CURSO

DE

ESTUDIOS ELEMENTALES DE MARINA,

ESCRITO DE ORDEN DE S. M.

POR DON GABRIEL CISCAR,

Director que fue de la Academia de Guardias Marinas de Cartagena.

TOMO II,

QUE CONTIENE EL TRATADO DE GEOMETRIA.

SEXTA EDICION.

MADRID:

EN LA IMPRENTA NACIONAL.

1842.

INTRODUCCION.

Aunque las proposiciones de Geometría de que se hace uso en la práctica ordinaria de la Navegacion son en corto número, no se puede demostrar su certeza sin establecer muchos principios, que sirven de base para la deduccion de las proposiciones usuales. Estos mismos principios son de la mayor utilidad, en cuanto preparan el entendimiento para discurrir con acierto sobre las materias facultativas; en términos, que aquellos que hayan aprovechado en su estudio, se hallarán en estado de resolver por sí mismos las dificultades que se les presenten, y podrán tomar el mejor partido en algunos casos que no se especifican en los Tratados, en atencion á que en todas las Artes y Ciencias es preciso contar con el buen juicio y discernimiento de los que las profesan.

Se han puesto de letra menor los ejemplos, algunas aclaraciones menos esenciales, y los conocimientos necesarios para la formacion de los planos de puertos y costas, respecto á que no es preciso que se exijan de todos los que se dediquen á la práctica del Pilotage, sin embargo de su mucha utilidad.

Se han distribuido las materias de este Tratado en diez y nueve capítulos, cuyos títulos manifiestan la clase de conocimientos contenidos en cada uno de ellos. Pero como el objeto primario de todo método es la claridad, en beneficio de esta se han establecido y demostrado tal cual vez como lemas algunas verdades, que consideradas aisladamente debian ocupar un lugar distinto de aquel en que se han puesto por razon de sus aplicaciones.

En el capítulo I, bajo el título de *nociones generales*, se manifiesta el modo de concebir, representar y comparar las cantidades que forman el objeto de la Geometría.

En el capítulo II se trata de las líneas, distinguiéndolas en rectas, angulosas, curvas y mixtas; y se dan las ideas legítimas de las tangentes.

En el capítulo III se trata de las figuras en general, con el objeto de anticipar sobre esta materia los conocimientos que facilitan la inteligencia de los capítulos siguientes, y evitar las circunlocuciones.

En el capítulo IV se trata del ángulo y de la circunferencia, en atencion á que estas dos cantidades de clases tan distintas tienen una dependencia recíproca que obliga á tratar promiscuamente de una y otra, para facilitar su conocimiento.

En el capítulo V se trata de las líneas perpendiculares, y se manifiesta el uso que puede hacerse de sus propiedades para dividir por mitad una recta y un arco de círculo; y para determinar el centro de una circunferencia que debe pasar por tres puntos dados. Verdad es que este problema no tiene una aplicacion directa á la práctica ordinaria de la navegacion; pero los corolarios que se deducen de su resolucion son de mucha utilidad para demostrar algunas propiedades de los círculos de la esfera, de que se tratará en la Cosmografía. Esta reflexion se extiende á otras proposiciones, que puede parecer que estan de mas, cuando no se tenga presente el encadenamiento de los principios en que se funda la teoría de las operaciones mas comunes de la navegacion.

En el capítulo VI se trata de las líneas paralelas: se demuestran las propiedades mas esenciales de dichas líneas; y de ellas se deduce la relacion que tienen los ángulos formados por dos rectas, con los formados por sus perpendiculares, y la igualdad de los arcos de un mismo círculo interceptados por dos cuerdas paralelas.

En el capítulo VII se trata de los ángulos inscritos. Se demuestra que la medida de dichos ángulos es la mitad del arco comprendido entre los lados que los forman; y se deducen de este principio algunas consecuencias que tienen aplicaciones al Pilotaje.

En el capítulo VIII se trata de los triángulos en general.

Se demuestra que sus tres ángulos juntos valen 180°; se explican las denominaciones con que se distinguen los triángulos, y se demuestra la dependencia que hay entre los valores de los lados y los de sus ángulos opuestos. De estos principios se deduce que la cuerda del arco de 60° es igual al radio del círculo. Se demuestra la relacion entre el ángulo externo y sus dos internos opuestos, y se manifiestan todos los casos en que se verifica la igualdad de los triángulos.

En el capítulo IX se trata de las figuras semejantes. Se manifiestan las circunstancias que deben concurrir indispensablemente para que se verifique la semejanza de dos cantidades geométricas, y se explica con extension el modo de comparar entre sí las líneas correspondientes de las figuras semejantes. Se establece un principio general, del cual se deducen todos los casos en que se verifica la semejanza de las figuras y sólidos de cualquiera clase; y se hace la aplicacion de dicho principio á los triángulos. Se demuestra la proporcionalidad entre las porciones correspondientes de los dos lados de un triángulo, interceptadas por varias rectas paralelas al tercer lado; y la relacion que hay entre el cuadrado de la hipotenusa y los cuadrados de los catetos que forman el triángulo rectángulo.

En el capítulo X se trata de los cuadriláteros y polígonos. Se manifiesta la clasificacion de todas las figuras planas que constan de cuatro lados, se demuestran las propiedades mas esenciales de los paralelógramos, se da una idea general de los polígonos, y se expresan sus denominaciones. En la letra menor se manifiesta que el círculo es un infinitángulo regular, se explica el modo de determinar la relacion del diámetro con la circunferencia, y se indican las aplicaciones que pueden hacerse de ella para la solucion de muchos problemas.

En el capítulo XI se trata de las superficies planas. Se manifiesta la relacion que hay entre las superficies de los rectángulos, y sus bases y alturas: se explica lo que se entiende por unidad superficial; y se demuestra el modo de determinar las superficies de los paralelógramos, de los triángulos, del círculo, y de toda figura plana rectilínea. Se deduce la expresion de la superficie de un trapecio, se explica la determinacion aproximada del area de cualquiera figura plana curvilínea, y se expone un método sencillo para determinar, al poco mas ó menos, el area de la seccion horizontal de un navío por la lumbre del agua. Por último se demuestra, que las superficies de todas las figuras y sólidos semejantes, estan entre sí como los cuadrados de sus dimensiones homólogas; y se indican las aplicaciones que pueden hacerse de este principio interesante. Los que quieran ceñirse únicamente al estudio del Pilotage, pueden pasar este capítulo por alto.

En el capítulo XII se trata de las líneas que se hallan en diferentes planos. Esta doctrina es muy interesante para facilitar la inteligencia de la Cosmografía, y no puede entenderse bien sin algunas nociones de perspectiva, que los Maestros pueden exponer de viva voz, para que los discípulos se impongan en el modo de representar sobre un plano los puntos, líneas y figuras que se hallan en planos diferentes. Es muy suficiente lo que sobre este particular se advierte en el artículo 15 del Tratado de Trigonometría esférica, escrito para la instruccion de los Guardias Marinas, é impreso en Cartagena en 1796. Se tendrá presente el sustituir la expresion de *ojo del observador* á la de *punto de distancia*, como se advierte en el artículo 218 de dicho Tratado.

En el capítulo XIII se trata de los sólidos en general. Se dan las definiciones de los sólidos mas usuales, se explica su formacion, y se demuestran algunas propiedades de la esfera, muy interesantes para facilitar la inteligencia de la Cosmografía.

En el capítulo XIV se trata de las solideces. Se explica lo que se entiende por unidad de solidez, y el modo de reducir de una especie á otra las cantidades de esta clase. Se demuestra el modo de determinar las solideces de los prismas; se establece que las solideces de todos los cuerpos semejantes estan entre sí como los cubos de sus dimensiones homólogas; y se manifiestan con un ejemplo las aplicaciones que pueden hacerse de este principio interesante á la práctica de la Navegacion. Se expone el modo de determinar con aproximacion la solidez de un cuerpo irregular; y se indican las aplicaciones de este método á la determinacion de la solidez de una seccion del navío, comprendida entre la lumbre del agua y un plano horizontal, distante de ella menos de dos pies y medio hácia la parte superior ó hácia la inferior. Pueden pasar enteramente por alto este capítulo los que se dediquen únicamente á la práctica del Pilotage.

El capítulo XV contiene las nociones generales de Trigonometría plana logarítmica. Se definen con precision las líneas trigonométricas, se demuestran sus propiedades mas esenciales, y se explican la disposicion y uso de las tablas, que contienen los logaritmos de sus valores en partes del radio.

En el capítulo XVI se trata de la resolucion de los triángulos rectilíneos rectángulos por medio de los logaritmos. Se tendrá presente que toda la doctrina de este capítulo es muy interesante; y los Maestros deben poner á los discípulos en estado de aplicarla, facilitándoles su inteligencia por medio de los ejemplos.

En el capítulo XVII se enseña la resolucion de los triángulos rectilíneos oblicuángulos, empleando los logaritmos. El primer teorema de este capítulo es el único que tiene alguna aplicacion á la práctica ordinaria del Pilotage; y puede ofrecerse el tener que recurrir á los demas cuando se trate de formar el plano de un puerto ó de una costa. La resolucion del último problema es de poco uso; y su demostracion se puede deducir de la Trigonometría esférica, segun se manifiesta en el artículo 212 del Tratado impreso en Cartagena en 1796, para la instruccion de los Guardias Marinas.

El capítulo XVIII contiene algunas nociones sobre la Geometría práctica. El objeto es exponer las reglas mas precisas para la exacta determinacion de los puntos y líneas oblicuas, perpendiculares y paralelas sobre el papel.

Despues de los preceptos generales se hacen algunas advertencias sobre el buen uso de la regla. Se demuestra el modo de comprobar este instrumento, y las líneas trazadas segun la direccion de su canto; y se da una idea del modo de representar las líneas rectas sobre el terreno por medio de piquetes.

Seguidamente se ponen algunas reflexiones sobre los compases.

Se dan reglas para tirar una recta perpendicular á otra con la mayor precision posible. Se trata de la escuadra, y se demuestra el modo de comprobar dicho instrumento, y las líneas trazadas con él.

Se exponen varios modos de tirar una recta paralela á otra de mucha extension sin emplear la secante. Se manifiestan los principios en que se funda la teoría del instrumento de que suele hacerse uso para tirar paralelas, y se explica el modo de comprobarlo.

Se expone con extension el modo de construir las escalas de partes iguales; y se demuestra la resolucion de los dos problemas á que se reduce su uso.

Se explica el modo de dividir un semicírculo en grados, con diferencia de menos de medio segundo, por los métodos sencillísimos de Mascheroni, cuya demostracion se omite en atencion á exigir varios principios que abultarian mucho este Tratado. Se da una idea de los trasportadores circulares de alidada, de que suele hacerse uso en las operaciones delicadas de levantar planos y construir cartas. Se explica el modo de contar en dichos instrumentos (y en cualesquiera arcos graduados) las subdivisiones de los grados por el artificio de las diagonales y por medio de los nonios.

Se ha omitido expresamente el tratar del *cuartier*, ó *cuadrante de reduccion*, en atencion á que este instrumento interesante merece explicarse separadamente, por el mucho uso que se hace de él en la práctica del Pilotaje.

El capítulo XIX contiene las nociones sobre el modo de levantar un plano. Casi todo lo relativo á esta materia va de letra menor; y se reduce á la solucion de los problemas particulares de que puede hacerse uso para resolver el problema general que constituye el objeto de dicho capítulo.

La operacion del artículo 665 es de mucho uso en la práctica ordinaria del Pilotaje. Se ha puesto en este lugar para que se vea que es un caso particular de un problema muy general; y la cita puesta al fin manifiesta que dicho caso particular puede demostrarse con separacion.

Se termina el capítulo manifestando el modo de formar la escala de un plano que se ha construido sin ella; y se advierte que al fin del tratado del Pilotaje, se reunirá la exposicion de otras atenciones necesarias para levantar los planos con exactitud.

Seria muy conveniente el que los Maestros de dibujo se dedicasen especialmente á ejercitar á los Discípulos en el uso de los instrumentos matemáticos, y en la resolucion de los problemas, que se explican en los dos últimos capítulos de la Geometría. Para que los Discípulos se acostumbren á las aplicaciones, y reconozcan prácticamente su utilidad, convendrá el que desde dos puntos distantes de la Academia observen los ángulos formados por las visuales que se terminan en los objetos mas notables, colocados fuera ó dentro de la habitacion; y que se sitúen los puntos expresados en un plano, segun los métodos que se exponen en el capítulo XIX. Bastará que dichas operaciones se ejecuten al poco mas ó menos, observando los ángulos con un trasportador, ó con el cuadrante de reduccion, colocando dichos instrumentos á ojo en la posicion horizontal.

Sobre las citas hay que advertir, que la abreviatura *Arit.* puesta entre paréntesis y seguida de un número, es una cita al Tratado de Aritmética; y la abreviatura *art.*, colocada en los mismos términos, es una cita á la Geometría. Las citas manifiestan los artículos en que se hallan expuestos los principios que sirven de base á lo que se establece; y es inútil el recurrir á ellos siempre que dichos principios se presentan á la imaginacion. Por esta razon se puede decir, que sin embargo de haberse omitido las citas á algunos principios que se han supuesto muy conocidos, entre las que se han puesto no deja de haber muchas que estan de mas. Pero esta redundancia nada perjudica en un Tratado de Matemática por lo que se acaba de manifestar.

Cuando se pregunte por el fundamento de alguna proposicion, se debe satisfacer enunciando el principio de que se deriva, y demostrándolo si fuese necesario, y no citando los números de los artículos, que no conviene que se aprendan de memoria.

En algunas demostraciones se ha hecho uso de axiomas y corolarios muy sencillos, que no estan expresados á continuacion de los principios de que se derivan, tanto para evitar repeticiones, como para manifestar prácticamente que los principios establecidos son útiles por sí mismos, y por las consecuencias que pueden deducirse de ellos en caso necesario. Los tratados de Geometría resultarian de un volúmen excesivo, y la ciencia mas propia para formar el discurso quedaria reducida á un ejercicio pesado y material de la memoria, si en dichos Tratados se expresasen extensamente todas las proposiciones de que puede hacerse uso.

TRATADO DE GEOMETRIA.

CAPITULO PRIMERO.

NOCIONES GENERALES.

1 *Geometría* es la ciencia de la extension.

2 Todos distinguen en una tabla ó en un ladrillo lo largo, lo ancho y lo grueso. A estas tres dimensiones llaman los Geómetras *longitud*, *latitud*, y *profundidad.* La profundidad suele llamarse *altura* ó *espesor.*

3 *Cuerpo* ó *sólido* ó *geométrico* es todo lo que tiene las tres dimensiones de longitud, latitud y profundidad.

Todas las cosas materiales tienen dichas tres dimensiones; y aunque generalmente se da el nombre de longitud á la mayor de ellas, y el de profundidad á la menor, los Geómetras usan indistintamente de dichas denominaciones.

4 Las caras que terminan los cuerpos se llaman *superficies.* La superficie es una extension que solo tiene las dimensiones de longitud y latitud.

5 Los extremos ó bordes de las superficies se llaman *líneas.* La línea es una extension que solo tiene longitud.

6 A la extremidad ó remate de una línea se da el nombre de *punto.* El punto se considera sin latitud, longitud ni profundidad; y es el principio ó elemento de la extension.

7 Cuando se trata de determinar las losas que se necesitarán para enlosar un salon, únicamente se atiende á la superficie del salon, y se prescinde absolutamente de la profundidad. Cuando se trata del camino que hace la navé en una hora, se atiende únicamente á la longitud ó distancia, sin hacer la menor atencion á la latitud ni á la profundidad. Cuando se dice que en la cara superior de un ladrillo (*fig. 1*) *abcd* solo hay un punto *e* que diste igualmente de las cuatro esquinas, *a*, *b*, *c*, *d*, á lo que llamamos punto, no se le considera extension alguna. Esto basta para que se conciba sin dificultad que la superficie, la línea y el punto, tales cuales se han definido, pueden ser el objeto de la Geometría.

8 Las líneas que se señalan con tinta tienen mucha anchura ó latitud, y las líneas geométricas se consideran en la misma division de lo negro de la línea material con lo blan-

co del papel; y mas comunmente se consideran las líneas geométricas en la mediania de las materiales. Tambien se pueden representar las líneas con un hilo, en cuyo centro se imagina la verdadera línea geométrica de que se trata. Los puntos que se señalan con tinta tienen mucha longitud y latitud, y los puntos geométricos se consideran en el mismo centro de dichos puntos materiales.

9 Para designar los puntos se ponen letras en sus inmediaciones, y al tiempo de indicarlos con el dedo ó puntero, se deben señalar los verdaderos puntos, y no las letras con que se denominan.

10 Dos ó mas cantidades geométricas se dice que son *totalmente iguales* cuando tienen absolutamente el mismo tamaño y figura.

11 Se prescinde de la posicion de las partes iguales, con tal que, sin alterar su figura, se puedan colocar ambas cosas en la misma posicion: y tambien se prescinde de las propiedades fisicas, como el color, la dureza &c.

12 Dos ó mas cantidades geométricas se dice que son *semejantes* cuando tienen absolutamente la misma figura, aunque difieran en el tamaño.

13 Se tendrá presente lo dicho (*art.* 11); y tambien conviene advertir que dos cosas pueden parecer perfectamente semejantes y aun iguales estando muy distantes de serlo en la realidad.

Tales son los dibujos y estampas á que se da el nombre de *vistas* que parecen semejantes á los objetos que representan, cuando se ven de un modo determinado. La semejanza aparente desaparece luego que los dos objetos se comparan viéndolos por distintos lados.

14 Dos ó mas cantidades geométricas se dice que son *iguales* ó *simplemente iguales* cuando tienen el mismo tamaño, aunque sea su figura muy diversa.

V. g. los huecos de un vaso y de una copa capaces de contener la misma cantidad de agua, se dice que son iguales.

15 Se pueden llamar *iguales y semejantes* dos ó mas cantidades que son perfectamente iguales (*art.* 10 *y* 12).

16 Si dos líneas ó dos superficies pueden colocarse de modo que todos los puntos de la una coincidan con los de

la otra, dichas líneas ó superficies serán totalmente iguales. Tambien, si se supone que el lugar ocupado por un cuerpo queda vacío, y en dicho lugar se puede acomodar otro cuerpo que lo llene exactamente, sin sobrarle ni faltarle nada, los dos sólidos de que se trata serán totalmente iguales.

17 Cuando se prueba la igualdad de dos cosas imaginándolas colocadas como se acaba de decir, dicen los Geómetras que se prueba dicha igualdad por *superposicion.*

18 Si dos líneas, superficies ó sólidos son totalmente iguales, es evidente que se podrán sobreponer en los términos que se ha explicado en el artículo 16.

19 Es evidente que dos ó mas cosas semejantes á una tercera serán semejantes entre sí.

20 Para la inteligencia de muchas expresiones conviene dar alguna idea de lo que entienden los Geómetras por *infinito.*

Una cantidad se llama *finita* cuando se puede expresar en números su relacion con las cantidades que son el objeto de nuestros sentidos; *infinita* cuando es tan grande, que por muchas que sean las cifras que se empleen, no se puede expresar su relacion con las cantidades finitas; é *infinitesimal* ó *infinitamente pequeña* cuando no hay número con que expresar la relacion que tiene con las cantidades finitas por su mucha pequeñez.

21 V. g. la extension de una pulgada se puede dividir en dos partes ó mitades. Cada una de estas mitades se puede imaginar dividida en otras dos, y asi sucesivamente sin fin, de suerte que no hay número, por grande que sea, que pueda expresar el número de partes en que se puede imaginar dividida dicha extension de una pulgada. Se dirá pues que dicho número de partes es infinito.

Al paso que se hagan mas divisiones, mas pequeñas serán las partes, de suerte que si imaginamos dicha extension dividida en un infinito número de partes, estas serán *infinitamente pequeñas.*

22 Se tendrá presente que las expresiones *grande* y *pequeño* son puramente relativas, de suerte que una misma cosa se puede llamar grande y pequeña, segun sea mucho menor ó mucho mayor que ella la cantidad con que se compara.

23 Conviene distinguir una cantidad infinitamente pequeña de la *nada*: esto es, de un *nada* absoluto.

Una cantidad infinitamente pequeña resulta de la diminucion progresiva de una cantidad finita, y se puede decir que es *algo*; pero un algo tan pequeño, que se puede y debe tratar como *nada* respecto de las cantidades finitas.

24 Por esta razon una cantidad infinitesimal se puede duplar, triplar &c., multiplicándola por dos, por tres &c.; y así una cantidad infinitamente pequeña puede ser múltipla de otra; pero por mas veces que se repita, siempre es infinitamente pequeña, y para que pase á formar una cantidad finita, es menester repetirla un número infinito de veces.

CAPITULO II.

DE LAS LINEAS.

25 *Línea recta* es la que está colocada entre dos puntos, sin desviarse hácia un lado ni otro.

V. g. la *ab* (*fig.* 2) situada entre los puntos *a* y *b*, de modo que ni se desvía hácia *m* ni hácia *n*, ni hácia la parte anterior del papel, ni hácia la posterior.

26 *Corolario.* La línea recta es la que determina la menor distancia que hay de un punto á otro.

Esto es, que por cualquier camino que se vaya de *a* á *b*, se andará mas que si camina siguiendo siempre la línea recta.

27 Si un hilo muy delgado y flexible *ab* (*fig.* 3) se sujeta por los extremos *a* y *b*, y se pone tirante (sin que actúe sobre él potencia alguna extraña en los puntos intermedios *m*, *n* &c.) sus puntos centrales formarán una línea recta.

Se comprende que debe suceder así, puesto que no habiendo potencia que tire á desviarlo, sus puntos deben colocarse exactamente entre las dos potencias *a* y *b*.

28 Para abreviar se dice muchas veces *una recta*, en vez de decir *una línea recta*.

29 *Corolario.* Dos puntos cualesquiera determinan la po-

sicion de una recta, esto es, que solo se puede tirar una línea recta entre dos puntos.

Haciendo girar el hilo (*art.* 27) sobre sus extremos fijos *a* y *b* (*fig.* 3) como quien lo tuerce (pero por ambos extremos hácia el mismo lado) por mas vueltas que dé, no variará la posicion de ninguno de sus puntos centrales. De este modo se ve prácticamente la verdad del corolario anterior.

30 *Corolario.* Dos rectas que se encuentran solo pueden tener un punto comun. En efecto, si tuviesen dos puntos comunes, se confundirian una con otra (*art.* 29).

31 *Corolario.* Si dos rectas de igual longitud se colocan de suerte que concurran en uno de sus extremos y en otro punto, concurrirán tambien en el otro extremo.

En efecto, si las rectas *ab*, *AB* (*fig.* 4) son de igual longitud, y se coloca el extremo *a* sobre *A*, de suerte que otro punto de la *ab* caiga tambien sobre la *AB*, toda la recta *ab* caerá sobre la *AB* (*art.* 29); y si el extremo *b* no cayese sobre *B*, caeria á su derecha *m*, ó á su izquierda *n*. En el primer caso la *ab* seria mayor que la *AB* en la porcion *Bm*, y en el segundo seria menor en la porcion *Bn*, lo que es contra lo supuesto. Luego (*Arit.* 37) el extremo *b* cae exactamente sobre *B*.

32 *Corolario.* Si un cuerpo, superficie ó línea giran sobre dos puntos fijos, todos los puntos que no esten en línea recta con los fijos, mudarán contínuamente de lugar.

Para convencerse de esto basta observar, que por delgado que sea un hilo dispuesto como se dijo (*art.* 27 y 29), todos sus puntos exteriores van mudando de posicion al paso que el hilo gira.

33 De aqui resulta, que los goznes ó bisagras sobre que gira un cuerpo deben estar exactamente en línea recta. Sin esta circunstancia no podrá verificarse el movimiento, á menos que dichos goznes ó bisagras no tengan mucho juego.

34 En el caso de girar una línea, superficie ó sólido sobre dos puntos fijos, ó que se consideran como fijos, los puntos que no mudan de posicion durante dicho movimiento giratorio forman una recta, que se denomina *eje* ó *eje de rotacion.*

35 Por *direccion* se entiende la línea recta: esto es, que se dice que un cuerpo se mueve v. g. en la direccion *Am*

(*fig.* 4) cuando camina sin separarse de la línea recta *AnBm*: y se dice que los puntos *m B* &c. estan en la direccion *Am* cuando estan en la línea recta que va de *A* á *m*, ó en su continuacion.

36 *Prolongar una línea* es hacerla mas larga: esto es, continuarla; y es evidente que toda línea recta se puede prolongar sin límite.

37 Cuando se dice que se tire una línea recta *indefinida*, ó que se prolongue una recta *indefinidamente*, se entiende que se prolongue lo que se quiera, sin determinar cuánto. Se supone que á lo menos se le ha de dar la extension necesaria para poder ejecutar con ella lo que se quiere; pero no importa que se alargue mucho mas.

38 *Corolario.* Se comprende que cada porcion de la línea recta (por pequeña que sea) es semejante al todo de ella, ó de otra cualquiera: esto es, que todas las líneas rectas son semejantes entre sí.

Esta propiedad pertenece exclusivamente á la línea recta.

39 *Corolario.* Si dos porciones de una recta, ó de dos rectas cualesquiera, tienen la misma extension, serán iguales y semejantes: esto es, totalmente iguales.

Esto mismo se deduce de lo establecido anteriormente (*art.* 31 y 16).

40 Línea *angulosa* es la que sin ser recta se puede dividir toda ella en dos ó mas porciones que lo sean.

V. g. la *adb* (*fig.* 5) que se compone de dos rectas *ad db*; y la *aueb* (*fig.* 6) que se compone de tres rectas *au*, *ue*, *eb*.

41 Línea *curva* es la que por mas que se divida en varias partes, ninguna de ellas es línea recta, ó lo que es lo mismo, la que se puede considerar descrita por el movimiento de un punto, que continuamente muda de direccion.

V. g. las *acb*, *amb* (*fig.* 7).

42 Línea *mixta* es la que se compone de dos ó mas porciones entre las cuales hay á lo menos una recta y otra curva.

Tal es la *abcd* (*fig.* 8) que se compone de la recta *ab* y la curva *bd*.

43 *Corolario.* Entre dos puntos *a* y *b* (*fig.* 7) se pueden tirar un sinnúmero de líneas angulosas, curvas y mixtas; y cualquiera de ellas será mayor que la recta *ab*.

44 *Superficie plana* ó *plano* es una superficie sobre la cual se puede trazar una línea recta en cualquier sentido.

La superficie plana ni tiene curvidad, ni hoyos, ni eminencias.

Si un pedazo de papel, cortado de modo que solo tenga tres puntas ó esquinas, se pone tirante sujetándolo por dichas puntas, toma la posicion de un plano.

45 En adelante, siempre que no se advierta otra cosa, se supondrá que todas las líneas y puntos de que se habla estan en un mismo plano.

46 Si se dobla el papel de la estampa I de suerte que *e* y *n* (*fig.* 4) caigan en el doblez, la línea *Anm*, que era recta cuando el papel estaba extendido, se convertirá en linea angulosa, compuesta de las rectas *An*, *nm*.

Si el papel se rolla, de suerte que no forme dobleces ó esquinas, la *Anm* se convertirá en línea curva.

47 Se dice que dos líneas *se encuentran en un punto* cuando dicho punto es comun á ambas; y se dice que *se confunden* cuando hay una porcion finita de la una comun á la otra.

48 Cuando la extremidad *e* (*fig.* 9) de una línea *ec* que encuentra á otra *ab* es el punto comun á las dos, se dice que la *ec sale* de la *ab*, ó que *se termina* en ella.

49 Cuando despues de haberse encontrado dos líneas en un punto caen sus dos porciones á distintos lados (esto es, cuando se cruzan) se dice que se cortan.

V. g. las *ab* y *cm* (*fig.* 10) que se cortan en *e*.

50 Cuando una línea corta á otra se dice que es su *secante*.

V. g. las *ab* (*fig.* 10) es secante de *cm*, y la *cm* es secante de *ab*.

51 A una porcion *mtn* (*fig.* 11) de una línea curva se se da el nombre de *arco*.

52 *Cuerda de un arco* es la recta cuyos dos extremos coinciden con los del arco.

V. g. la *ces* (*fig.* 11) es cuerda del arco *cts*, y la *mn* es cuerda de *mtn*.

La cuerda se llama tambien *subtensa*, y se dice que la cuerda *subtende* al arco, ó que el arco está *subtendido* por la cuerda.

53 *Corolario.* Toda cuerda es menor que su arco (*art.* 43); ó lo que es lo mismo, todo arco es mayor que su cuerda.

54 Al paso que una cuerda es menor, se acerca mas al arco, como se ve en la figura 11. Por esta razon la cuerda de un arco infinitamente pequeño se puede considerar confundida con dicho arco.

55 *Corolario.* Toda línea curva se puede imaginar que es una línea angulosa, compuesta de un infinito número de rectas infinitesimales.

56 A la prolongacion de una cuerda infinitamente pequeña se da el nombre de *tangente* de la curva.

57 *Corolario.* Luego la tangente solo toca al arco en un punto: esto es, en dos puntos cuya distancia es infinitesimal.

58 Al punto en que la tangente toca á la curva se llama *punto de contacto.*

59 *Corolario.* Si la curva se imagina engendrada por un punto que va caminando (*art.* 41), la tangente manifestará la verdadera direccion en que se movia el punto generador al hallarse en el punto de contacto.

60 *Corolario.* La verdadera direccion de una curva en cada punto es la de su tangente en dicho punto.

61 *Corolario.* Dos rectas no pueden ser tangentes entre sí, porque en tal caso se confundirian en una sola recta (*art.* 35).

62 *Corolario.* A un punto de una curva solo se puede tirar una tangente.

63 *Corolario.* La inclinacion con que se encuentran ó se cruzan dos curvas es la misma que tienen las tangentes que salen del punto comun á ambos.

64 *Corolario.* La verdadera tangente está toda ella en el plano de la curva.

65 El arco visto desde la parte hácia que queda la tangente se llama *convexo*; y se llama *cóncavo* cuando se considera vista desde la parte opuesta.

Asi *mtn* (*fig.* 11) es convexo visto desde *u*, y cóncavo visto desde *e*.

CAPITULO III.

DE LAS FIGURAS EN GENERAL.

66 *Figura plana* es el espacio cerrado por una ó mas líneas, que estan en un mismo plano.

67 *Perimetro* de la figura es toda la línea ó conjunto de líneas que cierran el espacio de la figura: esto es, su contorno.

68 Es evidente que para que haya figura es menester que, suponiendo que un punto recorre el perímetro, vuelva al mismo punto de donde salió, sin desandar lo andado.

69 *Corolario.* Una curva puede cerrar espacio.

V. g. la *behmb* (*fig.* 23).

70 La figura se llama *rectilínea* cuando está terminada por líneas rectas: esto es, cuando su perímetro es una línea angulosa.

V. g. la *abc* (*fig.* 19).

71 La figura se llama *curvilínea* cuando está terminada por una ó mas curvas: esto es, cuando en su perímetro no hay ninguna línea recta.

V. g. *behmb* (*fig.* 23).

72 La figura se llama *mixtilínea* cuando su perímetro es una línea mixta.

V. g. la *abc* (*fig.* 12) terminada por el arco *abc* y por su cuerda *ac*.

73 La figura mixtilínea formada por el arco y su cuerda se llama *segmento* (*fig.* 12).

74 De lo establecido (*art.* 68 *y* 30) se sigue, que para formar una figura rectilínea se necesitan á lo menos tres líneas rectas.

V. g. *ab*, *bc*, *ca* (*fig.* 19) que forman la figura *abca*.

75 *Triángulo* es una figura terminada por tres líneas rectas (*fig.* 19).

76 Se llama *lado* de la figura rectilínea á cada una de las rectas que forman su perímetro, y por esta razon se dice que el triángulo es una figura rectilínea de tres lados.

77 *Corolario.* Se sigue de lo dicho (*art.* 74) que el triángulo es la figura rectilínea que consta de menos lados.

78 *Corolario.* El perímetro de una figura es igual á la suma de todos sus lados.

79 *Corolario.* Dos lados cualesquiera de un triángulo, v. g. *ab*, *bc* (*fig.* 19), forman una suma mayor que el tercero *ac*.

En efecto, los lados *ab*, *bc*, forman una línea angulosa, comprendida entre los mismos puntos que la *ac* que es recta, y por consiguiente serán mayores que ella (*art.* 43).

CAPITULO IV.

DEL ANGULO Y DE LA CIRCUNFERENCIA.

80 *Angulo* es la abertura ó inclinacion de dos líneas *ae*, *ze* (*fig.* 13) que se terminan ó se suponen terminadas en un mismo punto *e*.

81 Se llama *vértice* del ángulo al punto *e* en que se terminan, ó se suponen terminadas, las líneas que lo forman.

82 Se puede decir que el ángulo (visto desde su parte exterior *e*) es la punta de una superficie.

83 Se llaman *lados del ángulo* las líneas que lo forman.

V. g. *ea*, *ez* (*fig.* 13) son los lados del ángulo *e*.

84 El ángulo se llama *rectilíneo* cuando sus lados son líneas rectas: *curvilíneo* cuando sus lados son líneas curvas; y *mixtilíneo* cuando el uno de sus lados es línea recta, y el otro línea curva.

Así (*fig.* 13) *aez* es rectilíneo; (*fig.* 15) *bgf* es curvilíneo; y *lgf* mixtilíneo (*fig.* 16).

85 Cuando no se advierta otra cosa, se entiende que se habla del ángulo rectilíneo; y mas adelante se tratará de otra especie de ángulos.

86 Cuando un ángulo está solo, para designarlo basta nombrar la letra que está inmediata á su vértice, hácia su parte exterior, ó hácia la interior.

Cuando en un punto concurren muchas líneas, se suelen designar los ángulos con tres letras, colocando la de su vértice en el medio, y las de sus lados en los extremos.

A los maestros toca el aclarar esto con ejemplos.

87 Se dice que un ángulo es muy pequeño cuando es muy corta la abertura de sus lados: esto es, cuando su punta es muy aguda.

Tal es el ángulo *e* (*fig.* 13).

88 Se dice que un ángulo es muy grande cuando es mucha la abertura de sus lados; esto es, cuando su punta es poco aguda.

Tal es el ángulo *u* (*fig.* 14).

89 *Corolario.* El menor de todos los ángulos será el que se considera formado por dos rectas que casi se confunden en una sola, cayendo la una sobre la otra; y el mayor será el que se considera formado por dos rectas, dispuestas de suerte que casi forman una sola, siendo la una prolongacion de la otra.

90 *Corolario.* La magnitud de un ángulo ninguna dependencia tiene con la longitud de sus lados.

En efecto, por mas que se prolonguen las *ea*, *ez* (*fig.* 13), el ángulo en *e* (esto es, la agudeza de la punta *e*) no variará.

91 *Corolario.* Si una recta *ph* (*fig.* 17) está entre las *pd*, *pt*, que concurren en el propio punto *p*, el ángulo formado por las dos líneas extremas *pd*, *pt* será igual á la suma de los formados por cada una de las extremas con la intermedia *ph*: esto es, que será $dpt = dph + hpt$.

92 *Corolario.* De esta consideracion resulta, que el ángulo formado por una línea intermedia con cualquiera de las dos extremas, es menor que el que estas dos líneas forman entre sí (*Arit.* 24).

Se tendrá presente que se supone que las tres líneas estan en un mismo plano (*art.* 45).

93 *Corolario.* Si los ángulos *o* y *s* (*fig.* 17) son iguales, cada uno de ellos será mitad del total *dpt*, é inversamente, *dpt* será duplo de cualquiera de ellos.

94 *Corolario.* Si del ángulo total *dpt* se resta el ángulo *o*, resultará el ángulo *s* (*Arit.* 92).

95 *Corolario.* De estas consideraciones y otras semejantes, que pueden hacerse sobre tres ó mas ángulos, se deduce que los ángulos se pueden sumar, restar, multiplicar, partir &c.: esto es, que con los ángulos se pueden hacer las mismas operaciones que con cualesquiera otras cantidades.

96 *Teorema.* Si dos ángulos son iguales, se podrán sobreponer el uno al otro, de suerte que sus lados se ajusten hasta cierto punto.

Demostracion. Sean *bac* y *mnu* (*fig.* 18) los ángulos iguales. Supongamos que se pone *n* sobre *a* de suerte que el lado *mn* caiga sobre *ab* y *nu* á la derecha de *ab*. Será preciso que suceda una de tres cosas: esto es, que *nu* caerá, ó á la izquierda de *ac* como *as*, ó á la derecha como *at*, ó sobre *ac*. En el primer caso resultaria *bas* (que se supone que es el mismo *mnu*) menor que *bac* (*art.* 92). En el segundo caso resultaria *bat* (que se supone que es el mismo *mnu*) mayor que *bac*. Es así que uno y otro es contra lo supuesto: luego caerá *nu* sobre *ac*. Luego los lados *nm*, *nu* se ajustarán con los *ab*, *ac* hasta donde alcancen: de suerte que los extremos no coincidirán si no son iguales dichos lados.

97 *Lema.* Si dos triángulos tienen un ángulo del uno igual á un ángulo del otro, y los lados que forman dicho ángulo del uno iguales á los que forman su igual en el otro, serán totalmente iguales.

Demostracion. Sean *bac* y *BAC* (*fig.* 19) los triángulos propuestos; y en ellos $a = A$, $ab = AB$, y $ac = AC$. Por el teorema anterior se podrá sobreponer *A* sobre *a*, de suerte que los lados *AB*, *AC* caigan sobre *ab* y *ac*; y por ser dichos lados iguales; caerán tambien los extremos *B* sobre *b*, y *C* sobre *c* (*art.* 31). Luego (*art.* 29) la *BC* caerá sobre la *bc* exactamente, y por lo tanto los triángulos *bac*, *BAC* serán totalmente iguales (*art.* 16). Esto es, que serán iguales los lados *BC*, *bc*, opuestos á los ángulos iguales; como tambien los ángulos opuestos á los lados iguales $b = B$, y $c = C$.

98 Si una recta *cb* (*fig.* 21) da una vuelta entera sobre

el extremo *c* inmóvil (sin salir del plano del papel), todos sus puntos *d*, *b* &c. describirán unas curvas terminadas en sí mismas *behmb*; *dtpqd* &c. que llaman *circunferencias*.

99 La figura terminada por la circunferencia se llama *circulo*, y á veces se suele dar este mismo nombre á la circunferencia.

100 El punto *c*, al rededor del cual gira la línea que describe la circunferencia, se llama *centro del circulo*.

101 Las circunferencias *behmb*, *dtpqd*, que tienen un mismo centro *c*, se llaman *concéntricas* (*fig.* 21).

102 Las circunferencias que tienen diferentes centros se llaman *excéntricas*: tales son (*fig.* 22) *BEHMB*, *behmb*, cuyos centros son *C* y *c*.

103 La recta comprendida entre el centro y la circunferencia del círculo se llama *radio*.

Asi *cb* (*fig.* 21) es radio del círculo *behm*, y *cd* es radio del círculo *dlpqd*.

104 *Corolario.* De la descripcion del círculo (*art.* 98) se sigue que todos los radios de un mismo círculo son iguales.

105 El radio es la línea recta cuya rotacion ha producido la circunferencia (*art.* 98); y por esto se dirá en adelante v. g. descríbase una circunferencia con tal radio y tal centro.

106 Para describir la circunferencia se hace uso de unos instrumentos llamados *compases*, cuyo manejo deben explicar los Maestros.

Las dos puntas del compas determinan los extremos del radio; y por esta razon se dirá en adelante v. g. descríbase una circunferencia, ó un arco de círculo, desde tal punto con tal abertura de compas.

107 *Corolarios.* Todo punto *a* (*fig.* 23), colocado dentro del círculo, se hallará á una distancia del centro *C* menor que el radio *CE*; y todo punto *s*, colocado fuera del círculo, se hallará á una distancia del centro *C* mayor que el radio *CE*.

108 *Corolarios.* No son menos evidentes las proposiciones inversas: esto es, que todo punto colocado en el plano del círculo se hallará dentro ó fuera de la circunferencia, segun que su distancia al centro sea menor ó mayor que el radio.

109 *Corolario.* Los círculos descritos con iguales radios ó aberturas de compas serán totalmente iguales.

Si se quiere demostrar esto con extension, imagínese que los dos círculos se ponen uno sobre otro en un mismo plano, de suerte que sus centros coincidan; y no hay duda en que sus circunferencias se confundirán. En efecto, si dichos círculos (*fig.* 23) son *behmb* y *BEHMB*, y se imagina *c* sobre *C*, si algun punto de la primera circunferencia cayese dentro de la segunda, v. g. en *a*, se seguiria que su radio *Ca* seria menor que *CE*; y si cayese fuera como en *s*, se seguiria que el radio *Cs* seria mayor que *CE*.

110 Se puede definir el círculo diciendo, que es una figura plana terminada por una línea curva, cuyos puntos distan igualmente de un punto colocado en su mismo plano. Este es el centro.

111 La circunferencia es el perímetro del círculo; y tambien suele llamarse *periferia.*

112 Cuando se dice simplemente arco (sin expresar de qué curva), se entiende que se trata de un arco de círculo; y cuando se dice *un arco descrito desde c* (*fig.* 24), se entiende un arco de círculo cuyo centro es el punto *c*.

113 *Teorema.* Los arcos de igual extension pertenecientes á un mismo círculo ó á círculos iguales son totalmente iguales.

Demostracion. Imagínese un círculo puesto sobre otro, como se dijo (*art.* 109), de suerte que el principio de un arco coincida con el principio de su igual, y no hay duda en que coincidirán los extremos de dichos arcos.

Se demuestra esta con extension por el mismo estilo que la proposicion del artículo citado y la del artículo 31 en la figura 24.

114 *Lema.* Si dos triángulos tienen los tres lados del uno iguales á los del otro, dichos triangulos serán totalmente iguales.

Demostracion. Sean los triángulos *ABE*, *abe* (*fig.* 20), en los cuales se suponen iguales los lados designados con las mismas letras. Desde *E* como centro, y con el radio *EB*, descríbase el arco *HT*; y desde *A* como centro descríbase el arco *DM* con el radio *AB*. En el otro triángulo descríbanse tambien los arcos *ht* y *dm* con los radios *eb* y *ab*. Hecho esto, imagínese la *AE* puesta sobre la *ac*, de suerte que se confundan sus extremos, en lo que no hay dificultad (*art.* 31). Es evidente que el radio *AM* caerá sobre su igual *am* (*art.* 31), y por consiguiente el arco *MD* caerá sobre *md* (*art.* 109). Por semejante razon caerá *TH* sobre *th*. Luego el punto *B* (comun á los arcos *MD* y *TH*) caerá sobre *b* (comun á los arcos *md* y *th*): esto es, que los triángulos se ajustarán exactamente (*art.* 29); y por lo tanto serán totalmente iguales (*art.* 16).

115 En el círculo toda cuerda *su* (*fig.* 25) subtende dos arcos *seu*, *smu*; y cada uno de ellos es igual á lo que le falta al otro para completar la circunferencia. Cuando no se advierta otra cosa, se entiende que se habla del arcô menor.

116 *Teorema.* En un mismo círculo, ó en círculos iguales, á iguales cuerdas corresponden iguales arcos.

Demostracion. Si las cuerdas *ab* y *em* (*fig.* 24) son iguales, los triángulos *acb*, *ecm* serán totalmente iguales (*art.* 104 *y* 114); y por consiguiente podrán sobreponerse de suerte que *e* caiga sobre *a* y *m* sobre *b* (*art.* 18). Es evidente que en tal caso caerá todo el arco *esm* sobre *aub*, puesto que si algun punto del primero cayese hácia la parte exterior ó interior del segundo, resultaria que el radio correspondiente á dicho punto seria mayor ó menor que el radio del arco *aub*; lo que no puede ser (*art.* 104 *y* 109). Luego *esm* se ajusta exactamente con *aub*, y por lo tanto dichos arcos serán totalmente iguales.

117 *Teorema.* En un mismo círculo, ó en círculos iguales, á iguales arcos corresponden iguales cuerdas.

Demostracion. Si los arcos *esm*, *aub* (*fig.* 24) son iguales poniendo el primero sobre el segundo, se ajustarán sus extremos (*art.* 113 *y* 18): y por consiguiente se ajustarán las cuerdas (*art.* 29). Luego dichas cuerdas *em*, *ab* serán iguales.

118 Se llama *diámetro* de un círculo la cuerda que pasa por su centro.

V. g. *bh* (*fig.* 21) es diámetro del círculo *behmb*.

119 *Corolario.* Todos los diámetros de un mismo círculo, ó de círculos iguales, serán iguales; porque se componen de dos radios (*art.* 104) v. g. (*fig.* 21) *cb*, *ch*.

120 *Corolario.* El diámetro de un círculo es duplo del radio: ó lo que es lo mismo, el radio es mitad del diámetro.

121 *Teorema.* El diámetro es la mayor cuerda: esto es, la mayor línea recta que se puede tirar dentro del círculo.

Demostracion. Sea *su* (*fig.* 25) una cuerda cualquiera; y tirando á sus extremos los radios *cs*, *cu*, resulta la cuerda *su* menor que *sc*+*cu* (*art.* 79). Es así que la suma de los radios *sc*+*cu* es igual al diámetro *bh* (*art.* 120): luego cualquiera cuerda es menor que el diámetro.

122 *Teorema.* El diámetro divide al círculo y á la circunferencia en dos partes totalmente iguales.

Demostracion. Imagínese la parte *adb* (*fig.* 26) doblada hácia abajo, de suerte que el doblez sea el mismo diámetro *acb*; y resultará que dicha porcion *adb* se ajustará exactamente con la *aub*. Luego dichas porciones son totalmente iguales.

Si se quiere demostrar con extension que *adb* cae exactamente sobre *aub*, bastará advertir que si cayese hácia adentro, como *aeb*, resultaria el radio *ce* menor que *cu*; y si cayese hácia afuera, como *apb*, resultaria el radio *cp* mayor que *cu*; lo que no puede ser (*art.* 104).

123 *Corolario.* De las dos porciones desiguales en que una cuerda divide á la circunferencia y al círculo, la mayor será aquella en que se halla el centro.

124 Se da el nombre de *semicircunferencia* á la mitad de la circunferencia; y el de *semicírculo* á la mitad del círculo.

125 A la mitad de la semicircunferencia, ó cuarta parte de la circunferencia, se da el nombre de *cuadrante*; y á la mitad del semicírculo, ó cuarta parte del círculo, se da el nombre de *cuarto de círculo*.

126 Se llama *sector* la porcion de círculo comprendido

entre dos radios; y *corona* la porcion de círculo comprendida entre dos circunferencias concéntricas que estan en un mismo plano.

Véanse las figuras 24 y 21.

127 *Hipótesis.* Toda circunferencia se imagina dividida en 360 partes iguales, que se llaman *grados.* El grado se considera dividido en 60 partes iguales, que se llaman *minutos*; y asi sucesivamente, como se dijo (*Arit.* 66).

128 *Corolario.* Cada grado será $\frac{1}{360}$ de su correspondiente circunferencia; y cada minuto $\frac{1}{21600}$ de la misma.

129 *Corolario.* Los grados y minutos serán tanto mayores ó menores, cuanto mayores ó menores sean las circunferencias á que pertenecen: esto es, que en general, las extensiones absolutas de los arcos de igual número de grados, estarán entre sí en razon directa de las circunferencias á que pertenecen.

130 La semicircunferencia valdrá 180°; el cuadrante 90°, y su mitad (que es el $\frac{1}{8}$ de la circunferencia) valdrá 45°.

131 *Teorema.* Si desde el centro de varias circunferencias concéntricas se imaginan 360 rectas que formen entre sí 360 ángulos iguales, los arcos de todas las circunferencias comprendidos entre cada dos lados de dichos ángulos, valdrán un grado.

Demostracion. Por ser iguales los ángulos; sobreponiéndolos como se dijo (*art.* 96), se ajustarán, y por consiguiente coincidirán los extremos de los arcos correspondientes á cada circunferencia (*art.* 31). Luego los 360 arcos de cada circunferencia, comprendidos entre los lados de los ángulos, serán iguales entre sí (*art.* 116); y por lo tanto (*art.* 128) cada uno de ellos valdrá un grado.

132 *Corolario.* Luego todo ángulo, que teniendo su vértice en el centro de cualquiera circunferencia, comprenda entre sus lados un arco de *m* grados de dicha circunferencia, contendrá *m* veces al ángulo que abrace entre sus lados el

arco de un grado de cualquiera circunferencia descrita desde su vértice; y lo mismo se verifica con los minutos, segundos &c.

133 *Corolario.* De lo que se acaba de decir y de lo dicho (*Arit.* 3 *y* 4) se sigue que los verdaderos valores de los ángulos se pueden expresar por los grados del arco de cualquiera circunferencia descrita desde su vértice que interceptan ó comprenden sus lados.

134 *Corolario.* Medir un ángulo será contar el número de grados y minutos del arco descrito desde su vértice y comprendido entre sus lados.

135 *Angulo recto* es el que tiene por medida el cuadrante ó arco de 90°.

136 *Angulo agudo* es el que vale menos de 90°.

137 *Angulo obtuso* es el que vale mas de 90°.

138 En general se llaman *ángulos oblicuos* todos los que valen mas ó menos de 90° : esto es, todos los que no son rectos.

139 *Línea oblicua* es la que forma con otra uno ó dos ángulos oblicuos.

140 *Corolario.* Todos los ángulos rectos son iguales, puesto que tienen el mismo valor.

141 *Teorema.* La suma de todos los ángulos sucesivos formados alrededor de un punto, de suerte que el último tenga un lado comun con el primero, valdrá 360° justos.

Demostracion. Es evidente (*fig.* 27) que $acb+bcd+dce+ecm+mcn+nca$ valen 360 grados, puesto que la suma de sus medidas $ab+bd$ &c. es toda la circunferencia.

142 *Corolario.* Se podrá decir que la suma de todos los ángulos sucesivos formados alrededor de un punto es igual á cuatro rectos (*art.* 135).

143 *Corolario.* La suma de todos los ángulos sucesivos formados hácia un lado de una recta ae (*fig.* 27) vale 180°, ó dos rectos; puesto que la suma de sus medidas es la semicircunferencia $abde$.

144 *Suplemento* de un arco ó ángulo es lo que le falta para valer 180°, ó dos rectos.

V. g. (*fig.* 9) *aec* es suplemento de *ceb*.

145 *Corolario.* Si el ángulo *A* es suplemento del ángulo *B*, el ángulo *B* será suplemento de *A*.

146 *Corolario.* Si dos ángulos *A* y *B* son suplementos el uno del otro, ó serán los dos rectos, ó el uno será agudo y el otro obtuso.

147 Si una recta *ec* (*fig.* 9) sale de otra *ab*, los dos ángulos que forman con ella, *aec*, *ceb*, se llaman ángulos *contiguos.*

148 *Corolario.* Los ángulos contiguos son suplementos uno de otro, y juntos valen 180°, ó dos rectos.

149 *Corolario.* El menor ángulo posible es el de cero grados; y el mayor posible es el de 180° (*art.* 89).

150 *Corolario.* El suplemento de un ángulo se halla restando su valor de 180°.

151 Se llama *complemento* de un arco ó ángulo á su diferencia con el cuadrante ó ángulo recto, por defecto ó por exceso.

V. g. Si *amc* (*fig.* 28) es un cuadrante, el complemento de *acm* (por defecto) será *mce*; y el complemento de *acn* (por exceso) será *ecn*.

152 *Corolario.* El complemento de un ángulo agudo se halla restando su valor de 90°.

153 *Corolario.* Si el ángulo agudo *A* es complemento del agudo *B*, el ángulo *B* será complemento de *A*.

154 *Corolario.* Si dado un ángulo obtuso se pide su complemento, se hallará este restándole 90°; y si dado un complemento por exceso se pide el ángulo obtuso á que corresponde, se hallará este sumándole 90°.

155 El complemento por exceso se halla fácilmente de memoria como sigue:

Si hay 9 en las decenas de grado, basta suprimirlo para obtener el complemento.

Si no hay 9 en las decenas de grado, se añade una unidad á las decenas, y se omiten las centenas.

Ejemplo 1.° Si se pide el complemento de 98°......... 22'.........13'', con solo quitar el 9 de las decenas se halla que 8°........ 22' ....13'' es el complemento por exceso.

Ejemplo 2.° Si se pide el complemento de 103°.........15'..........20'', agregando una unidad á las decenas (que son cero), y suprimiendo las centenas, se halla que 13°........ 15' ....20'' es el complemento.

Ejemplo 3.° El complemento de 147°.........38'......... 26'' es 57°........ 38'........ 26''.

156 Conociendo el complemento por exceso, es muy fácil el hallar el valor del ángulo de memoria como sigue.

Si no hay decenas en el complemento por exceso, basta poner el 9 en el lugar de las decenas para obtener el ángulo.

Si hay decenas en el complemento por exceso, se disminuyen estas de una unidad, y se pone la unidad en el lugar de las centenas para obtener el ángulo.

Ejemplo 1.° Si el complemento por exceso es 8°........ 22′ .... 13″, será el ángulo obtuso 98°...... 22′ .... 13″.

Ejemplo 2.° Si el complemento por exceso es 13°....... 15′ ....20″, será el ángulo 103°....... 15′....... 20″.

Ejemplo 3.° Si el complemento por exceso son 57° .... 38′..........26″, será el ángulo 147°...... 38′ ...... 26″.

157 Dos ángulos se llaman *opuestos por el vértice* cuando cada uno de ellos está formado por la prolongacion de los dos lados del otro.

V. g. *aec* y *meb* (*fig.* 10) son opuestos por el vértice. Tambien son opuestos por el vértice *aem*, *bec*.

158 *Teorema.* Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Demostracion. Supongamos que se quiere demostrar la igualdad de *aec*, *bem* (*fig.* 10). Se dirá *aec*+*ceb* valen 180° por contiguos (*art.* 148); y *ceb*+*bem* valen tambien 180° por lo mismo. Luego quitando de ambas sumas el ángulo comun *ceb*, resultará (*Arit.* 26) *aec*=*bem*.

Si se trata de demostrar que es *ceb*=*mea*, se dirá, *bem*+*ceb*=*bem*+*mea*, por ser ambas sumas iguales á 180° (*art.* 148); y quitando de dichas sumas el ángulo comun *bem*, resultarán iguales los residuos *ceb*, *mea* (*Arit.* 26).

159 *Problema.* Hacer un ángulo igual á otro ángulo dado.

Resolucion. Sea el ángulo dado *A* (*fig.* 29).

1.° Tírese la recta indefinida *am*.

2.° Haciendo centro en el vértice *A* del ángulo dado, descríbase entre sus lados el arco *EuB* con cualquiera abertura de compas *AE*.

3.° Con esta misma abertura y centro *a* descríbase un arco indefinido *cot*.

4.° Tómese con el compas la distancia *EB*.

5.° Con dicha abertura y centro *e* descríbase el arquito *ls*, que cortará al *cot*, en *b*.

6.° Por los puntos *a* y *b* tírese la recta *ab*, y resultará el ángulo $mab=MAB$.

Demostracion. *EuB*, *eob* son arcos de círculos iguales (*art.* 109); y sus cuerdas *EB*, *eb* son tambien iguales por construccion. Luego los arcos *EuB*, *eob* serán de igual número de grados (*art.* 116): por lo tanto serán iguales los ángulos *A* y *a* medidos por ellos (*art.* 134).

CAPITULO V.

DE LAS LINEAS PERPENDICULARES.

160 Cuando una recta encuentra á otra sin inclinarse mas hácia un lado que hácia otro, se dice que es *perpendicular* á ella.

V. g. la *eu* (*fig.* 30) será perpendicular á la *ab*, si la encuentra sin inclinarse mas hácia la derecha que hácia la izquierda.

161 *Corolario.* Si una línea es perpendicular á otra, formará con ella dos ángulos iguales (*art.* 80).

162 *Corolario.* Si una línea encuentra á otra formando con ella dos ángulos iguales, será perpendicular.

163 *Teorema.* Toda recta que es perpendicular á otra forma con ella cuatro ángulos rectos.

Demostracion. Si la *eu* (*fig.* 30) es perpendicular á la *ab*, los ángulos *aue*, *bue* deben ser iguales (*art.* 161); y como entre los dos valen dos rectos por contiguos (*art.* 148), cada uno de ellos será recto. Luego tambien serán rectos los *bum*, *aum*, que deben ser iguales á ellos por opuestos al vértice (*art.* 158).

164 *Corolario.* Si una línea *A* es perpendicular á otra línea *B*, tambien la línea *B* será perpendicular á *A*.

En efecto, si la *eu* es perpendicular á la *ab* (*fig.* 30), formará con ella cuatro ángulos rectos (*art.* 163). Luego los dos ángulos *aue*, *aum* serán iguales (*art.* 140); y por lo tanto, la *au* será perpendicular á *eu* (*art.* 162).

165 *Corolario.* Si una recta es perpendicular á otra, su prolongacion tambien será perpendicular.

En efecto, puesto que la perpendicular *eu* (*fig.* 30) forma con la *ab* los ángulos *bum*, *mua* rectos (*art.* 163), estos serán iguales (*art.* 140); y por consiguiente la prolongacion *um* será perpendicular á *ab* (*art.* 162).

166 *Teorema.* Si una recta forma con otra un ángulo recto, será perpendicular á ella.

Demostracion. Si la *eu* (*fig.* 30) forma con la *ab* el ángulo *aue* recto, su suplemento *eub* tambien será recto (*art.* 148). Luego los ángulos *aue*, *eub* serán iguales; y por lo tanto, será la *eu* perpendicular á la *ab* (*art.* 162).

167 *Corolario.* Toda línea que forma con otra un ángulo oblicuo no puede ser perpendicular á ella.

En efecto, si la *su* (*fig.* 31) forma con la *ab* el ángulo *aus* agudo, su suplemento *sub* será obtuso (*art.* 146). Luego dichos ángulos serán desiguales; y por lo tanto la *su* se inclinará mas hácia un lado que hácia otro, y no será perpendicular (*art.* 160).

168 *Teorema.* Por un punto de una recta solo se puede hacer pasar una perpendicular á ella.

Demostracion. Si la *eu* (*fig.* 31) es perpendicular á la *ab*, los ángulos *eua*, *eub* serán rectos (*art.* 163). Cualquiera otra recta que pase por *u* v. g. la *su*, formará con la *ab* el ángulo *aus*, que es parte de *aue*: luego *aus* es agudo (*art.* 135 *y* 136): y por lo tanto, la *su* no puede ser perpendicular á la *ab* (*art.* 167).

169 *Teorema.* Desde cualquier punto, fuera de una recta, no se puede tirar á ella línea alguna que no sea mas larga que la perpendicular: esto es, que la perpendicular es la menor distancia de un punto á una recta.

Demostracion. Sea (*fig.* 31) *e* el punto, *ab* la recta de que se trata, y *eum* la perpendicular. Tómese la porcion *um* igual á la *ue* y tírense desde *e* y *m* dos rectas *eb*, *mb* á cualquier punto *b* de la *ab*. En los triángulos *eub*, *mub*, los ángulos en *u* son iguales (*art.* 163): el lado *ub* es comun á los dos, y *ue* se ha tomado igual á *um*: luego dichos triángulos serán totalmente iguales (*art.* 97); y por consiguiente será *eb*=*mb*. Esto es, que *eb* será mitad de *ebm*, así como *eu* es mitad de *eum* por construccion. Es asi que *ebm* es mayor que *eum* (*art.* 43): luego *eb*, mitad de *ebm* será mayor que *eu*, mitad de *eum*.

170 Cuando se trata de la distancia de un punto á una línea (sin especificar otra cosa) se entiende que se habla de la mas corta: esto es, de la perpendicular.

171 *Teorema.* De un punto cualquiera, fuera de una recta, no se puede tirar á ella mas que una perpendicular.

Demostracion. Si se dijese (*fig.* 31) que dos líneas *eu*, *eb* son perpendiculares á la *ab*, por ser perpendicular la *eu*, seria *eb* mayor que *eu* (*art.* 169); y por ser perpendicular la *eb*, seria *eu* mayor que *eb*, lo que es absurdo: luego tambien lo es el que puedan tirarse dos perpendiculares *eu*, *eb* á una recta *ab* desde un mismo punto *e* (*Arit.* 37).

172 *Teorema.* Si una recta tiene dos puntos *a* y *u*, ó *a* y *e* (*fig.* 32), cada uno de los cuales dista igualmente por ambos lados de dos puntos *s* y *t* de otra recta, las dos líneas serán perpendiculares.

Demostracion. Si el uno de los puntos *u* está sobre la *bd*, de suerte que son $us=ut$ y $es=et$, los triángulos *eus*, *eut* serán totalmente iguales, por tener los tres lados del uno iguales á los del otro (*art.* 114): luego los ángulos *eus*, *eut*, opuestos á los lados iguales, serán iguales; y por lo tanto, será *eu* perpendicular á *bd* (*art.* 162).

Si los dos puntos que distan igualmente de *s* y *t* son *a* y *e*: esto es, si se supone $as=at$, $es=et$, los triángulos *aet*, *aes* tendrán los tres lados del uno iguales á los del otro, y por lo tanto (*art.* 114) resultarán iguales los ángulos *sae*, *tac*, opuestos á iguales lados. De aqui se sigue que los triángulos *sau*, *tau* tienen iguales los ángulos en *a*, el lado $as=at$ y *au* comun: luego dichos triángulos *sau*, *tau* son totalmente iguales (*art.* 97); y por consiguiente será el ángulo $aub=aud$: esto es, será la *au* perpendicular á la *bd* (*art.* 162).

173 Cuando un punto está á iguales distancias de dos ó mas puntos, se dice que está *equidistante* de dichos puntos.

174 *Teorema.* Si una recta *eu* (*fig.* 32) tiene un punto *e*

equidistante de dos puntos *s* y *t* de otra á que es perpendicular, no puede haber fuera de la *eu* (prolongada al infinito) punto alguno equidistante de dichos puntos *s* y *t*.

Demostracion. Si hubiese otro punto *z* equidistante de *s* y *t*, tirando por *e* y *z* una recta, dicha recta seria perpendicular á la *bd* (*art.* 172). Se seguiria de aqui que por un punto *e* pasarian dos perpendiculares á la *bd*: esto es, la *eu* y la *ez*; pero esto es imposible (*art.* 171): luego tambien lo es el que pueda haber fuera de la *eu* punto alguno equidistante de *s* y *t* (*Arit.* 37).

175 *Teorema.* Si una recta *eu* (*fig.* 32) tiene un punto *e* igualmente distante de dos puntos *s* y *t* de otra recta *bd* á que es perpendicular, no puede haber en la *eu* punto alguno que no esté equidistante de *s* y *t*.

Demostracion. Se ha demostrado que no puede haber fuera de la *eu* punto alguno equidistante de *s* y *t* (*art.* 174); pero sobre la *st* debe haber un punto equidistante de *s* y *t*: luego dicho punto será *u*: esto es, que $us = ut$. Demostrado esto, si de cualquier punto de la *eu*, v. g. desde *a* se tiran las oblicuas *as*, *at*, los triángulos *sua*, *tua*, que tienen el lado *ua* comun, $us = ut$ y $aus = aut$ serán totalmente iguales (*art.* 97); y por consiguiente será $as = at$: esto es, que el punto *a* estará equidistante de *s* y *t*.

176 *Problema.* Por un punto dado, dentro ó fuera de una recta, tirar una perpendicular á ella.

Resolucion. 1.º Tanto en el caso de estar *u* en la recta *ab* (*fig.* 33), como en el de estar fuera de ella (*fig.* 34), fíjese una punta del compas en el punto dado *u*.

2.º Con cualquiera abertura háganse en la *ab* las dos intersecciones *s* y *t* con la otra punta.

3.º Hecho esto, desde *t*, con cualquiera abertura (mayor que la mitad de *st*), descríbase un arquito *mo*.

4.º Desde *s* descríbase con la misma abertura otro arquito *ex*, que cortará el primero en *c*.

5.º Tírese una recta *cu* por los puntos *c* y *u*, y esta será la perpendicular que se pide.

Demostracion. El punto *u* dista igualmente de los puntos *s* y *t*, y lo propio le sucede al punto *c*: luego la *cu* será perpendicular á la *ab* (*art.* 172).

177 *Problema.* Dividir una recta, ó una porcion de recta, en dos partes iguales por medio de una perpendicular.

Resolucion. Sea *st* (*fig.* 35) la porcion de recta que se quiere dividir en dos partes iguales.

1.º Desde *t*, como centro, con cualquiera abertura de compas (mayor que la mitad de *ts*), descríbanse los arquitos *om*, *df*.

2.º Desde *s*, como centro, con la misma abertura de compas, descríbanse los arquitos *ex*, *uz*, que corten á los anteriores.

3.º Por los puntos de interseccion *c* y *p* hágase pasar una recta, que será perpendicular á la *st*, y la dividirá por mitad en *h*.

Demostracion. Por tener la *cp* los puntos *c* y *p* equidistantes de *s* y *t* (por construccion), será perpendicular á *st* (*art.* 172); y no habrá en ella punto alguno que no esté equidistante de *s* y *t* (*art.* 175): luego $hs = ht$, y por lo tanto la porcion *st* quedará dividida en dos partes iguales en *h*.

178 Generalmente se dice *levantar* una perpendicular á la *ab* (*fig.* 33) desde el punto *u*, cuando *u* está en la misma *ab*, aunque la perpendicular caiga hácia abajo. Cuando el punto *u* de que se trata (*fig.* 34) está fuera de la *ab*, se suele decir *bajar* una perpendicular á la *ab* desde *u*. Lo mejor es decir en todos casos tirar una perpendicular á la *ab* desde tal punto, ó hacer pasar una perpendicular á la *ab* por tal punto.

179 *Teorema.* Toda recta que pasando por el centro de un círculo es perpendicular á una cuerda, dividirá á la cuerda y á su arco en dos partes iguales.

Demostracion. Si la *cm* (*fig.* 36) que pasa por el centro *c* es perpendicular á la cuerda *ae*, tendrá el punto *c* equidistante de *a* y *e* (*art.* 110), y (*art.* 175) no habrá en ella punto alguno que no esté equidistante de *a* y *e*: luego *u* estará equidistante de *a* y *e*, y por consiguiente la cuerda estará dividida por mitad en *u*. Tambien *m* estará equidistante de *a* y *e*. De aqui se deduce la igualdad de las cuerdas *ma*, *me*, y por consiguiente (*art.* 116) la igualdad de los arcos *ma*, *me*: esto es, que el arco *ame* estará dividido por mitad en *m*.

180 *Teorema.* La recta que siendo perpendicular á una cuerda la divide por mitad, pasa por el centro del arco.

Demostracion. Si la recta *mb* (*fig.* 36), que es perpendicular á la cuerda *ae*, la divide por mitad en *u*, el punto *u* estará equidistante de *a* y *e*, y por lo tanto no podrá haber fuera de la *mb* punto alguno equidistante de *a* y *e* (*art.* 174). Es asi que el centro del arco es un punto equidistante de *a* y *e* (*art.* 110): luego la *mb* pasa por dicho centro.

181 *Corolario.* De los dos teoremas anteriores se sigue que la perpendicular que divide á una cuerda por mitad dividirá por mitad á su arco.

182 *Corolario.* Toda recta *cm* (*fig.* 36) que pasando por el centro *c* divide por mitad á la cuerda *ae* ó al arco *ame*, será perpendicular á la cuerda, respecto á que tendrá dos puntos *c* y *u*, ó *c* y *m*, equidistantes de sus extremos *a* y *e* (*art.* 110 *y* 172).

183 *Corolario.* El radio *cm* (*fig.* 36) tirado al punto de contacto será perpendicular á la tangente *fh*, respecto á que esta es prolongacion de la cuerda de un arco infinitesimal, cuya medianía está en el punto de contacto (*art.* 56 *á* 61).

184 *Corolario.* De lo establecido (*art.* 181) resulta que un arco se puede dividir por mitad por el método del artículo 177; y cuando se conoce el centro *c* (*fig.* 37), basta hallar el punto *t* en que se cortan los arcos descritos desde *a* y *b* con iguales aberturas de compas, y tirar una recta por los puntos *t* y *c* para que resulte el arco *ab* dividido por mitad en *s* (*art.* 110).

185 *Problema.* Dados tres puntos, que no esten en línea recta, hacer pasar por ellos una circunferencia.

Resolucion. Sean (*fig.* 37) *a*, *b* y *e* los tres puntos dados.

1.º Unanse (ó imagínense unidos) dichos tres puntos con las rectas *ab*, *be*, que serán cuerdas de la circunferencia que se ha de describir.

2.° Divídase la *ab* por mitad, por medio de la perpendicular *tp* (*art.* 177).

3.° Divídase tambien la *be* por mitad, por medio de la perpendicular *mq*.

4.° El punto *c* en que se encuentran dichas perpendiculares *tp*, *mq*, será el centro del círculo; y su radio será la distancia desde *c* á cualquiera de dichos tres puntos, v. g. á *a*.

Demostracion. Respecto á que la perpendicular *tp* divide por mitad á la cuerda *ab*, el centro del círculo deberá hallarse en dicha perpendicular (*art.* 180). Por semejante razon debe estar el centro en la otra perpendicular *mq* : luego el centro es el punto *c*, comun á dichas dos perpendiculares *tp*, *mq*.

No puede estar el centro en otra parte, respecto á que las dos rectas *tp*, *mq*, solo se cortan en un punto (*art.* 30).

186 *Corolarios.* Luego por tres puntos no puede pasar mas que una circunferencia: esto es, que dados tres puntos está determinada la circunferencia que debe pasar por ellos; y dos circunferencias que se cortan solo podrán tener dos puntos comunes.

CAPITULO VI.

DE LAS LINEAS PARALELAS.

187 Se dice que dos rectas *cd*, *ab* (*fig.* 38) son *paralelas* cuando todos los puntos de la *cd* estan á igual distancia de la otra *ab*.

188 *Corolario.* Si dos rectas son paralelas, las perpendiculares bajadas de todos los puntos de la una á la otra serán iguales entre sí respecto á que dichas perpendiculares miden las distancias que hay de los puntos de la una á la otra (*art.* 170), y dichas distancias son iguales (*art.* 187).

189 *Teorema.* Si dos rectas son paralelas, todas las perpendiculares á la una de ellas serán perpendiculares á la otra.

Demostracion. Supóngase que siendo la *cd* (*fig.* 39) paralela á la *ab*, las perpendiculares á esta no lo sean á aquella. Supónganse perpendiculares la *em* á *ab*, la *mn* á *cd*, y la *no* á *ab*.

1.º Por ser *em* perpendicular á *ab*, y *mn* oblicua á *ab*, será $mn > em$ (*art.* 169).

2.º Por ser *mn* perpendicular á *cd* y *no* oblicua á *cd*, será $no > mn$ (*art.* 169).

3.º Puesto que (*núm.* 1.º) es $mn > em$, y (*núm.* 2.º) $no > mn$, es evidente que resultará $no > em$: esto es, que la perpendicular *no* bajada del punto *o* á la *ab* será mayor que la perpendicular *em* bajada del punto *m* á la misma *ab*: luego las distancias de los puntos *m* y *o* á la *ab* no serán iguales, y por lo tanto las *cd*, *ab* no serán paralelas (*art.* 187): luego dos rectas no pueden ser paralelas si toda recta perpendicular á la una de ellas no es perpendicular á la otra.

190 *Corolario.* Si una recta *A* es paralela á otra *B*, la recta *B* será paralela á *A*, puesto que las mismas perpendiculares miden las distancias iguales de *A* á *B* y de *B* á *A*.

191 *Teorema.* Por un punto solo puede pasar una paralela á una recta.

Demostracion. Sea *ab* la recta (*fig.* 38) y *m* el punto. Bájese la *me* perpendicular á *ab*; y todas las paralelas á la *ab* que pasen por *m* deberán ser perpendiculares á *me* (*art.* 189 *y* 164). Es asi que por *m* solo puede pasar una perpendicular á la *me* (*art.* 168): luego tampoco podrá pasar mas que una paralela á la *ab*.

192 *Teorema.* Si una misma recta es perpendicular á otras dos, estas serán paralelas.

Demostracion. Sea la *me* (*fig.* 38) perpendicular á las *ab*, *cd*. Si por *m* se hace pasar una paralela á la *ab*, dicha paralela será perpendicular á *em* (*art.* 189 *y* 164). Es asi que por el punto *m* solo puede pasar una perpendicular á *me* (*art.* 168): luego la *cd*, que se supone perpendicular á la *me*, se confunde con la paralela á *ab* tirada por *m*: esto es, que *cd* es paralela á *ab*.

193 *Corolario.* De aqui se deduce que dos rectas perpendiculares á una misma recta serán paralelas entre sí (*art.* 164).

194 *Teorema.* Si dos rectas son paralelas á una tercera, serán paralelas entre sí.

Demostracion. Si las *ab*, *fl* (*fig.* 38) son paralelas á la *cd*, tirando una perpendicular á la *cd*, dicha línea será tambien perpendicular á sus paralelas *fl*, *ab* (*art.* 189): luego una misma línea será perpendicular á las *fl*, *ab*; y por consiguiente serán estas paralelas (*art.* 192).

195 *Teorema.* Dos puntos igualmente distantes de una recta hácia el mismo lado, determinan la posicion de la paralela á dicha recta tirada por uno de ellos.

Demostracion. Supóngase (*fig.* 40) que los puntos *o* y *u* se hallan á iguales distancias de la *fp*. Tírese por *u* la *zut* perpendicular á *fp*; y resultará que la paralela que sale de *o* debe cruzar á dicha perpendicular por mas arriba ó por mas abajo del punto *u*, ó por el mismo punto *u*. En los dos primeros casos resultaria que la paralela tendria un punto que distaria de la *fp* mas ó menos que *u*: esto es, mas ó menos que *o*, lo que no puede ser (*art.* 187); luego la paralela á la *fp*, que pasa por *o*, debe pasar por *u*; y su posicion quedará determinada por la de estos dos puntos (*art.* 29).

196 *Teorema.* Si á dos paralelas las cortan ó encuentran dos perpendiculares á ellas, las cuatro porciones interceptadas serán iguales cada una á su opuesta.

Demostracion. Sean (*fig.* 38) *ab*, *cd* las paralelas, y *em*, *no* las perpendiculares. Estas serán paralelas entre sí (*art.* 193); y las *ab*, *cd* serán perpendiculares á ellas (*art.* 164): luego *em*, *no* serán iguales entre sí, por medir las distancias entre las paralelas *ab*, *cd*; y *mo*, *en* serán iguales entre sí, por medir las distancias entre las paralelas *em*, *no*.

197 Si á dos paralelas *bd*, *fp* las corta una secante *hq* (*fig.* 41) esta formará con ellas ocho ángulos, á los cuales se les aplican varias denominaciones relativas cuando se comparan entre sí dos á dos.

1.º Los ángulos formados á un mismo lado de la secante, cada uno con su paralela, el uno en la parte exterior y el otro en la interior, se llaman *correspondientes ó externo é interno de un mismo lado.*

V. g. *u* y *t* son correspondientes. Tambien son correspondientes *s* y *c*, *e* y *m*.

2.° Los ángulos formados hácia distintos lados de la secante, cada uno con su paralela, se llaman *alternos internos* cuando ambos estan dentro; y *alternos externos* cuando ambos estan fuera.

V. g. *a* y *t* son alternos internos; y *u* y *o* son alternos externos.

3.° Tambien se usan las denominaciones de *ángulos internos opuestos de un mismo lado*, y *externos opuestos de un mismo lado*, que es inútil el explicar, porque no se hará uso de ellos en este tratado.

198 *Teorema.* Si una secante corta á dos paralelas, los ángulos alternos internos serán iguales entre sí.

Demostracion. Sean *bd* y *fp* (*fig.* 42) las paralelas, y *hq* la secante. Tírense las *em*, *on* perpendiculares á las paralelas. Los triángulos *emo*, *eno* tienen el lado *eo* comun; y los *en*, *no* iguales á sus correspondientes *om*, *me*, por porciones opuestas interceptadas entre las paralelas y sus perpendiculares (*art.* 196): luego dichos triángulos serán totalmente iguales (*art.* 114); y por consiguiente serán iguales los ángulos *moe*, *neo*, opuestos á iguales lados: esto es, que los ángulos alternos internos agudos son iguales.

En cuanto á los obtusos *doe*, *feo* tambien serán iguales, por suplementos de los agudos iguales *moe*, *neo*, que son sus contiguos (*art.* 148).

199 *Corolario.* Los ángulos alternos externos tambien serán iguales, por opuestos al vértice (*art.* 158) de los alternos internos.

200 Luego se púede decir en general, que los ángulos alternos son iguales entre sí.

201 *Teorema.* Los ángulos correspondientes son iguales.

Demostracion. Sean (*fig.* 41) *bd*, *fp* las paralelas, y *hq* la secante. El ángulo *u* es igual á *a* por opuestos á vértice (*art.* 158). El ángulo *t* es igual á *a* por alternos internos (*art.* 198): luego los ángulos *u* y *t*, por ser iguales á un tercero *a*, serán iguales entre sí.

Por el mismo estilo se demuestra la igualdad de los demas ángulos correspondientes.

202 *Corolario.* Se sigue de lo dicho (*art.* 197 á 202 *y*

art. 148) que de los ocho ángulos que una secante oblicua forma con dos paralelas, los cuatro son agudos é iguales entre sí; y los otros cuatro son obtusos, tambien iguales entre sí.

203 En general se podrá decir, que todos los ángulos de una misma especie que una secante oblicua forma con dos ó mas líneas paralelas entre sí, son iguales; y los de distinta especie son suplementos los unos de los otros.

204 *Teorema.* Si una secante corta á dos rectas formando con ellas los ángulos alternos internos iguales, dichas rectas serán paralelas.

Demostracion. Sea (*fig.* 40) *hq* la secante, *fp*, *bd* las líneas cortadas, y los ángulos *hep*, *qob* iguales. Tírese por *o* la *mn* paralela á la *fp*; y por lo demostrado (*art.* 200) formará el ángulo *qom* igual á su alterno *hep*. Pero se ha supuesto $qob = hep$: luego los ángulos *qom*, *qob* serán iguales entre sí, por ser iguales á un tercero *hep*: luego la *bd* se confunde con la paralela *mn*; pues de otro modo resultaria la parte igual al todo: esto es, $qob = qom$, lo que es absurdo. (*Arit.* 24 *y* 37).

205 Por el mismo estilo se demuestra que dos rectas serán paralelas, siempre que una secante las corte formando con ellas iguales los ángulos correspondientes, ó los alternos externos.

206 *Problema.* Tirar una recta paralela á otra por un punto dado.

Resolucion. Sea (*fig.* 43) *ab* la recta dada, y *o* el punto por donde debe pasar la paralela.

1.º Hágase pasar por *o* la secante *ht*.

2.º Fórmese el ángulo $tod = ath$ (*art.* 159), y la recta *cd*, que forma dicho ángulo, será la paralela que se pide.

Demostracion. El ángulo *tod* es igual á su alterno *ath*, y por lo tanto las rectas *ab*, *cd* serán paralelas (*art.* 204).

207 Siempre que para la construccion del ángulo igual á *ath* se puede describir el arco *ou* con el radio *to*, se resuelve el problema con suma facilidad sin tirar la secante *ht*. En tal caso, desde el punto dado *o* se describa con cualquiera abertura de compas el arco *et*; y fijando la punta en *t* se describe el arco *ou*. Se toma la distancia *ou*, se traslada de *t* á *m*, y con esto queda determinada la paralela *om*.

208 Tambien se puede resolver el problema haciendo el ángulo *hoc* igual á su correspondiente *hta* (*art.* 205).

209 *Teorema.* Los ángulos formados por dos rectas son iguales á los ángulos de la misma especie formados por sus paralelas, y suplementos de los ángulos de contraria especie formados por las mismas paralelas.

Demostracion. Si se trata de los ángulos agudos *dem*, *bac* (*fig.* 44), cuyos lados no se cortan, prolongado el lado *me*, resulta que dichos ángulos son iguales á un tercero *bom* por correspondientes (*art.* 201); y por lo tanto serán iguales entre sí. El ángulo obtuso *sed* es suplemento de su contiguo *dem* (*art.* 148); y por lo tanto será suplemento de su igual *bac.*

Si se trata de los ángulos obtusos *sed*, *tab*, cuyos lados se cortan, se ve desde luego que dichos ángulos son iguales entre sí, por ser iguales á su correspondiente *sob*; y por ser *sed* suplemento de *dem*, será tambien *tad* suplemento de *dem.*

210 *Teorema.* Los ángulos formados por dos rectas son iguales á los ángulos de la misma especie formados por sus perpendiculares, y suplementos de los ángulos de contraria especie formados por las mismas perpendiculares.

Demostracion. Sean *dp*, *bq* (*fig.* 45) las líneas propuestas. Levantadas las perpendiculares *ae*, *ac* desde el punto de interseccion, resultarán los ángulos *bac*, *dae* iguales por rectos; y quitando de ellos la parte comun *dae*, quedará *bad*=*cae.* Por consiguiente *bap*, suplemento de *bad*, será suplemento de *cae.* Establecido esto, como todas las perpendiculares á *dp* son paralelas á *ae* (*art.* 193), y todas las perpendiculares á *bq* son paralelas á *ac*; es evidente que los lados de los ángulos formados por cualesquiera perpendiculares á las *dp* y *bq* serán paralelos á los lados del ángulo *cae*; y por lo tanto serán iguales á *bad* si son de su especie, y suplementos si son de especie opuesta. (*art.* 209).

211 *Corolario.* El ángulo formado por dos arcos de círculo será igual al formado por los radios de ambos arcos tirados al punto de interseccion.

En efecto (*fig.* 109) el ángulo formado por los arcos *upc*, *qcl* es igual al formado por sus tangentes *tc*, *hc* (*art.* 63 y 80); y el formado por dichas tangentes es igual al formado por los radios *sc*, *ec*, que les son perpendiculares (*art.* 183).

212 *Teorema.* Los arcos de un mismo círculo interceptados por dos cuerdas paralelas son iguales.

Demostracion. Sean (*fig.* 36) *os*, *ae* las cuerdas; y por ser paralelas se podrá hacer pasar por el centro la *em* perpendicular á ambas (*art.* 189). Dicha perpendicular (*art.* 179) dividirá por mitad los arcos *oms*, *ame*: esto es, que serán *mo*=*ms* y *ma*=*me*: luego si de los arcos iguales *mo*, *ms* se quitan los iguales *ma*, *me*, quedarán iguales los residuos *ao*, *es*, que son los arcos interceptados por las cuerdas paralelas.

CAPITULO VII.

DE LOS ANGULOS INSCRIPTOS.

213 Todo ángulo que tiene su vértice en la circunferencia, y está formado por dos cuerdas, se llama ángulo *inscripto.*

214 Al ángulo que tiene su vértice en el centro del círculo lo llamaremos ángulo *central.*

215 Se dice que un ángulo *insiste* sobre un arco, ó sobre una cuerda cuando sus lados se terminan ó pasan por los extremos de dicho arco ó cuerda.

216 *Teorema.* Todo ángulo inscripto tiene por medio la mitad del arco sobre que insiste.

Demostracion. Los ángulos de que se trata pueden estar formados de tres modos diferentes:

1.° Por una cuerda *ba* (*fig.* 46), y el diámetro *bco*, como *abo.*

2.° Por dos cuerdas que no comprenden al centro (*fig.* 47), como *abe.*

3.° Por dos cuerdas que comprenden al centro (*fig.* 47), como *abu.*

Caso 1.° En el caso 1.° (*fig.* 46) tírese el diámetro *uce* paralelo á la cuerda *ba*, que formará en el centro *c* el ángulo *eco* igual al propuesto *b* por correspondientes (*art.* 201). Los arcos *eo*, *bu* son iguales, por medidas de los ángulos centrales opuestos al vértice *eco*, *bcu* (*art.* 134) que son iguales (*art.* 158): luego lo mismo es el arco *eo* que la mitad de la suma de los arcos *eo*, *bu*. Por lo tanto, se puede decir que el ángulo central *eco* tiene por medida la semisuma de los arcos *eo*, *bu*, comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones. Es asi que *bu* es igual á *ae* por arcos comprendidos entre dos cuerdas paralelas (*art.* 212): luego se puede decir que el ángulo *eco* tiene por medida la mitad de la suma de los arcos *eo*, *ae*: ó lo que es lo mismo, la mitad del arco *ao*. De aqui se sigue que el ángulo *b*, que es su igual, tendrá tambien por medida la mitad del arco *ao* sobre que insiste.

Caso 2.º En el caso 2.º (*fig.* 47) tírese por *b* el diámetro *bo*. Por lo demostrado en el caso 1.º, el ángulo *abo* (formado por la cuerda y el diámetro) tiene por medida la mitad del arco *ao*; y el ángulo *ebo* tiene tambien por medida la mitad del arco *eo*. Es asi que el ángulo *abe* es igual á *abo* menos *ebo*: luego su medida será tambien la mitad de *ao* menos la mitad de *eo*; ó lo que es lo mismo la mitad de *ae*. Esto es que el ángulo *abe*, que no comprende al centro, tiene tambien por medida la mitad del arco *ae* sobre que insiste.

Caso 3.º Para el caso 3.º (*fig.* 47) basta advertir que el ángulo propuesto *abu* es igual á la suma de los formados con el diámetro *abo*, *obu*, cuyas medidas son las mitades de *ao* y *ou*: luego la medida de *abu* será la suma de las medidas de *abo* y *obu*: esto es, la mitad del arco *ao* mas la mitad de *ou*, que es lo mismo que la mitad de *au*: luego el ángulo *abu*, que comprende el centro, tiene tambien por medida la mitad del arco *aou* sobre que insiste.

217 *Corolario.* Todos los ángulos inscriptos (*fig.* 48) *b*, *c*, *d*, *n*, que insisten sobre una misma cuerda *ae*, serán iguales, puesto que cada uno de ellos tiene por medida la mitad del arco *aue* subtendido por la cuerda.

218 *Corolario.* Todos los ángulos inscriptos que insisten sobre el diámetro (*fig.* 49), como *e*, *b*, *d*, *s*, son rectos, puesto que su medida es la mitad de la semicircunferencia, esto es, el cuadrante ó arco de 90°.

219 *Problema.* Levantar una perpendicular en la extremidad de una recta que no puede prolongarse.

Resolucion. Si *eb* (*fig.* 50) es la recta, y *e* el extremo sobre que se ha de levantar la perpendicular, póngase la una punta del compas en el extremo *e*, y la otra en cualquier punto *c*; y con dicha abertura arbitraria descríbase desde *c* el arco indefinido *aeum*, tírese el diámetro *acu*, y la *ue* será la perpendicular.

Demostracion. El ángulo inscripto *uea* insiste sobre el diámetro, y por consiguiente será recto (*art.* 218), y la *ue* será perpendicular á *eb*.

El punto *c* debe estar mas cerca de *e* que de *b*, para que se verifique la interseccion *a*.

220 Tambien pudiera resolverse el problema levantando la perpendicular *sd* desde cualquier punto de *eb* (*art.* 176), y formando despues el ángulo *beu* igual á *bsd* ó á *csd* (*art.* 159): esto es, recto.

221 *Teorema.* Con respecto á los arcos menores que el semicírculo (*art.* 115), á menor arco corresponde menor cuerda, y (*art.* 117) por consiguiente á menor cuerda corresponderá menor arco.

Demostracion. Sean (*fig.* 51) *ase*, *asm* los arcos de que se trata. Tómese el arco *atb* igual á la semicircunferencia, y tírense desde *b* las cuerdas que manifiesta la figura. El ángulo *bea* tendrá por medida la mitad de la semicircunferencia *atb* (*art.* 216), y por lo tanto será recta (*art.* 130 y 135); y la *ae* será perpendicular á la *eb* (*art.* 166): luego (*art.* 169) $ae<au$; y con mayor razon será $ae<am$, que es igual á $au+um$, que es lo que se trataba de demostrar.

Es evidente que la línea *bm*, que se termina en el extremo del arco mayor, no puede caer entre las *ba*, *be*, porque en tal caso seria $abm<abc$, y por lo tanto el arco *am* (cuya mitad es medida de *abm*) seria menor que el arco *ae* (cuya mitad es medida de *abe*.)

222 *Corolario.* Con respecto á los arcos mayores que el semicírculo (*art.* 115), á mayor arco corresponderá menor cuerda, y á menor cuerda mayor arco.

CAPITULO VIII.

DE LOS TRIANGULOS EN GENERAL.

223 Respecto á que los vértices de todo triángulo son tres puntos que no pueden estar en línea recta (*art.* 74 *y* 75), se podrá hacer pasar por ellos una circunferencia (*art.* 185).

224 *Teorema.* Los tres ángulos de todo triángulo juntos valen exactamente dos ángulos rectos ó 180°.

Demostracion. Sea (*fig.* 52) *abe* el triángulo propuesto. Hágase pasar por sus tres vértices la circunferencia *abea* (*art.* 185). Por estar los tres ángulos inscriptos en la circunferencia (*art.* 216), la medida de *a* será la mitad de *bue*, la de *b* será la mitad de *esa*, y la de *e* será la mitad de *amb*: luego la suma de las medidas de los tres ángulos de todo triángulo es la mitad de toda la circunferencia: esto es 180°, ó dos ángulos rectos (*art.* 130 *y* 135).

225 *Corolario.* Todo ángulo de un triángulo es suplemento de la suma de los otros dos.

226 *Corolario.* Conocidos dos ángulos de un triángulo, se halla el tercero sumándolos y restando la suma de 180°.

227 *Corolario.* Conocido un ángulo de un triángulo, se halla el valor de la suma de los otros dos restando el ángulo conocido de 180°.

228 Se dice que dos triángulos son *equiángulos* cuando los tres ángulos del uno son iguales á los del otro.

229 *Corolario.* Si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales á dos del otro, tendrán tambien iguales los terceros, que son suplementos de los otros dos: por consiguiente serán equiángulos.

230 El triángulo, con respecto á los lados, se llama:

1.° *Equilátero*, cuando sus tres lados son iguales entre sí.

2.° *Isósceles*, cuando tiene dos lados iguales entre sí.

3.° *Escaleno*, cuando tiene sus tres lados desiguales.

231 El triángulo, con respecto á los ángulos se llama:

1.º *Rectángulo*, cuando tiene un ángulo recto.

2.º *Obtusángulo*, cuando tiene un ángulo obtuso.

3.º *Acutángulo*, cuando tiene los tres ángulos agudos.

4.º El triángulo que tiene sus tres ángulos oblicuos (esto es, todo triángulo que no es rectángulo), se llama *oblicuángulo*; y puede ser obtusángulo ó acutángulo.

232 En el triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*, y los otros dos lados, que forman el ángulo recto se llaman *catetos*.

233 Descrita la circunferencia por los tres vértices del triángulo (*art.* 223), los lados son cuerdas de los arcos cuyas mitades miden los ángulos opuestos (*art.* 216).

1.º De aqui se sigue que á mayor ángulo corresponde mayor lado opuesto; é inversamente á mayor lado corresponderá mayor ángulo (*art.* 221).

Cuando el triángulo es obtusángulo, como *aue* (*fig.* 48), la cuerda *ae* opuesta al ángulo obtuso, subtende un arco menor que el semicírculo igual á la suma de los arcos subtendidos por las cuerdas *au*, *ue* opuestas á los ángulos agudos; y por lo tanto, la proposicion es general.

2.º Tambien se sigue que á iguales lados corresponderán iguales ángulos opuestos (*art.* 116); y á iguales ángulos corresponderán iguales lados opuestos (*art.* 117).

Todo esto se entiende en un mismo triángulo, y no en triángulos diferentes.

234 *Corolario.* El triángulo equilátero tendrá sus tres ángulos iguales; y cada uno de ellos valdrá 60°, que es la tercera parte de 180° (*art.* 224).

235 *Corolario.* Si los tres ángulos de un triángulo son iguales, cada uno de ellos valdrá 60°, que es el tercio de 180° (*art.* 224); y el triángulo será equilátero (*art.* 117).

236 *Corolario.* En el triángulo isósceles serán iguales los ángulos opuestos á los lados iguales.

237 *Corolario.* Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, los dos lados opuestos serán tambien iguales; y por lo tanto será isósceles.

cm, bajada desde el concurso de los lados iguales al lado opuesto *ae*, dividirá por mitad á dicho lado, y al ángulo *ace*.

Demostracion. La circunferencia descrita desde *c* con el radio *ca* debe pasar por *e* (*art.* 110); y por lo tanto (*art.* 179), la perpendicular *cm* dividirá por mitad á la cuerda *ae* y á su arco: por consiguiente, los ángulos *acm*, *ecm*, que tienen por medidas los arcos *am*, *me*, mitades de *ame*, serán mitades del ángulo *ace*, que tiene por medida el todo de dicho arco.

239 *Corolario.* Por el mismo estilo se demuestra que la perpendicular *mc* (*fig.* 36), que divide por mitad al lado *ac*, que forma los ángulos iguales del triángulo isósceles *ace*, pasa por el vértice *c* del ángulo opuesto, y lo divide por mitad.

240 *Corolario.* En todo triángulo rectilíneo solo puede haber un ángulo recto ú obtuso; y á dicho ángulo recto ú obtuso debe oponerse el mayor lado (*art.* 233 *núm.* 1.°). En efecto, si un triángulo tuviese dos ángulos rectos, el tercero no valdria nada (*art.* 225), y por consiguiente no habria triángulo; y si tuviese un ángulo recto y otro obtuso, ó dos obtusos, entre los dos valdrian mas de dos rectos, lo que es imposible (*art.* 224).

241 *Corolario.* En todo triángulo rectángulo, los ángulos agudos serán complementos el uno del otro, puesto que entre los dos deben valer 90° (*art.* 227).

242 *Teorema.* La cuerda del arco de 60° es igual al radio.

Demostracion. Sea *mp* (*fig.* 62) la cuerda del arco de 60°, y tirados los radios *cm*, *cp*, resultará el triángulo *mcp*, cuyos ángulos en *m* y *p* serán iguales, por oponerse á iguales lados. Es asi que la suma de dichos dos ángulos (*art.* 227) es$=180°-60°=120°$: luego cada uno de ellos valdrá la mitad de 120°, que son 60°: esto es, que cada uno de los tres ángulos del triángulo *mcp* valdrá 60°: por consiguiente el triángulo será equilátero (*art.* 235), y $mp=cm$: esto es, la cuerda de 60° igual al radio.

243 Se llama ángulo *externo* de un triángulo al formado por un lado y por la prolongacion de su inmediato, como *beh* (*fig.* 53); y se llaman *internos opuestos* los dos ángulos del triángulo adyacentes al tercer lado, como *a* y *b*.

244 *Teorema.* En cualquier triángulo rectilíneo, el án-

gulo externo es igual á la suma de sus dos internos opuestos.

Demostracion. El ángulo externo e (*fig.* 53), juntamente con su contiguo c, vale 180° (*art.* 148); y tambien la suma de los dos internos opuestos a y b, juntamente con c, vale 180° (*art.* 224): luego (*Arit.* 25) el ángulo externo e es igual á la suma de los dos internos opuestos a y b.

245 *Corolario.* El ángulo externo será mayor que uno de los internos opuestos en el valor del otro interno: esto es, que e será mayor que a (*fig.* 53) en el ángulo b: y e será mayor que b en el ángulo a.

246 *Corolario.* Uno de los ángulos internos opuestos será menor que el externo en el valor del otro interno: esto es, que a será menor que e (*fig.* 53) en el ángulo b; y b será menor que e en el ángulo a.

247 *Teorema general.* Dos triángulos son totalmente iguales en los casos siguientes.

1.° Cuando tienen los tres lados del uno iguales á los tres del otro.

2.° Cuando tienen iguales dos lados y el ángulo comprendidos: esto es, el formado por dichos lados.

3.° Cuando tienen iguales un lado y los dos ángulos adyacentes: esto es, los dos ángulos formados por dicho lado.

4.° Cuando tienen iguales un lado, un ángulo adyacente, y otro opuesto á dicho lado, con tal que el ángulo adyacente sea igual al adyacente, y el opuesto al opuesto.

5.° Cuando tienen iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de dichos lados.

6.° Cuando tienen iguales dos lados y el ángulo opuesto al menor de dichos lados, con tal que en ambos triángulos sea de la misma especie el ángulo opuesto al mayor lado: esto es, en ambos agudo ó en ambos obtuso.

Demostracion. Los casos 1.° y 2.° quedan ya demostrados como lemas (*art.* 114 *y* 97).

Caso 3.° Sean (*fig.* 19) abc, ABC los triángulos propuestos, y en ellos $ac=AC$, $a=A$ y $c=C$. Sobrepóngase la AC á la ac, de suerte que A y C caigan sobre a y c, en lo que no hay dificultad, por ser iguales dichos lados (*art.* 31). Por ser el ángulo $A=a$, caerá el lado AB sobre ab (*art.* 96); y por

7

ser $C=c$, caerá el lado CB sobre cb; luego el punto B, comun á AB, CB, caerá sobre el punto b, comun á ab y cb; y por consiguiente se ajustarán perfectamente ambos triángulos (*art.* 29), y serán totalmente iguales (*art.* 16).

Caso 4.° Sean en los mismos triángulos (*fig.* 19) $AC=ac$, $A=a$, y $B=b$. Por lo demostrado (*art.* 229) resultará $C=c$: esto es, que los triángulos tendrán iguales un lado y los dos ángulos adyacentes, que es el caso 3.°: luego por lo demostrado en dicho caso serán totalmente iguales.

Se omite el demostrar la igualdad de los triángulos en los casos 5.° y 6.°, porque solo tienen uso en la práctica ordinaria de la Navegacion, cuando los ángulos iguales son rectos; y entonces, de la igualdad de la hipotenusa y un cateto se deduce la igualdad del otro cateto, y por consiguiente la de los triángulos, como se demostrará en el artículo 270.

CAPITULO IX.

DE LAS FIGURAS SEMEJANTES.

248 Para que dos figuras sean semejantes (*art.* 12) es preciso que sus puntas tengan la misma agudeza, esto es, que sus ángulos han de ser iguales.

A mas, es preciso que consten de igual número de lados, y que los dispuestos del mismo modo en ambas figuras esten entre sí en la misma razon en una y en otra: esto es, que dichos lados han de ser proporcionales.

Sean por ejemplo ABE, abe (*fig.* 54) dos triángulos semejantes. Para esto, á mas de tener los ángulos $A=a$, $B=b$, $E=e$, es menester que si EB es duplo de AE, sea tambien eb duplo de ae; y si AB es igual á una vez y media AE, ha de ser ab igual á una vez y media ae: esto es, que han de ser (*Arit.* 225 *á* 233) $AE : AB :: ea : ab$, y $AE : EB :: ae : eb$.

Para convencerse de que dos figuras ó sólidos no pueden ser semejantes si no tienen sus líneas correspondientes proporcionales, basta advertir, que si despues de haber contemplado dos rectas de una figura que estan entre sí v. g. en la razon de 1 á 2, consideramos las correspondientes de otra figura, que estan entre sí v. g. como 1 á 3, desde luego diremos que el conjunto de las dos líneas de la segunda figura no se parece al conjunto de las dos líneas correspondiente de la primera: esto es, que notaremos en dichas figuras una diferencia independiente de su tamaño absoluto, y de sus propiedades físicas. Por consiguiente dichas figuras ó sólidos no serán semejantes (*art.* 12).

249 Las líneas dispuestas del mismo modo en dos figuras semejantes, esto es, las líneas correspondientes, se llaman *homólogas.*

En los triángulos, y en general en todas las figuras que constan de un número de lados impar, serán homólogos los lados opuestos á los ángulos iguales.

V. g. en el ejemplo anterior (*art.* 248) $A\ B$, opuesto al ángulo E, será homólogo de ab, opuesto al ángulo e, que es igual á E &c.

250 *Teorema.* Determinadas las dimensiones A, B, C &c. de una figura ó sólido F, y una dimension a de su semejante correspondiente á A, quedan determinadas todas las dimensiones correspondientes b, c &c. de la figura ó sólido f semejante á F.

Demostracion. Por lo establecido (*art.* 248) debe ser A: $B : : a : b$; $A : C : : a : c$ &c.: es asi que determinados los tres primeros términos de una proporcion queda determinado el cuarto (*Arit.* 251): luego las extensiones b, c &c. de la figura ó sólido f estan determinadas.

251 Para representar una figura grande por medio de otra pequeña semejante á ella, que se llama *plano*, se suele hacer uso de la *escala.* La *escala* es una recta dividida en partes pequeñas, cada una de las cuales corresponde á un pie, á una vara, á una braza, á una milla &c. de la figura grande, segun la relacion que tiene el tamaño del plano con el tamaño de la figura que representa.

252 Es evidente que si cada partecilla de la escala representa un pie, cada dimension del plano debe contener tantas partecillas de la escala cuantos pies efectivos tiene en la figura grande la dimension homóloga.

Para demostrar que ejecutando esto se verificará la proporcionalidad de las dimensiones homólogas del plano y de la figura, represente P el tamaño de un pie natural, p el tamaño de la partecita de la escala que representa un pie. Sean *A*, *B*, *E* &c. varias dimensiones de la figura, correspondientes á las *a*, *b*, *e* &c. del plano; y como se supone que *A* contiene á *P* el mismo número de veces que *a* contiene á *p* &c., es evidente (*Arit.* 25 *á* 234) que serán

$$\left.\begin{cases} P : A :: p : a \\ P : B :: p : b \\ P : E :: p : e \end{cases}\right\} \text{ y alternando } \begin{cases} P : p :: A : a \\ P : p :: B : b \\ P : p :: E : e \end{cases}$$

&c. &c.

Por la igualdad de las primeras razones (*Arit.* 25 *y* 253) serán A : B : : a : b...... A : E : : a : e, y asi de las demas: esto es, que las dimensiones del plano estarán entre sí en la misma razon que sus correspondientes de la figura grande.

253 Con el plano, acompañado de escala, no solo se puede formar una idea exacta de la disposicion y proporciones de la figura representada, sí que tambien se concibe su tamaño natural. En efecto, viendo cuántas partecillas de la escala contiene una abertura de compas igual á la dimension *a* del plano, se sabe de cuántos pies consta la dimension *A* correspondiente de la figura grande.

254 La representacion ó plano se dice que es de *punto mayor* cuando las partecillas de la escala que representan los pies son grandes, y se dice que es de *punto menor* cuando dichas partecillas son pequeñas.

255 Para acostumbrarse á comparar bien las figuras semejantes, conviene que al formar las proporciones se distingan con los nombres de primera y segunda, ú otros equivalentes; y tambien debe tenerse presente que la analogía solo se puede disponer de los dos modos que siguen:

1.° Tomando los dos antecedentes en la primera figura, y los dos consecuentes en la segunda, y entonces se dirá:

Una dimension cualquiera de la primera figura es á su homóloga en su segunda, como otra cualquiera dimension de la primera figura es á su homóloga en la segunda.

Cambiando los números de las figuras: esto es, empezando por la que antes se llamó segunda, y llamándola primera, se invierte la proporcion.

2.° Tomando los dos términos de la primera razon en la figura primera, y los de la segunda razon en la segunda; y entonces se dirá:

Una dimension cualquiera de la primera figura es á otra dimension cualquiera de la misma, como la dimension de la segunda figura homóloga al antecedente de la primera razon, es á la dimension de la segunda figura homóloga al consecuente de la primera razon.

La proporcion se invierte del mismo modo que la del número 1.°

256 Para aclarar esto con un ejemplo, sean (*fig.* 54) los triángulos semejantes ABE, abe, en los cuales se suponen señalados con las mismas letras los puntos correspondientes.

1.° Se dirá comparando segun el primer modo, ab (lado del primer triángulo) es á AB (su homólogo en el segundo), como be (otro lado del primer triángulo) es á BE (su homólogo en el segundo): esto es, $ab : AB :: be : BE$.

2.° Si se dijera $ab : BE$ &c., esto seria empezar mal, porque dichos lados ab, BE no son homólogos.

3.° Si se dijera $ab : AB :: BE$ &c., tampoco se compararia bien, por tomarse el antecedente de la segunda razon BE en el segundo triángulo.

4.° Comparando segun el segundo modo, se dirá ab (lado del primer triángulo) es á be (otro lado del mismo) como AB (lado del segundo triángulo homólogo al antecedente de la primera razon, que es ab) á BE (lado del segundo triángulo homólogo al consecuente de la primera razon, que es be): esto es, $ab : be :: AB : BE$.

5.° Si se dijera v. g. $ab : be :: BE$ &c., se compararia mal, porque el antecedente de la segunda razon (BE) no seria homólogo al antecedente de la primera (ab).

257 Para no cargar la memoria en acordarse de los ángulos iguales de los triángulos semejantes, conviene el irlos señalando (al paso que se va deduciendo su igualdad), v. g. los dos primeros con un arquito, como se ve en b y B (*fig.* 54); los dos segundos con una rayita, como se ve en a y A; y con esto se sabe que son iguales los terceros que quedan sin señalar e y E.

Acabado de nombrar el lado que es término de la proporcion, conviene añadir *opuesto á tal ángulo*, pues estando estos señalados, como se acaba de decir, se ve si son homólogos ó no.

258 Tambien se puede recurrir en muchos casos al arbitrio de señalar los puntos de una figura con las letras mayúsculas iguales á las minúsculas con que se hubiesen señalado sus correspondientes en la otra.

259 Si los triángulos estan construidos con propiedad, y las diferencias entre sus lados son considerables, se pueden tambien distinguir con las denominaciones de *lado mayor*, *mediano y menor*; y con las de *hipotenusa*, *cateto mayor y menor*, si los triángulos son rectángulos.

Todo esto se comprenderá mejor con las aplicaciones á los casos que vayan ocurriendo.

260 *Axioma.* Se puede concebir una figura semejante á otra, de cualquier tamaño que sea; y lo propio se entiende de los sólidos.

Esto es, que si una figura tiene un lado A, de cualquier tamaño que sea, puede existir otro figura semejante á ella, en la cual el lado correspondiente á A tenga otro valor a, cualquiera que sea.

261 *Corolario.* Si una figura f tiene una parte p semejante á la parte P de otra figura F; dichas figuras serán semejantes, siempre que dichas partes p y P sean tales que determinadas ellas queden determinadas las figuras f y F: esto es, que serán semejantes dos figuras f y F, siempre que resulten iguales en el caso de suponerse iguales las partes que tienen semejantes entre sí; y lo mismo se entiende de los sólidos.

En efecto, para construir una figura ó sólido f semejante á otra figura ó sólido F, se empezará haciendo v. g. un lado ó elemento del tamaño dado a. La extension de otro lado ó elemento b se hallará diciendo $A : a :: B : b$, la del lado ó elemento c se hallará diciendo $A : a :: C : c$, y asi de los demas; disponiendo estos elementos del mismo modo que los correspondientes de la figura ó sólido F, se irá formando la figura ó sólido f, semejante á la figura ó sólido propuesto (*art.* 248).

Cuando el número de partes menores, ó elementos a, b &c. sea tal que la parte p que resulta de su conjunto determina la figura ó sólido f, ya no estan en el arbitrio del que la construye los tamaños y disposicion de los elementos restantes: luego estos resultarán por precision semejantes á los de la figura ó sólido F, pues de otro modo no seria posible el hacer una figura ó sólido semejante á F, con el lado a semejante á A.

262 Todo esto se comprenderá mejor con las dos aplicaciones siguientes:

1.ª Si dos triángulos ABE, abe (*fig.* 54) tienen dos ángulos iguales, v. g. $a=A$ y $e=E$, tendrán semejantes las partes P y p compuestas de los lados AE, ae (*art.* 38) y de los ángulos adyacentes (*art.* 248); y como estas partes determinan los triángulos (*art.* 247 *núm.* 3.º), dichos triángulos serán precisamente semejantes.

En efecto, para formar sobre la ae un triángulo semejante al ABE, se deberá hacer el ángulo $a=A$, y el ángulo $e=E$. Es asi, que construidos dichos ángulos, queda determinado el triángulo, que debe ser precisamente el abe (*art.* 247 *núm.* 3.º): luego el triángulo abe es semejante á ABE, pues de otro modo no se podria construir un triángulo semejante á ABE, que tuviese un lado del tamaño ae.

2.ª Si un triángulo abe (que llamaremos f) tiene el ángulo b igual al ángulo B del triángulo ABE (que llamaremos F) y los lados ba, be, que forman dicho ángulo del triángulo f, son proporcionales con los correspondientes del triángulo F: dichos triángulos serán semejantes, respecto á que tienen semejantes las partes P y p que los determinan (*art.* 97).

En efecto, para formar un triángulo semejante al ABE sobre un lado ab, se debe formar el ángulo $b=B$, y el lado be debe hacerse igual al cuarto término de la proporcion $AB : BE :: ab : x$ (*art.* 248); y como be se supone que es igual al cuarto término de dicha proporcion, es evidente que el triángulo semejante al ABE debe tener la parte compuesta de los lados ab, be, y el ángulo b enteramente igual á dicha parte p del triángulo abe: luego (*art.* 97) dicho triángulo semejante á F es el mismo abe, pues de otro modo no se podria construir un triángulo semejante á F sobre un lado de la extension ab.

263 *Corolario.* De esto y de lo establecido sobre la igualdad de los triángulos (*art.* 247) resulta que dos triángulos serán semejantes en los casos siguientes:

1.º Si tienen los tres lados del uno proporcionales á los del otro.

2.º Si tienen dos lados del uno proporcionales á los dos del otro, y los ángulos formados por dichos lados iguales.

3.º Si tienen dos ángulos del uno iguales á los dos del otro.

4.° Si tienen dos lados del uno proporcionales á los del otro, y los ángulos opuestos al mayor de dichos lados iguales.

5.° Si tienen dos lados del uno proporcionales á los del otro, y los ángulos opuestos al menor de dichos lados iguales, con tal que sean de la misma especie los ángulos opuestos al lado mayor.

264 En el caso 3.° las partes semejantes P y p, que determinan los triángulos F y f, son los dos ángulos iguales y el lado que los forma, porque todas las rectas son semejantes (*art.* 38). Los demas casos no necesitan de aclaracion.

265 *Teorema.* Si entre los dos lados de un triángulo se tira una recta paralela al tercer lado, resultará un triángulo parcial semejante al total.

Demostracion. Sea (*fig.* 54) ABE el triángulo de que se trata, y ms la paralela á AE. Los triángulos ABE, mBs, tendrán el ángulo B comun; y los en E y s iguales por correspondientes, respecto de la secante BE (*art.* 201): por consiguiente serán semejantes (*art.* 263 *núm.* 3.°)

266 *Teorema.* Si entre dos líneas AB, EB (*fig.* 54), que prolongadas concurren en un punto B, se tiran varias rectas paralelas entre sí, las porciones correspondientes de una y otra línea interceptadas entre las paralelas, ó entre una paralela y el punto B, serán proporcionales.

Demostracion. Sean ms, nt, AE las paralelas; y por lo que se acaba de demostrar, los triángulos mBs, nBt, ABE serán semejantes entre sí; y tendrán sus lados homólogos proporcionales: esto es, que será $BE : Bt :: BA : Bn$. Dividiendo y comparando con los consecuentes (*Arit.* 255) será $BE - Bt : Bt :: BA - Bn : Bn$: esto es, $tE : Bt :: nA : Bn$, alternando (*Arit.* 253) $tE : nA :: Bt : Bn$.

Tambien será $Bt : Bs :: Bn : Bm$; que dividiendo y comparando con los antecedentes es $Bt - Bs : Bt :: Bn - Bm : Bn$: esto es, $st : Bt :: mn : Bn$, y alternando $st : mn :: Bt : Bn$. Se dedujo que es $tE : nA :: Bt : Bn$: luego por ser iguales las segundas razones de ambas proporciones, lo serán tambien las primeras: esto es, $st : mn :: tE : nA$, que es lo que se trataba de demostrar.

267 *Teorema.* En todo triángulo rectángulo el cuadra-

do de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los dos catetos.

Demostracion. Sea (*fig.* 55) *abc* el triángulo rectángulo en *b*, y bajada la perpendicular *be* desde el ángulo recto sobre la hipotenusa, quedará dividido en dos triángulos *aeb*, *ceb*, que llamaremos triángulos parciales de la izquierda y de la derecha. El de la izquierda tiene el ángulo *aeb* igual al *abc* del total, por ser dichos ángulos rectos, y el ángulo *a* es comun á los dos triángulos. Por consiguiente serán semejantes (*art.* 263 *núm.* 3.º). El triángulo de la derecha es tambien semejante al total, por tener el ángulo *c* comun, y los *ceb*, *cba* iguales por rectos. De aqui resulta que los triángulos *abc*, *aeb*, *ceb* son semejantes entre sí; y por lo tanto tendrán sus lados homólogos proporcionales (*art.* 248). Por consiguiente será *ab* (hipotenusa del triángulo de la izquierda) á *ac* (hipotenusa del total), como *ae* (cateto mayor del triángulo de la izquierda) á *ab* (cateto mayor del total): esto es, $ab : ac :: ae : ab$.

Es asi que en toda proporcion son iguales los productos de medios y extremos (*Arit.* 246): luego será $ab \times ab = ac \times ae$.

De la semejanza del triángulo de la derecha con el total se deduce por el mismo estilo que es $bc \times bc = ac \times ec$.

Sumando las cantidades de uno y otro lado (*Arit.* 26), será $ab \times ab + bc \times bc = ac \times ae + ac \times ec$, y por lo demostrado en la Aritmética (*Arit.* 105 *y* 106) será $ab \times ab + bc \times bc = ac \times (ae + ec)$ esto es, $ab \times ab + bc \times bc = ac \times ac$; y lo que es lo mismo (*Arit.* 209 *á* 219) será $(ab)^2 + (bc)^2 = (ac)^2$, que es lo que se acaba de demostrar.

Esta propiedad interesante, cuyo descubrimiento se debe á Pitágoras es de muchísimo uso en todas las matemáticas, y por lo tanto conviene tenerla muy presente.

268 *Corolario.* Si conociendo los valores de los dos catetos se quiere hallar el de la hipotenusa, no habrá que hacer mas que cuadrar los valores de los catetos (expresados en las mismas unidades), sumar dichos cuadrados, y extraer la raiz cuadrada de la suma.

V. g. Si un cateto es $= 3$ y otro $= 4$, será la suma de cuadrados $9 + 16 = 25$, cuya raiz cuadrada 5 será la hipotenusa.

Si la suma de cuadrados no tiene raiz cuadrada exacta (que es lo que sucede las mas veces) se puede hallar la raiz aproximada por el método sabido (*Arit.* 328).

269 *Corolario.* Si conociendo los valores de la hipotenusa y de uno de los catetos, se quiere hallar el valor del otro, se cuadrarán separadamente los valores de la hipotenusa y del cateto conocido, se hallará la diferencia de dichos cuadrados; y la raiz cuadrada del residuo será el valor del cateto que se trata de determinar.

V. g. Si la hipotenusa es 5, y el cateto 4, será el otro cateto$=(25-16)^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}}=3$. Aunque el residuo no tenga raiz cuadrada exacta, se puede hallar su valor con cuanta aproximacion se quiera, por el método sabido (*Arit.* 328).

270 *Corolario.* Todos los triángulos rectángulos que tengan iguales las hipotenusas y uno de los catetos, tendrán el otro cateto igual, y por lo tanto serán totalmente iguales (*art.* 114).

CAPITULO X.

DE LOS CUADRILATEROS Y POLIGONOS.

271 Se dijo (*art.* 77) que la figura rectilínea mas sencilla es el triángulo.

Despues del triángulo, la figura mas sencilla es el *cuadrilátero* ó figura de cuatro lados (*fig.* 56, 57, 58, 59, 60 y 61).

272 El cuadrilátero se llama

1.º *Trapezoides*, cuando no tiene lado alguno paralelo á otro (*fig.* 56).

2.º *Trapecio*, cuando solo tiene un lado paralelo á su opuesto(*fig.* 57).

3.º *Paralelógramo*, cuando tiene cada uno de los lados paralelo á su opuesto (*fig.* 58, 59, 60 *y* 61).

273 El paralelógramo se subdivide en

1.º *Oblicuángulo*, cuando sus ángulos son oblicuos (*figura* 58 *y* 59).

2.º *Rectángulo*, cuando sus ángulos son rectos (*fig.* 60 *y* 61).

274 El paralelógramo oblicuángulo se subdivide en

1.º *Romboides*, cuando los lados que forman un mismo ángulo son desiguales (*fig.* 58).

2.º *Rombo*, cuando los cuatro lados son iguales (*fig.* 59).

275 El rectángulo se subdivide en

1.º *Cuadrilongo*, cuando los lados que forman un mismo ángulo son desiguales (*fig.* 60).

2.º *Cuadrado*, cuando los cuatro lados son iguales (*fig.* 61).

276 Por esta razon se puede decir, que el cuadrado es una figura plana terminada por cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.

277 Se llama *base* de una figura el lado sobre que se considera formada.

278 En los triángulos se llama altura á la perpendicular á la base, ó á su prolongacion, bajada desde el ángulo opuesto.

279 En los paralelógramos se llama *altura* á la perpendicular comprendida entre dos lados, que se suelen llamar *bases*, y se distinguen con las denominaciones de *inferior* y *superior*.

280 En los trapecios se suele entender por *altura* la perpendicular comprendida entre los dos lados paralelos, que se denominan *base mayor y base menor*.

281 En toda figura rectilínea, se llama *diagonal* á la recta tirada de un ángulo á otro, que no sea el inmediato.

282 V. g. en la figura 55, si se considera el triángulo *abc* formado sobre el lado *ac*, será *ac* la base, y *bc* la altura. Si en el triángulo *abm* (*fig.* 69) se considera *am* como base, la altura será *bz*.

Si en el paralelógramo *asuma* (*fig.* 68) se considera *am* como base, la altura será *uz*, ó *em*, ó *ba*.

La *ez* (*fig.* 70) es la altura del trapecio *abeu*; *ea* es diagonal; *be* base menor; y *au* base mayor.

283 *Corolario.* En los rectángulos, la altura es el lado adyacente á la base; y en los cuadrados, la base y altura son iguales.

284 *Teorema.* La diagonal divide á todo paralelógramo en dos triángulos totalmente iguales.

Demostracion. Sea (*fig.* 63) *aebm* el paralelógramo. Tirada la diagonal *ab*, resultan los triángulos *aeb*, *abm*, que tienen el lado *ab* comun. El ángulo *abm* es igual al *bae*, por alternos respecto de la secante *ab* (*art.* 200); y lo propio les sucede á los *abe*, *bam*: luego los triángulos son totalmente iguales (*art.* 247 *núm.* 3.º); y lo mismo se demuestra tirando la diagonal de *e* á *m*.

285 *Corolario.* En todo paralelógramo, serán iguales entre sí los lados opuestos, y lo propio les sucede á los ángulos.

286 *Teorema.* Todo cuadrilátero, que tiene los lados opuestos iguales, es paralelógramo.

Demostracion. Sea (*fig.* 63) *aebm* el cuadrilátero, cuyos lados opuestos se suponen iguales. Tirada la diagonal *ae*, resultarán los triángulos *aeb*, *amb*, que tienen sus tres lados iguales; y por lo tanto serán totalmente iguales (*art.* 114): luego los ángulos *abm*, *bae* serán iguales; y como estos ángulos son alternos, las *ae*, *bm* serán paralelas (*art.* 204): luego los ángulos *abe*, *bam* tambien serán iguales; y por lo tanto serán tambien paralelas las *eb*, *am*: luego el cuadrilátero *aebm* tiene sus lados opuestos paralelos, y por consiguiente es paralelógramo.

287 *Corolario.* Los rectángulos de igual base y altura son totalmente iguales, puesto que tienen todos sus lados y ángulos iguales.

Dicha igualdad se puede demostrar por superposicion, por el mismo estilo que la de los triángulos (*art.* 247, *caso* 3.º).

288 A las figuras de mas de cuatro lados se da el nombre general de *polígonos*, y en rigor tambien pueden llamarse polígonos el triángulo y cuadrilátero.

El polígono de cinco lados se llama *pentágono*, el de seis *exágono*, el de siete *eptágono*, el de ocho *octágono*, el de nueve *eneágono*, el de diez *decágono* &c.; pero no hay inconveniente en decir un *polígono de seis lados* en vez de decir un *exágono*; y lo mismo se entiende de los demas.

289 Los polígonos en general se subdividen en *regula-*

res, cuando tienen iguales todos sus lados y ángulos; é *irregulares*, cuando les falta alguna de estas circunstancias.

290 A mas, se llaman *simétricos* los polígonos que tienen sus lados opuestos paralelos.

291 La circunferencia se puede considerar compuesta de un número infinito de puntos equidistantes, y se puede imaginar (*art.* 54 *y* 55) que cada dos puntos inmediatos componen una recta infinitesimal. Dichas rectas infinitesimales serán iguales, y los ángulos formados por cada dos de ellas se puede decir que tendrán por medida la mitad de la circunferencia, menos los arquitos diferenciales subtendidos por dichos lados (*art.* 216).

292 De estas consideraciones resulta que el círculo se puede considerar como *infinitángulo regular*: esto es, como un polígono regular de un número de lados infinito.

293 Se dice que un polígono está *inscripto* en un círculo, ó que el círculo está *circunscripto* al polígono, cuando los vértices de todos los ángulos están en la circunferencia.

Se dice que un polígono está *circunscripto* á un círculo, ó que el círculo está *inscripto* en el polígono, cuando todos los lados son tangentes á la circunferencia.

Asi, el exágono *zmprsxz* (*fig.* 62) estará inscripto en el círculo *ztmn* &c.; y el exágono *haqlogh* estará circunscripto á dicho círculo.

294 La recta *cm*, tirada desde el centro al vértice de un ángulo del polígono regular, se llama *radio mayor*, y es el radio del círculo circunscripto.

295 La perpendicular *cb*, tirada desde el centro al lado del polígono regular, se llama *radio menor ó apotema*; y es el radio del círculo inscripto.

296 Entendido esto, es fácil de comprender cómo se ha podido determinar la relacion entre el diámetro de un círculo y la circunferencia, con muchísima aproximacion, por el método siguiente:

1.° Sea (*fig.* 62) *c* el centro del círculo, *ct* perpendicular á *zm*, y *cu* perpendicular á *tm*. Si *zm* es el lado del exágono regular, el arco *ztm* será igual á 360° partidos por 6, que es igual á 60°; esto es, que *zm* será cuerda del arco de 60°, que por lo dicho (*art.* 242) será igual al radio mayor *cm*.

2.° La perpendicular *cbt* divide por mitad á la cuerda *zm* y á su arco *ztm* (*art.* 179): por consiguiente, si se supone el radio del círculo $cm = zm = 1000000$, será $bm = 500000$. Establecido esto, por ser el triángulo *cbm* rectángulo en *b*, con los valores de *bm* y *cm* se podrá hallar el del radio recto *cb*, con cuanta aproximacion se quiera (*art.* 269); y *cb*, restado de *ct*, dará el valor de la parte *bt*.

3.° Por ser $zt = tm$, la cuerda *tm* será lado del polígono inscripto de doce lados. En el triángulo rectángulo *mbt* se conocen los catetos *bm* y *bt*, y por lo tanto se podrá determinar el valor de la hipotenusa *tm* (*art.* 268), y el de su mitad *em*.

4.° Con este valor aproximado, y el del radio *cm*, se podrá determinar *ce* en el triángulo rectángulo *cem*. La perpendicular *ce* es radio recto del polígono de 12 lados, y restándolo de *cu* resultará conocido *eu*.

5.° Con *eu* y *em* se hallará por el mismo estilo el lado del polígono de 24 lados; y asi sucesivamente hasta hallar el valor del lado de un polígono inscripto de un gran número de lados.

6.° El valor del lado, multiplicado por el número de los lados, manifestará el valor del perímetro del polígono correspondiente al radio mayor 1000000. Si el número de los lados es muy crecido, el perímetro del polígono no diferirá sensiblemente de la circunferencia; y por lo tanto se tendrá por este método el valor de la circunferencia correspondiente al radio=1000000, con tanta mas aproximacion cuanto mayor fuese el número de lados del polígono cuyo perímetro se supone igual al del círculo circunscripto.

297 Con la inspeccion de la figura, y los principios establecidos, se comprende que si hay un polígono inscripto y otro circunscripto de igual número de lados, será *cb* (radio recto del inscripto) á *ct* (radio del círculo) como *bm* (mitad del lado del polígono inscripto) á *ta* (mitad del lado del circunscripto). Multiplicando á *bm* y *ta* por un mismo número (que es el duplo del número de lados) resultarán los valores de los perímetros de dichos polígonos. Por lo tanto (*Arit.* 257 *núm.* 2.°) será en general el radio recto del polígono inscripto al radio del círculo como el perímetro del polígono inscripto al perímetro del polígono circunscripto del mismo número de lados. Por este método se puede hallar el perímetro del polígono circunscripto, correspondiente al inscripto que se supone igual á la circunferencia con mucha aproximacion.

298 Como la circunferencia es mayor que el perímetro del polígono inscripto, y menor que el perímetro del circunscripto: si estos dos difieren entre sí, v. g. en una millonésima, es evidente que el valor hallado de la circunferencia debe diferir del verdadero en menos de una millonésima, luego no solo se puede hallar por este método la relacion aproximada del radio con la circunferencia, sí que se puede asegurar que el error no llega á una cantidad determinada, v. g. á un milésimo; á una millonésima &c.

Por este método y por otros mas expeditos se ha hallado que

299 Suponiendo que el diámetro es la unidad, la circunferencia vale 3'1415926536; y basta tomar las tres primeras cifras 3'14 para tener los resultados con menos de un milésimo de error. Haciendo uso de cinco cifras, será la circunferencia 3'1416, con menos de tres millonésimos de error.

Conviene aprender de memoria el número 3'1416, por el mucho uso que se hace de la relacion del diámetro con la circunferencia.

300 Como el radio es mitad del diámetro, se deberá suponer el radio$=\frac{1}{2}$ cuando se suponga la circunferencia$=3{,}1416$; y por lo tanto, para determinar el número de grados de un arco igual al radio, se dirá $3{,}1416 : 360^\circ :: \frac{1}{2} : x=57^\circ 3$ con corta diferencia: esto es, que

El arco de 57°3 es igual al radio del círculo con corta diferencia.

301 *Teorema.* Todos los círculos son figuras semejantes.

Demostracion. Los radios son líneas rectas, y por consiguiente semejantes (*art.* 38): es asi que de la igualdad de los radios se sigue la igualdad de los círculos (*art.* 109); luego todos los círculos serán semejantes entre sí, puesto que tienen semejantes las partes p y P que los determinan (*art.* 261).

302 *Corolario.* De aqui resulta que los círculos tendrán sus dimensiones homólogas proporcionales: esto es, los radios, diámetros, circunferencias, cuerdas y arcos de igual número de grados (*art.* 248).

303 *Corolario.* Siempre que se conozca el diámetro D de un círculo, expresado en cualesquiera unidades, se podrá hallar el valor de la circunferencia C en las mismas unidades, diciendo $1 : 3{,}1416 :: D : C = D \times 3{,}1416$.

304 Si lo que se conoce es el radio R, por cuanto es $2R=D$, se dirá : $1 : 3{,}1416 :: 2R : C = R \times 6{,}2832$.

305 Si se trata de determinar la extension E de un arco de un determinado número de grados G, se dirá $360^\circ : G :: C : E = \frac{G \times C}{360}$, y sustituyendo el valor hallado de C (*art.* 303), será $E = \frac{D \times G \times 3{,}1416}{360}$ $= 0{,}008727 \times D \times G$ (*Arit.* 143).

306 *Corolario.* Siempre que se conozca la circunferencia C de un círculo, se puede determinar el diámetro D diciendo: $3{,}1416 : 1 :: C : D = \frac{1 \times C}{3{,}1416} = \frac{10000 \times C}{3{,}1416} = 0{,}31831 \times C$ (*Arit.* 321 *y* 143).

Tomando la mitad del valor D, se tendrá conocido el radio R.

307 *Corolario.* Conocido el arco E de un determinado número de grados G, se puede determinar el radio diciendo, $G : 57^\circ 3 :: E : R = \frac{E \times 57^\circ 3}{G}$ (*art.* 300).

308 Si lo que se conoce es la circunferencia, será $G = 360$; y si lo que se conoce es la extension del arco de un grado, será $G = 1$, y $R = E \times 57°3$, con diferencia de un diez milésimo. Por consiguiente, si un grado tiene la extension de 20 leguas, el radio tendrá 1146, y el diámetro 2292. La primera de estas dos cantidades es la distancia que hay desde la superficie hasta el centro de la tierra; y la segunda es la longitud de la recta que atraviesa á la tierra de parte á parte, pasando por su centro.

CAPITULO XI.

DE LAS SUPERFICIES PLANAS.

309 Por superficie de una figura plana se entiende el espacio comprendido entre las líneas que la terminan.

310 *Corolario.* Todas las figuras totalmente iguales, esto es, todas las figuras iguales y semejantes (*art.* 15) serán iguales en superficie: esto es, serán iguales. Pero dos figuras pueden ser iguales, y tener una forma enteramente distinta.

311 *Corolario.* Si la base *FB* (*fig.* 64) de un rectángulo *FD* se divide en un número cualquiera de partes iguales, *Fc*, *cs*, *su* &c., y por las divisiones se levantan las perpendiculares *ci*, *sl*, *uz* &c., el rectángulo total quedará dividido en tantos rectángulos iguales *Fi*, *cl*, *sz* &c., cuantas son las partes iguales en que se ha dividido la base (*art.* 287).

312 *Corolario.* Considerando el lado *FH* como base y el *FB* como altura, se ve tambien que si la altura se divide en un número cualquiera de partes iguales, y por las divisiones se tiran paralelas á la base; el rectángulo total quedará dividido en tantos rectángulos iguales cuantas divisiones se hayan hecho en la altura.

313 *Teorema.* Los rectángulos de igual altura estan entre sí como sus bases; y los de igual base estan como las alturas.

Demostracion. Es evidente que la superficie del rectángulo *FD* (*fig.* 64 *y* 65) estará con la superficie de otro cualquier rectángulo *fd*, como el número de rectángulos sumamente pequeños en que se puede dividir el primero al número de los mismos rectángulos en que se puede dividir el segundo. Es asi que dichos números estan entre sí como las bases de los rectángulos FD, fd, de igual altura (*art.* 311): luego las superficies de dos rectángulos de igual altura estarán entre sí como las bases.

Supóngase ahora que las HF, hf son las bases iguales, y las FB, fb las alturas, y se demostrará del mismo modo (*art.* 312) que los rectángulos de igual base estan entre sí como sus alturas.

314 *Corolario.* Si FD es un cuadrado ó cuadrilongo: y Fc es los dos décimos de FB, el rectángulo Fi será los dos décimos del rectángulo FD. En general, si Fc es $\frac{1}{m}$ de FB, la superficie de $FHic$ (que llamaremos s), será $\frac{1}{m}$ de la superficie de $FHDB$ (que llamaremos S); puesto que debe ser $FB : FC :: S : s$: esto es, $m : 1 :: S : s = \frac{S}{m} = \frac{1}{m}$ *de* S (*Arit.* 269 *y* 177).

315 *Corolario.* Tambien se deduce (*art.* 313, y *Arit.* 281 *y* 283) que las superficies de los rectángulos estan entre sí como los productos de sus bases por las alturas.

316 Asi como para representar con números las longitudes de las líneas se toma como unidad una línea recta de una extension determinada, v. g. de un pie (*Arit.* 59 *á* 62); para expresar con números las extensiones de las superficies, será menester tomar por unidad una superficie de una extension determinada.

A la línea que se toma por unidad para expresar en números las longitudes de las demas líneas se da el nombre de unidad *lineal*; y á la superficie que se toma como unidad, para expresar la extension de las demas superficies, se dará el nombre de unidad *superficial*

317 Los Geómetras han convenido en tomar por unidad superficial la de un cuadrado cuyo lado es la unidad lineal.

318 El *pie cuadrado* ó *superficial* es un cuadrado cuyo lado es de un pie lineal. La *pulgada cuadrada* ó *superfi-*

cial es un cuadrado cuyo lado es de una pulgada lineal; y asi de las demas unidades.

319 Por esta razon, la magnitud de las superficies se expresa por medidas ó unidades cuadradas. Asi, cuando se dice que la superficie de un triángulo es de 20 pies, se entiende que son 20 pies cuadrados. Esto equivale á decir, que dicho triángulo contiene veinte veces á la superficie de un cuadrado cuyo lado es un pie. Por consiguiente, si el triángulo es un piso que se ha de enladrillar con ladrillos cuadrados cuyo lado es de un pie lineal, se necesitarán veinte ladrillos justos, aunque sea menester romper alguno de ellos, y acomodar sus pedazos, por la diversidad de la figura.

Se suele dar el nombre de *área* á la extension de una superficie; y asi en el ejemplo anterior se dirá que el área del triángulo es de 20 pies.

320 El pie lineal y el pie cuadrado son cantidades de distinta especie. Por consiguiente no se pueden comparar, y se deben distinguir mucho uno de otro. El pie lineal es una longitud, y el cuadrado es una superficie. Preguntar v. g. cuántos pies ó pulgadas lineales tiene un pie cuadrado, seria un despropósito tan grande como preguntar cuántas varas tiene una libra.

321 Es evidente que sobre la base de un rectángulo se puede formar una fila de tantos pies cuadrados cuantos son los pies lineales de dicha base: y en el rectángulo habrá tantas filas de cuadrados iguales á la formada sobre la base, cuantos pies lineales tiene la altura. Es asi que el número total de pies cuadrados es igual al número de los contenidos en una fila multiplicado por el número de filas: luego el número de pies cuadrados que contendrá un rectángulo, será igual al producto de los pies lineales que contiene la base por el número de pies lineales que contiene la altura.

V. g. si la base del rectángulo es de 6 pies y la altura de 7 pies habrá 7 filas de á 6 pies cuadrados cada una; y el rectángulo contendrá 42 pies cuadrados (*fig.* 66).

322 De lo establecido (*art.* 314) se sigue, que si la base del rectángulo contiene b pies mas $\frac{1}{m}$ de pie, cada fila contendrá b cuadrados de un pie y $\frac{1}{m}$ de dicho cuadrado; y si la

altura contiene el número de pies a mas $\frac{1}{n}$ de pie, el número de filas será a mas $\frac{1}{n}$: esto es, a mas una fila igual á $\frac{1}{n}$ del tamaño de cada fila (*Arit.* 96); luego el número de unidades cuadradas y partes de unidad será $\left(b+\frac{1}{m}\right)\times\left(a+\frac{1}{n}\right)$: esto es, igual al número de cuadrados y partes de cuadrado de cada fila, multiplicado por el número de filas y partes de fila.

323 Luego en general, la superficie de todo rectángulo es igual al producto de las unidades lineales de cualquiera clase contenidas en la base, por el número de unidades lineales de la misma clase contenidas en la altura.

324 Esta proposicion se abrevia diciendo, que la superficie de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura.

325 *Corolario.* La superficie de todo cuadrado será igual al cuadrado de su lado.

326 *Corolario.* Las superficies de varios cuadrados estarán entre sí como los cuadrados de sus lados: esto es, como los números que resultan elevando al cuadrado (*Arit.* 212) los valores de sus lados expresados en las mismas unidades.

327 *Corolario.* Por consiguiente, si dos dimensiones lineales estan entre sí como $L : l$, las correspondientes dimensiones cuadradas (esto es, las superficies de los cuadrados cuyos lados sean dichas dimensiones) estarán entre sí como $L^2 : l^2$.

328 V. g. por cuanto el pie lineal de Paris es al de Burgos como 7 : 6, los correspondientes pies superficiales estarán entre sí como 49 : 36. Por cuanto el pie lineal es á la pulgada como 12 : 1, el número de pulgadas superficiales contenidas en el pie superficial será $(12)^2=144$. Por cuanto la braza contiene seis pies, la braza superficial constará de 36 pies superficiales.

Se debe tener esto muy presente, para no equivocarse en las reducciones de las unidades superficiales de especies mayores á menores, ó de estas á aquellas (*Arit.* 178 á 186).

329 *Teorema.* Un rectángulo y un paralelógramo oblicuángulo, de igual base y altura, son iguales.

Demostracion. Imagínese la base inferior del paralelógramo oblicuángulo colocada sobre la del rectángulo (*fig.* 67 *y* 68) como *abem*, *asum*; y la base superior *su* del paralelógramo oblicuángulo formará una misma recta con la base superior del rectángulo *be*; pues á no ser asi, la altura *uz* no seria igual á la altura *ab*. Establecido esto, ó el lado *as* del paralelógramo oblicuángulo caerá dentro de la base superior del rectángulo, como en la figura 67, ó fuera, como en la figura 68. En ambos casos (*fig.* 67 *y* 68) los triángulos rectángulos *bas*, *emu* tendrán iguales las hipotenusas *as*, *mu*, y los catetos *ab*, *me*, por lados opuestos de unos mismos paralelógramos (*art.* 285). Por consiguiente dichos triángulos son totalmente iguales (*art.* 270).

Demostrado esto, en el caso de la figura 67, agréguese á ambos triángulos el trapecio *asem*, y las sumas, que son el rectángulo *ae* y el paralelógramo oblicuángulo *au*, serán iguales (*Arit.* 26).

En el caso de la figura 68, quítese de ambos triángulos *bas*, *emu* el triángulo *ecs*, y los resultados, que son los trapecios *beca*, *uscm* serán iguales (*Arit.* 26). Agréguese á ambos trapecios el triángulo *acm*, y las sumas, que son el rectángulo *ae* y el paralelógramo oblicuángulo *au*, serán iguales (*Arit.* 26).

330 *Corolario.* De esto resulta (*art.* 324) que la superficie de todo paralelógramo se hallará multiplicando la base por la altura.

331 *Corolario.* Todos los paralelógramos de igual base y altura son iguales.

332 *Teorema.* Si un triángulo y un paralelógramo tienen igual base y altura, el triángulo será mitad del paralelógramo.

Demostracion. Sea (*fig.* 69) el triángulo *abm*, cuya base es *am*, y la altura *bz*. Tírese por *b* la recta *be* paralela á la base *am*, y por *m* la *me* paralela al lado *ab*; y resultará formado el paralelógramo *abem*. Dicho paralelógramo se compone de los triángulos iguales *amb*, *ebm* (*art.* 284). Por consiguiente el triángulo propuesto *amb* será mitad del paralelógramo *abem* de igual base y altura. De esto y de lo establecido (*art.* 331) resulta que el triángulo será mitad de todos los paralelógramos de igual base y altura.

333 *Corolario.* De aqui se sigue (*art.* 330) que la superficie del triángulo se hallará multiplicando la base por la altura, y tomando la mitad del producto.

334 *Corolario.* Respecto á que lo mismo es tomar la mitad del producto que multiplicar el uno de los fractores por la mitad del otro (*Arit.* 101), tambien se hallará la superficie del triángulo multiplicando la base por la mitad de la altura, ó la altura por la mitad de la base.

335 *Corolario.* Todos los triángulos de igual base y altura son iguales.

336 *Corolario.* La superficie de los triángulos estarán entre sí como las mitades de los productos de sus bases por sus alturas; y como las mitades estan entre sí como los todos (*Arit.* 257); estarán tambien entre sí las superficies de los triángulos como los productos de sus bases por sus alturas.

337 *Teorema.* La superficie del círculo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del radio.

Demostracion. El círculo se puede imaginar como un polígono regular de un número de lados infinito (*art.* 292); é imaginando que desde el centro salen radios á todos los puntos de la circunferencia, quedará dividido el círculo en un sinnúmero de triángulos que tienen su vértice en el centro. La superficie de cada uno de estos triángulos diferenciales será igual al producto de la mitad del radio (que es la altura de todos ellos) por el arquito diferencial (que es la base); y por lo tanto (*Arit.* 105), la superficie de todos los triángulos será igual al producto de la mitad del radio por la circunferencia, que es la suma de todas las bases.

338 *Corolario.* Tambien se hallará la superficie del círculo multiplicando la circunferencia por el radio, y tomando la mitad del producto; ó multiplicando el radio por la mitad de la circunferencia (*Arit.* 101).

339 *Problema.* Conociendo el radio R de un círculo, hallar su superficie.

Resolucion. Se halló (*art.* 304) que la circunferencia correspondiente al radio R es $C=6'2832\times R$, y su mitad será $3'1416\times R$, que multiplicada por el radio, dará la superficie $S=3'1416\times R^2$: esto es, igual á la razon del diàmetro á la circunferencia (*art.* 299) multiplicada por el cuadrado del radio.

V. g. si el radio es de 5 pies, la superficie de círculo será $S=3'1416\times 25=78'54$ pies cuadrados, que son 78 pies, 77 pulgadas, y 109 líneas.

340 Si se quiere usar de los logaritmos, se sumará el logaritmo de

3'1416, que es 0'4971499, con el logaritmo del radio escrito dos veces, y el número correspondiente al logaritmo que resulte, será el valor de la superficie del círculo (*Arit.* 310 *y* 327).

341 *Problema.* Hallar la superficie de cualquiera figura plana rectilínea.

Resolucion. Divídase la figura propuesta en triángulos por medio de las diagonales tiradas de un ángulo á los demas. Hállese la superficie de cada triángulo (*art.* 333 *y* 334); y sumando las superficies de todos ellos, se tendrá la superficie de la figura.

342 *Teorema.* La superficie de un trapecio es igual al producto de la altura por la semisuma de sus bases.

Demostracion. Sea (*fig.* 70) *abeu* el trapecio; y tirada la diagonal *ae*, quedará dividido en los dos triángulos *abe*, *eau*, cuya altura es igual á *ez* (*art.* 188 *y* 189). La superficie *S* del trapecio será igual á la suma de las superficies de los triángulos de que se compone: esto es, $S=\frac{1}{2}\text{be}\times\text{ez}+\frac{1}{2}\text{au}\times\text{ez}=\left(\frac{1}{2}\text{be}+\frac{1}{2}\text{au}\right)\times\text{ez}=\frac{\text{be}\times\text{au}}{2}\times\text{ez}$ (*Arit.* 106).

343 *Problema.* Hallar la superficie de cualquiera figura plana curvilínea, con aproximacion.

Resolucion. Sea (*fig.* 71) *bpqsb* la figura curvilínea de que se trata.

1.º Tírese la recta *bq*, que atraviese á la figura por su mayor largo, y llámese *eje de las abscisas.*

2.º Divídase el eje de las abscisas *bq* en un número crecido de partes iguales *ba*, *ac*, *ec* &c.; de suerte que las porciones correspondientes de las curvas *bd* y *bf*, *dh* y *fl*, *hp* y *ls* &c. sean sensiblemente rectas.

3.º Hállense las longitudes de las *daf*, *hel*, *pcs* &c. perpendiculares á la *bq*, que llamaremos *ordenadas.*

4.º Súmense todas las ordenadas, multiplíquese dicha suma por la distancia *ac* de una á otra (esto es, por el valor de una de las porciones iguales del eje de las abscisas), y resultará la superficie que se trata de determinar.

344 *Demostracion.* Llamando *d* á las distancias iguales

ba, *ae*, *ec* &c., tendremos que la superficie del.........................

triángulo *bdf* es.. $\frac{1}{2}\text{df} \times \text{d}$

la del trapecio *hf* es...$\left(\frac{1}{2}\text{df} + \frac{1}{2}\text{hl}\right) \times \text{d}$

la del trapecio *pl* es...$\left(\frac{1}{2}\text{hl} + \frac{1}{2}\text{ps}\right) \times \text{d}$

la del trapecio *us* es...$\left(\frac{1}{2}\text{ps} + \frac{1}{2}\text{um}\right) \times \text{d}$

la del triángulo *uqm*.. $\frac{1}{2}\text{um} \times \text{d}$. Por lo

dicho en la Aritmética (*Arit.* 105) será la superficie total S $=$
$\left(\frac{1}{2}\text{df} + \frac{1}{2}\text{df} + \frac{1}{2}\text{hl} + \frac{1}{2}\text{hl} + \frac{1}{2}\text{ps} + \frac{1}{2}\text{ps} + \frac{1}{2}\text{um} + \frac{1}{2}\text{um}\right) \times \text{d}$
$= (\text{df} + \text{hl} + \text{ps} + \text{um}) \times \text{d}$, que es lo que se trataba de demostrar.

345 Si la figura está terminada en la recta *um*, la mitad de la última ordenada *um* solo entrará una vez en el multiplicando, y en tal caso, se deberá sumar la mitad de la última ordenada con todas las demas.

346 Si las distancias entre las ordenadas son desiguales, se multiplica la semisuma de cada dos ordenadas por la distancia de una á otra: y con esto se halla la superficie del trapecio, cuyas bases son dichas ordenadas; y se practica lo mismo con todas las demas. Si la curva remata en punta, se hallan tambien las superficies de los dos triángulos extremos, multiplicando la mitad de cada una de las últimas ordenadas de uno y otro extremo, por su distancia al extremo correspondiente. Se suman todas las superficies parciales, y el resultado es el todo de la superficie comprendida por la curva.

Este último método es preferible, cuando hay dificultad en medir muchas ordenadas; y mas si la curva se aleja en unas partes mucho mas que en otras de la línea recta. En tal caso, se tiran las ordenadas mas espesas en los parages en que es mucha la curvidad, y mas claras en los parages en que la curvidad es menos sensible.

347 El error de este método aproximado es la suma de los segmentos comprendidos entre las cuerdas *bd* (*fig.* 71), *bf*, *dh*, *fl* &c., y los arcos de curva que subtenden.

348 Cuando la convexidad de la curva cae hácia la parte exterior, como en la figura 71, el error del método es siempre por defecto: esto es, que resulta siempre una superficie algo menor que la verdadera.

349 Cuando la concavidad cae hácia la parte exterior, como en la figura 72, el error es por exceso: esto es, que resulta siempre una superficie algo mayor que la verdadera.

350 Si la convexidad de la curva cae en unas partes hácia lo exterior, y en otras hácia lo interior de la figura, el error absoluto será igual á la diferencia de los errores por defecto y por exceso. Dicho error absoluto será de la especie del mayor de los errores expresados; y será cero si son los dos iguales.

351 Si las dos curvas son iguales y semejantes, como en las figuras 71 y 72, se puede hallar el área comprendida entre la curva y el eje de las abscisas *bq*, y su duplo será la superficie total.

352 Si (*fig.* 73) *biltqrheb* es la curva que resulta de la seccion de un navío por la lumbre del agua, se puede suponer (sin considerable error) que la superficie de la figura curvilínea es un medio entre las superficies del rectángulo *uf*, y cuadrilátero *blqhb*.

Llamando m á la anchura hl, y e á la longitud bq, la superficie del rectángulo será $m \times e$; y la del cuadrilátero (*art.* 333) será $\frac{1}{2}(\text{hl} \times \text{bc} + \text{hl} \times \text{cq}) = \frac{1}{2}\text{hl} \times (\text{bc} + \text{cq}) = \frac{1}{2}(\text{m} \times \text{e})$. Tomando un medio entre las superficies de las figuras rectilíneas, resultará la curvilínea $S = \frac{1}{2}(\text{m} \times \text{e}) + \frac{1}{4}(\text{m} \times \text{e}) = \frac{3}{4}(\text{m} \times \text{e}) = (\text{m} \times \text{e}) - \frac{1}{4}(\text{m} \times \text{e})$.

Por consiguiente, se obtendrá el área de la seccion del navío por la lumbre del agua, sin considerable error, multiplicando el largo por el ancho, y disminuyendo el producto en una cuarta parte.

354 V. g. si la mayor anchura, ó *manga* del navío, es $m = 42$ pies, y

la longitud, ó *eslora*, es e=148 pies, será m×e=.......................... 6216

El $\frac{1}{4}$ es.. 1554

El área de la seccion S (*).. 4662

355 *Teorema.* Las superficies de los triángulos semejantes estan entre sí como los cuadrados de sus dimensiones homólogas.

Demostracion. Sea *A* la altura, *B* la base, *S* la superficie, y *L* una dimension cualquiera del uno de los triángulos; y *a*, *b*, *s*, *l* las dimensiones correspondientes del otro triángulo.

Por la semejanza de los triángulos serán $\left\{\begin{matrix} A : a :: L : l \\ B : b :: L : l \end{matrix}\right\}$; y multiplicando los términos correspondientes de ambas proporciones (*Arit.* 263),

será.. $A \times B : a \times b :: L^2 : l^2$.

Es asi (*art.* 336) que.......... $A \times B : a \times b :: S : s$.

Luego (*Arit.* 25) será.......... $S : s :: L^2 : l^2$, que es lo que se trataba de demostrar.

356 *Teorema.* Las superficies de cualesquiera figuras semejantes estan entre sí como los cuadrados de sus dimensiones homólogas.

Demostracion. Si dos figuras son semejantes, tirando en una y otra diagonales entre los ángulos correspondientes, quedarán ambas divididas en triángulos; y los lados de los triángulos de la una serán proporcionales con los lados de los triángulos de la otra (*art.* 248). Por consiguiente los triángulos *A*, *B*, *C* &c., en que resulta dividida la primera figura, serán semejantes á los *a*, *b*, *c* &c., en que resulta dividida la segunda (*art.* 263 *núm.* 1.º). Por lo que se acaba de demostrar (*art.* 355) es $L^2 : l^2 :: A : a$, representando *L* y *l* dos dimensiones homólogas de los triángulos *A* y *a*.

Si *H* y *h* son otras dos dimensiones homólogas de las figuras deberá ser (*art.* 248).............................. $L : l :: H : h$.

(*) Este resultado es $\frac{1}{8}$ menor que el verdadero en el navío que toma por ejemplo el Excmo. Sr. D. Jorge Juan en el segundo tomo del Exámen Marítimo; y se acercará mas á la verdad en los navíos que tienen sus extremidades mas delgadas.

10

Por consiguiente (*Arit.* 212 *y* 263)............... $L^2 : l^2 :: H^2 : h^2$.
Se halló antes.. $L^2 : l^2 :: A : a$.
Luego (*Arit.* 25) será.. $H^2 : h^2 :: A : a$.

Esta misma demostracion se aplica á todos los triángulos; y por lo tanto

$$\text{será}\ldots\ldots \begin{cases} H^2 : h^2 :: A : a. \\ H^2 : h^2 :: B : b. \\ H^2 : h^2 :: C : c. \end{cases}$$

Luego por la igualdad de razones (*Arit.* 269) será $H^2 : h^2 :: (A+B+C+\&c.) : (a+b+c+\&c.)$: esto es, H^2 á h^2, como la suma de triángulos de que se compone la primera figura, á la suma de triángulos de que se compone la segunda.

Aunque las figuras sean curvilíneas, se pueden imaginar divididas en infinitos trapecios (*art.* 343); y cada trapecio se puede imaginar dividido en dos triángulos: luego las superficies de las figuras semejantes, aunque sean curvilíneas, estarán entre sí como los cuadrados de sus dimensiones homólogas.

357 Esta proposicion, que se extiende á las superficies de los sólidos, es sumamente interesante.

V. g. si dos buques B y b son semejantes, el número de planchas de cobre que se necesitan para aforrar el primero, es el número de planchas que se necesitan para el segundo, como el cuadrado de cualquier dimension del buque B, al cuadrado de la dimension correspondiente de b.

358 Si los perímetros de dos maromas estan entre sí como P á p, el número de hilos que contendrán, y por consiguiente sus resistencias, estarán entre sí como P^2 á p^2: esto es, que siendo iguales todas las demas circunstancias, la resistencia de un cable de 20 pulgadas es á la de un cable de 26 pulgadas como $(20)^2 : (26)^2$: esto es, como 400 : 676, ó como 100 á 169 (*Arit.* 257).

CAPITULO XII.

DE LAS LINEAS QUE SE HALLAN EN DISTINTOS PLANOS.

359 Cuando se trata de las propiedades de los *planos*, se suponen estos prolongados indefinidamente.

360 De la definicion de los planos (*art.* 44) se sigue, que

si una recta tiene dos puntos en un plano, estará toda ella en dicho plano.

361 *Teorema.* Tres puntos, que no estan en línea recta, determinan la posicion de un plano.

Demostracion. Supóngase que dos planos (*fig.* 74) tienen comunes los tres puntos a, b, e; y tiradas las rectas ab, ce, que se corten en m, toda la ab estará en dichos dos planos, y tambien la ce, que tiene en ellos los puntos m y e (*art.* 360). Sentado esto, sea t un punto cualquiera del uno de los planos. En dicho plano tírese por t la hg oblicua á las ab, ce; y por tener esta línea los puntos n y p en el otro plano, estará toda ella en él (*art.* 360), y por consiguiente en ambos planos: luego si dos planos tienen comunes tres puntos, que no estan en línea recta, todos los puntos del un plano serán comunes al otro, y por lo tanto se confundirán: luego por tres puntos que no estan en línea recta, solo puede pasar un plano, cuya posicion está determinada por dichos tres puntos.

362 *Corolario.* De esto se sigue que una recta y un punto fuera de ella, ó dos rectas que se cortan, determinan la posicion de un plano.

363 *Corolario.* El plano puede girar sobre una recta; y por lo tanto, un número cualquiera de puntos en línea recta no bastan para determinar su posicion.

364 *Corolario.* La comun seccion de dos planos debe ser una línea recta: pues á no ser asi, tendrian comunes tres ó mas puntos que no estarian en línea recta; y por lo tanto se confundirian en un solo plano (*art.* 361).

365 *Corolario.* La comun seccion de dos círculos concéntricos debe pasar por el centro comun; y por lo tanto será un diámetro.

366 Se dice que una recta es perpendicular á un plano cuando cae sobre él sin inclinarse á un lado mas que á otro cualquiera.

367 Para convencerse de que esta definicion no encierra imposibilidad, imagínese que el plano del triángulo isósceles abc (*fig.* 75) gira sobre la base ab; y se concibe facilmente que las oblicuas iguales cb, ca (que caen á la derecha é iz-

quierda de la perpendicular *ce*) describirán unas superficies cuyas convexidades caerán á derecha é izquierda de dicha perpendicular. Lo mismo le sucederá á las oblicuas iguales *cn*, *cm*, &c.; y la perpendicular *ce* será la única línea que describirá la superficie de un círculo perpendicular á la *ab*.

368 *Corolario.* De lo dicho (*art.* 366 *y* 367) se sigue que la recta perpendicular á un plano, lo será á todas las rectas tiradas en dicho plano por el punto en que la perpendicular lo encuentra.

369 *Teorema.* De un punto tomado en el plano solo se puede levantar una perpendicular.

Demostracion. Sea la *ea* (*fig.* 76) perpendicular al plano *ft*; y si se dice que tambien puede serlo la *eh*, tirada la *pq* en el plano *aeh*, se seguirá que de un punto *e* se podrán levantar dos perpendiculares á una recta *pq* en un mismo plano *aeh*, lo cual es absurdo (*art.* 168): luego tambien lo es el que de un mismo punto puedan salir dos perpendiculares al plano.

370 *Teorema.* De un punto *a* (*fig.* 76) fuera de un plano *ft*, no se le puede bajar mas que una perpendicular *ae*.

Demostracion. Si la *ap* fuese tambien perpendicular, tirada la *pe*, resultaria que de un punto *a* se podrian bajar dos perpendiculares á la *pe* (*art.* 368) en un mismo plano *ape*, lo cual es absurdo (*art.* 171).

371 Por distancia de un punto á un plano se entiende la mas corta; y es evidente que esta es la perpendicular, porque (*fig.* 76) la oblicua *ap* es hipotenusa del triángulo *aep*, y por consiguiente mayor que *ae* (*art.* 233 *núm.* 1.º).

372 *Eje de un circulo* es la perpendicular que lo atraviesa por el centro.

373 *Teorema.* El eje de un círculo tiene cada uno de sus puntos igualmente distante de todos los puntos de la circunferencia.

Demostracion. Sea (*fig.* 77) *ca* el eje de un círculo *esmne*; y tiradas las oblicuas *an*, *am* &c. desde cualquier punto del eje á todos los de la circunferencia, resultan los triángulos *acn*, *acm* &c., que por tener el lado *ac* comun, los lados *cn*, *cm* &c., iguales por radios, y los ángulos en *c* rectos (*art.* 368), serán totalmente iguales (*art.* 97): luego las distancias *an*, *am* &c., que son las hipotenusas, tambien serán iguales.

374 *Teorema.* Si una perpendicular á un plano tiene un punto igualmente distante de tres del plano, será eje del círculo que pasa por dichos tres puntos.

Demostracion. Sea (*fig.* 77) *ac* la perpendicular al plano del círculo *nmen*, y *a* el punto que dista igualmente de los tres puntos *n*, *m*, *e*; y tiradas las *an*, *am* y *ae*, como tambien las *cn*, *cm*, *ce*, los triángulos rectángulos *acn*, *acm*, *ace*, que tienen las hipotenusas *an*, *am*, *ae* iguales, y el cateto *ac* comun, serán totalmente iguales (*art.* 270): luego serán iguales las *cn*, *cm*, *ce*; y por consiguiente será *c* el centro del círculo *emn*, y *ac* su eje.

375 *Teorema.* Si una recta tiene dos puntos, cada uno de los cuales dista igualmente de los mismos tres puntos tomados en un plano, será eje del círculo que pasa por dichos tres puntos.

Demostracion. Supóngase (*fig.* 77) que el punto *a* de la recta *auc* dista igualmente de los tres puntos *e*, *m*, *n*, y que le sucede lo mismo al punto *u*, y por el teorema antecedente la perpendicular bajada desde *a* pasará por el centro del círculo *emn*. Por el mismo teorema pasará por dicho centro la perpendicular bajada desde *u*. Pero de un punto *c* solo puede salir una perpendicular al plano (*art.* 369): luego las perpendiculares bajadas al plano de *a* y *u* formarán una sola recta, que pasará por el centro del círculo, y por consiguiente será su eje.

376 *Teorema.* Si una recta es perpendicular á otras dos que se cortan, será perpendicular al plano que dichas dos rectas determinan.

Demostracion. Sea (*fig.* 77) *ac* perpendicular á las *ns*, *bm*; y tomados los puntos *n*, *m*, *s*, equidistantes de *c*, resultan iguales los triángulos rectángulos *acn*, *acm*, *acs* (*art.* 97); y por consiguiente el punto *a* distará igualmente de dichos tres puntos *n*, *m*, *s*, como tambien el punto *c*; y por el teorema antecedente será la *ac* perpendicular al plano.

377 *Teorema.* Una recta no puede ser perpendicular á dos planos que se cortan.

Demostracion. Si la recta *mc* (*fig.* 78) fuese perpendicular á los planos *mt*, *ct* (cuya comun seccion es *at*), dicha recta *mc* seria perpendicular á las *ma*, *ca* (*art.* 368), que determinan el plano *mac* (*art.* 362); y estas rectas serian perpendiculares á la *mc* (*art.* 164): luego de un punto *a* se podrian bajar dos perpendiculares á la *mc* en un mismo plano *mac*, lo que es imposible (*art.* 171).

378 *Angulo plano* es la abertura de dos planos que se terminan, ó se suponen terminados, en su comun seccion.

379 El vértice del ángulo plano, visto por la parte exterior, se llama *arista.* La arista es lo que en términos vulgares se llama esquina.

380 *Teorema.* El ángulo de la inclinacion de dos planos es igual al ángulo rectilíneo que forman dos perpendiculares á la comun seccion, tiradas cada una en su plano.

Demostracion. Imagínese (*fig.* 79) que el plano *abec*, compuesto de infinitas perpendiculares á la *ab*, se confunde con otro plano, el cual gira sobre la línea *ab*: y no hay duda en que, al paso que vaya aumentando la abertura de dichos planos, las perpendiculares (*) *ac'*, *nm'*, *be'* &c. del plano movible, describirán los arcos de círculo *cc'*, *mm'*, *ee'* &c., cuyos centros estarán en los puntos *a*, *n*, *b* &c., en que dichas perpendiculares encuentran á la comun seccion *ab* (*art.* 367). Dichos arcos (*fig.* 80) *ctc'*, *msm'*, *eue'* serán de 180° cuando el plano movible haya dado una media vuelta, tomando la posicion *abe'*, *c'*; y serán de 360° cuando vuelva á confundirse con el plano fijo, dando la vuelta entera. Luego por unas razones semejantes á las que se dieron (*art.* 96 *á* 134) sobre la medida de los ángulos rectilíneos, dichos arcos medirán la inclinacion de los planos. Pero los mismos arcos miden (*fig.* 79) los ángulos *cac'*, *mnm'*, *ebe'* &c. formados en sus centros por las perpendiculares á la comun seccion: luego el ángulo for-

(*) Se dan las denominaciones de *primera*, *segunda* &c. á las letras que llevan á su derecha una, dos &c. rayitas al modo de las de los minutos, segundos &c.

V. g. *ac'* se enuncia *ac primera*; a', c'' se enuncia *a primera*, *c segunda* &c.

mado por dichas perpendiculares es el de la inclinacion de los planos.

381 *Corolario.* Como los círculos que describen (*fig.* 79 *y* 80) las perpendiculares *ca*, *mn*, *eb* &c. tienen por eje la comun seccion *ab*, la medida del ángulo de la inclinacion de dos planos será el arco del círculo que está comprendido entre ellos, y tiene por eje la comun seccion.

382 *Corolario.* La suma de todos los ángulos formados por varios planos que tienen una comun seccion será de 360° (*art.* 141).

383 *Corolario.* Los ángulos formados sobre un plano, por varios planos que tienen una comun seccion, valdrán 180° (*art.* 143).

384 *Corolario.* El ángulo que un plano forma con otro hácia un lado será suplemento del que forma hácia el otro lado (*art.* 148).

385 *Corolario.* Los ángulos planos opuestos por el vértice serán iguales (*art.* 158).

386 Dos planos se dice que son perpendiculares cuando se encuentran sin inclinarse á un lado mas que á otro.

387 *Corolario.* Todo plano perpendicular á otro formará con él cuatro ángulos rectos (*art.* 163).

388 *Corolario.* Si un plano forma con otro un ángulo recto, le será perpendicular (*art.* 166).

389 *Corolario.* Si un plano *A* es perpendicular á un plano *B*, el plano *B* será tambien perpendicular al plano *A* (*art.* 164).

390 Todo plano que pasa por la perpendicular á otro, le será perpendicular.

Demostracion. Supóngase (*fig.* 81) que el plano *hf* pasa por la *ab* perpendicular al plano *tn*. Tírese en dicho plano *tn* la *am* perpendicular á la comun seccion *ec*; y el ángulo *bam* será recto (*art.* 368); pero el ángulo *bam* es el de la inclinacion de los planos (*art.* 380): luego dichos planos serán perpendiculares (*art.* 388).

391 *Teorema.* Si dos planos (*fig.*81) *hf*, *tn*, son perpendiculares, y en el segundo de ellos *tn* se tira la *ma* perpendi-

cular á la comun seccion *ec*, dicha *ma* será perpendicular al primer plano *hf*, y á todas las rectas tiradas en dicho primer plano por el punto *a* en que lo encuentra.

Demostracion. Levántese en el primer plano *hf* la *ab* perpendicular á la comun seccion *ec*; y por ser los planos perpendiculares, será recto el ángulo *bam* (*art.* 387 *y* 380); y la *ma* (perpendicular á las *ec*, *ab*) será perpendicular al plano *hf* (*art.* 376); y por consiguiente á todas las rectas tiradas en dicho plano por el punto *a* (*art.* 368).

392 *Teorema.* Si dos planos (*fig.* 78) *mt*, *an*, que se cortan son perpendiculares á un tercero *hf*, su comun seccion *ta* será tambien perpendicular.

Demostracion. Desde cualquier punto *u* de la comun seccion *ta* se puede tirar en el plano *an* una perpendicular al plano *hf* (*art.* 391); y desde el mismo punto se podrá tirar otra perpendicular á *hf* en el plano *mt*; pero dichas perpendiculares se confunden en una-sola (*art.* 370): luego esta será la comun seccion.

393 *Teorema.* Si un primer plano *mt*, que es perpendicular al segundo *hf* (*fig.* 78), tiene un punto *t* en la *ta* perpendicular al segundo plano, toda la *ta* estará en el primero.

Demostracion. Desde cualquier punto *t* se puede tirar en el plano *mt* una perpendicular al *hf* (*art.* 391); pero dicha perpendicular no puede ser distinta de la *ta* (*art.* 370): luego toda la *ta* está en el plano *mt*.

394 Por ángulo de una recta con un plano se entiende el que dicha recta forma con la comun seccion del plano de que se trata, y del plano perpendicular que pasa por ella.

V. g. si el plano es *ft* (*fig.* 76), y *ap* la recta, bajada la perpendicular *ae*, será *sptq* la comun seccion del plano *ft* con el plano perpendicular que pasa por la *ap* (*art.* 393 y 360); y *apq* será el ángulo que la recta forma con el plano.

395 De lo que se acaba de decir se deducen los corolarios siguientes:

1.º Toda recta *he* (*fig.* 76) que encuentra á un plano *ft*, forma con él dos ángulos *heq*, *hes*, cada uno de los cuales es suplemento del otro; y cuando no se advierte otra cosa, se entiende que se trata del agudo.

2.º El ángulo *heq* (*fig.* 76), que forma una recta *he* con un plano *ft*, es complemento del *hea* que forma dicha recta con la *ae* perpendicular al plano; respecto á que el ángulo *aeq* es recto (*art.* 368), y á que las *eq*, *ea* se hallan en el plano perpendicular que pasa por la *eh* (*art.* 393 *y* 394).

396 *Teorema.* Siempre que las perpendiculares á dos planos se encuentran ó cruzan en un punto, el ángulo que forman es igual al de la inclinacion de dichos planos.

Demostracion. Sean *pd*, *bq* (*fig.* 45) dos planos vistos de canto, cuya comun seccion *a* es perpendicular al plano del papel. Sean *ls*, *hf* las dos perpendiculares que tienen el punto *u* en el plano del papel; y por lo establecido (*art.* 393) estarán ambas en dicho plano, y serán perpendiculares á las *pd*, *bq* (*art.* 368): luego por lo demostrado (*art.* 210) será el ángulo *luh* igual á *bad*; pero el ángulo *bad* es el de la inclinacion de los planos, respecto á que las *ba*, *da* son perpendiculares á la comun seccion *a* (*art.* 368), y se hallan cada una en su plano (*art.* 380): luego el ángulo de las perpendiculares es igual al de los planos.

397 *Teorema.* Si dos planos *A* y *B* se cortan, los ángulos agudos que las perpendiculares al uno forman con el otro serán complemento de los ángulos formados por dichos planos.

Demostracion. Hechas las mismas suposiciones del artículo anterior de la figura 45, si las perpendiculares *ac*, *ae* salen de la comun seccion de los planos, es evidente que por ser *bac* recto, será *dac* complemento de *bad*; y por ser recto *pac*, será *qae* complemento de *paq*. Es asi que *dac* es igual á su correspondiente *dol*, y *qae* es igual á su correspondiente *qih*: luego todos los ángulos agudos que las perpendiculares al un plano forman con el otro plano son complementos del ángulo de la inclinacion de dichos planos.

398 *Corolario.* De lo que se acaba de demostrar resulta, que los ángulos agudos que las perpendiculares á un plano *A* forman con otro plano *B*, son iguales á los ángulos agudos que las perpendiculares al plano *B* forman con el plano *A*

(*Arit.* 25); y lo mismo se verifica con los ángulos obtusos, que son suplementos de los agudos.

399 Estas dos proposiciones (*art.* 397 *y* 398) se aplican igualmente á las líneas; y de la primera y de lo establecido (*art.* 60 *y* 183) resulta que el ángulo mixtilíneo *sae* (*fig.* 50) es complemento del rectilíneo *sac.*

400 En general, el ángulo mixtilíneo, ó curvilíneo, formado por un arco de círculo y por una línea (recta ó curva), será complemento del que dicha línea forma con el radio tirado al punto de interseccion.

401 Se dice que una línea es paralela á un plano cuando todos sus puntos se hallan á igual distancia de dicho plano: esto es, cuando todas las perpendiculares bajadas desde la línea al plano son iguales.

402 Se dice que dos planos *A* y *B* son paralelos cuando todos los puntos del uno se hallan á la misma distancia del otro: esto es, cuando son iguales todas las perpendiculares bajadas del plano *A* al plano *B*.

Sean *ab*, *cd* (*fig.* 82) dos rectas paralelas, y la *on* perpendicular á ellas. Imagínese que el conjunto de estas líneas gira sobre la *on* inmóvil, y no hay duda en que las *ab*, *cd* describirán dos círculos paralelos, cuyo eje comun será la *on*.

403 *Corolario.* Por el mismo método que se siguió tratando de las líneas (*art.* 188 *á* 195) se deduce que si dos planos *A* y *B* son paralelos, todas las perpendiculares al plano *A* serán perpendiculares al plano *B*: que si una misma recta es perpendicular á dos planos, dichos planos serán paralelos: que si dos planos son paralelos á un tercero, serán paralelos entre sí: que por un mismo punto solo puede pasar un plano paralelo á otro &c.

404 *Corolario.* Las comunes secciones de un plano cualquiera *A*, con dos planos paralelos *B* y *C*, serán paralelas, pues de lo contrario dichas comunes secciones, que estan ambas en el plano *A*, se encontrarian; y por lo tanto, se encontrarian los planos *B* y *C* en que se hallan.

405 *Teorema.* Los ángulos de la misma especie que una recta forma con dos planos paralelos son iguales.

Demostracion. Sean (*fig.* 82) *ab*, *cd* los planos vistos de canto, y *eo* la oblicua. Imagínese por la *eo* un plano perpendicular á los *ab*, *cd*, y resultará que *oed*, *eoa* son los ángulos que la recta forma con dichos planos (*art.* 394); y como estos son alternos respecto de las paralelas *ab*, *cd* (*art.* 404), serán iguales (*art.* 200); y lo mismo se demuestra de los ángulos obtusos, que son suplementos de los agudos.

CAPITULO XIII.

DE LOS SOLIDOS EN GENERAL.

406 En general se llama *poliedro* el sólido terminado por muchas caras planas.

Las denominaciones particulares de los poliedros son semejantes á las de los polígonos (*art.* 288). Asi, se llama *tetraedro* al sólido que se compone de cuatro caras, *exaedro* al sólido de seis caras, *octaedro* al de ocho &c.

407 Se llama *ángulo sólido* al que resulta del concurso de las aristas de varios planos que concurren en un punto y cierran espacio. Para que resulte ángulo sólido deben concurrir tres planos cuando menos.

408 El valor del ángulo sólido es la suma de los ángulos rectilíneos sucesivos formados por cada arista y su inmediata.

409 Las puntas de los cuerpos son los vértices de sus ángulos sólidos.

410 Los sólidos se llaman *regulares* cuando son totalmente iguales sus caras, y sus ángulos planos y sólidos; é *irregulares* cuando les falta alguna de estas circunstancias.

411 Por *base* de un sólido se entiende aquella de sus caras sobre que se imagina formado. Cuando el sólido tiene dos caras iguales y paralelas, se suelen comprender con el nombre de bases una y otra, distinguiéndolas con los epítetos de *superior* é *inferior*.

412 Por *altura* de un sólido de bases paralelas se entiende la distancia de la una á la otra: esto es, la perpendicular bajada de la una base á la otra, ó á su prolongacion.

413 Si el sólido remata en punta, se entiende por altura

la perpendicular bajada desde la punta ó cúspide del sólido á la base opuesta, ó á su prolongacion.

414 *Prisma* es un sólido que se puede dividir todo él en infinitas secciones iguales y paralelas á sus dos bases (*fig.* 83, 84, 85, 86 *y* 87).

415 El prisma se puede imaginar engendrado por el movimiento progresivo de una figura plana, que camina manteniéndose siempre paralela á sí misma, y de modo que todos sus puntos describen líneas rectas.

Si el triángulo (*fig.* 83) *abe* camina en estos términos hasta pasar de la oposicion *acb* á la *sud*, engendrará un prisma, cuyas bases serán dichos triángulos *aeb*, *sub*.

416 Tambien, si se imagina que de todos los puntos del perímetro de una figura plana se elevan rectas paralelas de igual extension, resultará un prisma, en el cual queda determinado el perímetro de la base superior por el conjunto de las extremidades de todas las paralelas.

417 El prisma se llama *recto* cuando las rectas tiradas por los puntos correspondientes de las bases superior é inferior son perpendiculares á ellas, y se llama *oblicuo* cuando dichas rectas son oblicuas á las bases.

Esto es, que si el prisma es recto, la recta tirada, v. g. desde el vértice del ángulo *u* (*fig.* 84), al vértice del ángulo correspondiente *e* será perpendicular á las bases, y será oblicua si el prisma es oblicuo (*fig.* 85).

418 Los prismas toman su nombre de las figuras que les sirven de bases.

Cuando la base es un triángulo se llama *triangular* (*fig.* 83), cuando es un cuadrilátero se llama *cuadrangular* &c.

419 Cuando la base del prisma es un paralelógramo se llama *paralelepípedo*, rectángulo ú oblicuángulo, segun el paralelógramo de su base (*fig.* 84 *y* 85).

420 Cuando la base del prisma es un círculo se llama *cilindro* (*fig.* 86).

421 *Corolario.* Todo prisma se termina por sus dos bases paralelas, y por tantos paralelógramos cuantos son los lados de estas.

422 *Corolario.* Si el prisma es recto se compondrá de las bases, y de tantos rectángulos cuantos son los lados de estas.

423 *Corolario.* La altura del prisma recto será cualquiera de los lados *sa*, *ue* &c. (*fig.* 84) de los paralelógramos que lo terminan.

424 *Corolario.* En el paralelepípedo se puede tomar cualquiera de sus seis caras como base.

425 Un paralelepípedo recto de seis caras totalmente iguales se llama *cubo* ó *exaedro regular* (*fig.* 87).

426 El cubo estará terminado por seis cuadrados iguales, que se cortan formando ángulos rectos.

Cualquiera de ellos se puede tomar como base, y cualquiera de sus lados como altura (*art.* 423).

Un dado es un cubo, ó exaedro regular.

427 Se llama *eje* del prisma á la recta que se termina en los centros de sus dos bases opuestas, como *zc* (*fig.* 83, 84, 85 *y* 86).

Por *centro* se entiende el de *gravedad*, cuya definicion é investigacion pertenecen á la Mecánica.

1.º En los polígonos regulares es dicho centro el del círculo circunscripto.

2.º En los polígonos simétricos es el punto en que se cortan las diagonales terminadas en los ángulos opuestos.

3.º En los triángulos es el punto en que se cortan las rectas tiradas desde el vértice de cada ángulo á la mitad del lado opuesto.

428 Como el cilindro tiene por base un infinitángulo (*art.* 292), se compondrá su superficie de un número infinito de paralelógramos (*art.* 421), que serán rectángulos si el cilindro es recto.

429 El cilindro recto se puede imaginar formado por la revolucion de un rectángulo alrededor de uno de los lados. El lado inmóvil será el eje; su paralelo engendrará la superficie convexa del cilindro, y sus perpendiculares las de las bases.

430 *Pirámide* es un sólido cuya superficie lateral se compone de infinitas rectas, que saliendo de todos los puntos del perímetro de la base, se terminan en un punto (*fig.* 88).

431 Se llama *vértice* de la pirámide al punto *z* en que concurren todas las rectas que la forman.

432 Se llama *eje* de la pirámide á la recta *zc* que va desde su vértice al centro de la base (*art.* 427).

433 La pirámide se llama *recta* ú *oblicua*, segun que el eje es perpendicular ú oblicuo á la base.

434 *Corolario.* En la pirámide recta el eje y la altura son una misma línea.

435 Las pirámides toman el nombre de la figura que les sirve de base; y asi se llama la pirámide *triangular*, *cuadrangular* &c., segun que su base es un triángulo, un cuadrilátero &c.

436 Cuando la base es un círculo, la pirámide se llama *cono* (*fig.* 89).

437 La superficie lateral de la pirámide se compondrá de tantos triángulos, cuanto es el número de lados de la base.

438 Como el cono tiene por base un infinitángulo regular, su superficie lateral se compondrá de infinitos triángulos.

439 El cono recto se puede imaginar engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo, que gira sobre uno de sus catetos. Dicho cateto será el eje del cono, el otro cateto engendrará la base, y la hipotenusa producirá la superficie convexa. Esta se compondrá de un número infinito de triángulos cuya altura es la hipotenusa, y cuyas bases componen la circunferencia descrita por su extremo.

440 En las pirámides triangulares (que tambien se llaman *tetraedros*) se puede tomar como base cualquiera de los cuatro triángulos que las terminan.

Por esta razon la pirámide triangular puede ser recta respecto de una base, y oblicua respecto de otra.

441 Se llama *pirámide truncada* á la que le falta una porcion en que está comprendido el vértice.

Cuando no se advierte otra cosa, se entiende que la seccion de la pirámide es paralela á la base: esto es, que lo que le falta es otra pirámide cuya base es la misma base menor de la pirámide truncada.

442 Si la pirámide truncada es un cono, se llama *cono truncado* (*fig.* 90).

443 *Corolario.* La superficie lateral de la pirámide trun-

cada constará de tantos trapecios cuantos lados tiene su base.

444 En el cono truncado será el número de trapecios infinito.

445 *Esfera* ó *globo* es el sólido engendrado por la revolucion de un semicírculo alrededor de un diámetro (*fig.* 91).

La esfera en término vulgar se llama *bola*. Las bolas de trucos y villar son esferas.

446 Como el centro *c* del círculo que gira sobre el diámetro *mp* se mantiene siempre á igual distancia de todos los puntos de la circunferencia *mbp*, y esta es la que describe la superficie convexa de la esfera, es evidente que todos los puntos de la superficie de la esfera estarán á igual distancia de su centro *c*.

447 Por esta razon se puede decir, que la esfera es un sólido terminado por una superficie curva, cuyos puntos se hallan á igual distancia de un punto llamado centro.

448 La recta *cb*, terminada en el centro y superficie de la esfera, se llama *radio*; y la recta *db*, que pasando por el centro se termina por ambos lados en la superficie, se llama *diámetro*.

449 *Corolario*. Todos los radios de una misma esfera son iguales entre sí, y á los del círculo generador; y lo propio les sucederá á los diámetros, que constan de dos rádios.

450 *Teorema*. Si un plano corta á la esfera, la seccion será un círculo, cuyo eje pasa por el centro de la esfera.

Demostracion. Sea (*fig.* 92) *esmne* la seccion de la esfera; y como todos los puntos de su superficie distan igualmente de su centro *a* (*art.* 447), tirada la perpendicular *ac*, resultarán iguales los triángulos rectángulos *ace*, *acs* &c., que tienen el cateto *ac* comun, y las hipotenusas *ae*, *as* &c. iguales (*art.* 270): luego serán iguales las *ce*, *cs* &c.; y por consiguiente será la seccion *esmne* un círculo, y *ac* su eje (*art.* 372).

451 Cuando la seccion es un círculo infinitesimal, el plano *tmu* (*fig.* 91) será tangente á la esfera.

452 *Teorema*. El círculo mayor resulta cuando el plano pasa por el centro de la esfera.

Demostracion. Sea (*fig.* 91) *ae* el diámetro de cualquier otro círculo, y haciendo pasar un plano por dicha *ae* y el centro *c*, será *db* el diámetro del círculo que tiene su centro en el de la esfera, y *ae* su cuerda: luego *db* es mayor que *ae*; y por consiguiente, el círculo cuyo diámetro es el de la esfera es mayor.

453 Por esta razon se llaman *círculos máximos* los que tienen su centro en el de la esfera; y los demas se llaman *círculos menores*.

454 *Corolario*. Todos los círculos máximos son concéntricos.

455 *Corolario*. Todos los círculos máximos tienen por radio el de la esfera, y por consiguiente son iguales.

456 *Teorema*. El círculo máximo divide la esfera en dos partes iguales.

Demostracion. De la rotacion del cuarto de círculo *mb* sobre el radio *mc* (*fig*. 91), resultará la mitad de la esfera que está terminada por la superficie del círculo cuyo radio es *cb*; y de la rotacion del cuarto de círculo *bp* resulta la otra mitad, terminada por el mismo círculo; pero el círculo cuyo radio es *cb* es máximo: luego el círculo máximo divide á la esfera en dos mitades.

457 A la mitad de una esfera se le da con mucha propiedad el nombre de *semiesfera* ó *hemisferio*.

458 *Eje de la esfera* se llama el eje de cualquiera de sus círculos; y por consiguiente pasa por el centro (*art*. 450) (*).

459 Los dos puntos *m* y *p* (*fig*. 91), en que el eje *mcp* de un círculo *db* corta á la esfera, se llaman *polos* de dicho círculo.

460 Los dos extremos de cualquier diámetro de la esfera se llaman *puntos diametralmente opuestos*.

461 *Corolario*. El plano *tu* (*fig*. 91), tangente á la esfera se puede considerar como la prolongacion de un círculo infinitesimal, cuyo centro y polo se hallan en el mismo punto de contacto *m*, y cuyo eje es el radio *cm* tirado á dicho punto (*art*. 451).

(*) *Eje* y *diámetro* de la esfera son una misma cosa, con la sola diferencia de que el nombre de *eje* hace relacion á los círculos á que es perpendicular el diámetro de que se trata; y lo mas comun es el llamar *eje* al diámetro sobre que gira la esfera, ó al diámetro sobre que se imagina que ha girado el semicírculo generador.

462 Se llama *casquete* á la porcion de la superficie de esfera comprendida entre un círculo y su polo mas inmediato.

463 Se llama *zona* á la porcion de la superficie de la esfera comprendida entre dos círculos paralelos.

464 Se llama *segmento* esférico á la porcion de esfera comprendida entre el plano de un círculo y su polo mas inmediato.

465 Es evidente que todas las esferas de igual radio son totalmente iguales, puesto que suponiendo que sus centros coinciden, sus superficies deberán ajustarse exactamente (*art.* 447).

466 De esto y de lo dicho anteriormente (*art.* 261) resulta que todas las esferas son semejantes; y por lo tanto tendrán todas las líneas homólogas proporcionales.

467 El determinar las superficies de los sólidos no tiene uso en la práctica ordinaria de la Navegacion; y ya se advirtió (*art.* 357) que las superficies de los sólidos semejantes estan entre sí como los cuadrados de sus dimensiones homólogas.

CAPITULO XIV.

DE LAS SOLIDECES.

468 Para representar en números las solideces de los cuerpos, se hace preciso escoger por unidad ó término de comparacion la solidez de un cuerpo determinado.

469 Los Geómetras han convenido en tomar por unidad de solidez la de un cubo cuyo lado es la unidad lineal.

470 Cada una de las seis caras de dicho cubo es un cuadrado que representa la unidad superficial (*art.* 426 *y* 317).

471 El *pie cúbico* es un cubo cuyo lado es de un pie lineal.

La *pulgada cúbica* es un cubo cuyo lado es una pulgada lineal; y asi de los demas.

472 Por esta razon se miden los sólidos por pies cúbicos, por pulgadas cúbicas &c.

Asi cuando se dice v. g. que la solidez de un cilindro es de 10 pulgadas, se entiende que contiene 10 pulgadas cúbicas; de suerte que si dicho cilindro fuese hueco, se llenaria echando en él diez veces el agua contenida en un cubo hueco de una pulgada de largo.

473 Sobre los pies lineal, cuadrado y cúbico conviene advertir lo mismo que se dijo de los dos primeros (*art.* 320): esto es, que son tres cantidades de distinta naturaleza, entre las cuales no cabe comparacion.

474 *Teorema.* Si n es el número de veces que una unidad lineal de la denominacion D incluye á otra unidad lineal de la denominacion d, será n^3 el número de veces que la unidad cúbica de la denominacion D incluye á la unidad cúbica de la denominacion d.

Demostracion. Supongamos (*fig.* 87) que ad es el cubo cuyo lado es la unidad de especie superior D (v. g. la vara).

Si n representa el número de veces que la dimension lineal de especie inferior d (v. g. el pie) está incluida en la de especie superior $D = bo = ae = oe = od =$ &c., será n el número de cubos de la denominacion inferior contenidos en la fila bo (v. g. 3).

El mismo número n será el de las filas de cubos menores que se terminan en el lado od.

Será pues $n \times n$ (v. g. 3×3) el número de cubos menores que contiene la primera tongada comprendida entre los planos bod, pcq, distantes una unidad menor d.

El número de tongadas iguales á esta, contenidas en la altura oe, será tambien n (v. g. 3). Por lo tanto, el cubo mayor ad contendrá n tongadas de $n \times n$, cubos menores cada una.

Luego el número de cubos menores contenidos en el cubo mayor ad, será $n \times n \times n = n^3$.

475 Síguese de esto que la vara cúbica contendrá el número de pies cúbicos $3^3 = 27$; y el número de palmos cúbicos $4^3 = 64$.

476 El número de pulgadas cúbicas contenidas en cada pie cúbico será $12^3 = 1728$.

Este mismo será el número de líneas cúbicas que contiene la pulgada, y el de puntos cúbicos contenidos en la línea cúbica.

Se debe tener esto muy presente para reducir las medidas cúbicas de especies superiores á inferiores, y estas á aquellas (*Arit.* 178 *á* 186).

477 *Corolario.* De aqui resulta que si dos cubos tienen por lados las dimensiones L y l, sus solideces estarán entre sí como L^3 á l^3, esto es, como los valores de sus lados elevados al cubo, ó lo que es lo mismo (*Arit.* 265) en razon triplicada de sus lados.

478 V. g. si un pie lineal de Burgos es al de Paris como 6 á 7, los correspondientes pies cúbicos estarán entre sí como 216 á 343; y por lo tanto, aunque el pie lineal de Paris solo excede al de Burgos en $\frac{1}{6}$, el pie cúbico de Paris excederá al de Burgos en mas de una mitad.

479 *Teorema.* La solidez de un prisma recto es igual al producto de la superficie de la base multiplicada por su altura.

Demostracion. De lo dicho sobre las superficies (*art.* 321) se sigue que sobre la base del prisma se podrán colocar tantos cubos iguales á la unidad, cuantas unidades cuadradas tiene dicha base. No es menos evidente que el número de tongadas de cubos iguales á la unidad, que se puede arreglar en la capacidad del prisma, es igual al número de unidades lineales que tiene la altura: luego el número de unidades cúbicas contenidas en el prisma será igual al producto de la superficie de la base por la altura del cuerpo: esto es, igual al número de cubos de cada tongada, multiplicado por el número de tongadas.

480 *Teorema.* Un prisma recto y otro oblicuo de igual base y altura, son iguales.

Demostracion. Si los dos prismas se imaginan divididos en un infinito número de secciones, por planos equidistantes y paralelos á sus bases, el número de secciones de uno y otro, y el tamaño de cada seccion, serán los mismos. Por consiguiente serán iguales las solideces de los prismas recto y oblicuo que resultan del conjunto de dichas secciones.

481 *Corolario.* De aqui resulta que en general (*art.* 479) la solidez de cualquiera prisma (recto ú oblicuo) es igual al producto de la superficie de su base por la altura del cuerpo.

482 Se tendrá muy presente que todas las dimensiones lineales de que se hace uso para hallar la solidez de un prisma, ó de otro cualquier cuerpo, deben ser de la misma especie; y el resultado manifestará las unidades cúbicas de dicha especie, contenidas en la capacidad del cuerpo: esto es, que si las dimensiones lineales son pies y fracciones de pie, el resultado serán pies cúbicos y fracciones de pie cúbico.

483 Las unidades cúbicas de una especie cualquiera se reducirán á otra especie determinada, teniendo presente lo advertido (*art.* 474 *á* 477): v. g. los pies cúbicos se reducirán á pulgadas multiplicándolos por 1728, y las pulgadas cúbicas se reducirán á pies partiéndolas por este mismo número (*art.* 476).

484 *Teorema.* Las solideces de los prismas semejantes estan entre sí como los cubos de sus dimensiones homólogas.

Demostracion. Sean S la superficie de la base, A la altura, y L una dimension lineal cualquiera del primer prisma; y s, a, l, las cantidades correspondientes del segundo, y resultará...

(*art.* 356)............................... $S : s :: L^2 : l^2$

y (*art.* 248)............................... $A : a :: L : l$

y (*Arit.* 263)............................... $S{\times}A : s{\times}a :: L^2{\times}L : l^2{\times}l$. Esto es, (*Arit.* 214) $S{\times}A : s{\times}a :: L^3 : l^3$.

Es asi que $S{\times}A$ es la solidez del primer prisma (*art.* 481), y $s{\times}a$ la del segundo: luego las solideces de dichos prismas estarán entre sí como sus dimensiones homólogas elevadas al cubo.

485 *Corolario.* Si dos sólidos cualesquiera son semejantes, se podrán considerar divididos en un infinito número de prismas semejantes, por medio de un sinnúmero de planos

paralelos, que corten semejantemente al uno y al otro. Establecido esto, de lo que se acaba de demostrar se sigue, que cada seccion del primer sólido estará con su correspondiente del segundo, como el cubo de una dimension cualquiera del primer sólido al cubo de la dimension homóloga del segundo: luego (*Arit.* 269) la solidez del primer cuerpo será á la solidez del segundo, como el cubo de una dimension cualquiera de dicho primer cuerpo es al cubo de la dimension homóloga del segundo.

486 *Corolario.* Por consiguiente, las solideces de todos los cuerpos semejantes estarán entre sí como los cubos de sus dimensiones homólogas.

487 Por via de ejemplo, supongamos dos embarcaciones enteramente semejantes, de las cuales la primera tenga siete pies de profundidad bajo del agua, y la segunda ocho; y resultará que las capacidades de dichos buques, (ó lo que es lo mismo las cargas que podrán transportar) estarán entre sí como $7^3 : 8^3 = 343 : 512$, que es muy próximamente como $2 : 3$. De esta consideracion resulta que si se aumenta un pie el fondo de un puerto en que antes solo podian entrar embarcaciones que calasen siete pies, en dicho puerto mejorado podrán abrigarse embarcaciones capaces de una mitad mas de carga.

488 *Problema.* Determinar con aproximacion la solidez de un cuerpo irregular.

Resolucion. 1.º Imagínese el cuerpo dividido en varias secciones, por medio de planos paralelos equidistantes, tan próximos, que las diferencias entre las dos bases de cada seccion sean pequeñas.

2.º Hállese separadamente la superficie de cada base superior é inferior por el método sabido (*art.* 343 *á* 355).

3.º Súmense todas las bases intermedias con la mitad de las dos extremas.

4.º Multiplíquese dicha suma por la distancia de un plano á su inmediato, y el resultado será la solidez que se trata de determinar.

5.º Si el sólido se termina por algun lado en punta, ó en una recta paralela á los planos, la superficie de la seccion extrema correspondiente á dicho lado será cero.

Demostracion. Sea (*fig.* 93) *bqzc* el cuerpo irregular de que se trata. Supóngase dicho cuerpo dividido en tres secciones, comprendidas entre los planos paralelos equidistantes *bc*, *il*, *op*, *qz*. Sea D la distancia de cada uno de dichos planos á su inmediato; esto es, $D = mn = ns = st$; y sean E, F, G, H las superficies que resultan de las secciones del sólido por los planos; y serán, con corta diferencia,

la solidez de la 1.ª seccion.. $\left(\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}F\right)\times D$

la solidez de la 2.ª seccion.. $\left(\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}G\right)\times D$

la solidez de la 3.ª seccion.. $\left(\frac{1}{2}G+\frac{1}{2}H\right)\times D$

Por consiguiente la solidez total será..

$$\left(\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}G+\frac{1}{2}G+\frac{1}{2}H\right)\times D =$$
$$\left(\frac{1}{2}E+F+G+\frac{1}{2}H\right)\times D.$$

489 Se pueden imaginar los planos mas inmediatos en los parages en que el sólido propuesto difiere mas de un prisma, y mas distantes en los parages en que difiere menos. En tal caso, se debe multiplicar la semisuma de las dos bases de cada seccion, por la distancia entre los dos planos paralelos que la determinan; y la suma de todos estos productos dará la solidez del cuerpo. Si la seccion última se acerca mucho á ser una pirámide, lo mas aproximado es multiplicar el tercio de la superficie de su base por su altura.

490 Conviene advertir, que multiplicando la semisuma de las dos bases paralelas de un cono truncado por su altura, el resultado es mayor que la solidez de dicho cono truncado. El error será de mucha consideracion si las dos bases paralelas del cono truncado se diferencian mucho; y será despreciable si la diferencia entre dichas superficies es muy pequeña.

491 Cuando la diferencia entre las superficies de las dos bases paralelas de una seccion es muy pequeña, basta el multiplicar la superficie de una de dichas bases por el espesor de

la seccion, para obtener su solidez con toda la aproximacion que se necesita en muchos casos.

V. g. Si S representa la superficie de la seccion de un navío cortado por la lumbre del agua, y D la distancia á otro plano que no diste mucho mas de dos pies de la lumbre del agua (hácia arriba ó hácia abajo), la solidez de la accion comprendida entre dichos planos será $S \times D$ con muy corta diferencia: esto es, que si se llama V el volúmen ó solidez de dicha seccion, será $V = S \times D$, y por consiguiente (*Arit.* 123) será $\frac{V}{S} = D$.

Esto tiene uso cuando se trata de determinar las variaciones del calado de un navío, correspondientes á los aumentos ó diminuciones de su carga.

492 Se han omitido las reglas para determinar con toda exactitud la solidez de una pirámide, de un cono, de un cono truncado, y de una esfera, porque no tienen uso en la práctica ordinaria de la Navegacion; y aunque dichas reglas son bastante breves, su demostracion exige varias proposiciones, que abultarian mucho este tratado.

CAPITULO XV.

NOCIONES GENERALES DE TRIGONOMETRIA PLANA LOGARITMICA.

493 *Trigonometría plana logarítmica* es la ciencia que enseña á resolver los triángulos rectilíneos, empleando los logaritmos de los valores de sus lados y de unas líneas que tienen relacion con los ángulos, y se designan con el nombre de *líneas trigonométricas*.

494 Se dice que se resuelve un triángulo cuando del conocimiento de los lados ó ángulos que lo determinan (*art.* 247) se deducen los valores de los lados y ángulos desconocidos.

495 Aunque en la explicacion de las líneas trigonométricas solo se tratará de arcos, se supone que las mismas líneas pertenecen á los ángulos medidos por dichos arcos.

496 Los diámetros perpendiculares *ha*, *mf* (*fig.* 94) se toman por términos de comparacion para determinar los valores de las líneas trigonométricas de los arcos, contados desde *a* en la direccion *afh* si son positivos, y en la *amh* si son

negativos. Las direcciones *ca*, *cf* se toman como positivas, y como negativas sus opuestas *ch*, *am* (*Arit.* 72).

497 Esto supuesto, *seno* de un arco es la perpendicular bajada desde el fin del arco sobre el diámetro que pasa por su principio.

V. g. el seno del arco *ab* (*fig.* 94) es *qb*. El seno del arco *af* de 90° es el radio *cf*. El seno del arco *afg*, mayor que el cuadrante, es *pg*.

498 *Corolario.* El seno de un arco es mitad de la cuerda del arco duplo: puesto que *bq* es mitad de *bn* (*art.* 179), que es la cuerda del arco *ban*, duplo de *ba*.

499 *Corolario.* De esto y de lo establecido anteriormente (*art.* 116 *y* 117) se sigue que en un mismo círculo, ó en círculos iguales á iguales arcos corresponderán iguales senos, y á iguales senos corresponderán iguales arcos menores que el cuadrante.

500 *Corolario.* El seno de un arco es igual al de su suplemento: puesto que si *afg* es suplemento de *ab*, será el arco *gh* igual al arco *ab*, y por consiguiente serán iguales sus senos *pg*, *qb*.

501 *Corolario.* Los senos de los arcos se aumentan desde el de 0°, que es cero, hasta el de 90°, que es igual al radio, y disminuyen desde el de 90°, que es igual al radio, hasta el de 180°, que es cero.

502 *Corolario.* Como la cuerda de 60° es igual al radio (*art.* 242), su mitad, que es el seno de 30° (*art.* 498), será mitad del radio: esto es, que el seno de 30° es mitad del radio ó seno de 90°.

503 Esto basta para convencerse de que los senos aumentan en una razon muy distinta de la de los arcos: puesto que el arco de 90° es triplo del arco de 30°, y el seno de 90° solo es duplo del seno de 30°.

504 *Coseno* de un arco es el seno del complemento del arco de que se trata.

V. g. el coseno de *ab* (*fig.* 94) será *db*, seno del complemento *bf*. El coseno del arco *af* de 90° es cero. El coseno del arco *afg*, mayor que el cuadrante, es la línea negativa *dg*, seno de *fg*.

505 *Corolario.* De esto y de lo dicho (*art.* 501) se sigue

que los cosenos disminuyen desde el de 0°, que es igual al radio, hasta el de 90°, que es cero; y aumentan, siendo negativos, desde el de 90°, que es cero, hasta el de 180°, que es igual al radio negativo.

506 *Corolario.* Las *ef*, *qb* son paralelas, por perpendiculares á la *ea* (*art.* 198): por consiguiente serán iguales las *db*, *eq* que miden sus distancias (*art.* 188): esto es, que el coseno de un arco es igual á la distancia del centro al seno.

507 *Corolario.* Todo arco mayor que el cuadrante tiene el mismo coseno que su suplemento, con la sola diferencia de ser negativo (*art.* 496).

508 *Corolario.* Conocidos los valores de los senos de todos los arcos, desde 0° hasta 90°, se conocerán sus cosenos: puesto que el seno de 30° es coseno de 60°, el seno de 60° es coseno de 30° &c.

509 *Corolario.* El coseno de 60° será mitad del radio (*art.* 502).

510 *Tangente trigonométrica* es la que tocando al arco en su principio se termina en la prolongacion del diámetro que pasa por su fin.

V. g. la *as* (*fig.* 94) es tangente del arco *ab*. La tangente del arco *af* de 90° será infinita, respecto á que, por mas que se prolongue la *as*, nunca encontrará á su paralela *ef*. La tangente del arco *afg*, mayor que el cuadrante, es la línea negativa *at*.

511 *Corolario.* Es evidente que las tangentes aumentan desde la de 0°, que es cero, hasta la de 90°, que es infinita; y disminuyen, siendo negativas, desde la de 90°, que es infinita, hasta la de 180°, que es cero.

512 *Teorema.* La tangente de un arco mayor que el cuadrante es igual á la de su suplemento, con la diferencia de ser negativa.

Demostracion. Si *afg* (*fig.* 94) es suplemento de *ab*, será el arco *gh* igual al arco *ab*; y por lo tanto serán iguales los ángulos *aeb*, *heg*, que tienen iguales arcos por medidas. Es asi que *aen* es igual á su opuesto por el vértice *heg*, (*art.* 158): luego será *aen* = *aeb* (*Arit.* 25). De la igualdad de los ángulos *aeb*, *aen* resulta la igualdad de los triángulos rectángulos *eas*, *eat*, que tienen el lado *ea* comun (*art.* 247 *núm.* 3.º); y de la igualdad de dichos triángulos, resulta la igualdad de los catetos *as*, *at*, que es lo que se trataba de demostrar.

513 *Teorema.* La tangente de 45° es igual al radio.

Demostracion. Si el ángulo *sea* (*fig.* 94) vale 45°, tambien valdrá 45° el ángulo *esa*, que es su complemento (*art.* 241). Por consiguiente el triángulo *eas* será isósceles (*art.* 237); y la tangente *as* será igual al radio *ea*.

514 *Cotangente* de un arco es la tangente del complemento del arco de que se trata.

V. g. la *fl* (*fig.* 94) es la cotangente del arco *ab*. La cotangente del arco *af* de 90° es cero. La cotangente del arco *afg*, mayor que el cuadrante, es la línea negativa *fu*.

515 *Corolario.* De esto y de lo dicho (*art.* 511) se sigue que las cotangentes disminuyen desde la de 0°, que es infinita, hasta la de 90°, que es cero, y aumentan, siendo negativas, desde la de 90°, que es cero, hasta la de 180°, que es infinita negativa.

516 *Corolario.* Tambien resulta (*art.* 513) que la cotangente de 45° es igual al radio.

517 *Secante trigonométrica* es la recta que sale del centro, pasa por el fin del arco, y se termina en la tangente que pasa por el principio.

V. g. la *es* es secante del arco *ab*. La secante del arco *af* de 90° es infinita. La secante del arco *afg*, mayor que el cuadrante, es la *et*.

518 *Corolario.* Las secantes aumentan desde la de 0°, que es igual al radio, hasta la de 90°, que es infinita; y disminuyen desde la de 90°, que es infinita, hasta la de 180°, que es igual al radio.

519 *Corolario.* La secante *et* (*fig.* 94) del arco mayor que el cuadrante es igual á la secante *es* de su suplemento por la igualdad de los triángulos rectángulos *eas*, *eat*, que se demostró anteriormente (*art.* 512).

520 *Cosecante* de un arco es la secante del complemento de dicho arco.

521 *Corolario.* De esto y de lo dicho (*art.* 518) se sigue

que las cosecantes disminuyen desde la de 0°, que es infinita, hasta las de 90°, que es igual al radio; y aumentan desde la de 90°, que es igual al radio, hasta la de 180°, que es infinita.

522 *Seno verso* de un arco es la porcion de diámetro comprendida entre el seno y el principio de dicho arco.

V. g. la *qa* (*fig.* 94) es el seno verso del arco *ab*. El seno verso del arco *af* de 90° es el radio *ea*. El seno verso del arco *afg*, mayor que el cuadrante, es *pa*.

523 *Coseno verso* de un arco es el seno verso del complemento de dicho arco.

V. g. la *df* (*fig.* 94) será el coseno verso del arco *ab*.

524 *Teorema.* El coseno de un arco es al seno como el radio es á la tangente.

Demostracion. Las perpendiculares *qb*, *as* (*fig.* 94) son paralelas entre sí (*art.* 193); y por lo tanto, los triángulos *eqb*, *eas* serán semejantes (*art.* 265), y tendrán sus lados homólogos proporcionales (*art.* 248); esto es, que será *eq* : *qb* : : *ea* : *as*; y por ser *eq* igual al coseno *db* (*art.* 506), será *db*, coseno de *ab*, á su seno *qb*; como *ea*, radio, es á *as*, tangente del mismo arco.

525 *Teorema.* El coseno de un arco es al radio como el radio es á la secante de dicho arco.

Demostracion. Por la semejanza de los triángulos *eqb*, *eas* (*fig.* 94) será *eq* : *eb* : : *ea* : *es*; y sustituyendo á *db* en vez de su igual *eq*, resultará *db* : *eb* : : *ae* : *es*, que es lo que se trataba de demostrar.

526 *Teorema.* La tangente de un arco es al radio como el radio es á la cotangente del mismo arco.

Demostracion. Los triángulos rectángulos *eas*, *efl*, (*fig.* 94) tienen los ángulos *esa*, *sef* iguales por alternos. Por consiguiente dichos triángulos serán semejantes (*art.* 263 *núm.* 3.°); y tendrán sus lados homólogos proporcionales: esto es, que será *as* : *ef* : : *ae* : *fl*, que es lo que se trataba de demostrar.

527 En las tablas de las líneas trigonométricas se supone el radio igual á la unidad con ceros, y en las que sirven para determinar los logaritmos de dichas líneas, es diez el nú-

mero de ceros; esto es, que el radio se supone$=$10 000 000 000; y por lo tanto (*Arit.* 303 *y* 306) su logaritmo será diez de característica, con ceros en la mantisa.

Supuesto el radio igual á diez mil millones, la Geometría suministra métodos para determinar los valores de las líneas trigonométricas de todos los arcos, en partes del radio. Por dichos métodos se obtienen los valores de las líneas expresadas, con toda la aproximacion que se quiere; y se omiten por no abultar este Tratado, y en atencion á que las tablas estan ya construidas, y lo que importa es el saber servirse de ellas.

De los valores de las líneas trigonométricas en partes del radio se deducen los logaritmos correspondientes.

V. g. por cuanto el seno de 30° es 5 000 000 000, su logaritmo será el de dicho número, que es 9'6989700.

Las tablas que contienen los valores de las líneas trigonométricas en partes del radio se suelen denominar *tablas de las líneas trigonométricas naturales.* En este Tratado solo se hará uso de las tablas que contienen los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes.

528 De lo dicho (*art.* 511, 513, 515, 516 *y* 527) se sigue que los logaritmos de las tangentes de los arcos menores que el cuadrante, que pasan de 45°, y los de las cotangentes de los arcos que no llegan á dicha cantidad, deben tener 10 ú 11 de característica. En las tablas suele omitirse la decena, que es fácil de suplir.

529 Aunque en la forma de dichas tablas cabe alguna variedad, por lo regular se disponen en términos que en las cabezas de las hojas, y en la primera columna de la izquierda se expresan los valores de los arcos ó ángulos desde 0° hasta 45°; y en el pie de las hojas y en la última columna de la derecha se expresan los valores de los arcos ó ángulos desde 45° hasta 90°. Con esto se logra el expresar los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de todos los arcos ó ángulos, desde 0° hasta 90°, sin repetir mas logaritmos que los de las líneas correspondientes á los 45°; y á mas cuando se trata de hallar los logaritmos de varias líneas trigonométricas pertenecientes á un mismo arco ó ángulo, dichos lo-

garitmos se encuentran en una misma línea. Para hacerse cargo de esto, basta el observar (teniendo las tablas á la vista) que el logaritmo del seno de un arco, segun la numeracion superior y la de la izquierda es logaritmo de coseno correspondiente á la numeracion inferior y la de la derecha.

530 Por consiguiente, si se pide el logaritmo de la línea trigonométrica de un arco ó ángulo menor que 45°, se buscará segun la numeracion superior y la de la izquierda; y si el arco ó ángulo pasa de 45°, se buscará en la numeracion inferior y la de la derecha.

531 Si dado el logaritmo de una línea trigonométrica se quiere saber el arco ó ángulo correspondiente, se busca en las tablas dicho logaritmo, ó los dos logaritmos próximos, mayor y menor, entre que está comprendido. El ángulo correspondiente será el que está escrito enfrente de dicho logaritmo, si se halla exactamente en la tabla; y si no, dicho ángulo estará comprendido entre los ángulos de las tablas correspondientes á los logaritmos que comprenden al propuesto.

532 Se podrá suponer en los mas casos que dicho ángulo es el correspondiente al logaritmo de las tablas que se diferencia menos del logaritmo dado.

533 Se tendrá presente, que si el logaritmo dado es de seno, y la columna en que se halla tiene el título de senos arriba y el de cosenos abajo, se debe buscar el ángulo segun la numeracion superior y la de la izquierda; pero si la columna en que se halla el tal logaritmo tiene el título de senos abajo y el de cosenos arriba, se debe buscar el ángulo segun la numeracion inferior y la de la derecha. Lo contrario se ejecutaria si el logaritmo perteneciese á un coseno. Esto mismo se tendrá presente por lo que respecta á los logaritmos de las tangentes y cotangentes.

534 Para las operaciones relativas á los triángulos rectilíneos y á los curvilíneos que forma la línea de la derrota que sigue la nave, basta hallar los valores de los ángulos con diferencia de un minuto; y esto se ejecuta fácilmente por medio de las tablas en que se expresan los logaritmos de las líneas trigonométricas de minuto en minuto.

535 Hay otros cálculos que exigen mayor exactitud; y con este motivo se han construido tablas que manifiestan los logaritmos de las líneas trigonométricas correspondientes á los 90° del cuadrante de 10″ en 10″, y aun de 1″ en 1″.

536 Aunque se haga uso de las tablas que solo manifiestan los logaritmos de las líneas trigonométricas correspondientes á los arcos de 1′ en 1′, es fácil el hallar los logaritmos correspondientes á los ángulos intermedios, y los ángulos correspondientes á los logaritmos comprendidos entre los de las tablas, por el método general indicado en la Aritmética.

Sin embargo se tendrá presente que dicho método es erróneo cuando se trata de senos y tangentes de arcos que no llegan á 2°, ó de cosenos y cotangentes de arcos que no distan 2° del cuadrante, porque en tal caso las diferencias correspondientes á tres logaritmos sucesivos son muy desiguales, lo que es contrario á la suposicion en que se funda el método expresado (*Arit.* 330). Por esta razon se suelen poner en las tablas de 1″ en 1″ los logaritmos de senos y tangentes de los primeros grados, que corresponden á los cosenos y cotangentes de los últimos grados del cuadrante.

Para facilitar los cálculos se suelen expresar en las mismas tablas las diferencias de los logaritmos de las líneas trigonométricas correspondientes á cada 10″, ó cada 100″ de diferencia en los arcos ó ángulos.

537 En las tablas solo se escriben los valores de los arcos menores que el cuadrante; y por lo tanto, si se pide la línea trigonométrica de un ángulo obtuso, se buscará la de su suplemento.

V. g. si se pide el logaritmo del seno de 120°, se tomará el suplemento 60°, se buscará en las tablas el seno correspondiente, que será el mismo de 120°.

538 Si conociendo el logaritmo de una línea trigonométrica se quiere saber el valor del ángulo obtuso á que pertenece, se determinará por las tablas el ángulo agudo correspondiente á dicho logaritmo, y su suplemento será el ángulo obtuso que se trata de determinar.

V. g. si el ángulo agudo á que corresponde la línea trigonométrica es 60°, el obtuso que se trata de determinar valdrá 120°.

539 El seno del arco mayor que el cuadrante *afg* (*fig.* 94) es *pg*; y esta línea es coseno de su exceso sobre el cuadrante *fg*. El coseno del mismo arco *afg* es *gd*, que es seno de su exceso sobre el cuadrante *fg*.

Tambien la tangente de *afg* es *at*, que es cotangente de *mn*=*fg* (*art.* 158 *y* 134). La cotangente de *afg* es *fu*, que es tangente de *fq*. De estas observaciones resulta que

540 En vez del seno y tangente de un ángulo obtuso se pueden buscar el coseno y cotangente de su exceso sobre 90°, y al contrario. Dicho exceso se halla fácilmente de memoria por lo dicho (*art.* 155).

541 Si dado el logaritmo de un seno ó tangente correspondiente á ángulo obtuso, se busca en las tablas como si fuera coseno ó cotangente y al contrario; resultará el exceso del ángulo que se busca sobre 90°; y será muy fácil el determinar dicho ángulo obtuso de memoria por lo dicho (*art.* 156).

542 Respecto á que el radio es seno de 90°, coseno de 0°, y tangente y cotangente de 45°, nunca hay necesidad de buscar en las tablas el logaritmo de dichas líneas trigonométricas, que es diez de característica con un número de ceros igual al de las cifras que tienen las mantisas de los otros logaritmos.

543 Por consiguiente, si el primer término de una proporcion es el radio, bastará sumar los logaritmos de los términos segundo y tercero, y quitar diez unidades de la característica, para obtener el logaritmo correspondiente al cuarto término.

544 Si el radio es uno de los medios de la proporcion, el complemento aritmético del logaritmo del primero sumado con el logaritmo del otro medio, dará el logaritmo correspondiente al cuarto término de la proporcion.

CAPITULO XVI.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS RECTILINEOS RECTANGULOS POR MEDIO DE LOS LOGARITMOS.

545 *Teorema.* En todo triángulo rectángulo el radio es al seno de un ángulo como la hipotenusa es al cateto opuesto á dicho ángulo.

Demostracion. Sea el triángulo propuesto *eqb* (*fig.* 95); y despues de haber descrito el arco *ba* con el radio *eb*, será *bq* seno de dicho arco, que es medida del ángulo *e*. Por consiguiente, el número de partes del radio *eb* será al número de partes del seno *bq*, como el valor absoluto de *eb* al valor absoluto de *bq*.

Por el mismo estilo se demuestra que es el radio al seno de *b*, como la hipotenusa *be* al cateto *eq*.

546 *Teorema.* En cualquier triángulo rectángulo el radio es al coseno de un ángulo, como la hipotenusa es al cateto adyacente á dicho ángulo.

Demostracion. Sea *eqb* (*fig.* 95) el triángulo de que se trata, y por lo que se acaba de demostrar será el radio al seno de *b* como *be* es á *eq*. Es asi que el ángulo *b* es complemento de *e* (*art.* 241): luego lo mismo será decir seno de *b* que coseno de *e*: esto es, que será el radio al coseno de *e*, como la hipotenusa *be* es al cateto adyacente *eq*.

547 *Teorema.* En todo triángulo rectángulo es el radio á la tangente de un ángulo, como el cateto adyacente es al cateto opuesto á dicho ángulo.

Demostracion. Sea *sae* (*fig.* 96) el triángulo de que se trata. Con el radio *ea* descríbase el arco *ab*, y será *as* tangente del ángulo *e* respecto del radio *ea*. Por consiguiente será el número de partes del radio *ea* al número de partes de la tangente *as*, como el valor absoluto del cateto adyacente *ea* es al valor absoluto del cateto opuesto *as*.

548 Estas proposiciones son suficientes para la resolucion de los triángulos rectángulos, como se comprenderá á vista de las aplicaciones siguientes.

Ejemplo 1.° Sea la hipotenusa *eb* (*fig.* 95) de 38'4 millas, y el ángulo *e* de 23°..... 48', y se hallarán los valores de los dos catetos disponiendo el cálculo como sigue.

R : sen. e.....................	23°.............48'...............	Log.......	9'60589
: : eb..........................	38'4................................	Log.......	1'58433
: bq..........................	15'5................................	Log.......	1'19022

R : cos. e......................	23°..............48'..............	Log........	9'96140
: : eb..........................	38'4..............................	Log........	1'58433
: eq..........................	35'13..............................	Log........	1'54573

La resolucion es muy sencilla, teniendo presente el buscar el logaritmo del coseno de *e*, que se emplea en la segunda parte, al mismo tiempo de buscar el del seno de *e*, que se emplea en la primera. En cuanto al logaritmo de la hipotenusa *cb*, se escribe en la primera proporcion y en la segunda sucesivamente; y despues se ejecutan las sumas, y se buscan los valores correspondientes en las tablas de los logaritmos de los números.

Ejemplo 2.° Sea el cateto *eq*=35'13 millas, y *bq*=15'5; y se resolverá el triángulo disponiendo el cálculo como sigue.

eq................................	35'13........... compl. arit.	log........	8'45432
: bq..............................	15'5.................................	log........	1'19033
: : R : tan. e................	23°.....48'..........................	log........	9'64465

sen. e............................	23°.....48'..... compl. arit.	log.......	0'39411
: R : : bq........................	15'5..................................	log.......	1'19033
: eb..............................	38'41...............................	log.......	1'58444

Se advertirá que el logaritmo del cateto *bq*, que se emplea en la primera parte, es el mismo que se emplea en la segunda; y despues de haber hallado que el logaritmo 9'64465 corresponde á la tangente de 23°......... 48' se buscará el seno de dicho ángulo *e*, y se escribirá su complemento aritmético en la segunda parte del cálculo.

En cuanto al ángulo *b*, si importase el conocerlo, basta tomar el complemento de *e* (*art.* 241), y resultará *b*=66°.......12'.

Ejemplo 3.° Sea el ángulo *e*=23°........... 48', y el cateto adyacente *eq*=35'13 millas. Para resolver el triángulo se dispondrá el cálculo como sigue.

R : tang. e..................	23°........48'........................	log........	9'64449
: : eq........................	35'13................................	log........	1'54568
: bq..........................	15'49................................	log........	1'19017

cos. e..........................	23°........48'.... compl. arit.	log........	0'03860
: R : : eq....................	35'13................................	log........	1'54568
: eb..........................	38'40................................	log........	1'58428

Se tendrá presente el buscar el logaritmo del coseno de *e*, cuyo complemento aritmético se emplea en la segunda parte al tiempo de buscar el logaritmo de la tangente de *e*, que se emplea en la primera. El logaritmo de *eq* se emplea en ambas partes.

549 Lo dicho es mas que suficiente para que se resuelvan con facilidad todos los casos que se presenten, ordenando las proporciones demostradas (*art.* 545, 546 *y* 547) de modo que resulte por cuarto término el que se busca.

CAPITULO XVII.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS RECTILINEOS OBLICUANGULOS EMPLEANDO LOS LOGARITMOS.

550 *Teorema.* En todo triángulo oblicuángulo los senos de los ángulos son proporcionales con los lados opuestos á dichos ángulos.

Demostracion. Sean (*fig.* 97 *y* 98) *abe* los triángulos de que se trata, y despues de haber bajado la perpendicular *bc* desde el ángulo *b* al lado opuesto ó á su prolongacion, resultarán en ambas figuras los triángulos rectángulos *abc*, *ebc*, y en ellos serán (*art.* 545).

1.º........ ab : bc : : R : sen. a.

2.º........ eb : bc : : R : sen. e (*);

y por lo demostrado en la Aritmética (*Arit.* 250) será *ab* : *eb* : : *sen. e* : *sen. a.* que es lo que se trataba de demostrar.

551 En las aplicaciones del teorema se tendrá presente que cuando se trata de determinar el ángulo opuesto al mayor lado, es menester saber si dicho ángulo es agudo ú obtuso, respecto á que sin este conocimiento el triángulo queda indeterminado, como se advirtió (*art.* 247 *núm.* 6.º), y se manifiesta en la figura 99.

Si el ángulo opuesto al mayor lado *ae* es obtuso, el triángulo que se trata de resolver es *abe*; y si dicho ángulo es agudo, será *ade* el triángulo propuesto.

Los ángulos *u* y *d* tienen un mismo seno, que es el cuarto término de las proporciones eb : ea : : sen. a : sen. u, y ed : ea : : sen. a : sen. d, cu-

(*) Se tendrá presente que en la figura 98 el seno del ángulo obtuso *bea* es igual al de su suplemento *bec*.

yos tres primeros términos son iguales, y por lo tanto será *u* suplemento de *d*.

De la inspeccion de la figura se deduce esto mismo, porque *u* es suplemento de *m* (*art.* 148), y *m* es igual á *d* (*art.* 236).

552 *Teorema.* Si en un triángulo *abe* (*fig.* 97 *y* 98) se baja la perpendicular *bc* desde un ángulo *b* al lado opuesto *ac*, ó á su prolongacion; las distancias *ac*, *ec* de los extremos de dicho lado á la perpendicular (que llamaremos primero y segundo segmento) serán recíprocamente proporcionales con las tangentes de sus ángulos adyacentes: esto es, que será ec : ac : : tan. a : tan. e.

Demostracion. Por lo establecido (*art.* 547) serán..............................

1.°....... ec : cb : : R : tan. e (*).

2.°....... ac : cb : : R : tan. a.

y por lo establecido en la Aritmética (*Arit.* 250) resultará ec : ac : : tan. a. : tan. e.

553 Esto, y lo dicho sobre los triángulos rectángulos (*art.* 545 *y* 546) basta para resolver las triángulos oblicuángulos en que se conocen dos lados y el ángulo comprendido.

1.° Para esto se dirá, R : cos. a. : : ab : ac. Si *ac* resulta menor que *ae*, el ángulo *e* del triángulo será agudo; y si *ac* resulta mayor que *ae*, dicho ángulo será obtuso. En todos casos la diferencia entre *ae* y *ac* da el segundo segmento *ec*.

2.° Despues se dice, ec : ac : : tan. a : tan. e.

3.° Finalmente se dice, cos. e : R : : ec : eb.

554 Este método no es tan largo como aparece, siempre que se plantee antes el cálculo, y que se tomen al mismo tiempo los logaritmos de las líneas trigonométricas correspondientes á los mismos ángulos. Tales son el coseno y tangente de *a*, la tangente y coseno de *e*, y el logaritmo de *ec* y su complemento aritmético. El logaritmo de *ac*, que resulta en la primera parte, es el mismo que se emplea en la segunda. Cuando no interesa el conocer el ángulo *e*, basta buscar en las tablas el logaritmo mas próximo al que resulta en la segunda parte entre las tangentes; y el logaritmo que se halla en la misma línea, en la columna de cosenos, será el del primer término de la tercera parte, y por lo tanto se escribirá su complemento aritmético en el lugar correspondiente.

555 *Ejemplo* 1.° En el triángulo *abe* (*fig.* 100) supóngase a=35°.....42′, b=112°.....35′, ae=82‘3 brazas, y se trata de determinar el lado *be*. Para esto se dispondrá el cálculo como sigue.

sen. b..................	112°..........35′........	compl. arit. log.........	0‘03465
: sen. a...............	35..............42..........................	log.........	9‘76607
: : ae..................	82‘3..	log.........	1‘91540
: be......................	52‘01...	log.........	1‘71612

(*) Se tendrá presente que en la figura 98 la tangente del ángulo obtuso *bea* es igual á la de su suplemento *bec*, con la sola diferencia de ser negativa.

El seno de *b* se halla buscando el de un suplemento 67°............ 25′ (*art.* 537); y mas fácilmente buscando el coseno de su exceso sobre 90°, que es 22°....... 35′ (*art.* 340).

Si se tratase de determinar el lado *ab*, se hallaria primero el ángulo opuesto *e*, que es suplemento de la suma de los ángulos conocidos *a* y *b*. Dicho ángulo valdrá 31°...................... 43′, y el lado opuesto *ab* resultará =46'86.

Ejemplo 2.° En el triángulo *abe* (*fig.* 97) supóngase *ae*=82'3, *ab*=46'86, y el ángulo *a*=35°..........42′. Se resuelve el triángulo por lo establecido (*art.* 553 y 554), disponiendo el cálculo como sigue.

R : cos. a.........	35°............42′............................	log........	9'90960
: : ab...............	46'86...	log........	1'67080
: ac..................	38'05...	log........	1'58040
ac.....................	82'30		
ec.....................	44'25.....................	compl. arit. log........	8'35409
: ac...		log........	1'58040
: : tan. a..		log........	9'85647
: tan. e............	31°...........43′............................	log........	9'79096
cos. e..		compl. arit. log.........	0'07024
: R : : ec..		log.........	1'64591
: eb.................	52'02...	log.........	1'71615

Para mayor facilidad se ha omitido el repetir los valores de los términos del triángulo que entran dos veces en la resolucion.

556 Esto basta para que no haya dificultad en resolver por los dos teoremas (*art.* 550 y 552) todos los casos que pueden ofrecerse sobre los triángulos oblicuángulos, excepto cuando solo se conocen los tres lados. Dicho caso no tiene mucho uso, y en atencion á esto se pondrá sin demostracion el modo mas expedito de resolverlo en el siguiente.

557 *Problema.* Conociendo los tres lados de un triángulo rectilíneo, hallar el valor de uno de sus ángulos.

Resolucion. 1.° Súmense los valores de los tres lados, y sáquese la mitad de la suma.

2.° De esta semisuma réstese el lado opuesto al ángulo que se trata de determinar, y el resíduo llámese diferencia.

3.° En las tablas de los logaritmos de los números tómense los complementos aritméticos de los logaritmos de los lados que comprenden al ángulo que se busca, y los logaritmos de la semisuma y diferencia.

4.° Súmense estos cuatro logaritmos, y tómese la mitad de la suma.

5.° Dicha semisuma de logaritmos búsquese en las tablas de los logaritmos de los cosenos, y el ángulo correspondiente será mitad del que se busca. Dúplese y resultará el ángulo que se trata de determinar.

6.° Conocido un ángulo, se halla fácilmente el otro por lo dicho (*art.* 550).

558 *Ejemplo.* Supongamos que en el triángulo *abe* (*fig.* 100) se trata de determinar el ángulo *b*, y que los valores de los lados son ae=82'3 brazas, eb=52'02, y ab=46'36; y se dispondrá el cálculo como sigue.

ae....................	82'30		
eb....................	52'02	compl. arit. log.	8'28383
ab....................	46'86	compl. arit. log.	8'32920
Suma................	181'18		
$\frac{1}{2}$ suma............	90'59	.... log.	1'95708
ae....................	82'30		
Diferencia.........	08'29	.... log.	0'91855
$(\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{ b})^2$..			19'48866...... suma de log.
Cos. $\frac{1}{2}$ b............	56°	......17'...... log.	9'74433 $\frac{1}{2}$ suma de log.
b....................	112°	......34'	

Para no equivocarse en la suma conviene el escribir los cuatro logaritmos uno debajo de otro, sin espacio intermedio, aunque no resulten colocados enfrente de los números correspondientes. La diferencia de 1', que hay entre el valor hallado del ángulo *b* y el supuesto anteriormente (*art.* 555 *núm.* 1.°), proviene de haber despreciado en los cálculos los milésimos de braza.

CAPITULO XVIII.

NOCIONES DE GEOMETRIA PRACTICA.

559 En la Geometría especulativa se supone que las operaciones se ejecutan sin el mas leve error. Esto es imposible en la práctica; porque no hay modo de construir una superficie perfectamente plana, de trazar una línea exactamente recta, ni de describir un círculo perfecto. Las líneas físicas (*art.* 8) de que se hace uso en la Geometría práctica, tienen una latitud sensible, y las mas veces desigual. Por

consiguiente es imposible el determinar con precision geométrica los puntos matemáticos (*art.* 8) que resultan de sus intersecciones. La misma imposibilidad hay en medir la extension de una línea recta, y en determinar el valor de un ángulo con rigurosa exactitud.

560 El error indispensable en las operaciones influye mas ó menos en los resultados que se trata de determinar; y uno de los objetos esenciales de la Geometría práctica es la determinacion de dicho influjo. De aqui resulta que de dos operaciones geométricas exactas puede suceder que en la práctica sea la una muy errónea y la otra muy aproximada.

561 Todavía hay mas, y es que una operacion que segun la Geometría especulativa no es mas que aproximada, en la práctica puede ser mucho mas aproximada que otra operacion caracterizada de rigurosamente exacta segun las suposiciones de la Geometría especulativa. Para comprender esto, supóngase que la operacion aproximada sea por su naturaleza susceptible de un centésimo de línea de error en el resultado final (aunque se ejecute con toda precision), y de otro centésimo por la imposibilidad de operar con exactitud. En tal caso, se puede decir que en el resultado práctico de la operacion aproximada cabe un error de dos centésimos. Segun esto, siempre que en el método rigoroso pueda llegar á cuatro centésimos de línea el influjo que tienen en el resultado práctico los errores inevitables en la operacion, no hay duda en que se dirá con fundamento que por medio de la resolucion aproximada se puede obtener el valor del resultado final con doble mas precision que por la caracterizada de exacta, segun las suposiciones de la Geometría especulativa.

562 En la Geometría práctica se prefieren las soluciones mas sencillas de los problemas, siempre que por medio de ellas se pueden obtener los resultados con toda la aproximacion que se necesita, y cuando el error anejo al método es pequeño, respecto del que puede producir la incertidumbre de los datos. Por esta razon algunas resoluciones, muy buenas para el caso de conocerse los ángulos de un triángulo con diferencia de medio grado, deben desecharse como defectuo-

sas, en el caso de conocerse los valores de los ángulos con diferencia de medio minuto.

563 Establecido esto, supongamos que dado el punto *a* (*fig.* 101) se trata de determinar otro punto para tirar una recta de la extension *am*. Imagínese otra recta *ad*, y desde ella bájense á la *au* las perpendiculares *bc*, *em*, *du*. La inspeccion de la figura manifiesta que si en la posicion del punto *c* se comete un error igual á la distancia *cb*, resultará la recta *ad* en vez de la *au*; y el error en *m* será *me*, que es mucho mayor que *cb*. Si el punto que se señala para la determinacion de la recta es *u*, del error *ud* en su posicion resultará en *m* un error *me*, menor que *ud*.

De esta observacion resulta que

564 Cuando se trata de determinar una recta por la posicion de dos puntos, dicha recta resultará determinada con tanta mas exactitud cuanto mayor sea la distancia de los dos puntos que la determinan, y cuanto mayor sea la precision con que se hayan determinado dichos puntos.

565 Supongamos que se trata de determinar un punto *a* (*fig.* 102) por la interseccion de las rectas *bm*, *eu*; y no hay duda en que si en vez de la *eu* se tira la *tn*, el punto de interseccion será *c*; y el error que resultará en su posicion será *ac*.

Si las rectas *eu*, *tn* son paralelas, ó salen de un punto *e* formando un ángulo muy pequeño, el ángulo *bce* será igual ó casi igual al *bae*, respecto á que este es externo del triángulo *eac*, y por lo tanto solo excederá al interno *bce* en el ángulo *e* (*art.* 245), que se supone muy pequeño. Establecido esto, tírese la *ao* perpendicular á *tn*, y resultará el triángulo *aoc* rectángulo en *o*; y (*art.* 545) serán *sen. c* : *R* : : *ao* : *ac*.

Llamando *A* al ángulo *c* (sensiblemente igual á *a*); *S* á la separacion *ao* de las líneas *eu*, *tn*; y *E* al error *ac* que resulta en la posicion del punto *a*, será segun esto seno A : R : : S : $E = \dfrac{R \times S}{\text{sen. A}}$.

Esta expresion manifiesta que el error *E* aumenta al paso que aumenta la separacion *S* (que es factor del dividendo), y al paso que disminuye sen. A (que es divisor) (*Arit.* 127): esto es, al paso que el ángulo *A* se aleja mas de ser recto (*art.* 501).

566 Si las líneas que se cortan en *a* (*fig.* 102) son dos arcos de círculo ó de otra curva, las porciones de curvas inmediatas al punto de interseccion se confundirán sensiblemente con las tangentes correspondientes á dicho punto, cuya determinacion dependerá del ángulo que formen las tangentes, esto es, del que formen las curvas en el punto en que se cortan (*art.* 63 y 80). Por consiguiente se podrá decir en general que

567 El error en la posicion de un punto determinado

por la interseccion de dos líneas (rectas ó curvas) es tanto mayor, cuanto mayor es el error que se comete en la posicion de las líneas, y cuanto mas se aleja de ser recto el ángulo que resulta de su interseccion; de suerte, que si dicho ángulo A es muy agudo ó muy obtuso, por pequeño que sea el error que se cometa en la posicion de las líneas, resultará un error considerable en la posicion del punto que se trata de determinar.

568 En el caso de salir las rectas *eu*, *en* (*fig.* 102) del punto *e* si se llama *e* el ángulo *e* (que es el error que se comete en la direccion de la recta que sale de dicho punto); D á la distancia *ea* del punto dado al que se ha de determinar, y S á la separacion *ao* entre la recta que se tira y la que deberia tirarse, será (*art.* 545) $R : sen.\ e :: ea : ao$: esto es,

$$R : sen.\ e :: D : S = \frac{\text{sen. e} \times \text{D}}{\text{R}}.$$

569 Este valor de S, sustituido en la expresion anterior (*art.* 565) $E = \frac{R \times S}{\text{sen. A}} = \frac{R}{\text{sen. A}} \times S$, da el error en la posicion del punto E

$$= \frac{R}{\text{sen. A}} \times \frac{\text{sen. e} \times D}{R} = \frac{R \times \text{sen. e} \times D}{R \times \text{sen. A}} = \frac{\text{sen. e} \times D}{\text{sen. A}}.$$

Por unas consideraciones semejantes á las que se hicieron al fin del artículo 565 resulta que

570 Cuando se trata de determinar el punto *a* (*fig.* 102) por la interseccion de una recta dada *bm* con otra recta *eu*, que sale del punto determinado *e*, el error que resulta en la posicion del punto *a* es tanto mayor, cuanto mayor es el error *e* que se comete en la direccion de la recta que se ha de trazar, cuanto mayor es su extension *ea*, y cuanto mas se aleja de ser recto el ángulo *a* que forman las líneas en el punto que se ha de determinar.

571 Muchas veces sucede que la condicion de que las líneas (rectas ó curvas) se corten formando ángulos rectos, es incompatible con la condicion de que los puntos que determinan la posicion de la recta que se ha de tirar esten muy separados (*art.* 564). En este caso, y en otros que resultan de la naturaleza de los instrumentos que se emplean, se debe

tomar un partido medio para obtener los resultados con la mayor aproximacion posible.

572 Cuando varias líneas concurren, ó se cruzan en un punto, se trazan en toda su extension las dos que se cruzan bajo un ángulo que mas se acerca á recto, y las demas se interrumpen antes de llegar al punto de concurso para no confundirlo.

573 Para trazar las líneas rectas con la mayor perfeccion posible, se hace uso de un instrumento llamado *regla*, cuyo manejo debe aprenderse con la práctica. Para el buen uso de la regla conviene tener presentes las advertencias que siguen.

1.° La superficie sobre que se ha de trazar la línea debe ser perfectamente plana y tersa, y tambien debe ser tersa la cara de la regla en que apoya el cuerpo que traza dicha línea.

2.° La regla debe estar muy sujeta en las inmediaciones de sus cabezas.

3.° El instrumento que traza la recta debe apoyar sobre el plano y contra la regla, con aquella suavidad y finura que solo se adquiere con la práctica.

4.° Conviene que la parte de dicho cuerpo que apoya contra la regla sea plana. Tambien puede ser dicho cuerpo de figura cilíndrica, con tal que la punta que traza la línea corresponda exactamente al eje del cilindro.

5.° Es muy dificil el trazar la recta con perfeccion cuando el cuerpo de que se hace uso ni es cilíndrico, ni tiene plana la cara que apoya contra la regla, ni tiene la punta que traza la línea en su centro.

6.° Las plumas ordinarias tienen todos estos defectos: y en tal caso, para trazar bien la recta se debe poner mucho cuidado en no dar á la pluma movimiento alguno giratorio; esto es, que la pluma se debe llevar siempre paralela á sí misma, sin mas movimiento que el progresivo á lo largo de la regla.

574 Se puede examinar la regla arrimando su canto á un pelo ó hilo delgado tirante.

575 Tambien se examinan la regla y la línea trazada con ella operando como sigue.

1.º El canto *ae* (*fig.* 103) de la regla *ad* se pone sobre la línea trazada, y se confundirá con ella siempre que la línea se haya trazado con perfeccion.

2.º Se hace girar la regla sobre la *ae*, de suerte que el canto *bd* tome la posicion *BD*; y si estando la regla en esta posicion se verifica la coincidencia, no queda duda en que la regla es buena, ni en que la recta está bien trazada.

3.º Si se nota alguna diferencia entre el canto de la regla y la línea, la mitad de dicha diferencia será el defecto comun á la línea y á la regla.

576 La comprobacion de la recta se ejecuta con mas facilidad y precision colocando sobre ella un pedazo de papel, ú otro cuerpo delgado y trasparente, trazando sobre dicho cuerpo la línea que se trasluce, ó señalando alguno de sus puntos, y dando despues á dicho cuerpo una media vuelta, en los mismos términos que se ha dicho en el artículo anterior núm. 2.º

577 *Demostracion.* Sea (*fig.* 104) *aeg* la verdadera recta, y *apoqemeg* la línea que se trata de comprobar. La operacion del artículo 575 número 2.º equivale á dar media vuelta á dicha línea ó á su igual, que es el canto de la regla ó la línea trazada sobre el cuerpo trasparente. En dicho caso todos los puntos de la línea describirán unas semicircunferencias, cuyos centros *c*, *u*, *t*, &c. estarán en la verdadera recta. La línea propuesta (ó su igual que es lo mismo) tomará la posicion *afnhekg*, y las *pf*, *on*, *qh* &c. serán duplas de las diferencias *pc*, *ou*, *qt* &c. (*art.* 110) entre la línea propuesta y la verdadera línea recta.

578 Para señalar la direccion de las rectas muy largas que se imaginen sobre el terreno, se indican algunos puntos de dichas líneas por medio de unos palos cilíndricos llamados *piquetes*, cuyas puntas se hincan en la tierra. Los chuzos son muy á propósito para este objeto.

Se supone tambien que el rayo de luz, en su paso desde un punto cualquiera hasta el ojo del observador, describe una línea recta. En dicho caso no hay duda en que si puesto el ojo del observador en *a* (*fig.* 105) se ven confundidos los puntos b, c, d, de los piquetes, el ojo del observador y dichos puntos estarán en línea recta.

579 Hay varios casos en que el rayo de luz camina por una línea angulosa ó curva, segun se manifestará en la Cosmografía, y por ahora se prescindirá de dichos casos.

580 Uno de los instrumentos mas usados en la Geometría práctica es el compas *ame* (*fig.* 106), cuyo manejo se enseñará prácticamente.

1.° Conviene que el compas pueda abrirse ó cerrarse con suavidad, girando sobre el eje *u*.

2.° Si las puntas *a* y *e* son obtusas es dificil el colocarlas exactamente sobre los puntos que se desea; y si son muy agudas se introducen en el papel; y por lo tanto no corresponden á los puntos sobre que se trata de fijarlas.

3.° Si el ángulo *aue* es muy agudo, es dificil el describir una circunferencia con perfeccion. Por lo tanto, cuando se trata de describir circunferencias, conviene que dicho ángulo no baje de 5°.

4.° Mayores inconvenientes resultan de ser el ángulo *aue* muy crecido; y por esta razon conviene que dicho ángulo no pase de 90°.

5.° Muchas construcciones geométricas resultan defectuosas cuando se hace uso de los compases ordinarios armados con lapicero ó pluma, á menos que el lapiz ó pluma no sean perpendiculares al plano del papel. Para conseguir esto se suelen construir dichas armazones en términos que puedan girar sobre una bisagra, con la friccion necesaria para no mudar de posicion sin la voluntad del que las maneja.

581 A igual distancia *ae* (*fig.* 107) entre las puntas corresponden unos ángulos *ane*, *a Ne*, tanto mas pequeños cuanto mayor es la longitud de las piernas del compas.

582 De esto y de lo dicho anteriormente resulta que conviene servirse de compases de diferentes tamaños para operar con precision en todos casos.

583 El compas llamado de *vara* es muy preferible á los compases ordinarios. Dicho compas se compone de una regla *cd* (*fig.* 108) con dos correderas *c* y *n*, á que estan sujetas las puntas *a* y *e*. La corredera *c* está

unida á la regla por medio del tornillo *t*, y puede moverse algunas líneas hácia adelante y hácia atrás con mucha suavidad haciendo girar la cabeza del tornillo. La corredera *n* camina libremente á lo largo de la regla, y se sujeta donde se quiere por medio del tornillo *u*. Este compas tiene las grandes ventajas de que sus puntas son siempre perpendiculares al papel, y se ajustan con cuanta exactitud se quiere por medio del tornillo *t*. Apretando los tornillos que hay sobre las correderas en *s* y *u*, no hay riesgo de que las puntas del compas muden de posicion.

Algunos compases de vara tienen señalada en la regla una escala, que manifiesta la distancia de sus puntas; y en las correderas *c* y *n* suelen llevar dos microscopios, que sirven para colocar dichas puntas con suma exactitud sobre los puntos finísimos señalados en el plano sobre que se trabaja.

584 Conviene no apoyar las puntas del compas sobre una línea ó punto acabado de señalar con tinta, por no agujerear el papel.

585 Por esta misma razon, siempre que se ofrezca el tener que apoyar mucho la punta del compas sobre un punto, conviene el colocar sobre el papel una hoja delgada de talco, ó de otra materia dura y trasparente, y afirmar la punta en un punto señalado sobre la hoja, despues de haberla colocado convenientemente.

Si en el punto de que se trata se cruzan dos perpendiculares, se puede emplear con el mismo objeto una hoja de acero ó de laton, sobre la cual haya señaladas dos perpendiculares, cuyos extremos se ajustarán con las trazadas sobre el papel; y en tal caso las intersecciones de unas y otras se confundirán.

586 Hay otros compases que sirven para facilitar la solucion de algunos problemas de la Geometría práctica.

587 Sobre el modo de tirar una perpendicular (*art* 176), ó de dividir una línea por mitad (*art.* 177) hay que advertir, que conviene que los arcos se corten casi en ángulos rectos (*art.* 567), siempre que de esto no resulte alguno de los inconvenientes indicados (*art.* 564 *y* 580, *núm.* 3.° *y* 4.°); y para este objeto conviene tener presente lo que sigue.

1.° Si se hace de modo que *ut* (*fig.* 33) sea con corta diferencia igual á *uc*, el ángulo de la interseccion de los arcos en *c* será de 90°, que es lo mas ventajoso.

La razon de esto es, que si es $ut = uc$, el triángulo *cut* será isósceles, y el ángulo *tcu* valdrá 45° (*art.* 236 *y* 241). Lo propio le sucederá á *scu*.

Por consiguiente la suma *tcs* valdrá 90°; y tambien valdrá 90° el ángulo *ecm* formado por los arcos que se cruzan en *c* (*art.* 211).

2.° Si se hace *tc*=*ts* (*fig.* 33) el ángulo de la interseccion de los arcos en *c*, será de 60°, lo que es muy suficiente; y á mas la distancia *uc* excederá en cosa de $\frac{2}{3}$ á la *ut*.

La razon de esto es, que en tal caso será equilátero el triángulo *tcs*, y por lo tanto el ángulo *sct* (igual al formado por los arcos) será de 60° (*art.* 234). El ángulo *tcu* valdrá 30°, y (*art.* 547) será R. : tan. 30° : : cu : ut, que es próximamente como 5 á 3.

3.° Si el punto *u* (*fig.* 34) desde el cual se ha de bajar la perpendicular está fuera de la recta, conviene que sean crecidos los radios con que se hacen las intersecciones en *s* y *t*, para que los ángulos que los arcos forman con la *ab* no difieran mucho de ser rectos.

La razon de esto es, que *uta* es complemento del ángulo que el arco descrito con el radio *ut* forma con la *ab* (*art.* 400); y dicho ángulo *uta* disminuye al paso que aumenta el radio *ut*. En todos casos será el ángulo *tuc* igual á los formados por las intersecciones de los arcos *t* y *s*.

4.° Si la recta *ab* (*fig.* 35), que se ha de dividir por mitad, es demasiado larga, se toman las porciones iguales *as*, *bt*; y dividiendo por mitad la porcion *st*, quedará tambien dividida por mitad la *ab*.

5.° Si la porcion *st* (*fig.* 35), que se ha de dividir por mitad, es demasiado pequeña, se le agregan las porciones iguales *sa*, *tb*, y se divide por mitad la *ab*.

6.° Todas estas advertencias se aplican á las divisiones de los arcos por mitad.

588 Cuando el punto *u* (*fig.* 109), desde el cual se ha de bajar una perpendicular á la *ba*, cae hácia el extremo *a* de dicha línea, conviene resolver el problema como sigue:

1.° Desde un punto *s*, muy distante de *u*, descríbase el arco *upf*.

2.° Desde otro punto *e* descríbase el arco *uql*, que corte al primero en *c*.

3.° Hágase pasar una recta por *u* y *c*; y dicha recta *umc* será la perpendicular que se pide.

La razon de esto es, que la recta *ab* tiene los puntos *s* y *e* equidistantes de *u* y *c* (*art.* 104); y por lo tanto, las líneas *ab* *uc* serán perpendiculares (*art.* 172).

589 Para que la interseccion *c* resultase en ángulos rectos, deberia tomarse por centro del segundo arco el punto *t* en que la tangente al primero corta á la *ba*; pero aun cuando sea *mu* igual á *ms*, y se describa el segundo arco desde *m*, el ángulo de los arcos resultará de 45°; lo que es muy suficiente para que resulte bien determinado el punto *c*.

En todos casos el ángulo formado por los arcos en *c* es igual al *ecs* formado por los radios (*art.* 211), y *ecs* es igual á *eus*, por la igualdad de los triángulos *ecs*, *esu* (*art:* 114).

590 Desde luego se comprende, que basta determinar la interseccion *c*, aunque los demas puntos de los arcos no se señalen, por resultar fuera del plano sobre que se trabaja, y no conviene señalar los arcos desde *u*, por no confundir dicho punto.

591 El modo de levantar una perpendicular en el extremo de una recta, que se enseñó en el artículo 219, es muy bueno y adaptable á la práctica, teniendo presente (*fig.* 50) el tomar una abertura de compas suficientemente grande, y el escoger el punto *c* de modo que resulten casi isósceles los triángulos imaginarios *cse*, *csa*.

En este caso, la interseccion *a*, del arco con la recta, formará el ángulo de 45°, y la *eu* resultará igual á la *ea*. Al paso que el centro *c* se aproxime á la *eb*, se aproximará mas á recto el ángulo formado por la interseccion del arco y de la recta, que es igual á *aue* (*art.* 241 *y* 400); pero la distancia *eu* disminuirá, lo que no conviene, por lo establecido (*art.* 564).

592 Basta que se describan las porciones de arco inmediatas á *a* y *u*, y de ningun modo se describirá la porcion inmediata al extremo *e*, por no confundir este punto interesante.

593 Cuando la perpendicular ha de cruzar á la *eb*, conviene el ejecutar la misma construccion hácia la parte inferior de *eb*, con lo que resultará determinada dicha línea por la posicion de dos puntos muy distantes, que estarán en línea recta con el punto *e*.

594 Es evidente que el método se aplica con igual ven-

taja á todos los casos en que está inmediato al extremo el punto de la recta, desde el cual se ha de elevar la perpendicular.

595 Para tirar las perpendiculares con mas facilidad se hace uso de un instrumento llamado *escuadra*, cuyo uso debe aprenderse con la práctica (*). Empleando los cantos interiores de las reglas que componen la escuadra, se tiran las perpendiculares con mas seguridad.

596 Para examinar la escuadra se puede proceder por el método siguiente.

1.º Tírese una recta *ab* (*fig.* 31) cuya longitud sea doble ó casi doble de la longitud del brazo de la escuadra.

2.º Por medio de la escuadra levántese la perpendicular *ue* en su medianía, colocando el uno de sus brazos sobre la *ua*; y despues de tirada la perpendicular, se arrimará la escuadra á ella para ver si coincide con su canto.

3.º Hecho esto se colocará el brazo de la escuadra sobre la porcion *ub*; y si el brazo perpendicular se ajusta con la *ue*, es señal de que la escuadra es buena, y que la recta *ue* es perpendicular á la *ab*. Si se nota alguna diferencia, la mitad de dicha diferencia será el defecto de la escuadra y de la perpendicular tirada con ella.

La razon de esto es, que si al ángulo *aus* (*fig.* 31) formado con la escuadra le falta para ser recto la cantidad *sue*, que llamaremos d, el ángulo contiguo *bus* excederá á un ángulo recto en dicha cantidad $sue = d$, de suerte que serán $aus = 90° - d$, y $bus = 90° + d$ (*art.* 148); y su diferencia será igual á dos veces la cantidad d.

597 Para que la perpendicular resulte bien determinada, conviene que sea menor que la porcion de recta sobre que se ajusta el brazo de la escuadra.

598 En general no se puede tirar con precision una perpendicular que exceda en mucho al mayor segmento de la recta á que debe ser perpendicular.

(*) En el instrumento llamado *trasportador*, de que se tratará mas adelante (*art.* 618 *fig.* 115), el radio de cero grados es perpendicular al de 90°. Por consiguiente dichos radios equivalen á los brazos de la escuadra; y por medio de ellos se pueden hallar los puntos que determinan la posicion de una recta perpendicular á otra recta dada.

599 Para determinar la posicion de una recta paralela á otra por medio de dos ó mas puntos muy distantes, se puede recurrir á los métodos siguientes.

METODO I.

1.° Si la recta es *ab* (*fig.* 110) y el punto dado *m*, haciendo centro en cualquier punto *c* de la recta dada, descríbase el arco *me*.

2.° Con el mismo radio, y haciendo centro en otro cualquier punto *u* de la *ab*, descríbase otro arco *il*.

3.° Tómese con el compas la distancia *em*, trasládese de *i* á *h*, y la recta *hm* será la paralela que se pide.

La razon de esto es, que los arcos *em*, *ih* son perfectamente iguales, por estar descritos con los mismos radios y tener iguales cuerdas. De la igualdad de los arcos y radios se sigue la igualdad de sus senos *mt*, *hs* (*art.* 499), que son perpendiculares á la *ab*; y de la igualdad de estas perpendiculares se sigue el paralelismo de las rectas *ab*, *hm* (*art.* 195).

METODO II.

1.° Haciendo centro en el punto dado *m* (*fig.* 111) ciérrese ó ábrase el compas, hasta que el arquito descrito con la otra punta sea tangente á la *ab*; y la abertura de compas que resulte será la menor distancia del punto á la *ab*.

2.° Hágase centro en cualquier punto *a* de la *ab*, y con dicha abertura descríbase el arquito *uzp*.

3.° Tírese una recta que pase por *m* y que toque al arquito *uzp*; y dicha recta *zm* será la paralela que se pide.

Este método se funda en que los radios iguales *mt*, *az*, tirados á los puntos de contacto, son perpendiculares á las tangentes (*art.* 183). Por consiguiente, tirada la oblicua *am*, resultarán dos triángulos rectángulos iguales *atm*, *azm* (*art.* 270): luego el ángulo *mat* será igual á *amz*; y por ser estos ángulos alternos, las rectas *at*, *zm* que los forman serán paralelas (*art.* 204).

En uno y otro método se pueden describir arcos desde diferentes centros tomados en *ab*, y de este modo se pueden determinar muchos puntos de su paralela; lo que es preciso cuando la longitud de la regla es menor que la paralela que se trata de trazar; y en todos casos pueden servir dichos puntos para la comprobacion.

600 Ninguno de estos métodos, ni el del artículo 207,

sirven cuando la perpendicular bajada desde *m* (*fig.* 112) cae fuera de la *ab*. En dicho caso se puede excusar la secante operando como sigue:

1.º Desde *a* (con una abertura de compas crecida) hágase en la *ab* la interseccion *s*.

2.º Con esta misma abertura y centro *m* descríbase el arco *ei*.

3.º Tómese la distancia *ma*, y con esta abertura y centro *s* descríbase el arco *ut*, que corte al *ei* en *c*.

4.º El punto *c* de interseccion de los arcos determina la posicion de la paralela *mc*.

Este método se funda en que las *as*, *mc* son iguales por radios de círculos iguales; y lo mismo le sucede á las *am*, *sc*. Por lo tanto las rectas *as*, *mc* serán lados opuestos de un paralelógramo (*art.* 286).

601 Determinado el punto *c* (*fig.* 112) se pueden determinar otros puntos de la paralela por los métodos del artículo 599; y se tendrá presente que los métodos expuestos son preferibles los unos á los otros segun las circunstancias, sin exceptuar aquellos en que se hace uso de la secante (*art.* 206 *y* 208) que son los mas adecuados para operar sobre el terreno, haciendo uso de los instrumentos que sirven para medir los ángulos formados por las visuales.

602 Si despues de haber trazado una ó mas perpendiculares á la *ab* (*fig.* 38) se quiere tirar una paralela á dicha línea por un punto dado *o*, se tomará con el compas la menor distancia de *o* á la *ab* (*art.* 599) (*método* II, *núm.* 1.º); y trasladando dicha abertura sobre cualquiera de las perpendiculares de *s* á *t*, ó de *e* á *m*, se tendrán uno ó mas puntos de la paralela que pasa por *o*, y podrá trazarse dicha paralela *cd* con mucha precision.

603 El instrumento mas comun para tirar líneas paralelas es el que se ve representado en la figura 113. Su uso debe aprenderse con la práctica; y su teórica se funda en que siendo siempre iguales las líneas *ac*, *bd* y las *ab*, *cd*, la figura *acdba* será en todo caso un paralelógramo (*art.* 286); y por consiguiente las *ab*, *cd* serán siempre paralelas; como

tambien los cantos de las reglas, que se construyen paralelas á sus respectivas líneas *ab*, *cd* (*art.* 194).

604 Este instrumento puede comprobarse como sigue:

1.° Puesto el canto *hi* (*fig.* 113) sobre una recta, tírese otra recta siguiendo el canto *st*.

2.° Hecho esto, cámbiese el instrumento, colocando sobre el papel el mismo plano de las reglas que en la operacion anterior, pero haciendo que el canto *hi* coincida con la recta tirada con el *st*.

3.° Si en este caso se puede hacer coincidir el canto *st* con la recta tirada con el *hi*, el instrumento será exacto, y las líneas tiradas con él serán paralelas.

4.° Pero si se advierte alguna diferencia, su mitad será el error del instrumento, y el de las supuestas paralelas tiradas por sus cantos.

La razon de esto es fácil de comprender.

605 *Problema.* Dada la extension *ab* (*fig.* 114) construir una escala en la cual dicha extension valga 500 á 1000 partes.

Resolucion. 1.° En los extremos de la línea propuesta levántense las perpendiculares indefinidas *GF*, *KL*.

2.° Con una abertura de compas cualquiera tómense sobre ellas cinco distancias iguales hácia las partes superior é inferior de la *ab*, y tírense por los puntos correspondientes las paralelas que manifiesta la figura.

3.° Tírese la oblicua indeterminada *fT*, y con cualquiera abertura de compas tómense sobre ella las cinco distancias iguales *fm*, *mn* &c.

4.° Determínese el punto *r′* en que corta á la *GF* el arco descrito con el radio *fr*, y tírese la recta *fr′*. Por el mismo estilo se tirará la recta *hr″* si se quiere.

5.° Trasládense á las *fr′*, *hr″* (ó solo á la primera) las distancias *fm*, *fn*, *fp* &c.

6.° Las perpendiculares á la *ab*, bajadas desde los puntos *m′*, *n′* &c., la dividirán en cinco partes iguales *fM*, *MN* &c., cada una de las cuales valdrá 100 partes.

7.° Los puntos *M*, *N*, *P* &c. se pueden señalar de varios modos. V. g. tomando con el compas las menores distancias de los puntos *m′*, *n′* &c. á la *hL*, ó á la *gF* (*art.* 599, *método II*, *núm.* 1.°), y trasladando dichas aberturas de compas desde las mismas perpendiculares sobre las *fe*, *hg*; ó bien tirando con la regla varias rectas que pasen por los puntos correspondientes *m′*, *m″*, *n′* *n″* &c. de las *fr′*, *hr″*.

8.° Por el mismo estilo se dividirá en diez partes iguales la porcion *fM*=*hM′* por medio de las oblicuas *fV*, *hv*, que conviene que sean dos, tres veces mayores que la extension *fM*.

9.° Tambien se puede ejecutar dicha division tirando en el rectángulo *Mh* una diagonal, como la que se ve tirada en el rectángulo *PN′*, y trasladando las distancias *st*, *xz* &c. sobre las porciones *fM*, *hM′* desde la *fh*, ó desde la *MM′*.

10.° Ejecutado esto, tírense las oblicuas que manifiesta la figura desde las divisiones señaladas sobre la *Mf* á las señaladas sobre la *M′h*; y con esto quedará concluida la escala, que se numerará como manifiesta la figura.

11.° Si la extension dada ha de ser igual á mil partes, se puede tomar su mitad, y dividirla en 500 partes, como se acaba de enseñar.

12.° Por el mismo estilo se construye una escala en que la extension dada valga 10 partes, 100 partes &c.

606 *Demostracion.* 1.° Por la semejanza de los triángulos fm', M, fn', N &c. resulta $fm' : fr' :: fM : fe$; y como fm' es la décima parte de fr', tambien será fM la quinta parte de fe &c.

2.° Por una razon semejante resulta st igual al décimo de PN &c.

3.° Entendido esto, es fácil de deducir que el punto de interseccion de la oblicua que sale de M con la primera paralela á fe dista de la MM' una décima parte de la distancia que hay de M á la segunda oblicua &c.

4.° En estos mismos principios se funda el uso de la escala, que puede comprenderse en dos problemas.

607 Conviene advertir que los buenos artistas tienen instrumentos ó máquinas á propósito para dividir las líneas en partes iguales con mucha facilidad y precision, y está tenida por una de las mejores la inventada por el célebre Juan Ramsden.

608 El método expuesto (*art.* 605) es muy exacto siempre que se haga uso de él sobre una gran plancha de cobre; y las compasadas deben comprobarse trasladando la abertura fn (*fig.* 114) de m á p, de n á q &c...... la fp de m á q &c......... y finalmente, la fq de m á r.

609 *Problema.* Tomar una abertura de compas igual á un número cualquiera de partes de la escala.

Resolucion. 1.° Para abreviar la explicacion se llamarán simplemente *paralelas* las rectas paralelas á ef; perpendiculares las que lo son á dichas rectas, y oblicuas las tiradas de la porcion Mf á la $M'h$.

2.° Establecido esto, afírmese la punta de la izquierda del compas en la interseccion de la perpendicular correspondiente á las centenas con la paralela correspondiente á las unidades; ábrase ó ciérrese el instrumento hasta que la punta de la derecha caiga sobre la interseccion de la paralela de las unidades con la oblicua de las decenas.

3.° Si en la expresion entra alguna fraccion de unidad, v. g. un medio, un tercio &c., se imagina la paralela correspondiente á dicha fraccion, y se colocan las puntas del compas sobre dicha paralela imaginaria.

610 *Ejemplo* 1.° Tomar una abertura de compas igual á 8 partes.

Por cuanto las centenas son cero, se pondrá la punta de la izquierda en la interseccion de la perpendicular de cero con la paralela de 8, y sobre dicha paralela se abrirá el compas hasta la oblicua de 0, respecto á que tambien son cero las decenas.

Ejemplo 2.° Tomar una abertura de compas igual á 364'5.

Se imagina una paralela entre las de 4 y 5 unidades, y se pone la punta de la izquierda en la interseccion de dicha paralela con la perpendicular de 300. En esta disposicion se abre el compas hasta que la punta de la derecha corresponda á la interseccion de dicha paralela imaginaria con la oblicua de 60.

611 *Problema.* Dada una abertura de compas, hallar su valor en partes de la escala.

Resolucion. 1.° Colocadas las dos puntas sobre las *ef*, véase en cuál de las perpendiculares se ha de poner la de la izquierda, para que la de la derecha caiga entre *M* y *f*.

2.° Hágase correr la punta de la izquierda sobre dicha perpendicular, manteniendo las dos puntas en la direccion de las paralelas, hasta que la punta de la derecha corte á una de las oblicuas.

3.° Para verificar esto bien, se afirma la punta de la derecha en la oblicua, y se ve si el arquito descrito con la de la izquierda es tangente á la perpendicular.

4.° La perpendicular manifestará las centenas, la oblicua las decenas, y la paralela las unidades.

El uso de la escala debe aprenderse con el ejercicio.

612 Puede ofrecerse el tener que hacer una escala sobre la cual la extension *fe* (*fig.* 114) valga un número de partes compuesto de decenas y unidades, v. g. 57 partes. En tal caso se operará por el método siguiente:

1.° Llevadas las cinco compasadas sobre la oblicua *fT*, se tendrá la porcion *fr* de dicha oblicua correspondiente á 50 partes.

2.° Una de las porciones, v. g. la *fm*, se dividirá en diez partes iguales por medio de otra oblicua, que puede tirarse entre la *fT* y la *fL*; y trasladando siete de estas partes de *r* hasta *D*, resultará la porcion *fD* igual á 57 partes, para el caso de valer diez partes la porcion *fm* y sus iguales.

3.° Se describirá un arco con el radio *fD*, y su interseccion con la *GF* dará el punto *d* adonde debe tirarse la oblicua desde *f*.

4.° Trasladando á dicha oblicua las divisiones de la *fD*, y bajando perpendiculares á la *fe*, ó por cualquiera de los métodos aplicados (*art.* 605

núm. 7.°) se tendrán las porciones de la *fe* iguales á diez, veinte, treinta &c. partes para el caso de valer la *fe* 57 partes.

613 Tambien se puede empezar llevando sobre la *fT* diez compasadas pequeñas, que lleguen v. g. desde *f* hasta *m*, y trasladando la *fm* cinco veces de *f* hasta *r*, resultará la porcion *fr* igual á 50 partes, y se agregará la porcion *rD* igual á siete de las diez partes iguales de que se compone la *fm*.

614 Se comprende desde luego, que si la abertura pequeña de compas se llevase 57 veces sobre la *fT*, resultaria el punto *D* mal determinado por la gran dificultad de trasladar las 57 compasadas iguales con toda precision.

615 Cuando no se quiere una gran precision, se tira la *ef*, y una paralela inmediata á ella, se divide en diez partes iguales la extension *Mf*, y se omite el subdividir cada una de dichas partes en otras diez.

616 Si la escala ha de ser de pies, pulgadas y líneas, y la extension *Mf* ha de representar un pie, se suele subdividir dicha extension en doce partes iguales, que representarán las pulgadas, y si se quiere se puede subdividir cada una de las partes menores en otras doce, por medio de las oblicuas y de doce paralelas á la *ef*.

617 *Problema*. Dividir una recta, ó un arco de círculo, en *n* partes iguales por tanteo.

Resolucion. 1.° Tómese una abertura de compas que no difiera mucho de ser igual á $\frac{1}{n}$ de la línea que se trata de dividir.

2.° Llévese dicha abertura *n* veces sobre la línea, véase la diferencia *d* entre la punta del compas y el extremo de la línea, y ábrase ó ciérrese el instrumento en una cantidad igual á $\frac{1}{n}$ de *d* al poco mas ó menos.

3.° Repítase la operacion con esta segunda abertura, y asi sucesivamente hasta que á la *n* compasada caiga exactamente sobre el extremo de la línea la punta del compas.

Con un poco de práctica se dividen las líneas en partes iguales por este método con suma facilidad y precision; y siempre conviene el comprobar las divisiones por el método indicado (*art.* 608).

618 En las operaciones de la Geometría práctica y del Pilotage se hace mucho uso del instrumento llamado *transportador*, que se reduce á un círculo, semicírculo ó cuadrante dividido en grados.

619 Suponiendo que se trata de un semicírculo, se puede ejecutar dicha division con mucha facilidad por el método siguiente.

1.° El compas con que se ha descrito el semicírculo *bge* (*fig.* 115) se conservará en la abertura igual al radio *ab*, y para las operaciones en que se empleen otras aberturas se usará de otro compas.

2.° La abertura de compas igual al radio se llevará tres veces sobre el arco, desde *b* hácia la derecha; y con esto se obtendrán los arcos *bc*; *cd*, *de* de 60°.

3.° Se tomará una abertura de compas igual á *bd*, y haciendo centro en los extremos del diámetro *b* y *e* se describirán dos arquitos, que se cortarán en *f*.

4.° Tomese la abertura igual á *fa*; y haciendo centro en *b* descríbase un arco, que cortará al semicírculo en el punto *g*, y resultará *bg*=*eg*. Para comprobar conviene ejecutar la misma operacion desde *e*, y partir á ojo la diferencia que se encuentre, que será cero si se ha operado con exactitud.

5.° La abertura igual al radio se trasladará desde *g* hácia uno y otro lado, con lo que se obtendrán los puntos *h* é *i*, y resultará el semicírculo dividido en arcos de 30°.

6.° Con la abertura igual al radio se describirá desde *f* un arco que corte al semicírculo en los puntos *l* y *m*, que corresponderán á la medianía de sus cuadrantes respectivos; y por lo tanto serán de 15° los arcos *lc*, *lh*, *md*, *mi*.

7.° Con la cuerda de 15° se dividirán por mitad los otros arcos; y resultará el semicírculo dividido en doce arcos iguales, cada uno de los cuales valdrá 15°.

8.° Con el radio *fa* (de que se hizo uso en el número 4.°, y qué es igual á la cuerda de 90°) descríbanse desde *h* é *i* dos arcos que se crucen en *s*, y la abertura de compas *sb*=*se* será la cuerda de 72°.

9.° La abertura igual á la cuerda de 72° se trasladará desde cada uno de los puntos *b*, *n*, *h* &c. hácia uno y otro lado, y con esto resultará la semicircunferencia dividida en arcos de 12°, 6° y 3°.

10.° La abertura de compas *sa* será la cuerda de 36°; y trasladándola hácia ambos lados desde los puntos *b*, *n*, *h* &c., resultará la semicircunferencia dividida en arcos de 6° y de 3°; y por medio de la cuerda de este arco se dividirá en sesenta arcos de 3°.

11.° Cuando el plano no tiene la extension necesaria para determinar sobre él la interseccion *s*, con el radio *fa* (igual á la cuerda de 90), se describe desde *c* un arco, que cortará al diámetro en *t*; y en tal caso *tg* será la cuerda de 72°, y *ta* la de 36°. Para el mismo efecto se puede emplear el punto *u* que resulta describiendo el arco desde *d*.

12.° Los arcos de 3° se pueden dividir geométricamente por mitad (*art.* 184); y con esto quedará la semicircunferencia dividida en arcos de un grado y medio.

13.° Si *u* es el punto correspondiente á 10°............30′ contados desde *b* y *x*, el correspondiente á los mismos 10°............30′ contados desde g, se puede tomar la abertura sv, ó su igual tx, y describiendo con ella un arco desde f, se obtendrá el punto z, correspondiente á 29° contados desde b; y como h corresponde á 30°, resultará la cuerda de 1°, que servirá para acabar de dividir el semicírculo de medio en medio grado; ó de grado en grado si solo se han dividido por mitad los arcos de 3°, á cuyas medianías corresponden los puntos v y x, ó sus correspondientes del cuadrante de la derecha.

14.° Se debe tener especial cuidado en no ejecutar operacion alguna sin haber verificado la precedente, enmendando la posicion de los puntos que resultan mal determinados por el defecto de los instrumentos, ó por la poca destreza del que los maneja.

15.° El método se aplica fácilmente al caso de no tener el arco propuesto mas de 120°.

620 Casi todo lo que se acaba de decir lo debemos al sabio Mascheroni, autor de una obra original intitulada la *Geometría del compas*, escrita en idioma italiano, y traducida al frances.

621 La operacion del número 13° no es mas que aproximada; pero su diferencia de la verdadera no llega á medio segundo, y dicha cantidad es imperceptible en los mejores arcos graduados.

622 Para subdividir los arcos en minutos se suele emplear un artificio semejante al de la escala de partes iguales (*art.* 605): esto es, que siendo ab, ec &c. (*fig.* 116) varios arcos concéntricos equidistantes, se tiran oblicuas como la aq desde cada division del arco ab á la siguiente del arco pq. De esto resulta, que si los arcos ab, pq &c. valen 1°, y los arcos concéntricos son siete, la proporcion $ap : ae :: pq : eu$, equivaldrá á $6 : 1 :: pq : eu = \frac{pq}{6}$: esto es, que eu será $\frac{1}{6}$ de pq, y si la diferencia entre ec y pq es muy corta, se podrá suponer que eu es $\frac{1}{6}$ de ec; ó lo que es lo mismo, $\frac{1}{6}$ de 60′ que son 10′.

Por igual razon, la interseccion de la oblicua aq con el arco siguiente á ec valdrá 20′ mas que el punto a. La interseccion s valdrá 30′ mas que a; y asi de las demas.

623 Como las rectas ap, bq se unen en el centro (que se supone colocado á la izquierda), las extensiones absolutas en los siete arcos ab, ec, il &c. aumentarán con mucha rapidez, si la distancia ap está contenida pocas veces en las distancias de a al centro comun. De esta consideracion resulta que si la extension ap está contenida pocas veces en el radio del arco ab, la diferencia entre las extensiones absolutas de los arcos ec y pq

será considerable. En tal caso eu, que es $\frac{1}{6}$ de pq, excederá en mucho á $\frac{1}{6}$ de oc; y por lo tanto valdrá mucho mas de $10'$. Por la misma razon valdrá ih mucho mas de $20'$, &c. El mayor error es el que resulta en el arco ts, equidistante de ab y pq.

Llamando m al número de minutos de los arcos ab, ec &c., l á la distancia ap entre los arcos extremos, y r al radio del arco ab, resultará el máximo error $e = \frac{m \times l}{4 \times r + 2 \times l}$.

624 V. g. si se supone $m = 30'$, $l = 1$ pulgada, y $r = 7$ pulgadas, resultará $e = \frac{30'}{28+2} = \frac{30'}{30} = 1'$.

Este error puede despreciarse en los instrumentos construidos para medir y formar ángulos sobre el papel; pero seria de consideracion en un instrumento destinado para las observaciones de la Astronomía náutica.

625 Se puede evitar el error disminuyendo la distancia entre los arcos ab, ec en la cantidad necesaria para que resulte eu igual á $\frac{1}{6}$ de ec; y lo mismo se ejecuta con los demas arcos, que por esta razon no estarán equidistantes. Se omite la regla para estas determinaciones en atencion á que el método expresado de subdividir los arcos tiene otros inconvenientes, por los cuales solo se usa en los instrumentos de papel, y en estos se puede despreciar el error que resulta de la equidistancia de los arcos.

626 Nuñez y Vernier son los Geómetras que han dado mejores ideas sobre el modo de subdividir los arcos en minutos; y en atencion á esto se dan los nombres de *nonio* y de *vernier* á un arquito ó reglita movibles, de que se hace uso para subdividir los arcos de círculo y las líneas rectas en partes iguales sumamente pequeñas con mucha facilidad y exactitud.

627 Para la inteligencia de este método sea AB (*fig.* 117) el arco del instrumento dividido en grados; y supongamos que la extension ae del nonío, igual á cinco divisiones del arco, se divide en seis partes iguales. No hay duda en que en tal caso las divisiones del *nonio* valdrán $\frac{1}{6}$ menos que las del arco; y como estas valen $60'$, las del *nonio* serán menores que ellas en $\frac{1}{6}$ de $60' = \frac{60'}{6} = 10'$ (*Arit.* 177). Por consi-

guiente, si la línea cero del nonio, que llamaremos *magistral*, ajusta con la *b* del arco, á la línea siguiente del nonio *u* le faltarán 10′ para ajustar con la division *c*; á la línea *s* le faltarán 20′ para ajustar con la *d* &c.: luego si se adelanta el nonio, de suerte que su division *u* ajuste con la division *c* del arco, la magistral *a* se habrá adelantado 10′. Si la que ajusta es la *s* con la *d*, la magistral *a* habrá caminado 20′ &c.

628 De lo dicho resulta, que en este caso, para saber á qué graduacion del arco corresponde la magistral *a* del nonio, se deberá ver cuál es el valor de la division que se halla á la izquierda de dicha magistral; y agregarle 10′, 20′ &c., segun que la division del nonio que ajusta con una del arco es la *u*, *s* &c.

629 Si las divisiones del nonio *u* y *s* (*fig.* 118) se hallan entre las *c* y *d* del arco, y la distancia de la division *u* á la precedente *c* es igual á la que hay de la division *s* del nonio á la siguiente *d* del arco, es evidente que la magistral *a* del nonio se habrá adelantado 10′ mas la mitad de 10′: esto es, 15′.

Por este estilo se determinan á ojo las fracciones de subdivision en todos los casos en que no hay division alguna del nonio que coincida con la del arco graduado.

630 Si la extension total del nonio se hubiera hecho igual á siete divisiones del arco graduado, las divisiones del nonio excederian á las del arco en 10′. Entonces la magistral ó línea de 0 seria *e*; y cuando ajustase dicha línea con una division del arco, á la línea *q* le faltarian 10′ para ajustar con la correspondiente del arco &c.: esto es, que los minutos se contarian en el nonio desde el extremo *e* hácia la izquierda.

631 Otras veces se pone la magistral *a* en el medio del nonio; y entonces si sus divisiones son menores que las del arco, cuando ajuste la *u* (*fig.* 119) se habrá adelantado 10′ la magistral *a*: 20′ cuando ajuste *s*: 30′ cuando ajusten las extremas *t* y *p*: 40′ cuando ajuste *q*; y 50′ cuando ajuste *e*.

632 Si en el caso de estar en el centro la magistral *a* (*fig.* 120) se hacen las divisiones del nonio mayores que las del arco, el ajuste de la division *e* indicará 10′; el de *q* in-

dicará 20′; el de p y t 30′, como antes; el de s indicará 40′; y 50′ el de u.

633 Todo esto debe aprenderse explicándolo sobre los mismos instrumentos; y para mayor facilidad se añadirá que todo el artificio se reduce á dividir sobre el nonio en n partes, una extension igual al número de divisiones del arco $n+1$ ó $n-1$. Con esto se logra que las divisiones del nonio resulten mayores ó menores que las del arco graduado en $\frac{1}{n}$. Por consiguiente, si m representa el número de minutos que vale cada division del arco, la expresion $\frac{1}{n}$ de $m = \frac{m}{n}$ representará en todos casos su diferencia con las del nonio.

634 V. g. si el grado está dividido sobre el arco en tres partes, cada una de ellas valdrá 20′; y si el nonio tiene 20 divisiones (iguales á 19 ó á 21 del arco), la diferencia será $\frac{20'}{20} = 1'$. Si el grado está dividido en cuatro partes, cada division del arco valdrá 15′; y si el nonio consta de 30 divisiones (iguales á 29 ó á 31 del arco), la diferencia será $\frac{15'}{30} = \frac{1'}{2} = 30''$. Si el grado está dividido en dos partes, que valdrán 30′, y el nonio tiene seis divisiones (iguales á 5 ó á 7 del arco), la diferencia será $\frac{30'}{6} = 5'$.

635 Esta misma teoría se aplica á las líneas rectas: esto es, que si una recta está dividida en décimos de pulgada, y el nonio tiene diez divisiones (iguales á 9 ó á 11 divisiones de la recta) la diferencia entre las divisiones del nonio y las de la recta será $\frac{1}{10}$ de $\frac{1}{10}$ de pulgada $= \frac{1}{100}$ de pulgada &c.

636 Para determinar con precision la coincidencia de las divisiones conviene advertir que la distancia del nonio al arco debe ser sumamente pequeña, y el ojo del observador debe colocarse en un plano, que siendo perpendicular al canto del nonio, pase por la division que ajusta con la del arco. La razon de esto se ve en la figura 121; pues es evidente que el punto a del nonio corresponderá al punto e del arco

si se coloca el ojo en m; y corresponderia á u si se pusiese el ojo en d. Se llama *paralaje* la diferencia eu que resulta de no poner el ojo en la situacion correspondiente, y se comprende desde luego que la paralaje aumenta al paso que son mayores la distancia ac y el ángulo $uae{=}mad$.

Es de mucha consideracion el error que puede resultar en algunos casos si no se tiene presente esta advertencia.

637 Para averiguar el valor de un ángulo por medio de un trasportador de los ordinarios, se coloca su centro en el vértice, de modo que uno de los lados corresponda al cero del trasportador; y el grado correspondiente al punto en que el otro lado corta al arco, manifestará el valor del ángulo.

638 Para formar en un punto un ángulo de un determinado número de grados se coloca el centro en el vértice, de suerte que la línea propuesta pase por el cero. Se hace una señal en el punto del papel correspondiente al punto del arco que vale dicho número de grados; y se acaba de resolver el problema haciendo pasar una recta por dicho punto y por el vértice.

639 Los trasportadores, de que se hace uso en las operaciones delicadas, tienen una regla que se denomina *alidada*, movible sobre el centro; y dicho punto está indicado con dos hilos muy delgados que se cruzan, y mejor por la interseccion de dos rectas muy sutiles, trazadas sobre una hojita de talco en la cara que apoya sobre el papel. La alidada lleva consigo un nonio, y en su extremo hay una punta muy aguda perpendicular á su plano, y en disposicion que le falte poco para llegar al plano sobre que se pone el instrumento.

640 Para formar ángulos con este instrumento se pone la magistral del nonio en cero, y se coloca el trasportador de suerte que su centro caiga exactamente sobre el vértice, y la punta sobre la línea propuesta. Hecho esto, se mueve la alidada hasta que señale la graduacion correspondiente al ángulo que se ha de formar, y apoyando la punta sobre el papel, se señala el punto que determina el lado del ángulo que se trata de construir.

641 Conviene que en el trasportador haya un punto sutil, muy distante del centro; y señalando sobre el papel otro punto que coincida con el del trasportador, se podrá examinar si el instrumento ha participado ó no del movimiento de la alidada.

642 Cuando se han de formar varios ángulos en un mismo punto, se ejecuta esto con suma facilidad, manteniendo el trasportador inmóvil, girando la alidada, y señalando los puntos correspondientes á los lados de dichos ángulos sucesivamente desde el menor hasta el mayor.

CAPITULO XIX.

NOCIONES SOBRE EL MODO DE LEVANTAR UN PLANO.

643 Se llama *línea vertical* á la direccion de los graves: esto es, á la recta que indica un hilo que está sujeto por uno de sus extremos, y lleva un peso en el otro extremo.

644 Se llama *plano horizontal* al que es perpendicular á la línea vertical; y se llaman *horizontales* las rectas que se imagina en dicho plano horizontal.

645 Para representar sobre un papel la posicion respectiva de varios puntos del terreno se imagina colocados dichos puntos en las intersecciones de sus verticales con el plano horizontal.

V. g. si *fábch* (*fig.* 122) es un plano vertical, y *fh* una horizontal, los puntos *a*, *b*, *c* se representan sobre el papel como si estuviesen en *u*, *m*, *s*.

646 De aqui resulta, que cuando dos puntos *a* y *b* no se hallan en una línea horizontal, su distancia *um* en el plano es menor que la distancia efectiva *ab*. Por igual razon, aunque la distancia efectiva *ac* es menor que la suma de las distancias efectivas *ab*, *bc* (*art.* 79); en el plano resulta la distancia $us = um + ms$, siempre que los puntos de que se trata estan en el mismo plano vertical.

647 Por esta razon, cuando se trata de levantar el plano de un terreno (esto es, de representar los puntos del terreno sobre el papel, segun sus posiciones respectivas) conviene conocer los ángulos que forman entre sí las horizontales tiradas desde la vertical de un punto á las verticales de los demas puntos, y las distancias que hay de la vertical de un punto á las verticales de los demas puntos que se han de representar en el plano.

648 Para ejecutar esto con perfeccion se necesitan instrumentos é instrucciones, cuyo manejo é inteligencia exige muchos conocimientos propios de la Cosmografia y Pilotage; y por ahora nos ceñiremos á las consideraciones que resultan únicamente de los principios establecidos en la Geometría.

649 Se empieza la operacion colocando arbitrariamente sobre el papel

dos puntos *a* y *b* (*fig.* 123), desde los cuales se han observado muchos ángulos. Los demas puntos se colocan segun su posicion respectiva con los *a* y *b*, que llamaremos *puntos fundamentales*, operando, segun se manifestará en los problemas siguientes.

650 *Problema I.* Conociendo los ángulos que forman con la horizontal *ab* las horizontales correspondientes á varios puntos, situar dichos puntos sobre el plano (*fig.* 123).

Resolucion. En el extremo *b* fórmese el ángulo *abl* igual al observado desde dicho punto; y ejecutando lo mismo en *a*, la interseccion de las rectas *bl*, *am*, que forman dichos ángulos, determinará el punto *e* que se trata de situar.

651 Si se quiere determinar el error que cabe en la colocacion de dicho punto, se formará el ángulo *lbu* igual al error que puede haberse cometido en la observacion y formacion del ángulo *b*; y el ángulo *mau* igual al error que puede haberse cometido en la observacion y formacion del ángulo *a*; y con esto resultará el nuevo punto *u*. La distancia *eu* manifestará el error que puede haberse cometido en la situacion del punto *e*, y lo mismo se puede ejecutar con todos los demas.

652 Este error será tanto mas considerable, cuanto mayores sean las distancias *be*, *ae*, y los errores cometidos en la observacion y formacion de los ángulos; y cuanto mas distante esté de ser recto el ángulo *aeb* formado en el punto que se trata de determinar (*art.* 570).

653 Esta es la razon por que no conviene el situar inmediatamente respecto de *a* y *b* los puntos en que las rectas que salen de *a* y *b* forman ángulos muy agudos ó muy obtusos. Esto es, que para situar el punto *f* conviene colocar antes el punto *d*; y habiendo observado los ángulos *dbf* y *bdf*, se situará dicho punto respecto de *b* y *d* con mucha exactitud.

654 Tambien, despues de colocados los puntos *e* y *d*, se puede colocar el punto *c*, siempre que se hayan observado los ángulos formados por las horizontales tiradas de *e* y *d* á la vertical de dicho punto.

655 Es evidente que por un encadenamiento de triángulos bien formados se pueden colocar en el plano puntos sumamente distantes de los fundamentales *a* y *b*; pero al paso que se van formando nuevos triángulos, se va aumentando el error que resulta de los errores que pueden haberse cometido en la observacion y formacion de los ángulos; y por esta razon merece mas confianza la determinacion de los puntos que dependen inmediatamente de los fundamentales, siempre que los ángulos formados en ellos sean de competente magnitud.

656 *Problema II.* Conociendo los ángulos *abd* y *bda*, situar en el plano el punto *d* (*fig.* 123).

Resolucion. La suma de los dos ángulos conocidos se resta de 180°, y con esto resulta el valor del ángulo *bad* (*art.* 226); y se resuelve el problema como antes (*art.* 650). El punto resulta como antes (*art.* 652) mal determinado cuando el ángulo *adb* es muy agudo ó muy obtuso.

657 *Problema III.* Conociendo el ángulo *abe* y la distancia *be*, situar en el plano el punto *e* (*fig.* 123).

Resolucion. Se forma el ángulo *abe* igual al propuesto. Se toma la porcion *be* igual al número de partes de la escala correspondiente á la distancia; y con esto resulta determinada la posicion de dicho punto.

658 En esta determinacion, el error es tanto mayor cuando mayores son los errores cometidos en las observaciones y determinaciones del ángulo y de la distancia, y cuanto mayor es dicha distancia; y ninguna dependencia tiene de los valores absolutos de los ángulos (*art.* 568).

659 *Problema IV.* Conociendo las distancias *ae*, *be*, situar el punto *e* sobre el plano (*fig.* 123).

Resolucion. Con una abertura de compas igual al número de partes de la escala correspondientes al valor de *be*, se describe un arco desde *b*. Lo propio se ejecuta desde *a* con la abertura igual al número de partes correspondientes á la distancia *ae*; y con esto resulta determinado dicho punto por la interseccion de los arcos.

660 El ángulo de los arcos es igual al *aeb* formado por los radios (*art.* 211); y por lo tanto resultará el punto mal determinado, siempre que el ángulo formado en él sea muy agudo ó muy obtuso (*art.* 567), que es lo mismo que resulta cuando el punto se sitúa por los métodos de los problemas I y II (*art.* 650 *y* 656).

661 El método del problema IV es preferible á todos los demas cuando se hace uso de una escala muy buena y de compases proporcionados, y se carece de un buen trasportador, ó de una regla de confianza.

662 Para formar el plano, haciendo únicamente uso del compas, es preciso determinar los valores de los lados de los triángulos por los métodos que se enseñan en la Trigonometría logarítmica, y para esto basta conocer el valor de la base *ab*, ó suponerlo igual á un número arbitrario de partes de la escala (*fig.* 123).

1.° Con el valor de *ab* y de los ángulos *abe*, *bae* se determinarán los valores de las distancias *be*, *ae*; y por el mismo estilo se determinarán las *ad*, *bd* (*art.* 226 *y* 550).

2.° Conocida *bd*, es fácil de determinar las *bf*, *df* por el mismo método.

3.° La *ed* se determina con el conocimiento de los lados *be*, *bd*, y del ángulo comprendido *ebd* (*art.* 553). Dicho ángulo *ebd* es igual á *abd*—*abe*; y por lo tanto no hay necesidad de observarlo directamente.

663 *Problema V.* Conociendo la distancia *ae* y el ángulo *e*, situar dicho punto en el plano (*fig.* 123).

Resolucion 1.ª Como se supone tambien conocida la distancia *ab*, lo mejor es determinar por cálculo el ángulo *abe* (*art.* 550), con lo que se conocerá *bae* (*art.* 226); y si se quiere se puede averiguar tambien por cálculo la distancia *be*. Con estos datos se puede situar el punto *e* segun cualquiera de los problemas antecedentes.

664 *Resolucion* 2.ª 1.° Tómese el complemento del ángulo *aeb* (*fig.* 124); y si es agudo fórmense los ángulos *abc*, *bac* iguales á dicho complemento, al lado de la *ab* hácia que se halla el punto que se trata de determinar.

2.° Desde el punto de interseccion *c* descríbase un círculo con el radio *cb*=*ca* (*art.* 237).

3.° Tómese una abertura de compas igual al número de partes de la escala correspondiente á la distancia *ae*, y trasladando dicha abertura sobre el arco mayor *aeb*, desde *a* hasta donde alcance, resultará el punto *e*.

4.° Si el ángulo *a′ e′ d* es obtuso, y la base es *a′ d*, se forman los ángulos *da′ u*, *a′ du*, iguales á su exceso sobre 90°, hácia el lado de la base *a′ d* opuesto á aquel en que se halla el punto *e′*; y la abertura de compas, igual á la distancia, se traslada sobre el arco menor *a′ e′ d* desde *a′* hasta donde alcance.

5.° Siempre que el ángulo *e* es agudo, y *ae* es mayor que *ab*, la distancia *ae* se puede trasladar á dos puntos diferentes del arco mayor *aeb*; y para determinar cuál de ellos es el verdadero punto *e*, es menester saber si es agudo ú obtuso el ángulo *abe*.

6.° Tambien se puede determinar el centro *c* dividiendo la base *ab* por mitad, por medio de la perpendicular *mc* (*art.* 177), cuya interseccion, con cualquiera de las dos líneas *bc*, *ac*, corresponderá á dicho punto (*art.* 239).

7.° Siempre que el ángulo dado no llega á 60°, ó pasa de 120, conviene determinar el centro *c* por la interseccion de las oblicuas; y es mas exacta la determinacion que resulta de la interseccion de una de las oblicuas con la perpendicular, siempre que el valor de dicho ángulo está comprendido entre los 60° y 120° (*art.* 567).

8.° El centro *c* resulta determinado con poca precision cuando el ángulo propuesto *e* es menor que 15°, ó mayor que 165°; y resulta mal determinado *e* siempre que el ángulo formado por la cuerda *ae* y el radio tirado al punto *e* es muy agudo ó muy obtuso, v. g. menor que 30°, ó mayor que 150° (*art.* 211 y 567).

9.° Cuando se quiera resolver el problema sin hacer uso del trasportador, se tomará la mitad del valor de la base *ab*, y con esto resultará conocido el cateto *mb* del triángulo rectángulo *bmc*, y se hallará el otro cateto *mc* por la trigonometría logarítmica, diciendo R : cot. e : : bm : mc; y tomando la abertura de compas correspondiente á dicho valor, se podrá determinar la posicion del centro *c* con mucha precision en todos los casos en que *e* pasa de 20° y no llega á 160°.

10.° Empleando dos compases, se fija la punta del primero en *c*, y la del segundo en *a*, con sus aberturas correspondientes, y la concurrencia de las puntas movibles determina el punto *e* sin necesidad de describir el círculo, y cuando mas se describe la porcion de arco inmediata á dicho punto.

11.° Cuando el ángulo *e* es recto, su complemento 90°—*c* es cero, y por lo tanto (*fig.* 124) las *bc*, *ac* se confunden con la *ab*, y se cortan á la *mc* en *m*: esto es, que *m* es el centro del círculo.

De lo que se acaba de decir resulta que

665 Si se quiere construir un triángulo rectángulo, del

cual se conocen la hipotenusa y un cateto, se deberá proceder por el método siguiente.

La extension *am* (*fig.* 49) igual á la hipotenusa, divídase por mitad en *c* (*art.* 177); y desde dicho punto descríbase una semicircunferencia con el radio $ca = em$. Tómese una abertura de compas igual al cateto conocido, y trasladándola sobre la circunferencia, desde *m* hasta donde alcance, resultará el vértice del ángulo recto en *s*, *d*, *b* ó *e*, segun que dicho cateto sea *ms*, *md*, *mb*, ó *me* (*art.* 218).

666 *Demostracion general.* Elévese desde *b* (*fig.* 124) la *bh* perpendicular á *ab*: y desde *d* la *dt* perpendicular á $a'd$. El ángulo *mbc* será $= 90° - cbh$; y como se ha hecho $mhc = 90° - e$, es evidente (*Arit.* 28) que el ángulo *cbh* es igual á *e*, y tambien será igual á *e* su alterno *bcm* (*art.* 193 y 200). Por ser $bcm = acm$ (*art.* 238), el ángulo total *bca* será igual á $e + e$. Es asi que el arco *apb* es medida de dicho ángulo (*art.* 134), luego el arco *apb* es igual á $e + e$, y el ángulo *aeb*, que tiene por medida la mitad de dicho arco (*art.* 216), será igual á *e*. Luego en el triángulo *aeb* se verifican las condiciones del problema (*art.* 663).

Cuando e' es obtuso, se hace $a'du$ igual á $e' - 90°$; y como $a'du$ es igual á $tdu - 90°$, es evidente (*Arit.* 29) que el ángulo *tdu* es igual á e'; y *zdu* será $= 180° - e'$. El ángulo *dus*, alterno de *zdu*, será por dicha razon igual á $180° - e'$, y lo mismo le sucederá á $a'us$. Luego $a'ud = 180° - e' + 180° - e' = 360° - e' - e'$; y lo propio le sucederá al arco $a'e'd$, que es su medida: esto es, que será $a'e'd = 360° - e' - e'$. Es asi que es $a'e'd = a'e'dqa' - dqa' = 360° - dqa'$: luego (*Arit.* 28) resultará $dqa' = e' + e'$; y el ángulo $de'a'$, que tiene por medida la mitad de dicho arco, será igual al ángulo propuesto e', que es lo que se debia demostrar, respecto á que lo demas es evidente por sí mismo.

667 Todo lo dicho (*art.* 664) es muy interesante para la resolucion del problema siguiente.

668 *Problema* VI. Conociendo los ángulos formados en un punto *e* (*fig.* 125) por las horizontales correspondientes á tres puntos bien determinados, situar en el plano el punto *e*.

Resolucion. Por el problema anterior (*art.* 664) descríbase el arco de círculo en que debe hallarse el punto *e* segun el ángulo formado por las horizontales que se terminan en *b* y *a*; y por el mismo problema descríbase el arco de círculo en que debe hallarse *e* segun el ángulo formado por las horizontales que se terminan en *a* y *d*. Dichos arcos concurrirán en *a*, y en otro punto *e*, que será el que se trata de determinar.

669 El punto *e* se puede determinar con dos compases, cuyas aberturas sean iguales á los respectivos radios *ca*, *ue*; y haciendo girar dichos compases sobre *c* y *u*, el concurso de sus puntas determinará el punto *e*, sin necesidad de describir las circunferencias; y cuando mas, se describirá con uno de ellos el arquito inmediato á dicho punto.

670 Como las *am*, *as* se suponen conocidas, se pueden calcular la $ac=bc$ y la $au=du$, y determinar los puntos *c* y *u* con el compas (*art.* 659). Para dicho cálculo se tendrá presente que el ángulo *acm* es igual á *aeb*, y el *aus* es suplemento del obtuso *aed* (*art.* 666).

671 Hecha la construccion, se examinará con el trasportador si los ángulos formados en *e* satisfacen á las condiciones del problema.

672 La posicion de *e* resulta tanto mas exacta, cuanto mejor determinados resulten los centros *c* y *u* (*art.* 664, *núm.* 8.°), y cuanto mas se acerque á recto el ángulo formado por los radios tirados desde dichos centros al punto *e* (*art.* 211 *y* 567).

673 La posicion de *e* resulta absolutamente indeterminada en el caso de concurrir los centros *c* y *u* en un mismo punto.

674 Las resoluciones de este problema y del siguiente por cálculo son muy engorrosas, aun cuando se haga uso de las fórmulas menos complicadas, que se deducen por los métodos que se enseñan en el Algebra.

675 *Problema VII.* Habiendo situado en el plano cuatro puntos bien determinados, que llamaremos *a*, *b*, *d*, *t*, y conociendo los ángulos formados en *e* por las horizontales de *a* y *b*, y por las horizontales de *d* y *t*, situar en el plano el punto *e*.

Resolucion. Se resuelve el problema por el mismo método que el anterior (*art.* 668), con la sola diferencia de que como en este caso los ángulos formados en *e* no tienen lado alguno comun, los arcos de círculo se cortarán en dos puntos diferentes; y para saber cuál de ellos es el verdadero punto *e*, es necesario conocer aunque sea al poco mas ó menos, algun otro dato, y aquel de los dos puntos que satisfaga á dicho dato será el que se trata de determinar.

676 El punto *e* resultará muy mal determinado cuando sea corta la distancia de las dos intersecciones.

677 Si desde el punto *e* se han observado muchos ángulos, se pueden describir los arcos en que debe hallarse dicho punto segun el valor de cada uno de los ángulos observados; y entre dichos arcos se escogerán los dos que parezcan mas propios para la determinacion de *e* (*art.* 211 *y* 567).

678 V. g. en el caso de la figura 125 se puede tirar una recta de *b* á *d*: y sobre ella, como cuerda, se puede describir el arco de círculo correspondiente al ángulo obtuso *bed*; y su interseccion, con cualquiera de los dos *aeb*, *aed*, dará el punto *e*.

679 Conviene tener muy presente que para la formacion del plano no basta el conocimiento de los ángulos y lados de los triángulos, y es indispensable el saber hácia qué parte de las rectas tiradas á los puntos que sirven de términos de comparacion caen los puntos que se han de situar. Para convencerse de esto basta atender á que si los ángulos *bam*, *abl* (*fig.* 123) se hubiesen formado hácia la parte inferior de la *ab*, la posicion del punto *e* resultaria en e', y lo mismo se verifica formando el plano segun los métodos expuestos en cualquiera de los problemas.

680 Esta es una de las razones por que ante todas cosas conviene formar á ojo un bosquejo del plano que se ha de levantar.

681 Se puede formar el plano con solo el conocimiento de los ángulos, y si en este caso se quiere emplear el método del problema IV, se ve el número de partes de una escala cualquiera que vale la extension arbitraria *ab* (*fig.* 123); y tomando por base dicho número de partes, se calculan las demas distancias en partes de dicha escala arbitraria.

682 Por un plano de esta naturaleza no se podria venir en conocimiento de las efectivas distancias horizontales. Para este efecto basta que se haya medido sobre el terreno la distancia horizontal entre dos cualesquiera puntos bien situados, y dicha operacion es indiferente que se haga antes ó despues de la formacion del plano. Se construirá una escala en que la línea del plano, correspondiente á la medida sobre el terreno, valga un número de partes igual al de los pies, varas, brazas, cables ó millas que vale la distancia medida (*art.* 612 *y* 617); y dicha escala servirá para averiguar las efectivas distancias horizontales que hay entre todos los puntos.

683 Siempre que se conozca la distancia efectiva entre dos puntos *a* y *b* (*fig.* 123) aunque no se haya construido la escala propia del plano, se pueden determinar las distancias horizontales entre dos cualesquiera de sus puntos *d* y *f*, diciendo: el número de partes de la escala arbitraria que vale la *ab*, es al número de dichas partes que vale la *df*, como el valor efectivo de la distancia horizontal *ab* medida sobre el terreno al valor efectivo de la distancia horizontal *df*. Esto se funda en la perfecta semejanza que se supone entre la situacion respectiva de todos los puntos en el terreno y en el plano (*art.* 248).

684 Para la exacta formacion de los planos de los puertos, y para calcular las elevaciones de algunos puntos sobre el nivel del mar, es preciso tener presentes varias atenciones, que se reunirán al fin del Tratado de Pilotage.

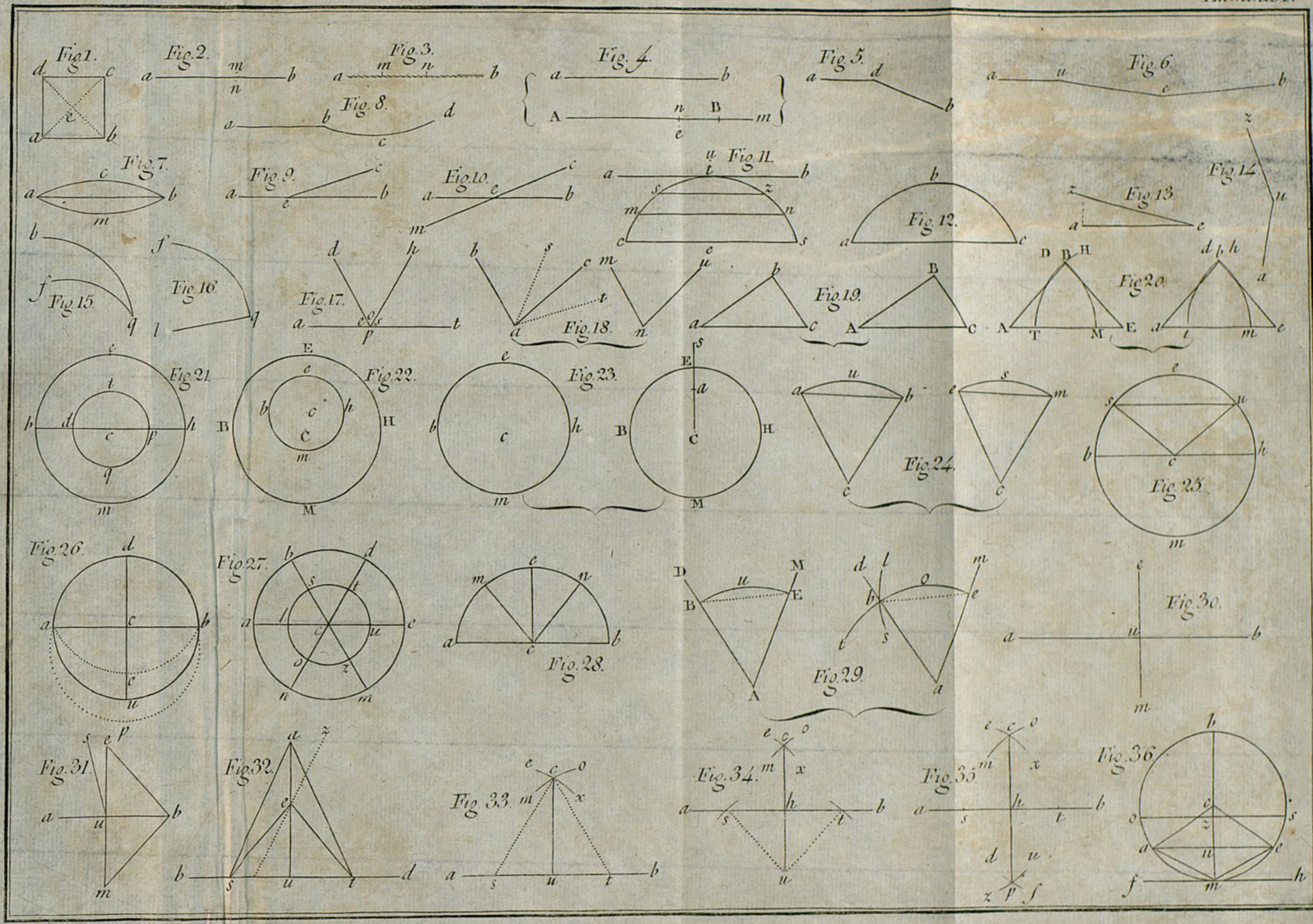


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.

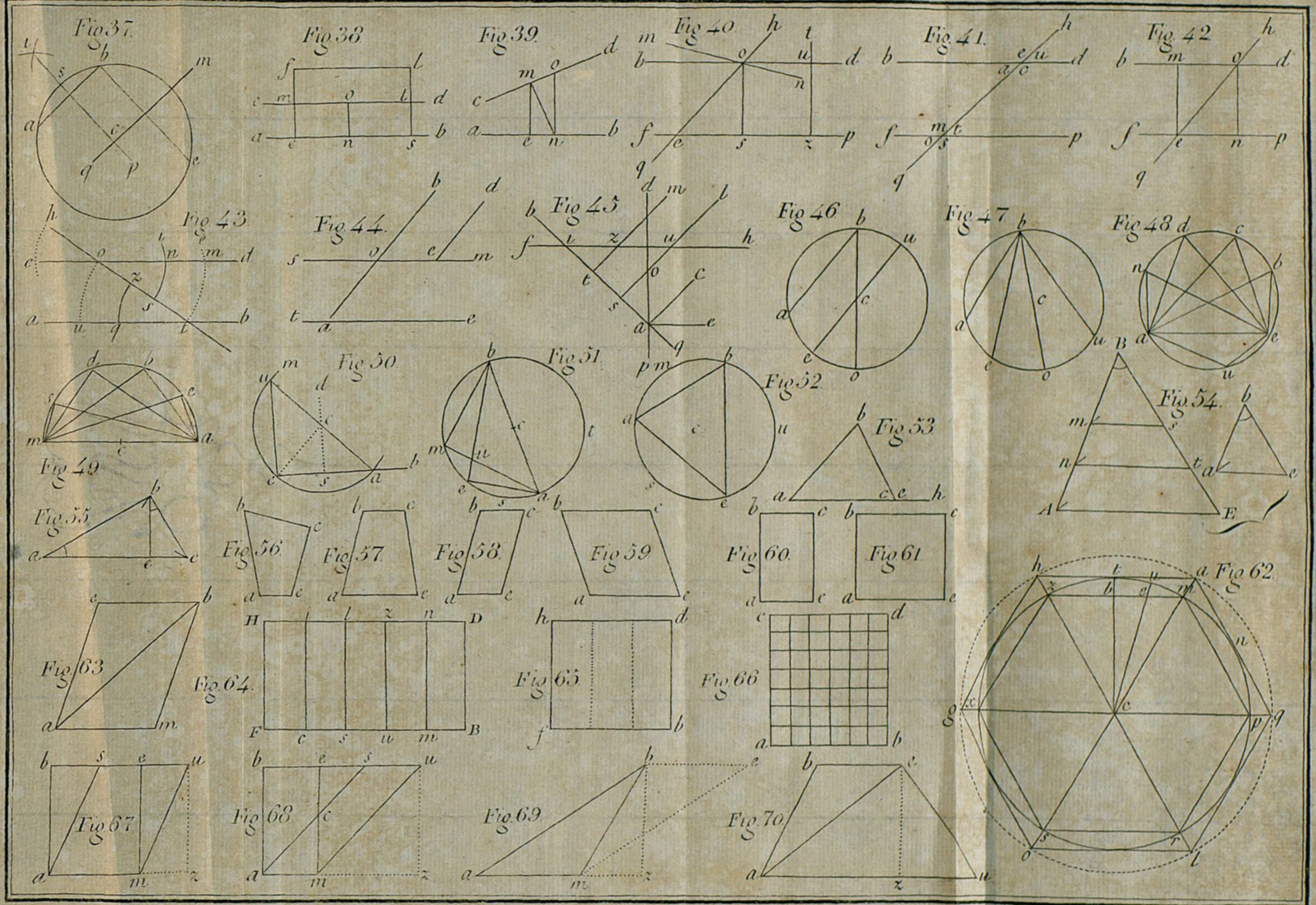


Fig 37
Fig 38
Fig 39
Fig 40
Fig 41
Fig 42
Fig 43
Fig 44
Fig 45
Fig 46
Fig 47
Fig 48
Fig 49
Fig 50
Fig 51
Fig 52
Fig 53
Fig 54
Fig 55
Fig 56
Fig 57
Fig 58
Fig 59
Fig 60
Fig 61
Fig 62
Fig 63
Fig 64
Fig 65
Fig 66
Fig 67
Fig 68
Fig 69
Fig 70

Fig.109.

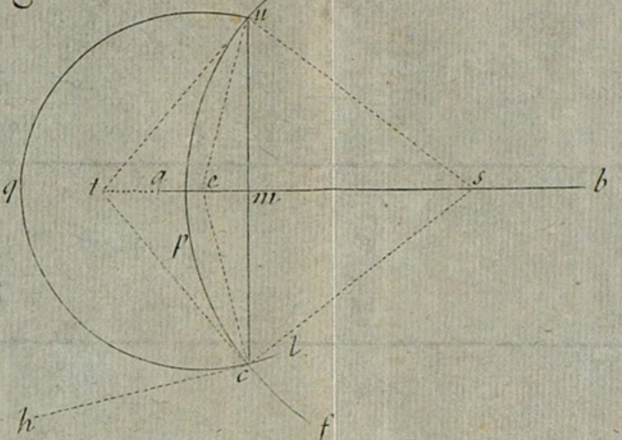


Fig.110.

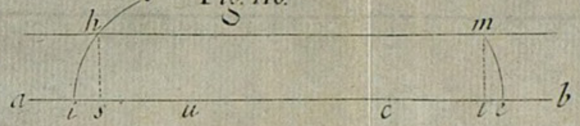


Fig.111.

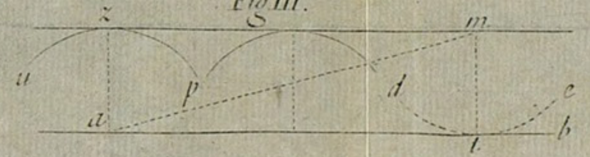


Fig.112.

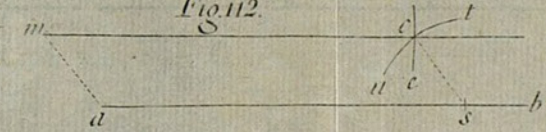
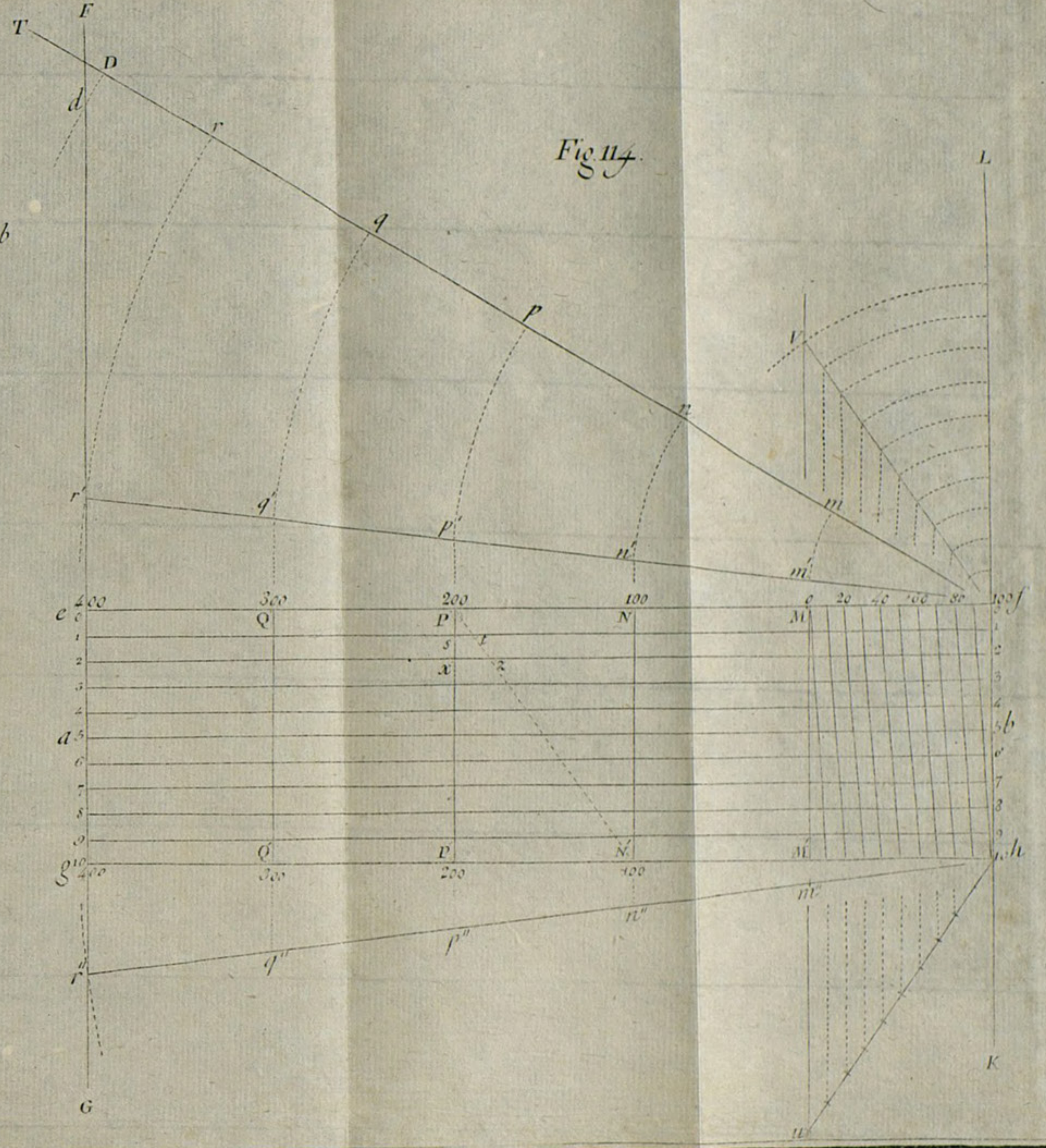


Fig.114.



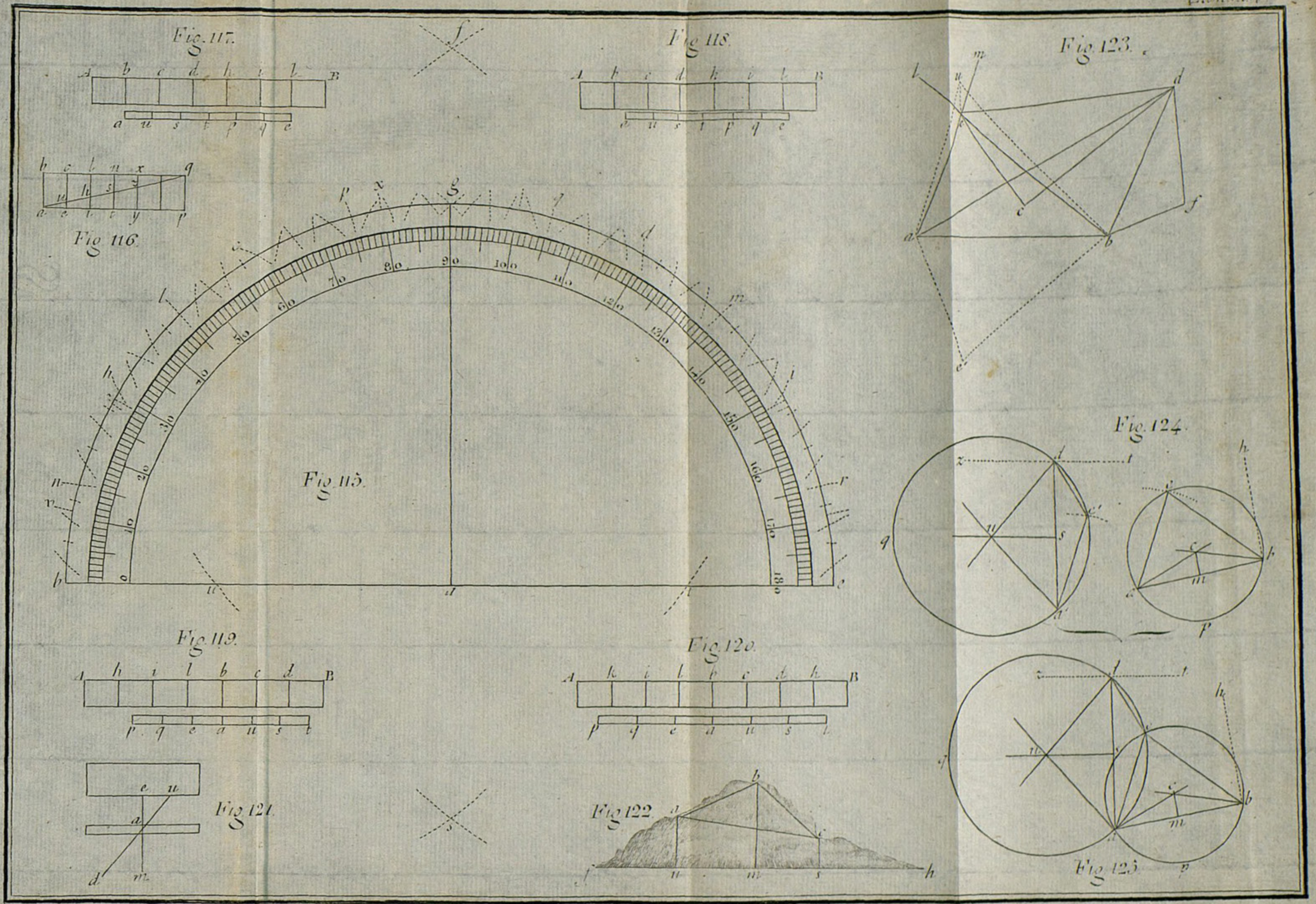


Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 116.
Fig. 115.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 125.