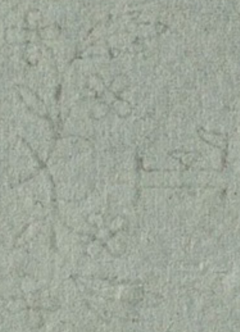
CESAR.

1.



Bart.e Alzina

CURSO
DE ESTUDIOS ELEMENTALES
DE MARINA,

ESCRITO DE ORDEN DE S. M.

POR DON GABRIEL CISCAR.

TOMO I,

QUE CONTIENE EL TRATADO DE ARITMETICA.

SEXTA EDICION.

MADRID EN LA IMPRENTA NACIONAL.
AÑO DE 1840.

INTRODUCCION.

El objeto principal de este tratado es facilitar la práctica del Pilotage, y la inteligencia de algunas proposiciones de maniobra y artillería. Esta es la razon por que se explican en él extensamente las reglas y propiedades de que se hará mucho uso en dichos tratados, al paso que se tocan muy por encima otras utilísimas para las aplicaciones de la aritmética al comercio y á varias ciencias y artes, de que se prescinde en este curso elemental.

El método que se ha seguido en la ordenacion de materias y en el modo de operar, es el resultado de muchas reflexiones fundadas en la naturaleza y uso de las cosas, y en una larga práctica de enseñar, examinar y dirigir á los maestros. Estamos persuadidos en que para los que saben los métodos mas expeditos y seguros suelen ser aquellos á que estan acostumbrados. Los discípulos que entran de nuevo en la carrera de las ciencias se hallan en un caso muy distinto; y los maestros que por flojedad, por ignorancia, ó por un amor propio mal fundado, no se arreglen al método que se prescribe, serán responsables de las malas resultas que debe tener la falta de conformidad de sus explicaciones con las del texto, cuya inteligencia deben facilitar por todos los medios imaginables. La primera ocupacion del maestro que desee enseñar con aprovechamiento, será el hacer un estudio formal de los tratados escritos para servir de texto á su doctrina.

A estas advertencias y reflexiones generales, aplicables á la enseñanza de todos los tratados, conviene añadir otras particulares al de aritmética.

Para facilitar á los discípulos el estudio de una ciencia tan interesante, se tendrá presente el no señalar de leccion regla alguna que no se haya aclarado con ejemplos: y será conveniente el que dichas reglas se aprendan de memoria, respecto á que su texto debe ser el recurso para resolver cualquiera dificultad que se presente en la ejecucion. Tambien deberán aprenderse de memoria las proposiciones teóricas que sirven de base para la buena aplicacion de las reglas, y para la deduccion de algunas consecuencias interesantes, que facilitarán la inteligencia de los demas tratados.

En cuanto á las demostraciones es muy suficiente el entenderlas y el dar razon de ellas, aunque para esto se haga uso de voces y expresiones diferentes de las que se emplean en el texto. Los que no se hallen en estado de comprender á fondo dichas demostraciones, bastará que tomen alguna idea de ellas; y de los dos extremos, el de pasarlas enteramente por alto es preferible al de aprenderlas materialmente de memoria sin entenderlas.

Las explicaciones y ejemplos, que van de letra menor, se han puesto con el objeto de uniformar, en cuanto sea dable, el método de los maestros de repaso con el que se sigue en la academia, y para que los discípulos de mejor disposicion para el estudio puedan repasar por sí solos, y aun anticiparse á las lecciones ordinarias. La omision de esta parte interesante disminuiria considerablemente el volúmen del tratado de aritmética; pero dicha disminucion seria en perjuicio de la claridad y facilidad que deben constituir el mérito principal de un Tratado de enseñanza.

Cuando la explicacion caiga al otro lado de la plana en que se halla el ejemplo á que pertenece, se puede copiar este en un papel suelto, que se tendrá á la vista para facilitar la inteligencia de dicha explicacion.

Las materias se han distribuido en XIII capítulos: algunos de los cuales se han subdividido en títulos secundarios, cuando la naturaleza de las materias lo ha exigido.

El capítulo I, bajo el título de *nociones generales*, comprende las definiciones de muchos términos facultativos, y la enunciacion de algunas verdades, que constituyen la base fundamental de todas las Ciencias Matemáticas. En la primera lectura se pueden pasar por alto algunos de los artículos comprendidos entre el 7 y 38; y á los Maestros toca el ir aclarando dicha doctrina con ejemplos, al paso que se vaya presentando la ocasion.

En el capítulo II se expone todo lo relativo al modo de enunciar cualquiera cantidad numérica, y al de representarla con cifras. Para la práctica ordinaria de la navegacion basta saber enunciar y representar las cantidades simples comprendidas entre los millones y los milésimos, los quebrados mas sencillos, y los números complexos; y en el caso de que se trate de operar con cantidades compuestas de muchas cifras, se puede recurrir al arbitrio que se manifiesta en el artículo 56.

En el capítulo III se trata de las cantidades positivas y negativas; y en el IV se explican las operaciones de sumar y restar los números simples. La materia de estos dos capítulos es muy interesante para facilitar la solucion de muchos problemas usuales en la práctica de la navegacion.

En el capítulo V se trata del multiplicar los números simples. El modo de ordenar las cifras y separar los decimales, que se enseña desde el número 1º hasta el 6º del artículo 113, tiene sobre el método ordinario la ventaja de aplicarse con suma facilidad á determinar el producto con el grado de aproximacion que permite la naturaleza de los factores, segun se enseña en el Tratado impreso en Murcia para la instruccion de los Guardias Marinas, desde el artículo 128 al 138. Sin embargo de esto, no hay inconveniente en que en la práctica ordinaria se emplee el método que se ha usado generalmente hasta ahora, ejecutando la separacion de decimales segun se prescribe en el número 7º del artículo citado.

En el capítulo VI se trata del modo de partir los números simples. Los sugetos de poca disposicion para el estudio, pueden contentarse con el método pesado y material que se explica en el artículo 140. En tal caso, para tantear las cifras del cuociente pueden escribir en papel separado la cifra que se trata de determinar, y su producto por todo el divisor. Si dicho producto resulta mayor que la porcion correspondiente del dividendo, se rebajará una unidad del cuociente; y luego que se haya obtenido un producto igual ó menor que la cantidad de que se ha de restar, se escribirán en sus lugares correspondientes, la nueva cifra del cuociente y su producto por el divisor; y se continuará la operacion segun se previene en el artículo citado. Para los sugetos de mediana disposicion, el método del artículo 140 solo debe servir de preliminar para facilitar la inteligencia del método mas expedito y elegante que se explica en el artículo 149. En tal caso, deben imponerse muy bien en el modo de tantear las cifras del cuociente, segun se enseña en el artículo 147. A los Maestros toca el facilitar la ejecucion de dicha regla con su aplicacion á los ejemplos.

En el capítulo VII se trata del modo de operar con los quebrados. Lo mas interesante de este capítulo son los artículos 163, 164, 165, 166, 169, 170 y 177; y lo demas tiene poco uso en la práctica ordinaria de la navegacion.

En el capítulo VIII se explica el modo de operar con los números complexos.

Es de mucho uso lo que se enseña en los artículos comprendidos desde el 179 al 192, como tambien la multiplicacion de los números sexagesimales por unidades simples, y el modo de sacar sus mitades, terceras y cuartas partes, segun se explica desde el artículo 206 hasta el 208. Pero no hay inconveniente en pasar por alto el modo elegante de partir dichos números, que se expone en el artículo 199 y en los siguientes hasta el 205.

En el capítulo IX se trata muy sucintamente de las potestades y raices en general. El contenido de dicho capítulo es interesante para la inteligencia de algunas fórmulas del Pilotage; y para las aplicaciones de la doctrina de los sólidos á algunos puntos de maniobra y artillería.

En el capítulo X se trata de las razones y proporciones. La materia de este capítulo tiene muchas aplicaciones. El contenido de los artículos comprendidos entre el 258 y 268 no tiene uso en la práctica ordinaria del Pilotage; pero es interesante para facilitar la inteligencia de algunas proposisiones de artillería y maniobra. La proposicion final del artículo 269 es una de las que conviene retener en la memoria.

En el capítulo XI se trata de la regla de tres simple y compuesta. De esta última solo se presentan casos semejantes al ejemplo 2º del artículo 282 en la práctica ordinaria de la navegacion.

En el capítulo XII se da una idea de las progresiones.

En el capítulo XIII se trata de los logaritmos; y la parte mas interesante de dicho capítulo es la resolucion de los problemas.

Los apéndices I y II contienen una coleccion de ejemplos y reflexiones propias para manifestar la utilidad de la aritmética, y para ejercitarse en el uso de las reglas. Si los ejemplos que proponen los maestros son por el estilo de los que se resuelven en dichos apéndices, se logrará el que sin mas trabajo que el ordinario salgan los discípulos impuestos en el modo de aplicar dicha ciencia á la solucion de los problemas de Cosmografía y Pilotage, para cuya inteligencia tendrán mucho adelantado.

Los que quieran imponerse en algunas demostraciones y métodos que se han omitido en este tratado, pueden recurrir al impreso en Murcia en 1795, que se halla de venta en las academias de Guardias Marinas; teniendo presente el corregir las erratas que se advierten en la página 65 línea 22, en el ejemplo de las páginas 125 y 126, y en el ejemplo 1º de la página 158.

Será muy conveniente el que los maestros expliquen con extension el uso de las citas, para que los discípulos se pongan en estado de repasar por sí solos este tratado y otros cualesquiera.

TRATADO DE ARITMETICA.

CAPITULO PRIMERO.

NOCIONES GENERALES.

1 *Cantidad* es todo lo que es capaz de aumento y disminucion.

Se conoce que una cosa se considera como cantidad en que preguntando por ella se puede usar de la palabra *cuanto*; y en general, siempre que se emplea el comparativo ó superlativo se trata de una cantidad; v. g., cuando decimos Francisco es mas rico que Pedro, consideramos la riqueza como cantidad.

2 *Matemática* es la ciencia que trata de la cantidad, y se subdivide en otras ciencias.

3 *Unidad* es la cantidad que se toma por término de comparacion para dar idea de las demas cantidades de su especie.

4 *Número* es la comparacion de la unidad con una cantidad cualquiera.

V. g. cuando se dice la distancia de tal á tal parte es de ocho varas, que equivale á decir que la tal distancia contiene ocho veces á la distancia que llamamos vara; la vara es la unidad, y ocho el número.

5 El número se llama *concreto* ó *denominado* cuando se expresa la unidad, v. g. cuando se dice ocho reales, cinco azumbres &c.; y *abstracto* cuando no se expresa la unidad, v. g. cuando decimos simplemente ocho, cuatro &c.

6 *Aritmética* es la ciencia que trata de la cantidad expresada en números.

7 Para entender los tratados de Matemática, y formar alguna idea de la exactitud, que hace tan recomendable esta ciencia, conviene tener presente lo que sigue.

8 *Definicion nominal* es la manifestacion del significado de una voz.

9 *Definicion real* es la manifestacion de solo lo preciso para distinguir la cosa definida de todas las demas que existen ó pueden existir.

10 *Descripcion* es la manifestacion de mas de lo preciso para distinguir la cosa descrita de todas las demas.

11 *Hipótesis* es una suposicion que se hace.

12 *Axioma* es una verdad tan manifiesta, que no se puede demostrar por su mucha claridad, y resulta de la simple contemplacion de las definiciones.

13 *Postulado* es un axioma que recae sobre la posibilidad de ejecutar alguna cosa.

14 *Teorema* es una verdad que no nos convence si no se demuestra, y se deduce de las definiciones, axiomas, ó de otras verdades demostradas. El teorema consta de dos partes: es á saber; de la *proposicion*, en que se enuncia la verdad; y de la *demostracion*, en que se manifiesta su certeza.

15 *Problema* se llama la propuesta de una cosa que se ha de ejecutar. El problema tiene tres partes: es á saber; la *proposicion*, en que se expone lo que se pretende hacer; la *resolucion*, en que se manifiesta el modo de ejecutarlo; la *demostracion*, en que se manifiesta que ejecutado lo que se previene en la resolucion se obtiene lo que se pretendia. En la Aritmética se suelen llamar *reglas* las resoluciones de los problemas.

16 *Lema* es un teorema que se demuestra solo para que sirva de fundamento para deducir consecuencias que tienen una relacion directa con la materia que se trata.

17 *Corolario* es una consecuencia que resulta de una verdad establecida con tanta claridad, que no necesita demostracion en forma, y basta insinuar el modo de deducirla.

18 En los *escolios* se ponen algunas aclaraciones, que facilitan la inteligencia de lo dicho: se responde á las objeciones que pueden hacerse á la doctrina expuesta; se manifiestan sus usos; se hacen advertencias, y se dan algunas noticias curiosas.

19 *Ciencia* en rigor es el conocimiento que se tiene de una cosa cuando dicho conocimiento se funda solo en definiciones exactas, axiomas, ó verdades que resultan de dichos principios por una cadena no interrumpida de consecuencias bien deducidas. En este sentido riguroso se ha tomado esta voz cuando se ha dicho que la Matemática era una ciencia.

20 Casi todas las verdades matemáticas resultan de las definiciones y axiomas siguientes.

21 *Definicion. Todo* es una cantidad que se considera como el resultado de la reunion de otras cantidades, que se llaman *partes*.

22 *Definicion. Parte* es una de aquellas cantidades de cuya reunion resulta el todo.

23 *Axioma.* El todo es igual á todas sus partes juntas (*).

24 *Axioma.* La parte es menor que el todo.

25 *Axioma.* Dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.

26 *Axioma.* Si á iguales se añaden ó quitan iguales, los resultados serán iguales.

27 *Axioma.* Si á iguales se añaden ó quitan desiguales, los resultados serán desiguales; y será mayor el resultado de la cantidad á que se añadió mas, ó de que se quitó menos; y menor el resultado de la cantidad á que se añadió menos, ó de que se quitó mas.

28 *Axioma.* Si añadiendo iguales cantidades á varias cantidades primitivas son iguales resultados, las cantidades primitivas serán iguales.

29 *Axioma.* Si quitando iguales cantidades de otras primitivas son iguales los resultados, las cantidades primitivas son iguales.

30 *Axioma.* Si añadiendo ó quitando iguales cantidades á varias cantidades primitivas son desiguales los re-

---

(*) En todo este capítulo se prescinde de las cantidades negativas. Esto equivale á decir que las cantidades que se consideran son de la misma especie; y por lo tanto, cuando se trata de quitar una cantidad de otra, se supone que la cantidad que se quita es menor que aquella de que se quita.

sultados, la primitiva que da mayor resultado es mayor.

31 *Axioma.* Dos cantidades, que difieren igualmente de una tercera, las dos por exceso, ó las dos por defecto, son iguales entre sí.

32 *Axioma.* Si dos cantidades no difieren igualmente de una tercera, serán desiguales.

33 *Axioma.* Si una cantidad difiere de una tercera por defecto, y otra difiere de la misma tercera por exceso, la que difiere por exceso es mayor. Si las dos difieren por exceso, será mayor la que difiere mas; y si las dos difieren por defecto, la que difiere menos.

34 *Axioma.* Si á dos cantidades se agregan ó se quitan iguales cantidades, su diferencia no variará.

35 *Axioma.* Si añadiendo ó quitando á dos cantidades queda la misma diferencia, es señal de que son iguales las cantidades añadidas ó quitadas.

36 *Definicion.* Absurdo es lo que se opone á una verdad conocida.

37 *Axioma.* Si de una hipótesis se deduce por raciocinios rigurosos una consecuencia absurda, la hipótesis será absurda.

CAPITULO II.

DEL MODO DE ENUNCIAR CUALQUIERA CANTIDAD NUMÉRICA, Y REPRESENTARLA CON CIFRAS.

38 El modo de enunciar cualquiera cantidad numérica y el modo de representarla con cifras, tienen entre sí tanta conexion, que se comprenderán mas fácilmente tratándolos á un tiempo.

Las cifras vulgares, ó caractéres con que se representan los números, son como sigue:

Cifras.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valores.	cero ó nada...	uno...	dos...	tres...	cuatro...	cinco...	seis...	siete...	ocho...	nueve.

Todas las cifras, excepto el cero, son significantes;

y aunque el cero por sí solo nada significa, sirve para lo que se dirá muy pronto.

Con estas cifras es evidente que se representan todos los números menores que diez (cuando constan de un número exacto de unidades), y á dichos números se les dará el nombre general de *unidades simples.*

39 Al *diez* se le da el nombre de *decena*, y en adelante se cuenta por decenas y unidades simples hasta diez decenas. Para representar un número que consta de decenas solas, ó de decenas y unidades simples, sin introducir nuevas cifras, se ha establecido que siempre que se pongan una al lado de otra dos cifras de las expresadas, la de la izquierda representa las decenas, y la de la derecha las unidades simples.

Asi, 16 representa una decena y seis unidades: esto es, diez y seis: 18 representa una decena y ocho unidades: esto es, diez y ocho: 10 representa una decena y ninguna unidad: esto es, diez; con lo que se ve el uso de la cifra cero, que aunque equivale á nada, sirve para manifestar que la cifra que se le sigue es la segunda contando de derecha á izquierda, y que por lo tanto representa decenas, y no unidades simples.

40 Para representar con cifras, y enunciar cualquier número que no llega á diez decenas, basta lo dicho, y el saber los nombres que para abreviar se dan á las decenas y á las decenas y unidades simples hasta diez y seis, y son como sigue:

11 12 13 14 15
once... doce... trece... catorce... quince... &c.
20 30 40 50 60
veinte... treinta... cuarenta... cincuenta... sesenta...
70 80 90
setenta... ochenta... noventa.

Asi, para representar *cincuenta y cuatro*, que equivale á decir cinco decenas y cuatro unidades simples, se escribirá 54, y 78 representará siete decenas y ocho unidades simples, esto es, *setenta y ocho.*

41 A diez decenas se les da el nombre de *centena* ó *ciento*; y para representar y enunciar los números que hay desde ciento ó diez decenas hasta diez centenas con los mismos caractéres se ha establecido que siempre que

se coloquen tres cifras seguidas represente la primera de la izquierda las centenas, la segunda las decenas, y la última las unidades simples.

Asi 123 representa una centena, dos decenas y tres unidades simples: esto es, el número *ciento veinte y tres*: 280 representa dos centenas, ocho decenas y ninguna unidad simple: esto es, *doscientos ochenta*: 307 representará tres centenas, ninguna decena y siete unidades simples: esto es, *trescientos y siete.*

Las únicas centenas á que se da un nombre distinto de su número son 500 *quinientos*, 700 *setecientos.*

42 Por el mismo estilo se sigue en adelante considerando otras clases superiores, cada una de las cuales se compone de diez de la inferior inmediata. Asi el *millar* ó *mil* consta de diez centenas; la *decena de millar* de diez millares &c. Los nombres de todas estas clases, empezando por la de unidades simples, y los lugares que ocupan las cifras que las representan, se manifiestan en el ejemplo siguiente:

0 unidad.
0 decena.
7 centena.
2, millar.
6 decena de millar.
0 centena de millar.
0; millon.
8 decena de millon.
9 centena de millon.
1, millar de millon.
0 decena de millar de millon.
2 centena de millar de millon.
3; billon.
7 decena de billon.
0 centena de billon.
5, millar de billon.
0 decena de millar de billon.
2 centena de millar de billon.

43 De la hipótesis que se manifiesta en el ejemplo, se sigue como corolario que para enunciar cualquiera cantidad, por crecida que sea, basta saber enunciar una compuesta de tres cifras, y observar la siguiente

Regla.

1º Empezando por el signo decimal (que es una coma invertida colocada entre las cifras), ó por la última cifra de la derecha si falta dicho signo, divídase la cantidad de tres en tres cifras hacia la izquierda, sin reparar en que en la última porcion de la izquierda queden dos cifras ó una cifra sola.

2º Sobre la segunda coma póngase un punto, sobre la cuarta dos puntos, sobre la sexta tres puntos &c.

3º Léanse cada tres cifras como si estuviesen solas (*art.* 41), con la única adicion de decir *mil* al llegar á cada coma sola, *millon* ó *cuento* al llegar á la coma que tiene encima un punto, *billon* ó *bicuento* al llegar á la coma que tiene dos puntos, *trillon* ó *tricuento* al llegar á la que tiene tres puntos &c.; y se tendrá presente el añadir la expresion de *unidades* ó de *enteros* al llegar al signo decimal.

Sirva de ejemplo la expresion del art. 42, que (colocando la hoja de lado para que queden las cifras en su posicion natural) se enunciará doscientos cinco mil, setenta y tres billones; doscientos y un mil novecientos y ochenta millones; sesenta y dos mil y setecientos.

Si en la division seguida de una coma sola no hay cifra alguna significante, no se dice *mil*; y si en las dos divisiones comprendidas entre puntos no hay cifra significante, no se dice *billon*, *trillon*, &c.

Ejemplo 1.º $700,000\overset{\vdots}{,}000,030\overset{:}{,}000,000\overset{\cdot}{,}000,032.$

se enunciará asi, 700 mil trillones, 30 billones y 32.

Ejemplo 2.º $50,000\overset{\cdot}{,}000,000\overset{:}{,}003,000\overset{\cdot}{,}005,000.$

se enunciará asi, 50 mil trillones, 3 mil millones y 5 mil.

44 Es evidente que con este artificio se puede escribir y enunciar cualquier número, por crecido que sea, con tal de que conste de unidades completas. Pero como un número puede constar de partes de unidad (esto es, puede estar contenido en la unidad en vez de contenerla), se ha establecido el considerar otras clases que siguen disminuyendo hácia la derecha de las unidades simples, por el mismo estilo que van disminuyendo las clases expresadas desde la primera de la izquierda. Para saber desde donde empiezan estas clases inferiores á la unidad se suele poner un punto ó coma despues de las unidades simples; y asi, desde el punto ó coma hácia la derecha representarán las cifras dichas clases inferiores á la unidad, que en general se llaman *decimales*.

Para no confundir los signos aritméticos con las notas de la ortografía, en este tratado se usará siempre de una coma al revés, colocada en la parte superior, para separar los decimales de los enteros. A dicha coma al revés se le dará el nombre de *signo decimal*. Aunque dicho signo se omite cuando no hay decimales, se sobreentiende siempre colocado á la derecha de las unidades simples, á fin de generalizar mas las reglas que se darán en lo sucesivo.

Asi 38 es lo mismo que 38‘, ó lo mismo que 38‘00: esto es, lo mismo que treinta y ocho enteros, y ninguna decimal.

45 A la primera clase decimal se le da el nombre de *décimos*; y asi, diez décimos compondrán una unidad. A la clase siguiente de la derecha se le da el nombre de *centésimos*; y asi, cada diez centésimos compondrán un décimo. La clase siguiente es la de los *milésimos*, diez de los cuales componen un centésimo &c.

46 Los nombres de las clases decimales, y los lugares de las cifras que las representan, se manifiestan en el ejemplo siguiente, desde el signo decimal hácia la derecha.

1 cien-mil-billonés*imos*.
0 diez-mil-billonés*imos*.
3 mil-billonés*imos*.
,
0 cien-billonés*imos*.
0 diez-billonés*imos*.
0 billonés*imos*.
;
0 cien-mil-millonés*imos*.
0 diez-mil-millonés*imos*.
0 mil-millonés*imos*.
,
2 cien-millonés*imos*.
5 diez-millonés*imos*.
0 millonés*imos*.
:
4 cien-milés*imos*.
0 diez-milés*imos*.
2 milés*imos*.
,
5 centés*imos*.
4 déc*imos*.
0 unidad.

La inspeccion de dicho ejemplo manifiesta tambien, que el nombre de la última clase de la derecha es el mismo que, considerando dicha última clase de la derecha como unidades simples, se daria á una cifra puesta en lugar del signo decimal, usando dicho nombre en plural, y añadiendo la terminacion *imos*.

V. g. si la última clase son los milés*imos*, se ve que la cifra puesta en lugar del signo decimal representaria miles, tomando dicha última clase como unidades (*art*. 42). Si la última clase es, como en el ejemplo, la de los cien mil billonés*imos*, se ve que considerando dicha última clase como unidades, la cifra puesta en vez del signo decimal representaria cien mil billones (*art*. 43) &c.

Las únicas excepciones á esta observacion son, la primera clase, que, como se ha dicho, se llama de los *décimos*; y la segunda, que es la de los *centésimos*.

47 Como cada décimo vale diez centésimos, lo mismo será decir v. g. 23 centésimos que decir dos décimos y tres centésimos (*art.* 40). Tambien, porque cada centésimo vale diez milésimos, valdrá cada décimo cien milésimos (*art.* 41); y lo mismo será decir 324 milésimos, que decir tres décimos, dos centésimos y cuatro milésimos &c. De esta observacion resulta que los decimales se pueden leer separados de los enteros, observando la siguiente

Regla.

1º Hagánse desde la última decimal de la derecha hasta el signo decimal las mismas divisiones, y pónganse las mismas señales que para los enteros (*art.* 43).

2º Léanse como estos (*art.* 42), añadiendo al fin el nombre que se daria á la clase á que corresponderia una cifra puesta en lugar del signo decimal, usando dicho nombre en plural, y añadiéndole la terminacion en *imos* (*art.* 46).

El ejemplo del artículo 46 se leerá 45 mil, 204 billones, 52 mil millones, 301 cien mil billonésimos.

48 Como cada unidad consta tambien de diez décimos, ó cien centésimos, ó de mil milésimos &c., y cada decena de diez unidades, ó cien décimos, ó mil centésimos &c. (*art.* 39 *á* 46); es evidente que tambien se podrán leer los enteros como si formasen una sola cantidad con los decimales, teniendo presente al llegar á la última decimal el pronunciar el nombre de su clase (*art.* 47, *núm.* 2º). En este caso no se dirá unidades ni enteros al llegar al signo decimal.

V. g. la cantidad 2 $\underset{,}{:}$ 308 , 5'73 ; 903 , 186 se leerá uniendo decimales y enteros asi, 2 billones ; 308 mil , 573 millones ; 903 mil 186 cien millonésimos ; y separándolos, 23 , 085'73 ; 903 , 186 , se leerá 23 mil , 85 enteros ; 73 millones ; 903 mil , 186 cien millonésimos.

49 Para convencerse bien de que leyendo de cualquiera de estos modos se dice sustancialmente una mis-

ma cosa, basta atender á que cuando se lee toda la cantidad seguida, se toma por unidad la última clase decimal de la derecha, la cual es inferior á las verdaderas unidades en tantas clases cuantas decimales hay; y asi es menester aumentar el número en otras tantas clases, para que la cantidad enunciada quede la misma. En una palabra, estos diversos modos de enunciar una misma cantidad equivalen á otros de que usamos comunmente, v. g. cuando decimos que un peso, 15 reales y 510 maravedís son una misma cosa.

50 Para la inteligencia de algunas reglas que se darán en lo sucesivo conviene tener muy presente que el agregar ceros á la izquierda de los enteros ó á la derecha de los decimales, no altera el valor efectivo de las cantidades.

Asi, 32'5 es lo mismo que 032'5, y lo mismo que 32'50. En efecto, el decir 32 enteros y 5 décimos; el decir cero ó ninguna centena, 32 enteros y 5 décimos; y el decir 32 enteros, 5 décimos y cero ó ningun centésimo, es todo una misma cosa. Diciendo 32 enteros y 50 centésimos, se dirá tambien lo mismo; pues aunque 50 es diez veces mayor que 5, tambien los centésimos son diez veces menores que los décimos; y asi, el aumento que resulta diciendo 50 en vez de 5, se compensa con la diminucion que proviene de decir centésimos en vez de décimos.

51 De lo dicho se sigue que una cantidad se puede leer separándola en porciones como se quiera, é interponiendo la palabra *mas* entre los nombres de dichas porciones, para manifestar que todas forman un mismo conjunto.

V. g. la cantidad 23085'734, leida cifra por cifra será 2 decenas de millar, mas 3 millares, mas 8 decenas, mas 5 unidades, mas 7 décimos, mas 3 centésimos, mas 4 milésimos. Separándola en tres porciones, la primera de tres cifras, la segunda de otras tres, y la tercera de dos, será 230 centenas, mas 857 décimos, mas 34 milésimos.

52 Cuando en adelante se diga el conjunto de centenas, el conjunto de millares, el conjunto de centésimos &c., se entiende toda la primera parte de la cantidad hasta dicha clase inclusive.

Asi en la cantidad propuesta es 23 el conjunto de millares, 230 el conjunto de centenas, 2308573 el conjunto de centésimos.

53 Cuando se diga simplemente los millares, las centenas &c., ó para mayor claridad, los millares simples, las centenas simples &c., se entiende que solo se habla del número representado por la cifra que está en dicha clase.

En el ejemplo serán las decenas de millar simple 2, los millares simples 3, las centenas simples o &c.

54 No es menos evidente que una unitad, de cualquiera clase, vale mas que todas las inferiores juntas; v. g. una decena de millar vale mas que 9999’99 &c. Una decena vale mas que 9’99 &c. Por esta razon, para saber cuál de dos cantidades es mayor no hay mas que ver cuál es la primera clase de la izquierda cuyas cifras difieren; y la cantidad que tendrá en dicha clase una cifra que valga mas será la mayor.

Este signo > ó este otro < quieren decir que es menor la cantidad hácia la cual se dirige la punta del signo.

Asi, 352‘5>351‘998 quiere decir que 352‘5 es mayor que 351‘998; y 9‘87<12 quiere decir que 9‘87 es menor que 12.

55 Conviene advertir, que para mayor elegancia, y para representar desde luego las cantidades en los mismos términos en que se han de emplear en las operaciones, se suele poner el nombre de la unidad despues de los decimales. Sin embargo de esto, para mayor claridad, cuando se leen dichas cantidades se pronuncia el nombre de la unidad al llegar al signo decimal.

V. g. la expresion 53‘48 varas, se lee 53 varas y 48 centésimos. La expresion 0‘327 varas se puede leer diciendo cero varas y 327 milésimos, y mejor diciendo 327 milésimos de vara.

56 Tambien hay que advertir que cuando se trata de dictar cantidades compuestas de muchas cifras, para evitar equivocaciones es lo mas acertado el dictarlas separándolas en varias porciones de tres cifras, ó de dos cifras; ó dictarla cifra por cifra.

V. g. la cantidad 8810421, se puede dictar asi, 881..... *cero*.... 421. La cantidad 700023 se puede dictar asi, 7.... *tres ceros* y 23; ó asi, 70, *cero*, *cero*, 23 &c. &c. Conviene tener esto presente para cuando se trate de dictar los logaritmos, de que se hace mucho uso en la navegacion, como se manifestará en su lugar.

De los quebrados.

57 Basta lo dicho para representar con cifras, y enunciar cualquiera cantidad, por grande ó pequeña que sea, si no exactamente (en ciertos casos que se manifestarán), á lo menos con cuanta aproximacion se quiera. Sin embargo se usa con frecuencia de otro modo de representar las cantidades, particularmente cuando son menores que la unidad. En este segundo modo de enunciar las cantidades numéricas se considera la unidad, ú otra cantidad cualquiera, dividida en un cierto número de partes iguales, y se expresa de cuántas de dichas partes consta la cantidad que se quiere representar ó enunciar. Asi se dice, tal distancia es v. g. de *tres cuartas partes* de vara, con lo que se manifiesta que dividiendo la vara en cuatro partes iguales, tres de dichas partes componen la tal distancia &c.

Para representar de este modo las cantidades se escribe debajo de una raya un número, que se llama *denominador*, y manifiesta en cuántas partes iguales se considera dividida la unidad: y encima de la misma raya se escribe otro número, que se llama *numerador*, y expresa cuántas de dichas partes componen la cantidad. Al todo de la expresion se da el nombre general de *quebrado, fraccion* ó *expresion fraccionaria*; y el numerador y denominador se llaman *términos del quebrado* ó *fraccion.* El quebrado se suele llamar particularmente *fraccion propia* ó *quebrado propio*, cuando representa una cantidad menor que la unidad: esto es, cuando se toma un número de partes menor que aquel en que se considera dividida la unidad, lo cual se conoce en que el numerador es menor que el denominador; y se llama *fraccion impropia* ó *quebrado impropio*, cuando representa una cantidad igual ó mayor que la unidad: esto es cuando se toma un número de partes igual ó mayor que aquel en que se considera dividida la unidad, lo cual se conoce en que el numerador es igual ó mayor que el denominador.

Tambien se llama la fraccion *simple* cuando es la unidad la que se considera dividida en partes; y fraccion *compuesta* cuando la cantidad que se considera dividida en partes no es la unidad fundamental; y en tal caso se escribe dicha cantidad á la derecha del quebrado, interponiendo entre el quebrado y la cantidad que se ha de dividir en partes la palabra *de* que se omite en las fracciones simples.

Asi $\frac{3}{8}$ que es lo mismo que $\frac{3}{8}$ de 1, es un quebrado propio y simple, cuyo denominador 8 manifiesta que la unidad se considera dividida en 8 partes iguales, y el numerador 3 expresa que de dichas partes contiene 3 la cantidad que el quebrado representa: $\frac{8}{3}$, que es lo mismo que $\frac{8}{3}$ de 1, es un quebrado simple impropio, cuyo denominador 3 manifiesta que la unidad se considera dividida en tres partes iguales, y el numerador 8 expresa que de dichas partes contiene 8 la cantidad que representa la expresion fraccionaria.

Para enunciar los quebrados se expresa primero el valor de su numerador, y despues el de su denominador. Si dicho denominador es 2, las partes se llaman *medios* ó *mitades*. Si es 3, se llaman *tercios* ó *terceras partes*; v. g. $\frac{1}{2}$, *un medio*, $\frac{2}{3}$, *dos tercios*. Si el denominador es mayor que 3 y menor que 11, se lee como si fuese número ordinal; v. g. $\frac{1}{4}$, *un cuarto*; $\frac{3}{5}$, *tres quintos*; $\frac{1}{6}$, *un sexto*; $\frac{4}{7}$, *cuatro séptimos*; $\frac{5}{8}$, *cinco octavos*; $\frac{2}{9}$, *dos novenos*; $\frac{7}{10}$, *siete décimos*. En adelante, siempre que no sea decimal, se enuncia simplemente el denominador, añadiendo la terminacion *avos*; v. g. $\frac{8}{11}$, ocho once*avos*; $\frac{9}{16}$, nueve diez y seis *avos*. Pero decimos v. g. *tres centésimos* para enunciar el quebrado $\frac{3}{100}$, que es lo mismo que 0‘03.

58 Para determinar el valor del quebrado simple es evidente que no habrá que hacer mas que dividir la unidad en las partes iguales que indica el denominador, y tomar de ellas el número que expresa el numerador.

V. g. si se pide el valor de $\frac{5}{8}$ de vara, se dividirá la vara en ocho partes iguales, y tomando cinco de estas partes, se tendrá el valor del quebrado.

Si el quebrado es compuesto, es menester empezar hallando el valor de la unidad mas remota, y sucesivamente el de las demas que dependen de ella.

V. g. si se pide el valor de $\frac{8}{19}$ *de* 3 *varas*, se tomará primero una extension de 3 varas; esta extension se dividirá en 19 partes iguales, y de estas partes se tomarán 8. Si se pide el valor de $\frac{5}{32}$ *de* $\frac{3}{7}$ *de libra*, se empezará dividiendo la libra en 7 partes iguales, y de estas se tomarán 3 para tener el valor de los $\frac{3}{7}$, despues el conjunto de dichas 3 partes se dividirá en 32 partes iguales, y de estas se tomarán 5 para tener el valor de la expresion.

De los números complexos.

59 Para representar con mas facilidad y sencillez las cantidades de diversos tamaños, se ha recurrido al arbitrio de establecer diferentes unidades ó denominaciones.

Cuando se trata de distancias muy crecidas se toma por unidad la *legua marina*, que consta de unas 3324 brazas.

La legua se considera dividida en tres *millas*. Por consiguiente la milla marina constará de unas 1108 brazas, y se subdivide en *décimos* y *centésimos* para los usos ordinarios de la navegacion.

El *cable*, de que se hace uso para estimar á ojo las distancias menores, se puede suponer igual al décimo de milla ó extension de 1108 brazas, aunque la longitud efectiva del cable sea de 120 brazas.

60 En los cálculos aproximados, de que se hace mucho uso en la navegacion, no hay inconveniente en suponer la legua de 3330 de brazas, la milla de 1110 brazas, y el cable ó décimo de milla de 111 brazas.

61 Para representar las extensiones menores, como la profundidad del mar, se hace uso de la *braza*, que consta de dos *varas* de Búrgos.

La vara se considera dividida en tres *pies*: el pie en 12 *pulgadas*: la pulgada en 12 *líneas*, y la línea en 12 *puntos*.

La vara tambien se suele considerar dividida en cuatro *cuartas* ó *palmos*, cada uno de los cuales constará de 9 pulgadas.

Para la medicion de las maderas se suele hacer uso del *codo* que consta de dos pies.

62 Cuando en una misma expresion, ó en varias expresiones que se han de comparar, entran diferentes unidades ó denominaciones, se dice que los números son *complexos* ó *denominados*. V. g. si se dice que una distancia es de 2 pies, 8 pulgadas y 7 líneas, la expresion de dicha distancia será un número complexo ó denominado. Los números se llaman *simples* cuando son abstractos (*art.* 5), ó cuando todos se refieren á una misma unidad, y no tienen forma fraccionaria (*art.* 57).

63 Para las medidas de los líquidos se suele hacer uso de la *cántara* ó *arroba*. La arroba se divide en 8 *azumbres*, el azumbre en 4 *cuartillos*, y el cuartillo en 4 *copas*.

Para las medidas de granos se emplea la *fanega*, que consta de 12 *celemines*, y el celemin se subdivide en 4 *cuartillas*.

64 Para los pesos se usa el *quintal*, que consta de 100 *libras*, y se divide en 4 *arrobas*. La arroba consta de 25 *libras*, la libra de 16 *onzas*, la onza de 16 *adarmes*, y el adarme de 36 *granos*. Tambien se suele dividir la libra en 2 *marcos*, el marco en 8 *onzas*, y la onza en 8 *achavas*.

Se tendrá presente que las divisiones y los valores absolutos de las unidades expresadas no son los mismos en todas las provincias; y aun en un mismo pueblo suelen variar segun los géneros de que se trata. Asi, la libra de que usan los Boticarios solo contiene 12 *onzas*, que se subdividen en 8 *dracmas*. Y cada dracma se subdivide en 3 *escrúpulos* ó en 72 *granos*. La libra carnicera consta de 36 *onzas* en algunos pueblos.

65 En algunos paises se han adoptado ya las unidades *naturales*: es á saber, el *metro* ó *medidera*, que es poco menor que una vara y un quinto: el *litro* ó *unera*, que casi equivale á dos cuartillos; y el *kiliógrama* ó *unal*, que equivale á poco mas de dos libras, dos onzas y doce adarmes. Las demas unidades mayores y menores de cada clase siguen el órden decimal: esto es, que la medidera se divide en diez *décimas*, la décima en diez *céntimas* &c.: la *decena* consta de diez medideras, la *centena* de diez decenas &c.

66 Para medir el movimiento de los cuerpos que giran al rededor de un punto, se hace uso de la *circunferencia*, que es una vuelta, y consta de 360 *grados*. El grado consta de 60 *minutos*: el minuto de 60 *segundos*: el segúndo de 60 *terceros* &c.

Los grados se indican con un cerito puesto á la derecha de la parte superior de las cifras. Los minutos con una rayita como la del acento agudo. Los segundos con dos rayitas &c.

Asi: 8°......21′......35″......54‴ quiere decir, 8 grados, 21 minutos, 35 segundos, y 54 terceros.

En llegando á los segundos, se suelen expresar las partes inferiores en decimales de segundo; y rara vez se hace uso de los terceros.

Las cifras sin signo particular colocadas á la derecha del signo de grados, minutos &c., representan decimales de la clase correspondiente.

V. g. 16°,45 quiere decir 16 grados, y 45 centésimos.

67 Para medir el tiempo se hace uso del *dia astronómico*, que es el tiempo que pasa de un medio dia á otro.

El dia consta de 24 *horas*: la hora de 60 *minutos*: el minuto de 60 *segundos* &c.

Las horas se indican con una *h*, y los minutos, segundos &c. de hora se indican como los de grado (*art.* 66).

V. g. 5^{h}.....23′.....54″,6, quiere decir 5 horas, 23 minutos, 54 segundos, y 6 décimos.

68 Los grados, minutos, segundos &c., y las horas, minutos &c. se llaman en general *números sexagesi-*

males, porque cada unidad contiene sesenta unidades de la especie inferior inmediata.

69 Para que la comparacion de los números equivalga á la comparacion de las cantidades, se hace preciso tomar por unidad una cantidad misma. Asi, aunque 3 y 2 son 5, es evidente que 3 millas y 2 toesas no serán ni 5 millas ni 5 toesas. Aunque 7 es mayor que 2, serán 7 reales menos que 2 pesetas &c.

70 En los quebrados simples se pueden considerar dos unidades. La remota ó fundamental, que se supone conocida por sí misma sin relacion con otra cantidad, y es la que se divide en las partes que expresa el denominador; y la próxima ó relativa, que lo es una de dichas partes.

V. g. cuando se dice esta silla tiene de alto $\frac{2}{3}$ de vara, la vara es la unidad remota ó fundamental, y respecto de ella el número es $\frac{2}{3}$; y un tercio de vara es la unidad próxima, y respecto de ella el número es 2. Considerando los quebrados respecto á la unidad próxima, el numerador es el número, y el denominador y las demas expresiones solo sirven para manifestar la cantidad que se toma por unidad.

71 De aqui se sigue, que se debe operar con los numeradores de los quebrados lo mismo que con los demas números, excepto cuando se trata de compararlos con enteros, ó con otros quebrados cuyos denominadores ó unidades fundamentales sean diferentes.

V. g. $\frac{2}{12}$ mas $\frac{3}{12}$ de vara, compondrán $\frac{5}{12}$ de vara; y $\frac{5}{16}$ menos $\frac{2}{16}$ de libra, equivaldrán á $\frac{3}{16}$ de libra.

CAPITULO III.

DE LAS CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS.

72 Toda cantidad se puede tomar en dos sentidos enteramente opuestos, v. g. 3 pesos pueden ser 3 pesos de pérdida ó 3 pesos de ganancia; 3 pesos de deuda ó 3 pesos de caudal: 5 pies de distancia á una pared pueden ser 5 pies de distancia hácia mano derecha, ó 5 pies de distancia hácia mano izquierda.

Por esta causa se dividen las cantidades en *positivas* y *negativas*. Es indiferente llamar positivas á cualesquiera de ellas; pero establecido una vez cuáles se llaman positivas, en el mismo cálculo se deberán llamar negativas las tomadas en sentido opuesto: v. g. si se establece que las distancias contadas hácia arriba sean positivas, deberán llamarse negativas las distancias contadas hácia abajo.

El signo para distinguir las cantidades positivas es este $+$, que se pronuncia *mas*; y para las negativas este $-$, que se pronuncia *menos*. A toda cantidad que no lleva signo se entiende que le corresponde el signo positivo $+$, que suele omitirse cuando se escribe una cantidad sola, y en la primera de varias cantidades escritas las unas á continuacion de otras.

Asi $3+5$ es lo mismo que si dijéramos $+3+5$.

Tambien se usará con frecuencia de este signo $=$, que se pronuncia *es igual á*, ó simplemente *igual* para abreviar.

73 Es evidente que las cantidades negativas destruyen á las positivas, y estas á aquellas: puesto que si se caminan primero 8 pies hácia la derecha, y despues 8 pies hácia la izquierda, se volverá al mismo sitio. Si despues de haber perdido en una mano 10 pesos se ganan en otra mano 10, el jugador quedará en paz; y lo mismo se entiende de los demas casos.

Tambien es evidente que si las cantidades positivas exceden á las negativas, el resultado será positivo; y seria el resultado negativo si las negativas excediesen á las positivas.

V. g. llamando positivas á las distancias caminadas hácia arriba, si despues de haber caminado hácia arriba 5 pies, se caminan hácia abajo 3, será la distancia caminada $+5-3=+2$ pies. Pero si despues de haber caminado hácia la derecha 6 pies, se caminan 8 hácia la izquierda (suponiendo que las distancias de la derecha son positivas), será lo caminado $6-8=-2$: esto es, que realmente se ha caminado 2 pies hácia la izquierda.

74 Por *expresion numérica* se entenderá en adelante el número que representa una cantidad, prescindiendo de su denominacion y de su signo: esto es, el número considerado como si tuviese el mismo signo que los demas de que se trata.

CAPITULO IV.

DEL SUMAR Y RESTAR LOS NUMEROS SIMPLES.

Del sumar.

75 Sumar es hallar el resultado de varias cantidades llamadas *partidas*, que se reunen en una sola, llamada *suma*.

76 Por *sumar numérico* entenderemos el reunir varias partidas tomadas en un mismo sentido; y para ejecutar esto con facilidad conviene el aprender de memoria las sumas de todas las unidades simples tomadas dos á dos, segun se expresan en la siguiente tabla.

Segundo número.

Primer número.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Los números de la primera columna (*) de la izquierda y los de la línea superior son los que se han de sumar, y en la casilla del concurso se expresa la suma correspondiente.

Asi, por cuanto 9 y 7 son 16, está escrito 16 en la casilla en que concurre la línea del 9 con la columna del 7; y porque tambien 7 y 9 son 16, está tambien escrito 16 en la casilla en que concurre la línea del 7 con la columna del 9.

Se leerá esta tablilla muchas veces, diciendo v. g. en la línea del 2, 2 y 1, 3: 2 y 2, 4: 2 y 3, 5: 2 y 4, 6: 2 y 5, 7, &c.

En la del 8, 8 y 1, 9: 8 y 2, 10: 8 y 3, 11: 8 y 4, 12, &c.

Para ejecutar esto con prontitud se llevará el dedo, ó un puntero, por la línea del primer número; y á los Maestros toca el explicar esto prácticamente con toda claridad.

(*) A una fila de cifras colocadas las unas al lado de las otras de derecha á izquierda se llama *línea*, y á una fila de cifras colocadas las unas debajo de las otras se llama *columna*.

77 *Regla para el sumar numérico de los números simples.*

1.° Escríbanse todas las partidas que se han de sumar las unas debajo de las otras, de suerte que todas las cifras de cada columna sean de la misma clase, lo cual se consigue colocando los signos decimales en columna; y tírese una raya por debajo de las partidas.

2.° Súmense todas las cifras de la primera columna de la derecha como si fuesen unidades simples.

3.° Si dicha suma consta de unidades solas, se escribirán estas en dicha columna debajo de la raya; y si de unidades y decenas, se escribirán solas las unidades; y las decenas, consideradas como unidades, se agregarán á la columna segunda.

4.° Se practicará lo mismo con dicha segunda columna, escribiendo debajo de ella las unidades que resulten de su suma, y agregando las decenas, consideradas como unidades, á la columna tercera; y asi sucesivamente hasta acabar, colocando tambien el signo decimal debajo de los signos decimales.

5.° Para evitar los errores que pueden provenir de no colocar las cifras en sus correspondientes columnas, conviene suplir con ceros las clases que faltan en algunas de las partidas (*art.* 50).

6.° Se repasa la suma para examinar si se ha cometido algun error, sumando las cifras de cada columna en órden inverso: esto es, de abajo hácia arriba si se sumaron de arriba hácia abajo en la primera operacion.

78 *Ejemplo* 1.° Supóngase que (tomando por unidad la medidera) desde la lumbre del agua hasta la borda de una embarcacion hay 3'24 medideras: desde la borda hasta la cofa 9'89; y desde la cofa á un observador colocado sobre ella 1'95: y se quiere saber cuál es la elevacion de dicho observador sobre la lumbre del agua.

El problema se resolverá sumando las tres partidas.

Ejemplo 2.° Supóngase que se han navegado las distancias siguientes. Desde las 2 hasta las 3 de la tarde 11'65 millas; de 3 á 4, 10'8; de

4 á 5, 9‘75; y de 5 á 6, 9‘95; y se quiere saber cuántas millas se han navegado desde las 2 hasta las 6. El problema se resolverá sumando las cuatro partidas.

Ejemplo 1.º

Partidas.	1.ª	3‘24
	2.ª	9‘89
	3.ª	1‘95
Suma.		15‘08

Ejemplo 2.º

Partidas.	1.ª	11‘65
	2.ª	10‘80
	3.ª	09‘75
	4.ª	09‘95
Suma		42‘15

Explicacion del ejemplo 1.º Empezando por los centésimos se dirá 4 *y* 9, 13, *y* 5, 18: 8 *y llevo* 1 (se escribirá el 8, y se pasará á los décimos diciendo) *y* 2, 3, *y* 8, 11, *y* 9, 20: 0 *y llevo* 2 (escrito el 0 se dirá) *y* 3, 5, *y* 9, 14, *y* 1, 15: 5 *y llevo* 1 (se escribirá el 5 bajo las unidades, y la unidad que se lleva en el lugar de las decenas.

Para comprobar se pueden sumar las cifras de abajo hácia arriba diciendo, 5 *y* 9, 14, *y* 4, 18: 8 *y llevo* 1 &c., y basta el ver si resultan las mismas cifras de la suma, sin necesidad de escribirlas.

Explicacion del ejemplo 2.º Empezando por los centésimos se dirá 5 *y* 5, 10, *y* 5, 15: 5 *y llevo* 1...... *y* 6, 7, *y* 8, 15, *y* 7, 22, *y* 9, 31: 1 *y llevo* 3..... *y* 1, 4, *y* 9, 13, *y* 9, 22: 2 *y llevo* 2..... *y* 1, 3, *y* 1, 4.

79 *Ejemplo* 3.º El mes de Enero tiene 31 dias, Febrero 28, Marzo 31, Abril 30, Mayo 31, Junio 30, Julio 31, Agosto 31, Setiembre 30, Octubre 31, Noviembre 30, y Diciembre 31. Con estos datos se pregunta cuántos dias tiene el año. El problema se resuelve sumando las doce partidas; y el resultado son 365 dias. Este es el número de dias del año comun; y por cuanto en los años bisiestos tiene 29 dias el mes de Febrero, dichos años constarán de 366 dias.

80 *Demostracion.* Como cada diez unidades de una clase componen una de la clase inmediata de la izquierda (*art.* 39 *á* 46), es evidente que ejecutando la regla, cada clase de la suma contendrá las unidades de dicha clase que resultan de la reunion de las que hay en su columna, y de las que han producido las unidades de las columnas antecedentes; y por lo tanto, el todo de las clases que componen la suma será el resultado de la reunion de todas las partidas. Es evidente que las clases de la suma son las mismas que las de las partidas que estan en sus columnas correspondientes; y por lo tanto, el signo decimal de la suma deberá tambien estar en columna con los de dichas partidas.

Del restar.

81 *Restar* es quitar ó tomar en sentido contrario (*art. 72 y 73*) una cantidad que se llama *subtraendo*. La cantidad de que se ha de quitar el subtraendo se llama *minuendo*, y al resultado de la operacion se le da el nombre de *residuo*.

82 Como quitando una cantidad de otra resulta la diferencia que habia entre las dos, es evidente que restar es hallar la diferencia que hay del subtraendo al minuendo.

83 Por restar numérico entenderemos el restar una cantidad menor de otra mayor tomada en el mismo sentido, v. g. un caudal, de otro caudal; una deuda, de otra deuda &c.

84 Para restar con prontitud conviene aprender de memoria las diferencias que hay entre cada una de las nueve unidades simples comparadas con cada una de las mismas unidades, aumentadas en una decena en caso necesario. Esto se manifiesta en la tabla del artículo 76 leyendo primero el número subtraendo (que se busca en la primera columna), y buscando en su línea el minuendo; y en la cabeza de la columna en que se halla este se ve expresado el residuo.

V. g. para saber la diferencia de 6 á 14, en la línea del 6 se busca el 14, y en la cabeza de la columna del 14 se halla el residuo 8. Esto manifiesta que de 6 á 14, 8: esto es, que desde el 6 hasta el 14 hay 8 unidades. Por el mismo estilo se pueden hallar en dicha tabla todos los residuos posibles, cuando no se tiene práctica en el restar. Se leerá muchas veces dicha tabla, enunciando primero el número de la primera columna de la izquierda, despues cada uno de los interiores que estan en su línea, y á continuacion su correspondiente superior.

V. g. en la línea del 2 se dirá: *de* 2 *á* 3, 1: *de* 2 *á* 4, 2: *de* 2 *á* 5, 3 &c. En la del 8 se dirá: *de* 8 *á* 9, 1: *de* 8 *á* 10, 2: *de* 8 *á* 11, 3: *de* 8 *á* 12, 4 &c. Todo esto debe enseñarse á los discípulos de viva voz.

85 *Regla para el restar numérico de los números simples.*

1º Escríbase el subtraendo debajo del minuendo, de suerte que cada clase esté debajo de su correspondiente como para sumar (*art.* 77); y para evitar equivocaciones conviene suplir con ceros las clases que faltan en el minuendo ó en el subtraendo (*art.* 50).

2º Tírese una raya por debajo; y empezando por la derecha, véase la diferencia que hay de la primera clase del subtraendo á su correspondiente del minuendo; y escríbase esta diferencia en la misma columna, debajo de la raya.

3º Ejecútese lo mismo con las segundas clases, y asi sucesivamente hasta acabar, colocando tambien el signo decimal debajo de los signos decimales.

4º Si algun número del minuendo es menor que su correspondiente del subtraendo, se le agregan diez unidades (esto es, una unidad de la clase siguiente); y en tal caso, á la clase siguiente del subtraendo se le agrega una unidad.

5º Para comprobar la operacion se suma el subtraendo con el residuo, y debe resultar el minuendo. Esto se ejecuta de memoria, viendo si la primera clase de la derecha del subtraendo sumada con la del residuo da la correspondiente del minuendo; y asi sucesivamente, sin escribir dichas sumas.

86 *Ejemplo* 1.° El mar tiene 32‘53 pies de profundidad. La parte inferior de una embarcacion está sumergida 12‘41 pies, y se quiere saber la distancia desde dicha parte inferior hasta el fondo del mar. El problema se resuelve restando 12‘41 de 32‘53.

Ejemplo 2.° Para transferirse de un punto á otro deben caminarse 6‘53 millas; y despues de haber andado 3‘28 millas en dicha direccion, se quiere saber cuánto hay que caminar para llegar á dicho punto. El problema se resuelve restando 3‘28 de 6‘53.

Ejemplo 1.°		*Ejemplo* 2.°	
Minuendo................	32‘53	*Minuendo*................	6‘53
Subtraendo..............	12‘41	*Subtraendo*..............,	3‘28
Residuo..................	20‘12	*Residuo*..................	3‘25

Explicacion del ejemplo 1.° Empezando por la primera columna de la derecha se dirá: *de* 1 *á* 3, 2 (se escribirá el 2, y en la segunda columna se dirá): *de* 4 *á* 5, 1 (se escribirá el 1, y en la tercera columna se dirá): *de* 2 *á* 2, 0 (escrito el 0 se dirá en la columna cuarta): *de* 1 *á* 3, 2. Escrito el 2 se tiene el residuo 20'12 pies.

Para comprobar, empezando por la derecha, dice 1 *y* 2, 3; y sin escribir el tres se continúa diciendo: 4 *y* 1, 5 &c.; y como van resultando las mismas cifras del minuendo, no hay duda en que la operacion está bien hecha.

Explicacion del ejemplo 1.° Se dirá: *de* 8 *á* 13, 5, *y llevo* 1 (al decir cinco se escribirá el 5, y pasando á la columna siguiente se dirá): *y* 2, 3 *á* 5, 2 (escrito el 2 se dirá en la tercera columna): *de* 3 *á* 6, 3; y escrito el 3 se tiene el residuo 3'25 millas.

87 *Demostracion.* Cuando no se ofrece el caso del número 4º de la regla, es evidente que cada clase del residuo contiene la diferencia que hay entre la misma clase del subtraendo y su correspondiente del minuendo; y asi, el total de las clases del residuo expresará el todo de la diferencia que hay entre los dos números dados: esto es, lo que queda del minuendo despues de quitado el subtraendo.

Para el caso del número 4º basta atender á que aumentado igualmente el minuendo ó subtraendo, su diferencia no se altera (*art.* 34); y como en dicho caso, aunque se aumenta una clase del minuendo en diez unidades, tambien se aumenta la siguiente del subtraendo en una unidad, que equivale á diez unidades de la clase anterior (*art.* 39 *á* 46), es evidente que la diferencia no se altera.

V. g. en el ejemplo 2.° al decir *de* 8 *á* 13 se aumentan á la clase de los centésimos del minuendo diez centésimos, lo que equivale á aumentar la clase de los décimos en un décimo (*art.* 45); y como al decir en la columna de los décimos, *de* 3 *á* 5 en vez de decir *de* 2 *á* 5 se aumenta un décimo al subtraendo, está claro que este aumento es igual al que se le consideró al minuendo, y por lo tanto no debe alterar el resultado (*art.* 34).

Ejemplos.

Minuen.....	58'236	*Minuen.....*	348'73	*Minuen.......*	5249'000
Subtra.......	00'987	*Subtra......*	084'90	*Subtra.........*	0000'062
Residuo.....	57'249	*Residuo.....*	263'83	*Residuo.......*	5248'938

88 *Regla general para sumar varias partidas aunque tengan diferentes signos.*

1.º Súmense aparte las partidas positivas por la regla dada (*art.* 77), y póngase el signo + á dicha suma.

2.º Súmense aparte las partidas negativas, y póngase á dicha suma el signo —.

3.º Réstese el valor numérico de la menor de estas dos sumas del valor numérico de la mayor, por la regla dada (*art.* 85).

4.º Póngase al resultado el signo de la suma mayor.

Demostracion. Se ha hecho ver (*art.* 73) que el exceso de las cantidades tomadas en un sentido sobre las tomadas en sentido opuesto es el resultado de todas ellas; y que dicho resultado queda en el sentido de la cantidad mayor; y como esto es lo que se halla por la regla, dicha regla será exacta.

89 *Ejemplo* 1.º Supóngase que se han navegado hácia levante primero 52‘35 millas, y despues 41‘5; y hácia poniente primero 3‘8, y despues 0‘15; y se quiere saber lo que se ha adelantado en la navegacion. Por la regla general del sumar se hallará que se han navegado 89‘9 millas hácia levante, operando como sigue.

Partidas positivas.. { +52‘35, +41‘50
Suma positiva......... +93‘85
Suma negativa .... —03‘95
Resultado................ +89‘90

Partidas negativas........ { —3‘80, —0‘15
Suma negativa............... —3‘95

Ejemplo 2.º Sumar 1‘245+13‘8—93‘5—0‘004

Part. posit... { +01‘245, +13‘800
Suma posit... +15‘045
Suma negat... —93‘504
Resultado...... —78‘459

Part. negat.... { —93‘500, —00‘004
Suma negat.... —93‘504

Ejemplo 3.° Sumar 36—15‘8—1‘75.

Partidas negativas.....	—15‘80 —01‘75
Suma negativa..........	—17‘55
Partida positiva........	+36‘00
Resultado................	+18‘45

Ejemplo 4.° Sumar—349—0‘73—0‘0009.
El resultado será....—349‘7309

90 *Regla para restar un conjunto de cantidades de otro conjunto atendiendo á los signos.*

1º Las partidas que componen el minuendo se dejan con sus signos.

2º A las partidas que componen el subtraendo se les cambian los signos: esto es, se pone + á las que tienen —, y se pone — á las que tienen +.

3º Considérese el todo como una cantidad, y hállese por la regla anterior el resultado de todas las partidas, que será el residuo que se pide.

Demostracion. Esta regla está fundada en la definicion del restar (*art.* 81) y en la regla para sumar (*art.* 88) que queda demostrada.

91 Siempre que las cantidades estan representadas con letras ó con otros caractéres generales, el signo negativo indica una subtraccion; y por lo tanto, se debe cambiar el signo correspondiente al valor efectivo de dichas cantidades en cada caso particular, para obtener el valor de la expresion correspondiente á dicho caso.

Conviene tener muy presente que cuando se trata de expresiones literales, el signo positivo indica que la cantidad se debe tomar con el signo que le corresponde en cada caso particular, sea positivo ó sea negativo; y el signo negativo, antepuesto á una letra ó expresion general, manifiesta que las cantidades representadas deben tomarse con signo contrario al que les corresponde en cada caso particular.

V. g. si siendo $m = n - x$ resultan $n = 8$ y $x = 3$, será en dicho caso $m = 8 - 3 = 5$. Pero si fuesen $n = 8$, y $x = -3$, resultaria $m = 8 + 3 = 11$. Si siendo $m = x + l$ resultan $x = -6$ y $l = 8$, será en este caso $m = -6 + 8 = 2$; pero si fuesen $x = 6$ y $l = 8$, será $m = 6 + 8 = 14$.

92 Está claro, que el sumar y el restar son dos operaciones inversas, que se destruyen la una á la otra, siempre que sean las mismas las cantidades que se suman y restan: de suerte que si despues de haber sumado dos cantidades se resta la una de ellas de la suma, resultará la otra; y si despues de haber restado una cantidad de un todo se le suma al residuo el subtraendo, resultará el mismo todo. En esto se funda la prueba del restar (*art.* 85, *núm.* 5º).

CAPITULO V.

DEL MULTIPLICAR.

93 Un número se llama *duplo* de otro ó *dos veces mayor* que otro, cuando lo contiene dos veces. *Triplo* ó *tres veces mayor*, cuando lo contiene tres veces &c. Y en general, se llama un número *múltiplo* de otro, cuando lo contiene muchas veces exactamente: esto es, cuando dicho número de veces está expresado por un entero.

El número contenido en otro dos veces se llama *mitad* ó *subduplo* del que lo contiene, ó *dos veces menor* que el que lo contiene. El contenido en otro tres veces se llama el *tercio* ó *subtriplo* del que lo contiene, ó *tres veces menor* que el que lo contiene &c. Y en general, el número contenido en otro muchas veces se llama *submúltiplo* ó *parte alicuota* del que lo contiene, cuando el número de veces está expresado por un entero.

94 Si el número de veces que un número está contenido en otro no se puede expresar por un entero, el número menor se llama *parte alicuanta* del mayor.

95 De lo dicho se sigue que si un número *a* es duplo, triplo, cuádruplo &c. de otro número *b*; el número *b* será en el primer caso subduplo, en el segundo

subtriplo, en el tercero subcuádruplo &c. del número *a*. En general, si *a* es múltiplo de *b*, será *b* submúltiplo de *a*.

Tomando para poner ejemplos de todo lo dicho al número 12, se dirá que el 12 es seis veces mayor que el 2; y el 2 seis veces menor que el 12. El mismo 12 es cuatro veces mayor que el 3, ó cuádruplo del 3; y el 3 es cuatro veces menor que el 12, ó el cuatro de 12 ó subcuádruplo de 12. En general el 12 será múltiplo del 2 y el 3; y el 2 y el 3 serán submúltiplos de 12, ó partes alicuotas de 12: y el 5 será parte alicuanta de 12, porque del 5 tomado dos veces resulta el número 10, que es menor que 12; y tomando el 5 una vez mas resulta 15, que es mayor que 12.

96 Para generalizar mas las expresiones, diremos que un número se toma *media vez* cuando se toma su mitad. Diremos que se toma *un tercio de vez* cuando se toma su tercera parte &c. Diremos v. g. que se toma un número $\frac{3}{5}$ de vez cuando se toman sus $\frac{3}{5}$. Diremos que se toma un número cuatro veces y $\frac{2}{7}$ cuando se toma cuatro veces y á mas se toman sus $\frac{2}{7}$ &c.

Por el mismo estilo se dirá que un número *b* está contenido en otro *a* media vez, un tercio de vez, tres quintos de vez, cuatro veces y dos séptimos &c. cuando es menester tomar el número *b* dicho número de veces para obtener el número *a*.

97 Establecido esto, se puede decir en general que *multiplicar* es tomar un número, que se llama *multiplicando*, tantas veces cuantas unidades contiene otro número, que se llama *multiplicador*. El resultado de la multiplicacion se llama *producto*; y al multiplicador y multiplicando se les da el nombre general de *factores* del producto.

Para indicar la multiplicacion se usa de este signo ×, que quiere decir *multiplicado por*, ó simplemente *por*, porque la palabra *multiplicado* se sobreentiende.

Asi, $3 \times 8 = 24$, quiere decir 3 *por* 8, 24: esto es, 3 *multiplicado por* 8 *produce* 24.

En este ejemplo, 3 es el multiplicando, 8 el multiplicador, y 24 el producto: ó lo que es lo mismo, 3 y 8 son dos factores cuyo producto es 24.

Cuando los factores constan de varias partidas, es menester encerrar en un paréntesis las partidas que han de formar el multiplicando, y puesto fuera el signo x, se encierran en otro paréntesis las partidas que han de formar el multiplicador.

Asi diremos que $(67\times34)=(60+7)\times(30+4)$.

98 De la definicion del multiplicar se infiere que el multiplicador se debe considerar como un número abstracto, y que el producto es de la especie del multiplicando.

99 Tambien se deduce que el producto contiene al multiplicando tantas veces cuantas el multiplicador contiene á la unidad.

100 De aqui se sigue que si el multiplicador es mayor que la unidad, el producto resultará mayor que el multiplicando, puesto que lo contendrá mas de una vez.

Si el multiplicador es menor que la unidad (esto es, si el multiplicador es una fraccion propia), el producto resultará menor que el multiplicando, puesto que lo contendrá menos de una vez.

Multiplicando un número por la unidad, ó multiplicando la unidad por el número, resultará el mismo número (*art.* 4). Esto es, que $8\times1=1\times8=8$.

101 Si el número que se ha de repetir un determinado número de veces (esto es, el multiplicando) se hace duplo, triplo &c., es evidente que el producto resultará duplo, triplo &c. del anterior. Si se toma la mitad, el tercio &c. del multiplicando, el producto resultará la mitad, el tercio &c. del anterior. Tambien si un mismo número a se repite un número de veces duplo, triplo &c., el resultado será duplo, triplo &c. Si el mismo número a se repite la mitad, el tercio &c. del número de veces que repitió antes, el resultado será la mitad, el tercio &c. del anterior.

Luego lo mismo será duplar, triplar &c., ó tomar la mitad, el tercio &c. del producto, que ejecutar dichas operaciones con el multiplicando ó con el multiplicador.

En general, el producto aumentará ó disminuirá al paso que aumente ó disminuya uno de sus factores.

102 De lo establecido en el artículo anterior se sigue que cuando hay tres factores, es indiferente el multiplicarlos en el órden que se quiera.

V. g. $(8\times3)\times2=8\times(2\times3)=(8\times2)\times3$, y lo mismo se verifica con cualquier número de factores.

Por lo que se acaba de establecer es $(1\times8)\times3=(1\times3)\times8$, y como $1\times8=8$ y $1\times3=3$, es evidente que $8\times3=3\times8$.

103 En general, es indiferente tomar cualquiera de los dos factores como multiplicando ó como multiplicador para obtener el valor numérico del producto.

104 De esto y lo establecido (*art.* 99) se deduce que el producto contiene á cualquiera de los factores tantas veces cuantas unidades tiene el otro factor.

105 Por ser el todo igual á la suma de todas sus partes, lo mismo será multiplicar todas las partes del multiplicando por cualquier número y reunir los productos, que multiplicar de una vez todo el multiplicando por el mismo número.

Esto es, que $67\times34=60\times34+7\times34$.

Respecto á que el valor numérico del producto no varía tomando el multiplicador por multiplicando y el multiplicando por multiplicador (*art.* 103), tambien este se podrá dividir en partes, y reunir la suma de los productos que resultarán de multiplicar por cada una de ellas el multiplicando.

V. g. porque $60\times34=34\times60$ en vez de 60×34 se podrá poner $60\times30+60\times4$.

106 De todo esto se sigue que se podrá ejecutar la multiplicacion considerando á ambos factores divididos en varias partes, multiplicando por cada una de las partes del multiplicador todas las del multiplicando sucesivamente, y reuniendo los productos.

V. g. $67\times34=(60+7)\times(30+4)=60\times30+7\times30+60\times4+7\times4$.

107 *Regla para multiplicar cualquiera cantidad numérica simple por unidades simples.*

1º Escríbanse las unidades bajo la primera cifra de la derecha del multiplicando, y tírese una raya por debajo.

2º Repítase el valor de la primera cifra de la derecha del multiplicando (considerada como unidades) tantas veces cuantas unidades contiene la del multiplicador. Escríbanse las unidades que resultan en dicha primera columna de la derecha, y consérvense en la memoria las decenas.

3º Repítase en los mismos términos el valor de la cifra siguiente del multiplicando, y despues de haber agregado al resultado las decenas que produjo la multiplicacion primera (consideradas como unidades) se escribirán las unidades en dicha columna segunda, y se conservarán en la memoria las decenas.

4º Practíquese lo mismo con la tercera cifra, y asi sucesivamente hasta acabar; y póngase el signo decimal del producto debajo del signo decimal del multiplicando (*art.* 44).

108 *Ejemplo* 1.º Supóngase que para caminar una milla se han empleado 35'24, y se quiere saber cuántos minutos se emplearán en caminar una legua. Por cuanto la distancia de una legua es tripla de la distancia de una milla, es evidente que se necesitará tres veces mas tiempo, y por lo tanto se resolverá el problema multiplicando como sigue.

Multiplicando.......	35'24	*factores.*
Multiplicador.......	3	
Producto..............	105'72	

Explicacion. Se dirá: 3 *por* 4, 12: 2 *y llevo* 1......... 3 *por* 2, 6 *y* 1, 7......... 3 *por* 5 15: 5 *y llevo* 1........ 3 *por* 3, 9 *y* 1 10, 0 *y llevo* 1........ Se escribirá el 0 en las decenas, y la unidad que se lleva en las centenas; y el producto 105'72 será el tiempo que debe emplearse en caminar una legua.

109 *Demostracion.* Es evidente que multiplicar un número, de cualquier clase, por unidades simples es lo mismo que sumarlo tantas veces cuantas unidades tiene el multiplicador, y dejarlo en su misma clase; y como esto es lo que, segun la regla, se práctica con todas las clases del multiplicando, el resultado será el producto.

110 Cuando un número *a* se ha de multiplicar por 2, y el producto se ha de sumar con otro número *b*, es mas expedito el escribir el número *a* dos veces debajo ó encima de *b*, y sumar las tres partidas.

Si el multiplicador de *a* es 3, se puede escribir el número *a* tres veces &c.; pero operando de este modo, la operacion se dificulta tanto mas, cuanto mayor es el multiplicador.

111 Para multiplicar con prontitud es menester saber de memoria todos los productos de unidades simples por unidades simples, los cuales se manifiestan en la siguiente tabla:

Segundo número.

Primer número.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Esta tabla está dispuesta como la que sirve para sumar (*art. 76*), con la diferencia de contener los productos donde aquella las sumas.

Los números de la primera columna de la izquierda y los de la línea superior son los factores; y en la casilla del concurso se expresa el producto correspondiente.

Asi, por cuanto 7×8=56, esta escrito el 56 en el concurso de la línea del 7 y de la columna del 8.

Conviene leer la tabla muchas veces, diciendo v. g. en la línea del 2, 2 *por* 2, 4: 2 *por* 3, 6: 2 *por* 4, 8: 2 *por* 5, 10 &c.

La línea del 6 se leerá asi: 6 *por* 2, 12: 6 *por* 3, 18: 6 *por* 4, 24: 6 *por* 5, 30: 6 *por* 6, 36 &c., y á los Maestros toca el enseñar el modo de leer esta tabla de viva voz.

112 De lo dicho (*art.* 103) se sigue que basta aprender de memoria los productos de cada número por sí mismo y por los mayores, esto es, que basta aprender la línea del 3 empezando 3 por 3, 9. La del 4 empezando 4 por 4, 16. La del 5 empezando 5 por 5, 25 &c.

113 *Regla general para la multiplicacion de las cantidades numéricas simples.*

1º Escríbase el multiplicador de suerte que sus unidades esten (como en la regla del art. 107) debajo de la última clase de la derecha del multiplicando, las decenas bajo la penúltima &c., y tírese la raya por debajo.

2º Multiplíquese como se prescribe en dicha regla (*art.* 107) todo el multiplicando por la primera cifra de la izquierda del multiplicador, empezando á escribir los productos bajo dicha primera cifra de la izquierda del multiplicador.

3º Hágase lo mismo con la siguiente cifra del multiplicador, empezando á escribir los productos un lugar mas hácia la derecha: esto es, bajo dicha cifra del multiplicador.

4º Practíquese lo mismo con la otra cifra del multiplicador, empezando á escribir los productos bajo de ella: esto es, otro lugar mas á la derecha; y asi sucesivamente hasta acabar.

5º Súmense todos los productos parciales sin alterar su colocacion, y poniendo el signo decimal debajo del signo decimal del multiplicando (*art.* 44), se tendrá el producto total.

6º Para evitar equivocaciones conviene poner ceros en muchos lugares en que no hay cifras significantes, y colocar desde luego el signo decimal en la primera línea de productos.

7º Si se quiere evitar la incomodidad de colocar las unidades del multiplicador bajo la última cifra del multiplicando, para colocar el signo decimal se observará la regla de separar en el producto tantas cifras decimales cuantas hay en el multiplicando y multiplicador. En este caso, si es menor el número de cifras del producto, se pondrán á la izquierda de la última cifra significante de dicho lado los ceros necesarios para completar el número de decimales.

8º Si el multiplicando ó el multiplicador se terminan en ceros á la derecha, se puede ejecutar la multiplicacion como si dichos ceros no existiesen, y despues se pondrán á la derecha del producto tantos ceros cuantos habia en ambos factores á la derecha de la última cifra significante. En este caso se ejecutará la separacion de decimales (si los hay) por la regla del número antecedente.

114 *Ejemplos.*

Multiplicando......	253‘47	*Multiplicando.........*	21‘54
Multiplicador.......	36‘21	*Multiplicador..........*	3‘754
Productos pares...	7604‘1 1520‘82 50‘604 2‘5347	*Productos pares.......*	64‘62 15‘078 1‘0770 8616
Producto total......	9178‘1487	*Producto total.........*	80‘86116

115 *Demostracion.* Es evidente que multiplicando por decenas, los productos deben ser diez veces mayores que multiplicando por unidades (*art.* 101), y por lo tanto deberán colocarse un lugar mas á la izquierda &c. (*art.* 39 *á* 43). Luego multiplicando por cualquier cla-

se de los enteros, deberán colocarse los productos tantos lugares mas á la izquierda que multiplicando por unidades, cuantos lugares estuviere dicha clase mas á la izquierda que las unidades. Por el mismo estilo se demuestra que multiplicando por cualquiera clase de los decimales, se deberán colocar los productos tantos lugares mas á la derecha que multiplicando por unidades, cuantos lugares estuviere dicha clase mas á la derecha que las unidades. Pero esto es lo que se ejecuta colocando las cifras del multiplicador segun regla, y empezando á escribir cada producto parcial bajo la cifra correspondiente del multiplicador: luego las clases que componen dichos productos parciales quedarán colocadas en los lugares que les corresponden respecto á los productos parciales de todas las clases del multiplicando por las unidades del multiplicador; y por lo tanto, sumándolas en dicha disposicion, se tendrá el producto total.

Lo que se previene en los números 7.° y 8.° de la regla se deduce de lo prescrito en los números 1.° y 6.°; y se comprende fácilmente con la inspeccion de los ejemplos.

Otros ejemplos.

398	35‘6	0‘0058
0‘029	40‘6	0‘39
7‘960	14240‘0	0‘001740
3‘582	249‘2	522
11‘542	14489‘2	0‘002262

116 Si en una expresion numérica se pone el signo decimal un lugar mas á la derecha, no hay duda en que los décimos se harán unidades, las unidades decenas &c. (*art. 39 á 46*), y en general el valor de cada cifra será diez veces mayor de lo que era antes. Si se pone el signo decimal dos lugares mas á la derecha, los valores de todas las cifras serán cien veces mayores &c. De aqui se deduce que para multiplicar por 10, por 100, &c., no hay mas que poner el signo decimal un lugar, dos lugares &c. mas á la derecha.

117 *Regla general para multiplicar cualquier número por la unidad en cualquiera clase de los enteros.*

Póngase el signo decimal tantos lugares mas hácia la derecha cuantos ceros hubiese á la derecha de la unidad hasta el signo decimal, supliendo con ceros las clases que faltasen (*art.* 50).

V. g. 34‘21×1000=34210, y 34‘21×10=342‘1.
Tambien 563×100=56300 porque (*art.* 50) 563 =563‘000 &c.

CAPITULO VI.

DEL PARTIR.

118 *Partir* ó *dividir* un número por otro es hallar las veces que el segundo está contenido en el primero. El número que se ha de partir se llama *dividendo*; aquel por quien se ha de partir *divisor*, y el resultado *cuociente*.

Cuando el dividendo vale mas de lo necesario para incluir un número de veces justo al divisor, á dicha parte excedente del dividendo se le da el nombre de *residuo*.

V. g. partir 8 por 2 es ver cuántas veces está incluido el 2 en el 8; y asi será 8 el dividendo, 2 el divisor, 4 el cuociente, y el residuo ninguno ó cero, porque el 2 está incluido cuatro veces justas en el 8. Si se parte 17 por 5, será 17 el dividendo, 5 el divisor, 3 el cuociente en enteros, y 2 el residuo, porque el 17 tiene dos unidades mas de las necesarias para incluir tres veces al 5; ó lo que es lo mismo, porque 3×5 =15, de cuyo número hasta al 17 hay dos unidades.

119 Cuanto en adelante se diga del cuociente, se entiende del cuociente exacto; que en su lugar se enseñará á hallar con exactitud, ó con cuanta aproximacion se juzgue necesaria.

12 En la tabla del artículo 111 se hallan los cuocientes para todos los casos en que el divisor contiene solo unidades simples.

V. g. si se quiere saber las veces que el 7 cabe en 42, en la línea del 7 se busca el 42, y en la cabeza de la columna del 42 se halla el cuociente axacto 6.

Si en la línea del divisor no se halla el dividendo, se busca el número próximo menor; en la cabeza de su columna se hallan las unidades del cuociente, y el exceso del número propuesto sobre el próximo menor es el residuo.

V. g. si se quiere saber las veces que el 5 cabe en el 23, en la línea del 5 no se halla el 23, pero sí el 20 (que es el próximo menor, respecto á que el número siguiente es 25): pôr lo tanto el cuociente será 4 (que está á la cabeza de la columna del 20), y el residuo 3, que es el exceso de 23 sobre 20.

Conviene leer muchas veces dicha tabla, diciendo en la línea del 2, 2 *en* 4, 2: 2 *en* 6, 3: 2 *en* 8, 4 *&c.*, que quiere decir: *el 2 en el* 4 *cabe en dos veces &c.*

En la línea del 6 se dirá: 6 *en* 12, 2: 6 *en* 18, 3: 6 *en* 24, 4: 6 *en* 30, 5: 6 *en* 36, 6: 6 *en* 42, 7: 6 *en* 48, 8: 6 *en* 54, 9; y se tendrá presente que esta línea es la mas interesante.

A los Maestros toca explicar de viva voz el uso que puede hacerse de dicha tabla para aprender á partir con prontitud.

121 La definicion del partir manifiesta, que el divisor estará incluido en el dividendo tantas veces cuantas unidades contiene el cuociente.

122 De esto y de lo dicho (*art.* 104) se sigue que el dividendo es igual al producto del divisor por el cuociente cuando este es exacto; y á dicho producto mas el residuo cuando es aproximado.

En esto se funda la prueba del partir.

V. g. por cuanto $4 \times 6 = 24$, será 6 el verdadero cuociente de 24 partido por 4. Para comprobar que 3 es en enteros el cuociente de 17 partido por 5, al producto de $3 \times 5 = 15$ se agregará el residuo 2, y con esto resultará el dividendo 17.

123 De aqui se sigue que partiendo un producto por el multiplicando, resultará al cuociente el multiplicador; y como cualquiera de los factores se puede tomar como multiplicando ó como multiplicador (*art.* 103), es evidente que partiendo el producto por uno de sus dos factores, resultará por cuociente el otro factor.

En esto se funda la prueba del multiplicar.

V. g. por cuanto 12 partido por 3 da 4 por cuociente, será 12 el verdadero producto de 3×4, ó de 4×3.

124 Por esta razon, partiendo el dividendo por el cuociente, resultará como cuociente el divisor primero.

125 De lo dicho resulta como colorario que el partir es operacion inversa del multiplicar; de suerte que multiplicar y partir una cantidad por un mismo número, es dejar la cantidad como estaba.

V. g. si despues de haber multiplicado 7 por 6, se parte el producto 42 por 6, resultará otra vez el 7.

126 De la definicion del partir (*art.* 118) se infiere que si el divisor es la unidad, será el cuociente igual al dividendo (*art.* 4). Si el divisor es mayor que la unidad, el cuociente será menor que el dividendo. Si el divisor es menor que la unidad, será el cuociente mayor que el dividendo.

V. g. 8 partido por 1, da 8 por cuociente: 8 partido por 2, da por cuociente 4; y 8 partido por 0'2, da por cuociente 40, puesto que es 0'2×40=8 (*art.* 122).

127 En general, el cuociente aumentará al paso que aumente el dividendo ó disminuya el divisor; y el cuociente disminuirá al paso que disminuya el dividendo ó aumente el divisor.

128 Respecto á que el dividendo es un producto, cuyos factores son el divisor y cuociente (*art.* 122 *y* 119), la suma del número de decimales de divisor y cuociente será igual al número de decimales del dividendo (*art.* 113 *núm* 7º); y por lo tanto (*art.* 92) el número de decimales del cuociente deberá ser igual al número de decimales del dividendo menos el número de decimales del divisor.

129 Tambien resultará de dicho principio, que con dividendo, divisor y cuociente se deberá verificar lo mismo que se demostró (*art.* 101 *á* 106) del producto y de sus factores.

Síguese de esto, que si dejando el mismo divisor se multiplica el dividendo por cualquier número, resultará el cuociente primitivo multiplicado por dicho número.

V. g. el cuociente de 6 partido por 2 es 3; y si se multiplica el dividendo primitivo 6 por el número 7, resultará el nuevo dividendo 42, que partido por el mismo 2 da el nuevo cuociente 21 igual al primitivo (3) multiplicado por 7.

Para demostrar esto con generalidad por medio de las expresiones literales se puede proceder como sigue.

1.° Sea el dividendo primitivo $a\times b$; y no hay duda (*art.* 123) en que si el divisor es b, será el cuociente a.

2.° Si el dividendo primitivo $(a\times b)$ se multiplica por n, resultará el producto $(a\times b)\times n$, que por lo dicho (*art.* 102) es $=(a\times n)\times b$.

3.° Luego partiendo el nuevo dividendo por b (*art.* 123) resultará el nuevo cuociente $(a\times n)$, que es igual al primitivo (*núm.* 1.°) multiplicado por n.

130 De este principio resulta que en vez de multiplicar un cuociente por cualquiera número, se puede multiplicar el dividendo por el mismo número, y dejar el mismo divisor.

131 Tambien resulta de la propiedad enunciada (*art.* 123) que multiplicando por un mismo número el dividendo y divisor, no variará el cuociente.

V. g. 10 partido por 2 da por cuociente 5; y si se multiplican el 10 y el 2 por 4, resultará 40 partido por 8, cuyo cuociente es tambien 5.

Se puede demostrar esto por medio de las expresiones literales como sigue.

1.° Sea $a\times b$ el dividendo primitivo, y b el divisor, y (*art.* 123) será el cuociente a.

2.° Si el dividendo y divisor se multiplican por n, resultará el nuevo dividendo $(a\times b)\times n$, que por lo dicho (*art.* 102) es $=a\times(b\times n)$, y el nuevo divisor será $(b\times n)$.

3.° Luego (*art.* 123) el cuociente será a como en el número 1.°

132 De esto y de lo dicho (*art.* 125) resulta que partiendo el dividendo y divisor por un mismo número, tampoco varía el cuociente.

Si se quiere demostrar esto separadamente por medio de expresiones literales, se supondrá el dividendo $a\times(b\times n)$ y el divisor $(b\times n)$, y será el cuociente a. Partiendo por n será el nuevo dividendo $a\times b$, el nuevo divisor b, y el cuociente a, como antes.

133 De lo dicho (*art.* 129, 131 *y* 125) se puede deducir como corolario que la operacion de multiplicar

el divisor por cualquiera número, equivale á la de partir el cuociente por el mismo número.

V. g. 30 partido por 5 da por cuociente 6; y multiplicando el 5 por 3, resulta el nuevo divisor 15, por el cual partiendo el 30, resulta el nuevo cuociente 2, que es igual cuociente primitivo 6 partido por 3.

Para demostrar esto por medio de las expresiones literales se puede proceder como sigue.

1.° Sea $(a\times n)\times b$ el dividendo, y b el divisor (*art.* 123), resultará el cuociente $(a\times n)$.

2.° Multiplicando el divisor primitivo por n, será el nuevo divisor $(b\times n)$; y el dividendo primitivo (*núm.* 1.°), se puede poner (*art.* 102) bajo esta forma $a\times(b\times n)$.

3.° Luego (*art.* 123) el nuevo cuociente será a, que es igual al primitivo (*núm.* 1.°) partido por n.

134 De la definicion del partir (*art.* 118) se deduce que suponiendo al dividendo dividido en tantas partes iguales cuantas unidades contiene el cuociente, el divisor expresará el valor de cada una de dichas partes.

V. g. por cuanto 12 partido por 4 da por cuociente 3, suponiendo el número 12 dividido en tres partes iguales, cada una de ellas valdrá cuatro unidades.

135 De esto y de lo dicho (*art.* 124) se sigue que suponiendo al dividendo dividido en tantas partes iguales cuantas unidades contiene el divisor, el cuociente expresará el valor de cada una de dichas partes.

V. g. por cuanto 12 partido por 4 da por cuociente 3, suponiendo el número 12 dividido en cuatro partes iguales, cada una de ellas valdrá tres unidades.

136 Para comprender mejor las consecuencias que se deducen de este principio interesante, supongamos que se trata de dividir una manzana por igual entre cinco sugetos, y no hay duda en que para esto se deberá dividir la manzana en cinco partes iguales, y una de dichas partes será lo que le toca á cada uno. Esto manifiesta que 1 partido por 5 es igual á $\frac{1}{5}$. Si lo que se ha de distribuir igualmente entre cinco sugetos son tres manzanas, es evidente que á cada uno le tocará $\frac{1}{5}$ de la primera

manzana, $\frac{1}{5}$ de la segunda, y $\frac{1}{5}$ de la tercera: por lo tanto á cada uno le tocarán $\frac{3}{5}$ de manzana. En general si el número de sugetos es m y el de manzanas n, á cada sugeto le tocará $\frac{1}{m}$ (que se enuncia *un emeavo*) de cada manzana: esto es, tantos $\frac{1}{m}$ de manzana cuantas son las manzanas, ó lo que es lo mismo, $\frac{n}{m}$ de manzana.

137 De esto se deduce con evidencia, que todo quebrado ó expresion fraccionaria expresa el cuociente del numerador partido por el denominador.

Por esta razon toda division puede expresarse poniendo al dividendo y divisor en forma fraccionaria.

Esto es, que $\frac{3}{5}$ es lo mismo que 3 partido por 5: $\frac{10}{5}$ es lo mismo que 10 partido por 5: y en general $\frac{n}{m}$ (que se puede enunciar *ene emeavos*) es lo mismo que n partido por m; y en adelante las expresiones fraccionarias se leerán indistintamente de cualquiera de estos modos.

138 Se comprende fácilmente, que si del dividendo se hacen varias porciones, sumando las veces que el divisor está contenido en cada una de dichas porciones, se tendrá el total de veces que está incluido el divisor en el dividendo: esto es, el cuociente.

V. g. si el dividendo es 32'92, se puede separar ante todas cosas en dos ó mas porciones como sigue, 32'92 = 32'9 + 0'02 = 32 + 0'9 + 0'02 = 30 + 2 + 0'9 + 0'02; ó bien = 20 + 12 + 0'6 + 0'32, quitando una decena del 30 y agregándola al 2: y quitando tres décimos del 9 para agregarlos á los 0'02.

139 Segun esto, para facilitar la division, despues de hechas varias porciones del dividendo, se puede quitar v. g. de la mayor lo necesario para que en ella esté incluido el divisor un número justo de decenas. Lo que se ha quitado á dicha mayor porcion se puede agregar á la segunda, y quitar de ella (si fuese necesario) lo que baste para que en ella esté incluido el divisor un número

justo de unidades. Lo que se hubiere quitado de la segunda porcion se puede agregar á la tercera, y asi sucesivamente hasta acabar.

En esto se funda la siguiente

140 *Regla general para la division de los números simples.*

1º Se escribe el divisor á la derecha del dividendo, dejando bastante espacio entre uno y otro, y se tira una raya por debajo del divisor, y otra á su izquierda.

2º En los preceptos siguientes se supone que se consideran el dividendo y divisor como si no hubiese signo decimal; y ante todas cosas se le agregan (si es necesario) á las clases decimales del dividendo, á lo menos los ceros que basten para que bajo dicha consideracion sea mayor que el divisor (*art.* 50).

3º Si el dividendo tiene menos cifras decimales que el divisor, se le agregarán los ceros necesarios para igualar, cuando menos, dicho número de cifras decimales.

4º Se separarán con un punto las primeras cifras de la izquierda del dividendo que se necesiten para que (considerándolas como un conjunto de unidades) incluyan al divisor.

5º Se escribe debajo de la raya del divisor la cifra que expresa las veces que dicho divisor está contenido en la primera porcion del dividendo, considerada como se ha dicho (*).

6º Por esta primera cifra del cuociente se multiplica todo el divisor, y el producto se resta de dicha primera porcion del dividendo, considerada como antes.

7º A la derecha de este residuo se agrega la cifra si-

(*) Para hallar las veces que el divisor está incluido en el dividendo sirve la regla que se dará mas adelante (*art.* 147). Por esta razon, antes de saber practicar lo que se previene en dicha regla, convendrá ejercitarse poniendo ejemplos en que el divisor solo tenga una cifra.

Despues se aprenderá el modo de abreviar esta regla (*art.* 149); y de él solamente se hará uso en adelante.

guiente del dividendo; y el todo, considerado tambien como un conjunto de unidades, formará la segunda porcion.

8º Con esta segunda porcion se ejecutará lo mismo que con la primera; con la sola diferencia de escribir la cifra, que expresa las veces que en dicha segunda porcion está contenido el divisor, á la derecha de la primera cifra del cuociente.

9º Se continuará en los mismos términos, agregando una cifra á cada residuo para formar la siguiente porcion del dividendo, y escribiendo cada nueva cifra del cuociente un lugar mas hácia la derecha.

10º Si alguna de las porciones del dividendo es menor que el divisor, se pone en el cuociente cero, y se agrega la otra cifra de la derecha para formar la siguiente porcion; y si esta es todavía menor, se pone al cuociente otro cero, y se agrega otra cifra mas del dividendo &c.

11º Puesta la cifra del cuociente que corresponde á la última porcion del dividendo, se separan con el signo decimal tantas cifras de la derecha cuantas clases decimales tiene el dividendo mas que el divisor, supliendo (si fuese necesario) con ceros á la izquierda las cifras que faltaren.

12º Si se quiere el cuociente representado con toda exactitud, á las cifras halladas por el método expresado se les agrega un quebrado cuyo numerador es el último residuo, y el denominador el divisor.

13º Si en el curso de la operacion resultase el producto del divisor por la cifra del cuociente mayor que la porcion del dividendo de quien se ha de restar, es señal de que dicha cifra del cuociente es mayor de lo que debe ser; y por lo tanto se disminuirá en una unidad, y se repetirá la operacion (*núm.* 6º).

14º Si algun residuo, antes de agregarle la cifra siguiente del dividendo, resulta igual ó mayor que el divisor, es señal de que la cifra del cuociente es menor de lo que debe ser, y por lo tanto se aumentará en una unidad, y se repetirá la multiplicacion y resta (*núm.* 6.º)

141 *Ejemplo* 1.º

divid. 3.2 9 2	2 *divisor.*
2	1646 *cuoc.*
12	
12	
009	
8	
12	
12	
00	

Ejemplo 2.º

divid.	256.8	34 *divisor.*
	238	$75 + \frac{18}{34}$ *cuoc.*
	018 8	
	17 0	
resid..	01 8	

Ejemplo 3.º

divid. 58.3‘48	0‘58 *divisor.*
58	1006 *cuoc.*
00 3 48	
3 48	
0 00	

Explicacion del ejemplo 1.º Escritos el dividendo 3292 y el divisor 2 en los términos que se previene en el número primero, y separada con un punto la primera cifra de la izquierda del dividendo (que es 3), se dice: 2 *en* 3, 1; y se escribe 1 al cuociente. Se multiplica por 1 el divisor 2, y su producto 2 escrito bajo de la primera porcion del dividendo (que es 3), y restado de ella, da el residuo 1. Hecho esto, se baja la cifra siguiente del dividendo (que es 2) á la derecha del residuo 1, y se dice: 2 en 12, 6; y se escribe el 6 al cuociente. Se multiplica el divisor 2 por dicha segunda cifra 6, y restando el producto 12 de la segunda porcion del dividendo (que es tambien 12), resulta el residuo 0. Hecho esto, se baja la cifra siguiente del dividendo (que es 9), y se dice: 2 *en* 9, 4 &c.

Terminada la division, resulta el cuociente exacto 1646. Si el dividendo hubiera sido 3‘292, y el divisor el mismo 2, seria el verdadero cuociente 1‘646; y si en el mismo caso fuese el divisor 0‘02, seria el cuociente 164‘6, y finalmente, si siendo 32‘92 el dividendo, fuese 0‘02 el divisor, seria el cuociente 1646.

Explicacion del ejemplo 2.º Colocados el dividendo 2568 y divisor 34 como se previene (*núm.* 1.º), se separan con el punto las tres cifras primeras del dividendo (que son 256), por cuanto el divisor no cabe en la cantidad que representan las dos primeras (que es 25), y se dice : 34 *en* 256, 7: se escribe el 7 al cuociente; y restado de 256 el producto de 34 por 7 (que es 238) se le agrega al residuo 18 la siguiente cifra (que es 8), y resulta la segunda porcion del dividendo 188. Se dice 34 *en* 188, 5 : se escribe 5 al cuociente, y multiplicado por el divisor 34, resulta el producto 170, que restado de la segunda porcion 188, da el residuo 18. Resta pues que dividir 18 por 34 (*art.* 139); y como esta division equivale al quebrado $\frac{18}{34}$ (*art.* 137), dicho quebrado agregado al cuociente en enteros dará el cuociente exacto $75 + \frac{18}{34} = 75 + \frac{9}{17}$.

Explicacion del ejemplo 3.º Se trata de dividir 583‘48 por 0‘58; y hallada la primera cifra del cuociente (que es 1), y agregada la cifra 3 del dividendo al residuo 00, resulta la segunda porcion del dividendo 3 menor que el divisor 58 : por lo tanto puesto 0 al cuociente, se agrega la otra cifra (que es 4), y resulta la tercera porcion 34, que todavía es menor que el divisor. Póngase pues otro 0 al cuociente; y agregada en el dividendo la otra cifra (que es 8), resulta la cuarta y última porcion 348, en la que 58 cabe 6 veces, y no queda residuo. Por ser en este ejemplo igual el número de decimales de dividendo y divisor, no se separan decimales en el cuociente, que resulta 1006.

142 *Demostracion.* Lo que se prescribe en la regla, y se ve ejecutado en los tres ejemplos, es lo mismo que se estableció (*art.* 139); y asi para demostrar que las cifras que se han hallado representan el verdadero cuociente, basta manifestar que estan colocadas en las clases que les corresponden. Para esto no hay mas que atender á que si el divisor y dividendo son efectivamente conjunto de unidades (como en el ejemplo 1.º), no hay duda en que la última cifra de la derecha (que es 6) deberá representar unidades. Porque en tal caso, al ver las veces que el divisor (que es 2) está incluido en la última porcion del dividendo (que es 12), se toman uno y otro en su verdadero valor. La penúltima cifra (que es 4) deberá representar decenas; porque la penúltima porcion del dividendo (en rigor 90), que al ejecutar la division se ha considerado como unidades, es en realidad decenas, esto es, diez veces mayor; y por lo tanto deberá ser el cuociente diez veces mayor de lo que resulta por la consideracion falsa que se hace (*art.* 129). Por igual

razon la cifra antepenúltima del cuociente (que es 6) deberá representar centenas &c. Pero esto es lo que se ejecuta colocando las cifras del cuociente segun la regla: luego no hay duda en que dicha regla es exacta en este caso.

La regla para la separacion de los decimales en los demas casos queda demostrada (*art.* 128).

143 Como á la derecha del dividendo se pueden añadir en clase de decimales todos los ceros que se quiera sin alterar su valor (*art.* 50), se podrá continuar la division cuando se quiera, aproximando de este modo mas y mas el cuociente, cuando despues de haber llegado á la última cifra significante del dividendo queda residuo.

144 *Ejemplos.*

0'0032.000	7	2'0000	9
28	0'0004571 &c.	1'8	0'2222 &c.
040		0 20	
3 5		18	
0 50		020	
49		18	
01.0		020	
0'7		18	
0 3		02	

El primer ejemplo está aproximado hasta los diez millonésimos, y el segundo hasta los diez milésimos.

145 Siempre que se halle un residuo igual á otro que haya resultado despues de haber llegado á la última cifra significante del dividendo, en adelante las cifras del cuociente y los residuos volverán á resultar en el mismo órden, como se ve desde luego en el ejemplo segundo.

146 En los cuocientes aproximados se examinará si el divisor es mayor ó menor que el duplo del último residuo considerados uno y otro como conjuntos de unidades; y si fuese menor se aumentará una unidad á la última cifra de dicho cuociente. En efecto, en tal caso el

quebrado, que se debia agregar, valdrá mas de media unidad de dicha clase última, y por lo tanto es mas exacto aumentarle una unidad que despreciar el quebrado enteramente.

147 Cuando el divisor tiene muchas cifras significantes, es muy dificil hallar á la sola inspeccion de las cantidades las veces que está incluido en la porcion correspondiente del dividendo; y para evitar este inconveniente y las equivocaciones que resultarian de poner al cuociente cifras que se hubiesen de borrar para sustituirles otras (*art.* 140 *núm.* 13 *y* 14), se recurrirá á la siguiente

Regla para tantear las cifras que se han de escribir al cuociente.

1.° Véase las veces que la primera cifra de la izquierda del divisor está incluida en la primera, ó (si fuese necesario) en las dos primeras cifras de la izquierda de la porcion correspondiente del dividendo (*art.* 120).

2.° Sin escribir al cuociente la cifra que expresa dicho número de veces, multiplíquese por ella la primera cifra del divisor, y el producto (que tampoco se escribe) réstese mentalmente de dicha primera ó dos primeras cifras de la porcion.

3.° Al residuo, que se conserva en la memoria, se le considera á la derecha la cifra siguiente de la porcion (considerada como unidades); y si la segunda cifra de la izquierda del divisor no cabe en este conjunto tantas veces como expresa el cuociente imaginario, es señal cierta de que dicho cuociente debe disminuirse.

4.° Se disminuirá en este caso dicha cifra imaginaria del cuociente de una unidad, y se repetirá el tanteo en los mismos términos.

5.° Si se ve que multiplicando la segunda cifra del divisor por el cuociente imaginario, y restando el producto del primer residuo imaginario y la cifra de la derecha (*núm.* 3.°) resulta mucho residuo, desde luego se puede escribir y efectuar la division.

6.° Pero si el residuo fuese muy pequeño, se le puede considerar á la derecha la cifra siguiente del dividendo, y ver si la tercera cifra del cuociente cabe el expresado número de veces en este conjunto. Si no cabe, desde luego es menester rebajar el cuociente imaginario, &c.

148 Todo esto se comprenderá mejor con la explicacion del ejemplo siguiente.

```
902.3‘00 | 298
         |-------
894          30‘27
----
008 3 0
  5 9 6
--------
  2 3 40
  2 0 86
--------
  0 2 54
```

Explicacion. Separadas con el punto las tres primeras cifras del dividendo (que son 902) se ve que el 2 (primera cifra del divisor) cabe cuatro veces en el 9 (primera cifra del dividendo). Se dirá pues (sin escribir el 4): 2 *por* 4, 8: *á* 9, 1, que agregándole el 0 que sigue resulta 10. Como la segunda cifra del divisor (que es 9) no cabe cuatro veces en el 10, desde luego está claro que no puede ser el cuociente 4.

Supóngase pues el cuociente 3, (y sin escribirlo) dígase por el mismo estilo: 2 *por* 3, 6: *á* 9, 3, que con el 0 que sigue compone 30. Como la segunda cifra del divisor (que es 9) cabe tres veces en 30, y todavía queda el residuo 3 (que se halla diciendo 3 × 9, 27, *á* 30), 3, se puede escribir el 3 al cuociente, &c.

La segunda porcion del dividendo (que es 83) es menor que el divisor; y por lo tanto, puesto el 0 al cuociente, se bajará la otra cifra del dividendo, y resultará la tercera porcion 830.

Se dirá, pues, para hallar la tercera cifra del cuociente, 2 *en* 8, 4; y diciendo (sin escribir el 4): 2 *por* 4, 8: *á* 8, 0, que agregada la otra cifra del dividendo (que es 30), solo compone 3. Se ve al instante que la segunda cifra del divisor (que es 9) no cabe en 3, y asi no puede ser la tercera cifra del cuociente 4.

Para probar el 3, se dice, 2 *por* 3, 6: *á* 8, 2, que agregándole el 3 (que sigue) compone 23. Se ve que tampoco cabe el 9 tres veces en 23, y que por lo tanto tampoco puede ser la tercera cifra del cuociente 3; pero como se ve que no está muy distante de poderlo ser, desde luego se puede escribir el 2, &c.

La cuarta porcion del dividendo es 2340; y asi, para hallar la cuarta cifra del cuociente, se dirá (tomando sus dos primeras cifras 23, por cuanto dicha porcion tiene una cifra mas que el divisor): 2 *en* 23, 9 (porque nunca puede ser el cuociente 10); y para probar se añade, 2 *por* 9, 18, *á* 23, 5. Unido el 5 al 4 que sigue forma 54; y como la segunda cifra del divisor (que es 9) no cabe nueve veces en 54, desde luego está claro que no puede ser 9 el cuociente.

Para tantear el 8, se dirá 2 *por* 8, 16; á 23, 7, que con el 4 que sigue compone 74. La segunda cifra del divisor (que es 9) cabe ocho veces en 74; pero como $8 \times 9 = 72$, el residuo es solo 2, que agregada á la derecha la otra cifra del dividendo (que es 0), resulta 20; y como la tercera cifra del divisor (que es 8) no cabe ocho veces en 20, no hay duda en que tampoco puede ser 8 la cuarta cifra del cuociente. Pero como el tanteo manifiesta que no está muy distante de poderlo ser, desde luego se puede poner el 7.

149 Entendida la regla para ejecutar la division (*art.* 140), para ejecutarla con mas prontitud no se escribe el producto del divisor por el cuociente, y se halla el residuo por partes segun se enseña en la siguiente

Regla para partir con prontitud.

1.º El producto de la primera cifra de la derecha del divisor por el cuociente se conserva en la memoria; y se resta de la cifra primera de la derecha de la porcion correspondiente del dividendo, agregándole á dicha cifra las decenas que fuese necesario para ejecutar la resta. El residuo se escribe debajo de dicha primera cifra de la derecha de la porcion.

2.º Al producto de la segunda cifra de la derecha del divisor por el cuociente se le suman (como unidades) las mismas decenas que se le consideraron de mas á la primera cifra de la porcion, y el conjunto (que se conserva en la memoria) se resta en los mismos términos de la segunda cifra de la derecha de la porcion. El residuo se escribe debajo de dicha segunda cifra.

3.º Se continúa asi hasta llegar á la última cifra de la izquierda de la porcion expresada; y si al llegar á dicha última cifra no se pudiese ejecutar la resta (por ser el subtraendo mayor que el minuendo), esto seria señal de que el cuociente tiene alguna unidad de mas.

4.º Hallado ya de esta suerte el residuo correspondiente á la primera porcion, para obtener la segunda no se baja la cifra inmediata de la derecha; y lo único que se hace es ponerle un punto á su derecha para manifestar que dicha cifra pertenece á la segunda porcion.

5.° Con esta segunda porcion se procede como con la primera; y asi sucesivamente, poniendo puntos á la derecha de las cifras del dividendo, al paso que se van considerando agregadas al residuo de la porcion anterior.

150 Para la mejor inteligencia de todo esto, se aplicará la regla al ejemplo precedente (*art.* 148).

902. 3 ·0. 0.	298
068 3 4 4	30'27
2 2 5	mas bien
0	30'28

Explicacion. Puesto el punto á la derecha del 2 en el dividendo, y escrito el cociente 3, como antes, se dirá, 3 × 8, 24 (que se considerará bajo el 2 del dividendo; y se añadirá) *á* 32 (agregando tres decenas al 2), 8, *y llevo* 3; y se escribirá el 8 debajo del 2. Despues (volviendo al divisor se dirá 3×9, 27; *y* 3 (que se llevaban), 30 (que se considerará bajo el 0; y se añadirá) *á* 30 (añadiendo tres decenas al 0), *cero*, *y llevo* 3; y se escribirá el cero debajo del cero. Despues (volviendo al divisor se dice): 2×3, 6 *y* 3 (que se llevaban), 9 (que se considerará bajo el 9 del dividendo, y se añadirá); *á* 9, *cero*, que se escribe bajo de dicho 9 del dividendo; y con esto se tiene el primer residuo 8.

Hecho esto, al residuo 8 se le considera agregada la cifra de la derecha (que es 3), indicando esta agregacion con el punto puesto á la derecha del 3; y por cuanto el divisor 289 no cabe en dicha segunda porcion 83, se escribe cero al cociente, y se considera agregada la otra cifra del dividendo (que es 0), poniéndole un punto á su derecha. Despues, escrito el cuociente 2, se dice: 2×8, 16; *á* 20 (agregándole al cero dos decenas), 4, *y llevo* 2. Escrito el 4 debajo del cero del dividendo, se continúa diciendo: 2×9, 18; *y* 2 (que se llevaban), 20; *á* 23 (agregándole dos decenas al 3), 3, *y llevo* 2. Escrito el 3 debajo del 3 del dividendo, se dice: 2×2, 4; *y* 2 (que se llevaban), 6; *á* 8, 2; y se escribe el 2 debajo de la última cifra de la izquierda de la segunda porcion del dividendo (que es 8). Con esto se tiene todo el segundo residuo 234.

Puesto el punto detrás de la última cifra del dividendo, resulta la cuarta porcion 2340, con la cual se opera de un modo semejante, para obtener el residuo final 254. El divisor 298 es mucho menor que el duplo del residuo 254, y por lo tanto estará incluido en él mas de media vez: esto es, que será $\frac{254}{298} > \frac{1}{2}$, y por lo tanto, el cuociente con diferencia de menos de medio centésimo, por exceso, será 30'28.

151 *Demostracion.* Lo que se prescribe en esta regla no es mas que un modo de restar abreviado, fundado en

los mismos principios del restar ordinario (*art.* 85), que quedan demostrados (*art.* 87); con la sola diferencia, de que en el caso propuesto en dicho método (*art.* 85 *núm.* 4.°) bastaba agregar una decena á la clase menor del minuendo; y en este pueden ser muchas las decenas que han de agregarse para poder efectuar la resta.

152 De lo establecido (*art.* 117 *y* 125) resulta como corolario la siguiente

Regla para dividir por la unidad con ceros á la derecha.

Trasládese el signo decimal (*art.* 50) tantas clases mas hácia la izquierda, cuantos ceros hay á la derecha de la unidad hasta dicho signo.

Asi será $\frac{34210}{1000} = 34'210 = 34'21 : \frac{342'1}{10} = 34'21$; y $\frac{342'1}{10000} = 0'03421$.

De los divisores de los números.

153 Se dice que un número es *divisor* de otro cuando está incluido en él un número de veces justo: esto es, cuando es su parte alicuota (*art.* 93). Todo número se divide exactamente por sí mismo y por la unidad, y por lo tanto se dice que un número es *primo* cuando no tiene mas divisores que estos, y *compuesto* cuando tiene otros divisores.

Asi, 13 será número primo, porque solo contiene un número de veces justo á la unidad y á sí mismo; y 6 será número compuesto, porque contiene un número de veces justo al 2 y el 3, que serán sus divisores.

154 Se llama *divisor comun* de varios números al que es divisor de todos ellos; y los números se llaman *entre sí compuestos* cuando tienen un divisor comun; y *entre sí primos* cuando no tienen mas divisor comun que la unidad.

Asi, los números 3, 9 y 12 serán entre sí compuestos, porque tienen al 3 por divisor; y los números 4, 18 y 25 serán entre sí primos.

155 Está claro que si uno de los números es primo, dicho número será el comun divisor, ó los números serán entre sí primos.

156 Si las unidades simples de cualquier número son cero ó divisibles por 2, el 2 será divisor de dicho número.

157 *Número par* es el que tiene por divisor al 2, é *impar* el que no lo tiene.

158 Tendrá al 5 por divisor todo número que se termine en cero ó 5.

159 Son divisibles por 10, por 100 &c. todos los números terminados en un cero, en dos ceros &c.

160 Si todas los clases de un número, sumadas como unidades simples, dan un resultado divisible por 3, el 3 será divisor de dicho número.

V. g. 162 será divisible por 3, porque la suma de sus cifras (consideradas como unidades simples) es 9, que es divisible por 3.

161 Las reglas dadas para conocer si un número es divisible por 2, 3, 5 y 10, sirven para hallar los divisores de dicho número, menores que 11, excepto el 7.

Porque si un número es divisible por 4, será divisible por 2, dos veces sucesivas. Si es divisible. por 8, lo será tambien por 2 tres veces sucesivas, respecto á que es $8 = 2 \times 2 \times 2$. Si es divisible por 6, lo será por 2 y 3, respecto á que es $6 = 3 \times 2$. Si es divisible por 9, lo será por 3, dos veces sucesivas, respecto á que es $9 = 3 \times 3$.

162 El mayor divisor comun de varios números se llama *su mayor medida comun.*

CAPITULO VII.

DEL MODO DE OPERAR CON LOS QUEBRADOS.

163 Se demostró (*art.* 137) que todo quebrado se puede considerar como el cuociente de la division del numerador por el denominador; y por lo tanto, las consecuencias (*art.* 130 *á* 134) se aplicarán tambien á los quebrados. Esto es, que

1.º La operacion de multiplicar ejecutada con el numerador equivale á ejecutar la misma con el quebrado (*art.* 130).

2.º La operacion de multiplicar el denominador por cualquier número, equivaldrá á partir el quebrado por dicho número (*art.* 133).

3.º Las operaciones de multiplicar por un mismo número ejecutadas con los dos términos del quebrado no alteran su valor; y lo mismo sucede con las de partir (*art.* 131 *y* 132).

4.º Tambien se sigue que todo entero se podrá expresar en forma fraccionaria, poniéndole la unidad por denominador (*art.* 126); ó poniéndole un denominador dado, y por numerador el producto de dicho denominador por el entero (*núm.* 3.º).

será pues $7 = \frac{7}{1} = \frac{21}{3}$, &c.

164 Si el quebrado es impropio (*art.* 57), se puede reducir á enteros, ó á entero y quebrado, ó á entero y decimales (*art.* 140, 143 *y* 149); y aunque sea propio, se puede reducir á decimal (*art.* 143 *y* 144) con cuanta aproximacion se juzgue necesaria.

Pueden servir de ejemplos los propuestos (*art.* 141, 144 *y* 150); y se tendrá presente el ejecutar esta reduccion, siempre que el resultado final sea un quebrado impropio.

165 Es un corolario de lo dicho (*art.* 163 *núm.* 3.º) la siguiente

Regla para simplificar los quebrados.

Para simplificar un quebrado, esto es, para reducirlo á términos menores, se partirán el numerador y denominador por cualquiera de los divisores comunes á uno y otro.

V. g. $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, partiendo dos veces por 2. Y $\frac{24}{30} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, partiendo primero por 2 y despues por 3.

166 *Regla para reducir dos ó mas fracciones á comun denominador.*

1.° Multiplíquese cada numerador por el producto de los denominadores de los demas, y resultarán los numeradores correspondientes.

2.° Multiplíquense todos los denominadores, y el producto será el denominador comun.

V. g. reduciendo $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$ á comun denominador, resultarán los quebrados $\frac{21}{35}$ y $\frac{20}{35}$, cada uno igual á su correspondiente de los propuestos. Los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{6}$, reducidos á comun denominador, serán $\frac{108}{162}$, $\frac{72}{162}$, $\frac{135}{162}$

167 Si hay enteros, se reducen tambien multiplicándolos por el denominador comun (*art.* 163, *núm.* 4.°).

Asi 5, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$ reducidos á comun denominador, serán $\frac{160}{32}$, $\frac{28}{32}$, $\frac{24}{32}$.

168 *Demostracion.* Como multiplicar todos los denominadores es lo mismo que multiplicar el denominador de cada uno de los quebrados por el producto de los denominadores de los demas (*art.* 102), es evidente que ejecutando lo que se prescribe en la regla, resultan multiplicados por una misma cantidad el numerador y denominador de cada quebrado; y por lo tanto, quedará el mismo su valor (*art.* 163, *núm.* 3.°).

169 El reducir los quebrados á comun denominador sirve para comparar fácilmente sus valores, pues teniendo todos un mismo denominador, sus valores respectivos dependerán solo de los numeradores (*art.* 71). Esto es, que dichos numeradores serán los mismos si los quebrados son iguales; el un numerador será duplo del otro si el un quebrado es duplo del otro, &c. En el caso

de ser el único objeto la comparacion de los quebrados, no importa saber el valor del denominador comun, y bastará conocer los numeradores de los quebrados reducidos. Esto es, que

Para comparar los quebrados basta multiplicar sus términos *en cruz*: esto es, el numerador del primero por el denominador del segundo, y el numerador del segundo por el denominador del primero, y comparar dichos productos.

170 Los productos de la multiplicacion en cruz serán iguales siempre que lo sean los quebrados; é inversamente los quebrados serán iguales siempre que resulten iguales los productos.

V. g. $\frac{3}{5}=\frac{36}{60}$, porque multiplicando sus términos en cruz, resulta $60\times3=36\times5=180$.

171 *Regla para sumar los quebrados.*

1º Redúzcanse á comun denominador (*art.* 166).

2º Súmense los numeradores de los quebrados reducidos, y se tendrá el numerador de la suma, á la cual se le pondrá el comun denominador.

3º Los enteros se suelen sumar aparte, á no ser que con los quebrados hayan de formar el dividendo, divisor, multiplicador ó multiplicando; en cuyo caso se reducen, como se ha dicho (*art.* 167), al mismo denominador, y se suman sus numeradores con los de los quebrados.

Asi, la suma de los quebrados $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{5}{6}$ (*art.* 166) tendrá por numerador $108+72+135=315$, y por denominador 162: esto es, que será $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{5}{6}=\frac{315}{162}$ $=1+\frac{17}{18}$ (*art.* 164, 165 *y* 160). La suma de $5, \frac{7}{8}$

$\frac{3}{4}$ (*art.* 167), sumando el entero con los quebrados será $\frac{212}{32}=\frac{53}{8}$ (*art.* 165 *y* 156).

Demostracion. Esta regla es un corolario de lo dicho (*art.* 71).

172 *Regla para restar los quebrados.*

1.º Se reducen los quebrados á comun denominador.

2.º Se restan los numeradores, y se tiene el numerador del residuo, cuyo denominador es el comun.

3.º Si hay enteros, se suelen restar aparte; y si en dicho caso es mayor el numerador del subtraendo, se le agrega al del minuendo el denominador, y despues se agrega una unidad á los enteros del subtraendo.

Será pues $\frac{8}{15}-\frac{6}{13}=\frac{104-90}{195}=\frac{14}{195}$; y para restar 129 y $\frac{6}{7}$ de 143 y $\frac{3}{5}$, se reducirán los quebrados á comun denominador, y resultará $\frac{6}{7}=\frac{30}{35}$, y $\frac{3}{5}=\frac{21}{35}$, que es menor que el subtraendo; y asi agregándole el denominador 35, se restará $\frac{30}{35}$ de $\frac{56}{35}$, lo que da $\frac{26}{35}$; y al restar los enteros 129 de 143, se dirá: 1 *y* 9, 10; *á* 13, 3 *y llevo* 1, &c. y será el residuo total $13+\frac{26}{35}$.

Demostracion. La demostracion es la misma del sumar; y lo que se prescribe en el núm. 3.º es lo mismo que se practicó en el restar simple (*art.* 85, *núm.* 4.º); respecto á que, agregarle á un numerador su denominador, equivale á agregarle al quebrado una unidad.

De la multiplicacion y particion de los quebrados.

173 Un quebrado se multiplica por entero, ó un entero por un quebrado (*art.* 103) multiplicando por el entero el numerador (*art.* 163, *núm.* 1.º).

V. g. $\frac{5}{8}\times3=\frac{15}{8}=1+\frac{7}{8}$; y $\frac{7}{9}\times6=\frac{42}{9}=4+\frac{6}{9}=4+\frac{2}{3}$.

174 Un quebrado se parte por un entero, multiplicando el denominador por el entero (*art.* 163, *núm.* 2º).

V. g. $\frac{15}{8}$ partido por 3 es $=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$; y $\frac{2}{3}$ partido por $5=\frac{2}{15}$.

175 *Regla para multiplicar los quebrados entre sí.*

1º Súmense los quebrados, ó enteros y quebrados que forman el multiplicando, y hágase aparte lo mismo con los que forman el multiplicador (*art.* 171).

2º Multiplíquense los numeradores, y resultará el numerador del producto.

3º Multiplíquense los denominadores, y resultará el denominador.

V. g. $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$; y $\left(5+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\times\left(1+\frac{3}{8}\right)=\frac{71}{12}\times\frac{11}{8}$ $=\frac{781}{96}=8+\frac{13}{96}$.

Demostracion. Sea $\frac{a}{b}$ el quebrado multiplicando y $\frac{n}{m}$ el multiplicador; y respecto á que el primero es el cuociente de *a* partido por *b* (*art.* 137), para obtener el resultado se deberá multiplicar el dividendo *a* por $\frac{n}{m}$, y partir el producto por el divisor *b* (*art.* 130). Luego por lo dicho (*art.* 173 *y* 174) será dicho resultado $=\frac{a\times n}{m\times b}=\frac{a\times n}{b\times m}$: esto es, que el resultado de la multiplicacion de los quebrados será otro quebrado, cuyos términos son los productos de los términos correspondientes del multiplicando y multiplicador.

176 *Regla para partir un quebrado.*

1º Redúzcanse á dos quebrados el dividendo y divisor, como se dijo (*art.* 175, *núm.* 1.º).

2º Inviértanse los términos del divisor, poniendo el denominador encima, y el numerador debajo de la raya.

3º Multiplíquense el dividendo por el divisor invertido, y resultará el cuociente.

V. g. $\frac{12}{35}$ partido por $\frac{4}{7}$ será $\frac{12}{35}\times\frac{7}{4}=\frac{84}{140}=\frac{42}{70}=\frac{21}{35}=\frac{3}{5}$; y 6 partido por $\frac{4}{9}$ será $=\frac{6}{1}\times\frac{9}{4}=\frac{54}{4}=\frac{27}{2}=13+\frac{1}{2}$.

Demostracion. Sea $\frac{a}{b}$ el dividendo, y $\frac{n}{m}$ el divisor. Es evidente que el cuociente será $\frac{a\times m}{b\times n}$, puesto que esta expresion multiplicada por el divisor $\frac{n}{m}$ (*art.* 175 *y* 102) es $=\frac{a\times m\times n}{b\times m\times n}$, que por lo dicho (*art.* 163, *núm.* 3.º) es igual al dividendo $\frac{a}{b}$; y esta es la prueba del partir (*art.* 122). Luego el cuociente de la division de los quebrados es el nuevo quebrado que resulta de la multiplicacion de los términos del dividendo $\frac{a}{b}$ por los términos correspondientes del divisor $\frac{n}{m}$ invertido.

Regla para reducir los quebrados compuestos á simples.

177 Multiplíquense entre sí todas las cantidades separadas con la palabra *de*, y quedará reducido el quebrado compuesto á simple.

V. g. $\frac{2}{9}$ *de* $3 = \frac{2}{9} \times 3 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (*art.* 165). $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{5}$ *de* $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{6}{8} = \frac{36}{160} = \frac{9}{40}$ (*art.* 165).

Demostracion. Queda demostrado (*art.* 135) que para hallar el valor de una de las partes de una cantidad dividida en cierto número de partes iguales, se debe partir dicha cantidad por el número que expresa el de las partes en que se considera dividida. No es menos evidente, que tomar una parte determinada un cierto número de veces, es lo mismo que multiplicar el valor de la parte por dicho número (*art.* 97). Es asi que expresando todas las cantidades en forma fraccionaria (*art.* 137), el quebrado último de la derecha se ha de dividir en las partes que expresa el denominador del penúltimo; y el numerador del mismo quebrado penúltimo manifiesta las veces que dicha parte se ha de tomar (*art.* 58); luego partiendo el último quebrado de la derecha por el denominador del penúltimo, y multiplicando por el numerador, los dos últimos quebrados quedarán reducidos á uno solo. Pero la operacion expresada equivale á multiplicar los dos quebrados último y penúltimo (*art.* 174, 173 *y* 175): luego multiplicando dichos dos quebrados, quedarán reducidos á uno solo. Por una razon semejante, este quebrado, multiplicado por el de su izquierda, dará un resultado igual á los tres quebrados últimos; y lo mismo se demuestra de todos los demas.

CAPITULO VIII.

DEL MODO DE OPERAR CON LOS NUMEROS COMPLEXOS.

178 Es evidente que si una cantidad representada por unidades de cualquiera denominacion se quiere representar por unidades menores, no habrá que hacer mas que poner en vez de cada unidad mayor el número de unidades menores de que se compone; esto es, repetir

cada unidad tantas veces cuantas unidades menores compone una unidad mayor. De esta consideracion se deduce la siguiente

Regla para reducir un número á otro de menor denominacion.

179 Multiplíquese el número propuesto por el número de unidades menores que contiene cada unidad suya, y el producto será el número reducido á menor denominacion.

V. g. para reducir 8 pies á pulgadas, se multiplicará 8 por 12 (*articulo* 61), y el producto 96 será el número de pulgadas que equivalen á 8 pies.

Como el partir es operacion inversa de la de multiplicar (*art.* 125), se infiere de lo dicho la siguiente

Regla para reducir un número á otro de mayor denominacion.

180 Pártase el número propuesto por el número de unidades menores que contiene cada unidad mayor, y el cuociente será el número reducido á mayor denominacion.

Siempre se puede poner en práctica esta regla, ya sea expresando la division en forma de quebrado (*art.* 137), ya efectuándola por decimales (*art.* 143) con la aproximacion necesaria.

Asi para reducir 96 pulgadas á pies, se partirá 96 por 12, y el cuociente 8 serán los pies. Por igual razon serán 5 pulgadas lo mismo que $\frac{5}{12}$ pies, ó bien 0'4166, &c. pies.

Aplicacion de las reglas para reducir las cantidades de una especie á otra.

181 La reduccion de los números sexagesimales á la especie inmediata inferior se ejecuta multiplicando por 6,

y colocando el signo decimal un lugar mas hácia la derecha, esto es, que el producto de las unidades representa decenas, el de los décimos representa unidades, el de los centésimos representa décimos &c.

V. g. 5′763 = 345″78, 6 = 345″8, omitiendo los centésimos, y aumentando los décimos en una unidad: porque la cifra omitida es mayor que 5: esto es, mayor que medio décimo. Se halla este resultado diciendo 6 *por* 3, 18; *y llevo* 2 (porque 18 se acerca mas á 20 que á 10, y no se escribe nada): 6 *por* 6, 36, *y* 2, 38; 8 *y llevo* 3 (se escribe el 8 y se continúa diciendo): 6 *por* 7, 42, *y* 3, 45; 5 *y llevo* 4, &c. Se comprende sin dificultad que este modo de operar equivale á multiplicar por 6 y por 10 (*art.* 117; y esto es lo mismo que multiplicar por 60 (*art.* 102).

182 La reduccion de los sexagesimales de especie inferior á su inmediata superior se ejecuta partiendo por 6 (esto es, tomando el sexto), y colocando el signo decimal un lugar mas hácia la izquierda. Por consiguiente, el sexto del conjunto de decenas representa unidades: el del conjunto de unidades representa décimos: el del conjunto de décimos representa centésimos &c. Se tendrá presente que cuando no hay cifras decimales, se deben suplir con ceros á la derecha de la última cifra significante de la cantidad que se trata de reducir (*art.* 50).

V. g. 345″8, reducidos á minutos y aproximados hasta los milésimos, serán 5′763: esto es, que 345″8 = 5′763 con diferencia de menos de un milésimo. Se halla este resultado diciendo, 34; *su sexto* 5 (se escribe el 5 en las unidades y se añade), *por* 6, 30; *á* 34, 4 (y considerando á su derecha las unidades de segundo se añade), 45; *su sexto* 7 (se escribe el 7 en los décimos y se añade), *por* 6, 42; *á* 45, 3 (y considerando á su derecha los 8 décimos se añade), 38; *su sexto* 6 (se escribe el 6 y se añade), *por* 6, 36; *á* 38, 2 (se considera un 0 á la derecha del 2 y se añade), 20, *su sexto* 3. Se escribe el 3 y no se continúa la operacion, respecto á que solo se quieren los milésimos.

Este modo de operar equivale á partir primero por 6 y despues por 10 (*art.* 152), que es lo mismo que partir inmediatamente por 60.

183 Cuando hay varias denominaciones intermedias, y dos extremas que llamaremos máxima y mínima, para reducir toda la cantidad á la mínima denominacion, se suele reducir el número de la máxima deno-

minacion á su inmediata, y se le agrega al resultado el número de unidades de dicha denominacion inmediata. Por el mismo estilo se reduce este conjunto á la denominacion que sigue, y asi sucesivamente hasta llegar á la mínima denominacion.

V. g. si $3^\circ + 14' + 25''$ se quieren reducir á segundos, los 3° multiplicados por 60 dan $180'$, que agregando los $14'$, componen el total de $194'$. Estos 194 multiplicados por 60 dan $11640''$, que agregándoles los $25''$, componen $11665''$. Serán pues $3^\circ + 14' + 25'' = 11665''$.

184 Para reducir un todo que contiene varias denominaciones á una fraccion de la denominacion máxima, lo mas breve es reducirlo todo á la denominacion mínima, como se ha enseñado (*art.* 183), y se tendrá el numerador del quebrado, cuyo denominador será el número de unidades mínimas que contiene cada unidad máxima.

Asi para reducirlos $3^\circ + 14' + 25''$ á una sola fraccion de grado, se reducirá el todo á segundos, que serán $11665''$; y como el grado contiene 60 minutos, y el minuto 60 segundos, constará un grado de $60 \times 60 = 3600''$; y por lo tanto será $3^\circ + 14' + 25'' = \frac{11665''}{3600} = \frac{2333''}{720}$ (*art.* 165).

185 Si se trata de reducir el todo á entero y quebrado, ó á decimales de la máxima denominacion, se procederá por un método inverso del indicado (*art.* 183): esto es, que se reducirá el número de la mínima denominacion á su inmediata superior (*art.* 180): se agregará el resultado al número de unidades de dicha denominacion penúltima, y se reducirá el conjunto á la denominacion antepenúltima (*art.* 180): se agregará el resultado al número de unidades de dicha denominacion antepenúltima; y se seguirá operando por el mismo estilo hasta llegar á las unidades de la máxima denominacion.

V. g. si la expresion es $3^\circ \ldots 14' \ldots 25''$ se tendrán primero $14'417$, y despues $3^\circ\ 2403$.

186 *Regla para sumar los números complexos.*

1º Escríbase cada denominacion debajo de su correspondiente, y súmense los números de la menor denominacion (que son los últimos de la derecha) como simples.

2º Póngase debajo el exceso solo de dicha suma á un número exacto de unidades inmediatas; y consérvese en la memoria dicho número exacto de unidades, para agregarlo á la denominacion que sigue.

3º Súmense por el mismo estilo los números de la segunda denominacion de la derecha, agregando ante todas cosas las unidades que se llevaban de la denominacion anterior; y continúese por el mismo estilo hasta acabar.

4º Cuando las sumas son algo crecidas, para evitar equivocaciones es lo mejor el escribir en un papel suelto la suma de las unidades de la especie inferior, y hallar por regla general (*art.* 180) el número de unidades de la especie inmediata superior, y las unidades sobrantes de especie inferior, que son las que se han de escribir en la primera columna de la derecha; y lo mismo se va ejecutando con todas las demas.

187 Cuando se trata de los números sexagesimales, se hallan desde luego las sumas efectivas de cada clase, como se explicará en el ejemplo 3º; y tanto para esto como para lo dicho (*art.* 181 *á* 186), y para otras operaciones, de que se tratará mas adelante, conviene tener muy presentes los números múltiplos de 6, que se hallan en la línea del 6 de la tabla (*art.* 111), como se advirtió ya en el artículo 120.

V. g. si resulta el número 52, conviene que se presente inmediatamente á la imaginacion el 48, del cual al 52 van 4; y tambien conviene el que se presente á la imaginacion (sin discurrir) que el 48 contiene 8 veces al 6. De este modo, si resulta un conjunto de 52 decenas, se dice inmediatamente (sin escribir dicho número) 4 y llevo 8, esto es, que si se trata de segundos se debe poner un 4 en el lugar de las decenas de segundo, y sobran 8 minutos, que se sumarán con las unidades de dicha clase.

Esta es la razon por que en la explicacion del ejemplo 3.° siendo 15 la suma de decenas de segundo, se dirá 3 *y llevo* 2; puesto que de 12 á 15 van 3, y que el 12 incluye dos veces al 6. Por igual razon, hallada la suma de las decenas de minuto 20, se dirá 2 *y llevo* 3; puesto que de 18 á 20 van 2, y el 18 incluye tres veces al 6.

188 *Ejemplo* 1.° Supóngase que un sugeto que solo tenia 7 pesos, 9 reales y 26 maravedís, ha recibido primero 4 pesos, 12 reales y 19 maravedís; despues 8 pesos, 10 reales y 32 maravedís; y últimamente 13 reales y 31 maravedís; y se quiere saber á cuánto ascenderá su caudal. El problema se resuelve sumando las cuatro partidas, y resulta el caudal = 22 pesos, 2 reales y 6 maravedís.

Ejemplo 2.° De una viga se cortó primero un trozo de 18 pies, 9 pulgadas y 11 líneas; despues otro de 13 P...... 10 p...... 8 l.; últimamente otro de 9 P.... 11 p.... 7 l...., y ha sobrado un trozo de 1 P.... 6 p.... 9 l.; y se pide cuál era la longitud de la viga. El problema se resuelve sumando las cuatro partidas, y resulta la longitud = 44 P.... 2 p.... 11 l.

Ejemplo 3.° Hallándose á 34°......54′......35″2 de una línea, se han caminado separándose de ella primero 7°.....38′.....57″6; despues 13°..... 59′...... 48″; y últimamente 53′...... 10″7; y se pide la distancia que habrá desde dicha línea hasta el punto á que se ha llegado. El problema se resuelve sumando las cuatro partidas, y resulta que dicha distancia será = 57°..... 26′..... 31″5.

Ejemplo 1.°			*Ejemplo* 2.°			*Ejemplo* 3.°		
Ps.	Rs.	Mrs.	P.	p.	l.			
7	09	26	18	09	11	34°	54′	35″2
4	12	19	13	10	08	07	38	57‘ 6
8	10	32	09	11	07	13	59	48‘ 0
0	13	31	01	06	09	00	53	10‘ 7
22	02	06	44	02	11	57	26	31‘ 5

Explicacion del ejemplo 3.° Empezando por los décimos de segundo, se suman estos y las unidades de segundo como los números simples. Al llegar á las decenas se dice: 2 (que se llevaban de la suma de unidades) *y* 3, 5, *y* 5 10, *y* 4 14, *y* 1 15: 3 *y llevo* 2; y se escribe el 3. A las unidades de minuto se agregan las 2 que se llevaban, y sumadas como los números simples, se pasan á sumar las decenas de minuto diciendo: 2 (que se llevaban de la suma de unidades) *y* 5 7, *y* 3 10, *y* 5 15, *y* 5 20; 2 *y llevo* 3; y se escribe el 2. A las unidades de grado se agregan las 3 que se llevaban, y se termina la operacion por el estilo de los números simples.

189 *Demostracion.* La demostracion de la regla es la

misma del sumar los números simples (*art.* 80), con la sola diferencia de ejecutarse en la suma de los complexos con las denominaciones lo que en la de los simples con los dieces.

El modo abreviado de reducir los números sexagesimales, se funda en que cuando se trata de dichos números, cada seis decenas de una clase componen una unidad de la clase superior inmediata.

190 *Regla para restar los números complexos.*

1.º Se escriben los números de cada denominacion debajo de sus correspondientes; y se ejecuta la resta como en los números simples (*art.* 85).

2.º Si algun subtraendo excede al minuendo de su denominacion, se le agrega á este el número de unidades de su denominacion, que componen una unidad de la inmediata superior.

3.º En este caso, ejecutada la resta de los números de dicha denominacion, se le agregará una unidad á la denominacion siguiente del subtraendo.

191 *Ejemplo* 1.° Un sugeto tiene 3 pesos, 7 reales y 26 maravedís; y se pide cuánto le quedará despues de haber gastado 1 peso, 12 reales y 9 maravedís. El problema se resuelve restando esta última cantidad de la primera, y el resultado son 1 peso, 10 reales y 17 maravedís.

Ejemplo 2.° Se quiere saber el tiempo que ha mediado desde las 2^h.... $28'$.... $53''5$ de la tarde de un dia hasta las 9^h..... $47'$..... 36 del mismo dia. Desde luego se ve que el problema se resuelve restando la primera cantidad de la segunda, y el resultado son 7^h..... $18'$..... $32''5$.

Ejemplo 3.° Entre dos cantidades a y c valen 90^{o}, y sabiendo que a vale 38^{o}..... $12'$..... $57''$, se pide el valor de c. El problema se resuelve restando la segunda cantidad de la primera, y el resultado son 51^{o}..... $47'$.... $03''$.

Ejemplo 1.°	*Ejemplo* 2.°	*Ejemplo* 3.°
Ps. *Rs.* *Mrs.*		
3 .... 07 26	9h.... $47'$.... $36''0$	90^{o}.... $00'$.... $00''$
1 .... 12 09	2 .... 28 .... 53‘ 5	38 .... 12 57
1 .... 10 17	7 .... 18 .... 42‘ 5	51 .... 47 03

Explicacion del ejemplo 2.° Empezando por los décimos se dirá: *de* 5 *á* 10, 5 *y llevo* 1 (se escribirá el 5, y se continuará diciendo; *y* 3, 4: *á* 6, 2 (escrito el 2 se dirá): *de* 5 *á* 9, 4 *y llevo* 1 (escrito el 4 se pasará á los minutos diciendo): *y* 8, 9: *á* 17, 8 *y llevo* 1 (y escrito el 8 se dirá): *y* 2, 3: *á* 4, 1 (se escribirá el 1, y pasando á las horas se dirá): *de* 2 *á* 9, 7 (y se escribirá el 7 en su lugar).

Explicacion del ejemplo 3.° Se dice: *de* 7 *á* 10, 3 *y llevo* 1..... *y* 5, 6: *á* 6, *cero y llevo* 1..... *y* 2, 3: *á* 10, 7 *y llevo* 1..... *y* 1, 2: *á* 6, 4 *y llevo* 1..... *y* 8, 9: *á* 10, 1 *y llevo* 1..... *y* 3, 4: *á* 9, 5.

192 *Demostracion.* Esta regla se funda en los mismos principios que la del restar los números simples (*art.* 85 *y* 87), con la sola diferencia que se advirtió (*art.* 189).

193 *Regla para la multiplicacion de los números complexos por un multiplicador simple.*

1.° Se empieza multiplicando el número de la menor denominacion por el multiplicador en un papel suelto; y si dicho producto contiene una ó mas unidades de la especie mayor inmediata, se halla el número de unidades justas de dicha especie mayor, y las sobrantes de la menor (*art.* 180). Estas se escriben en su clase, y las otras se separan para agregarlas al producto de la especie próxima mayor, segun se expresa en el número siguiente.

2.° Despues se multiplica el número de la denominacion siguiente por el mismo multiplicador, y agregadas las unidades que se llevaban de la anterior, se opera con este conjunto por el mismo estilo que con el primero; y se continúa asi hasta acabar.

194 *Ejemplo* 1.° Supongamos que se han vendido 26 arrobas de un género á razon de 7 pesos, 5 reales y 32 maravedís por arroba; y se quiere saber el importe del género vendido. El problema se resolverá multiplicando, y el resultado son 192 pesos, 4 reales y 16 maravedís.

Ejemplo 2.° De una pieza de género se han cortado 13 pedazos de 8 pies, 10 pulgadas y 9 líneas cada uno; y se quiere saber cuál era la extension de la pieza. El problema se resolverá multiplicando, y el resultado son 115 P..... 7 p..... 9 l.

Ejemplo 3.° Suponiendo que la luna camina 12°..... 59′..... 38″5 cada dia; se pide cuánto habrá caminado al cabo de 4 dias. El problema se resuelve multiplicando, y el resultado son 51°..... 58′..... 34″.

Ejemplo 1.°			*Ejemplo 2.°*			*Ejemplo 3.°*		
Ps.	*Rs.*	*Mrs.*	*P.*	*p.*	*l.*			
7	05	32	8	10	9	12°	59′	38″5
		26			13			4
192	04	16	115	07	09	51	58	34‘ 0

Explicacion del ejemplo 3.° Empezando por los décimos de segundo se dirá: 4 *por* 5, 20: 0 *y llevo* 2..... 4 *por* 8, 32: *y* 2 34, 4 *y llevo* 3..... 3 *por* 4, 12, *y* 3 15, 3 *y llevo* 2..... (Pasando á los minutos se dice) 4 *por* 9, 36, *y* 2 38: 8 *y llevo* 3..... 4 *por* 5, 20, *y* 3 23:5 *y llevo* 3..... (Pasando á los grados se dice) 2 *por* 4, 8, *y* 3 11: 1 *y llevo* 1..... 1 *por* 4, 4, *y* 1 5.

195 *Demostracion.* Es la misma de multiplicar los números simples (*art.* 109 *y* 115), con la sola diferencia que se advirtió (*art.* 189).

196 *Advertencia.* El multiplicador es siempre abstracto; y cuando el multiplicando se ha de tomar tantas veces cuantas unidades de una cierta denominacion hay en otro número, se reduce este á dicha denominacion (*art.* 179 *á* 186); y se opera como se ha dicho (*art.* 193).

197 Cuando se trate de las proporciones se enseñará á resolver con la mayor generalidad, por diferentes métodos, los problemas que se reducen á la multiplicacion de los números complexos.

198 Conviene el ejercitarse mucho en multiplicar las expresiones sexagesimales por los números 4 y 8, que son los multiplicadores de que se hace mas uso en la práctica del pilotage.

199 *Regla para partir los números complexos por un divisor simple.*

1.° Se parte por el divisor simple el número de la mayor denominacion; y este primer cuociente es de dicha denominacion mayor.

2.° El residuo se reduce á la denominacion segunda, y despues de agregarle las unidades que hubiese de dicha denominacion segunda, se parte el conjunto por el mismo divisor; y este segundo cuociente será de dicha denominacion segunda.

3.° El residuo se reduce á la denominacion tercera, y se continúa partiendo por el mismo estilo hasta acabar.

200 *Ejemplo* 1.° 60 pesos, 11 reales y 13 maravedís se han de repartir por igual entre 21 sugetos, y se quiere saber lo que le tocará á cada uno.

Ejemplo 2.° Una extension de 506 pies, 10 pulgadas y 9 líneas se ha de dividir en 36 partes iguales; y se quiere saber el valor de cada parte.

Ejemplo 1.°

Ps.	*Rs.*	*Mrs.*
60	11	13
18	270	272
	281	285
	078	072
	0	1

21

Ps.	*Rs.*	*Mrs.*
2	13	13 $\frac{12}{21}$

esto es

2	13	13 $\frac{4}{7}$

Ejemplo 2.°

Pies.	*Pulg.*	*Lin.*	*Punt.*
506	10	09	00
142	24	408	252
00	34	417	000
		051	
		2	

36

Pies.	*Pulg.*	*Lin.*	*Punt.*
14	00	11	07

Explicacion del ejemplo 1.° Los 60 pesos partidos por 21 dan por cuociente 2 pesos y sobran 18 pesos, que son 270 reales. Agregados estos á los 11 reales, resulta el segundo dividendo 281, que partido por 21 da por cuociente 13 reales, y sobran 8. Estos componen 272 maravedises, que agregados á los 13 dan 285 maravedises por ultimo dividendo &c.

Explicacion del ejemplo 2.° Los 506 pies partidos por 36 dan 14 pies por cuociente, y sobran 2 pies, que son 24 pulgadas. Sumadas estas con las 10 dan 34 pulgadas por segundo dividendo, que es menor que el divisor. Por esta razon se pone cero pulgadas al cuociente, se reducen las 34 pulgadas á líneas, se suma el resultado 408 con las 9 líneas, y se continúa la division.

201 *Demostracion.* Esta regla se funda en los mismos principios que la de partir los números simples (*art.* 139 *y* 140).

202 Se ve que esta regla solo sirve para resolver los problemas, que se reducen á hallar el valor de una de las partes del dividendo, dividido en el número de partes iguales que expresa el divisor.

203 Cuando se ha de averiguar las veces que el dividendo incluye al divisor, es preciso reducirlos ambos á la misma denominacion, ya sea el divisor simple, ya complexo.

204 Si se trata de averiguar el valor de una de las partes del dividendo, dividido en tantas partes iguales cuantas unidades de una denominacion determinada contiene el divisor, se hace preciso reducir este á dicha denominacion.

205 Todos los problemas en que se trata de la division de los números complexos, se resuelven con mas generalidad por las proporciones, y por esta razon conviene dejar para un segundo repaso la solucion de los problemas de esta clase.

206 Se ofrece con frecuencia el partir por 2 ó sacar la mitad de una cantidad propuesta. Para ejecutar esto con prontitud sirve la siguiente

Regla para sacar la mitad de un número propuesto.

1º Empezando por la mayor denominacion, se saca la mitad de su primera cifra de la izquierda, y debajo de ella se escribe el resultado.

2º Siempre que el número es impar sobra una unidad, que se une como decena á la cifra siguiente, y la mitad del resultado se escribe bajo de dicha segunda cifra.

3º Se continúa del mismo modo hasta llegar á las unidades simples de dicha mayor denominacion, y si (por ser el número impar) sobra una unidad, se reduce á la denominacion inmediata, se agrega el resultado á los números de dicha denominacion inmediata, y se opera con ella como con la primera; y asi sucesivamente hasta acabar.

Supongamos por via de ejemplo que se ha de tomar la cuarta parte de 173°..... $55'$..... $49''2$; y se resolverá el problema tomando dos mitades sucesivas como sigue.

Cantidad propuesta........................... 173° ...... $55'$ ...... $49''2$

Su $\frac{1}{2}$ es.. 086 ...... 57 ...... 54‘ 6

La $\frac{1}{2}$ de la $\frac{1}{2}$ (que es el $\frac{1}{4}$) es .. 43 ...... 28 ...... 57‘ 3

Explicacion. Se dirá, 17 : *su mitad* 8, *y llevo* 1 (y considerando el 3 á la derecha de la unidad que sobra se añadirá) 13: *su mitad* 6 *y sobra* 1, *que son* 6 (y pasando á los minutos se añade) *y* 5, 11 : *su mitad* 5, *y llevo* 1 (y considerando el 5 á la derecha del 1 se añade) 15: *su mitad* 7, *y sobra* 1, *que son* 6 (y pasando á los segundos se añade) *y* 4, 10: *su mitad* 5 (y se continúa diciendo) 9: *su mitad* 4, *y llevo* 1 (y por último) 12 : *su mitad* 6. Por el mismo estilo se saca la segunda mitad.

207 Se podrá sacar desde luego la cuarta parte operando como sigue: 17, *su cuarto* 4; *y llevo* 1...... 13: *su cuarto* 3, *y sobra* 1, *que son* 6...... *y* 5, 11: *su cuarto* 2, *y llevo* 3...... 35 : *su cuarto* 8, *y sobran* 3, *que son* 18...... *y* 4, 22: *su cuarto* 5, *y llevo* 2...... 29: *su cuarto* 7, *y llevo* 1...... 12: *su cuarto* 3.

208 Este modo de operar es semejante al que se manifestó (*art.* 182); y por el mismo estilo se puede tomar el tercio, el quinto &c. de una cantidad sexagesimal. Para evitar equivocaciones, en vez de sacar la cuarta parte directamente, se suele preferir el tomar la mitad de la mitad.

CAPITULO IX.

DE LAS POTESTADES Y RAICES EN GENERAL.

209 Se llama *potestad* ó *potencia* primera, segunda, tercera, cuarta &c. de un mismo número al producto que resulta tomando dicho número una vez, dos veces, tres veces, cuatro veces &c. por factor; y al número

que se toma dicho número de veces por factor se le da el nombre de *raiz de la potestad* primera, segunda &c. del resultado. Al operar con dicho número para formar cualquiera de las potestades expresadas, se llama *elevarlo* á dichas potestades; y si dado un número se halla el que le produce tomándole una vez, dos veces, tres veces &c. por factor, se dice que *se ha extraido la raiz* de la potestad primera, segunda, tercera &c. del número propuesto.

210 Todo número entra en sí mismo una vez por factor; y asi todo número será al mismo tiempo la potestad y la raiz primera de sí mismo.

211 La unidad tomada cualquier número de veces por factor de la unidad; y asi la unidad será al mismo tiempo la raiz y la potestad que se quiera de sí misma.

212 La segunda potestad se llama *cuadrado*; y por lo tanto, *cuadrar*, *elevar al cuadrado ó elevar á la segunda potestad* será multiplicar un número por sí mismo.

213 *Raiz cuadrada* de un número será el número de cuyo producto por sí mismo resulta aquel de quien se llama raiz. Y *extraer ó sacar la raiz cuadrada* será hallar dicho número, que multiplicado por sí mismo produce el otro.

Los cuadrados de las unidades simples son los siguientes.

Raices.........	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cuadrados...	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Asi 9 es el cuadrado de 3; y 3 la raiz cuadrada de 9. Multiplicar 3 por 3 será cuadrar el 3; y hallar el 3, que multiplicado por sí mismo produce el número propuesto 9, será extraer la raiz cuadrada de 9.

214 La tercera potestad se llama *cubo*; y por consiguiente el cubo será el producto que resulta tomando un número tres veces por factor, esto es, el producto del cuadrado por su raiz.

215 *Raiz cúbica* de un número será el número que multiplicado por su cuadrado produce aquel de quien se llama raiz.

216 *Cubicar, elevar al cubo*, ó *elevar á la tercera potestad* un número, será ejecutar las operaciones necesarias para obtener su cubo &c.

Los cubos de las unidades simples son los siguientes:

Raices..1....2... 3.... 4.... 5.... 6..... 7..... 8.... 9
Cubos...1....8...27....64....125....216.....343.....512....729

Asi $27=3\times3\times3$ será el cubo de 3; y 3 la raiz cúbica de 27 &c.

217 No cabe duda en que un mismo número puede ser al mismo tiempo cuadrado y raiz cuadrada, cubo y raiz cúbica &c. de distintos números.

V. g. 64 es cuadrado de 8, es cubo de 4, es sexta potestad de 2, es raiz cuadrada de $4096=64\times64$, y raiz cúbica de $262144=64\times64\times64$ &c.

218 Una cifra pequeña puesta mas arriba y á la derecha de una cantidad se llama su *exponente*, y manifiesta que dicha cantidad se considera elevada á la potestad indicada por el número que representa. Asi 4^2 quiere decir que el 4 se considera elevado al cuadrado ó segunda potestad; esto es, que $4^2=16$: y $4^3=64$; esto es, igual á 4 elevado al cubo ó tercera potestad. Para mayor brevedad, cuando ocurre alguna expresion de esta clase, se suele leer asi: 3^2 *tres cuadrado*; 4^3 *cuatro, cubo* &c. Cuando está representada por mas de una cifra la cantidad que se ha de considerar elevada al cuadrado, cubo &c., se le pone encima una raya que corresponda al centro del exponente; ó bien se encierra toda la cantidad en un paréntesis, y se coloca el exponente fuera.

V. g. $\overline{348}^2=(348)^2$ significa el cuadrado de 348; y $\overline{31+8}^3=(31+8)^3$ indica el cubo de la cantidad $31+8=39$.

219 Para indicar la raiz de cualquier potestad sirve este signo $\sqrt{}$, colocando entre sus piernas el exponente de la potestad, que se omite en la cuadrada, y escribiendo en seguida debajo de una raya ó encerrada en un paréntesis la cantidad.

Asi $\sqrt{25}=\sqrt{(25)}$ indica la raiz cuadrada de 25; de suerte que $\sqrt{(25)}=5$. Y $\sqrt[3]{(64)}$ ú $\sqrt[3]{64}$ indica la raiz cúbica de 64, y asi será $\sqrt[3]{(64)}=4$.

Tambien se indican las raices colocando, en los mismos términos que el exponente de la potestad, un exponente fraccionario, que tiene á la unidad por numerador, y por denominador á dicho exponente.

Asi $\overline{64}^{\frac{1}{2}}=(64)^{\frac{1}{2}}$ indica la raiz cuadrada de 64; y $(64)^{\frac{1}{3}}$ indica la raiz cúbica de 64.

220 Son muy pocos los números que tienen raiz cuadrada ó raiz cúbica exactas; y los mas no las tienen ni en enteros ni en expresiones fraccionarias. En general todo número entero que no tiene por raiz un entero tampoco puede tener por raiz un entero acompañado de un quebrado; peró se pueden expresar la raiz cuadrada y la raiz cúbica de cualquier número con cuanta aproximacion se quiera por medio de los decimales.

221 Se enseñará el modo de extraer las raices de las cantidades cuando se explique el uso de los logaritmos; y por ahora bastará advertir que á la expresion radical de una cantidad que no tiene raiz exacta se da el nombre de cantidad *inconmensurable* ó *sorda*.

V. g. $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{9}$, son cantidades inconmensurables, porque no hay número alguno que multiplicado por si mismo dé exactamente el 5; ni existe número que tomado tres veces por factor dé exactamente el 9.

CAPITULO X.

DE LAS RAZONES Y PROPORCIONES EN GENERAL.

222 *Razon* en la matemática es la comparacion de dos cantidades. Las cantidades que se comparan se llaman *términos de la razon*. El primer término, esto es, la cantidad que se compara, se llama *antecedente*; y el segundo término, esto es, la cantidad con quien se compara, se llama *consecuente*.

223 *Razon aritmética* es la comparacion de dos cantidades, atendiendo á la diferencia absoluta entre una y otra. Al número que expresa dicha diferencia se le suele dar el nombre de *exponente de la razon*, porque manifiesta su valor.

V. g. si se dice que el largo de una pizarra excede al ancho en dos pies, se forma una razon aritmérica, cuyos términos son el largo y ancho de la pizarra, y su exponente 2 pies. El largo es el primer término ó antecedente, y el ancho el segundo término ó consecuente.

224 Para indicar que se considera la razon aritmética de dos cantidades, se pondrá primero la abreviatura *arit.*, y luego las dos cantidades separadas con dos puntos colocados uno sobre otro.

Asi *arit.* $11 : 8 = 3$ quiere decir, la razon aritmética de 11 á 8 es 3; esto es, igual 3.

225 *Razon geométrica* es la comparacion de dos cantidades atendiendo á las veces que la unidad contiene ó está contenida en la otra. Por esto el valor ó exponente de la razon geométrica es el número que expresa las veces que el un término contiene ó está contenido en el otro término.

Asi cuando se dice que la elevacion de la puerta es tres veces mayor que su anchura, se forma una razon geométrica, cuyo antecedente ó primer término es la elevacion de la puerta; y el consecuente ó segundo término es la anchura de la misma puerta; y el exponente es 3.

Cuando se dice simplemente *razon*, sin expresar de cuál de ellas se trata, se entiende que se habla de la razon geométrica.

226 Se indica la razon geométrica interponiendo dos puntos entre el antecedente y consecuente.

V. g. $8 : 2 = 4$ equivale á decir que la razon geométrica de $8 : 2$ es 4.

227 Se debe tener presente, que cuando la diferencia de dos cantidades no es absoluta, sino relativa á las mismas cantidades: esto es, cuando se expresa en partes de cualquiera de ellas, la razon es en rigor geométrica. Porque el decir v. g. el oro pesa $\frac{1}{3}$ mas que el azogue equivale á decir que el peso del oro contiene una vez y un tercio el del azo-

gue, ó lo que es lo mismo, que el peso del oro es al del azogue como $1+\frac{1}{3}:1$, ó como $\frac{4}{3}:1$.

228 En general la razon se suele llamar *de mayor desigualdad* cuando el antecedente es mayor que el consecuente, *de igualdad* cuando los dos términos son iguales, y *de menor desigualdad* cuando es menor el antecedente.

229 Para generalizar mas las reglas se hallará siempre el exponente de la razon aritmética restando del antecedente el consecuente; y de la geométrica, partiendo el primer término por el segundo.

En este caso se indica el exponente de toda razon aritmética mudando el signo del segundo término (*art.* 90); y el exponente ó valor de toda razon geométrica se indicará poniendo el antecedente por numerador de un quebrado, cuyo denominador será el consecuente (*art.* 137).

De esto se sigue que siempre que los dos términos sean positivos será positivo el exponente de la razon aritmética de mayor desigualdad; y el de la de menor desigualdad será negativo. El exponente de la razon geométrica de mayor desigualdad será un entero ó un quebrado impropio; y un quebrado propio el exponente de la razon de menor desigualdad.

V. g. *arit.* $6:2=4$; *arit.* $2:6=-4$; y $6:2=\frac{6}{2}=3$; y $2:6=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

230 Entendido esto, será fácil el comparar dos razones, ó hallar la razon de una á otra; lo cual se practica comparando sus exponentes.

231 Tambien será fácil el sumar, restar, multiplicar, partir, y elevar á potestades las razones; lo cual se practica ejecutando con los exponentes las operaciones expresadas.

232 *Proporcion* es la comparacion de dos razones

iguales; y se llama *aritmética* ó *geométrica*, segun son aritméticas ó geométricas las razones que se comparan. Segun esto toda proporcion constará de cuatro términos, que son, primero el antecedente de la primera razon; segundo su consecuente; tercero el antecedente de la segunda razon, y cuarto su consecuente. Tambien se les da el nombre general de *medios* al segundo y tercero, y el de *extremos* al primero y cuarto.

233 Para indicar una proporcion se ponen cuatro puntos ó el signo de igualdad entre las dos razones que se comparan; y si la proporcion es aritmética, se antepondrá la abreviatura *arit.*

Asi, *arit.* 8 : 5 : : 10 : 7, ó bien *arit.* 8 : 5 = 10 : 7 indica una proporcion aritmética; y 5 : 15 : : 2 : 6, ó bien 5 : 15 = 2 : 6 indica una proporcion geométrica. Para enunciar la proporcion, se dice *á* en lugar de los dos puntos, y *como* en vez de los cuatro puntos ó signo de igualdad. Asi, la última proporcion se expresa diciendo 5 *á* 15 *como* 2 *á* 6.

234 La proporcion se llama *discreta* cuando el consecuente de la primera razon y el antecedente de la segunda son distintos, y *continua* cuando el consecuente de la primera razon sirve de antecedente á la segunda.

V. g. *arit.* 6 : 5·5 : : 5·5 : 5, y 4 : 8 : : 8 : 16, son dos proporciones continuas: la primera aritmética, y la segunda geométrica.

235 Aunque en rigor toda proporcion consta de cuatro términos, y la continua solo se diferencia de la discreta en tener iguales sus dos medios, en la proporcion continua se suele llamar simplemente *término medio* al que sirve de consecuente de la primera razon y antecedente de la segunda, y al último término, que es el consecuente de la segunda razon, se le da el nombre de *tercero*.

Para indicar una proporcion aritmética continua se pone esta señal ÷, y seguidamente se escriben los tres términos separados con dos puntos. Para indicar la proporcion geométrica continua se antepone esta otra señal ∺, y se escriben los tres términos del mismo modo.

Las proporciones continuas que se pusieron antes se pueden indicar asi ÷ 6 : 5·5 : 5 la aritmética; y ∺ 4 : 8 : 16 la geométrica.

236 Se dice que una razon es *inversa* de otra cuando resulta igual á ella mudando el antecedente en consecuente.

V. g. la razon de 1 : 3 es inversa de la razon de 6 : 2, porque 1 : 3 : : 2 : 6, ó bien 3 : 1 : : 6 : 2.

De las razones y proporciones aritméticas.

237 En toda proporcion aritmética la suma de los extremos es igual á la suma de los medios.

V. g. si *arit.* 7 : 3 : : 9 : 5, será 7+5=3+9.

Para demostrar esto quítese del primer término (7) su exceso sobre el segundo (3), que es el exponente (4); y quítese tambien del tercero (9) el mismo exponente; y no hay duda en que resultarán dos razones de igualdad (3 : 3 : : 5 : 5), en las cuales está claro que las sumas de medios y extremos son iguales (*art.* 26): luego tambien eran iguales dichas sumas antes de haber quitado el mismo exponente (4) de las dos primeras partidas (7 y 9) (*art.* 29).

238 Tambien, siempre que la suma de los medios sea igual á la de los extremos, estarán los cuatro términos en proporcion aritmética.

Sean v. g. las razones 8 : 3 y 9 : 4, y no hay duda en que si se halla un término cuya razon con el 9 sea igual á la del 3 con el 8, será la suma del 3 y 9 igual á la de dicho término nuevo con 8 (*art.* 237); pero se ha supuesto que es 3+9=4+8: luego el mismo 4 será el cuarto término de la proporcion (*art.* 28).

239 De la propiedad enunciada y de lo dicho (*art.* 92) se siguen como corolarios que

1.° Si se suman los dos medios de una proporcion aritmética, y de esta suma se resta uno de los extremos, el residuo será el otro extremo.

V. g. si es *arit.* 8 : 3 : : 9 : 4, será (3+9)—8=4; y (3+9)—4=8.

2.° Si se suman dos extremos de una proporcion aritmética, y de esta suma se resta uno de los medios, el residuo será el otro medio.

V. g. si es *arit.* 8 : 3 : : 9 : 4, será $(8+4)-3=9$; y $(8+4)-9=3$.

3.° En la proporcion aritmética continua será la suma de extremos igual al duplo del término medio.

Si es $\div$ 5 : 7 : 9 será $5+9=7\times2$; porque $\div$ 5 : 7 : 9 es lo mismo que *arit.* 5 : 7 : : 7 : 9, y por lo tanto debe ser $5+9=7+7=7\times2$.

De esto se sigue que

4.° Si se suman los dos extremos de una proporcion aritmética continua, y de esta suma se toma la mitad, resultará el término medio.

V. g. si es $\div$ 5 : 7 : 9, será $\frac{5+9}{2}=7$.

5.° Si en una proporcion aritmética continua se dupla el término medio, y del resultado se resta uno de los extremos, el residuo será el otro extremo.

V. g. si es $\div$ 5 : 7 : 9, será $7\times2-5=9$, y $7\times2-9=5$.

240 De lo establecido (*art.* 237 *y* 238) se sigue tambien que de cualquier modo que se dispongan los cuatro términos de una proporcion aritmética, con tal de que los que eran extremos queden extremos ó pasen á ser medios, y los que eran medios queden medios ó pasen á ser extremos, dichos términos formarán una proporcion.

241 Segun esto, si cuatro términos estan en proporcion aritmética, tambien lo estarán

1.° *Invirtiendo*: esto es, poniendo los consecuentes en lugar de los antecedentes de sus respectivas razones, y los antecedentes en lugar de los consecuentes.

V. g. si es *arit.* 7 : 3 : : 9 : 5, será *arit.* 3 : 7 : : 5 : 9.

2.° *Cambiando las razones*: esto es, poniendo la primera en lugar de la segunda, y esta en lugar de aquella.

V. g. si es *arit.* 7 : 3 : : 9 : 5, será *arit.* 9 : 5 : : 7 : 3.

3.° *Alternando*: esto es, cambiando los lugares del segundo y tercer término.

V. g. si es *arit.* 7 : 3 : : 9 : 5, será *arit.* 7 : 9 : : 3 : 5.

242 Con solo invertir y cambiar las razones, se pueden disponer los términos de cuatro modos, y por consiguiente se puede hacer que resulte por cuarto término el que se quiera. Cada una de estas cuatro proporciones se puede alternar; y por lo tanto se podrán disponer los cuatro términos de una proporcion de ocho modos diferentes.

Prop. prim. *arit.* 7 : 3 : : 9 : 5.	Alt. *arit.* 7 : 9 : : 3 : 5.
Inv. la prim. *arit.* 3 : 7 : : 5 : 9.	Alt. *arit.* 3 : 5 : : 7 : 9.
Camb. razon. *arit.* 9 : 5 : : 7 : 3.	Alt. *arit.* 9 : 7 : : 5 : 3.
Inv. y camb. *arit.* 5 : 9 : : 3 : 7.	Alt. *arit.* 5 : 3 : : 9 : 7.

Para ejecutar esto con una proporcion continua se escribirá antes á lo largo, como si fuera discreta.

243 Supuestos positivos los cuatro términos de una proporciona ritmética, no cabe duda en que, si el cuarto término es menor de lo que debia ser para que hubiese proporcion aritmética, será la suma de extremos menor que la de medios (*art.* 237); y lo contrario sucederá si dicho cuarto término es mayor de lo que debia ser para que la proporcion se verificase.

Esto es, que

244 En las razones aritméticas de mayor desigualdad, si la segunda razon es mayor que la primera, resultará la suma de extremos menor que la de medios; y si la segunda razon es menor, resultará mayor la suma de los extremos.

245 Lo contrario sucede en las razones aritméticas de menor desigualdad.

V. g. porque de las dos razones de mayor desigual *arit.* 8 : 6, y *arit.* 7 : 4, es mayor la segunda, será $(8+4)<(6+7)$.

De las razones y proporciones geométricas.

246 En toda proporcion geométrica debe ser el producto de los medios igual al producto de los extremos.

En efecto, para que se verifique la proporcion 5 : 8 : : 15 : 24, deben ser iguales los exponentes de las dos razones, esto es (*art.* 229) $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$, y por lo tanto (*art.* 170) deberá ser $5 \times 24 = 8 \times 15$. Esto se debe verificar en cualquiera proporcion, y por consiguiente la demostracion es general.

247 Tambien, siempre que el producto de los medios sea igual al de los extremos, los cuatro términos estarán en proporcion geométrica.

En efecto, si es v. g. $5 \times 24 = 8 \times 15$, será (*art.* 170) $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$, esto es, que serán iguales los exponentes de las razones 5 : 8 y 15 : 24; y por lo tanto se verificará la porcion 5 : 8 :: 15 : 24.

248 Cuando dos cantidades, que tienen alguna cosa comun, forman los medios de una proporcion geométrica, y las otras dos, que tienen otra cosa comun, forman los extremos, se dice que dichas cantidades estan en razon *recíproca*.

Del uso de esta expresion pueden resultar equivocaciones, siempre que no se manifieste, ó se vea claramente la cosa comun, respecto de la cual se dice que las cantidades estan en razon recíproca.

249 La propiedad demostrada (*art.* 247) se enuncia diciendo, que los factores de dos productos iguales estan en razon recíproca.

La cosa comun á los dos primeros factores es el serlo del primer producto; y á los dos segundos, el serlo del segundo producto.

250 De esto y de lo establecido en los artículos 246 y 247 se sigue, que si los medios ó los extremos de una proporcion geométrica son iguales, ya sea á los medios, ya á los extremos de otra, los otros dos términos de la primera proporcion serán recíprocamente proporcionales con los otros dos de la segunda.

V. g. si es 4 : 8 :: 3 : 6, y 4 : 12 :: 2 : 6, será 8 : 12 :: 2 : 3: ó 3 : 12 :: 2 : 8 &c. Lo mismo se verificará si las proporciones son 8; 4 :: 6 : 3, y 4 : 12 :: 2 : 6; ó bien 8 : 4 :: 6 : 3, y 12 : 6 :: 4 : 2 &c.

251 De la propiedad enunciada (*art.* 247) se deducen como corolarios que

1.º Si en una proporcion geométrica se multiplican los dos medios, y el producto se parte por uno de los extremos, resultará por cuociente el otro extremo (*art.* 123).

V. g. si es 5 : 8 : : 15 : 24, será $\frac{15\times8}{5}=24$, y $\frac{15\times8}{24}=5$.

2.º Si en una proporcion geométrica se multiplican los dos extremos, y el producto se parte por uno de los medios, resultará por cuociente el otro medio (*art.* 123).

V. g. si es 5 : 8 : : 15 : 24, será $\frac{24\times5}{8}=15$; y $\frac{24\times5}{15}=8$.

3.º En la proporcion geométrica continua será el producto de los extremos igual al cuadro del término medio.

Si es ∺ 4 : 8 : 16, será $16\times4=8^2$; porque ∺ 4 : 8 : 16 equivale á 4 : 8 : : 8 : 16, y por lo tanto será $16\times4=8\times8=8^2$.

De esto se sigue que

4.º Si en una proporcion geométrica continua se multiplican los dos extremos, y se extrae la raiz cuadrada del producto, resultará el término medio.

V. g. si es ∺ 4 : 8 : 16, será $\sqrt{(16\times4)}=8$.

5.º Si en una proporcion geométrica continua se cuadra el término medio, y este cuadrado se parte por uno de los extremos, resultará por cuociente el otro extremo.

V. g. si es ∺ 4 : 8 : 16, será $\frac{8}{16}=4$; y $\frac{8^2}{4}=16$.

6.º El cuarto término de una proporcion (que es el cuociente) aumentará al paso que aumenten los medios, que son los factores del producto que forma el dividendo, y al paso que disminuya el primero, que es el divisor (*art.* 127).

7.º El cuarto término de una proporcion (que es el cuociente) disminuirá al paso que disminuyan los medios, que son los factores del producto que forma el dividendo, y al paso que aumente el primero, que es el divisor (*art.* 127).

252 Tambien se deduce de lo establecido (*art.* 246 *y* 247) que alternando, invirtiendo, y cambiando las razones que forman una proporcion geométrica, dichos términos estarán en proporcion, puesto que en todos estos casos resultan medios y extremos los factores que dan igual producto.

253 De aqui se sigue que todo lo que se dijo de las proporciones aritméticas (*art.* 241 *y* 242) se aplica á las geométricas.

Proporcion primera.......	5 : 8 : : 15 : 24.	Alt. 5 : 15 : : 8 : 24.
Invirtiendo la primera...	8 : 5 : : 24 : 15.	Alt. 8 : 24 : : 5 : 15.
Cambiando razones.......	15 : 24 : : 5 : 8.	Alt. 15 : 5 : : 24 : 8.
Invirtiendo y cambiando.	24 : 15 : : 8 : 5.	Alt. 24 : 8 : : 15 : 5.

Se tendrá presente que para aplicar á las proporciones continuas lo que se dice en este artículo y en los siguientes, se deben escribir á lo largo expresando sus cuatro términos, como si fueran discretas.

254 Comparar componiendo es comparar la suma que resulta de cada antecedente y consecuente, con el mismo antecedente ó consecuente.

V. g. si la proporcion primitiva es 5 : 8 : : 15 : 24, será

$$\left.\begin{array}{l}\text{componiendo y.}\\ \text{comparando.....}\end{array}\right\}\ \text{con}\ \left\{\begin{array}{l}\text{el antecedente } 5+8 : 5 : : 15+24 : 15.\\ \text{el antecedente } 5+8 : 8 : : 15+24 : 24.\end{array}\right.$$

255 Comparar dividiendo, es comparar la diferencia entre el antecedente y consecuente de cada una de las razones iguales, con sus mismos antecedentes ó consecuentes.

V. g. si es la proporcion primitiva 5 : 8 : : 15 : 24 resultarán dividiendo las proporciones siguientes

5 — 8 : 5 : : 15 : — 24 : 15......5 — 8 : 8 : : 15 — 24 : 24.
8 — 5 : 5 : : 24 : — 15 : 15......8 — 5 : 8 : : 24 — 15 : 24.

256 Para demostrar con suma facilidad lo que se establece en los artículos 253, 254 y 255 llámense *a* y *b* los antecedentes de las dos razones iguales, y *e* el expo-

nente, y resultará la proporcion $a : \frac{a}{e} :: b : \frac{b}{e}$, puesto que el producto de los extremos $\frac{a\times b}{e}$ (*art.* 173) es igual al producto de los medios, que es tambien $\frac{a\times b}{e}$ (*art.* 247).

Como *a*, *b* y *e* pueden representar cuantos valores numéricos se quiera (independientemente los unos de los otros) dicha proporcion expresada con letras puede representar cuantas proporciones geométricas pueden formarse con números; y por lo tanto, lo que convenga á dicha proporcion general $a : \frac{a}{e} :: b : \frac{b}{e}$ convendrá á todas las demas.

1º Comparando las sumas de antecedente y consecuente con sus correspondientes antecedentes, resultarán los términos $a + \frac{a}{e} : a :: b + \frac{b}{e} : b$. Es asi que el producto de los extremos $a\times b + \frac{a\times b}{e}$, es exactamente el mismo que el de los medios: luego los términos $a + \frac{a}{e} : a :: b + \frac{b}{e} : b$ estan en proporcion. Con esto queda demostrado que si cuatro términos estan en proporcion, componiendo y comparando con los antecedentes, resultará una nueva proporcion.

2º Componiendo y comparando con los consecuentes, resulta $a + \frac{a}{e} : \frac{a}{e} :: b + \frac{b}{e} : \frac{b}{e}$, y respecto á que el producto de los extremos $\frac{a\times b}{e} + \frac{a\times b}{e\times e}$ es tambien exactamente el mismo de los medios, no hay duda en que componiendo y comparando con los consecuentes resulta una nueva proporcion.

3º Por el mismo estilo se demuestra, que alternando, invirtiendo, dividiendo &c. los términos de una proporcion geométrica cualquiera resulta una nueva proporcion.

4º Si la proporcion es continua, estará representada en términos generales por la proporcion literal $a : \frac{a}{e} :: \frac{a}{e} : \frac{a}{e \times e}$

257 De lo dicho (*art.* 229) se sigue que con las razones geométricas se podrán ejecutar las mismas operaciones que con los quebrados: esto es, que

1º Una razon geométrica se puede reducir á una expresion mas sencilla partiendo su antecedente y consecuente por un divisor comun á ambos (*art.* 165).

2º Una razon se puede expresar en términos mayores, multiplicando su antecedente y consecuente por un mismo número.

3º Una proporcion geométrica subsiste multiplicando ó partiendo por un mismo número un extremo y cualquiera de los medios: puesto que (*art.* 253) cualquiera de dichos medios se puede tomar como consecuente de la razon primera, ó como antecedente de la segunda.

258 Tambien se sigue que una razon se multiplica multiplicando su antecedente (*art.* 173).

259 Una razon se parte multiplicando su consecuente (*art.* 174).

260 Las razones se multiplican por otras razones, multiplicando los antecedentes entre sí, y practicando lo mismo con los consecuentes (*art.* 175).

261 A la razon que resulta de la multiplicacion de otras se llama *compuesta* de dichas razones; y estas se llaman *subcompuestas* de la resultante.

V. g. la compuesta de las razones 2 : 3 y 5 : 7, será 2×5 : 3×7; esto es, 10 : 21. La compuesta de las razones 2 : 4, 3 : 5 y 6 : 8, será 2×3×6 : 4×5×8; esto es, 36 : 160, ó lo que es lo mismo (*art.* 257, *núm.* 1.°) 9 : 40.

262 No hay duda en que las razones compuestas de otras iguales tendrán iguales quebrados por exponentes, y por consiguiente serán tambien iguales.

263 De aqui se sigue que multiplicando los términos correspondientes de dos proporciones geométricas, resultará una nueva proporcion, cuyas razones serán compuestas de las razones de dichas proporciones.

V. g. si es......... 4 : 7 :: 12 : 21
y tambien.............. 3 : 5 :: 6 : 10
será 4×3 : 7×5 :: 12×6 : 21×10 : esto es; 12 : 35 :: 72 : 210, por ser las dos razones componentes de la primera, 4 : 7 y 3 : 5, iguales cada una á su correspondiente, de las componentes de la segunda 12 : 21 y 6 : 10.

264 Se llama razon *duplicada* á la que resulta de la multiplicacion de dos razones iguales entre sí: ó lo que es lo mismo, á la que resulta de multiplicar por sí misma, ó elevar al cuadrado una razon (*art.* 260) (*).

La razon ó razones iguales, de cuya multiplicacion resulta la duplicada, se llaman *subduplicadas*; y son iguales á la raiz cuadrada de la duplicada.

V. g. de las razones iguales 2 : 6 y 4 : 12, resulta la duplicada 8 : 72, que es igual á la de 4 : 36, que resulta elevando al cuadrado la de 2 : 6; á la de 16 : 144, que resulta elevando al cuadrado la de 4 : 12; ó á la de 1 : 9, que resulta reduciendo á expresion mas sencilla la duplicada representada bajo cualquiera de dichas tres formas (*art.* 257): ó elevando al cuadrado (*art.* 260) la razon de 1 : 3, que es la misma de 2 : 6 simplificada (*art.* 257).

265 Se llama razon *triplicada* la que resulta de la multiplicacion de tres razones iguales: ó lo que es lo mismo, la que resulta de tomar una razon misma tres veces por factor, ó de elevarla al cubo.

En este caso, la razon ó razones iguales componentes se llaman *subtriplicadas*; y son iguales á la raiz cúbica de la triplicada.

V. g. de las tres razones iguales 2 : 10, 3 : 15, y 4 : 20, resulta la triplidada 24 : 3000, que es igual á la de 8 : 1000, que resulta elevando al cubo la razon de 2 : 10 &c., y á la de 1 : 125, que resulta reduciendo á expresion mas sencilla la triplicada, bajo cualquiera de dichas formas, ó elevando al cubo (*art.* 260) la razon de 1 : 5, que es la misma de 2 : 10 simplificada (*art.* 257).

(*) Porque multiplicando un quebrado por otro igual, resultará una expresion que será igual, aunque no idéntica, á la que resultaria multiplicando cualquiera de los quebrados por sí mismos. Esto es, que dichas expresiones serán iguales, aunque tendrán distinta forma; y lo propio sucederá en las razones.

266 En general, se llama razon *multiplicada* á la que es el producto de muchas razones iguales entre sí: esto es, á la que es una potestad cualquiera de otra razon; y las razones iguales componentes se llaman en general *submultiplicadas* de la resultante.

Para obtener la razon multiplicada bajo la forma mas sencilla, lo mejor es reducir la mas simple de las razones propuestas á la forma mas sencilla (*art.* 257); y hecho esto, elevarla á la potestad correspondiente, como se ha manifestado en los ejemplos anteriores (*art.* 264 *y* 265).

267 Se debe tener mucho cuidado en no confundir la razon *múltipla* con la razon *múltipla de otra razon*, y con la *multiplicada*. La *submúltipla* con la *submúltipla de otra razon*, y la *submultiplicada*.

1.° Razon *múltipla* es aquella cuyo antecedente es múltiplo del consecuente.

V. g. la de 2 : 1, que es dupla : la de 3 : 1, que es tripla &c.

2.° Razon *múltipla de otra razon* es aquella cuyo exponente es múltiplo del exponente de la otra razon.

V. g. la de 4 : 9 es dupla de la de 2 : 9, ó de la de 6 : 27 &c. la de 6 : 4 es tripla de la de 2 : 4 &c.

3.° Razon *multiplicada de otra razon* es aquella cuyo exponente es una potestad justa del exponente de la otra.

V. g. la de 9 : 25 es duplicada de la de 3 : 5, porque su exponente es el cuadrado del exponente de la razon de 3 : 5 &c.

4.° Razon *submúltipla* es aquella cuyo antecedente es submúltiplo del consecuente. Razon *submúltipla de otra* es aquella cuyo exponente es submúltiplo del exponente de la otra. Razon *submultiplicada de la otra* es aquella cuyo exponente es una raiz justa del exponente de la otra.

268 Si hay varias razones iguales $a : \frac{a}{e}$, $b : \frac{b}{e}$, $c : \frac{c}{e}$, $d : \frac{d}{e}$ &c., la suma de antecedentes será $= a + b + c + d +$ &c.; y la suma de consecuentes será $= \frac{a}{e} + \frac{b}{e}$

$+\frac{c}{e}+\frac{d}{e}+$ &c., que por lo dicho (*art.* 138 *y* 139) es $\frac{a+b+c+d+\&c.}{e}$; por consiguiente será $a+b+c+d+\&c. : \frac{a+b+c+d+\&c.}{e} :: a : \frac{a}{e} :: b : \frac{b}{e} :: \&c.$, puesto que en cualquiera de estos casos es el producto de medios igual al de extremos.

V. g. en el primer caso los productos de medios y extremos son ambos $\frac{(a+b+c+d+\&c.)\times a}{e}$ por lo establecido (*art.* 173).

269 De aqui resulta que siempre que hay muchas razones geométricas iguales, la suma de antecedentes es á la suma de consecuentes como un solo antecedente es á su consecuente; y mas generalmente, la suma de un número cualquiera de antecedentes es á la suma de sus correspondientes consecuentes, como la suma de otro cualquier número de antecedentes es á la suma de sus consecuentes.

V. g. $a+b : \frac{a}{e}+\frac{b}{e} :: a+b+c+d : \frac{a}{e}+\frac{b}{e}+\frac{c}{e}+\frac{d}{e}$, que equivale á $a+b : \frac{a+b}{e} :: a+b+c+d : \frac{a+b+c+d}{e}$.

CAPITULO XI.

DE LA REGLA DE TRES.

270 Se llama *regla de tres simple* á aquella por medio de la cual, conocidos tres términos de una proporcion, se averigua el valor del cuarto.

271 Ya se enseñó á hallar en todos casos un término cualquiera de una proporcion (*art.* 251), y el modo de hacer que resulte por cuarto término cualquiera de los tres (*art.* 253). Conviene sin embargo hacer algunas reflexiones para facilitar la solucion de los problemas,

y evitar las equivocaciones que podrian resultar de una mala aplicacion de los principios expresados.

272 En los problemas que se reducen á la regla de tres se suele considerar una cantidad en dos estados distintos; y otra, que depende de ella, en los dos estados correspondientes. A los dos estados de una misma cantidad se llamarán *cantidades homólogas*, y para mayor facilidad se llamarán *datos* las dos cantidades homólogas conocidas, y *resultados* las otras dos. Se llamará *primer dato* al correspondiente al resultado conocido, y *segundo dato* al correspondiente al resultado que se va á buscar. Dicho segundo resultado se designa con una x, ó con su nombre, ó bien dejando en blanco el lugar donde debe colocarse su valor.

V. g. 4 hombres hacen 10 pies de obra en un número de dias cualquiera: y se pide la obra que harian en el mismo número de dias 30 hombres. En este ejemplo 4 hombres será el primer dato, 30 hombres el segundo, 10 pies de obra el primer resultado, y el segundo resultado x pies, esto es, la obra que harian los 30 hombres, que es el término que se busca.

273 Se tendrá muy presente que para que el problema se pueda resolver por la regla de tres no basta que aumentando ó disminuyendo los datos deban aumentar ó disminuir los resultados; y es preciso examinar si dichos aumentos ó diminuciones deben ó no deben ser proporcionales.

V. g. si duplando, triplando &c. los datos deben ó no duplarse, triplarse &c. los resultados correspondientes. Para este exámen no hay mas reglas que las que enseña la misma razon natural, y el conocimiento de la ciencia á que pertenece el problema de que se trata. Y de los mismos principios se deduce si es directa ó inversa la razon.

274 Se dice que las cantidades estan en *razon directa* cuando aumentando los datos deben aumentar los resultados; y en *razon inversa* cuando aumentando los datos los resultados deben disminuir, esto es, cuando los datos estan en razon recíproca de los resultados.

1.º V. g. en el ejemplo propuesto (*art.* 272) está claro que duplando, triplando &c. el número de hombres, se duplará, triplará &c. la cantidad de obra; y por consiguiente el problema pertenece á la regla de tres, y la razon de los datos y resultados es directa.

2.º Suponiendo que 9 hombres se mantienen 13 dias con una determinada cantidad de víveres, se pide cuántos dias podrán mantenerse 16 hombres con los mismos víveres. Está claro que cuanto mayor sea el número de hombres, tanto menor será el número de dias que tardarán en consumir los víveres; esto es, que un doble número de hombres consumirán los víveres en la mitad del tiempo &c. Segun esto, el problema pertenece á la regla de tres, y la razon de las cantidades es inversa, porque aumentando los datos, que son los hombres, disminuyen los resultados, que son los dias.

3.º Supuesto que un cuerpo emplea un segundo en bajar de la altura de 17'5 pies de Búrgos en virtud de la gravedad, se pide el tiempo que empleará en descender de la altura de 40 pies. La Mecánica enseña que, aunque el cuerpo empleará mas tiempo en caer de una altura mayor, no es doble el tiempo que necesita para descender de una altura dupla; porque el cuerpo que desciende va aumentando de velocidad continuamente; y por lo tanto para caminar un espacio duplo no necesita doble tiempo. Segun esto, el problema no pertenece á la regla de tres.

275 Se dijo (*art.* 69) que para que la comparacion de los números equivalga á la comparacion de las cantidades deben reducirse estas á la misma denominacion.

276 Tambien conviene advertir que cuando se comparan entre sí cantidades de distinta naturaleza, v. g. hombres con dias, se entiende que la comparacion recae sobre los números con que dichas cantidades se representan; y por lo tanto será la razon mayor ó menor, segun las cantidades que se tomen por unidades en la otra especie.

277 De estos principios y de lo dicho (*art.* 251) se deduce la siguiente

Regla para la resolucion de los problemas que dependen de la regla de tres simple.

1º Redúzcanse los datos á una misma denominacion (*art.* 179 *á* 186).

2º Redúzcase, si se quiere, el resultado conocido á una denominacion sola, que será la misma en que se obtendrá el resultado que se busca.

3.º Examínese si los datos y resultados son proporcionales, y si estan en razon directa ó en razon inversa (*art.* 273 *y* 274).

4.º Si estan en razon directa se dirá: el primer dato es al segundo como el primer resultado al segundo; ó bien (*art.* 253) el primer dato es á su resultado correspondiente como el segundo dato es á su resultado.

5.º Si estan en razon inversa se dirá: el segundo dato es al primero como el primer resultado al que se busca: ó bien el segundo dato es al primer resultado como el primer dato al resultado que se busca.

6.º Se multiplica el segundo término por el tercero; se parte el resultado por el primero, y se tiene con esto el cuarto término.

278 *Ejemplos.*

1.º El caso que se propuso (*art.* 272) se resuelve diciendo

homb. homb. pies. pies.

$$4 : 30 :: 10 : x = \frac{30 \times 10}{4} = 75 \text{ pies.}$$

hom. pies. hom. pies.

Lo mismo resultaria diciendo $4 : 10 :: 30 : x$.

2.º En este caso propuesto (*art.* 274, *núm.* 2.º) la razon es inversa; y por lo tanto se dirá

hom. hom. dias. dias.

$$16 : 9 :: 13 : x = \frac{13 \times 9}{16} = 7 + \frac{5}{16} \text{ dias.}$$

Esto es, que los 16 hombres consumirán los víveres en 7 dias y $\frac{5}{16}$ de dia, que en rigor quiere decir que se mantendrán 7 dias, y todavía sobrarán los $\frac{5}{16}$ de los víveres que consumen en un dia.

3.º Si se supone la cuestion siguiente, 8 hombres hacen un trabajo en 5 dias y 4 horas, y se pregunta cuántos hombres se necesitarán para hacer el mismo trabajo en 3 dias.

Está claro que 5 dias y 4 horas es el primer dato, 3 dias el segundo, 8 hombres el primer resultado, y x hombres el segundo. Segun esto, se deberán reducir los 5 dias y 4 horas y los tres dias á horas. Pero como los hombres no trabajan durante las 24 horas, por dia de trabajo se debe entender las horas durante las cuales trabajan, que supondremos sean 13 horas, y por lo tanto los 5 dias 4 horas serán 69 horas, y los 3 dias serán 39 horas.

Hecho esto, se ve que aumentando los hombres disminuirán los dias empleados en la obra, y que con un número de hombres duplo se hará la obra en la mitad del tiempo. Estas reflexiones manifiestan que hay proporcion entre las cantidades, y que la razon es inversa. Se dirá pues

hor. hor. hom. hom. hom.

$$39 : 69 :: 8 : x = \frac{69\times8}{39} = 14 + \frac{6}{39} = 14 + \frac{2}{13}.$$

Se necesitan pues 14 hombres y $\frac{2}{13}$ de hombre. Pero como este quebrado de hombre no puede existir, y los hombres se introducen aqui como trabajadores, los $\frac{2}{13}$ de hombre equivaldrán á un hombre que trabaje los $\frac{2}{13}$ de lo que trabajen los demas, ó que trabaje durante solo los $\frac{2}{13}$ del tiempo. En este último caso el hombre deberá trabajar durante $\frac{2}{13}$ de 39 horas $=\frac{78}{13}=6$ horas.

4.° Se han de pagar 5 varas, 2 pies, 8 pulgadas de un género á razon de 13 reales y 24 maravedís el pie, y se pide lo que se ha de pagar.

En este ejemplo será el primer dato 1 pie, y el segundo las 5 varas, 2 pies, 8 pulgadas. El primer resultado serán 13 reales y 24 maravedís, y x el segundo.

Reduciendo las cantidades de género á pies, serán 5 varas, 2 pies, 8 pulgadas $=17$‘6666 pies; y reduciendo, si se quiere, el dinero á maravedís, serán 13 reales, 24 maravedís $=466$ maravedís. A una cantidad de género dupla le corresponde un valor duplo, y por lo tanto el problema pertenece á la regla de tres, y la razon de las cantidades es directa. Se dirá pues

pie. pies. mar. mar.

$$1 : 17\text{‘}6666 :: 466 : x = \frac{17\text{‘}6666\times466}{1} = 8233 \text{ maravedís}$$

$=16$ pesos, 2 reales, 5 maravedís.

5.° Si suponiendo que se han pagado 16 pesos, 2 reales, 5 maravedís por 5 varas, 2 pies, 8 pulgadas de género, se pide el valor de 1 pie de dicho género, está claro que las 5 varas &c. son el primer dato, 1 pie el segundo, 16 pesos &c. el primer resultado y x el segundo. La razon es, como en el ejemplo anterior, directa; y hecha la reduccion de la cantidad de género á pies, y la del importe á maravedís se dirá

pie. pie. mar. mar.

$$17\text{‘}6666 : 1 :: 8233 : x = \frac{8233}{17\text{‘}6666} = 466 \text{ maravedís} = 13 \text{ reales, } 24 \text{ maravedís.}$$

6.° Suponiendo que cada 1′ de error en la distancia de la luna al sol produce $2' + 10''$ de error en la hora que se deduce de dicha distancia se quiere averiguar el error que producirá en la hora el error de $1^\circ + 8' + 13''$ en la distancia.

Está claro que $1'$ será el primer dato, 1° &c. el segundo, $2' + 10''$ el primer resultado, y x el segundo. Lo mas breve será reducir los datos á segundos, y reducir tambien á segundos el primer resultado para obtener en segundos el que se busca.

La razon de las cantidades es directa, y asi se dirá

$$60'' : 4093'' :: 130'' : x'' = \frac{4093 \times 130}{60} = 8868''2 = 2 \text{ horas} + 27' + 48''2.$$

Esta reduccion se hace casi de memoria por lo dicho (*art.* 182).

279 *Escolio.* Los tres ejemplos últimos se han puesto para hacer ver con cuánta facilidad se resuelven por las proporciones los problemas de multiplicar y partir los números complexos, como se advirtió (*art.* 197 *y* 205).

El ejemplo último puede servir tambien para manifestar los errores que resultarian de seguir materialmente la regla que dan algunos de que en la multiplicacion de los números complexos los minutos por minutos dan segundos &c.: pues multiplicando $1^\circ + 08' + 13''$ por $2' + 10''$ segun dicha regla, no se obtendria el resultado que se acaba de hallar.

280 Estos problemas se pueden resolver de tantos modos cuantas son las denominaciones á que se pueden reducir las cantidades, y á mas se puede usar en muchos casos de los decimales ó de los quebrados ordinarios.

1.° V. g. en el ejemplo 4.°, haciendo las reducciones á pulgadas, se diria,

$$\overset{\textit{pulg.}}{12} : \overset{\textit{pulg.}}{212} :: \overset{\textit{mar.}}{466} : \overset{\textit{mar.}}{x}.$$

2.° Si se quiere hacer la reduccion de la cantidad de género á pies, y la del dinero á reales, y usar de los quebrados, será

$$\overset{\textit{pie.}}{1} : \overset{\textit{pies.}}{\frac{212}{12}} :: \overset{\textit{rs.}}{\frac{466}{34}} : x = \overset{\textit{rs.}}{\frac{212}{12}} \times \frac{466}{34} = \frac{98792}{408} \text{ reales} = \text{\&c.}$$

3.° Tambien se podian haber reducido las cantidades de género á varas: las de dinero á pesos; ó se pueden dejar sin reducir, y hallar el cuarto término multiplicando y partiendo por las reglas dadas (*art.* 193) 199.

4.° De todos modos se hallará el mismo resultado, y por lo regular es lo mas sencillo el hacer la reduccion á las denominaciones menores.

De la regla de tres compuesta.

281 La *regla de tres compuesta*, que algunos llaman regla de cinco, de siete &c. segun los casos, es aquella en que los resultados dependen de muchos datos, y se puede recurrir á la siguiente

Regla para la resolucion de los problemas que dependen de la regla de tres compuesta.

1º Redúzcanse las cantidades homólogas á la misma denominacion.

2º Redúzcase el resultado conocido á una denominacion cualquiera, que será la del resultado que se busca.

3º De las cantidades homólogas que estan en razon directa con los resultados escríbase el primer dato en el primer término, y el segundo dato en el segundo término.

4º De las cantidades homólogas que estan en razon inversa con los resultados escríbase el segundo dato en el primer término, y el primer dato en el segundo término.

5º Dígase, el producto de los datos del primer término es al producto de los datos del segundo término como el resultado conocido al que se busca, ó bien alternando; el producto de los datos del primer término es al resultado conocido como el producto de los datos del segundo término al resultado que se busca.

Esto se comprenderá mejor con los

282 *Ejemplos.*

1.º Suponiendo que 5 hombres, trabajando 8 horas al dia, han hecho 30 varas de obra en 4 dias, se pregunta cuántos hombres se necesitarán para que, trabajando 10 horas al dia, hagan 20 varas de obra en 7 dias.

En este ejemplo 8 horas es dato homólogo de 10 horas, lo mismo que 30 varas de 20 varas, y 4 dias de 7 dias; y 5 hombres es el primer resultado, y x hombres el segundo que se busca.

Las cantidades homólogas son de la misma denominacion; y comparando los datos con los resultados, se observa que cuantas mas horas trabajen al dia, tanto menor será el número de hombres que se necesitan; esto es, que las horas diarias de trabajo estan en razon inversa con el número de hombres, y por lo tanto se escribirá el segundo dato 10 horas en el primer término, y el primer dato 8 horas en el segundo término.

Cuantas mas varas de obra se hayan de hacer, tanto mayor número de hombres se necesitará; esto es, que las varas de obra estarán en razon directa con el número de hombres, y por lo tanto se escribirán las varas del primer dato 30 en el primer término, y las del segundo dato 20 en el segundo término.

Cuantos mas dias trabajen, tanto menor será el número de hombres que se necesitan; esto es, que los dias estan en razon inversa con el número de hombres, y por lo tanto se escribirán en el primer término los dias del segundo dato 7, y en el segundo término los dias del primer dato 4.

Establecido esto, se dirá $10 \times 30 \times 7 : 8 \times 20 \times 4 :: 5 : x$ hombres $= \frac{8\times20\times4\times5}{10\times30\times7} = \frac{3200}{2100} = \frac{32}{21} = 1 + \frac{11}{21}$; esto es, que se necesitará un hombre, y otro que trabaje solo los $\frac{11}{21}$ de lo que se supone que trabajan los demas: ó lo que es lo mismo, un hombre que trabaje solo durante los $\frac{11}{21}$ de los 7 dias, que á razon de 10 horas de trabajo al dia son 3 dias + 6 horas + $40'$.

2.° Se supone que cuando una embarcacion camina 55‘4 pies en $30''$ anda una milla por hora, y se pregunta cuántas millas por hora andará cuando camine 60 pies en $20''$.

Está claro que 55‘4 pies es el dato homólogo de 60 pies: $30''$ el dato homólogo de $20''$; 1 milla el primer resultado, y x millas el segundo.

Si la nave camina en el tiempo prefijado un espacio doble, caminará una distancia dupla en una hora; esto es, que las distancias 55‘4 pies y 60 pies estan en razon directa con los resultados.

Si la nave emplea doble tiempo en caminar la distancia, su andar será la mitad; y si emplea solo la mitad del tiempo en caminar la misma distancia, su andar será duplo. Esto es, que los tiempos $30''$ y $20''$ estan en razon inversa con los resultados.

Será segun esto.........$55\text{‘}4\times20 : 60\times30 :: 1 : x$ millas $= \frac{60\times30}{55\text{‘}4\times20} = \frac{1800}{1108} = 1\text{‘}62$ millas.

283 *Demostracion.* La razon de este modo de operar es que si quedando constantes los demas datos se hace duplo uno de los que estan en razon directa, el resultado se duplará; y si despues se tripla otro de los datos (quedando los demas constantes), el nuevo resultado será igual al primitivo multiplicado por 2×3 &c.

(*art.* 101); lo cual manifiesta que cuando los datos estan en razon directa, los resultados aumentan como los productos de dichos datos. Si los datos estan en razon inversa, como esta se convierte en directa cambiando los lugares del primero y segundo término (*art.* 236); este principio se aplicará á dicho caso, siempre que se coloquen los datos como se previene en el núm. 4.º de la regla.

Se omite la resolucion de muchos problemas interesantes que dependen de la regla de tres, porque se puede prescindir de ellos en la práctica ordinaria de la navegacion.

CAPITULO XII.

DE LAS PROGRESIONES.

284 *Progresion* es una serie de razones continuas, de suerte que el consecuente de la primera razon sirve de antecedente á la segunda: el consecuente de la segunda sirve de antecedente á la tercera, y asi sucesivamente.

285 En las progresiones aritméticas se tomará por exponente la diferencia positiva entre el antecedente y consecuente, y en la geométrica el cuociente que resulta de la division del mayor de dichos términos por el menor.

Asi $\div 2 : 5 : 8 : 11 : 14$ &c. será una progresion aritmética cuyo exponente es 3; y $∺ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 :$ &c. será una progresion geométrica cuyo exponente es 2.

286 Las progresiones cuyos términos van aumentando se llaman *ascendentes;* y *descendentes* aquellas cuyos términos van disminuyendo.

Las progresiones del ejemplo anterior son ascendentes; y $\div 5 : 2 : -1 : -4 :$ &c. y $∺ 4 : 2 : 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} :$ &c. son descendentes.

287 Se llama *primer término* de una progresion al de mas á la izquierda, y *último* al de mas á la derecha.

288 Pero esto no se opone á que toda progresion

se pueda continuar sin límite hácia adelante y hácia atrás; ascendiendo en la geométrica hasta una cantidad sumamente grande, y descendiendo hasta una fraccion sumamente pequeña, esto es, hasta cero; y en la aritmética ascendiendo hasta una cantidad sumamente grande positiva, y descendiendo hasta una cantidad sumamente grande negativa.

289 Toda progresion puesta al revés se muda de ascendente en descendente, y al contrario. Por esto basta considerar las ascendentes, y cuanto se diga de ellas se debe verificar en las descendentes, con solo mudar el primer término en último, y el último en primero.

290 Los problemas relativos á las progresiones se resuelven con suma facilidad por los métodos que se enseñan en el Algebra; y se puede prescindir de ellas para la práctica ordinaria de la navegacion.

CAPITULO XIII.

DE LOS LOGARITMOS.

291 Si una porcion de números en progresion geométrica se escriben de suerte que correspondan á otros números en progresion aritmética, los términos de la progresion aritmética se llaman *logaritmos* de sus correspondientes en la geométrica, y á estos se les da el nombre de *números*.

Para indicar el logaritmo de un número, se le antepondrá al número una *L.*

292 Como son infinitas las progresiones geométricas y aritméticas que pueden compararse, tambien serán infinitos los logaritmos correspondientes á un mismo número. Por esto se hace preciso advertir, que cuando se determinan las propiedades de los logaritmos se entiende que se trata de los correspondientes á un mismo sistema, sea el que quiera, esto es, de los que resultan de dos progresiones determinadas.

293 El sistema de logaritmos de que se hace uso en la práctica de la navegacion es el siguiente.

Números................ 1........... 10........ 100.........1000.
Logaritmos.........0‘00000 : 1‘00000 : 2‘00000 : 3‘00000.
10000....100000.
4‘00000 : 5‘00000.

Entre los términos de la progresion geométrica superior y los correspondientes de la aritmética inferior se interpolan muchísimos términos medios; y con esto se tienen los logaritmos de los números intermedios con mucha aproximacion.

V. g. el logaritmo de 3 aproximado hasta la quinta decimal es 0‘47712, y aproximado hasta la séptima decimal es 0‘4771213.

294 Tambien se imaginan las progresiones continuadas hácia atrás; y por lo tanto son tambien

Números..............................0‘1.....................0‘01.
Logaritmos.................— 1 + 0‘00000 : — 2 + 0‘00000 :
0‘001..............0‘0001.
— 3 + 0‘00000 : — 4 + 0‘00000.

295 A los enteros de los logaritmos se da el nombre de *características*, y las fracciones decimales se llaman *mantisas*.

Cuando la característica es positiva, se pone inmediata al signo decimal; pero cuando es negativa es mejor el ponerla antes, y escribir despues la mantisa con cero de característica, como se ve ejecutado (*art.* 294).

296 Desde luego se ve que — 1 + 0‘00000 es lo mismo que — 3 + 2‘00000, puesto que dichas trasformaciones no alteran la expresion de la diferencia que hay entre las dos partes, positiva y negativa (*art.* 34); y se tendrá presente que dichas trasformaciones son de mucho uso, cuando se trata de extraer las raices de los números por medio de sus logaritmos.

297 Tambien es evidente que, — 10 + 8‘36475 se reduce á — 2 + 0‘36475; y — 10 + 12‘36475, se reduce á 2‘36475 (*art.* 73); y estas reducciones deben ejecu-

cutarse siempre que se ha acabado de operar con los logaritmos.

298 La mantisa solo manifiesta el valor y órden de las cifras de los números, independientemente del signo decimal; esto es, que la mantisa de 32500, de 325, de 32‘5, de 3‘25, de 0‘325 &c. es la misma.

299 La característica manifiesta el número de cifras que debe haber en los enteros.

300 El número de cifras, desde la primera significante de la izquierda hasta el signo decimal, es igual á la característica positiva aumentada de una unidad; é inversamente, la característica es igual al número de cifras de los enteros menos una.

301 Cuando la característica es negativa, el número de ceros interpuestos entre el signo decimal y la primera decimal significante es igual á la característica disminuida de una unidad: é inversamente, la característica negativa es igual al número de ceros inmediatos al signo mas una unidad.

302 En esto se funda la resolucion de los problemas siguientes.

Problema 1.

303 *Dada una cantidad cuyo número de cifras (desde la primera hasta la última significante) está comprendido en los límites de la tabla, hallar su logaritmo.*

Resolucion. 1º Si el número tiene enteros, póngase una característica que contenga tantas unidades menos una, cuantas cifras hay en los enteros (desde la primera cifra significante hasta el signo decimal), y póngase á la derecha de dicha característica el signo decimal.

2º Léase el número como si no tuviera signo decimal, considerando (en caso necesario) á su derecha tantos ceros como cifras falten para encontrar dicho número en la tabla.

3º Búsquese en la tabla la mantisa de dicho número, y escríbase á la derecha del signo decimal.

4º Si el número no tiene enteros, póngase una característica negativa que contenga tantas unidades mas una cuantos ceros hay entre el signo y la primera decimal significante.

5º Póngase á la derecha de dicha característica el signo +, un cero, y el signo decimal; y ejecútese despues lo mismo que se ha dicho en los números 2º. y 3º

304 *Ejemplos.* El logaritmo de 7835, que es el mismo de 7835'0, será 3'89404. El de 78'35 será 1'89404. El de 7'835 es 0'89404. El de 0'7835 es — 1 + 0'89404, y el de 0'07835 es — 2 + 0'89404.

305 *Advertencia* 1ª Siempre que se omite alguna cifra de la tabla de logaritmos, si la cifra omitida es mayor que 5, se aumenta una unidad á la última cifra que se escribe.

Por esta razon se ha dicho que el logaritmo de 7835 con cinco decimales es 3'89404, siendo asi que dicho logaritmo con siete decimales es 3'8940 390.

306 *Advertencia* 2ª Se tendrá muy presente (*art.* 293 *y* 294) que todo número compuesto de la unidad con ceros tiene cero por mantisa, y que el logaritmo de la unidad es cero.

V. g. si se pide el logaritmo de 100, se dirá desde luego que es 2'00000, sin necesidad de abrir las tablas; y el logaritmo de 0'01 es — 2 + 0'00000.

Problema 11.

307 *Conocido un logaritmo, hallar su número correspondiente con el número de cifras que contiene la tabla.*

Resolucion. 1º Búsquese en las tablas la mantisa propuesta; y si no se halla exactactamente, véase entre qué mantisas está comprendida.

2º Escríbase el número correspondiente á la mantisa propuesta, ó á la mantisa de las tablas que difiere menos de ella.

3º Si el logaritmo tiene varias cifras á los enteros redúzcanse á una sola, positiva ó negativa, segun resulte (*art.* 297).

4º Si la característica que resulta es positiva, sepárense del número tantas cifras de enteros mas una, cuantas unidades tiene la característica; y póngase el signo decimal á la derecha de dichas cifras.

5º Si la característica es negativa, póngase á la izquierda de la primera cifra significante del número tantos ceros menos uno, como unidades contiene la característica negativa; y póngase el signo decimal, y un cero á los enteros.

308 *Ejemplos.* Si el logaritmo es 2‘38707, será el número 243‘82. Si el logaritmo es — 3 + 7‘67306 = 4‘67306, será el número 47104. Si el logaritmo es — 10 + 8‘89417 = — 2 + 0‘89417, será el número 0‘07837.

309 *Advertencia.* Si el logaritmo tiene cero por mantisa, su número correspondiente será la unidad con ceros (*art.* 293, 294 *y* 306).

Problema III.

310 *Hallar por medio de los logaritmos el producto de la multiplicacion de dos ó mas factores simples.*

Resolucion. 1º Búsquense los logaritmos de los factores por lo dicho (*art.* 303), y escríbanse en columna.

2º Súmense, y el resultado será el logaritmo del producto.

3º Búsquese en las tablas el número correspondiente (*art.* 307); y dicho número será el producto que se trate de determinar.

311 *Advertencia.* Si resulta que se han de separar para enteros mas cifras de las que tiene el número hallado, se suplirán dichas cifras con ceros á la derecha, y en tal caso no se puede saber el verdadero valor de las cifras que se han suplido con ceros.

312 *Ejemplo* 1.º Hallar el producto de 325‘7 por 28‘3. Para esto, si las tablas tienen cinco cifras, se leerán dichos números como si fue-

ran 32570 y 28300; y en todos casos se operará como sigue, en el caso de tomar solo cinco cifras de mantisa.

325‘7 .... L .... 2‘51282
28‘3 .... L .... 1‘45179
Producto....... 9217‘4 .... L .... 3‘96461

Si las tablas solo dan los números con cuatro cifras, únicamente se sabrá que el producto está comprendido entre 9217 y 9218; pero tomando los logaritmos con siete cifras de mantisa, y usando de tabla que dé los números con cinco cifras, serán:

325‘7 .... L .... 2‘5128178
28‘3 .... L .... 1‘4517864
Producto.... 9217‘3 .... L .... 3‘9646042

Ejemplo 2.° Supongamos que se pide el producto de los tres factores 0‘475×0‘0289×35‘86, y que se hace uso de las tablas que expresan los números con cinco cifras; y que se toman los logaritmos con siete decimales.

0‘475 .... L .... — 1 + 0‘6766936
0‘0289 .... L .... — 2 + 0‘4608978
35‘86 .... L .... 1‘5546103
Producto. 0‘49227......... L .... — 3 + 2‘6922017

Para colocar el signo decimal se atiende á que las características — 3 + 2 equivalen á la característica única — 1; y por cuanto no se puede responder de la última cifra del producto, se dirá que el resultado, aproximado hasta los diez milésimos, es 0‘4923.

Del complemento aritmético.

313 Las operaciones en que hay que sumar y restar varios logaritmos se facilitan mucho por medio de los complementos aritméticos, que se designan con las iniciales *c. a.*

Por *complemento aritmético* de un número se entiende su diferencia á 10.

Asi se dirá que *c. a.* 7 = 3; *c. a.* 4‘3827 5‘6173; *c. a.* 6‘28520 = 3‘71480; *c. a.* 2‘83000 = 7‘17000.

314 Reflexionando sobre estos ejemplos se ve que para sacar el conplemento aritmético se restan de 10 todas las cifras, desde la primera significante de la derecha; y como siempre se lleva una unidad, es evidente que

315 Para sacar el complemento aritmético de un número, empezando por la izquierda, basta ir restando cada una de sus cifras de 9, y la última significante de 10.

V. g. para hallar el complemento aritmético de 6‘28520, en vez de decir (empezando por la derecha) *de* 0 *á* 0, 0........ *de* 2 *á* 10, 8 *y llevo* 1........ *y* 5, 6: *á* 10, 4 *y llevo* 1........ *y* 8, 9: *á* 10, 1 *y llevo* 1....... *y* 2, 3: *á* 10, 7 *y llevo* 1........ *y* 6, 7: *á* 10, 3 *y llevo* 1........ *de* 1 *á* 1, 0....... Se dirá empezando por la izquierda *de* 6 *á* 9, 3........ *de* 2 *á* 9, 7........ *de* 8 *á* 9, 1........ *de* 5 *á* 9, 4........ *de* 2 *á* 10, 8........ y despues se escribe el cero.

316 Cuando uno dicta las cantidades con que se ha de operar y otro las escribe, para escribir el complemento aritmético, el que dicta va nombrando una por una las cifras de la izquierda, diciendo v. g. *de* 6 *á* 9, y el que escribe dice *tres*, y escribe el 3; y asi sucesivamente. De esta suerte se toma el complemento aritmético de un número, casi sin emplear mas tiempo que el que se necesitaria para copiar el mismo número.

317 Siempre que se trata de restar un logaritmo, en vez del subtraendo se puede poner —10+el complemento aritmético de dicho logaritmo. Esta es la razon por que todo complemento aritmético se supondrá precedido de la característica negativa —10, á menos que no se advierta lo contrario.

318 Cuando se trata de sumar y restar varios logaritmos, se facilita mucho la operacion empleando los complementos aritméticos de los logaritmos subtraendos, como se manifiesta en el ejemplo siguiente:

Supongamos que se han de sumar 3‘2745681 y 5‘4699000; y de la suma se han de restar 2‘5438200 y 4‘0803950; empleando los complementos aritméticos, casi quedan reducidas á una sola suma las tres operaciones que debian ejecutarse para obtener el resultado por el método ordinario.

+3‘2745681=1.ª *partida del minuendo.*
+5‘4699000=2.ª *partida del minuendo.*
—10+7‘4561800=—10+*c. a.* 1.ª *partida del subtraendo.*
—10+5‘9196050=—10+*c. a.* 2.ª *partida del subtraendo.*

Resultado.—20+22‘1202531=2‘1202531.

319 El ejemplo manifiesta que para tener el verdadero resultado en casos semejantes, basta sumar las cantidades positivas, y quitar (ó mejor dejar de escribir)

tantas decenas como complementos aritméticos se hubiesen introducido.

320 *Advertencia.* Si la característica del logaritmo vale una decena, ó una decena de algunas unidades (que es lo mas que puede valer en los casos que se ofrecen en la práctica de la navegacion), se saca el complemento aritmético como si no existiese dicha decena; y se antepone la característica negativa — 20.

V. g. el complemento aritmético de 11‘4569162 será—20+8‘5430838.

Problema IV.

321 *Hacer desaparecer los decimales de los términos de cualquiera expresion fraccionaria.*

Resolucion. 1º Iguálese el número total de decimales del numerador y denominador, agregando ceros al factor ó factores del término que tenga menos decimales.

2º Hecho esto, bórrense los signos decimales, y resultará la nueva expresion igual á la primitiva.

Demostracion. Es evidente que la nueva expresion será igual á la primitiva, respecto á que lo que se previene en el número 1º no altera el valor de los factores (*art.* 50); y lo que se previene en el número 2º equivale á multiplicar los dos términos del quebrado por la unidad acompañada de igual número de ceros (*art.* 117 *y* 102), lo que no altera su valor (*art.* 163, *núm.* 3º)

322 Esto se comprenderá mejor con los ejemplos siguientes: $\frac{3\text{‘}54\times41\text{‘}8}{23\times5\text{‘}2}=\frac{3\text{‘}54\times41\text{‘}8}{23\times5\text{‘}200}=\frac{354\times418}{23\times5200}$. Lo que se ejecuta en el numerador equivale á multiplicar por $100\times10=1000$; y lo que se ejecuta con el denominador equivale tambien á multiplicar por dicho número.

$$\frac{24}{35\text{‘}23\times51}=\frac{24\text{‘}00}{35\text{‘}23\times51}=\frac{2400}{3523\times51}.$$

Finalmente, $\frac{0\text{‘}03\times42\text{‘}1}{12\times5}=\frac{0{,}03\times42\text{‘}1}{12\times5\text{‘}000}=\frac{3\times421}{12\times5000}$: ó bien

$$\frac{0\text{‘}03\times42\text{‘}1}{12\times5}=\frac{0\text{‘}03\times42\text{‘}1}{12\text{‘}0\times5\text{‘}00}=\frac{3\times421}{120\times500}.$$

Problema v.

323 *Hallar por medio de los logaritmos el resultado de cualquiera expresion fraccionaria, aunque tenga muchos factores simples en el numerador y denominador.*

Resolucion. 1.° Redúzcanse dichos factores á enteros, por lo que se acaba de decir (*art.* 321).

2.° Búsquense en las tablas los logaritmos de los factores del numerador (*art.* 303), y los complementos aritméticos de los logaritmos de los factores del denominador (*art.* 315 *á* 321).

3.° Súmense todos los logaritmos y complementos aritméticos, y el resultado será el logaritmo de la expresion.

4.° Búsquese en las tablas el número correspondiente (*art.* 307); y dicho número será el valor de la expresion fraccionaria.

324 *Advertencia.* Como toda division se puede indicar colocando el divisor y dividendo en forma fraccionaria (*art.* 137), es evidente que el problema general comprende el caso particular de pedirse el cuociente de la division de dos cantidades. En este caso, y en todos aquellos en que solo hay dos logaritmos con mantisas compuestas de cifras significantes, se puede excusar el tomar el complemento aritmético, restando el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo. El residuo será el logaritmo del cuociente que se trata de determinar.

325 *Ejemplo* 1.° Sea la expresion fraccionaria $\frac{823'5\times 0'039}{4'397\times 0'83}=\frac{8235\times 390}{4397\times 83}$

	8235	....	L		3'9156636
	390	....	L		2'5910646
	4397	..*c.a*........	L	— 10 +	6'3568435
	83	..*c.a*.......	L	— 10 +	8'0809219
Reſultado.......	8'8	....	L	....	0'9444936

Se ha puesto desde luego la característica cero, porque la suma de las características positivas 20, es igual á la suma de las negativas.

Ejemplo 2.º Sea la expresion fraccionaria $\frac{1}{342 \times 0‘5} = \frac{10}{342 \times 5}$

10 .... L .... 1‘0000000
342 ..*c.a*.......... L .... — 10 + 7‘4659739
5 ..*c.a*.......... L .... — 10 + 9‘3010300

Resultado......... 0‘005848 .... — 3 + 0‘7670039

Se ha puesto desde luego la característica — 3, porque se ve que la diferencia de características es — 20 + 17 = — 3, sin necesidad de escribir dichas cantidades.

Problema VI.

326 *Hallar las potestades segunda ó tercera de cualquiera expresion por medio de los logaritmos.*

Resolucion. 1º Búsquese el logaritmo de la expresion por lo dicho (*art.* 303, 310 *ó* 323).

2º Multiplíquese por el exponente de la potestad, y el resultado será el logaritmo de la expresion elevada á dicha potestad.

3º Búsquese en la tablas el número correspondiente (*art.* 307), y dicho número será la potestad de la expresion.

327 *Advertencia.* Esta regla es un corolario de lo dicho (*art.* 209 *y* 310); y desde luego se advierte, que si se trata de elevar al cuadrado, el escribir el logaritmo dos veces y sumar las dos partidas equivale á multiplicar por 2.

Es excusado el poner ejemplos de una operacion tan sencilla.

Problema VII.

328 *Extraer la raiz de cualquiera expresion por medio de los logaritmos.*

Resolucion. 1º Determínese el logaritmo de la expresion propuesta por lo dicho (*art.* 303, 310 ó 323).

2º Si la característica es negativa y no es divisible sin residuo por el exponente de la potestad cuya raiz se ha de extraer, se le agregarán las unidades necesarias para que lo sea, y se pondrá igual número de unidades positivas á la izquierda de la mantisa. (*art.* 296).

3.º Se partirá el logaritmo de la expresion por el exponente de la potestad cuya raiz se trata de extraer, y el cuociente será el logaritmo de la raiz.

4.º Se buscará en la tabla su número correspondiente (*art.* 307); y dicho número será la raiz que se trata de extraer.

329 *Ejemplo* 1.º Sea la expresion $x=\left(\frac{823\text{‘}5\times0\text{‘}039}{4\text{‘}397\times0\text{‘}83}\right)^{\frac{1}{2}}.$

El logaritmo de la expresion fraccionaria se halló (*art.* 325). Partiéndolo por 2 : esto es, tomando su mitad, se tendrá el logaritmo de x; y su número correspondiente será el valor de x.

Logaritmo de la expresion............. 0‘9444936
$x=2\text{‘}967$ .... L .... 0‘4722468

Ejemplo 2.º Sea la expresion $x=\left(\frac{1}{342\times0\text{‘}5}\right)^{\frac{1}{2}}.$

En el artículo 325 se halló................ L .... —3+0‘7670039.
Para que la característica negativa sea divisible por 2 (que es el exponente) se trasformará en......... L ....—4+1‘7670039
$x=0\text{‘}07647$........................... L ....—2+0‘8835019

Ejemplo 3.º Extraer la raiz cúbica de la expresion 0‘473. Desde luego se ve que para que la característica negativa sea divisible por 3 (que es el exponente) se debe escribir el logarítmo asi

0‘473 .... L ....—3+2‘6748611
La raiz cúbica....... 0‘7791 .... L ....—1+0‘8916204

APENDICE PRIMERO,

QUE CONTIENE ALGUNAS APLICACIONES DE LA REGLA DE TRES AL USO DE LAS TABLAS.

330 Sea J, L, N, P &c. una serie ó continuacion de cantidades correspondientes á otra serie j, l, n, p &c.; y supongamos que las diferencias entre los términos de la serie primera sean iguales ó casi iguales; y que les suceda lo mismo á los términos correspondientes de la

serie segunda. Esto equivale á suponer que tres ó cuatro términos sucesivos de cada serie no distan mucho de estar en progresion aritmética.

331 En tal caso, la diferencia entre los términos L y P será dupla ó casi dupla de la que hay entre los términos L y N, y lo mismo le sucederá á la diferencia entre l y p respecto á la diferencia entre l y n. La diferencia entre J y P será tripla ó casi tripla de la que hay entre L y N; y lo mismo le sucederá á la diferencia entre j y p respecto á la diferencia entre l y n. De estas consideraciones resulta (*art.* 225, 230 *y* 232); que será $N-L : P-L :: n-l : p-l$; y $N-L : P-J :: n-l : p-j$ &c.; y en general.

332 Las diferencias entre los términos de la primera serie se podrán suponer proporcionales con las diferencias de los términos correspondientes de la segunda serie.

333 De este principio resulta el método general para determinar el valor de término intermedio m de la segunda serie j, l, n &c. correspondiente al intermedio M de la primera serie J, L, N &c. comprendido en la siguiente regla.

1.° Hállese la diferencia entre los dos términos L y N de la primera serie, y se tendrá el primer término de una proporcion.

2.° Hállese la diferencia entre el medio conocido M y el antecedente ó siguiente L ó N, y se tendrá el segundo término de la proporcion, homólogo del primero.

3.° Hállese la diferencia entre los dos términos l y n de la segunda serie; y se tendrá el tercer término de la proporcion, que es el resultado conocido.

4.° Redúzcanse las cantidades homólogas á una misma denominacion, y el resultado conocido á una denominacion cualquiera, y esta será la del cuarto término, que se halla por la regla dada (*art.* 251, *núm.* 1.°).

5.° Dése al cuarto término el nombre de *correccion*, y con ella determínese el término intermedio m segun se manifiesta en los dos números siguientes.

6.° Si se ha hallado el segundo término ó segundo dato (*núm.* 2.°) tomando la diferencia entre el intermedio *M* y el antecedente *L*, súmese la correccion con el primer término *l* de la serie segunda si la progresion *l*, *n*, &c. es ascendente, y réstese la correccion de dicho primer término *l* si la proporcion es descendente.

7.° Si se ha hallado el segundo término ó segundo dato (*núm.* 2.°) tomando la diferencia entre el intermedio *M* y el siguiente *N*, réstese la correccion del segundo término *n* de la serie segunda si la progresion *l*, *n* &c. es ascendente; y súmese la correccion con dicho segundo término *n* si la progresion es descendente.

334 *Advertencia.* Siempre que los dos términos *l* y *n* son de distinta especie, el tercer término de la proporcion (*núm.* 3.°) es la suma de los valores numéricos de *l* y *n*, porque el segundo término *n*, es negativo (*art.* 72 *y* 91). La progresion se considera en dicho caso como descendente; y si *m* resulta negativo, es señal de que es de la especie del segundo término *n*.

Ejemplos.

335 En los libros intitulados *Almanaques náuticos*, *Efemérides astronómicas* ó *Conocimientos de tiempos* se halla lo que los Astrónomos llaman la *declinacion del sol* correspondiente al tiempo de ser medio dia en el lugar para que está construido el almanaque. Los medios dias forman la serie *J*, *L*, *N*, *P* &c., cuyas diferencias exactamente iguales son, un dia, 24 horas, ó 1440′: y las declinaciones forman la segunda serie *j*, *l*, *n*, *p* &c., cuyas diferencias correspondientes á tres ó cuatro medios dias consecutivos son casi iguales entre sí. Bajo de este supuesto será muy fácil el hallar la declinacion *m* correspondiente á cualquiera hora *M* del dia por la regla dada; y se tendrá presente que en este caso el primer término de la proporcion (*art.* 333, *núm.* 1.°) es igual á un dia ó 24 horas reducidas á minutos = 1440′ siempre que se quiera expresar el tiempo en minutos y decimales de minuto.

Ejemplo 1.° Hallar la declinacion del sol para cuando son en Paris las 3^h .... $16'$ .... $14''$ de la tarde del dia 8 de Abril de 1803.

Declinacion el 8 á medio dia $l=6°$ .... $57'$ .... $02''$
Declinacion el 9 á medio dia $n=7$ 19 28

Diferencia.................. $n-l=0$ .... 22 .... 26, que es$=1346''$. Este será el tercer término de la proporcion (*art.* 333, *núm.* 3.°). En cuanto al segundo (*art.* 333, *núm.* 2.°) será igual á los minutos que han mediado desde las cero horas, ó medio dia, hasta la hora propuesta: esto es, que dicho segundo término es $M-L=3^h$ ...... $16'$......$14''=196'2$. Por consiguiente se dirá

$1440' : 196'\,2 : : 1346'' : x=183''=0°$......... $03'$.......... $03''$
El término antecedente es......... $l=6$ 57 02

El que se busca es...................... $m=7°$......... $00'$.......... $05''$

Ejemplo 2.° Hallar la declinacion correspondiente á las 3^h .....$16'$..... $14''$ de la noche siguiente al medio dia del 8 de Abril. Tomando por segundo término de la proporcion (*art.* 333, *núm.* 2.°) la diferencia entre el medio conocido y el antecedente, todas las cantidades serán las mismas del ejemplo 1.°, excepto dicho segundo término M — L, que es igual á 3^h .... $16'$.......... $14''$ mas las 12 horas que van desde el medio dia á la media noche: esto es, que dicho segundo término será 15^h .... $16'$.......... $14''=916'2$; y por consiguiente se dirá

$1440' : 916'2 : : 1346'' : x=856''=0°$........... $14'$ .... $16''$
El término antecedente es......$l=6$ 57 02

El que se busca es...................$m=7°$........... $11'$ .... $18''$

Ejemplo 3.° Supongamos que se quiere resolver el ejemplo 2.° tomando la diferencia entre el término intermedio *M* y el siguiente *N*. En tal caso serán las mismas las cantidades de la proporcion, excepto el segundo término N — M que representará las horas que van desde las 3^h ...... $6'$...... $14''$ de la mañana hasta el medio dia siguiente. Dicho valor se obtendrá restando la hora propuesta de 12 horas, y resultará N — M $=8^h$ .... $43'$........ $46''=523'8$. Por consiguiente se dirá

$1440' : 523'8 : : 1346'' : x=489''6=-0°$........ $08'$ .... $10''$
El término siguiente es........ 7 .... 19 28

El que se busca m es.............. $7°$........ $11'$ .... $18''$

Ejemplo 4.° Hallar la declinacion del sol para cuando son en Paris las 5^h .... $23'$......... $35''$ de la tarde del 26 de Julio de 1803.

Declinacion el 26 á medio dia l = 19°.............. $37'$.............. $52''$
Declinacion el 27 á medio dia n = 19 .... 24 41

Diferencia................................. l — n .... 13 .... 11 , que es = 791″, y este será el valor del tercer término de la proporcion. El segundo será 5^{h} ...... 23′...... 35″ = 323′6; y se dirá

1440′ : 323′6 : : 791″ : x = 177″ 7 = — 0°............ 02′............ 58″

El término antecedente es..... l = 19 .... 37 52

El que se busca es.................. m = 19°............ 34′............ 54″

Ejemplo 5.° Hallar la declinacion del sol para las 5^{h} ...... 23′...... 35″ de la mañana siguiente al dia 26 de Julio de 1803. Todos los términos serán los mismos del ejemplo anterior, excepto el segundo, que tomando la diferencia N — M con el término siguiente de la progresion es = 12^{h} — (5^{h} .... 23′........ 35″) = 6^{h} .... 36′........ 25″ = 396′4, y por lo tanto se dirá

1440′ : 396′4 : : 791″ : x = 217″8 = 0° .... 03′............ 38″

El término siguiente es......... n = 19 .... 24 41

El que se busca es.................. m = 19°............ 28′............ 19″

Ejemplo 6.° Hallar la declinacion del sol para cuando son en Paris las 6^{h} ..... 50′ de la tarde del 21 de Marzo de 1803.

Declinacion el 21 á medio dia l = 0°............ 01′............ 28″

Declinacion el 22 á medio dia hácia el lado opuesto n......... } = — 0 .... 22 13

Suma de los valores numéricos que (*art.* 90) es = n — l...... } = — 0°............ 23′............ 41″

Segun esto se dirá

1440 : 410′ : : 1421″ : x = 404″5 = — 0°............ 06′............ 45″

El término antecedente.......... l = 0 .... 01 28

El que se busca (*art.* 88) es m = — 0°............ 05′............ 17″

esto es, de la misma especie que la del medio dia del 22 de Marzo.

Por el mismo estilo se hallará que la declinacion correspondiente á la una de la tarde del 21 de Marzo es (1′..... 28″) — 59″ = 0°...... 00′...... 29″, de la misma especie que la del medio dia del dia 21; y que la correspondiente á las 11 horas de la mañana siguiente al medio dia del 21 es = — (22′........ 13″) + 59″ = — 0°......... 21′......... 14″ : esto es, de la misma especie que la corrrespondiente al medio dia del 22.

336 Si se quiere hacer uso de los logaritmos para hallar el cuarto término de la proporcion, bastará tomarlos con cuatro ó cinco cifras de mantisa; y el problema se resolverá sumando el complemento aritmético del primer término con los logaritmos del segundo y tercero, y buscando en las tablas el número correspondiente al logaritmo de la suma, que será el valor de x.

337 Para mayor facilidad conviene tener presente, que cuando el primer término de la proporcion es 24 horas reducidas á minutos, se hace mucho uso del complemento aritmético de 1440, que es 6‘84164.

338 Si el primer término es 12 horas reducidas á minutos, se hace mucho uso del complemento aritmético de 720, que es 7‘14267.

339 Si el primer término es 6 horas reducidas á minutos, se hace mucho uso del complemento aritmético del logaritmo de 360, que es 7‘44370.

340 Si el tercer término fuese 3 horas reducidas á segundos, se haria mucho uso del logaritmo de 10800, que es 4‘03342.

341 La regla general (*art.* 333) se aplica á las tablas de logaritmos, cuando el número propuesto ó que se va á buscar tiene mas cifras que el mayor número de las tablas de que se hace uso. Para esto conviene tener presente que el agregar ceros á la derecha de los números no altera las mantisas de sus logaritmos: esto es, que la mantisa de 4356 es la misma de 43560, de 435600 &c. Por consiguiente, cualquiera que sea el número propuesto *M*, ó que se va á buscar *m*, se puede considerar que su mantisa está comprendida en la tabla, considerando á la derecha de los números de dicha tabla los ceros necesarios para que esto se verifique.

342 V. g. para hallar el logaritmo de 287537=M en la tabla que solo alcanza al número 10000, se escribirán desde luego las 5 unidades de características: y considerando dos ceros á la derecha de los números de la tabla, serán L=287500, N=287600: *l* será la mantisa de 287500, que es la misma de 2875: *n* la de 287600, que es la misma de 2876: el primer término de la proporcion será N—L=100, el segundo M—L=37, el tercero n—l, y el cuarto *x* manifestará las cifras que deben agregarse á la mantisa *l* para obtener la que se trata de determinar.

343 Si dada la mantisa *M* se pide el número *m* con mas cifras de las que contienen los números de la tabla, *L* y *N* serán las mantisas entre que está comprendida la propuesta *M*, y los números *l* y *n* serán los correspondientes á las mantisas *L* y *N*, con los ceros necesarios para completar el número de cifras del número *m* que se trata de determinar.

344 Como en estos casos uno de los términos de la proporcion es la unidad con ceros, el problema se resuelve con mucha facilidad, y se omite el aclarar con ejemplos la solucion de estos problemas, respecto á que puede prescindirse de ellos en la práctica ordinaria de la navegacion.

APENDICE II.

QUE CONTIENE ALGUNAS APLICACIONES DE LAS REGLAS DE SUMAR, RESTAR, Y SACAR LA MITAD DE UN NUMERO PROPUESTO.

345 Un navío que tiene $26\frac{1}{2}$ pies bajo del agua se ha de colocar en un sitio en que la profundidad del mar son $5\frac{1}{2}$ brazas; y se pregunta

cuánto le faltará para tocar en el fondo. Ante todas cosas se reducirán las dos cantidades á pies y décimos; y se dirá que el calado del navío son 26‘5 pies, y el fondo 33 pies. Restando la primera cantidad de la segunda, resultará que la quilla (que es la parte mas baja del navío) distará del fondo 6‘5 pies: esto es, seis pies y medio.

346 Un navío que tiene $28\frac{1}{2}$ pies bajo del agua ha de pasar por un sitio en que la profundidad del mar es de $4\frac{1}{2}$ brazas; y se pregunta á qué distancia del fondo quedará su quilla. Reducidas ambas cantidades á pies y décimos, resultará el calado del navío = 28·5 pies y el fondo = 27 pies. Restando la primera cantidad de la segunda, resultará la distancia de la quilla al fondo — 1‘5 pies. Esto es, que el navío profundizará $1\frac{1}{2}$ pies mas que el fondo; y por lo tanto, no podrá pasar, á menos que no se le quite peso, en términos que su calado disminuya de un pie y medio.

347 Un navío que se hallaba ayer á medio dia á 26°.....38′......35″ de una línea, se halla hoy á 29......32′.. ..50″ de dicha línea; y se pide lo que ha navegado separándose de ella. El problema se resuelve restando la primera cantidad de la segunda, y resulta que la distancia navegada, separándose de la línea son 2°......54′......15″, que reducidos á minutos (*art.* 181 *y* 182) son 174‘25.

348 Un navío que se hallaba ayer á medio dia á 1°.......16′.......45″ de distancia de una línea hácia un lado, se halla hoy á 2°.....28′......40″ de distancia de dicha línea hácia el lado opuesto, y se pide la distancia navegada. Es evidente que el navío ha atravesado la línea, y la distancia navegada será igual á la suma de las dos distancias: esto es, 3°.......45′.......25″, que reducidos á minutos (*art.* 181 *y* 182) son 225′42.

349 Un navío que se hallaba ayer á 43°.......26′.......35″ de una línea, ha navegado 4°.......12′.......50″ acercándose á ella, y se quiere saber á qué distancia se hallará de dicha línea. El problema se resolverá restando la segunda cantidad de la primera, y resultará dicha distancia = 39°......13′......45″.

350 Un navío que se hallaba ayer á 4°.......28′......40″ de una línea, ha navegado 5°......00′......50″ acercándose á ella, y se quiere saber á qué distancia se hallará de dicha línea. El problema se resolverá restando la segunda cantidad de la primera (*art.* 90), y el resultado serán — 32′......10″ = — 32′17. El signo negativo manifiesta que el navío ha pasado al lado opuesto de la línea.

351 Un relox está atrasado 1^{h}.......26′.......43″, y se quiere saber la hora que es cuando dicho relox señala las 7^{h}......36′......29″. Es evidente que el problema se resolverá sumándole á dicha hora el atraso del relox, y resultará que en realidad son las 9^{h}......03′......12″.

352 Se quiere saber la hora que es cuando el relox del artículo anterior señala las 11^{h}.......58′.......46″. El problema se resuelve como el

de dicho artículo, y el resultado son 13^{h}......25'......29''. Pero como al llegar á las doce se cuentan las horas de nuevo, se deberán restar 12 horas de esta cantidad, y resultará que en realidad es la 1^{h}......25'......29''.

353 Un relox está adelantado 2^{h}......03'......15''; y se quiere saber la hora que es cuando dicho relox señala las 5^{h}......38'......13''. El problema se resolverá restándole á la hora del relox la cantidad en que está adelantado, y resultará que en realidad es las 3^{h}......34'......58''.

354 Se quiere saber la hora que es cuando el mismo relox del artículo anterior señala la 1^{h}......08'......10''. El problema se resolverá como el de dicho artículo; pero como el subtraendo es mayor que el minuendo, resultará una cantidad negativa (*art.* 90): esto es, una hora contada desde las doce hácia atrás. Por esta razon, el problema se resuelve con mas facilidad contando la hora del relox, no desde las doce inmediatas, sino desde las doce anteriores, lo que se consigue agregándole 12 horas. Se dirá pues que la hora del relox son las 13^{h}......08'......10'', y restándole el adelanto, resulta que en realidad son las 11^{h}......04'.....55''.

355 Un relox está adelantado 1^{h}......37'......43'', y se quiere saber la hora que señalará cuando sea en realidad las 11^{h}......28'......56''. Es evidente que el relox señalará una hora mayor que la verdadera en todo su adelanto. Por consiguiente se le deberá sumar dicho adelanto, y resultará que el relox señalará las 13^{h}.......06'.......39'': esto es, la 1^{h}......06'......39''.

356 Un relox está atrasado 1^{h}......47'......59'', y se quiere saber la hora que señalará cuando en realidad sea la 1^{h}......14'..... 48'' de la noche. Es evidente que el relox señalará una hora menor que la verdadera en todo su atraso. Por consiguiente, se resolverá el problema restando el atraso de la hora verdadera; y como esta es menor que dicho atraso, para evitar el que resulte una hora negativa, se le añadirán 12 horas, y se dirá que la hora verdadera es 13^{h}......14'......48'', contados desde medio dia. Hecha la resta, resulta que el relox señalará las 11^{h}......26'......49''.

357 Se quiere saber el tiempo que ha pasado desde el 12 de Marzo á las 3^{h}......48'. ....50'' de la tarde, hasta el 7 de Julio á las 2^{h}......13'......20'' de la tarde. Ante todas cosas se deberán contar los dias desde el mismo orígen: esto es, desde principio de Marzo, lo que se consigue sumando los 31 de Marzo, 30 de Abril, 31 de Mayo y 30 de Junio con los 7 dias......2^{h}......13'......20'' de Julio, y resultarán 129 dias......2^{h}......13'......20''. Restando el primer número de dias del segundo, resultará que han pasado 116 dias.....22^{h}.....24'.....30''.

358 Suponiendo que se cuentan los dias desde medio dia, se pide el tiempo que ha mediado desde el 16 de Agosto á las 3^{h}......28'......16'' despues de media noche, hasta el 25 de Octubre á las 4^{h}......38'......56'' de la tarde. Para contar los dias desde el mismo orígen, se deberán añadir 12 horas á la hora de Agosto; y los 31 dias de Agosto y 30 de Setiembre se deberán agregar á los 25 de Octubre. Hecho esto, restando

el primer número de dias del segundo, resultarán 69 dias.....13^{h}...... 10'.....40''.

359 Se sabe que al ser medio dia, un relox señalaba una hora media entre las 8^{h}..... 09'......40'' de la mañana y las 3^{h}......16'......19'' de la tarde; y se quiere saber la hora que señalaba dicho relox al tiempo de ser medio dia. Ante todas cosas será menester contar las dos horas desde un mismo orígen; esto es, desde la media noche anterior; y para esto se añadirán 12 horas á la hora de la tarde. Hecho esto, se resolverá el problema sumando las dos horas, y sacando la mitad de la suma (*art.* 239, *núm.* 4.° *y art.* 206); y resultará que al ser medio dia señalaba el relox las 11^{h}......42'......59''5. El atraso del relox será lo que va de esta hora hasta las doce: esto es, 17'......00''5.

360 Se sabe que al ser medio dia señalaba el relox una hora media entre las 11^{h}. ....47'......35'' y las 4^{h}......12'......54''; y se quiere saber la hora que señalaba dicho relox al tiempo de ser medio dia. Como para resolver el problema se han de agregar 12 horas á la hora de la tarde y despues se han de sumar las dos horas, y se ha de tomar la mitad de la suma, se facilita la solucion operando como sigue.

Horas que se han de sumar...	12^{h}........	00'	00''
Hora de la mañana.............	11	47	35
Hora de la tarde.................	4	12	54
Suma....................................	28	00	29
Semisuma que es la hora del relox.	14	00	14'5

Como las horas solo se cuentan hasta 12, tomando el exceso de dicha hora sobre 12 horas, se dirá que el relox señalaba las 2^{h}....... 00'........14''5 en el momento de ser medio dia; y esta cantidad será su adelanto.