phi_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{\phi_*(X)} \phi_*(Y).$$

Más aún, si γ es una curva de M y $V \in \mathcal{T}(\gamma)$, entonces se cumple

$$\phi_*(\partial_t^{\nabla} V) = \partial_t^{\nabla'}(\phi_* V).$$

Con ello pasamos a las últimas definiciones de este apartado, en el que aplicaremos la teoría riemanniana en entornos normales.

Definición 1.3.43. Si γ es una curva diferenciable en una variedad riemanniana, se define velocidad de γ en el tiempo $t \in I$ como la longitud del vector velocidad en dicho instante t, $|\gamma'(t)|$. Si $|\gamma'(t)|$ no depende de t, decimos que γ es de velocidad constante y si $|\gamma'(t)| = 1$, es de velocidad unitaria.

Lema 1.3.44. *Todas las geodésicas son curvas de velocidad constante.*

Proposición 1.3.45. *Sea $\phi : (M, g) \longrightarrow (M', g')$ una isometría entre variedades diferenciables, entonces ϕ aplica geodésicas en geodésicas. Es decir, si γ es geodésica en (M, g) con punto inicial $p \in M$ y velocidad inicial $v \in T_pM$, entonces la composición $\phi \circ \gamma$ es una geodésica de M' con punto inicial $\phi(p) \in M'$ y velocidad inicial $\phi_*(v) \in T_{\phi(p)}M'$.*

Y ahora, aplicando la proposición a la aplicación exponencial, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.46. *Sea $\phi : (M, g) \longrightarrow (M', g')$ una isometría. Entonces, para cualquier $m \in M$, se cumple*

$$\phi(exp_p(tv)) = exp_{\phi(p)}(\phi_{*p}(tv)).$$

Una vez que sabemos cómo se comporta la exponencial frente a isometrías, pasamos a definir el concepto de bola geodésica.

Definición 1.3.47. Sea (M, g) una variedad riemanniana. Si $\epsilon > 0$ es tal que

$$B_\epsilon(0) = \{v \in T_pM : \|v\| = \sqrt{g_p(v, v)} < \epsilon\}.$$

Entonces, a $exp_p(B_E(0))$ se le denomina bola geodésica en M. Además, si $\overline{B_\epsilon(0)}$ está contenida en V abierto, donde exp_p es difeomorfismo, entonces $exp_p(\overline{B_\epsilon(0)})$ se llama bola geodésica cerrada y $exp_p(\partial B_\epsilon(0))$ es una esfera geodésica.

Seguidamente, nos centraremos en dar una noción de distancia dentro de M, definiendo, de esa manera, el concepto de distancia radial.

Definición 1.3.48. Sea (M, g) una variedad riemanniana. En cada entorno coordenado normal $(U, (u^1, ..., u^n))$ centrado en $p \in M$, se define la función distancia radial como

$$\begin{aligned} r :& U \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & q \mapsto r(q) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u^i(q)^2}. \end{aligned}$$

y el campo de vectores radiales $\frac{d}{dr}|_p(q) := \frac{u^i(q)}{r(q)} \frac{\partial}{\partial u^i}|_p$, para todo q en $U \setminus \{p\}$.

Con esta definición, extendemos las propiedades de la Proposición 1.3.25.

Proposición 1.3.49. *Sea (M, g) una variedad riemanniana y sea $(U, (u^1, ..., u^n))$ una carta coordenada normal centrada en p, se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Las coordenadas o componentes de la métrica en el punto p son $g_{ij} = g(u^i, u^j) = \delta_{ij}$.*

2. *Cualquier bola euclídea* $\{q : r(q) \leq \epsilon\}$ *es una bola geodésica.*

3. *En cada punto* $q \in U \setminus \{p\}$, $\frac{d}{dr}|_p(q)$ *es el vector velocidad de la geodésica de velocidad unitaria que une* p *con* q.

Para finalizar esta sección, veremos cómo podemos definir la distancia en una variedad riemanniana y de qué manera se puede relacionar con las curvas geodésicas. Para ello, introducimos el concepto de longitud de una curva diferenciable.

Definición 1.3.50. Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ es un segmento de una curva diferenciable C^∞, se define su longitud como la siguiente integral.

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g dt$$

Si $\gamma'(t) \neq 0$, para todo $t \in (a, b)$, y debido a que en una variedad riemanniana una curva diferenciable suele estar en varios entornos coordenados, nos resultará más fácil trabajar con el siguiente tipo de curvas.

Definición 1.3.51. Una aplicación continua $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ se denomina segmento de curva regular a trozos si existe una subdivisión finita $a = a_0 < ... < a_k = b$ tal que $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ sea segmento de una curva regular, para todo $i = 1, ..., k$. Para abreviar, consideraremos a este tipo de curvas como curvas admisibles y, por conveniencia, supondremos que la curva trivial constante $\gamma : \{a\} \longrightarrow M$, tal que $\gamma(a) = p$, es también curva admisible.

Teniendo en cuenta esta definición, adaptamos la longitud de curva para curvas admisibles.

Definición 1.3.52. Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ es una curva admisible y $a = a_0 < ... < a_k = b$ es una subdivisión de las anteriormente definidas, se define la longitud de γ como la suma de las longitudes de los segmentos $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i}$, para todo $i = 1, ..., k$

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Definición 1.3.53. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ una curva admisible, una aplicación continua $V : [a, b] \longrightarrow TM$ tal $V_t \in T_{\gamma(t)}M$, para todo $t \in [a, b]$, se denomina campo de vectores diferenciable a trozos de γ si existe una subdivisión de $[a, b]$ (posiblemente más fina que la subdivisión de la curva admisible γ) tal que $V_{\gamma(t_i)} = \gamma'(t_i)$ para cada t_i dentro de cada subintervalo definido en la subdivisión.

De esta forma podemos dotar a la variedad riemanniana de la siguiente métrica.

Definición 1.3.54. Sea (M, g) una variedad riemanniana conexa. Para cualquier $p, q \in M$ se define la distancia riemanniana $d_g(p, q)$ como el ínfimo de las longitudes de todas las curvas admisibles que unen p con q.

Proposición 1.3.55. *La función distancia riemanniana está bien definida pues, dados $p, q \in M$, existe, al menos, una curva admisible que une ambos puntos, por ser M una variedad diferenciable conexa.*

Con el siguiente Lema, vemos cómo la topología que genera la distancia que hemos definido coincide con la topología que proporcionaban las cartas coordenadas.

Lema 1.3.56. *Con la función distancia riemanniana d_g definida anteriormente, cualquier variedad riemanniana conexa es un espacio métrico cuya topología inducida por la distancia d_g es la misma que la topología dada en la variedad.*

Por último, para ver cómo podemos relacionar estos conceptos con la distancia radial, será necesario enunciar el Lema de Gauss.

Teorema 1.3.57. *Sea (M, g) una variedad riemanniana y sea U una bola geodésica centrada en $p \in M$. Entonces, el campo de vectores radial unitario $\frac{d}{dr}$ es g-ortogonal a las esferas geodésicas en U.*

Una aplicación de este teorema la obtenemos en el Corolario 1.3.60, para ello necesitamos conocer la noción de gradiente.

Definición 1.3.58. Sea $f \in C^\infty(M)$. Se define el gradiente de f, y se denota $grad(f)$, como el único campo de vectores que cumple:

$$g(grad(f), Y) = Y(f),$$

para todo $Y \in \mathcal{T}(M)$.

Proposición 1.3.59. *Se cumplen las siguientes propiedades.*

1. $grad(f+g) = grad(f) + grad(g)$.

2. $grad(f \cdot g) = f \cdot grad(g) + g \cdot grad(f)$.

Demostración. Usando la unicidad del gradiente y que todo campo de vectores $Y \in \mathcal{T}(M)$ es una derivación, probamos que para todo Y campo de vectores, $f, g \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} &g(grad(f+g), Y) = Y(f+g) = \\ &\quad = Y(f) + Y(g) = g(grad(f), Y) + g(grad(g), Y). \end{aligned}$$

Y para probar la segunda propiedad,

$$\begin{aligned} g(grad(f \cdot g), Y) = Y(f \cdot g) = g \cdot Y(f) + f \cdot Y(g) \\ = g \cdot g(grad(f), Y) + f \cdot g(grad(g), Y). \end{aligned}$$

∎

Corolario 1.3.60. *Sea (M, g) una variedad riemanniana y sea $\{u^i\}$ un sistema de coordenadas normales sobre una bola geodésica U centrada en un punto $p \in M$. Si r denota la función distancia radial, entonces*

$$grad(r) = \frac{d}{dr}. \tag{1.8}$$

Concluimos este apartado con el siguiente resultado.

Corolario 1.3.61. *En toda bola geodésica U alrededor del punto $p \in M$, la función distancia radial $r(q)$, para $q \in U \setminus \{p\}$, es igual a la función riemanniana de p a q, $d(p,q)$.*

Capítulo 2

Espacios D'Atri. Definición y caracterizaciones

J. D'Atri realiza 27 publicaciones dedicadas al estudio de la geometría, compartiendo trabajo en numerosas ocasiones con coautores como H. K. Nickerson, D. Miatello, J. Dorfmeister o W. Ziller. Es con este último con quien comparte el artículo [5] sobre métricas en grupos de Lie compactos, el cual se considera una de sus publicaciones más relevantes. En este contexto, aparece también el artículo [3] que vertebra este trabajo denominado "Simetrías geodésicas que preservan la divergencia" que tiene como coautor a H.K. Nickerson. Fue publicado en 1969 y desde entonces ha sido referenciado en numerosas ocasiones.

A lo largo de este capítulo nos sumergiremos en el concepto de espacios D'Atri y analizaremos sus caracterizaciones más importantes, como las que surgen a partir del estudio de funciones pares. Para ello, estudiaremos la geometría de un espacio topológico desde el punto de vista de Riemann a través de las geodésicas.

Como ejemplo de aplicación de este concepto en el campo de la física, en [7] apreciamos cómo la Teoría de la Relatividad considera el universo espacio-temporal como una variedad pseudoriemanniana de signatura $(1, 3)$, donde la luz sigue trayectorias geodésicas y relaciona la gravedad con la curvatura del espacio-tiempo. Otras aplicaciones de este tipo de espacios las podemos encontrar en la navegación y en la física teórica.

En matemáticas también han surgido numerosos estudios a raíz de este concepto. En

1996 se edita [6], un libro en su honor donde se recogen resultados obtenidos por distintos autores a partir de la definición de espacio D'Atri. Cabe mencionar al propio D'Atri, que continuó su labor de investigación en [4], demostrando que toda variedad naturalmente reductiva es D'Atri. Autores como Oldřich Kowalski, Friedbert Prüfer y Lieven Vanhecke, en el apartado [10] agruparon una gran cantidad de resultados: caracterizaciones nuevas a partir de la traza de la inversa de la métrica g y de la curvatura escalar entre otros. Además presentaron ejemplos de espacios D'Atri, entre ellos se encuentran los espacios conmutativos.

Tomando como referencia [3] se ha divido este capítulo en tres secciones. En la primera sección introducimos conceptos esenciales de Geometría Riemanniana que no han sido estudiados en el Grado en Matemáticas. Para ello seguimos [8], donde el lector interesado puede ampliar información sobre los mismos. La segunda sección se centra en la obtención de caracterizaciones geométricas del concepto de espacio D'Atri a partir de su propia definición. Por último, la tercera sección tiene como objetivo caracterizar el concepto de espacio D'Atri mediante herramientas algebráicas. Para ello son esenciales los conceptos de conexión, tensor de curvatura y campo geodésico.

2.1. Derivada de Lie

Si la derivada covariante es una forma de conocer las variaciones de los campos de tensores en una variedad, otra forma de estudiar estos cambios es mediante la derivada de Lie, noción que surge al relacionar el corchete de Lie con los flujos, objetos que estudiaremos en este apartado, y que se puede profundizar en [8]. A partir de la derivada de Lie se pueden obtener conceptos como la divergencia, que es importante para definir los espacios D'Atri.

Definición 2.1.1. Sea M una variedad diferenciable, dado $X \in \mathcal{T}(M)$, la derivada de Lie L_X de campos diferenciables es

$$\begin{aligned} L_X : \mathcal{T}(M) &\longrightarrow \mathcal{T}(M) \\ Y &\mapsto L_X(Y) := [X, Y]. \end{aligned}$$

Para poder realizar un análisis geométrico del corchete de Lie, es necesario el concepto de flujo que surge del estudio de las curvas integrales y que estudiamos en la Definición 1.3.9.

Teorema 2.1.2. *Sean M una variedad diferenciable y $V \in \mathcal{T}(M)$. Fijado $p \in M$, existen un entorno de p, $U \subset M$, un número real positivo $\delta > 0$ y una única aplicación diferenciable.*

$$\begin{aligned} \theta : (-\delta, \delta) \times U &\longrightarrow M \\ (t, q) &\mapsto \theta(t, q), \end{aligned}$$

donde $\theta(t, q)$, para todo $t \in (-\delta, \delta)$, es la curva integral de V pasando por $q = \theta(0, q)$.

Definición 2.1.3. Sean M una variedad diferenciable, $V \in \mathcal{T}(M)$ y U un abierto de M. Denominaremos flujo local de V en M a la siguiente aplicación diferenciable.

$$\begin{aligned} \theta_t : &U \longrightarrow M \\ &q \mapsto \theta_t(q) := \theta(t, q). \end{aligned}$$

Donde $\theta(t, q)$ denota un flujo.

Proposición 2.1.4. *Sean M una variedad diferenciable, $V \in \mathcal{T}(M)$ y θ_t el flujo asociado a V. Fijado un punto $p \in M$, a partir de la Nota 1.3.11 obtenemos las siguientes propiedades:*

- $\theta_0(p) = p$.
- $\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p)$.

En particular, como consecuencia de esta proposición vemos que $\theta_t^{-1}(p) = \theta_{-t}(p)$.

Teorema 2.1.5. *Sean M una variedad diferenciable y $V, V' \in \mathcal{T}(M)$, denotemos por θ_t, θ'_t el flujo de V y V', respectivamente. Sean $p \in M$ y $(U, \{x^1, ..., x^n\})$ un entorno coordenado de p . Para cada función componente $x^i, i \in \{1, ..., n\}$.*

$$[V, V']_p(x^i) = \lim_{s,t \to 0} \frac{1}{ts} \big(x^i(\theta'_s(\theta_t(p))) - x^i(\theta_t(\theta'_s(p))) \big).$$

Una vez analizados los conceptos de flujo e interpretación geométrica de Corchete de Lie, construimos la derivada de Lie empezando por las funciones $f \in C^\infty(M)$.

Definición 2.1.6. Sea M una variedad diferenciable, $X \in \mathcal{T}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ y sea θ_t un flujo local de X tal que $\theta(t,p)$ es la curva integral de X que pasa por p, $\theta(0,p) = p$. Definimos la derivada de Lie en f como

$$X(f) = \lim_{t \to 0} \frac{f \circ \theta_t - f}{t}$$

donde, para cada $m \in M$,

$$X(f)(m) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\theta_t(m)) - f(m)}{t}$$

Por el Teorema 2.1.2, tenemos estrechamente relacionados los flujos locales con los campos de vectores, y viendo la expresión de la derivada de Lie, notamos que $\lim_{t\to 0} \frac{f(\theta_t(m))-f(m)}{t} = \frac{d}{dt}(f \circ \theta_t(m))|_{t=0}$ que cumple las propiedades de derivación de la Proposición 1.2.26. Por ello concluimos que está bien definido.

De igual manera, podemos definir la derivada de Lie para campo de Tensores.

Definición 2.1.7. Sean M una variedad diferenciable, p un punto de M, $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$ un campo de tensores y $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo de vectores. Definimos la derivada de Lie de T en p como el siguiente límite.

$$L_X(T)_p := \lim_{t \to 0} \frac{(\theta_t^* T)_p - T_p}{t}$$

Donde θ_t^* denota el pullback de θ_t.

Esta expresión está bien definida pues, si la inversa de un flujo local es otro flujo y estas aplicaciones son diferenciables, entonces θ_t es difeomorfismo y $\theta_t^*(T)$ es un campo de tensores.

Con ello, podemos enunciar las siguientes propiedades.

Proposición 2.1.8. *Sean M una variedad diferenciable, $X \in \mathcal{T}(M)$, $f \in C^{\infty}(M)$, $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$, $T' \in \mathcal{T}^{(r',s')}(M)$ y C_j^i una contracción, se cumple:*

1. $L_X(T + T') = L_X T + L_X T'$.

2. $L_X(T \otimes T') = L_X T \otimes T' + T \otimes (L_X T')$.

3. $L_X(C_i^j T) = C_j^i(T)$.

Demostración. Sean $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$ y $T' \in \mathcal{T}^{(r',s')}(M)$ dos tensores y sea $X \in \mathcal{T}(M)$, entonces:

1) Teniendo en cuenta que θ_t^* es isomorfismo, podemos demostrar de manera trivial esta igualdad a partir de la definición de derivada de Lie.

2) Usando que el producto tensorial es bilineal, en particular es continuo y conmuta con el límite, obtenemos

$$\begin{aligned}
L_X(T \otimes T') &= \lim_{t\to 0} \frac{\theta *_t (T \otimes T' - T \otimes T')}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\theta *_t (T) \otimes \theta_t^*(T') - T \otimes T'}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\theta *_t (T) \otimes \theta_t^*(T') - T \otimes T' + T \otimes \theta_t^* T' - T \otimes \theta_t^* T'}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\theta_t^* T \otimes -T}{t} \otimes \theta_t^* T' + \lim_{t\to} T \otimes \frac{\theta_t^* T' - T'}{t} \\
&= L_X T \otimes T' + T \otimes L_X T'.
\end{aligned}$$

3) Al ser la contracción una aplicación lineal y, por lo tanto continua, podemos concluir de la siguiente manera.

$$L_X(C_i^j T) = \lim_{t\to 0} \frac{\theta_t^*(C_i^j T) - C_i^j T}{t} = \lim_{t\to 0} C_i^j \left(\frac{\theta_t^* T - T}{t} \right) = C_i^j(L_X T).$$

■

Al poder expresar el producto exterior como combinaciones lineales de productos tensoriales, los siguientes corolarios son resultados inmediatos de la proposición anterior.

Corolario 2.1.9. *Sean M una variedad diferenciable, $X \in \mathcal{T}(M)$, $f \in C^{\infty}(M)$, $T \in$*

$\mathcal{T}^{(r,s)}(M)$ y $T' \in \mathcal{T}^{(r',s')}(M)$. Se cumple

$$L_X(T \wedge T') = L_X T \wedge T' + T \wedge (L_X T').$$

Corolario 2.1.10. *Sea M una variedad diferenciable, $X \in \mathcal{T}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$, $\{e_1, ..., e_r\}$ y $\{\omega^1, ..., \omega^s\}$, entonces*

$$\begin{aligned}
&L_X(T)(e_1, ..., e_r, \omega^1, ..., \omega^s) \\
=&L_X(T(e_1, ..., e_r, \omega^1, ..., \omega^s)) - \sum_{i=1}^{r} T(e_1, ..., L_X(e_i), ..., e_r, \omega^{j_1}, ..., \omega^{j_s}) \\
&- \sum_{j=1}^{s} T(e_1, ..., e_r, \omega^1, ..., L_X(\omega^j), ..., \omega^s).
\end{aligned}$$

Demostración. Para ello, sea $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M)$, $\{X_1, ..., X_r\} \in \mathcal{T}(M)$, $\{\omega^1, ..., \omega^s\} \in \mathcal{T}^*(M)$. Entonces, aplicamos la contracción C de la siguiente forma

$$T(X_1, ..., X_r, \omega^1, ..., \omega^s) = C(T \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^s)$$

Así,

$$\begin{aligned}
&L_X(T(X_1, ..., X_r, \omega^1, ..., \omega^s)) = L_X(C(T \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^s)) \\
=&C\left(L_X(T) \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^s + T \otimes L_X(X_1 \otimes ... \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^s)\right) \\
=&C\left(L_X(T) \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^s\right) + C\left(T \otimes L_X(X_1 \otimes ... \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^s)\right) \\
=&C\left(L_X(T) \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^s\right) + C\left(T \otimes L_X(X_1 \otimes ... \otimes X_r) \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^s\right) \\
&+ C\left(T \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_r \otimes L_X(\omega^1 \otimes ... \otimes \omega^s)\right).
\end{aligned}$$

Con ello, veamos que los tres sumandos se corresponden con el resultado.

$$C\left(L_X(T) \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^s\right) = L_X(T)(X_1, ..., X_r, \omega^1, ..., \omega^s).$$

El segundo sumando:

$$C\left(T\otimes L_X(X_1\otimes ...\otimes X_r)\otimes \omega^1\otimes ...\otimes \omega^s\right)=\sum_{i=1}^{r} C\left(T\otimes X_1\otimes L_X(X_i)\otimes X_r\otimes \omega^1\otimes ...\otimes \omega^s\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{r} T(X_1,...,L_X(X_i),...,X_r,\omega^1,...,\omega^s).$$

Operando de manera análoga, el tercer sumando nos da el resto de la ecuación a comprobar y damos por demostrado el corolario. ■

Nota 2.1.11. *Con este resultado, podemos ver que las dos definiciones de derivada de Lie para campos vectoriales son equivalentes.*

- $[X,Y](f)=(X\circ Y-Y\circ X)(f)$.
- $L_XY(f)=L_X(Y(f))-Y(L_Xf)=X(Y(f))-Y(X(f))$.

Finalizamos esta sección enunciando y demostrando el siguiente corolario.

Corolario 2.1.12. *Sean M una variedad diferenciable y $X\in\mathcal{T}(M)$. Dada una función $f\in C^\infty(M)$, se cumple que: $L_X(df)=d(X(f))$.*

Demostración. Dado un campo de vectores Y, aplicando el corolario anterior a 1-formas, podemos calcular el siguiente resultado.

$$\begin{aligned}L_X(df)(Y)&=X(df(Y))-df(L_X(Y))=X(Y(f))-[X,Y](f)\\&=X(Y(f))-(X\circ Y-Y\circ X)(f)=X(Y(f))-X(Y(f))+Y(X(f))\\&=Y(X(f))=d(X(f))(Y),\end{aligned}$$

con lo que quedaría demostrado. ■

2.2. Caracterizaciones rápidas a raíz de la definición

En esta sección elaboraremos un estudio basándonos en [3], donde relacionaremos el concepto de función par de algunas aplicaciones ya estudiadas con la definición de espacio D'Atri.

Definición 2.2.1. Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión n, se dice que M es espacio D'Atri si toda simetría por geodésica conserva localmente el volumen salvo signo. Es decir, dados $p \in M$ y $q \in exp_p(B_\epsilon(0))$ si denotamos $F(q) = F(exp_p(tX)) = exp_p(-tX) =: -q$ como la simetría del punto q por p, entonces, M es un espacio D'Atri si, $\forall \omega \in \Omega^n(M)$, $\omega_q(v_1, ..., v_n) = \pm\omega_{-q}(F_*(v_1), ..., F_*(v_n))$, donde $v_1, ..., v_n \in T_qM$.

Una forma de relacionar el volumen es a través de la divergencia que veremos en el Lema 2.2.6, lo que hace que sea necesario realizar un breve estudio de este concepto.

Definición 2.2.2. Sea (M, g) una variedad riemanniana. Entonces, dados un campo de vectores $X \in \mathcal{T}(M)$ y una forma de volumen $\omega \in \Omega^n(M)$, tal que $\omega = \sqrt{|G|}dx^1 \wedge ...dx^n$, definimos $div(X)$ como la única función $C^\infty(M)$ que cumple la siguiente ecuación

$$div(X)\omega := L_X(\omega). \tag{2.1}$$

De [9], obtenemos como relacionar el concepto de divergencia con el de la traza de una aplicación.

Proposición 2.2.3. *Sea (M, g) una variedad riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita. Entonces, para todo campo de vectores $X \in TM$, tenemos que*

$(divX)_p =$ *traza del endomorfismo* $V \mapsto \nabla_V X, V \in T_pM.$

Demostración. Para ello definimos $A_X := L_X - \nabla_X$. Sea $X_1, ..., X_n$ base de T_pM.

Por un lado al tener la conexión de Levi-Civita, en particular usando $\nabla g = 0$, $\nabla_X \omega = 0$, donde $\omega = \sqrt{|G|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$. Por otra parte A_X anula a toda función $f \in C^\infty(M)$, pues $A_X(f) = L_X(f) - \nabla_X(f) = X(f) - X(f) = 0$ y $A_X(Y) = L_X(Y) - \nabla_X(Y) = [X, Y] - (\nabla_Y X + [X, Y]) = -\nabla_Y X$.

Viendo que $div(X) = -traza\ (A_X)$ habríamos acabado,

$$
\begin{aligned}
&(L_x\omega)(X_1, ..., X_n) = (A_X\omega)(X_1, ..., X_n) + \nabla_X\omega(X_1, ..., X_n) \\
&= (A_X\omega)(X_1, ..., X_n) = A_X(\omega(X_1, ..., X_n)) - \sum_i \omega(X_1, ..., A_X X_i, ..., X_n) \\
&= -\sum_i \omega(X_1, ..., \sum_{j=1}^n a_{ji}X_j, ..., X_n) = -\sum_i \omega(X_1, ..., a_{ii}X_i, ..., X_n) \\
&= -(traza\ (A_X))\omega(X_1, ..., X_n).
\end{aligned}
$$

Por tanto, tenemos que $div(X) = -traza\ (A_X)$. ■

Proposición 2.2.4. *Sea (M, g) una variedad riemanniana tal que G es la matriz que representa la métrica, $\{x^i\}$ un sistema coordenado, $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ un campo de vectores, ω una n-forma. Entonces podemos expresar la divergencia de X como*

$$
div(X) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{|G|}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{|G|} \cdot X^k). \tag{2.2}
$$

Demostración. Para ello, usando la definición de la n-forma de volumen asociada al sistema coordenado $\{x^i\}$, $\omega = \sqrt{|G|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$. En primer lugar, probamos $L_X(dx^1 \wedge ... \wedge dx^n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$.

$$
\begin{aligned}
&L_X(dx^1 \wedge ... \wedge dx^n) = \\
=&\sum_{i=1}^n dx^1 \wedge ... \wedge L_X(dx^i) \wedge .... \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n dx^1 \wedge ... \wedge d(L_X(x^i)) \wedge .... \wedge dx^n.
\end{aligned}
$$

Es trivial que $d(L_X(x^i)) = d(X^i)$. Por otro lado esta 1-forma se puede expresar como combinación lineal de la base $d(X^i) = \frac{\partial X^i}{\partial x^1}dx^1 + ... + \frac{\partial X^i}{\partial x^n}dx^n$. Luego, usando las propiedades de la derivada exterior y la definición de tensor hemisimétrico, tenemos

$$
\sum_{i=1}^n dx^1 \wedge ... \wedge d(L_X(x^i)) \wedge .... \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n.
$$

Y con ello probado, obtenemos la proposición.

$$
\begin{aligned}
L_x\omega &= L_X(\sqrt{|G|} \wedge dx^1 \wedge ... \wedge dx^n) \\
&= L_X(\sqrt{|G|}) \wedge dx^1 \wedge ... \wedge dx^n + \sqrt{|G|} \wedge L_X(dx^1 \wedge ... \wedge dx^n) \\
&= X(\sqrt{|G|})dx^1 \wedge ... \wedge dx^n + \sqrt{|G|}\frac{\partial X^i}{\partial x^i}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\
&= \left(\frac{X(\sqrt{|G|})}{\sqrt{|G|}} + \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\right)\sqrt{|G|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\
&= \left(\frac{X(\sqrt{|G|})}{\sqrt{|G|}} + \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\right)\sqrt{|G|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\
&= \left(\frac{X(\sqrt{|G|})}{\sqrt{|G|}} + \frac{\sqrt{|G|}}{\sqrt{|G|}}(\frac{\partial X^i}{\partial x^i})\right)\sqrt{|G|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{|G|}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|G|}X^i)\right)\sqrt{|G|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = \left(\frac{1}{\sqrt{|G|}} \cdot \frac{\partial}{dx^i}(\sqrt{|G|}X^i)\right)\omega.
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 2.2.5. Aplicando esta igualdad al caso de $\mathbb{R}^n$, tenemos la definición de divergencia que estamos habituados a usar, pues en la base usual, que es ortonormal e igual para todos los puntos, $\sqrt{|G|} = 1$ y, al ser constante, $X(\sqrt{|G|}) = 0$.
Por lo tanto, sustituyendo en la Ecuación (2.2), vemos el caso particular.

Una vez estudiadas estas caracterizaciones de la divergencia comenzamos relacionando el volumen con el de divergencia con el siguiente lema.

Lema 2.2.6. *Un difeomorfismo local conserva la divergencia si y solo si conserva el volumen por un valor constante.*

Demostración. Sean $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ y $d\bar{x}^1\wedge\cdots\wedge d\bar{x}^n$ bases de $\Omega^n(M)$ y $\Omega^n(N)$, denotemos $|G|$ y $|\bar{G}|$ los determinantes de las matrices asociadas a las métricas g y $\bar{g}$ de M y N. Por lo visto en la Proposición 1.3.35 tenemos que, dadas $\omega \in \Omega^n(M)$ y $\bar{\omega} \in \Omega^n(N)$ formas de volúmenes tales que $\omega = \sqrt{|G|}\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ y $\bar{\omega} = \sqrt{|\bar{G}|}\ d\bar{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{x}^n$.
Así, sea $F : M \longrightarrow N$ un difeomorfismo local, luego $F^* : \Omega^n(N) \longrightarrow \Omega^n(M)$ es isomorfismo y, por tener $dim(\Omega^n(M)) = dim(\Omega^n(M)) = \binom{n}{n} = 1$, existe una función escalar $h : M \to \mathbb{R}$ tal que $F^*(\omega') = h\omega$. Uniendo las dos igualdades anteriores y, por definición

de pullback de F, obtenemos lo siguiente. $F^*(\bar{\omega}) = (\sqrt{|\bar{G}|} \circ F)\ d(\bar{x}^1 \circ F) \wedge \cdots \wedge d(\bar{x}^n \circ F) = h\sqrt{|G|}\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Entonces, dado $Y \in \mathcal{T}(M)$ y fijado $p \in M$ tenemos

$$
\begin{aligned}
div(F_*Y) \circ F &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{|\bar{G}|}} \frac{\partial}{d\bar{x}^j} (\sqrt{|\bar{G}|}(F_*Y)^j) \right) \circ F \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}((F_*Y)^j) + \frac{(F_*Y)^j}{\sqrt{|\bar{G}|}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}(\sqrt{|\bar{G}|}) \right) \circ F \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}((F_*Y)^j) + \frac{1}{\sqrt{|\bar{G}|}} F_*Y(\sqrt{|\bar{G}|}) \right) \circ F \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}((F_*Y)^j) + \frac{1}{\sqrt{|\bar{G}|}} F_*Y(\sqrt{|\bar{G}|}) \right) \circ F \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}(Y^j \circ F) \right) \circ F + \left(\frac{1}{\sqrt{|\bar{G}|}} F_*Y(\sqrt{|\bar{G}|}) \right) \circ F \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}(Y^j) + \left(\frac{1}{\sqrt{|\bar{G}|}} \right) \circ F \cdot \left(Y(\sqrt{|\bar{G}|} \circ F) \right) \circ F \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}(Y^j) + \frac{1}{\bar{\omega}(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^1}, ..., \frac{\partial}{\partial \bar{x}^n})} \circ F \cdot Y((\bar{\omega}(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^1}, ..., \frac{\partial}{\partial \bar{x}^n})) \circ F) \circ F \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}(Y^j) + \frac{1}{h\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})} \cdot Y(h\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}(Y^j) + \frac{1}{h\sqrt{|G|}} \cdot Y((h\sqrt{|G|}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}(Y^j) + \frac{1}{h\sqrt{|G|}} \cdot Y(h\sqrt{|G|}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}(Y^j) + \frac{Y(\sqrt{|G|})}{\sqrt{|G|}} + \frac{Y(h)}{h} \\
&= \mathrm{Div}(Y) + \frac{Y(h)}{h}.
\end{aligned}
$$

Para ver que $(div(F_*Y)) \circ F = div(Y)$, está claro que necesitamos que el valor $Y(h) = 0$, o dicho de otra forma, que h sea un valor constante. ∎

Nota 2.2.7. *Si suponemos que $N = M$, definiendo F como una simetría local por geodésica y, por lo tanto, $\omega = \bar{\omega}$ y $h = (-1)^n$.*
Usando las propiedades del pullback, dados $v, v_1, ..., v_n$ campos de vectores de M, si $F_*(v) = -v$ y si $F^*(\omega)(v_1, \ldots, v_n) = \omega(F_*(v_1), \ldots, F_*(v_n)) = \omega(-v_1, \ldots, -v_n) = (-1)^n \omega(v_1, \ldots, v_n)$.

Por tanto, se concluye que nuestra constante toma el valor $(-1)^n$.

Nota 2.2.8. *Podemos reescribir el lema anterior a partir de la distancia radial entre dos puntos dentro de un abierto coordenado de la siguiente forma.*

Dado un punto $q \in U \subset M$*, entorno normal de* p *y dado* X *campo de vectores unitarios tal que la curva geodésica de velocidad unitaria que une* p *con* q *sea su curva integral, sea* $r(q) = r$ *la distancia definida de* q *a* p*. En coordenadas normales este campo de vectores se puede definir como* $rX = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} = r\frac{d}{dr}$*, y su divergencia sería*

$$div(rX) = \frac{\partial}{\partial x^j}(x^j) + rX(\sqrt{|G|})\frac{1}{\sqrt{|G|}} = n + rX(\log(\sqrt{|G|})). \tag{2.3}$$

Nota 2.2.9. *Definimos* $\Omega(q) = \frac{r^2}{2}$ *como la función distancia a* p*. Veamos que cumple* $grad(\Omega) = rX$.

Demostración. Para ello, nos basaremos en el Corolario 1.3.60 y las propiedades del gradiente

$$grad(\frac{r^2}{2}) = \frac{1}{2}grad(r.r) = \frac{1}{2}(rgrad(r) + rgrad(r)) = r\frac{d}{dr}.$$

∎

Una vez probado este resultado, introducimos la definición de laplaciano.

Definición 2.2.10. Sea (M, g) una variedad diferenciable y $f \in C^\infty(M)$. Se define el laplaciano de f como la función:

$$\Delta f := div(grad(f)). \tag{2.4}$$

Podemos relacionarlo con la expresión de divergencia antes obtenida y llegamos a la siguiente igualdad.

$$div(rX) = div(grad(\Omega)) = \Delta\Omega. \tag{2.5}$$

Definición 2.2.11. Dado el campo de vectores definido previamente rX y dado un campo de vectores Y, definimos Λ como sigue

$$\Lambda(Y) = \nabla_Y rX. \tag{2.6}$$

Gracias a la Proposición 2.2.3, sabemos que $div(rX) = traza(\Lambda)$.

De esta manera, podemos tener las primeras caracterizaciones de los espacios D'Atri.

Teorema 2.2.12. *Sean (M, g) una variedad riemanniana, $p \in M$ un punto perteneciente a ella, U un entorno normal de p, X un campo de vectores unitario y q un punto de U tal que r sea la distancia radial de p a q. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La simetría local por geodésica conserva la divergencia.*
2. *La aplicación g es par, es decir, $g_q = g_{-q}$.*
3. *La aplicación $div(rX)$ es par, en el sentido que $div(rX)(q) = div(rX)(-q)$.*
4. *La aplicación $\Delta\Omega$ es par.*
5. *La aplicación $traza\ (\Lambda)$ es par.*

Demostración. 1. $\Longleftrightarrow$ 2.
Sea F una simetría por geodésica que conserva la divergencia, usando la Nota 2.2.7 tenemos que $F^*(\omega) = (-1)^n\omega$ para toda forma de volumen ω, luego por un lado tenemos que $F^*(dx^1\wedge ... \wedge dx^n) = (-1)^n dx^1\wedge ... \wedge dx^n$. Por otro lado si $\omega = \sqrt{|G|}dx^1\wedge ... \wedge dx^n$, entonces $F^*\omega = (-1)^n(\sqrt{|G|}\circ F)dx^1\wedge ... \wedge dx^n$, luego $\sqrt{|G|}\circ F = \sqrt{|G|}$, luego como en coordenadas normales F traslada q a $-q$, $\sqrt{|G|}$ tiene que ser par, luego g tiene que ser par. Para la otra implicación, si g es par, $\sqrt{|G|}$ es par, usando la Proposición 1.2.40 para cualquier simetría por geodésica $F^*(\omega) = (\sqrt{|G|}\circ F)|F^*|(dx^1\wedge ... \wedge dx^n) = (-1)^n\sqrt{|G|}dx^1\wedge ... \wedge dx^n = (-1)^n\omega$ y por la Nota 2.2.7 concluimos.

2. $\Longleftrightarrow$ 3.
Usando la Nota 2.2.8, esta equivalencia se hace trivial, pues $div(rX) = n + rX(\log(\sqrt{|G|}))$, $|G|$ es la única función donde q valora, luego $div(rX)$ será par si y solo si $|G|$ lo es.

3. $\Longleftrightarrow$ 4, 5.
Al ser el mismo concepto, estas demostraciones son inmediatas. ∎

2.3. Condiciones de la curvatura

Una vez conocidas las caracterizaciones rápidas, podemos entender mejor los espacios D'Atri si enfocamos el análisis desde una perspectiva algebráica a través del tensor de curvatura. De ello surgen las condiciones de Ledger, una serie de igualdades que serán la herramienta principal para el estudio en artículos como [13], donde particularizando la condición de estas igualdades, se obtiene que la variedad es analítica real, o en [2] donde se clasifican los espacios D'Atri homogéneos de dimensión 4.

Definición 2.3.1. Sean (M, g) variedad riemanniana y ∇ una conexión lineal. Se define el operador curvatura asociado a ∇.

$$\begin{aligned} R :& \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M) \\ & (X, Y, Z) \longmapsto R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y (Z) - \nabla_Y \nabla_X (Z) - \nabla_{[X,Y]}(Z). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nota 2.3.2. *Adaptando la fórmula de la curvatura con la aplicación lineal previamente definida, tenemos la siguiente expresión.*

$R(Y, rX)rX = \nabla_Y \nabla_{rX}(rX) - \nabla_{rX} \nabla_Y (rX) - \nabla_{[Y,rX]}(rX).$

Derivando Λ con respecto a rX, usando el Corolario 1.3.19 y que ∇ es de torsión nula, podemos calcular la curvatura de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} & \nabla_Y \nabla_{rX}(rX) - \nabla_{rX} \nabla_Y (rX) + \nabla_{\nabla_Y rX}(rX) - \nabla_{\nabla_{rX} Y}(rX) \\ & = -\nabla_{rX} \nabla_Y (rX) + \nabla_{\nabla_{rX} Y}(rX) - \nabla_{\nabla_Y rX}(rX). \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos la siguiente expresión de la curvatura.

$$-\nabla_{rX}(\Lambda)(Y) + \Lambda(Y) - \Lambda(\Lambda(Y)). \tag{2.8}$$

Nota 2.3.3. *Si $r < 0$, el campo que derivaríamos sería $-rX$, quedando la siguiente expresión.*

$$-\nabla_{-rX}(\Lambda)(Y) + \Lambda(Y) - \Lambda(\Lambda(Y)).$$

Ahora, definiendo la siguiente transformación lineal

$$r^2\Pi(Y) = -R(Y, rX)(rX) = -R(Y, -rX)(-rX). \tag{2.9}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.8) y si abstraemos para cualquier campo de vectores Y, queda la siguiente igualdad.

$$r\nabla_X\Lambda = \Lambda - \Lambda \circ \Lambda + r^2\Pi. \tag{2.10}$$

Del resultado obtenido, generalizamos el punto q y estudiamos que sucede cuando $q = p$, o dicho de otra forma, cuando $r = 0$. $\Lambda|_0 = \Lambda \circ \Lambda|_0$ En este caso, se plantean dos opciones: ó $\Lambda|_0 = 0$ ó $\Lambda|_0 = Id$, elegimos $\Lambda|_0 = Id$, pues si $\Lambda|_0 = 0$ habríamos acabado el análisis.

$$\Lambda|_0 = Id, r = 0. \tag{2.11}$$

De la ecuación (2.10), derivando en ambas igualdades, obtenemos una expresión para la segunda derivada covariante de Λ.

$$\begin{aligned}
&\nabla_X(r\nabla_X\Lambda)\\
=&r\nabla_X^2(\Lambda) + X(r)\nabla_X\Lambda\\
=&\nabla_X(\Lambda) - \nabla_X(\Lambda \circ \Lambda) + \nabla_X(r^2\Pi)\\
=&\nabla_X(\Lambda) - \nabla_X(\Lambda) \circ \Lambda - \Lambda \circ \nabla_X(\Lambda) + 2r\Pi + r^2\nabla_X(\Pi).
\end{aligned}$$

Nota 2.3.4. *Si observamos qué ocurre cuando $q = p$, podemos obtener que $\nabla_X(\Lambda)|_0 = 0$, pues de la conclusión anterior tenemos*

$$\begin{aligned}
&0\nabla_X^2(\Lambda) + X(0)\nabla_X\Lambda = \nabla_X(\Lambda) - \nabla_X(\Lambda) \circ \Lambda - \Lambda \circ \nabla_X(\Lambda) + 2 * 0\Pi + 0^2\nabla_X(\Pi)\\
=&\nabla_X(\Lambda) \circ \Lambda|_0 = -\Lambda \circ \nabla_X(\Lambda)|_0\\
=&\nabla_X(\Lambda)|_0 = -\nabla_X(\Lambda)|_0.
\end{aligned}$$

Calculando la n-ésima derivada en la expresión (2.10), llegamos a

$$\nabla_X^{(n)}(r^2\Pi) = (\nabla_X^{(n)}(r\nabla_X(\Lambda)) - \nabla_X^{(n)}(\Lambda) + \nabla_X^{(n)}(\Lambda \circ \Lambda).$$

A través de la Proposición 1.3.4 y teniendo en cuenta que $\nabla_X(r) = \frac{\partial r}{dr} = 1$, analizamos primero la expresión de la izquierda de la igualdad y posteriormente, la parte derecha.

1. $\nabla_X^{(n)}(r^2\Pi) = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h}\nabla_X^{n-h}(r^2)\nabla_X^h(\Pi) = r^2\nabla_X^n(\Pi)+2nr\nabla_X^{n-1}(\Pi)+n(n-1)\nabla_X^{n-2}(\Pi)$.

2. *a)* $\nabla_X^{(n)}(r\nabla_X(\Lambda)) - \nabla_X^{(n)}(\Lambda) = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h}\nabla_X^{n-h}(r)\nabla_X^h(\Lambda) - \nabla_X^{(n)}(\Lambda)$
   $= r\nabla_X^{n+1}(\Lambda) + (n-1)\nabla_X^n(\Lambda)$.

   b) $\nabla_X^{(n)}(\Lambda \circ \Lambda) = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h}\nabla_X^h(\Lambda) \circ \nabla_X^{n-h}(\Lambda)$.

Uniendo los dos términos y particularizando para $r = 0$, la igualdad nos queda de la siguiente forma.

$$n(n-1)\nabla_X^{n-2}(\Pi)|_0 = (n+1)\nabla_X^n(\Lambda)|_0 + \sum_{h=2}^{n-2}\binom{n}{h}\nabla_X^h(\Lambda) \circ \nabla_X^{n-h}(\Lambda)|_0. \tag{2.12}$$

Una vez obtenida esta fórmula, tratamos de expresar $\nabla_X^n(\Lambda)|_0$ en términos de $\nabla_X^h(\Pi)|_0$.

Ejemplo 2.3.5. Para $n = 2$, tenemos el siguiente caso $\Pi|_0 = \frac{3}{2}\nabla_X^2(\Lambda)|_0$ o despejando $\nabla_X^2(\Lambda)|_0$ tenemos la igualdad $\nabla_X^2\Lambda|_0 = \frac{2}{3}\nabla_X^0\Pi|_0$.

Y para $n > 2$, por inducción, obtenemos los siguientes valores despejando de la ecuación (2.12).

$$\begin{aligned}
(n+1)\nabla_X^n(\Lambda)|_0 &= n(n-1)\nabla_X^{n-2}(\Pi)|_0 - \sum_{h=2}^{n-2}\binom{n}{h}\nabla_X^h(\Lambda) \circ \nabla_X^{n-h}(\Lambda)|_0 \\
= \nabla_X^n(\Lambda)|_0 &= \frac{n(n-1)}{n+1}\nabla_X^{n-2}(\Pi)|_0 - \sum_{h=2}^{n-2}\binom{n}{h}\nabla_X^h(\Lambda) \circ \nabla_X^{n-q}(\Lambda)|_0 \\
&= (n+1) \cdot \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} C_{i_1 \dots i_k}^n \nabla_X^{i_1} \circ \dots \circ \nabla_X^{i_k}|_0.
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad la obtenemos por la siguiente inducción.

Teorema 2.3.6. *Usando la notación antes descrita, obtenemos*

$$\nabla_X^r \Lambda|_0 = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{i_1,\dots,i_k}^n \nabla_X^{i_1} \Pi \circ \dots \circ \nabla^{i_k} \Pi|_0 \tag{2.13}$$

Donde $i_1, \dots, i_k = n - 2k$, $[\frac{n}{2}]$ *denota la parte entera de la fracción* $\frac{n}{2}$ *y las constantes se obtienen de la siguiente manera.*

- $C_{i_1}^n = C_{n-2}^n = \frac{n(n-1)}{n+1}$

- $C_{i_1,\dots,i_k}^n = -\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^k \binom{n}{h_j} C_{i_1 \dots i_j}^{h_j} \cdot C_{i_{j+1} \dots i_k}^{n-q_j}$.

Donde $h_j = 2j + (i_1 + \dots + i_j) = n - 2k + 2j - (i_{j+1} + \dots + i_k)$.

Demostración. Para ver que se cumple la igualdad, necesitaremos encontrar un valor k y unos índices $\{i_1, \dots, i_k\}$ que cumplan $n = i_1 + \dots + i_k + 2k$. Vemos que, si $n = 2$, corresponde con el Ejemplo 2.3.5. Podemos asumir que se cumple para todo $h < n$. Determinamos

$$\nabla_X^n(\Lambda)|_0 = \frac{n(n-1)}{n+1} \nabla_X^{n-2}(\Pi)|_0 - \frac{1}{n+1} \sum_{h=2}^{n-2} \binom{n}{h} \nabla_X^h(\Lambda) \circ \nabla_X^{n-h}(\Lambda)|_0.$$

El caso $C_{i_1}^n = C_{n-2}^n$ es trivial. Para el resto de sumas tenemos que, al ser $h < n$, podemos aplicar la hipótesis de inducción sobre $\sum_{h=2}^{n-2} \binom{n}{h} \nabla_X^h(\Lambda) \circ \nabla_X^{n-h}(\Lambda)|_0$, por lo que sabemos que existen unos índices $\{i_1, \dots, i_j\}$ tal que $i_1 + \dots + i_j + 2j = h$, y $\{i_{j+1}, \dots, i_{j+s}\}$ tales que $i_{j+1} + \dots + i_{j+s} + 2s = n - h$. De esta forma definimos el valor k como $k = j + s$ y, por tanto, por inducción de la expresión $\sum_{h=2}^{n-2} \binom{n}{h} \nabla_X^h(\Lambda) \circ \nabla_X^{n-h}(\Lambda)|_0$ y reestructurando las sumas, obtenemos

$$\sum_{h=2}^{n-2}\binom{n}{h}\nabla_X^h(\Lambda)\circ\nabla_X^{n-h}(\Lambda)|_0 =$$
$$=\sum_{h=2}^{n-2}\binom{n}{h}\left(\sum_{j=2}^{[\frac{h}{2}]}C^h_{i_1\dots i_j}\nabla_X^{i_1}\Pi\circ\dots\circ\nabla_X^{i_j}\Pi|_0\right)\circ\left(\sum_{s=2}^{[\frac{n-h}{2}]}C^{n-h}_{i_{j+1}\dots i_{j+s}}\nabla_X^{i_{j+1}}\Pi\circ\dots\circ\nabla_X^{i_k}\Pi|_0\right)$$
$$=\sum_{h=2}^{n-2}\binom{n}{h}\left(\sum_{j,s}C^h_{i_1\dots i_j}\cdot C^{n-h}_{i_{j+1}\dots i_k}\nabla_X^{i_1}\Pi\circ\dots\circ\nabla_X^{i_j}\Pi\circ\nabla_X^{i_{j+1}}\Pi\circ\dots\circ\nabla_X^{i_k}\Pi|_0\right)$$
$$=\sum_{h=2}^{n-2}\binom{n}{h}\left(\sum_{j+s=1}^{[\frac{h}{2}]+[\frac{n-h}{2}]}\sum_{j=1}^{j+s}C^h_{i_1\dots i_j}\cdot C^{n-h}_{i_{j+1}\dots i_{j+s}}\nabla_X^{i_1}\Pi\circ\dots\circ\nabla_X^{i_j}\Pi\circ\nabla_X^{i_{j+1}}\Pi\circ\dots\circ\nabla_X^{i_{j+s}}\Pi|_0\right).$$

En conclusión, definimos $k=j+s$ y en el caso par, es decir cuando $[\frac{h}{2}]+[\frac{n-h}{2}]=[\frac{n}{2}]$, definimos $C^n_{i_1,\dots,i_k} := \sum_{j=1}^{k}\binom{n}{h}C^h_{i_1\dots i_j}C^{n-h}_{i_{j+1}\dots i_k}$ si $[\frac{h}{2}]+[\frac{n-h}{2}]=[\frac{n}{2}]$, y obtenemos la siguiente igualdad.

$$n=n-h+h=i_1+\dots+i_j+i_{j+1}+\dots+i_{j+s}+2(s+j)=i_1+\dots+i_k+2k.$$

En el caso impar o dicho de otra forma, si $[\frac{h}{2}]+[\frac{n-h}{2}]+1=[\frac{n}{2}]$, el sumatorio de $C^n_{i_1,\dots,i_{k+1}}$ llegaría hasta $k+1$ y obtenemos esta otra igualdad.

$$n=n-h+h=i_1+\dots+i_j+i_{j+1}+\dots+i_{j+s+1}+2(s+j+1)=i_1+\dots+i_{k+1}+2(k+1).$$

■

Si *traza* (Λ) tiene que ser una función par con respecto r a lo largo de la geodésica entonces la igualdad
$$\frac{d^n}{dr^n}(traza\ (\Lambda)) = traza\ (\nabla_X^n\Lambda)$$
debe anularse en $r=0$ para todos los valores impares. Con ello, y denominando P^r a los coeficientes anteriores, reescribimos la fórmula

$$P^n=\sum_{k=1}^{[n/2]}C^r_{i_1,\dots,i_k}\nabla_X^{i_1}\Pi\circ\dots\circ\nabla_X^{i_k}\Pi. \tag{2.14}$$

Al depender solo de la geodésica elegida y de la curvatura, por la definición del operador Π, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.7. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Entonces, si toda simetría por geodésica conserva el volumen, se cumple que para $n = 3, 5, 7, ...$, traza $(P^n) = 0$.*

Teorema 2.3.8. *Si la superficie es analítica real, la condición del teorema anterior es suficiente.*

Demostración. En este caso, *traza* (Λ) tiene una expansión de potencias de r a lo largo de cualquier geodésica a través de p. Por lo tanto, si las potencias impares son nulas y solo quedan las potencias pares, la función *traza* (Λ) es par, luego el espacio es D'Atri. ■

Proposición 2.3.9. *Otra forma de trabajar es a través de la curvatura, obteniendo su expresión a raíz de Π en la ecuación (2.9) y de las derivadas covariantes.*

$$(\nabla^n_X \Pi)(Y) = (\nabla^n_X R)(Y, X)X = (\nabla^n R)(Y, X; X, ..., X)X. \tag{2.15}$$

Demostración. Podemos probarlo por inducción. Para $n = 0$, es trivial, ya que es cierto por la expresión (2.8). Suponiendo que es cierto para $n - 1$,

$$(\nabla^n_X \Pi)(Y) = (\nabla_X(\nabla^{n-1} X\Pi))(Y) = \nabla_X(\nabla^{n-1} X\Pi(Y)) - \nabla^{n-1}_X \Pi\nabla_X(Y).$$

Observamos que $\Pi\nabla_X(Y) = -\Pi\nabla_X(Y) = 0$. Pues de ser cierto, habríamos terminado, ya que $\nabla_X(\nabla^{n-1} X\Pi(Y)) = \nabla X(\nabla^{n-1} XR)(Y, X)X = (\nabla^n XR)(Y, X)X = (\nabla^n R)(Y, X; X, \ldots, X)X$. Utilizando que $\nabla_X X = 0$, concluimos la demostración.

$$\begin{aligned} -\Pi\nabla_X(Y) = R(\nabla_X Y, X)X &= (\nabla_{\nabla_X Y}\nabla_X X - \nabla_{\nabla_X}\nabla_{\nabla_X Y} X - \nabla_{[\nabla_X Y, X]} X) \\ &= \nabla_{\nabla_X}\nabla_{\nabla_X Y} X + \nabla_{[\nabla_X Y, X]} X = \nabla_{\nabla_X Y}\nabla_X X - \nabla_{[\nabla_X Y, X]} X + \nabla_{[\nabla_X Y, X]} X &= 0. \end{aligned}$$

■

Así, por la Proposición 2.3.6, sustituyendo $\nabla^h_X \Pi$ por $\nabla^h R(Y, X; X, ..., X)X$, tendríamos las condiciones de Ledger en función de la curvatura.

Bibliografía

[1] Teresa Arias Marco. *Apuntes Geometria Riemanniana.* 2022.

[2] Teresa Arias-Marco and Oldřich Kowalski. Classification of 4-dimensional homogeneous D'Atri spaces. *Czechoslovak Math. J.*, 58(133)(1):203–239, 2008.

[3] J. E. D'Atri and H. K. Nickerson. Divergence-preserving geodesic symmetries. *J. Differential Geometry*, 3:467–476, 1969.

[4] J. E. D'Atri and H. K. Nickerson. Geodesic symmetries in spaces with special curvature tensors. *J. Differential Geometry*, 9:251–262, 1974.

[5] J. E. D'Atri and W. Ziller. Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 18(215):iii+72, 1979.

[6] Simon Gindikin. *Topics in Geometry: In Memory of Joseph D'Atri*, volume 20 of *Progress in Nonlinear Differential Equations.* Birkhäuser, 1996.

[7] Bert Janssen. *Gravitación y geometría. Una introducción moderna a la Teoría de la Relatividad General.* Editorial Universidad de Granada,, 2022.

[8] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis.* Universitext. Springer, Cham, 7 edition.

[9] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. II.* Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney,, 1969.

[10] Oldřich Kowalski, Friedbert Prüfer, and Lieven Vanhecke. D'Atri spaces. In *Topics in geometry*, volume 20 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 241–284. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.

[11] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

[12] Batildo Requejo Fernández. *Apuntes Algebra Lineal II.* 2020.

[13] Z. I. Szabo. Spectral theory for operator families on Riemannian manifolds. In *Differential geometry: Riemannian geometry (Los Angeles, CA, 1990)*, volume 54, Part 3 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 615–665. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.