

Manuel Barrantes López | Consuelo Barrantes Masot | Víctor Zamora Rodríguez

Didáctica de la medida en Primaria



UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA



Esta obra ha sido objeto de una doble evaluación, una interna, llevada a cabo por el consejo asesor del Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, y otra externa, efectuada por evaluadores independientes de reconocido prestigio en el campo temático de la misma.

Edita:
Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones
C/ Caldereros, 2 - Planta 3ª. 10071 Cáceres (España)
Tel. 927 257 041; Fax 927 257 046
E-mail: publicac@unex.es
<http://www.unex.es/publicaciones>

I.S.B.N.: 978-84-09-15448-7

Maquetación:
Control P. 927 233 223. estudio@control-p.eu
Cáceres, 2020



Índice

PRÓLOGO	4
Tema 1. Didáctica de la medida	7
1.1. Introducción	8
1.2. Importancia y breve historia de la medida	8
1.3. Principales medidas utilizadas en Primaria	9
1.4. Enseñanza de la medida en la Educación Primaria.....	10
1.5. Concepto de magnitud, cantidad y medida	11
1.6. La medida en los currículos oficiales de Primaria.	13
1.7. Conservación de la medida y transitividad	15
1.8. Metodología para la resolución de problemas de medida	16
1.9. Las competencias básicas en relación con la enseñanza-aprendizaje de la medida.	18
1.10. Aspectos previos para enseñar a medir	20
Tema 2. Enseñanza de las medidas de longitud, capacidad y masa (peso)	23
2.1. Desarrollo didáctico de la enseñanza de la Medida	24
2.2. Medida de la magnitud longitud	24
2.3. Unidades arbitrarias de longitud	25
2.4. Necesidad de utilizar las medidas convencionales de longitud.....	27
2.5. Unidades convencionales de longitud.	27
2.6. Medida de la magnitud capacidad.....	30

2.7. Unidades arbitrarias de capacidad.	31
2.8. Medidas convencionales de capacidad.	33
2.9. Medida de masa (peso)	34
2.10. Unidades arbitrarias de masa	35
2.11. Medida convencionales de masa	36

Tema 3. Desarrollo didáctico de la enseñanza de la medida tiempo 38

3.1. Enseñanza de la medida de tiempo. Un poco de historia	39
3.2. La medidas arbitrarias de tiempo.	41
3.3. Unidades convencionales	44

Tema 4. Desarrollo didáctico de la medida de superficie 49

4.1. Aspectos previos para la medida de la magnitud superficie	50
4.2. Aprendizaje del concepto área.	51
4.3. Unidades arbitrarias	54
4.4. Materiales para la enseñanza de las áreas: tangrams y palillos	56
4.5. Unidades convencionales de medida de superficie	62
4.6. Estrategias para la enseñanza de las áreas de las figuras planas mediante medidas unidimensionales.	63
4.7. Actividades de refuerzo	70

Tema 5. Introducción a la enseñanza de las medidas de volumen 73

5.1. Aspectos previos de la medida de volumen.	74
5.2. Enseñanza de la magnitud volumen y sus medidas	74
5.3. Actividades para la comprensión del concepto volumen	75
5.4. Proyectos de actividades de medidas conjuntas.	80

Bibliografía 82

Prólogo



El objetivo del manual es la preparación metodológica de los estudiantes para profesores de Primaria en el contenido didáctico de la Medida en consonancia con las metodologías y currículos actuales. El libro también es válido para los profesores en ejercicio que estén interesados en la mejora de su tarea como enseñantes en el tema que nos ocupa.

El texto es, así mismo, un complemento de otros dos ya publicados, Barrantes y Barrantes (2017) y Barrantes, Zapata y Barrantes (2020) en los que presentamos la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, y los Números y sus operaciones, bloques tan importantes como éste de la Medida para que el alumno adquiera la competencia matemática.

El objetivo es ofrecer a los profesores o futuros profesores de Primaria herramientas y materiales suficientes para poder desarrollar el currículo sin la necesidad de considerar el libro de texto como el elemento único de la enseñanza-aprendizaje.

La medida es un tema que aparece en los distintos planes de estudio de cualquier país, y además está presente en muchos momentos de la vida ordinaria, solamente tenemos que pensar en las actividades que realizamos desde que nos levantamos hasta que nos acostamos.

Así pues, la medida tiene gran importancia en la vida cotidiana, lo que justifica su aprendizaje y enseñanza en la escuela no sólo como algo importante sino como algo necesario e imprescindible para el buen desarrollo de los alumnos en su vida diaria y, posteriormente en la laboral.

Esta importancia de la medida, hace organizar nuestra enseñanza didáctica partiendo de que el alumno se familiarice con los problemas reales, como cantidad de pintura para pintar una habitación, medir el área del patio del colegio, área del aula o de su dormitorio, volumen de una piscina, en lugar de los problemas teóricos de libros en los que se calculan superficies de terrenos o volúmenes de sólidos regulares que no son de su interés y en los que las medidas no son obtenidas por el alumno ya que se les dan como datos.

Por ello, aplicamos un método activo basado en la experiencia, la participación mediante casos particulares que van sugiriendo, las generalizaciones correspondientes y el razonamiento globalizado. Esta forma de presentar las actividades nos aleja de la enseñanza tradicional, centrada en el aprendizaje de definiciones y fórmulas que conllevan una aritmetización de la medida así como en el cálculo mecánico de operaciones, totalmente alejadas de la intuición del concepto de medida.

El conocimiento y uso de los materiales didácticos específicos, para la construcción de los distintos contenidos, transforman el aprendizaje en algo consistente y riguroso que afianzan y cambia las concepciones del profesor y el alumno hacía una tendencia más constructivista de la enseñanza.

Comentamos los diferentes temas del manual para posteriormente exponer la metodología utilizada para las muchas actividades incluidas en este libro.

El primer tema aborda la panorámica general sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Medida en Primaria. Comienza con una breve historia de la Medida, para continuar presentando las definiciones de las distintas medidas utilizadas en Primaria, de una manera teórica y rigurosa. El capítulo continúa con un estudio genérico de la enseñanza actual de la Medida en Primaria, así como la importancia de ésta en los currículos oficiales y las metodologías necesarias para enseñarla.

En los siguientes temas se aborda, ya de una manera individual, el desarrollo didáctico de las medidas de las magnitudes que se trabajan en Primaria que son: longitud, capacidad, masa (peso), tiempo, superficie y volumen.

A la magnitud tiempo se le dedica un capítulo aparte, ya que sus unidades no siguen el sistema decimal, y por las peculiaridades propias de esta magnitud.

También, la magnitud superficie es tratada en otro capítulo para hacer hincapié en su medida de forma manipulativa huyendo de las fórmulas aprendidas y de los problemas en los que se dan los datos, sin que el alumno los obtenga por sus propios medios, con lo que se convierten en meros cálculos numéricos.

La magnitud volumen ha sido tratada como una mera introducción, mediante actividades, para que el alumno vaya comprendiendo el concepto que posteriormente se estudiará de una forma más completa en la Secundaria.

Estas medidas se enseñan siguiendo el esquema general en el que mediante juegos preparatorios se plantea la necesidad de medir, utilizando en un principio las medidas arbitrarias para posteriormente introducir las medidas convencionales, como conveniencia de entendernos de una manera más universal.

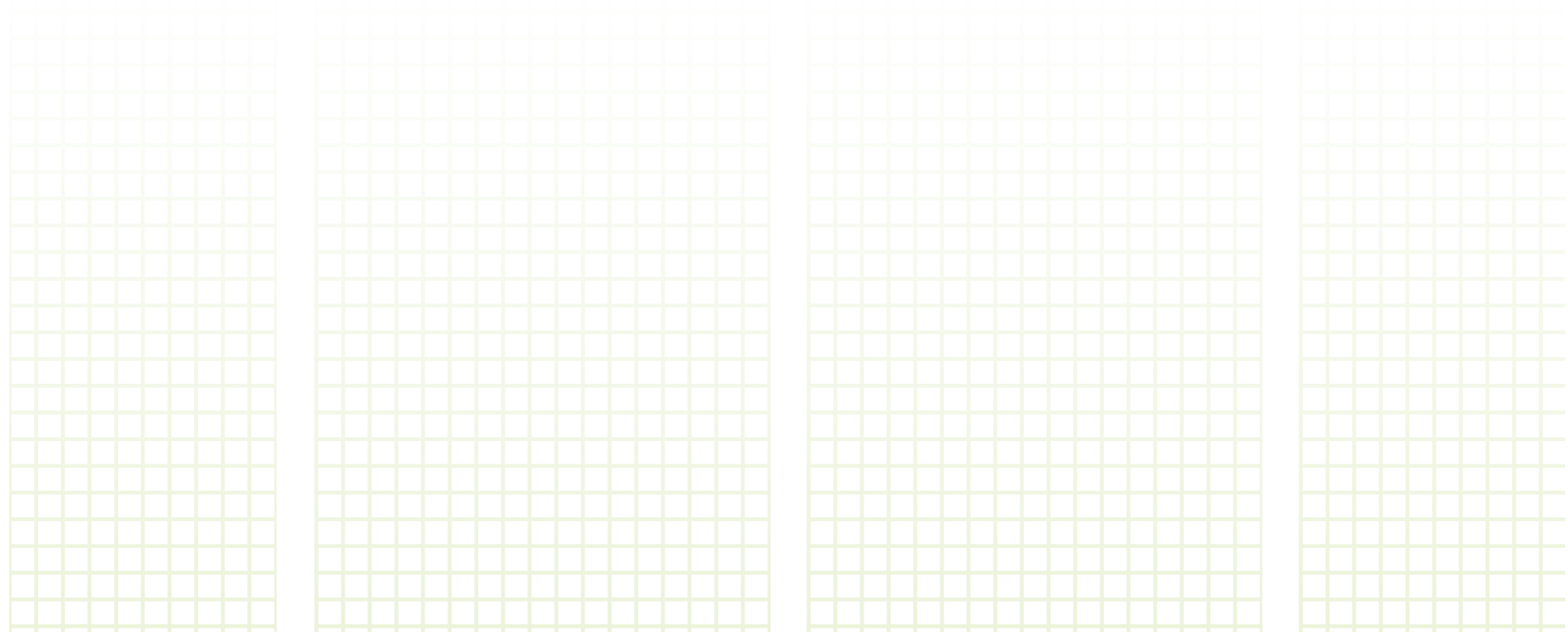
El texto contiene en cada tema un número suficiente de actividades que pueden ser útiles tanto para los profesores como para los estudiantes para profesores, para su reflexión y aprendizaje del trabajo en el aula.

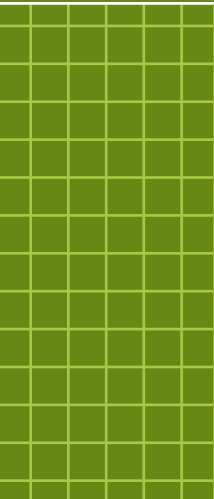
Además, se incluyen actividades específicas para los alumnos de Primaria de todos los niveles, orientadas también al aprendizaje y análisis de los diferentes contenidos que se trabajan en el programa de Primaria.

Con las actividades planteadas, se busca que haya una conjunción práctica, una relación entre la escuela y la sociedad en la que se desenvuelve el alumno. Por ello, se relaciona la medida con contenidos propios de las matemáticas escolares como los Números y sus operaciones, así como con otras áreas del currículo.

El texto se culmina con una extensa bibliografía para que el lector que lo desee pueda ahondar más en sus conocimientos sobre cualquier tema tratado en este manual.

Los autores





1

TEMA

Didáctica de la medida



1.1. Introducción

Érase un tiempo en que los comerciantes no medían las telas que vendían a los clientes. Éstos iban a comprarlas para hacerse un vestido, cortinas, lonas para tiendas, etc. y los vendedores les daban el trozo que les parecía.

Así, pasado un tiempo, los compradores se dieron cuenta que unos recibían más tela mientras otros, por el mismo precio, recibían menos. Esto originó numerosos altercados entre vendedores y compradores y dio lugar a que los comerciantes organizaran una reunión.

En dicha reunión, los vendedores decidieron fijar para un mismo precio, una misma cantidad de tela equivalente a la distancia que separaba sus narices de los pies.

Todo iba bien, hasta que al cabo de poco tiempo los vendedores más bajitos observaron que los clientes hacían colas en los puestos de los vendedores altos, pues adquirirían una medida de tela más grande por el mismo precio.

Los vendedores bajos perdieron toda la clientela. ¿Qué harán? Van corriendo a contárselo al rey, el cual llega al final del asunto decretando que, de aquí en adelante solo su propia y real medida “de la nariz al suelo” será legal.

Ordena a sus cortesanos tomar la real medida de tela y señalar su longitud sobre el suelo en el patio del palacio.

Desde entonces, todos los comerciantes tienen para medir un palo de la misma longitud que la señal del patio de palacio. Así se hizo justicia y los comerciantes bajitos, altos y compradores fueron felices.

De esta pequeña historia en forma de cuento y parecida a la realidad, podemos sin embargo, extraer dos conclusiones importantes para este estudio que comenzamos.

En primer lugar, la historia nos plantea la necesidad de medir, necesidad que el ser humano ha tenido desde los pueblos más primitivos. En segundo lugar, esa necesidad de medir lleva a los personajes de la historia al uso de medidas, primero, arbitrarias y posteriormente convencionales, debido a la necesidad que tenían todos para ponerse de acuerdo y poder vivir en convivencia pacífica. Estas dos conclusiones van a ser el eje principal del tema que vamos a desarrollar.

1.2. Importancia y breve historia de la medida

Si hiciéramos un estudio de los distintos planes de estudio de cualquier país, podríamos descubrir que en todos ellos está presente el tema de la medida. Solamente con que pensemos en las actividades que realizamos desde que nos levantamos hasta que nos acostamos, podemos darnos cuenta de cómo la medida y su cálculo están presentes en las actividades de la vida ordinaria.

Así pues, la utilidad de la medida y la necesidad de medir han llevado a que el hombre utilice diferentes sistemas para medir las magnitudes a lo largo de la historia. No podemos hacer un estudio completo de todos estos sistemas en este apartado, pero sí exponer a grandes rasgos algunos de los sistemas utilizados, cuya función principal ha sido, siempre, que el mayor número de seres humanos pudieran comprenderse y relacionarse en referencia a las distintas situaciones de medida que les plantea la vida, tanto a nivel cotidiano como a nivel laboral, de entretenimiento, etc.

La medida aparece junto con la Geometría en las civilizaciones antiguas para medir terrenos, hacer edificaciones, y en la astronomía.

En un principio, el hombre mide tomando como unidades distintas partes de su cuerpo. Este sistema podía ser utilizado por todos los individuos de cualquier grupo y las pequeñas diferencias que podían presentar las medidas no eran

significativas pues el tipo de actividad que se realizaba no necesitaba de una gran precisión. Así pues las unidades utilizadas podemos denominarlas como *arbitrarias* en el sentido de que eran útiles para un número reducido de individuos normalmente de una sola comunidad o de un entorno próximo.

En longitud, las unidades arbitrarias ligadas al cuerpo humano y su movimiento son la braza, la mano, el paso, el pie, el codo. Para las medidas de capacidad, se utilizaban, como unidad, todo tipo de recipientes de diferentes tamaños, formas y capacidades para medir los líquidos y los sólidos, como por ejemplo, cereales. Para el peso, los hombres utilizaban balanzas en las que se colocaban pesas como unidades que eran de distintos materiales y distintos tamaños.

La medida del tiempo se hacía mediante la observación del cielo y los astros, como el sol, que aparecían en él. El tiempo no tiene un elemento físico que podamos manejar, sino que depende más del medio en el que estamos inmersos que del hombre mismo. Así aparecían la sucesión, día, noche, estaciones del año, y las partes de día, que venían determinados por necesidades sociales, construyéndose objetos como los relojes de arena que medían el tiempo de una determinada actividad.

Las primeras referencias sobre la medición del área y del volumen están asociadas al almacenamiento de granos, alimentos y líquidos, movimientos de tierras, cosechas, construcciones, etc. así como a la fabricación de vasijas y recipientes de cerámica.

La necesidad tecnológica y el avance de la sociedad hizo que el hombre fuera planteándose medidas cada vez más universales que abarcaban grandes comarcas o países. También, debían dar un paso más, para que el comercio entre países cercanos o alejados pudiera realizarse con medidas comprendidas y conocidas por todos.

De esta forma y pasado el tiempo, se implantó el Sistema Métrico Decimal en la Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en París en 1889. Se pretendía buscar un sistema de unidades que fuera único en el mundo y facilitara el intercambio de información cultural, científico y comercial de

datos. Este sistema se caracterizaba por ser un sistema de cálculo decimal, es decir, los múltiplos y submúltiplos de cada unidad de medida están relacionados entre sí por múltiplos y submúltiplos de 10. A la vez había una coherencia interna entre las magnitudes, por ejemplo las unidades de capacidad, superficie y volumen derivan de la unidad de longitud.

1.3. Principales medidas utilizadas en Primaria

La forma actual del Sistema Métrico es el llamado Sistema Internacional de Unidades (SI) que define las principales medidas usadas por el profesor en Primaria, de la siguiente forma:

Metro: Unidad de longitud que equivale a la longitud de trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de $1/299\,792\,458$ de segundo, basada en que la velocidad de la luz en el vacío es exactamente $299.792.458$ metros / segundo (Conferencia General de Pesas y Medidas, CGPM, 1983). En unidades de Planck equivale a 6.19×10^{34} .

Segundo: Unidad de tiempo definida en 1967 en base al tiempo atómico y es la duración de $9.192.631.770$ oscilaciones de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del isótopo 133 del átomo de cesio a una temperatura de 0K. En unidades de Planck equivale a 1.85×10^{43} .

Kilogramo: Se define al fijar el valor numérico de la constante de Planck, h , en $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$, cuando se expresa en la unidad Julio por segundos que es igual a $\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$ donde el metro y el segundo se definen en función de la velocidad de la luz en el vacío y la frecuencia de la transición hiperfina del estado fundamental de un átomo de cesio 133 no perturbado.

El 20 de mayo de 2019, la definición del kilogramo pasó a estar ligada con la constante de Planck.

Se utiliza el término kilogramo-fuerza o kilopondio en el campo del Sistema Técnico de unidades que se define como el peso de una masa de 1 kg en la gravedad estándar de la superficie terrestre con un valor de 9.80665 m/s^2 .

Las unidades de Planck o Sistema natural de unidades miden varias de las magnitudes fundamentales del universo: tiempo, longitud, carga eléctrica, masa y temperatura. El sistema se define de tal forma que las constantes universales del universo tomen el valor de la unidad, estas constantes son: velocidad de la luz en el vacío, constante de gravitación universal, constante reducida de Planck, constante de la fuerza de Coulomb y constante de Boltzmann.

La “capacidad” y el “volumen” son términos que se encuentran estrechamente relacionados. Se define la capacidad como *el espacio vacío de alguna cosa que es suficiente para contener a otra u otras cosas*. Se define el volumen como *el espacio que ocupa un cuerpo*. Por lo tanto, entre ambos términos existe una equivalencia que se basa en la relación entre el *litro* (unidad de capacidad) y el *decímetro cúbico* (unidad de volumen). En el SI la unidad de volumen o *metro cúbico* es una unidad derivada, es decir, son resultado de combinar magnitudes físicas tomadas como básicas. Sabemos que el metro cúbico surge a partir del cubo de la longitud, una de las magnitudes básicas.

El litro es aceptado en el (SI), aunque ya no pertenece estrictamente a él. Fue adoptado por la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en 1879 y en 1901 fue descrito como *el volumen ocupado por una masa de 1 kg de agua pura en su máxima densidad y a presión normal (a $4 \text{ }^\circ\text{C}$ y 1 atm respectivamente)*. Esta definición fue derogada en 1964 porque el litro difería del decímetro cúbico en aproximadamente 28 partes por millón, induciendo a error en las mediciones que requieren bastante precisión. Actualmente sólo es usado como un nombre especial del decímetro cúbico.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

Proyecto: *La medida en tu Comunidad Autónoma.*

Se puede enfocar haciendo el estudio de la historia de la medida desde la antigüedad, las medidas antiguas y cómo se evoluciona hacia la unificación de medidas a nacional y mundial.

También se puede enfocar considerando una magnitud: longitud, tiempo, etc. y haciendo una búsqueda más exhaustiva de las medidas no convencionales, solamente de esa magnitud, utilizadas en diversas épocas hasta llegar a las medidas convencionales. De esta forma se pueden obtener varios trabajos, cada uno de una magnitud, que mediante una puesta en común le darían al estudiante una muestra muy completa de las medidas en su Comunidad.

1.4. Enseñanza de la medida en la Educación Primaria.

Hay una colección de actividades matemáticas que son necesarias y aparecen en todas las culturas. Estas tareas podemos considerarlas como las necesidades matemáticas que un alumno debe satisfacer y dominar, y son: contar, localizar, medir y explicar.

Como todos sabemos, contar se refiere a establecer una relación íntima entre el alumno y el mundo de los números de forma que no tenga problemas en el entorno familiar y laboral en el que pasa el mayor tiempo de su vida.

Localizar y medir suponen actividades directamente relacionadas con la geometría y la medida, donde el alumno debe saber interpretar y manejar mapas, planos para poder ubicarse y establecer direcciones a la vez que realiza medidas de todo tipo, longitud, tiempo, grupos de personas, ...

Explicar, sin embargo, se entiende como la aportación que el vocabulario matemático hace al lenguaje cotidiano, incluyendo en dicho lenguaje una serie de vocablos que nos permiten ser más precisos, establecer ordenaciones de argumentos, deducciones lógicas, información numérica; conceptos que cada vez son más utilizados en las conversaciones y en los medios de comunicación actuales.

Así pues, la medida tiene gran importancia en la vida ordinaria, lo que justifica su aprendizaje y enseñanza en la escuela no solo como algo importante sino como algo necesario e imprescindible para el buen desenvolvimiento de los alumnos en su vida ordinaria y, posteriormente, laboral.

Diferentes investigadores de la psicología evolutiva entre ellos Piaget consideran que los alumnos construyen el espacio en orden inverso al desarrollo matemático. Es decir, aunque la topología es desarrollada en el siglo pasado, y la geometría ha sido estudiada desde los griegos, los niños perciben en un primer lugar las relaciones topológicas (contorno abierto, cerrado, vecindad, continuidad, con agujeros...) después las relaciones orientativas (izquierda, derecha, delante, detrás ...), y, por último, las relaciones geométricas (distancia, longitudes, ángulos). Esto nos dice que el alumno debe haber madurado suficientemente para poder comprender adecuadamente el tema de la medida.

En este punto, la primera pregunta que debe hacerse el profesor es: *¿Cuándo enseñar la medida? ¿cómo enseñar la medida?, ¿qué materiales y recursos existen para ello y cuál es la forma más aconsejable de realizarla?*

En los siguientes apartados, contestamos a estas preguntas estableciendo una metodología general que suministre al futuro profesor herramientas suficientes para poder abordar en la escuela la enseñanza de las magnitudes fundamentales de una forma eficaz.



1.5. Concepto de magnitud, cantidad y medida

Consideramos que el estudiante para profesor tiene que comprender perfectamente los conceptos básicos del tema: magnitud, cantidad y medida, que va a tener que utilizar en todo momento y enseñar a sus alumnos.

Se define **la magnitud**, según la oficina Internacional de Pesos y Medidas, como *un atributo de un fenómeno, un cuerpo o sustancia que puede ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente*. Las magnitudes con las que vamos a trabajar son cuantificables pues hay otras que no lo son como los colores, gusto, ruidos texturas, la forma. Dentro del SI nosotros trabajamos en Educación Primaria con las magnitudes fundamentales o básicas cuantificables: longitud, tiempo y masa y también con las magnitudes derivadas: peso, superficie, volumen y ya hemos comentado lo que ocurre con la capacidad.

Además de éstas, y para comprender bien el concepto, otros ejemplos de magnitudes pueden ser:

- Cajas de botellas de zumo de limón que hay en un almacén. De acuerdo con la definición anterior las botellas tienen como atributo zumo de limón y pueden ser contabilizadas.
- Altura de los habitantes de Cáceres, igualmente es un atributo que puede ser observado y medido mediante las unidades de longitud.

Llamamos **cantidad** a cada estado particular de la magnitud mensurable (lo que ocurre en un momento determinado). Por ejemplo, en las magnitudes anteriores serían: Cajas de botellas que hay de zumo de limón el día 20 de febrero de 2019 y Altura de Pablo Alcivar, vecino de Cáceres. También, la longitud de una mesa, la masa de una moneda, el volumen de un cubo de madera, son otros ejemplos de cantidades.

De una forma más rigurosa, si tomamos una magnitud, todos los objetos con igual medida pertenecen a la misma clase (clasificación); esta clase es lo que denominamos cantidad. De esta forma, se ha hecho una partición en el conjunto de todos los objetos medibles y se han asociados a distintas clases disjuntas entre sí. En esta partición, dos objetos que pertenecen a distintas clases tienen diferentes medidas por lo que se puede hacer una ordenación de las clases. Por ejemplo, en la magnitud longitud, todos los objetos con igual longitud pertenecen a la misma clase (clasificación); cada clase es una cantidad de longitud. Tenemos una partición en el conjunto de todos los objetos medibles longitudinalmente de forma que dos objetos que pertenecen a distintas clases tienen diferentes medidas y pueden ser ordenados.

La definición de **medida** se refiere a la relación que se establece de una cantidad de magnitud (patrón) con otra u otras (de la misma especie) estableciendo una comparación. Los patrones básicos se llaman unidades de medida y son universalmente aceptados. Así pues, hay que situar la unidad tantas veces como hagan falta hasta cubrir la cantidad inicial que queremos medir. Para especificar el valor de una cantidad de una magnitud hay que dar la unidad de medida y el número que relaciona ambos valores. De nada sirve decir que la altura de un árbol es de 5 veces en lugar de decir 5 metros.

También se define la medida como una función que asigna un número a un objeto medible. Por ello, el conjunto origen está formado por las cantidades de todos los objetos medibles con una determinada magnitud y el conjunto final son los números reales.

Por ejemplo, si queremos conocer la longitud de un campo de fútbol, tenemos que medir el segmento longitud campo (objeto medible) y asignarle un número (conjunto de los números reales) que llamaremos la medida longitud del campo de fútbol. Pero para asignar un número a esa longitud, tenemos que tomar una unidad de medida, que tiene una longitud determinada y el número real asignado a dicha longitud es precisamente las veces que esa unidad de medida está contenida en el segmento longitud del campo. Así, si tomamos como medida el metro, al segmento longitud campo podríamos asignar el número 105, o lo que es lo mismo, diríamos que el campo de fútbol mide 105 metros.

Podemos observar que la medida final depende de la unidad con la que se mida el objeto, y la cantidad unidad siempre mide 1, es decir, se le asigna el número real 1.

Algunas propiedades de las medidas son:

- Si componemos las cantidades de dos objetos medibles mediante una misma magnitud, la medida resultante es igual a la suma de las medidas de dichos objetos. De esta forma, siempre podremos hablar de suma de longitudes, suma de tiempos, etc.
- También ocurre que al multiplicar la cantidad de un objeto medible mediante una misma magnitud por un número, la medida total queda multiplicada por ese número. Si la cantidad de un objeto medible por una magnitud es más pequeña que la cantidad de otro entonces la medida del primero es menor que la del segundo.

Por ejemplo, si tenemos un lápiz que pesa 5 gramos y otro lápiz que pesa 4 gramos podemos decir que los dos lápices juntos pesan 9 gramos. Y si un lápiz pesa 5 gramos, entonces 3 lápices pesan 15 gramos. Si un lápiz es más pequeño que otro de las mismas características entonces el primero pesa menos que el segundo.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

Sea la magnitud: asistentes a los partidos de fútbol del R. Madrid.

Estado particular o cantidad: asistentes al último partido de la liga jugado por el R. Madrid, este año.

¿Cómo medimos esa cantidad? Comparándola con otra conocida (unidad de medida). Puede ser, de uno en uno, por decenas, por cientos, por miles, por billones,... entonces el resultado puede ser 20000 asistentes al último partido de la liga jugado por el R. Madrid, este año. También, 200 decenas o 20 millares.

En función del evento que estemos considerando se utiliza una unidad u otra. En los partidos importantes de fútbol se suele utilizar "miles de personas".

Resuelve estos otros ejemplos.

1. ¿Qué unidad de medida crees que se utiliza en la magnitud “asistentes a una manifestación”? Da un ejemplo de cantidad que sea verdadera (busca en las noticias de actualidad) y mídela.
2. Da un ejemplo de cantidad verdadera y unidad para la magnitud: tiempo empleado por el campeón de la vuelta ciclista a España en realizarla.

1.6. La medida en los currículos oficiales de Primaria

La medida ha constituido un contenido de enseñanza en todos los programas escolares, no solo españoles sino de los países suficientemente avanzados por la importancia práctica que tiene dicho tópico.

Actualmente, los currículos oficiales de Primaria parten siempre de que el profesor debe conseguir que sus alumnos sepan captar, interpretar y utilizar todas las informaciones que le llegan en la vida cotidiana, en las que se manejan las principales magnitudes. Es decir, se parte de un conocimiento intuitivo de las magnitudes y de la construcción sucesiva de ellas, mediante el estudio del Sistema Métrico, sus aplicaciones y la utilización de instrumentos de medida favorecedores de buenos resultados.

El alumno debe ir conociendo las magnitudes y realizar mediciones en progresión cada vez más compleja. Deben comenzar *por la necesidad de medir* como la mejor manera de resolver ciertos problemas, utilizando en primer lugar *unidades no convencionales o arbitrarias* para llegar progresivamente a las *unidades e instrumentos de medidas convencionales*.

Las magnitudes que se tratan en los primeros cursos de Primaria son: longitud, tiempo, peso/masa y capacidad. En todas ellas se comienza con

una iniciación a la medida no convencional, prestando particular atención al reconocimiento de las unidades de este tipo, locales y regionales.

El siguiente paso es la utilización de unidades convencionales para medir. El profesor debe ir procurando que el alumno sea capaz de seleccionar y utilizar la unidad apropiada para medir. Además, el alumno debe realizar estimaciones de resultados de medidas (distancias, tamaños, pesos, capacidades, tiempos...) en contextos familiares, haciendo la explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.

Diferentes investigaciones insisten en la práctica del *cálculo mental* y las actividades con números no exactos, es decir, la realización de *estimaciones*. A veces, el alumno identifica la exactitud con la solución correcta y la inexactitud con la incorrecta. Sin embargo, se debe hacer ver al alumnado que la mayoría de las veces hacemos operaciones con cantidades inexactas sobre todo con la medida. Se debe valorar que la pérdida de exactitud nos puede llevar a realizar un cálculo que es más sencillo y se puede hacer mediante el cálculo mental.

El profesor no debe olvidar nunca los problemas de medida de estimación. Tenemos que tener en cuenta que en una estimación de la medida, es necesario que el alumno interiorice previamente la unidad de medida que va a utilizar para estimar, por lo que estas estimaciones son más complejas que las puramente numéricas.

Las medidas que el alumno realice deben ser de la vida real y no de aquellos objetos que aparecen en los libros, cuyas magnitudes reales son diferentes y, sin embargo, en dichos dibujos aparecen iguales. Por ejemplo, el dibujo en el libro de un autobús y un lápiz tienen la misma longitud. Medir estos objetos dibujados con la regla implica una mala enseñanza de la magnitud correspondiente y, por supuesto, imposibilita la posterior estimación de la medida de estos objetos en la vida real.

En los dos últimos cursos se sigue estudiando los contenidos anteriores, haciendo hincapié en que el alumno utilice la medida adecuada para medir, pero ahora se le exige saber distinguir entre la medida exacta y la medida

aproximada, y una utilización más precisa de los instrumentos para medir. De esta, el alumno debe expresar la medida de una actividad en minutos y segundos y debe saber realizar todas las equivalencias y transformaciones que se dan entre las horas, minutos y segundos, siempre en un contexto de situaciones cotidianas y de su entorno. El alumno debe empezar a manejar el Sistema Sexagesimal, propio de la medida de tiempo.

Aunque en los primeros cursos, los alumnos trabajan el Sistema Métrico Decimal, no es hasta bien entrada la Primaria cuando se entra más de lleno en el conocimiento y uso de los múltiplos y submúltiplos de las distintas unidades, utilizadas en contextos cotidianos. Estas actividades llevan también a la realización de comparaciones y ordenaciones de unidades y cantidades de una misma magnitud, siempre mediante la explicación oral y escrita de las estrategias, personales o no, utilizadas en la medición. Las actividades a desarrollar van encaminadas a que el alumno experimente las equivalencias entre las unidades de una misma magnitud y la composición y descomposición de unidades de medida de ella.

Las conversiones de medidas son las actividades que más ocupan dentro del estudio de la medida. Sin embargo, en la mayoría de los casos, los alumnos no trabajan con medidas propiamente, sino que se convierten dichas conversiones en una mera actividad numérica en la que el alumnado en lugar de pasar de millares a decenas pasa de kilómetro a metro o de kilos a gramos. Se busca más que un trabajo de medida, un algoritmo de resolución mediante tablas, escaleras o representaciones que nos dan un resultado automáticamente. Otras veces, los problemas nos dan ya los resultados de medida calculados de forma que el alumnado solamente tiene que hacer las operaciones que indique el problema. En este caso, no hay un problema de medida sino un ejercicio numérico pues la medida de los objetos ya viene calculada.

Se identifica el aprendizaje de la medida con el conocimiento y dominio del sistema métrico decimal y se considera que el alumno alcanza las competencias correspondientes cuando efectúa conversiones con cierta rapidez y seguridad. De esta forma, encontramos alumnos que expresan

superficies en metros, o dan soluciones ilógicas como que una bola de billar pesa 10 kg o el agua contenida en una piscina olímpica es 200 litros.

En los últimos años, se introducen dos nuevas magnitudes que son el área y el volumen. Se introduce la magnitud área mediante un estudio histórico de las medidas tradicionales de esta magnitud o bien mediante la realización de cálculos reales de perímetro y de superficies de figuras planas.

Como hemos dicho, son meras actividades de introducción. Así, se deben realizar tareas con unidades de superficies, múltiplos o submúltiplos que impliquen cálculos de uso cotidiano o del entorno del alumno como pueden ser perímetros o áreas de figuras planas tales como campos de deportes, mesas, etc. como expresión cuantitativa de su tamaño. Otras actividades pueden llevar a los alumnos a realizar comparaciones de superficies bien por superposición, descomposición o medición.

La magnitud volumen se introduce mediante la utilización de las unidades de volumen más comunes, o también mediante un estudio histórico. Es importante que el profesor diseñe actividades de laboratorio para que el alumno comprenda y maneje la equivalencia entre el litro, el kilo y el decímetro cúbico. Como en otros casos, es necesario que el alumno conozca las equivalencias entre las unidades de capacidad, masa y volumen, que se puede realizar mediante representación de una tabla.

El objetivo es sembrar los conceptos superficie y volumen, mediante actividades, de manera que tengan una buena preparación para su estudio en la Secundaria.

Es interesante también realizar actividades de conservación de la magnitud correspondiente, de forma que los alumnos observen que los cambios que alteran la disposición espacial, la forma, el aspecto perceptivo quedan invariante para la medida. Estas actividades dan a conocer al profesor el desarrollo psicogenético del alumno.

J. Piaget se interesó por analizar los procesos de aprendizaje de la medida de magnitudes y elaboró un modelo teórico para explicar dichos procesos.

Este investigador identifica dos procesos fundamentales situados en la base de la medición de todas las magnitudes que son: La conservación de las medidas y la transitividad de las medidas que estudiamos en el siguiente apartado.

1.7. Conservación de la medida y transitividad

Según Piaget, el concepto de medida se relaciona íntimamente con la lógica, de forma que hay una serie de conceptos o ideas lógicas que son imprescindibles para que el aprendizaje sea significativo, y no algo mecánico y sin sentido, como es aprendido por muchos alumnos.

La conservación es uno de los importantes requisitos para que el profesor tenga éxito en la didáctica de la medida. Cuando hablamos de *conservación de la cantidad*, nos referimos a la capacidad de percibir que ciertas propiedades como número, longitud o sustancia no varían cuando en ellas se producen cambios de forma, tamaño o posición.

Por ejemplo, damos a un alumno dos cintas de telas y éste comprueba que tienen la misma longitud; después, una de ella la estiramos y la otra la doblamos, el alumno debe seguir pensando que aunque hayamos cambiado la forma siguen teniendo la misma longitud. Conservar significa que el alumno comprende que las relaciones cuantitativas entre dos series de objetos no varían a pesar de que produzcamos cambios que no impliquen ni adición ni sustracción de objetos. Dichos cambios pueden ser agrupamientos, separaciones, amontonamiento, etc.

Piaget distingue diferentes etapas en la consecución de la conservación correspondiente. Así en una primera *etapa de génesis*, el alumno muestra un pensamiento rígido, sujeto a la percepción directa, que se caracteriza por la falta de conservación, es decir, el alumno se deja llevar por la apariencia

de los objetos y no descubre la invariancia cuando se somete el objeto a transformaciones.

La segunda etapa se llama *etapa de transición o elaboración*, en la que la conservación aparece pero no se generaliza, ya prima la lógica sobre la apariencia y el alumno empieza a observar la conservación en algunos casos. En esta etapa, el alumno duda en muchas ocasiones sobre si se ha producido una invariancia o no. Por ejemplo, es capaz de observar la invariancia de la longitud de una cinta colocada en círculo pero no si hacemos un lazo con ella. La última etapa es *de logro o adquisición*, donde el alumno es capaz de responder correctamente a todas las preguntas relacionadas con la conservación.

Según diferentes investigadores, los alumnos conservan la longitud a los 6 años, la masa entre 8 y 9 años y el peso entre los 9 y 10 años, el tiempo entre los 7 y 8 años, el área a los 10 y el volumen a partir de los 12 años. Estas edades son orientativas pues puede haber alumnos que alcancen la conservación antes o después. Lo importante es observar que el alumno no adquiere la conservación a la misma edad, en todas las magnitudes, sino que se sigue una secuencia. La conservación es anterior a la medición por lo que el profesor debe asegurarse que el alumno conserva bien la magnitud correspondiente antes de enseñarla. En cada una de las medidas mostraremos diferentes actividades para que el profesor observe la conservación de éstas.

Año	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Longitud		-----	-----								
Masa				-----	-----	-----					
Área						-----	-----				
Volumen								-----	-----		
Tiempo			-----	-----	-----	-----					

Fig. 1.1. Conservación de la medida.

La propiedad de la transitividad de las medidas consiste en que, si un objeto A mide lo mismo que otro objeto B y el objeto B mide lo mismo que otro objeto C, entonces el objeto A mide lo mismo que el objeto C. La transitividad es una propiedad que va a tener sentido cuando se utilice una unidad de medida para medir los tres objetos y no se midan superponiendo unos sobre los otros.

Por ejemplo, para resolver los problemas de seriación, el alumno debe aplicar la regla lógica de la transitividad. Parte del problema surge porque no comprenden que, en una serie ordenada de palitos de menor a mayor, un objeto en la mitad de la serie es a la vez más corto que los que le siguen y más largo que los que le preceden. Los niños de mayor edad pueden construir mentalmente relaciones entre los objetos. Saben inferir la relación entre dos si conocen su relación con un tercero. De tal forma, si saben que el palo A es más corto que B y que éste es más corto que el palo C, el palo A deberá ser entonces más corto que C. Conforme a la teoría de Piaget, la transitividad se alcanza entre los 7 y 11 años de edad.

1.8. Metodología para la resolución de problemas de medida

Los problemas de medida son muy comunes en la vida ordinaria; por ello, es importante enseñar al alumno la resolución de estos problemas siguiendo los pasos de resolución de problemas de Polya.

El modelo más clásico y conocido es el de George Polya, todavía vigente, que consta de cuatro fases: Comprensión del tema, Planificación, Ejecución del plan y Supervisión. La gran mayoría de los modelos que se han elaborado posteriormente guardan estrecha relación con el modelo de Polya y sus fases.

Las etapas de resolución de problemas, según el modelo de Polya, se refirieren, en primer lugar, a que el alumno *comprenda el tema* como requisito principal antes de actuar. Esto consiste en mudar cada oración a

una representación mental para posteriormente integrar esta información en un esquema coherente. En la siguiente etapa, *la planificación*, el alumno aprende a razonar cuáles son las ideas o procesos lógicos que le llevan a la solución; para ello, examina las estrategias generales que puede aplicar y elige las acciones que debe realizar. Después, en la ejecución del *plan* organizado en la etapa anterior, se traducen las ideas en términos de operaciones mediante las que se obtiene la solución o las soluciones. La última etapa sería la *supervisión* en la que se evalúan las decisiones tomadas y los resultados del plan realizado, por ejemplo, se comprueba que la solución es coherente y lógica para el problema planteado.

El modelo de Polya y todos los modelos propuestos posteriormente nos confirman la similitud entre la organización de las actividades humanas y la resolución de problemas. En ambos casos encontramos dificultades que superar, tomamos decisiones mediante las que encontramos caminos intermedios que nos van acercando a nuestro objetivo, es decir, se alcanzan los fines buscados mediante una planificación teniendo en cuenta los recursos que tenemos a nuestro alcance. Así pues, la educación matemática, mediante la resolución de problemas, es la mejor forma de desarrollar en los individuos capacidades en las que sepa responder a situaciones con cierta flexibilidad, aprender a sacar partido de circunstancias imprevistas, saber encontrar semejanzas entre situaciones que aparentemente no son parecidas y realizar síntesis de antiguos conceptos que den lugar a nuevas ideas e hipótesis de planteamientos.

Una vez que el alumno conoce los pasos para resolver un problema, el profesor debe aplicar en las actividades la conocida *metodología de resolución de problemas*.

Esta metodología está basada en la aplicación de la medida a diversas situaciones o problemas en complejidad adecuada al nivel del alumno y que tienen que ver con su vida ordinaria. Por ello, pueden aparecer con datos incompletos, tener una o varias soluciones, presentados de forma gráfica, sin datos numéricos... entre otros casos.

La justificación de la conveniencia de utilizar esta metodología, se basa en que se considera que la dificultad de aprendizaje está más relacionada con las estrategias de enseñanza de la medida que con el contenido.

La metodología de resolución de los problemas requiere una serie de etapas como son:

Fase motivadora. De experimentación: en la que se realicen diferentes pruebas o ensayos relacionados con el entorno real.

Fase de comprensión: mediante la representación gráfica y simbólica, reflexión e interiorización y comunicación oral o escrita en la que los aprendizajes sean lo más significativos posible.

Fase de aplicación: para profundizar y comprobar los conocimientos aprendidos, en la que se realicen otros ejercicios y problemas del entorno real en los que también puedan surgir nuevos conceptos.

En estas fases deben tenerse en cuenta las estrategias, el lenguaje y los algoritmos y destrezas del alumnado.

En esta metodología, el profesor tiene que saber motivar adecuadamente la realización de las actividades, siendo claro y breve en sus explicaciones, poniendo el énfasis en la aplicabilidad y la relación del tema de estudio con otros temas. Mientras el alumno realiza las tareas, el profesor va proporcionando sugerencias, mediante la formulación de preguntas o subrayando la importancia de justificar lo que se vaya obteniendo. En los debates, su papel es de moderador, que hace hablar al alumno promoviendo la discusión y el análisis, contracte de los resultados debidamente justificados.

Se deben abordar los contenidos matemáticos desde las experiencias que posee el alumnado en Primaria. Pero esto debe ser solamente un punto de partida, para llegar de una manera progresiva a la abstracción y a la formalización del conocimiento matemático. Es en la Secundaria cuando el profesor debe aprovechar los conocimientos empíricos de los alumnos para transformarlos en otros más estructurados y rigurosos, sin olvidar, en esta etapa, los planteamientos experimentales.

Suponemos que planteamos a los alumnos el siguiente problema:

Si quisiéramos empapelar este aula en el que nos encontramos ¿cuántos euros nos costaría?

La etapa de comprensión del problema según Polya, en este caso queda minimizada pues el enunciado es simple y concreto. La fase de comprensión de la metodología resolución de problemas coincide con la etapa de planificación de Polya, se establece un debate en el que los alumnos deben llegar a que para poder empapelar el aula es necesario saber sus dimensiones, es decir, el cálculo de la superficie del aula, es decir, área de cada una de las paredes. Es preciso que los alumnos, divididos en grupo, en esta fase motivadora elaboren un plan para el cálculo total de dicha superficie. Mediante pruebas y ensayos van decidiendo calcular primero el área de cada una de las paredes, teniendo en cuenta los vanos que se encuentran en ellas. Buscan estrategias de cuál es la mejor forma de calcular dichas áreas, dividiéndola en paneles iguales y luego sumando, restando los vanos iguales, etc. Posteriormente hay que realizar el cálculo de los rollos de papel que hay que comprar, teniendo en cuenta los diferentes precios que podemos encontrar en el mercado.

También es en la fase de comprensión cuando se desarrolla la ejecución del plan concebido en la etapa anterior; para ello, mediante la resolución práctica del problema los alumnos reflexiona y se van haciendo preguntas sobre la exactitud de la solución y si podemos comprar el papel exacto que mide la superficie, etc.

Para la fase de aplicación de la metodología de resolución de problema se buscan problemas relacionados con el que acabamos de resolver como el cálculo de la superficie de la fachada de un edificio señero como puede ser una iglesia o un estadio.

Metodológicamente la resolución de problemas pone de manifiesto la eficacia del trabajo en grupo, tanto en el planteamiento y en la resolución del problema como en la superación de las dificultades de los alumnos menos dotados.

En esta metodología, es muy importante tener en cuenta que el alumno resuelva problemas adecuados a su nivel de conocimientos pues en caso contrario, al fracasar repetidas veces, no se ve compensado con el éxito y no desarrollará capacidades satisfactorias de resolución de problemas.

Es necesario que los problemas que presentemos a los alumnos estén planteados desde diferentes contextos: deportes, viajes, vacaciones, trabajo, escuela,... en los que trataremos los mismos conceptos matemáticos, pero que pueden ser más valorados por los alumnos por su aplicación en diferentes situaciones de la vida ordinaria. Así podemos hacer un estudio de las medidas que se utilizan en los deportes, con lo que el alumno llegará a valorar más la importancia y utilidad de esta materia en la sociedad.

La metodología de resolución de problema es una idea simple, pero que requiere mucho cuidado en su puesta en práctica. Una de las cosas más difíciles para el profesor novel será encontrar y plantear cuestiones, actividades y problemas que los alumnos sean capaces de 'abordar' y a partir de los cuales, dicho profesor, pueda comenzar a introducir los conceptos o materia correspondientes, útiles en los problemas reales y cotidianos. Ahora bien, en el pensamiento de cada alumno se encuentran situaciones cotidianas, de su fantasía, de la realidad social, etc., que se pueden traer al aula y convertirlas en problemas de todo el alumnado.

1.9. Las competencias básicas en relación con la enseñanza-aprendizaje de la medida

Se denominan competencias básicas aquellas competencias que un alumno debe alcanzar al finalizar la enseñanza obligatoria, para realizarse como persona y como ciudadano. Éstas harán que su incorporación a la vida adulta sea de forma natural, y le darán confianza para seguir aprendiendo durante toda su vida.

De acuerdo con la propuesta realizada por la Unión Europea, se identifican las siguientes competencias clave:

1. Competencia matemática y competencias en ciencia y tecnología.
2. Competencia en comunicación lingüística.
3. Competencia digital.
4. Sentido de la iniciativa y el espíritu de empresa.
6. Aprender a aprender.
7. Competencias sociales y cívicas.
8. La conciencia y la expresión cultural.

La competencia matemática es la capacidad del alumno para utilizar los conceptos matemáticos aprendidos y aplicar el razonamiento matemático en la resolución de los problemas que le presenta su vida cotidiana diaria y de trabajo.

La adquisición de esta competencia va a llevar al alumno a manejar los procesos de pensamiento, como la inducción y la deducción, los cálculos y la lógica. El alumno debe conocer la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para: calcular, medir, ubicarse en el espacio, representar e interpretar la realidad, a partir de la información disponible. En nuestro tema, se debe dar al alumno la posibilidad real de utilizar las actividades de medida en contextos tan variados como sea posible.

La competencia matemática la van consiguiendo los alumnos en la medida que los contenidos matemáticos los utilizan en un mayor número posible de situaciones que se le presentan en su vida cotidiana, fuera del aula. Se va modelando un individuo con capacidad crítica para afrontar su vida. Se entiende que la carencia de esta competencia en el alumnado le va a suponer tener dificultades en la organización individual o colectiva tanto en el mundo personal como en el laboral.

Desde esta materia, también se contribuye **a las competencias en Ciencia y Tecnología** contribuyendo con la Orientación espacial y la Geometría en optimizar su capacidad de orientación para hacer construcciones o mejora en el empleo de planos, mapas, dibujos que mediante la medida se facilita la comunicación de resultados e informaciones rigurosas.

La enseñanza y aprendizaje de la medida colabora en la competencia en **comunicación lingüística** mediante el lenguaje específico de esta materia, enseñando al alumno nuevas palabras y expresiones que debe incorporar progresivamente a su lenguaje usual. Se trata de que el alumno haga descripciones verbales de las actividades o resultados obtenidos, pero también que sea capaz de atender y entender a las explicaciones de otros compañeros y participar en los debates, para desarrollar su capacidad de crítica y sus habilidades comunicativas. Se debe conseguir que el alumno se exprese correctamente y con la mayor precisión posible en los temas relacionados con la medida. La comunicación y el debate le ayudan a comprender mejor los conceptos y las destrezas procedimentales que aplica, ya que debe esforzarse en establecer relaciones entre los conceptos y las actividades, clarificando y justificando las acciones que realiza o ha realizado.

En el logro de la **competencia digital** se colabora mediante la iniciación de los alumnos en los usos de calculadora, programas de ordenadores e internet para realizar actividades de medidas.

En el sentido de **la iniciativa y el espíritu de empresa**, que se basa en la habilidad de transformar las ideas en actos y en el desarrollo de la creatividad, la innovación y asumir riesgos, está muy presente la resolución de problemas de medida mediante sus etapas de planificar mediante el razonamiento, ejecución del plan, y la valoración y análisis de los resultados. La planificación, en este caso, enseña a los alumnos a pensar y analizar con precisión la situación que se le plantea, para trazar un plan que le lleve a la solución óptima de la situación. En definitiva, debe buscar estrategias, tomar decisiones y gestionar los recursos para obtener

la solución. Valorar esa solución, observando sus pros y sus contras le hace concebir otras variaciones del problema que mejoren la solución obtenida. Estas actividades forman a un alumno con una mayor iniciativa personal.

En el desarrollo de la **competencia aprender a aprender** influye el carácter práctico de la Medida en las que el aprendizaje se consigue mediante herramientas básicas, materiales y recursos que se utilizan en las metodologías de resolución de problema. Mediante estas metodologías se pretende ayudar al alumno a ser consciente de los saberes que domina, de sus carencias, de lo que necesita aprender para evitar las lagunas, optimizando y orientando los procesos de aprendizaje hacia sus objetivos personales. También, contribuyen a desarrollar su pensamiento estratégico, es decir, la capacidad de cooperar, de autoevaluarse, y el manejo eficiente de un conjunto de recursos y técnicas de trabajo intelectual, individuales o colectivas, desarrolladas mediante experiencias de aprendizaje. El objetivo es que el alumno se implique en ser consciente, gestione y controle sus capacidades desde un sentimiento de competencia o eficacia personal.

En este sentido, se contribuye también al logro de la **competencias sociales y cívicas** pues, como en otras áreas, el trabajo en equipo adquiere una dimensión singular, ya que enseña al alumno a escuchar y a aceptar otros puntos de vista distintos al propio, como se extrae de todo el proceso que debe realizar en la resolución de problemas.

Con respecto a la **conciencia y expresión cultural**, la Medida ha sido siempre considerada clave en el desarrollo cultural de las distintas civilizaciones. No se puede concebir el Arte en todas sus manifestaciones, pintura, escultura, arquitectura, etc. y en todas las culturas sin la medida, la geometría y, por supuesto, los números.

Por último, concluir que estas competencias no son aisladas sino que son interdependientes desde la reflexión crítica, la creatividad, la resolución de problemas, la toma de decisiones y la gestión constructiva.

1.10. Aspectos previos para enseñar a medir

En este apartado, abordamos, ya de una manera concreta, la enseñanza y aprendizaje de la medida en Primaria. Pero antes de estudiar cada una de las medidas que se aprenden en Primaria, vamos a comentar algunos aspectos previos y comunes a todas las medidas de estudio.

Para empezar, el profesor puede realizar una actividad que consiste en:

- *Piensa en un día normal y anota todas aquellas situaciones de tu vida ordinaria y escolar que estén relacionadas con la estimación o medida de alguna magnitudes conocidas como, longitud, masa, tiempo, capacidad, superficie, volumen.*

El profesor hace observar al alumno que estas situaciones son muchas más de las que podía pensar, lo que justifica la importancia de saber estimar y medir las distintas magnitudes correspondientes a Primaria. Siguiendo con la metodología, en este apartado, el profesor busca la comprensión por parte del alumno de aquellas situaciones en las que se utilizan magnitudes. Emulando a cómo ha sucedido en la historia, se considera en un principio la necesidad de medir, empezando las medidas de objetos con unidades arbitrarias para pasar posteriormente a reflexionar sobre la necesidad de utilizar medidas entendidas por todos, lo que llamamos medidas convencionales.

Así pues, vamos a considerar diferentes recomendaciones o aspectos previos a la enseñanza de la medida:

Las primeras recomendaciones son preparatorias para el aprendizaje de la medida.

1. **Sucesos continuos y discontinuos.** En la vida ordinaria observamos sucesos discontinuos como contar las bolas de un collar, los pasos que hay hasta la casa, que son fácilmente calculable mediante el conteo. Pero hay otros sucesos, los que llamamos continuos, como el paso del tiempo,

los desplazamientos, que no pueden ser medidos mediante el conteo. Por ello, el alumno debe saber distinguir bien entre los sucesos continuos y los discontinuos para observar qué objetos puede medir y cuáles no.

2. **Orientación espacial.** Para un trabajo adecuado con el alumno, referente a la medida, es interesante que éste conozca y domine el espacio donde se mueve, es decir, sepa entender los conceptos espaciales como cerca, lejos, delante, detrás, pues serán utilizados en las actividades propias de la medida. En Barrantes y Barrantes (2017) se dedica un capítulo completo a la orientación espacial en las que los conceptos espaciales se estudian siguiendo unas etapas acorde con el desarrollo evolutivo del alumno.
3. **Clasificación y seriación.** Los procesos de clasificación y seriación deben ser también comprendidos por los alumnos ya que el concepto de magnitud está construido sobre éstos como hemos visto en la definición de cantidad de una magnitud.
4. **Dominio del sistema decimal.** Es necesario que el alumno domine el sistema decimal y las operaciones correspondientes que tenga que realizar cuando hace actividades de medida.
5. **Desarrollo evolutivo.** Desde corta edad, el alumno realiza actividades relacionadas con la medida, construye porterías, reparte un refresco en dos vasos y los iguala para que tengan la misma cantidad, o sirva más o menos en un vaso. Por ello, el maestro debe conocer en qué estadio de comprensión se encuentra el alumno, es decir, los estadios de desarrollo cognitivo según Piaget y debe conocer también el desarrollo evolutivo del alumno, esto es, las edades a las que el niño es capaz de comprender las distintas magnitudes logrando la conservación de ellas.
6. **Etapas del aprendizaje.** El aprendizaje atravesará tres etapas bien definidas que son:
 - **Etapas manipulativa:** El alumno piensa y resuelve mediante la actividad concreta, básicamente, esto es, aprende midiendo los

objetos. Los métodos tradicionales basadas en un alumno pasivo han sido causa de muchos fracasos en el aprendizaje de la medida.

La manipulación es básica en estos niveles de estudio. Solo manipulando se puede distinguir las propiedades de los objetos; si el alumno no toma en sus manos dos bolas de igual apariencia, es difícil hacerle ver que una pesa más que otra. El trabajo con unidades, sobre todo con aquellas cuyo tamaño lo permite, se debe hacer desde la manipulación, que habitúa al alumnado con el orden de la magnitud, requisito importante para realizar estimaciones de medida y, posteriormente, poder descubrir y generalizar la relación entre los distintos órdenes de las unidades de medida. Solo desde las actividades prácticas, el alumno puede dar sentido a los múltiplos y submúltiplos de la unidad de medida correspondiente al compararla con la cantidad a medir. Solo así se le puede presentar la necesidad de utilizar otra unidad mayor o menor acorde con dicha cantidad.

Los alumnos que no están acostumbrados a medir, no se ven forzados a buscar estrategias para buscar entre los objetos cotidianos instrumentos para realizar medidas. Estos alumnos, que apenas practican y que solo conocen los instrumentos convencionales para medir, hacen elecciones poco adecuadas en su vida cotidiana como por ejemplo, el uso de una regla graduada para medir la longitud de una circunferencia, cuando mucho más idóneo sería un metro de tela o una cuerda.

- **Etapa gráfica:** El alumno realiza las mismas o semejantes actividades de la etapa anterior mediante imágenes que tiene que construir, dibujar, colorear etc. relacionadas con las actividades manipulativas.
- **Etapa simbólica:** Consiste en transformar la actividad en símbolos numéricos o matemáticos conocidos por los alumnos.

En todos los casos sería necesario la *traducción oral*, esto es, que el alumno fuera explicando lo que va haciendo para conseguir la competencia básica referida a la utilización del lenguaje.

Así pues, el aprendizaje no se produce de manera pasiva, sino que se da como resultado de una construcción activa que queda bien plasmada en el famoso dicho *Oigo y olvido, Veo y recuerdo y Hago y comprendo*.

Estas otras recomendaciones son ya más relacionadas con el verdadero aprendizaje de medir.

1. **Necesidad de medir.** En los contenidos de Primaria debe considerarse la necesidad de la medición, manejando la medida en situaciones diversas relacionadas con el entorno del alumno, así como estableciendo los mecanismos para efectuarla: elección de unidad, relaciones entre unidades y grado de fiabilidad.
2. **Uso de todos los sentidos.** En esta metodología es imprescindible el uso de los sentidos para realizar estimaciones, sin imposiciones externas a ellos. Cuando el alumno solo utiliza un sentido como la vista para estimar la masa o la capacidad, se tropieza con situaciones como la ya conocida del peso del kilo de paja y el kilo de hierro asociando grandes masas a grandes volúmenes. Los sentidos bien utilizados son la base sensorial necesaria para una buena formación de los conceptos de longitud y demás magnitudes.
3. **Estimación de las medidas.** Como hemos visto, en los currículos actuales de medida se indica que es conveniente que el alumno realice actividades en las que la estimación sea más importante que el mero resultado exacto. Las diferentes estimaciones de una medida llevan al alumno a practicar la idea de aproximarse cada vez más a la verdadera medida, lo que afianza en el alumno la idea de que, en la práctica, no podemos llegar a la medida exacta sino a aproximaciones cada vez mejores. Es de una forma teórica, mediante cálculos, como se puede obtener medida sin errores.
4. **Actividades de la vida cotidiana y laboral.** Por ello, es conveniente que el alumno se familiarice con los problemas reales, como cantidad de pintura para pintar una habitación, medir el área del patio del colegio, volumen de una piscina, superficie de la carrocería de un coche, cuya medida práctica siempre van a obtener mediante una aproximación en

la que se intenta medir con el mínimo error, en lugar de los problemas teóricos de libros en los que se calculan superficies de terrenos o volúmenes de sólidos regulares que no son del interés del alumno.

5. **Unidad de medida.** Como hemos dicho anteriormente, la medida de un objeto depende unívocamente de la unidad de medida. Es importante que el profesor mediante las actividades correspondientes haga ver a su alumnado la importancia de establecer la unidad de medida antes de realizar la actividad de medir. Está comprobada la cantidad de errores que cometen los alumnos cuando olvidan reiteradamente la unidad de medida que están utilizando al tener que expresar el resultado de las mediciones. El alumno debe comprender y automatizar que el cambio de unidad presupone el cambio en la medida de una cantidad de magnitud. En este tema los profesores suelen hacer más hincapié en la escritura correcta de las medidas y su conversión en unidades. Sin embargo, consideramos que es necesario realizar actividades de estimación y medidas aproximadas que son más útiles en la vida ordinaria o profesional del alumnado.
6. **Cambio de unidades.** Antes de la memorización de los distintos algoritmos que se utilizan para los cambios de unidades (escalera) es necesario que el alumno realice actividades manipulativas que puedan asegurar al profesor que el alumno comprende y ha descubierto las distintas relaciones entre las unidades. Trabajar en el Sistema Métrico Decimal sin haber hecho actividades de cambio de unidades no convencionales dificulta y puede que el alumno no observe y aprenda las regularidades propias de dicho sistema al no compararlas con nada.
7. **Medidas directas e indirectas.** Sabemos que podemos medir de dos formas distintas. Por una parte, si se toma una medida unidad, se establece una relación medida que a la superficie dada le hace corresponder el número de veces que la unidad de medida está contenida en ella. Esta es una forma de *medida directa* y el procedimiento de medir es simplemente contar las veces que la unidad medida cabe en la magnitud del objeto a medir. Algunas magnitudes también se pueden medir como productos de

medidas, por ejemplo para calcular el área de rectángulo multiplicamos la base por la altura. Esa forma de medir se conoce como *medidas indirectas*, que es bidimensional o tridimensional, según la magnitud a medir.

Aunque las dos formas de medir son equivalentes para las soluciones de las medidas; sin embargo, no se considera así desde la didáctica. La medida indirecta implica realizar multiplicaciones mientras con la medida directa el resultado es aditivo y de manera inmediata. Por ello, está comprobado que los alumnos tienen bastantes dificultades para calcular medidas en estas edades mediante la medida indirecta.

Hay magnitudes, como son la masa y la capacidad, donde la medida directa siempre puede ser utilizada, pero otras, como la superficie y el volumen, dependen de la forma geométrica del cuerpo a medir y, por tanto, se presentan casos en los que tenemos que aplicar la medida indirecta. Así, no se puede utilizar la medida directa, por ejemplo, si queremos medir un trapecio isósceles.

8. **Medida exacta y medida entera.** Cuando el alumno ya mide con cierta precisión se puede confundir la medida exacta con la medida entera. Por ejemplo, se habla de 2 metros como exacto y 5,6 metros como inexacto cuando si la medida se ha hecho bien las dos cantidades son igualmente de exactas. En este sentido, el abuso de actividades con cantidades enteras choca con las medidas de la realidad en las que las cantidades enteras, como por ejemplo 3 metros, son fruto de la casualidad, más que de la cotidianidad en la que es más común obtener 5,87 metros.
9. **Patrimonio cultural.** Es interesante, también, para preservar y tomar conciencia del patrimonio cultural de la zona, que los alumnos, sobre todo en los últimos ciclos, hagan reconocimientos de unidades e instrumentos de medidas tradicionales, bien locales o bien regionales mediante proyectos escolares, visitas a museos, etc. En la bibliografía encontramos una extensa bibliografía sobre las medidas tradicionales en Extremadura de Sánchez y Casas, profesores, que puede ser también extensible a otras comunidades. ■

TEMA **2**

Enseñanza de las medidas de longitud, capacidad y masa (peso)



2.1. Desarrollo didáctico de la Enseñanza de la Medida

Para la enseñanza-aprendizaje de la medida con las distintas magnitudes, consideramos que el futuro profesor debe tener un esquema general del que partir que le ayude a hacer su trabajo docente mucho más sencillo. El esquema general que nosotros proponemos sería el siguiente:

1. Juegos preparatorios para la magnitud correspondiente en los que el objetivo es que el alumno sienta la necesidad de medir. El estudio de la medida de las magnitudes implica la comprensión previa de varios conceptos por parte de los alumnos, como hemos comentado en el apartado anterior. Normalmente, el profesor, en un principio, no conoce cuál es la experiencia anterior y la formación de conceptos de sus alumnos; por ello, es necesario comenzar realizando ejercicios en grupo que permitan al docente saber cuál es el estado de desarrollo de cada alumno en los preconceptos de medida, para recordarlos, simplemente, o para ayudar a aquellos que sufren un posible retraso.

En todas estas actividades que el profesor propone a los alumnos, en un principio, se debe buscar que éstos hagan comparaciones intuitivas, mediante la observación sin que se les presente la necesidad de medir; para ello, debe haber diferencias notables de medidas entre los objetos a comparar. El procedimiento más sencillo de comparación es hacerla mirando los objetos a comparar, como el estadio más primitivo de la estimación sensorial. O bien mediante una superposición de los objetos.

Posteriormente, se irán limitando esas diferencias, de forma que el alumno vaya sintiendo la necesidad de medir, al no poder diferenciar a simple vista qué objeto tiene mayor o menor medida. Es mediante estas actividades, como el alumno va a empezar a sentir la necesidad

de utilizar una unidad de medida que le sirva como referencia; esas unidades van a ser, en el primer momento, las unidades arbitrarias.

- 2. Unidades no convencionales** o arbitrarias que son las primeras con las que los alumnos aprenden a medir. Las unidades arbitrarias que debe utilizar el alumno para medir las distintas magnitudes deben ser propuestas por él principalmente, aunque algunas pueden ser sugeridas por el profesor. Así pues, se debe elaborar una tabla con unidades arbitrarias, que el alumno puede utilizar para cada magnitud.
- 3. Unidades convencionales** porque llega la necesidad de comparar y comunicarnos las medidas, unas personas con otras.
- 4. Actividades conjuntas** con dos o varias medidas, para trabajar y reforzar éstas dentro de contextos relacionados con los alumnos y para plantear la necesidad de precisar, mediante la introducción de los múltiplos y divisores.

Vamos a desarrollar de una forma más específica y particularizando para cada magnitud, todo lo estudiado en el tema anterior, así como las fases de enseñanza-aprendizaje. Concretamente en este tema nos vamos a centrar en las medidas de longitud, capacidad y masa (peso).

2.2. Medida de la magnitud longitud

En su vida cotidiana, el alumno puede realizar actividades en las que tenga que medir las tres dimensiones de un objeto o bien el espacio distancia que hay entre dos puntos u objetos. Atendiendo a estas dos formas de utilización de la longitud cotidianamente, el profesor debe realizar actividades como las que comentamos a continuación.

Juegos preparatorios

En primer lugar, el profesor realiza unas actividades de Conservación de la longitud pues es un requisito necesario para que el alumno pueda comprender las medidas de longitud.

- Se presenta a los alumnos dos varillas idénticas colocadas con sus extremos coincidentes. El alumno debe tener claro que las dos miden la misma longitud. Ahora desplazamos una de ella de forma que no coinciden los extremos y el profesor pregunta: ¿cuál de las dos varillas es más larga? ¿Por qué? Ídem doblando una de las varillas como muestra la figura 2.1.
- Damos al alumno dos cuerdas. Éste observa que son de igual longitud y para ello se le pregunta: ¿Es igual o diferente la longitud de las dos cuerdas? Ahora hacemos que una de las cuerdas tenga varias curvas y preguntamos: ¿Si tus dedos anduvieran sobre los dos caminos de cuerdas, en cuál se tardaría más en llegar de un extremo al otro? Razona por qué es esto así.

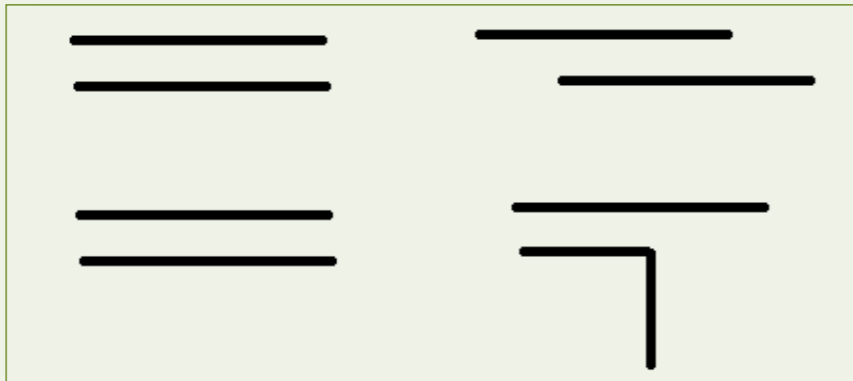


Figura 2.1 Conservación de la longitud.

El profesor elaborará un listado de aquellas palabras que están relacionadas con las medidas de longitud. Por ejemplo, podemos asociar la longitud con las palabras: largo, corto, cerca, lejos.

Una vez elaborada la lista, el profesor realiza algunos juegos preparatorios como:

- Hacer comparaciones mirando los objetos a comparar en las que las longitudes de los dos objetos sean significativas, por ejemplo, ¿esta aula es más larga o ancha?

- O bien mediante una superposición de los objetos, por ejemplo, varias tiras de papel. En este caso, el alumno debe colocar las tiras haciendo coincidir uno de los extremos para poder observar cuál de ellas es la más larga.
- Se le dan una serie de varas y los alumnos eligen la más corta y la más larga, las ordenan por tamaño de mayor a menor o igualmente se puede hacer comparación de estaturas.
- También, se colocan objetos de forma que satisfagan condiciones de lejanía o proximidad.

2.3. Unidades arbitrarias de longitud

Por ejemplo: bolígrafos, palos, cuarta, paso, largo de un folio, cajas y las que los alumnos consideren oportunas.

El profesor debe hacer diferenciar al alumnado entre *la medida del objeto* y *la medida unidad en sí*. Por ejemplo, si utilizamos un folio para medir longitudes, en este folio podemos tomar dos medidas unidades diferentes (el ancho y el largo). En este caso, hay que fijar una de los dos medidas como medida unidad. Es por ello, que debemos hacer hincapié entre diferenciar la medida del objeto y la medida de longitud que tomamos como unidad.

Nos interesa que el alumno aprenda a realizar estimaciones y reflexione sobre la importancia que tienen éstas en su vida ordinaria. Las estimaciones antes de medir les ayudarán a acostumbrarse a la unidad con la que miden y esto tendrá mucha más importancia cuando utilicemos medidas convencionales. El alumno debe utilizar diversas estrategias para realizar estimaciones. Por ejemplo:

- Llevar mentalmente la medida unidad sobre el objeto a medir. Así, puede estimar la longitud de una mesa utilizando una vara o una libreta, o la longitud de la pizarra utilizando un bolígrafo.

- A veces la misma estructura o configuración del objeto a medir les ayuda a estimar una parte solamente para poder hacer la estimación total. Así, una fachada con ventanas, una valla con tablas a una cierta distancia, pupitres colocados a la misma distancia, etc. son elementos que ayudan a estimar longitudes de una manera más cómoda, mediante la estimación de una parte y multiplicando por un cierto número para realizar la estimación total. Todas estas estrategias deben ser descubiertas por los alumnos y ensayadas para llegar a obtener la mejor estimación.

Actividades para los alumnos.

1. Dramatizar el cuento con el que comienza el tema 1, y posteriormente desarrollar una puesta en común en la que se analicen con los alumnos todas las situaciones que se producen relacionada con la medida.
2. Estimar distancias en el aula o en el patio, elegir la unidad de estimación para cada caso. Comprobar si es buena la estimación mediante la medida. Repetir el ejercicio con otras unidades arbitrarias.
3. Usar el palmo para medir la longitud de la pizarra, de las ventanas y de la mesa del profesor. Ordenar las medidas realizadas.
4. Hacer las mismas medidas con unidades corporales como el pie, el palmo, la braza.

El profesor debe hacer observar a los alumnos las variaciones que se producen atendiendo a la estructura corporal de cada uno.

Ejercicio individual para estudiantes para profesores.

- Estimar y medir una pared con diferentes unidades arbitrarias. Buscar las unidades arbitrarias más idóneas y establecer conclusiones. Defina la actividad concreta que haría con sus alumnos y enuncie las preguntas que haría como profesor.

Actividades para los alumnos.

1. Sistema métrico corporal. Construir con los alumnos el sistema métrico de nuestro cuerpo, que podemos llamar Sistema Métrico Corporal. Partimos de la unidad más pequeña que es la falange y el alumno va obteniendo las siguientes equivalencias de medidas mediante pruebas:

Un dedo = 3 falanges Un palmo = 2 dedos Una braza = 2 palmos
Un brazo = 2 brazas (hasta la nuez) Dos brazos = Altura de esa persona.

A partir de aquí, el profesor diseña preguntas para establecer todas las relaciones que desee, por ejemplo:

- Calcular todas las medidas anteriores tomando como unidad el dedo, ¿Cuál es la altura de una persona en palmos? Calcula la longitud de tu mesa en dedos, palmos, brazas o bien utilizando las tres medidas a la vez.
4. Lanzamiento de canicas o tazos u otro elemento de juego del niño. El juego consiste en lanzar la canica lo más lejos posible. En un primer momento todos los jugadores tiran desde una línea y habrá que observar visualmente o mediante comparación de longitudes qué canica ha llegado más lejos.
En una variación posterior del juego, cada jugador elegirá el punto de referencia desde donde desea lanzar (marcar con una X en el piso) y la dirección en la que lanza. El problema sería averiguar qué jugador lanzó su canica más lejos. En este caso, la percepción es más complicada por lo que sería preciso aplicar estrategias de medida, que son más precisas, ¿Qué tenemos que hacer para saber qué canica recorrió más distancia? ¿Hay alguna otra forma de averiguar cuál fue más lejos? Efectivamente, una solución es medir con una unidad desde la X hasta donde ha llegado la canica, y esto para todos los jugadores. Otra variación de la actividad sería: agregar más canicas por jugador y gana quién obtenga una distancia suma mayor.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

- Enunciar tres problemas concretos para utilizar el Sistema Métrico Corporal presentado en los párrafos anteriores.
- Definir un Sistema Métrico Libretal para medir longitudes mediante libretas de distintos tamaños. Explicarlo didácticamente como si fuera para tus alumnos, y enuncia tres actividades concretas.

2.4. Necesidad de utilizar las medidas convencionales de longitud

La utilización de las medidas arbitrarias hace observar a los alumnos la necesidad de una unidad de medida con la que todos los resultados de medida sean el mismo y no dependan del individuo que mide. Por ejemplo, los alumnos observarán que cuando miden la longitud de la clase en pasos, unos obtienen una medida y otros, otra medida distinta, pues dicho número está condicionado por la zancada de cada niño. Lo mismo ocurre si dos alumnos miden la duración de una carrera con palmadas, pues dependiendo del ritmo con que el alumno toque las palmas durará más o menos la misma carrera.

Así pues, para que todos obtengamos el mismo valor de la medida de un mismo objeto y nos podamos entender, no solo en el aula, sino también con las demás personas, padres, familia, amigos, etc. y además no se den las imprecisiones que se observan al medir con unidades arbitrarias, el profesor recomienda a los alumnos elegir unas nuevas unidades que llamaremos unidades convencionales. La siguiente actividad aclara estas ideas.

Actividad para los alumnos.

Longitud

- Los alumnos miden el largo de la pizarra con los lápices de distinta longitud de los niños José, Jorge y Angel.
Como los tamaños de los lápices son distintos entonces la medida de la pizarra dará distintas medidas, por ejemplo, 15, 20 o 18 lápices, respectivamente. También se puede realizar este ejercicio con medidas corporales como el palmo, pie, braza.
- El profesor fuerza una conversación con preguntas a los alumnos: si en vuestra casa queréis contar a vuestros padres cuánto mide la pizarra ¿Qué frase utilizaríais? Los alumnos contestarán con las diferentes medidas o con varias a la vez.

El profesor lleva la conversación a que los alumnos se den cuenta que los padres tienen que conocer, también, la medida utilizada, para poder hacerse una idea de la longitud de la pizarra, pero no conocen esa medida unitaria pues es un lápiz concreto de un niño de medida no determinada.

- ¿Sería bueno que todos utilizáramos la misma medida? ¿Nos valen los lápices como medida para que nos entienda nuestro padre?

Un metro, un centímetro son medidas que el alumno ha escuchado muchas veces pero sin embargo es raro ver medir a alguien con lápices salvo en actividades poco rigurosas o necesidad imperiosa. Es entonces el momento para presentarles la unidad convencional correspondiente; en el caso de nuestro ejemplo, sería el decímetro o el metro intentando que el objeto medido, en este caso la pizarra, tuviera medidas exactas o muy aproximadas en dichas unidades.

Ejercicio para los estudiantes para profesores.

Elabora actividades para las medidas de capacidad y masa de forma que se planteen la necesidad de utilizar las unidades convencionales para poder entendernos todos, como hemos hecho con la magnitud longitud.

2.5. Unidades convencionales de longitud

Llegado el momento, presentamos a los alumnos las distintas unidades convencionales atendiendo a las necesidades que les surjan al realizar las actividades.

Desde un punto de vista didáctico, las definiciones que dimos al principio sobre las principales medidas en el SI no es recomendable considerarlas en Primaria, ni siquiera en las tareas de los alumnos, pues no solo son

incomprensibles para ellos sino, también, para un número considerable de adultos. En Primaria tal precisión y exactitud no es necesaria; por ello, para utilizar las unidades convencionales sin definir las, nos bastamos con metros de madera, flexibles, etc.

Para la enseñanza de las medidas convencionales de longitud, es conveniente comenzar utilizando aquellas unidades más asequibles al alumno, en el sentido de que pueda manipularlas mejor, y dejar para después aquellos múltiplos y submúltiplos que son menos usuales en su vida ordinaria o bien no son manipulables por lo que suponen más dificultad de comprensión. Por ejemplo, el kilómetro es una unidad usada en la vida cotidiana pero no manipulable y difícil de ser comprendida por los alumnos que se encuentran en las etapas de las operaciones concretas, según Piaget, donde la mejor forma es aprender tocando. Es posible que el alumno hable de kilómetros pues en la vida familiar es un término utilizado normalmente, de lo que hablamos nosotros es de si realmente comprende el concepto.

De esta forma, las unidades convencionales ordenadas que según el profesor las debe trabajar con los alumnos serían, en un principio:

Longitud: el metro, decímetro y centímetro.

Estas unidades de longitud diremos que están interiorizadas por el alumno cuando es capaz de reconocerlas, y de señalar objetos que tengan aproximadamente la medida de la unidad en cuestión. Para ello hay que realizar múltiples actividades como las que veremos más adelante pues los alumnos en un principio sólo son capaces de interiorizar su altura.

Posteriormente, se pasaría a las otras unidades como decámetro, hectómetro o milímetro que el alumno tiene más dificultad para asimilarlas pues son menos manipulables y menos utilizadas comúnmente.

El alumno debe descubrir por sus propios medios los múltiplos y submúltiplos más usuales, acostumbrándose a expresar la medida con la unidad adecuada a cada medición; para ello es bueno seguir haciendo estimaciones antes de medir.

Es adecuado que el profesor plantee estimaciones de una misma medición con distintos múltiplos o submúltiplos, para que el alumno vaya relacionando las distintas medidas de la escala métrica.

En un principio, el alumno para medir utiliza varios metros, decímetros y centímetros que va colocando en línea delante del objeto a medir. Después, podemos enseñarle a medir utilizando una sola cuerda o vara de cada unidad (metro, decímetro y centímetro), lo que es dificultoso al principio para muchos alumnos.

Actividades para los alumnos.

Podemos utilizar varios tipos de metros: flexible, enrollable o cinta métrica, rígido, graduado o no, y de carpintero o plegable que es de madera y flexible por decímetros, que incluso pueden ser elaborados por los alumnos (figura 2.2). Existe también el metro para medir alturas, que es una barra rígida graduada con un resorte móvil que se apoya en la cabeza de la persona medible, de forma que nos acota la medida de altura de dicha persona.



Figura 2.2. Distintos tipos de metros (cinta métrica elaborada por los alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado, U. de Extremadura).

- Se le da al alumno algún tipo de metro o cuerdas que midan un metro, éste debe buscar objetos que midan aproximadamente un metro. Se le hacen preguntas como ¿mide más o menos de un metro?
- Comparándolos con un metro, ordenar diversos objetos como una escoba, una papelera, una silla, un bolígrafo y el mismo metro rígido. Se pregunta qué objetos son mayores que un metro y cuáles menores. Después ordena los que están por encima del metro y por debajo.
- Se le dan varias varas de metros rígidos y deben hacer distintas medidas como la longitud de la clase, la anchura y altura de la portería de fútbol, la anchura de un pasillo, etc.
- Medir perímetro de formas poligonales o circulares como las que aparecen en el suelo de un campo de baloncesto. Hacer observar que las circunferencias también se miden con unidades de longitud. Buscar el tipo de metro adecuado para estas medidas.
- Expresa la unidad (centímetro, metro, decímetro) para medir estas longitudes.
 1. La altura de una puerta. 2. La longitud de un lápiz. 3. Tu altura. 4. La anchura de la clase. 5. La goma de borrar.

La rueda métrica es una rueda cuya circunferencia mide un metro, unida a un listón que avanza en contacto con el suelo y mediante un contador de vueltas se sabe los metros que hemos recorrido. Se suele utilizar para medir distancias de campos, por lo que además de medir metros nos es válida para presentar los múltiplos del metro como decámetro o hectómetro.



Figura 2.3. Rueda métrica con contador en la parte trasera.

- Realizar medidas mediante la rueda métrica. Por ejemplo, la longitud del patio del colegio, la anchura y largo del gimnasio. El profesor debe hacerles observar que algunas medidas no se pueden obtener exactamente con una cierta unidad de medida, por ejemplo, utilizar la unidad metro para medir una pared. Los alumnos deben observar que para medir el espacio sobrante pueden utilizar el decímetro y en su defecto el centímetro. Así, de esta forma, el alumno va adquiriendo la noción de medir no solamente con una unidad grande sino con una medida mixta, en la que utilizamos distintos múltiplos o submúltiplos.
- Estimar y calcular la longitud de la clase, utilizando un mínimo de unidades, es decir, medir primero en metros hasta que el resto que quede se tenga que medir en decímetros e igualmente, el resto siguiente en centímetro. El alumno debe comprobar la equivalencia entre los múltiplos y submúltiplos del metro llegando hasta el centímetro y el decámetro. Basta con hacerlo por superposición utilizando también una cuerda de diez metros. Los alumnos con estas actividades, deben aprender que el sistema de medida es un sistema regular con cambios de 10 en 10.
- Estimar y medir objetos como la longitud de la fachada de una casa, la longitud del campo de fútbol del colegio, utilizando cuerdas de 10 metros o decámetros. Posteriormente, se debe pasar también a construir y trabajar con el metro graduado, en el que mediante actividades de comparación con los decímetros y centímetros, el alumno llegue a reforzar las equivalencias correspondientes. Por último, el alumno realiza medidas con ese metro graduado obteniendo los metros, decímetros y centímetros correspondientes. Es necesario pues, diseñar las actividades correspondientes para que se establezcan esas equivalencias.

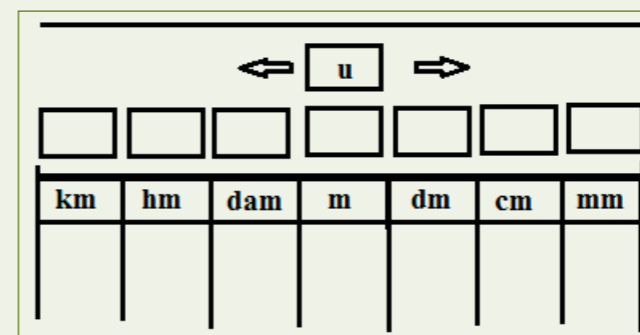


Figura 2.4. Ábaco de cambios de unidades.

Actividades para los alumnos.

- Visitar un parque cercano y realizar medidas reales en metros, decímetros y centímetros del mobiliario de dicho parque. El trabajo se puede hacer en grupos y posteriormente en el aula realizar una puesta en común. La misma actividad se puede realizar en un lugar de interés para el alumno y cercano al centro escolar.
- Construir un ábaco que tenga móvil la placa de las unidades como el de la figura 2.4 para favorecer los cambios de unidades.
Después realizar tareas como: ¿6 km = hm? ¿4 dam = dm? ¿50 dm = m? utilizando dicho ábaco.
Es necesario trabajar las mediciones en las que la unidad de medida es mayor que la medida del objeto a medir. Por ejemplo, medir con un metro la longitud de un papel Din A4. Estas actividades posibilitan que el alumno comprenda el fraccionamiento de la unidad, en unidades más pequeñas, lo que nos lleva, también, a la siembra de las fracciones y los números decimales. Así, el alumno hablará de una barra que mide medio metro, un cuarto de metro, etc.

Por ejemplo,

- Medida de objetos con reglas. Vamos a ver cuánto mide la goma en centímetros; para ello la colocamos sobre la regla a partir de cero (figura 2.5).
- Medimos la goma en decímetros utilizando en este caso una unidad mayor que la longitud del objeto a medir.
- Colocar sobre las regla, así mismo, otros objetos pequeños que tú tengas en la mesa y mídelos también en centímetros y en decímetros.



Figura 2.5. Unidad mayor que la longitud del objeto a medir.

Actividades de investigación para los alumnos.

- ¿Cómo calcular el grosor de las hojas que utilizamos para escribir?
- ¿Cómo calcular la altura de una torre?

Extraemos conclusiones de estas actividades.

2.6. Medida de la magnitud capacidad

Siguiendo con el esquema general, e igualmente que con la longitud hay que realizar actividades preparatorias para poder abordar con éxito la comprensión de la magnitud capacidad.

Juegos preparatorios.

Hacemos juegos de conservación de líquidos como los que se muestran a continuación. Estas actividades son propias para un laboratorio de matemáticas en el que el alumno realiza los trasvases de líquidos.

- Se le dan dos recipientes iguales y comprueba que en los dos hay la misma cantidad de líquidos. Se vierte el contenido del recipiente B en C más estrecho (figura 2.6) . Se le pregunta ¿hay la misma cantidad en los dos recipientes A y C?

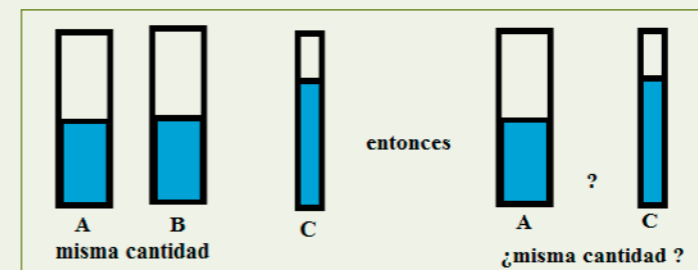


Figura 2.6. Conservación de la cantidad.

- Misma actividad con un recipiente más ancho como se puede ver en la figura 2.7. El alumno comprueba que hay la misma cantidad de líquido en A y B. Delante de éste se vierte el contenido de B en D y ahora el profesor le pregunta: ¿Hay la misma cantidad de líquido en A y D?

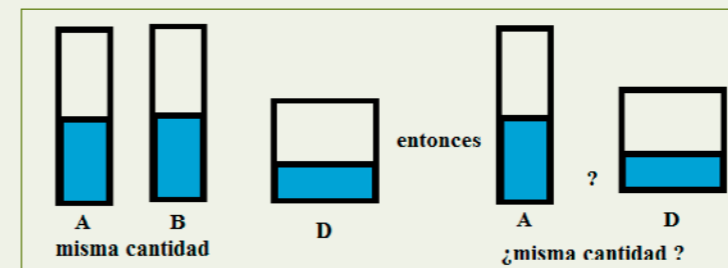


Figura 2.7. Conservación de la cantidad.

- El alumno comprueba que en A hay más cantidad de líquido que en B (figura 2.8). Pasamos el contenido de B a C (más estrecho que A y B) y preguntamos ¿hay menos cantidad en A o en C?
- Misma actividad haciendo que en A haya menos cantidad de líquido que en B.

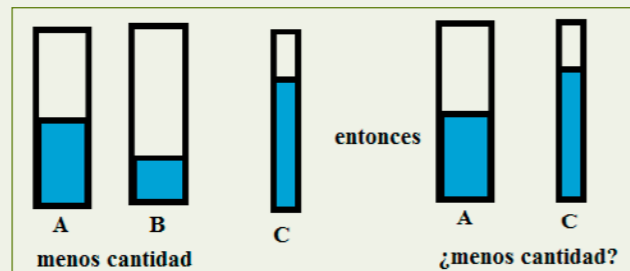


Figura 2.8. Conservación de la cantidad.

- Tomamos varios recipientes y en todos vertemos un vaso de agua. ¿En qué recipiente hay más agua? ¿y en qué recipiente hay menos agua? El alumno debe comprender que la forma del recipiente no influye para que haya más o menos agua.



Figura 2.9. Utensilios distintas capacidades.

Con la capacidad se asocian palabras que el profesor debe trabajar como son lleno, vacío, medio, casi, poco, mucho. Una vez elaborada la lista, el profesor realiza algunos juegos preparatorios que se resuelven mediante la observación directa o el trasvase de líquidos:

- Dados varios recipientes clasificarlos atendiendo a que tengan la misma capacidad (figura 2.9).

- Dados varios recipientes llenarlos con otro más pequeño y apuntar el número de veces que el líquido del pequeño cabe en cada uno. Estimar la capacidad de otro recipiente si queremos llenarlo con el mismo recipiente pequeño. Comprobar la estimación.
- Ordenar recipientes atendiendo a su capacidad. El alumno enumera una serie de recipientes y los ordena según su capacidad para ello resuelve preguntas como ¿cuántos frascos del número 1 caben en el número 2? ¿Si llenamos el número 3 con el líquido del número 2 sobra o falta líquido? En las respuestas el alumno va extrayendo conclusiones.

Así pues se va planteando la necesidad de medir para poder pasar a utilizar las unidades arbitrarias.

2.7. Unidades arbitrarias de capacidad

Se pueden utilizar objetos con pequeña capacidad como son utensilios cotidianos como son cucharas, cucharones, medidores graduados de jarabes u otros en forma de jarras graduadas. Otros objetos como probeta, biberones, pulverizadores, que muchas veces están graduados, hasta recipientes de bebidas: botellas, tetrabrik, u objetos caseros como: cazuelas, baños, etc. de capacidades ya mayores.

Una de las tareas del profesor es que el alumnado diferencie entre la medida y la unidad, mediante actividades. Por ejemplo, si tomamos diferentes botellas, el profesor hace observar al alumno que las botellas pueden utilizarse para medir capacidades según el líquido que pueda contener. A su vez, debe hacer ver al alumnado que no todas las botellas tienen la misma capacidad y, por lo tanto, podrían ser tomadas como unidades de capacidad distintas. El valor medida de la capacidad correspondiente va a depender de la botella que se tome como unidad.

Para realizar estimaciones puede utilizar las siguientes estrategias:

- Llevar mentalmente la medida unidad sobre el objeto a medir. Así, puede estimar la capacidad de una vasija utilizando un cazo a simple vista o haciendo marcas sobre el recipiente, vertiendo un cazo y luego estimar los que faltan para llenarlo, etc.
- A veces la misma estructura o configuración del objeto a medir les ayuda a estimar una parte solamente para poder hacer la estimación total. Por ejemplo, para calcular la capacidad de varios recipientes puede estimar la capacidad de uno y multiplicar por el número de recipientes. Todas estas estrategias deben ser descubiertas por los alumnos y ensayadas para llegar a obtener la mejor estimación.
- Estimar y luego medir capacidades con todo tipo de objetos: botellas de litro, de medio litro, de cuarto, que posteriormente van a ser nuestra unidades convencionales, pero también todo tipo de utensilios como latas, sartenes, cazuelas... para que el alumno adquiera o refuerce la conservación de la cantidad, es decir, que puede haber la misma cantidad de líquido en objetos altos y estrechos, como objetos bajos y anchos.

El alumno debe observar, mediante ejercicios de transvase de líquidos, que la capacidad depende de tres variables y no solo de dos.

Ejercicio individual para estudiantes para profesores.

1. *Enuncia un ejercicio concreto para hacer transvases de líquidos de recipientes altos y delgados a otros recipientes de distintas formas de manera que observemos si el alumno tiene adquirida la noción de conservación de la cantidad, es decir, que el alumno perciba que una cantidad de sustancia no varía, cualesquiera sean los cambios que se realicen en su configuración total. Manifiesta las preguntas que como profesor haría a los alumnos.*

Actividades para los alumnos.

2. *Carreras de agua. Dos grandes tinajas o cuencos transparentes para depositar agua. Dos equipos y cada jugador lleva un vaso de agua. El juego consiste en averiguar qué equipo es capaz de transportar más agua desde el grifo a su respectiva tinaja. Para aprovechar el juego se puede observar previamente con el grupo, la medida o capacidad de tinajas tomando como unidad el vaso de agua u otras que decidan los alumnos ¿Se puede medir la cantidad de agua con una cinta?*

Después de haber realizado el juego, mediremos la cantidad de agua depositada. En un principio, utilizaremos recipientes transparentes e iguales en tamaño y forma para que los niños efectúen estimaciones perceptivas o comparaciones del nivel del agua acercando las dos tinajas o recipientes. Más adelante, utilizaremos tinajas o recipientes opacos y diferentes en forma para reducir la cantidad de estrategias posibles y “forzar” a aplicar una unidad de medida con la que saber cuál tiene más agua y conocer el equipo ganador.

3. *Construcción de un Sistema Métrico para capacidades. Partimos de la observación de recipientes graduados como probetas o biberones infantiles que nos sirven como modelos para realizar la siguiente actividad. Comienzan los alumnos haciendo graduaciones en diversos objetos a partir de un recipiente más pequeño, que sería la unidad medida 1. Posteriormente, realizan graduaciones con otro objeto que tenga doble capacidad del primero, que será la unidad medida 2 (las marcas se hacen con otro color). Y a partir de aquí, el profesor puede diseñar distintas actividades como: comparar la capacidad de los dos objetos medidas, observar las medidas en los diferentes objetos, con las dos medidas unidad establecer conclusiones sobre cómo las graduaciones son un medio de comunicarnos, unos a otros, la cantidad de líquido que hay en un recipiente, etc.*
4. *Ejercicios de comparación con las diferentes unidades, por ejemplo, dado una serie de frascos numerados, resolver cuestiones como éstas: ¿Cuántos frascos del nº 1 caben en el nº 2? ¿cuántos del nº 3?*

2.8. Medidas convencionales de capacidad

Igual que hicimos en la magnitud longitud es conveniente hacer observar a los alumnos la necesidad del uso de unidades de capacidad que sean entendibles por toda la comunidad en la que nos movemos. De esta manera, los alumnos deben observar que hablar de cazos, botellas, etc. no son unidades fácilmente entendibles por las personas de nuestra familia, amigos, etc. El profesor recomienda a los alumnos elegir unas nuevas unidades que llamaremos unidades convencionales.

De esta forma, las unidades convencionales de capacidad ordenadas que el profesor debe trabajar con los alumnos serían, en un principio: el litro, medio litro y el cuarto de litro.

Estas unidades de capacidad son las más usuales en la vida ordinaria por lo que nos interesa que sean interiorizadas por el alumno de forma que sean capaces de reconocerlas, y de señalar objetos que tengan aproximadamente la medida de la unidad en cuestión.

- *Buscar objetos de capacidad un litro. Para ello construimos un decímetro cúbico, cubo de un decímetro de lado, para comprobarlo. Señala también los que tienen menos y más de un litro.*
- *Estima y mide la capacidad de los recipientes de la tarea anterior.*

Posteriormente se pasaría a las otras unidades como decilitro, centilitro utilizadas también, por ejemplo, en los medicamentos, o decalitro y hectolitro que son menos comunes y prácticamente inusuales en la vida ordinaria del alumno por lo que éste tiene más dificultad para comprenderlas.

- *Observar las medidas de capacidad que se utilizan en los dosificadores de jarabes. Estimar a partir de estas medidas cuál es la capacidad que tiene el envase del jarabe. Comprobarlo utilizando un líquido inocuo como agua.*

Como se ha hecho en la medida de longitud, el profesor plantea estimaciones de una misma medición con distintos múltiplos o submúltiplos, para que vaya relacionando las distintas medidas de la escala métrica.

- *Estimar y calcular la capacidad de un barreño de agua en litros, medios litros y cuartos de litros. Para ello se puede graduar una botella de litro y medio con una escala que marque los litros, los medios y los cuartos. Igualmente se puede graduar una botella en decilitros, que nos puede ser muy útil para muchas actividades de capacidad.*

En un principio, el alumno para medir puede utilizar varias botellas de la misma capacidad que va rellenando por ejemplo de litros. Después, podemos enseñarle a medir utilizando un solo envase para, posteriormente, mostrarle probetas o botellas graduadas, en las que mediante actividades de comparación, el alumno llegue a establecer las equivalencias correspondientes.

- *Graduar una botella de dos litros con una escala que marque los decilitros, medios litros y cuarto de litros. Idem una botella de litro y, de litro y medio.*

Por último, el alumno realiza medidas con ese recipiente graduado obteniendo, por ejemplo, decilitros. Es necesario pues diseñar las actividades correspondientes para que se establezcan esas equivalencias. También se pueden utilizar probetas o vasos graduados de laboratorios.

El profesor debe hacerles observar que algunas medidas no se pueden obtener exactamente con una cierta unidad de medida; los alumnos deben observar que para medir la capacidad sobrante pueden utilizar el decilitro y en su defecto el centilitro. Así, de esta forma, el alumno va adquiriendo la noción de medir no solamente con una unidad grande sino con una medida mixta, en la que utilizamos distintos múltiplos o submúltiplos.

Es necesario también, trabajar las mediciones en las que la unidad de medida es mayor que la medida del objeto a medir. Así, si tomamos como unidad el litro de agua (figura 2.10), calcula el agua que hay en las botellas A y B que son idénticas a la primera pero contienen menos agua.

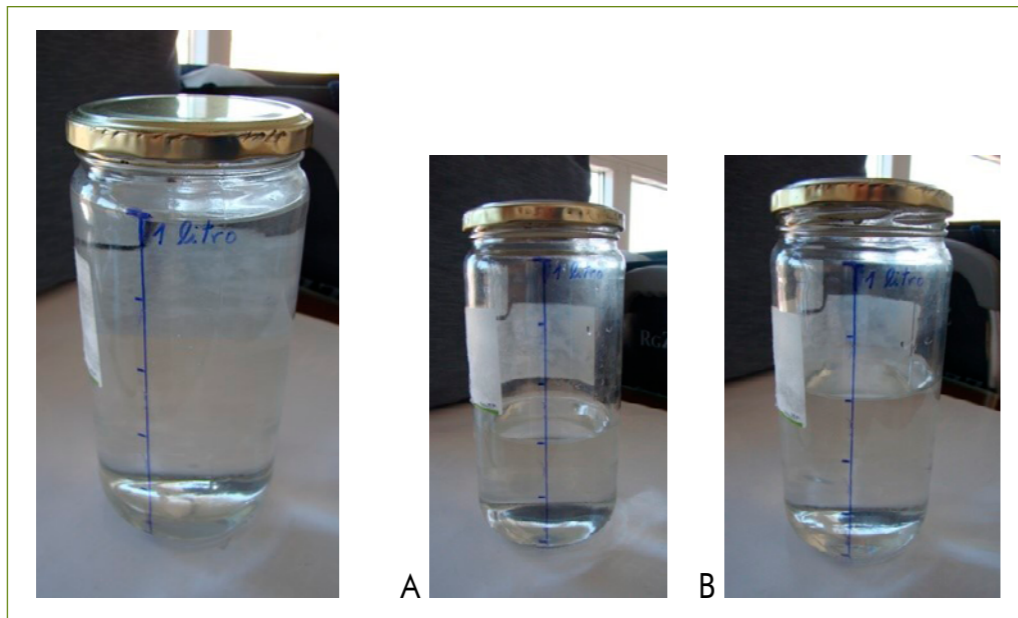


Figura 2.10. La unidad de medida mayor que la medida del objeto a medir.

Estas actividades posibilitan que el alumno comprenda el fraccionamiento de la unidad, en unidades más pequeñas, lo que nos lleva, también, a la siembra de las fracciones y los números decimales. Así hablaremos de medio litro o un quinto de litro y 0,5 litros o 0,20 litros.

Actividades para los estudiantes para profesores.

- Realiza un ábaco con unidad móvil como el que se hizo en la magnitud longitud. Plantea tareas para los alumnos en las que dicho ábaco les facilite la solución.

Actividades de investigación para los alumnos.

- ¿Cómo medir la capacidad de una cuchara de café? ¿y una cuchara sopera?
- Extraemos conclusiones de estas actividades.

2.9. Medida de masa (peso)

Hemos de recordar que aunque los conceptos de masa y peso son distintos, a nivel elemental son complicados de distinguir, por eso los identificamos como si fueran uno solo. En estas primeras etapas estos conceptos se adquieren por la experiencia de pesadas en las que el alumno experimenta la resistencia que oponen los cuerpos al ser levantados.

Juegos preparatorios.

Hacemos también primeramente ejercicios de conservación de la masa de acuerdo con los principios de Piaget.

- Se presentan varias bolas de barro y se le dice al alumno que escoja las dos bolas que tienen la misma cantidad de barro. El profesor dice a continuación: Ahora fíjate en lo que hago. Voy a hacer esta bola como chorizo ¿Cuál bola crees que pesa más? ¿Qué te hace pensar así?
- Se presentan varias bolas de plastilina y se le dice al alumno que escoja las dos bolas que tienen la misma cantidad de masa. El profesor dice a continuación: Voy a hacer varias bolas pequeñas con una de las dos bolas grande ¿Qué pesa más la bola grande que ha quedado o todas las bolas pequeñas juntas? ¿Qué te hace pensar así?

Hay que hacer que el número de bolas pequeñas aumente para así afianzar más el concepto de conservación.

Después hay que trabajar las palabras relacionadas con la masa.

- Hacer actividades para comprender el significado de las palabras, pesado, ligero. Se pueden hacer actividades de comparación directa utilizando las manos como balanzas:
- Con objetos muy pesados y poco pesados,
- Con objetos de distintos pesos pero de igual tamaño y forma,
- Con objetos del mismo peso, pero distinto tamaño y forma.
- Escribe objetos que pesan más que un tetrabrik lleno de arena.

- Escribe objetos que pesan menos que tu libreta.
- Aprender a manejar la balanza de los platillos, dando significado a las distintas posiciones que pueden ocupar.
- Utilizar las balanzas para comprobar las estimaciones con las manos.
- Estimar y medir el peso de objetos. Tomamos dos objetos uno más pesado y otro más ligero, el alumno estima el más pesado con las manos y comprueba con la balanza de dos platillos. Observar qué platillo es el que baja más (figura 2.11). Igual actividad con dos objetos de igual peso ¿qué ocurre ahora con los platillos?



Figura 2.11. Pesada de objetos.

- Se pueden hacer también clasificaciones de objetos pesados y ligeros, bien utilizando las manos o una balanza de platillos.

El objetivo es ir planteando la necesidad de medir para poder pasar a utilizar las unidades arbitrarias.

2.10. Unidades arbitrarias de masa

En este caso se utilizan todos los objetos relacionados con la vida ordinaria del alumno que tengan masa como: canicas, bolas de hierro o de madera, chapas,...

Como en las medidas anteriores, vamos a proponer algunas actividades de estimación para los alumnos.

- Equilibrar una bola de plastilina mediante otros objetos más pequeños como tuercas. Equilibrar la misma bola ahora con otros objetos como canicas y comparar las dos medidas.
- Realizar en la balanza de platillos estimaciones de dos objetos, por ejemplo, antes de pesarlos, coge en una mano, tres libretas y en la otra, cinco bolas de hierro, ¿decir qué pesa más? Comprueba tu solución pesando los objetos en la balanza. Y ahora vamos a ver cuánto pesa más uno que otro, para ello añadimos una unidad arbitraria chapas, clavos, para ver cuánto pesa uno más que el otro.

El alumno debe mostrar que sabe la diferencia pero no cuánto pesa cada objeto.

Es también importante que el alumno conozca la importancia de una buena elección de la unidad adecuada al tipo de medida que se vaya a efectuar, por ejemplo:

Queremos encontrar la masa de un paquete de detergente mediante una balanza de dos platillos. Elige una medida arbitraria de las que te damos para calcularla. Granos de arroz, tuercas, tetrabrik de agua. Razona cuál es a tu parecer la mejor unidad para medir el detergente.

Después de estas actividades el alumno debe aprender a medir con:

- cualquier unidad arbitraria,
- varias unidades distintas un mismo objeto,
- comparar las medidas de un mismo objeto con distintas unidades arbitrarias e
- irse concienciando de la unidad a elegir para cada actividad de medida de masa.

Para que se verifique la competencia conciencia y expresión cultural tendríamos que trabajar con las medidas tradicionales locales o regionales. En este punto proponemos el siguiente ejercicio a los estudiantes:

Ejercicio para varios grupos de estudiantes para profesores.

A partir, de los resultados obtenidos en el Proyecto **La medida en tu Comunidad Autónoma** (ver apartado 1.3.), elaborar actividades, orientadas a los alumnos de Primaria, utilizando esas medidas tradicionales para:

- Tipo a. Dar a conocer a los alumnos las medidas tradicionales y sus nombres.
- Tipo b. Crear la necesidad de utilizar medidas convencionales.

Cada grupo, siguiendo la línea de la elaboración del Proyecto, realizará actividades correspondientes a la magnitud que desarrollará en el Proyecto, es decir, el grupo de alumnos que hizo el proyecto sobre la magnitud longitud elaborará estas actividades sobre dicha medida.

Por ejemplo:

Una fanega es la cantidad de terreno necesaria para sembrar una fanega de grano, valor diferente para cada comarca. Así, cuando dos agricultores de pueblos distintos decían que habían sembrado 20 fanegas de trigo, sabían que su cosecha sería diferente pues no es el mismo valor en todos los lugares, así en Castilla una fanega de tierra era 6439,2 m², en Álava 2510 m² y en Sevilla 5944,4 m².

Se pueden plantear problemas como:

- ¿Cuál es la diferencia de 100 fanegas de tierra en los diferentes lugares nombrados anteriormente?
- Una fanega equivale a 65 áreas ¿cuántos decámetros y metros cuadrados son sabiendo que un área es una unidad de superficie que equivale a 100 metros cuadrados? El múltiplo más conocido de las áreas es la hectárea y a veces el submúltiplo centiárea que equivale al metro cuadrado.

Para sólidos existe también la fanega que equivale a 55,5 litros y es una unidad de capacidad o volumen utilizada para productos agrícolas como los cereales y para áridos. También varía según los lugares, así en Badajoz media fanega son 27,92 litros, en Granada 27,35 litros y en Cáceres 26,88 litros.

Preguntamos a los alumnos: ¿cuántas fanegas se necesitan para que entre Badajoz y las otras provincias haya una diferencia de 10 litros?

2.11. Medida convencionales de masa

Los ejercicios comentados anteriormente lleva al profesor a realizar un debate en el que se presenten las siguientes cuestiones ¿porqué ya no se utilizan las medidas como fanega actualmente? ¿Las bolas de hierro sería una buena medida para que nos entendieran nuestros familiares y amigos cuando hablamos de pesos? Por ejemplo, yo peso 30 bolas de hierro.

Así pues, para que todos obtengamos el mismo valor de la pesada de un mismo objeto y nos podamos entender, no solo en el aula, sino también con las demás personas, padres, familia, amigos, etc., el profesor recomienda a los alumnos elegir unas nuevas unidades que llamaremos unidades convencionales.

Como hemos dicho en las medidas anteriores, hay que dar a conocer a los alumnos las medidas más manipulables y aquellas que les van a ser más útiles en la vida ordinaria, como son el kilogramo, medio kilogramo, un cuarto y el gramo. Estas medidas son las más usuales y que puede encontrarlas en la vida cotidiana tanto en su casa como en el comercio, por lo que nos interesa que sean interiorizadas por el alumno de forma que sean capaces de reconocerlas y de señalar objetos que tengan aproximadamente la medida de la unidad en cuestión.

- Buscar objetos que pesen 1 kilogramo aproximadamente, comprobar su peso mediante una balanza de doble platillo utilizando una pesa de 1 kg. Igualmente medio kilogramo y cuarto.
- Buscar objetos que pesen 5, 10 gramos y comprobarlo con la balanza.
- Estima cuántas piezas de las frutas que más te gustan hacen un kilo. Pregunta en casa y anota el número real.

Posteriormente se pasaría a las otras unidades como decagramo o hectogramos que son menos comunes y prácticamente inusuales en la vida ordinaria del alumno por lo que éste tiene más dificultad para asimilarlas. La única unidad que también aparece en la vida ordinaria para cálculo de grandes masas es la tonelada. Podemos plantear las siguientes actividades para adecuar la medida a la masa que se quiere medir.

- ¿Sabes cuál es la unidad más apropiada para medir la masa de: un camión, una cucharadita de azúcar, tus zapatos, un niño bebé, una lata de refresco, la pizarra de clase?

Previamente hemos hecho una actividad para ver cuál es la masa de algunos objetos para saber lo que podemos medir realmente con cada unidad.

Ahora, el profesor plantea estimaciones de una misma medición con distintos múltiplos o submúltiplos, para que vaya relacionando las distintas medidas de la escala métrica.

- *Pesada de objetos. Estimación y peso de objetos del aula con diferentes unidades como pudiera ser: pesar un diccionario con pesas de un gramo, de cinco gramos, de medio kilo. Valorar las estimaciones y las pesadas, si son buenas o malas, y establecer conclusiones que hagan que el alumno haga reflexiones, por ejemplo, la relación que existe entre las pesadas obtenidas con las distintas medidas.*
- *Comparar objetos del mismo aspecto exterior pero de masa distinta.*
- *Clasificar objetos atendiendo a que tienen la misma masa (pesan 1 kg, medio o cuarto).*
- *Estudiar un sistema regular de pesas estableciendo las equivalencias.*
- *Pesar un libro con las distintas pesas para comprobar las equivalencias.*
- *Estimar pesos de objetos escolares y buscar la unidad idónea para pesarlos.*
- *Estimar pesos de frutas dependiendo de su tamaño como sandías en kilos, cerezas en gramos...*
- *Conocer las distintas balanzas: de dos platillos, de un solo platillo, digitales, de precisión y pesar objetos. Comprobar que el peso de un objeto coincide en ellas.*
- *Hacer un debate relativo a los usos de cada una de las balanzas en los distintos trabajos.*
- *Hacer un estudio del peso de distintos animales. Elaborar una tabla en la que expresamos dichos pesos.*
- *Hacer un estudio del peso de las personas de su familia. Hacer una tabla resumen.*

En un principio, el alumno para medir puede utilizar varias pesas de igual medida. Después, podemos enseñarle a medir utilizando pesas de diferentes medidas. El profesor debe hacerles observar que algunas medidas no se pueden obtener exactamente con una cierta unidad de medida; los alumnos deben observar que para medir la masa sobrante pueden utilizar pesas de menor medida e incluso de gramos. Así, de esta forma, el alumno va adquiriendo la noción de medir no solamente con una unidad única sino con una medida mixta, en la que utilizamos distintos múltiplos o submúltiplos.

Igualmente, es necesario trabajar las mediciones en las que la unidad de medida es mayor que la medida del objeto a medir.

Actividades para los estudiantes para profesores.

- *Realiza un ábaco con unidad móvil como el que se hizo en la magnitud longitud.*
- *Plantea tareas para los alumnos en las que dicho ábaco les facilite la solución.*

Actividades de investigación para los alumnos.

- *¿Cómo calcular el peso de objetos pequeños por ejemplo granos de arroz?*
- *¿Cómo calcular el peso de un billete? Se supone no tenemos balanzas de precisión.*
- *¿Tienen los líquidos masa? Vamos a pesar un recipiente vacío y luego lleno de agua. Explica lo que ocurre. ¿Y los gases? Vamos a ver si pesa el aire. Tomamos una percha con dos hilos colgando. En uno ponemos un globo desinflado y en el otro inflado. Explica lo que ocurre.*
- *Extraemos conclusiones de estas actividades.*

Posteriormente, cuando estudiemos la magnitud volumen volveremos a realizar actividades conjuntas de capacidad, masa y volumen relacionando y estableciendo las equivalencias de las distintas medidas. ■

TEMA

3

Desarrollo didáctico de la enseñanza de la medida tiempo



Una vez que hemos tratado las medidas en general y las magnitudes de longitud, capacidad y peso (masa), nos vamos a referir a tres de las magnitudes que consideramos son menos trabajadas, desde el punto didáctico, en la enseñanza-aprendizaje de las medidas en Primaria. Comenzamos por la medida de tiempo, para continuar con la medida de superficie y la introducción que se debe de hacer del volumen, como preparatorio de los contenidos que van estudiar los alumnos en Secundaria.

3.1. Enseñanza de la medida de tiempo. Un poco de historia

Los conceptos temporales son difíciles de asimilar por los alumnos. La adquisición del tiempo es un proceso que comienza en la Educación Infantil y se desarrolla durante toda la Primaria.

En la Educación Infantil, los niños conciben el tiempo como una sucesión temporal donde los sucesos día y noche, ayer hoy y mañana, antes y después, significan una ordenación de los distintos sucesos y cambios que van experimentando. En esta etapa, el tiempo va asociado a las necesidades biológicas, asociando la mañana, la tarde o la noche con sus tiempos de alimentación y de acostarse.

En la Educación Primaria, se abordan ya conceptos más relacionados con la duración como son las horas, días, meses y años pero que también implican una ordenación.

De esta forma podemos considerar que los conceptos temporales se enmarcan en dos componentes como son **el orden de los sucesos temporales y la duración de los mismos**, que da lugar al aprendizaje de las medidas de tiempo.

Vamos a hacer un poco de historia sobre la medida de tiempo, antes de adentrarnos en su estudio didáctico.

El cálculo de tiempo hoy es muy sencillo de hacer y de saber en qué momento concreto nos encontramos. Podemos hablar de años, meses, horas, minutos

y segundos con gran precisión y sin temor a equivocarnos. Incluso podemos medir décimas, centésimas y milésimas de segundo y en cualquier parte del mundo nos entenderían, pero esto no siempre ha sido así.

Si nos desplazamos a los primeros tiempos, las primeras observaciones que hacía el hombre sobre las variaciones de tiempo fueron: el día y la noche. Esta alternancia podemos decir era el primer reloj de los seres humanos. Ante la necesidad de controlar el tiempo las antiguas civilizaciones se guiaban por el día y la noche o los ciclos de la luna.

Pasado el tiempo, los hombres fueron capaces de medir cortos periodos mediante los relojes de agua (clepsidra) o arena,... o largos periodos mediante los calendarios.

Uno de los primeros relojes que crearon los hombres fue el reloj solar, mediante la sombra que proyectaba una varita se indicaban los



Figura 3.1. Reloj de arena construido por los alumnos de la Facultad de Formación de Profesorado. U. de Extremadura.

momentos del día. Se sabe que en China se utilizó aproximadamente 3.000 años antes de Cristo, y también fue conocido por los egipcios e incas.

Como los relojes de sol no se pueden usar ni los días sin sol, ni por la noche, surge el reloj de agua o clepsidra que encontramos en las culturas egipcia, babilónica, griega y romana. Marcaba el tiempo por medio del agua que pasaba de una vasija graduada a otra. Este sistema es el antecesor al reloj de arena, que tuvo su auge en el siglo III y se construye mediante dos recipientes de vidrio unidos por una fina boca por la que pasa la arena de uno a otro. Este reloj mide un tiempo limitado, 5 minutos, 10 minutos, etc. cuando toda la arena cae del recipiente superior al inferior. Su funcionamiento solo necesita de la fuerza de la gravedad.

Los romanos usaban también el reloj de fuego, que consistía en velas finas marcadas que se iban consumiendo mediante el fuego y cada marca indicaba un intervalo de tiempo pasado.

Con respecto a los tiempos largos, las distintas civilizaciones comenzaron a medirlos mediante los calendarios. Un calendario es un sistema inventado por el ser humano para dividir el tiempo en periodos regulares: años, meses, semanas, días. A lo largo de la historia ha habido muchos tipos de calendarios en las distintas civilizaciones como el calendario persa, egipcio o maya.

El emperador Julio Cesar instauró el Calendario Juliano del que proceden los nombres de los meses actuales: Ianuarius: mes de Jano, dios de los portales. Februarius: mes de las hogueras purificadoras (februa). Martius: mes de Marte, dios de la guerra. Aprilis: mes de las flores. Maius: mes de Maia, diosa de la abundancia. Iunius: mes de Juno, diosa del hogar y la familia. Quintilis: mes quinto. Sextilis: mes sexto. September: mes séptimo. October: mes octavo. November: mes noveno. December: mes décimo.

Este calendario, en principio, tenía diez meses. El primer mes era Martius que era el mes de la primavera, y siguiendo el orden anterior llegaríamos a los meses sin nombre propio y nombrados por el orden en la sucesión, es decir, desde Quintilis: mes quinto hasta December: mes décimo. Después se introdujeron Ianuarius y Februarius.

Fue Marco Antonio quien cambió el nombre del mes quinto por el de Julium en honor a Julio Cesar y, posteriormente, el Senado cambio el mes sexto por Augustum en honor de Octavio Augusto, quedando así contruidos los nombres de los que provienen los actuales meses en castellano.

En el calendario Juliano los meses que son impares, como enero, marzo, mayo, etc., tienen 31 días y los meses pares, como abril, junio, etc., 30 días, sin embargo febrero tendrá 28 días y 29 días en los años bisiestos.

El emperador Constantino I el Grande fue quien implantó la semana de siete días a partir del calendario lunar mesopotámico. Esta división de siete días se popularizó en las distintas culturas posteriores.

En la Edad Media, solamente se preocupaban del tiempo la nobleza laica y eclesiástica. Su interés venía dado por importantes acontecimientos de la vida ordinaria como, nacimientos, bodas, etc. Se celebraban grandes fiestas en los aniversarios correspondientes con un gran número de invitados. Este tiempo es la continuación de la época romana con su calendario juliano y sus días, semanas y meses. Se medían los ciclos largos teniendo en cuenta las labores del campo como, la siembra y las recogidas. El calendario más popular era el religioso con sus oficios y sus fiestas: Natividad, de la Cuaresma, de Pascua, etc.

El sistema actual, con comienzo de año el 1 de enero, procede del antiguo calendario Juliano y se llama Estilo de la Circuncisión o de Gracia. En España se comenzó a aplicar en el siglo XV, pero estuvo conviviendo con otros sistemas diferentes.

El calendario Juliano establecido en el año 46 a.C. había producido un desfase al considerar que el año tenía 365,25 días cuando solamente tenía 365,241 días, según se demostró en el siglo XVI. La diferencia de tiempo había hecho que las estaciones quedaran desplazadas. Por ello, el Papa Gregorio XIII ordenó que se corrigiera el desfase pasando del 4 de octubre al 15 de octubre de 1582 quedando así establecido el Calendario Gregoriano. Este calendario es el que se utiliza actualmente en todo el mundo cristiano.

3.2. La medidas arbitrarias de tiempo

La percepción del tiempo no es una propiedad que pueda ser observable materialmente, sino que depende en muchos casos de acciones y del estado anímico del sujeto que lo percibe. Esto hace que en su enseñanza en Primaria se presenten dificultades más complejas que en la enseñanza de las otras magnitudes. Un alumno puede saber leer la hora y eso no significa que tenga asimilada la noción del tiempo. Para Piaget, el alumno tiene la noción de tiempo cuando se da cuenta que hay sucesos que ocurren siguiendo una secuencia y entre los sucesos se encuentran intervalos que son identificables.

Como hemos dicho al principio del capítulo, el tiempo hay que comenzar a estudiarlo desde la Educación Infantil donde los profesores y padres deben enseñar al niño a discriminar los conceptos temporales.

Para ello, se debe comenzar por mostrar a los alumnos las partes del día con los astros propios de cada momento como son el Sol, la Luna o las estrellas o con las actividades propias de cada etapa como son: de día te vistes y vas al colegio, al mediodía tomas el almuerzo, por la tarde hacemos las actividades extraescolares, tomas la merienda y juegas, y por la noche, cenas te pones el pijama y te acuestas.

Actividades:

- El profesor hace preguntas sobre la seriación día noche.
- El profesor hace preguntas sobre las estaciones climatológicas y comenta la importancia de éstas en la antigüedad para controlar el éxito de la siembra.

Estas dos actividades las acompaña con material gráfico que va mostrando a los alumnos mientras comentan.

- Anotar en un día normal todas aquellas situaciones en la que aparecen estimaciones o medidas de tiempo.

El objetivo de esta actividad es hacer observar al alumno que son muchas más de las que podía pensar y así se justifica la necesidad de conocer bien esta medida.

El vocabulario se debe ir elaborando por un proceso de asociación “te levantas” es por la mañana, “te acuestas” es por la noche, “juegas y hay luz” es de día, si “hace frío” es invierno,...Con el tiempo se relacionan palabras como tiempo, duración, antiguamente, corto, largo, demasiado, poco, mucho, tanto tiempo como, has tardado más que..., has tardado menos que ...

- Escribe las actividades que haces:
- Antes de ir al colegio.
- Un domingo, antes de tomar el almuerzo.
- Cuando es de noche.
- Después de almorzar.

Queremos que el niño distinga que hay una serie de sucesos que se realizan en un orden temporal y que entre dos sucesos median intervalos, cuya duración hay que valorar.

Debido a su egocentrismo, el niño no es capaz de tener conciencia de una sensación de duración, salvo si esta duración está en relación directa con su propia existencia. Es decir, un acontecimiento sólo ha sucedido “antes”, si ese “antes” se relaciona con un hecho vivido por el niño: antes del desayuno, antes de las vacaciones...

Por ello, en la Educación Infantil, se deben trabajar *el orden de los sucesos temporales*: antes, ahora y después o ayer, ahora y mañana mediante las diferentes actividades que realizan en el aula o en su vida ordinaria. Es, en esta etapa, donde el niño debe empezar a comprender el tiempo como una ordenación de sucesos que se presentan en su vida.

Una vez trabajado y asimilado el orden del tiempo podemos pasar a trabajar el *tiempo como duración*. Para ello es imprescindible introducir las unidades arbitrarias, bien en los últimos años de la Educación Infantil o en los primeros de la Educación Primaria. Vamos a comenzar con un ejercicio preparatorio.

Juegos preparatorios.

Pesca magnética. El juego consiste en pescar 10 pececitos que llevan un enganche magnético. El alumno mediante una caña con idéntico enganche puede coger dichos peces que nadan en un barreño de agua. El alumno debe hacerse del mayor número de peces posibles en un tiempo indicado por el profesor, pero los participantes no actúan todos a la vez, sino de uno en uno.

Los alumnos observarán que es necesario utilizar una medida para calcular el tiempo que le corresponde a cada uno. Entre todos, profesor y alumnos, pueden elaborar una tabla con unidades arbitrarias de tiempo para medir los tiempos de la pesca magnética, como pueden ser: Palmada, reloj de arena, golpe del pie, gotas de grifo, velas graduadas...



Figura 3.2. Juego de pesca magnética.

Una vez realizada la actividad, el profesor los motivará preguntándole: ¿quién sacó más peces? ¿quién lo hizo más rápido? ¿quién tardó más tiempo?

Cuando los alumnos no comprenden bien el tiempo suelen tener problemas en la duración de espacios temporales, es decir, el alumno atribuye la duración del tiempo con relación a la percepción visual, así puede afirmar que aunque a dos niños se le haya calculado el mismo tiempo, tarda más tiempo el que ha cogido más peces.

Esta falta de comprensión del tiempo se aprecia, también, en el siguiente ejercicio:

- Se abren dos grifos a la vez, que manan con distinta presión, para depositar agua en botellas de igual capacidad, pasado un tiempo se cierran a la vez. El profesor pregunta al alumno ¿qué botella tiene más agua? ¿en cuál de las dos botellas se tardó más tiempo en depositar el agua?

El alumno puede afirmar que se invierte más tiempo en la que tiene mayor cantidad de agua.

- Dos alumnos echan una carrera y salen los dos desde una misma meta. Los alumnos corren y a un toque de silbido deben pararse. Después el profesor pregunta ¿quién recorrió más distancia? ¿quién tardó más tiempo?

Igualmente en esta carrera a tiempos iguales, el alumno puede afirmar que tarda más tiempo el que recorre más distancia. En este caso, también el tiempo se puede relacionar con percepciones motoras, es decir, el tiempo depende de la velocidad del individuo.

Otra variedad de juego de pesca de peces puede ser calculando el tiempo que tardan en sacar un número determinado de peces. ¿Quién tardó menos? ¿Quién tardó más que Juan? El juego de la pesca nos sirve como juego preparatorio de las unidades arbitrarias de tiempo, igualmente que el juego siguiente.

Secuencia de sonidos. El profesor expondrá una serie de cuatro secuencias de sonidos. Los alumnos deben escucharlos y escribir si consideran que la duración es larga o corta, es decir, dura mucho o poco. De nuevo, el profesor mostrará la secuencia de sonidos. Los alumnos deben medir cuánto dura cada secuencia con unidades no convencionales, por ejemplo palmadas, chascando los dedos, golpes en la mesa...e intentar ordenarlas.

Las estimaciones de tiempo son una actividad prioritaria en el manejo de unidades arbitrarias, o posteriormente convencionales. Además de estimar los tiempos de la pesca magnética, se pueden realizar otras actividades de estimación como estimar tiempos de duración de actividades cotidianas.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

- Hacer una lista de actividades de patio en las que se pueda estimar el tiempo de duración.
- Estimar con palmadas el tiempo de duración de la carrera de un niño. Establecer un debate en el que se resalte y se prevenga cuáles son los problemas con los que posiblemente nos vamos a encontrar.
- Calcular el tiempo que dura una actividad mediante un reloj de arena, y otras unidades de tiempo más pequeñas como el goteo de un grifo, golpear el suelo con el pie. Defina una actividad concreta por ejemplo una canción y enuncie las preguntas que como profesor haría a los alumnos.

Siguiendo con las unidades arbitrarias presentamos otras actividades, como son:

Actividades para los alumnos.

Construir un reloj de sol. Primeramente el profesor explica a los alumnos las características del reloj de sol. Después se confecciona un reloj portátil utilizando cartón, un palito, hilos, lápices de colores y fotocopias.

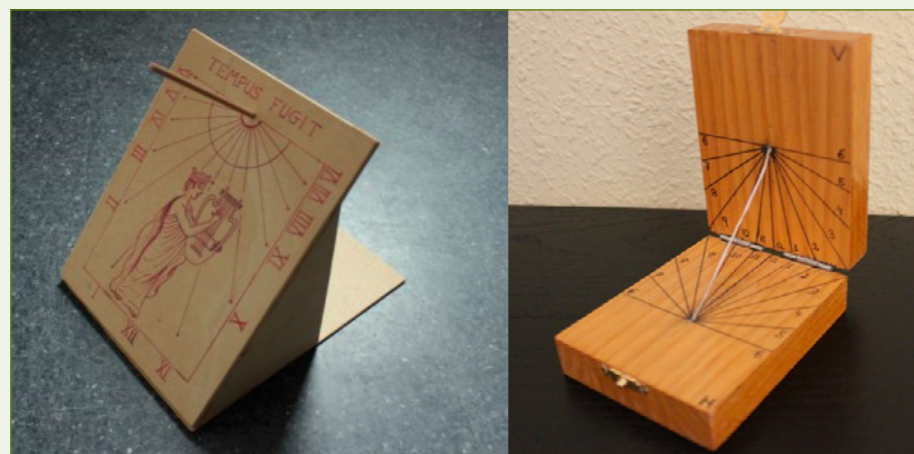


Figura 3.3. Relojes de sol portátiles.

1. Construir un reloj de arena. Para ello se rellena con arena una botella de plástico. Coloca el alumno, en su apertura, un disco de cartulina con un agujero en medio para permitir el paso de la arena. Después otra botella sobre la primera, uniendo boca con boca mediante cinta adhesiva, y ahora se unen las dos botellas mediante unos listones de madera que se adhieren a éstas con cinta adhesiva, como se muestra en la figura 3.4. Una vez construido los alumnos deben comprobar que funciona.

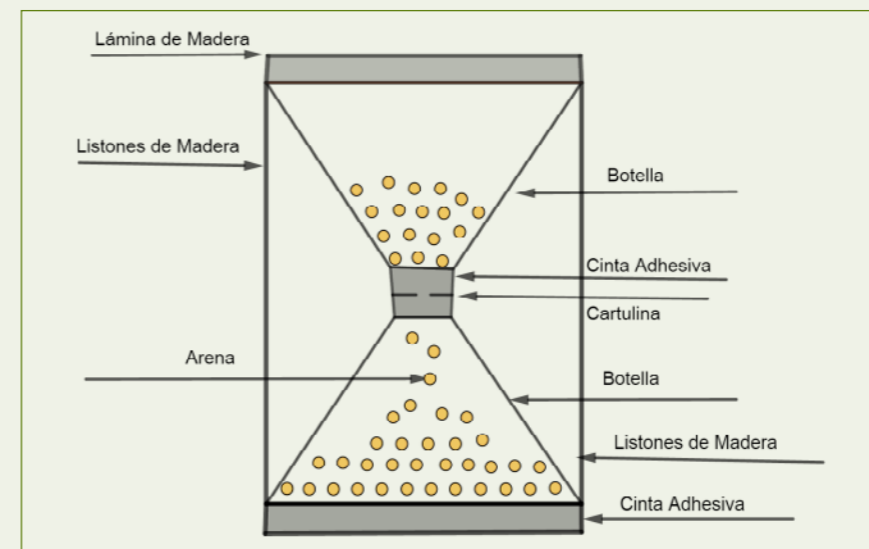


Figura 3.4. Reloj de arena casero.

2. Construir un reloj de arena para un minuto, para cinco minutos y para diez minutos. Les explicamos a los niños que, dependiendo de la arena que echen, medirán un tiempo específico. Para saber los tiempos correspondientes el profesor o el alumno, mediante un reloj de agujas o digital, deberá medir la cantidad de arena que se necesita para medir un tiempo determinado.
3. Debate sobre los relojes de arena. La siguiente actividad es mostrar un reloj de arena para poder establecer un debate entre todos. El profesor explica que antiguamente se usaban esos relojes. El profesor hace preguntas como: ¿por qué se usaban los relojes de arena? ¿Por qué es más fácil usar los relojes corrientes? ¿sería difícil llevar un reloj de arena consigo a cualquier parte? ¿cabría en el bolsillo? ¿se podría romper? u otras que puedan surgir. Los alumnos mientras dan sus opiniones manipulan el reloj de arena y le dan vueltas hasta que baje toda la arena.

- Colección de relojes de arena. Traer relojes de arena, siempre en casa suele haber alguno. Observar y comparar su duración de forma que el alumno pueda ordenarlos de mayor a menor duración.
- Debate manipulando dos relojes de arena. Nos fijamos en dos relojes cuya diferencia de duración sea significativa y medimos con ellos; una actividad concreta, hacedles observar el número de vueltas que damos a los relojes. A partir de los resultados obtenidos establecer conclusiones con los alumnos mediante preguntas ¿a qué reloj le hemos tenido que dar más vueltas? ¿por qué? ... antes de comenzar la actividad también podemos preguntar ¿a qué reloj le daremos más vueltas? ¿por qué?

Evidentemente, el alumno debe haber observado qué reloj es más lento en la caída de la arena y cuál tiene más cantidad de arena. La duración del reloj depende de la velocidad de caída y de la cantidad de arena. Dos variables que el alumno tiene que controlar, lo que implica una apreciable dificultad.

- Construcción de un reloj de fuego. Los alumnos pueden construir, también, un reloj de fuego mediante marcas en una vela delgada. Los niños deberán marcar la vela y saber cada cuánto deberán marcar la vela para medir el tiempo correctamente.
2. Debate sobre la medida del tiempo. Establecer debates con los alumnos en los que introducimos las medidas en otros tiempos que hemos expuesto en el primer apartado. Se puede plantear:
- ¿Por qué crees que es importante medir el tiempo? Justifica tu respuesta. Por ejemplo: necesito saber cuánto tardo desde mi casa hasta el colegio para no llegar tarde.
- ¿Cómo medían antiguamente el tiempo? ¿Cómo crees tú que sabían antiguamente en qué estación estaban? Por ejemplo en verano.
- ¿Cómo crees que medían tiempos cortos en la antigüedad cuando era de noche? ¿y de día?
- Luego se hará una puesta en común entre todos los alumnos.

Otras actividades pueden ser:

- Elaborar un cómic en el que se muestran las acciones sucesivas de un día cualquiera. Mismo ejercicio secuenciando otras actividades como una excursión o contar las actividades realizadas durante unas vacaciones.
- Escuchar canciones grabadas y estimar cuál dura más o menos.

En la realización de estas actividades es cuando surge **la necesidad de una unidad de medida** con la que todos los resultados de medida sean el mismo y no dependan del individuo que mide. Por ejemplo, los alumnos observarán que si dos alumnos quieren medir el tiempo que se tarda en el juego de la pesca en pescar dos peces, y lo hacen tocando las palmas, observarán que dependiendo del ritmo con que el alumno toque las palmas, un alumno tardará más o menos.

Así pues, para como el resto de las medidas, tendremos que llegar a utilizar una medida convencional que sea precisa, no dependa del medidor, y entendible por las demás personas.

3.3. Unidades convencionales

Como hemos dicho en el apartado anterior, llega el momento de presentar las unidades convencionales de tiempo. Sabemos que el orden de presentarlas para que sean más asequibles al aprendizaje de los alumnos es: segundo, minutos, hora, día, semana, mes y año. Los alumnos son capaces de interiorizar el segundo, el minuto y la hora. Sin embargo, la interiorización de las otras medidas es más complejo pues no son fácilmente perceptibles.

Teniendo en cuenta las recomendaciones dadas en el apartado 2.1., vamos a desarrollar de una forma más exhaustiva algunas actividades con la magnitud tiempo.

Actividades para los alumnos.

1. *Estimar segundos y minutos.* El profesor, con los alumnos de los primeros años, puede realizar estimaciones de tiempo basadas en las tareas diarias.

Los alumnos pueden estimar tiempo que tardas en segundos en:

- escribir tu nombre con mayúsculas,
- beber un vaso de agua, sacar punta a un lápiz,
- dar cuatro vueltas a la clase: corriendo, andando despacio, a la pata coja...

Otro alumno calcula los mismos tiempos de estas actividades con un cronómetro. Un tercer alumno apunta todos los resultados en una tabla de dos columnas: en la primera pone las estimaciones (segundos) y en la segunda los tiempos reales calculados con el cronómetro. Igualmente se puede hacer para los minutos.

El profesor puede enseñar a los alumnos a estimar segundos mediante técnicas de conteo, esto es en lugar de contar uno, dos, tres, se estiman mejor los segundos diciendo: "cuatrocientos uno, cuatrocientos dos,... Probarlo con los ejercicios anteriores.

El profesor puede hacer estimar a los alumnos cuándo ha transcurrido un minuto. Los alumnos en silencio empiezan a estimar el minuto a partir de que el profesor dé la orden de salida. Éste va preguntando a los alumnos cosas sin trascendencia con el objetivo de que no vayan contando mentalmente. Cuando un alumno cree que ha pasado el minuto levanta la mano, el profesor anota el tiempo estimado. Y así sucesivamente para todos los alumnos que levanten la mano en el momento considerado. Una vez terminada la actividad, el profesor da a cada alumno los tiempos estimados y eligen el mejor estimador. Igual se puede hacer la actividad con otros tiempos, como dos o cinco minutos. La repetición de esta actividad hace que el alumno vaya estimando con más precisión los tiempos.

Se pueden hacer actividades del tipo:

- Estima y apunta el tiempo que tardas en: desayunar, levantarte de la cama, ir al colegio, subir las escaleras del colegio, el tiempo de recreo. El profesor compara las respuestas de cada alumno y establece un debate.
- Sabiendo ya que tiempo es más o menos un minuto, escribe si te tarda más o menos de un minuto en realizar las siguientes actividades.

1. *Tomar una medicina.*
2. *Beber un vaso de leche.*
3. *Contar del 1 al 50.*
4. *Ir de tu casa al colegio.*
5. *Hacer una visita.*

El profesor hace un debate preguntando si todos los alumnos tardan el mismo tiempo en hacer las actividades.

3. *La hora.* El tiempo hora es demasiado largo para los alumnos de los primeros cursos. Lo mejor es relacionar los ejercicios de lectura del reloj con actividades de relevancia en la vida del niño, como por ejemplo: horario de clase, las horas de los programas de televisión, la de volver a casa al terminar las clases del colegio... aunque estas actividades no se correspondan con horas en punto o medias horas; por ello, su comprensión se debe acompañar de un reloj de pared o en su defecto de la alarma de un reloj (actualmente los niños suelen tener todos relojes con alarma). En último extremo se puede utilizar un despertador que suene cada hora o con un cronómetro/ temporizador puesto en la pizarra digital (se encuentran en internet, por ejemplo *classroomscreen*).



Figura 3.5. Horario de clase.

Los alumnos elaboran el horario de clase (figura 3.5) distribuido por horas que pueden ir coloreando conforme pasen las horas. El profesor puede proponer actividades de socialización en las que el alumno debe observar y apuntar horarios fijos, como pueden ser: entrada, hora del recreo, hora de comer, hora entrada de actividades extraescolares, hora de marchar a casa. Igualmente, el profesor diseña actividades para desarrollar los términos referidos a la organización temporal. "A las 12 nos vamos" o "cuando la aguja chica y la grande estén en el número 12".

- El alumno a partir de Segundo curso comienza a conocer las horas del reloj, las medias y los cuartos aunque estas últimas no deben introducirse hasta que el alumno domine bien el concepto de hora.

Debe aprender a manejar el reloj digital y el reloj analógico, aunque hay que tener en cuenta que los alumnos pueden dominar adecuadamente el día correspondiente, horas, minutos y segundos, que le marca el reloj sin tener un concepto de tiempo. Comprender el tiempo implica que coordinan en la mente los instantes y los intervalos del continuo temporal.

Para este aprendizaje el profesor tiene que tener en cuenta que para los relojes analógicos, aunque ya son poco usados:

- El niño tiene que saber qué indica cada manecilla.
- Saber las unidades que representan y las equivalencias entre ellas.
- Las horas se expresan de 1 a 12, no existiendo diferencia entre las horas anteriores y posteriores al mediodía.

En el caso del reloj digital :

- Las horas se expresan de 1 a 12 y aparecen las siglas AM (Ante Merídiem) hace referencia al período anterior al mediodía, mientras que PM (Post Merídiem) indica el tiempo posterior al mediodía o bien se expresan las horas en un intervalo de 00 a 23.
- Para la comprensión de la sucesión de los minutos y segundos, los niños deben saber contar de unidad en unidad hasta 60.
- Las horas, los minutos y segundos son indicados mediante números que los alumnos ya conocen.
- Su lectura se hace de forma que los dos primeros números indican la hora, los siguientes los minutos y a veces también aparecen dos últimos números que indican los segundos.

Pueden realizar actividades del tipo:

- Piensa si se tarda más, menos o una hora en realizar las siguientes actividades.
 - Escribir tu nombre y apellidos.
 - La clase de Matemáticas.
 - El recreo.
 - Construir un colegio
 - Las vacaciones
- Escribe 5 actividades, que hagas normalmente ,que duren más de una hora y otras que duren menos de una hora.

Diciembre

L Lunes	M Martes	X Miércoles	J Jueves	V Viernes	S Sábado	D Domingo
1	2	3  cumpleaños	4	5	6	7
8  vacaciones	9  crismas	10  crismas	11  adornos	12  villancicos	13	14
15  árbol	16	17	18  Belén	19	20  vacaciones	21  viaje
22	23	24  Papá Noel	25  Navidad	26	27	28
29	30	31  Noche Vieja				

Figura 3.6. Semanas y mes.

- El día y la semana. Para la noción de día, se elabora un calendario para cada alumno, una serie de cuadros vacíos (con la disposición de un mes de almanaque como en la figura 3.6) que ellos van rellenando cada día, bien coloreando el cuadrado o poniendo la fecha, a la vez que van aprendiendo los días de la semana. Así surge el concepto de semana. Por ejemplo, podemos ir coloreando cada semana de un color. También se pueden introducir los términos mañana y tarde, separados por el almuerzo.

CALENDARIO 2019



Figura 3.7. Meses y año.

- El mes, el año y el almanaque. Para introducir el almanaque, el profesor presenta gradualmente los días de la semana, la sucesión de los días del mes, los meses del año, el cambio de estaciones y el año actual (figura 3.7). Con esta actividad se pretende que el grupo clase comprenda la función social del tiempo y posibilite contextualizar términos del lenguaje coloquial referidos a la organización temporal. Los alumnos deben acercarse al almanaque con actividades reales.

El profesor puede hacer actividades en las que se refuerzan todas las unidades aprendidas como:

- Escribe la unidad o unidades que se usan en los siguientes instrumentos de medida de tiempo: un calendario de bolsillo, un reloj digital, un cronómetro, un reloj de agujas, un calendario de pared.

- Con qué unidades podemos expresar los siguientes intervalos de tiempo.
 - Desde el invierno hasta el verano.
 - Desde que tomas las vacaciones de Navidad hasta que vuelves al colegio.
 - Desde que te levantas hasta que te acuestas.
 - Desde que comienzas a tomar la sopa hasta que acabas.
 - Desde el día que naciste hasta tu próximo cumpleaños.

El profesor puede diseñar también pequeñas excursiones o paseos matemáticos para hacer observaciones de grandes relojes que pueden encontrarse en lugares cercanos como iglesias, ayuntamiento, estación de autobuses o estaciones de tren. Los alumnos harán actividades previamente diseñadas y comentadas en el aula. Como por ejemplo, hacer el estudio y comprensión de la tabla de horarios de salida y llegada de los autobuses y los trenes.

Esta actividad se puede empezar a introducir en el Cuarto curso. El profesor debe cuidadosamente preparar las tablas de horario de una forma sencilla y comprensible para los alumnos de los cursos correspondientes, y posteriormente hacerlas más complicadas introduciendo nuevos datos y variables. Un ejemplo de tabla en la figura 3.8.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

A partir de una tabla real de salidas y entradas de autobuses, trenes o aviones, elaborar actividades para que los alumnos refuercen el conocimiento de las unidades de tiempo y manejen los tiempos de llegada y partida de una forma comprensiva. Por ejemplo, en la tabla de la figura 3.8. ¿A qué hora sale el primer autobús para Gévora? ¿Y el último? ¿Cuánto tarda el autobús de Badajoz a Valdebotoa? La familiaridad con los relojes digitales puede resultar especialmente útil a este respecto.

- Elegir varios países, estudiar sus horarios y elaborar actividades con las distintas horas según los países, por ejemplo, ¿Si en Perú son las cuatro de la mañana qué hora es en España? El estudiante para profesor puede valerse de la información que obtiene en internet y hacer una tabla horario de varios países. Para ello, elabora una regla de obtención de la hora para cada país a partir de la hora española.

LÍNEA 13 VALDEBOTOA

SALIDAS BADAJOZ	GÉVORA	VALDEBOTOA	GÉVORA	LLEGADAS BADAJOZ
06:50	●	07:10	07:20	07:55
07:55	●	08:20	08:30	09:00
09:00	●	09:25	09:35	10:05
10:40	11:05	11:15	11:25	12:05
12:30	13:00	13:10	13:20	13:50
14:00	14:25	14:35	14:45	15:10
15:15	15:35	15:55	16:05	16:35
16:35	●	17:05	17:15	17:45
17:45	18:10	18:20	18:30	19:00
19:30	19:55	20:05	20:15	20:45
21:15	21:40	21:50	22:00	22:25

- No realiza parada ●
- Estos servicios son de lunes a viernes laborables.
- **Recorridos de ida por Badajoz**
Est. Autobuses - Altozanos - Avda. Villanueva - Plaza de la Libertad - Puerta de Palmas - Puente de la Universidad (Los 3 primeros viajes salen desde Badajoz por Puente de la Autonomía) - Avda. Adolfo Suárez
- **Recorrido de vuelta por Badajoz**
Avda. Adolfo Suárez - Puente de la Universidad - Puerta de Palmas - Pza. de la Libertad - E. Segura Otaño - Fernando Calzadilla - Altozanos - Est. de Autobuses

Figura 3.8. Horarios de autobuses.

- Realizar una programación de actividades para que los alumnos conozcan calendarios y relojes de otras culturas o de las culturas americanas como: Aztecas, Mayas, Incas. Cada grupo de estudiantes para profesor puede dedicarse a una cultura.

Actividades para los alumnos.

1. **Talleres del tiempo.** El profesor puede organizar talleres de construcción de material didáctico en los que los alumnos confeccionan los relojes de arena, agua y sol que pueden utilizarse en juegos reglados u otras actividades.
2. **Taller de cocina.** Una actividad relacionada con el tiempo es este taller (debe haber un lugar para realizarlo) en el que el alumno aprende muchas cosas pero, en particular, el profesor puede aprovecharlo para programar actividades relacionadas con el tiempo, así puede realizarse actividades como la estimaciones horaria en la cocción de diversos productos como huevos, fideos, pasta, verduras, etc. o la preparación de otros como gazpacho, salsa mahonesa, salsa alioli, etc. El alumno aprende el vocabulario asociado "hervir 5 minutos", "cocinar 1 hora a fuego lento", "batir dos minutos con batidora eléctrica o cinco minutos a mano". Esta actividad se puede complementar con el uso de un reloj de cocina y el estudio de su función, o de un temporizador.
3. **El tiempo y la física.** En las actividades físicas de plano inclinado también pueden programarse actividades de tiempo. Disponemos un tablón bastante largo que colocamos en una pared formando un cierto ángulo con el suelo y por el que hacemos deslizarse una pelota. Medimos con el cronómetro el tiempo que tarde en bajar la pelota por el tablón desde la parte más alta a la más baja. De una forma visible para el alumno hacemos variaciones del ángulo del tablón y volvemos a medir los tiempos. El objetivo es que el alumno aprecie la medida del tiempo y observe que si la pendiente es menor la pelota tarda más que si es mayor, en cambio la velocidad es menor, cuando la pendiente es más pequeña, es decir, el ángulo de pendiente es directamente proporcional a la velocidad e inversamente proporcional al tiempo de bajada.

Actividades para los estudiantes para profesores.

- Investigar y recopilar algunos recursos y aplicaciones interactivas que son utilizables y se encuentran en Internet, para reforzar todos los aprendizajes referidos al tiempo. Utilizar las palabras claves correspondientes como tiempo, actividad, primaria, juego, etc.

4

TEMA

Desarrollo didáctico de la medida de superficie

4.1. Aspectos previos para la medida de la magnitud superficie

El estudio que se hace de la enseñanza del área de una superficie en Primaria y Secundaria se reduce al estudio de fórmulas para calcular dicha medida. Está probado que la mayoría de los alumnos de Primaria entiende las áreas como el cálculo de producto de longitudes y una fórmula para calcular el área del círculo.

Este tipo de enseñanza tradicional siembra en el alumno una concepción muy pobre de dicho concepto reduciéndolo al cálculo numérico de fórmulas, lo que va en contraposición con su rico contexto dentro de la sociedad, la cultura y la naturaleza.

Además esta concepción hace que el alumno para profesor no capte la importancia de enseñar el área como número de unidades que recubren una superficie y como una propiedad que se conserva con el recorte y pegado. El alumno tampoco aprende diferentes estrategias para medir en la vida ordinaria, que le van a ser más útiles que las fórmulas aprendidas pero sin utilidad en muchas de las circunstancias que se le pueden plantear en su quehacer diario.

Las primeras referencias que nos hablan de la medida de superficies las encontramos en las civilizaciones antiguas como en Babilonia o en Egipto donde estas medidas se relacionan con problemas cotidianos, como las construcciones y trabajos de la tierra, cosechas, etc. Se conocían ya las áreas de varias figuras geométricas y el área del círculo al que daban el valor del triple del radio. Las civilizaciones chinas e hindú también utilizan reglas para cálculos de áreas de distintas figuras planas. Sin embargo, es la civilización griega donde se resuelven de una manera más precisa, con numerosas aportaciones, los problemas relacionados con las áreas. La evolución histórica hasta nuestros tiempos está plagado de hechos que no vamos a describir pero queremos reseñar como la medida de área ha

estado siempre ligada a la magnitud longitud y desde ahí la propuesta de fórmulas mediante esta relación.

Las magnitudes superficie y volumen participan tanto de la geometría como de las estructuras elementales. Es decir, si queremos obtener el área de una superficie necesitamos conocer sus características geométricas, como la forma, si es regular o no... pero también las estructuras aditivas para calcular, mediante una unidad dada, cuántas veces está contenida dicha unidad en la superficie a estudiar. También, es necesario utilizar las estructuras multiplicativas cuando la medida de la superficie se calcula considerando sus dos dimensiones, llevando la unidad longitud en cada dimensión y multiplicando el producto de esas razones, obteniendo el total de número de unidades necesarias para igualar a ese cuerpo en superficie. Así pues, la medida de una superficie de un cuerpo admite distintas formas de medición que el profesor debe tener en cuenta.

Por otra parte, si se toma una medida unidad, podemos establecer una correspondencia-medida que a la superficie de un objeto le hace corresponder el número de veces que la unidad de medida está contenida en ella. Es decir, es la cantidad de plano ocupado por la superficie. Esta es una forma de medida unidimensional, como ya sabemos, y el procedimiento de medir es simplemente contar las veces que la unidad medida cabe en la superficie.

Por otra parte, las superficies de lados rectos, también se pueden medir como productos de medidas de dimensiones lineales, por ejemplo: para calcular el área de un paralelogramo multiplicamos la base por la altura. Esa forma de medir se conoce como producto de medidas dimensionales. Para el caso de las superficies se llaman medidas bidimensionales.

Aunque las dos formas de medir son equivalentes y llegamos a la misma solución, sin embargo, está comprobado que los alumnos tienen bastante dificultades para calcular áreas en estas edades mediante las medidas dimensionales.

Sabemos que las medidas dimensionales implican relaciones multiplicativas que no son suficientemente coordinadas. Somos conscientes de las

dificultades que tienen los alumnos, incluso los estudiantes para profesores para coordinar las compensaciones aditivas con las compensaciones multiplicativas, es decir, los alumnos trasladan a las superficies las propiedades de la longitud de forma que, por ejemplo, al doblar los lados de un cuadrado consideran que la superficie del cuadrado es el doble. De ahí las dificultades que tienen los alumnos para comprender las fórmulas para el cálculo de algunas superficies.

En el caso de las superficies, podríamos utilizar siempre la medida unidimensional, porque es más fácil, pero a veces las formas geométricas de dichas superficies hace imposible poder utilizar una medida unidimensional, por lo que tenemos que recurrir a la medida dimensional, por ejemplo en el cálculo de áreas de triángulos o de figuras irregulares.

Aunque el área, según los currículos oficiales, se empieza a estudiar en el quinto año, es un concepto, como el resto de las magnitudes, que puede ser trabajada desde la Educación infantil, mediante ejercicios que supongan un buena siembra para que en su momento el alumno puede llegar a adquirir un buen esquema mental del concepto.

Es notorio, también, que en la magnitud superficie no se suelen hacer mediciones reales sobre el objeto. Generalmente el profesor da los datos y rápidamente sustituye las verdaderas mediciones por fórmulas que calculan dichas superficies o medidas mediante las unidades lineales correspondientes. Como mucho, las actividades de medida que se suelen hacer esos profesores son conteos de superficies cuadriculadas mediante la medida unidad.

Así pues, el alumnado debe diferenciar entre los conceptos: *superficie*, como una cualidad (extensión) de los objetos, y el *área*, como medida dada por un número, es decir: la medida de la cantidad de superficie respecto a la unidad de medida escogida. De tal forma, la superficie es una magnitud, matemáticamente hablando, una cualidad de los polígonos.



4.2. Aprendizaje del concepto área

Para poder medir un objeto, éste tiene que tener una serie de cualidades esenciales susceptibles de ser medibles. Así, la superficie es una de estas cualidades esenciales que podemos medir; a dicha superficie, por tanto, se le asocia un número que corresponde a su medida. Con la superficie se asocian palabras, como: extenso, amplio, ancho, estrecho, largas, cortas...

Las primeras actividades relativas a las medidas de superficies tienen que ir relacionadas con la conservación del área de la superficie. Algunas actividades recomendadas por Piaget son las siguientes:

Juegos preparatorios

Se presenta al alumno dos rectángulos idénticos colocados uno junto a otro. El profesor pregunta al alumno, si hay la misma cantidad de papel en los dos rectángulos. Si el alumno contesta afirmativamente, se corta uno de los rectángulos en dos partes y formamos un trapecio como en la figura 4.1. El profesor vuelve a preguntar si hay ahora la misma cantidad de papel en el rectángulo o en el trapecio. Igualmente se puede hacer haciendo otros cortes más sencillos como cortarlo en dos partes por la diagonal.



Figura 4.1. Conservación del área de la superficie.

Se presentan a los alumnos dos hojas idénticas coloreadas de verde que simulan dos campos (figura 4.2). Se colocan el mismo número de casitas en los dos campos, en uno alineadas y en el otro distribuidos al azar; se pregunta al alumno en qué campo hay más cantidad de hierba.

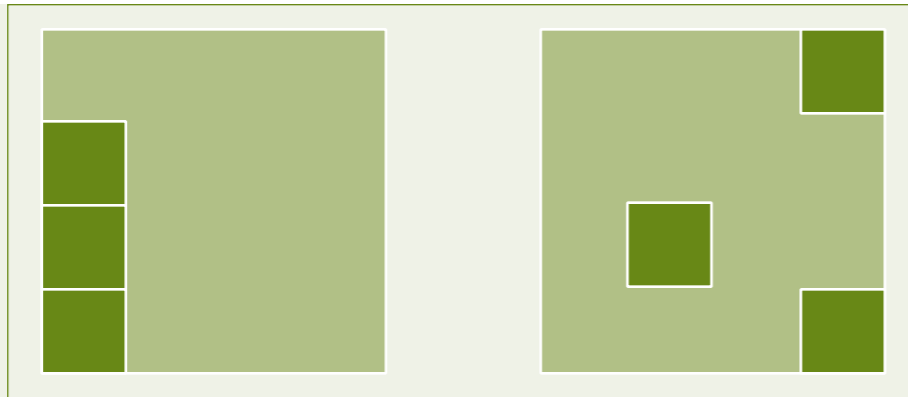


Figura 4.2. Conservación del área de la superficie.

Afirma Piaget que los alumnos son capaces de contestar que hay la misma cantidad de hierba cuando introducimos una sola casa en cada campo, pero a medida que vamos introduciendo más casas, a los alumnos le cuesta más trabajo comprender la conservación del área de la superficie.

El concepto de área es un concepto básico pero a la vez mucho más complejo que el concepto cualitativo de longitud, y su adquisición es posterior al de éste. El área es, pues, la extensión de un cuerpo; también representa un hueco vacío delimitado que trabajaremos con los palillos o el espacio barrido por una línea.

Podemos decir que uno de los primeros problemas que se presenta al profesor es que el concepto de área no depende de la forma, así si mostramos a los alumnos un cuadrado y un triángulo como los de la figura 4.3 y preguntamos por la relación entre sus áreas no obtenemos una respuesta inmediata debido a que no podemos recurrir a la comparación directa.



Figura 4.3. Comparación directa.

El problema no tiene fácil solución salvo que una de las figuras se pueda descomponer en partes de manera que superpuestas sobre la otra nos dé la respuesta, pudiendo realizarse el cubrimiento correspondiente, como podemos ver en la siguiente figura 4.4 donde se observa que el cuadrado es mayor que el triángulo.

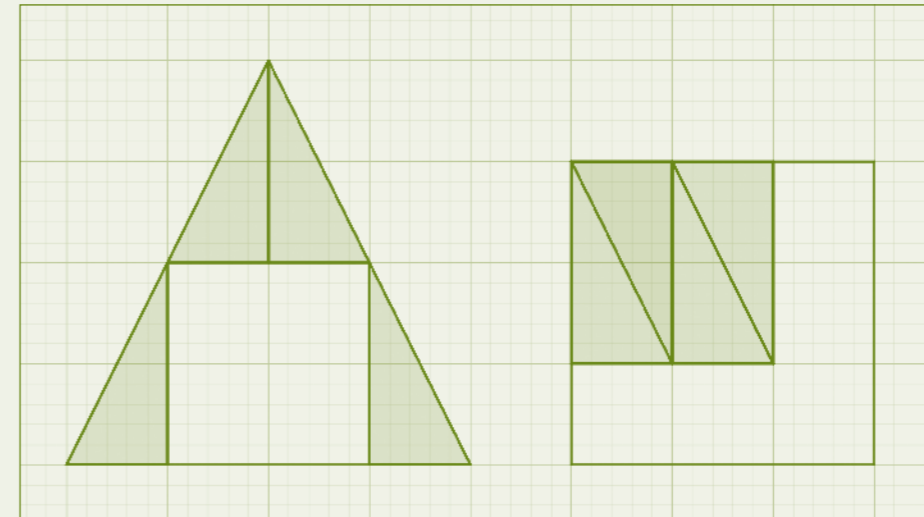


Figura 4.4. Comparación directa por descomposición. El cuadrado es una unidad mayor.

De este modo, dos superficies tendrán la misma área cuando al descomponer una de ellas en partes podemos cubrir la otra con dichas partes.

1. Ejercicio de figuras equivalentes.

Algunas figuras de estos ejercicios están en la figura 4.5.

- Dibuja un rombo, traza las diagonales. El rombo queda dividido en cuatro partes, corta estas partes y forma figuras equivalentes, es decir, que tienen el mismo área que el rombo.
- Dibuja un cuadrado, córtalo por una diagonal. Obtén como en el problema anterior polígonos equivalentes.
- Dibuja un hexágono regular, córtalo por sus diagonales y obtén un paralelogramo equivalente con todas las piezas.
- Dibuja un pentágono regular, córtalo por las diagonales y obtén un trapecio equivalente con todas las piezas.
- Dibuja un cuadrado córtalo por las diagonales y obtén un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio y un triángulo, utilizando todas las piezas en cada figura.

- *Dibuja un rectángulo, córtalo por una diagonal, y con las dos piezas resultantes obtén dos tipos de triángulos, y dos tipos de paralelogramos.*

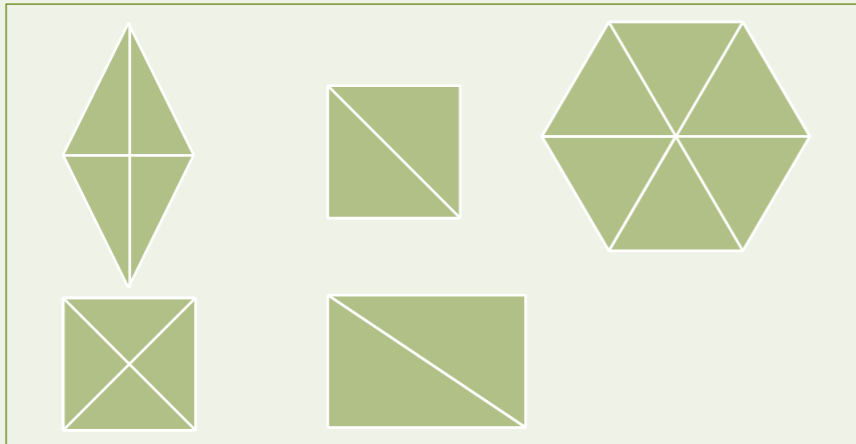


Figura 4.5. Ejercicio de figuras equivalentes.

2. *Dibuja un triángulo, haz un corte para obtener dos piezas de manera que al manipularlas puedas obtener un paralelogramo. Dibuja el paralelogramo obtenido y haz un corte para obtener dos piezas de manera que obtengas un rectángulo. La actividad consiste en pasar de triángulo a paralelogramo y a rectángulo, y comprobar que todas las figuras son equivalentes.*

Actividades geométricas.

Consideramos que la medida de superficie debe ser aprendida, en un principio, mediante verdaderas actividades geométricas en las que se tengan en cuenta la forma de la unidad o forma de la superficie a medir para conseguir el cubrimiento total.

Las primeras actividades se llaman geométricas, ya que en los razonamientos no utilizamos los números. El profesor compara áreas para establecer relaciones de igualdad o de inclusiones sencillas que nos lleven a establecer que una de ellas es la mitad, el doble, el triple,...

Estas primeras comparaciones se llaman directa porque se procede a superponer una de las superficies sobre la otra o bien cubriendo la más grande con la otra en forma de pavimento.

Actividades para los alumnos.

1. *Dadas dos hojas de papel, comprobar, superponiéndolas, que son de igual área. El profesor divide una de ellas en varias partes y pregunta al niño, qué área es mayor la de la hoja entera o el área total de la suma de las partes divididas. Estas actividades ayudan en la comprensión por parte del alumno de la conservación del área de una superficie. El área total que cubre un trozo de papel no cambiará si el papel es cortado en pedazos ni si los pedazos son colocados en formas nuevas.*

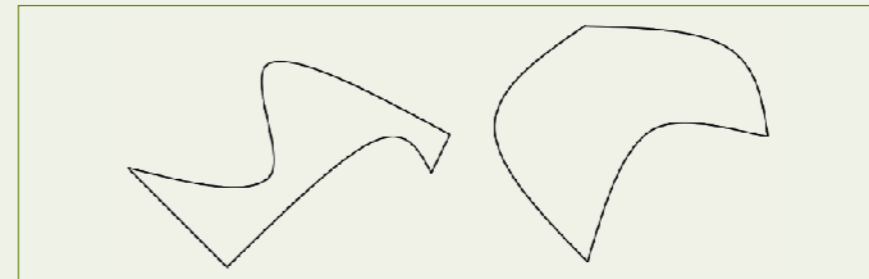


Figura 4.6 ¿Cuál es más grande?

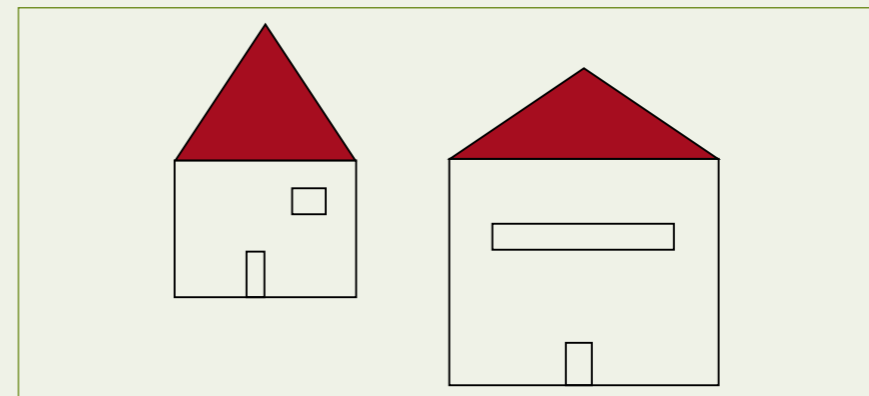


Figura 4.7 ¿Tejado con más pintura?

2. *Emilio y Teo han dibujado dos superficies cerradas como las de la figura 4.6 ¿Cuál de las dos superficies es más grande? Se calcan y recortan las superficies para que los alumnos puedan manipularlas y se pueden cortar los trozos que sean necesarios de una de ella para que la superposición nos dé la solución.*
3. *¿Qué tejado de los de la figura 4.7, lleva más pintura roja? Como en el problema anterior el alumno puede calcar y recortar los tejados.*

Ejercicio para los estudiantes para profesores.

Busca otros problemas en los que el alumno tenga que comparar superficies de la vida cotidiana, como campos de fútbol, jardines,...

4.3. Unidades arbitrarias

La forma unidimensional, al ser más sencilla, es la que utilizamos para comenzar a medir superficies con unidades arbitrarias. Se pueden considerar como unidades arbitrarias las baldosas, distintos cuadrados, rectángulos o triángulos de cartón, papel o plástico, folios de papel,... Vamos a ver una serie de actividades que son recomendables.

Actividades para los alumnos.

1. ¿qué superficie de las de la figura 4.8. es mayor? El alumno estima primero cuál es mayor y luego intenta buscar una medida triangular para medirlas.

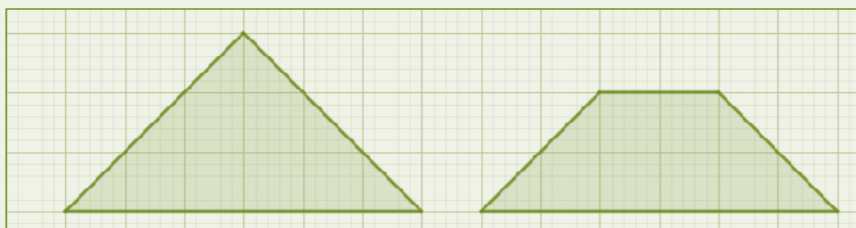


Figura 4.8 ¿Qué superficie es mayor?

Una solución posible sería la que se muestra en la figura 4.9:

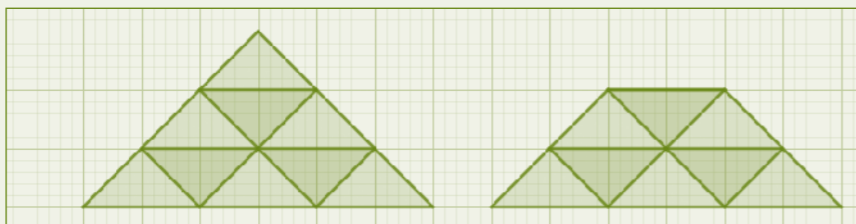


Figura 4.9. Solución.

Por otra parte, ya hemos dicho que la magnitud es una cualidad de los objetos, mientras que la medida es el valor obtenido al comparar el objeto con el objeto unidad, respecto a esa magnitud. El cálculo con medidas unidimensionales debe ser anterior a los cálculos con medidas dimensionales, que nos llevan a la utilización de las fórmulas. El cálculo mediante fórmulas sabemos que es mejor por cuestiones prácticas, pero no se debe nunca olvidar el cálculo directo o unidimensional para que posteriormente le dé sentido a dichas fórmulas.

Reducir inmediatamente las actividades al cálculo mediante fórmulas delimita el verdadero sentido de la magnitud superficie como una cualidad y no como un número, distanciando al alumno de la enseñanza de cantidad de superficie respecto a la unidad de medida elegida y del aspecto lineal de la medida como reiteración de unidades.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

- Demuestra, cortando papel, que un paralelogramo y un rectángulo de la misma base y altura tienen la misma cantidad de superficie.
- ¿Cómo tienen que ser la base y la altura de un trapecio isósceles para que tenga la misma cantidad de superficie que un rectángulo? ¿y si el trapecio es rectángulo? ¿y si es un triángulo?

Actividades para alumnos

Además de estas actividades que hemos planteado, que se pueden hacer en el laboratorio de Matemáticas o en el aula, vamos a trabajar la medida de superficies en los entornos cotidianos que se mueve el alumno.

1. Elige una medida cuadrada. Estima y mide algunas superficies del colegio, elígelas primero en el plano.

Se les suministra un plano (figura 4.10) para que observen y apunten las medidas obtenidas. Como iniciación a la proporcionalidad, los alumnos también pueden medir las áreas correspondientes en el plano y establecer la relación entre áreas del plano y áreas reales.

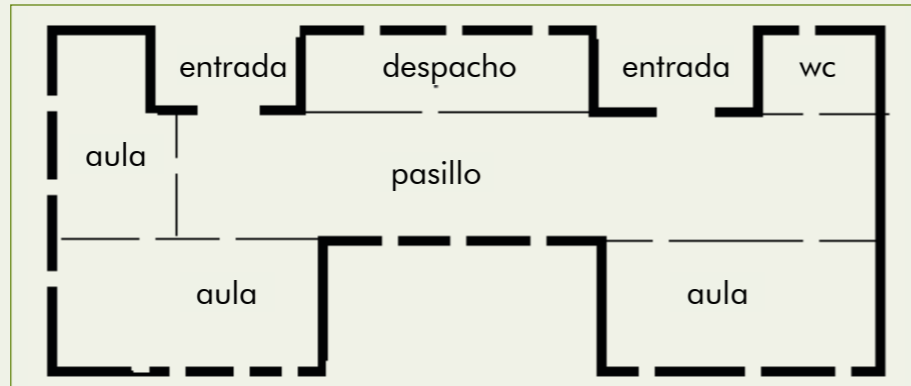


Figura 4.10. Plano ejemplo de un colegio.

1. *Estimación y medida de las superficies del aula. Tomando una medida arbitraria de superficie, los alumnos estiman y posteriormente miden todas las superficies accesibles del aula, como pueden ser: suelo, asientos de sillas, tablero superior y laterales de la mesa del maestro, pizarra, ventanas, etc. Los alumnos miden por recubrimiento total de la superficie y contando las unidades que cubren. Es importante que practiquen tanto con unidades cuadradas, como de otro tipo, por ejemplo, rectangular o triangular, para que su imagen mental de unidad de medida sea más genérica.*
2. *Aprender a estimar por partes. Por ejemplo, una fachada que presenta azulejos, muros cuadrículados, etc. son elementos que ayudan a estimar superficies de una manera más cómoda, mediante la estimación de una parte y multiplicando por un cierto número para realizar la estimación total. Por ejemplo, para estimar la superficie de la clase con la unidad baldosa, se puede recurrir a estimar la mitad o la cuarta parte y luego multiplicar por dos o por cuatro.*
3. *Experimentar y saber llevar mentalmente la medida unidad sobre el objeto a medir. Estimar la superficie de una mesa utilizando una baldosa, la superficie de la pizarra mediante una unidad folio.*
4. *Medimos superficies irregulares: El profesor da una hoja cuadrículada a los alumnos en la que para medir toma la cuadrícula como medida unidad. Pregunta al niño ¿Cuántas cuadrículas crees que mide tu mano? Colócala sobre la hoja cuadrículada y dibújala (figura 4.11). Ahora cuenta las cuadrículas para ver si has hecho buena estimación. Compara tu mano con la de otros compañeros.*

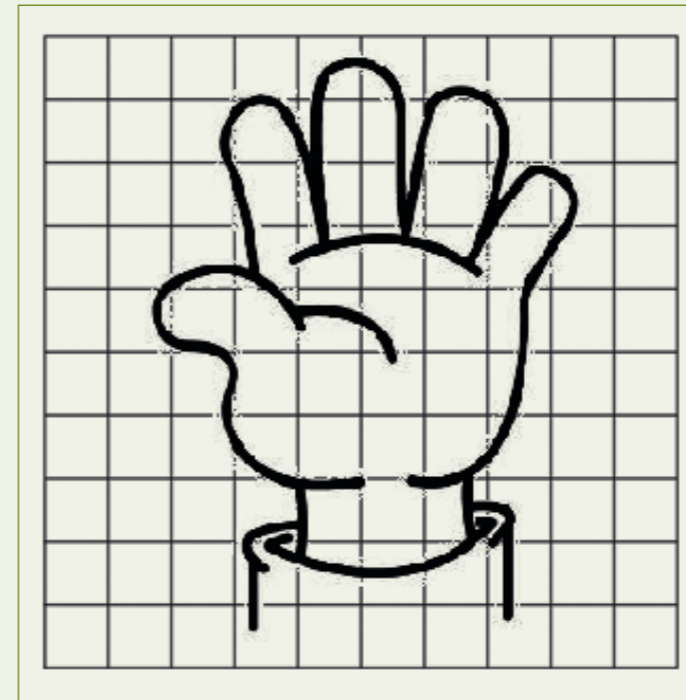


Figura 4.11. Mano en cuadrícula.

Este ejercicio hace que el alumno mida mediante aproximación, que puede ser por defecto o por exceso (medida de superficies curvas), pero además le hace reflexionar sobre la imposibilidad de la medida exacta. Si medimos ahora con cuadrícula pequeña ¿es más o menos exacta esta medida total? El alumno debe observar que si la cuadrícula es más pequeña la medición es más precisa pero nunca exacta.

- **Propiedad inversa de la medida.** Otra propiedad importante que se aprende con la utilización de distintas medidas unidad es que existe una relación inversa entre la unidad de medida y el número de unidades que necesitamos para cubrir una superficie. El descubrimiento de que a mayor tamaño de medida tenemos menos unidades para cubrir la superficie medible y, por tanto, menos exactitud en medida de superficies irregulares, les lleva a reconocer la utilidad de medir una superficie con distintas unidades para llegar a una mejor medida. Estamos sembrando, también, la consideración de la magnitud superficie como una magnitud autónoma, es decir, separación entre la superficie y el número que la mide.

Ejercicio individual para estudiantes para profesores.

- Estimación de medidas de pequeñas superficies mediante unidades arbitrarias como folios, cuartillas, estampas, cromos... Elección de la medida más idónea y verificación posterior mediante recubrimientos. Defina la actividad concreta y enuncie las preguntas que como profesor haría a los alumnos.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

- Inventar y exponer al gran grupo un Sistema Métrico para medir superficies utilizando todo tipo de papel: blanco, cuartillas, tamaños Din,... Establecer las relaciones entre la unidad, sus múltiplos y submúltiplos. Enuncie tres actividades concretas para realizar con los alumnos.

4.4. Materiales para la enseñanza de las áreas: Tangrams y palillos

Vamos a dedicar este apartado a presentar dos materiales importantes en el aprendizaje del concepto de área de una forma manipulativa, de manera que el alumno experimente mediante actividades y de una forma directa dicho concepto.

1. Tangrams

Los puzzles han sido juegos muy aceptados por los niños de todos los tiempos. Ya en la Educación Infantil, el alumno realiza puzzles para reconstruir figuras geométricas, símbolos numéricos,...

El tangram no es un juego milenario como algunos indican sino que apareció posteriormente. Las últimas investigaciones de Jerry Slocum lo sitúan entre

1796 y 1801. Los primeros libros con Tangrams y soluciones aparecen en Europa a principio del siglo XIX. Estos libros tenían muchas propuestas de figuras chinas, animales, casas, flores,...

Durante este siglo, este juego se hace popular en varios países, no solo como un juego de niños, sino también como una diversión de adultos. Actualmente además de ser un juego entretenido para todos, se utiliza como material didáctico para la enseñanza de algunas partes de las Matemáticas como figuras geométricas, medida o fracciones.

El Tangram es un juego (de madera, cartón duro o plástico) formado por un número de piezas a partir de las cuales podemos construir diferentes figuras y, en particular, figuras geométricas. Sin embargo, también se pueden utilizar para el estudio del concepto de área, que es la principal utilización que le daremos en este apartado. Las actividades geométricas ya fueron presentadas y desarrolladas en Barrantes y Barrantes (2017).

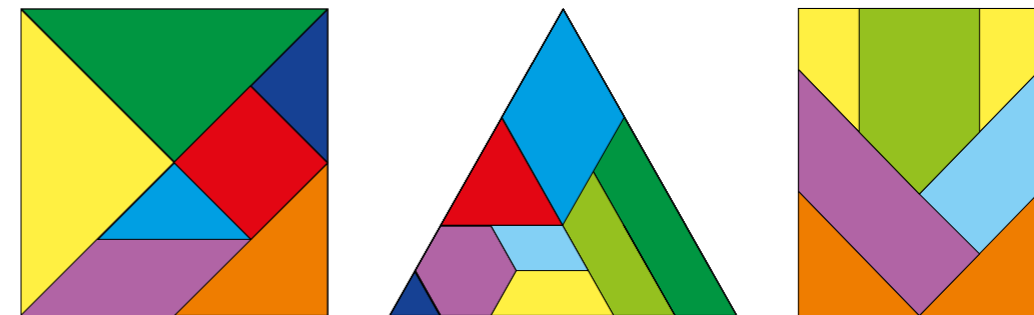


Figura 4.12. Tipos de tangrams: cuadrado, triangular y pitagórico.

Podemos encontrar diferentes tipos de Tangram, que reciben su nombre normalmente de la figura en la que encuadramos sus piezas: Así tenemos: el Tangram triangular que tiene 8 piezas, el cuadrado con 9 piezas y pentagonal y pitagóricos con 7 piezas. Éstos no son todos los modelos de tangram que existen, como podemos comprobar en internet.

Todos los tangram son iguales de útiles en la enseñanza de las áreas. Vamos a desarrollar actividades de los Tangrams cuadrado y triangular, aunque posteriormente trabajaremos los demás tangram planteando actividades para los estudiantes para profesores.

Tangram cuadrado

Empezaremos por la construcción de un tangram cuadrado. Su construcción es fácil (figura 4.13).

- Tomamos un cuadrado de lado AB como el de la figura y marcamos los puntos medios, G, H y F. Marcamos también el punto E central del cuadrado mediante las diagonales del cuadrado. La obtención de las piezas no tiene dificultad teniendo en cuenta que la pieza 3 es un cuadrado de lado FE.

Una vez construidos, vamos ahora a desarrollar una metodología de cómo se utiliza este material. Sería necesario que todos los alumnos tuvieran un tangram, que puede ser de plástico, madera o construido con papel fuerte o cartón.

- En un primer momento, los alumnos se deben familiarizar con este material y para ello, los dejaremos un tiempo de juego libre en el que el alumno manipula el tangram, construye figuras y va poco a poco conociendo las piezas.
- En un segundo tiempo, hacemos actividades dirigidas. Para ello, el alumno se familiariza con las piezas mediante la observación y nombrando el tipo de figuras que constituyen esas 7 piezas, así como su tamaño: único, grande, mediano o pequeño (figura 4.13).

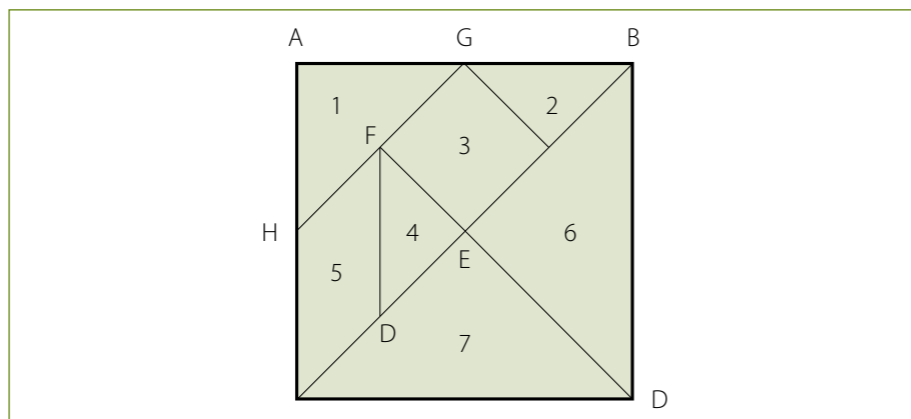


Figura 4.13. Tangram cuadrado.

Podemos observar la importancia que tiene la percepción, la intuición y las imágenes mentales que tengan los alumnos sobre las distintas formas para llevar a cabo estas actividades con éxito.

Podemos iniciar al alumno en el tema de **figuras equivalentes**, es decir, *figuras que tienen la misma superficie*, para ello se pueden plantear actividades como las que siguen.

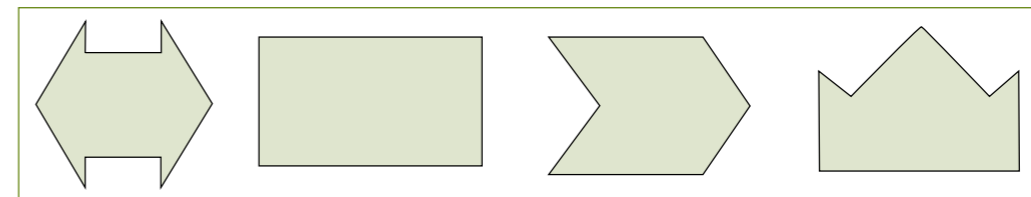


Figura 4.14. Cálculo de áreas.

Actividades para los alumnos.

- Construye varias figuras con un triángulo grande, el paralelogramo, y dos triángulos pequeños. Observar que tienen distintas formas pero todas tienen la misma superficie. Añadimos ahora el cuadrado y construimos figuras como antes. El profesor pregunta a los alumnos si las figuras construidas ahora tienen la misma superficie, y si tienen la misma superficie que las construidas anteriormente.

Con este material se puede estudiar o reforzar el concepto de área. Se puede tomar como medida unidad el triángulo más pequeño y, a partir de éste, obtener las áreas de las demás piezas del tangram. De este modo, llegamos a que:

Los dos triángulos grandes miden cuatro pequeños y el resto de las piezas miden dos triángulos. Podíamos ahora preguntar: *¿cuántos triángulos mide el cuadrado total formado por todas las piezas?*

- Medir las áreas de las figuras 4.14, tomando como medida unidad el triángulo pequeño.

Tangram triangular

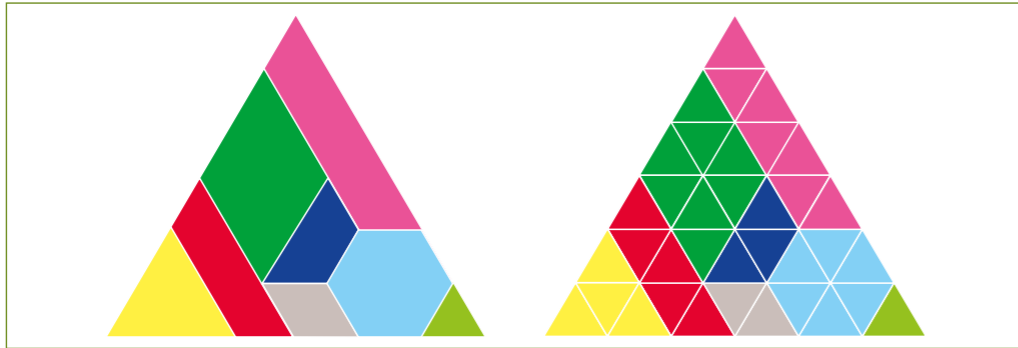


Figura 4.15. Tangram triangular y su triangulación.

Podemos también trabajar con el tangram triangular (figura 4.15), cuyas piezas son las de la figura izquierda. Dicho tangram sale de un triángulo equilátero dividido convenientemente por un triángulo unidad, como muestra la figura de la derecha.

Podemos observar que son ocho piezas, construidas todas a partir de la más pequeña (triángulo pequeño), y que podemos denominar: triángulo pequeño y grande, rombo pequeño y grande, trapecio pequeño, mediano y grande, y exágono.

A diferencia del tangram cuadrado, todas las piezas son diferentes. Este hecho, y que tenga una pieza más que el cuadrado, hace que las figuras sean más difíciles de construir, mejorando así la capacidad mental, la ubicación espacial y el razonamiento del alumnado.

Actividades para los alumnos.

1. Medida de todas las piezas.

- Si damos al triángulo pequeño el valor 1, ¿qué valor daremos a las demás piezas? Elabora una lista con los valores de cada pieza.
- Si damos al rombo pequeño el valor 1, ¿qué valor daremos a las demás piezas? Igual se puede hacer con las demás piezas.

Esta actividad es una práctica interesante, en primer lugar porque se trabaja con unidades triangulares a las que los alumnos no están acostumbrados. Al manejar distintas unidades, el alumno descubre el valor tan considerable que tiene la medida unidad para obtener el resultado numérico de la "medida final" de la figura correspondiente. El alumno experimenta cómo a unidades de medida distintas obtenemos valores distintos de la medida de un mismo objeto. Dependiendo de la unidad elegida se trabaja con números naturales o fraccionarios.

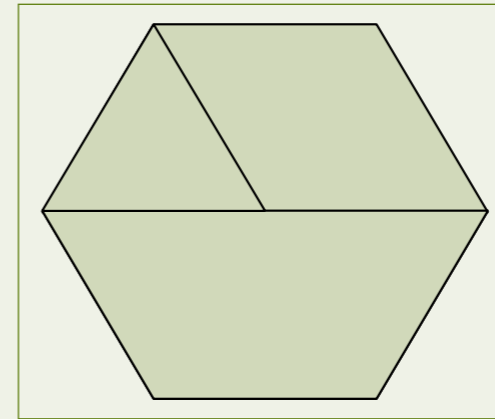


Figura 4.16. Exágono construido con piezas del tangram triangular.

2. Figuras equivalentes. Se puede estudiar también el concepto de figuras equivalentes.

- Forma una figura con dos, tres, cuatro, ..., piezas y halla su área. Después, forma una figura distinta con las mismas piezas e igualmente halla su área. Medir las dos figuras con la misma unidad ¿qué ocurre? Da una explicación.
- Construimos un exágono con el triángulo pequeño, el rombo pequeño y el trapecio pequeño, como el de la figura 4.16. Con estas mismas piezas puedes construir otra figura. Nombra dicha figura y calcula el área ¿Qué relación existe entre las dos áreas? ¿Podemos decir que son equivalentes? Construye otras figuras con estas piezas y observa que su área es siempre la misma.
- El profesor da una figura geométrica determinada y pide al niño que forme una figura equivalente.

- Dadas una serie de figuras, hallar el área de las mismas y deducir las que son equivalentes.
- Construye un trapecio que llamaremos T con las cinco piezas: el triángulo pequeño y mediano, trapecio pequeño y mediano, y rombo pequeño.
- Construye un triángulo que llamaremos A con el triángulo pequeño, y los tres trapecios. Son figuras equivalentes T y A ¿por qué?
- Construye una figura que llamaremos F que no sea equivalente al trapecio T ¿es dicha figura equivalente al triángulo A?

3. Actividades para el concepto de perímetro.

El profesor debe trabajar conjuntamente con la superficie el concepto de perímetro. El trabajar con materiales el concepto de perímetro ayuda a que el alumno, mediante el tacto, pueda hacer una diferenciación clara entre las longitudes y las áreas, como distintas magnitudes. Cuando los alumnos trabajan estos conceptos con fichas de trabajo tienen más dificultad en establecer las diferencias ya que las figuras aparecen dibujadas en dichas fichas, y el perímetro no es más que esa línea dibujada en el papel, y que no tocan. Estos alumnos tienen problemas en identificar área y perímetro y adquieren creencias como que a mayor perímetro tenemos mayor área, pues asocian que la medida del área depende de los lados, cuando esto solo ocurre cuando los polígonos son regulares.

Vamos a utilizar en principio hilos o cuerdas de distintos colores. Se rodean las distintas piezas del Tangram con hilos de colores y se corta el hilo. Comparamos dos a dos las longitudes obtenidas. Y entre todas las piezas del Tangram, buscamos la de perímetro más grande, las que son iguales en perímetro y la más pequeña. Se puede proceder igual con composiciones hechas con dos o más piezas del tangram.

Actividades para los alumnos.

- Elige cuatro piezas del tangram triangular de ocho piezas. Construye con ellas figuras geométricas. Dibuja en una trama triangular dichas figuras. Calcula el perímetro midiendo con hilos de colores o con regla, tomando como unidad el lado del triángulo-trama y calcula el área tomando como

unidad el triángulo de la trama. Construye una tabla en la que anotarás el nombre de la figura, el perímetro y el área. Observa las propiedades que tienen en común y en qué se diferencian. Por ejemplo, tienen el mismo perímetro,...

- Toma las ocho piezas del tangram y calcula su área y su perímetro y construye una tabla como la anterior ¿qué observas ahora? ¿Existen figuras con el mismo perímetro y distinto área? ¿y viceversa?

Actividades para grupos de estudiantes para profesores.

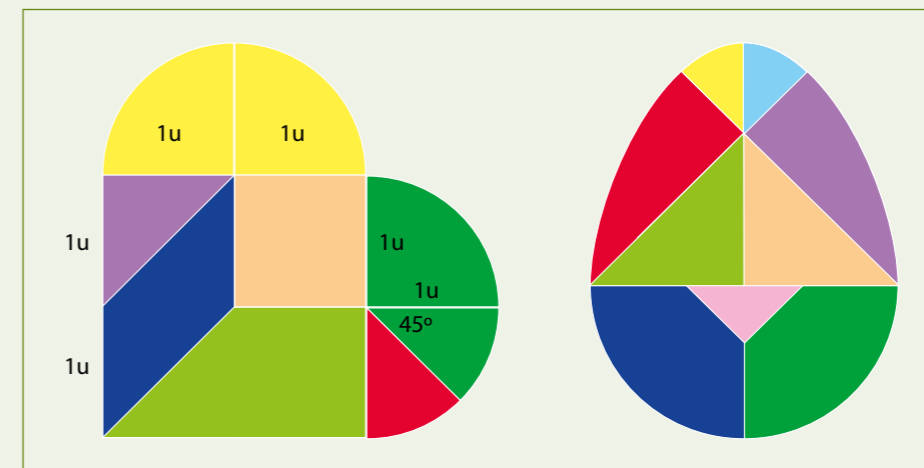


Figura 4.17. Tangram corazón y tangram ovoide.

- Cada grupo va a hacer un estudio de cada uno de los tangram, similar al que hemos hecho anteriormente, cuyas líneas de trabajo pueden ser:
 - 1º Investigar de forma libre las posibilidades del tangram elegido relacionadas con el tema de medida.
 - 2º Estudiar qué conceptos del currículo escolar de Primaria podemos estudiar con dicho tangram. Elaborar algunas actividades muestra de dichos conceptos y presenta algunas actividades.

Los Tangrams objetos de estudio son los nombrados anteriormente (figura 4.12) añadiendo los tangrams corazón y ovoide (figura 4.17)

2. Palillos

Los palillos son un material sencillo y barato que podemos utilizar para la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométrica y de longitudes, en particular el perímetro. Con los palillos, los alumnos pueden trabajar los conceptos de segmentos y su clasificación. También pueden construir todos los tipos de ángulos, clasificarlos y estudiar su medida.

Es un material importante para el estudio del área como espacio vacío delimitado, en nuestro caso, por los palillos.

Existe un gran número de pasatiempos y actividades para realizar con palillos que desarrollan en el alumno su pensamiento lógico, pero nuestro estudio, aunque no ignora estas actividades, se centra más en aquellas en las que trabajemos algún contenido del currículo de Primaria.

La construcción de los polígonos es también tarea sencilla, así como el cálculo de sus áreas considerando como unidad de medida el área cuadrada formada por cuatro palillos o bien el área triangular formada por tres palillos. Los palillos son un material idóneo para trabajar las fracciones, y en Secundaria, el teorema de Pitágoras y las semejanzas.

Planteamos o proponemos, a modo de muestra, algunas actividades centrándonos en el tema que nos ocupa, que son las medidas de superficies, aunque también trabajaremos el concepto perímetro conjuntamente para que el alumno aprenda a diferenciarlos.

Actividades para los alumnos.

- En la figura 4.18 intenta quitando dos palillos obtener dos cuadrados ¿cómo se relacionan sus áreas? Se toma como unidad la unidad cuadrada.
- En la figura 4.19, quitando tres palillos intentar obtener un solo triángulo. Tomando como unidad la unidad triangular ¿cuánto mide el área de ese nuevo triángulo?
- En la misma figura si retiras dos palillos puedes obtener dos triángulos. Mide sus áreas.
- Quitando tres palillos convierte la figura en un rombo y un triángulo. Relaciona el área del rombo y del triángulo.
- En la figura 4.20 formada por palillos podemos ver triángulos y un exágono central. Mueve dos palillos para que todas las figuras sean triángulos, luego calcula el área de los triángulos en unidades triangulares.
- Formamos la figura 4.21 con doce palillos
- Descubre por lo menos cuatro formas geométricas en dicha figura ¿Cuánto mide el área de dicha figuras, tomando como medida la unidad triangular ¿Cuánto mide el área de la figura total?
- Quitando cuatro palillos forma solamente tres triángulos equiláteros. Mide sus áreas.
- Quitando dos palillos observa qué formas quedan. Las formas son distintas según los palillos que quitamos, pues haz una lista de las posibilidades que encuentres y calcula el área de las figuras resultantes.

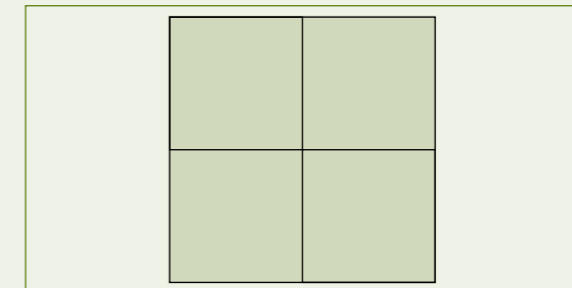


Figura 4.18. Quitando dos palillos obtener dos cuadrados.

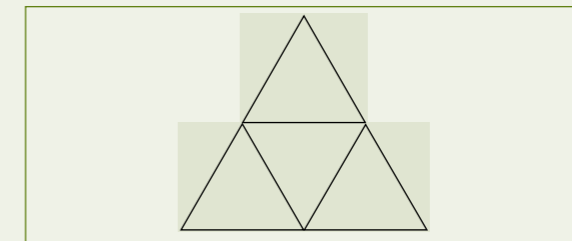


Figura 4.19. Quitando tres palillos obtener un solo triángulo.

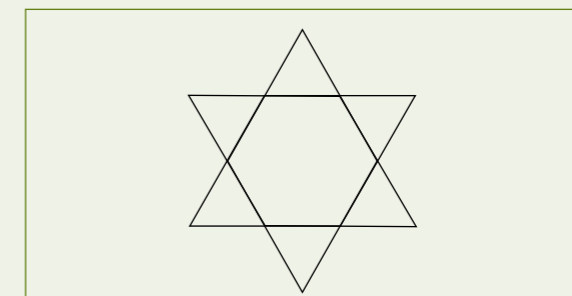


Figura 4.20. Mueve dos palillos para que todas las figuras sean triángulos.

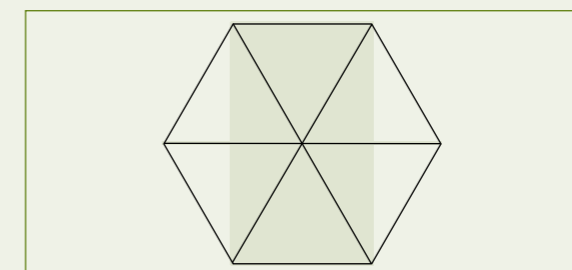


Figura 4.21. Descubre cuatro formas geométricas.

6. A partir de la figura 4.22 formada por tres rombos. Quita dos palillos y mueve otros dos para formar figuras. Expresa el nombre de las figuras formadas y su área.

7. Si tomamos 18 palillos podemos construir el triángulo de la figura 4.23.

Retira 6 palillos y observa las figuras que vas obteniendo. Dí su nombre y su área. Repite la operación retirando otros distintos.

■ En la figura 4.24, mueve seis palillos para que te queden seis triángulos y otra figura. Dime qué figura es la que sale y calcula su área.

■ Coloca 17 palillos como en la figura 4.25, formando un rectángulo cuya área es $6 u^2$.

a) Quita 1 palillo de manera que el área de la figura resultante sea $5 u^2$.

b) Quita 2 palillos de manera que queden $5 u^2$.

c) Quita 3 palillos de manera que queden $4 u^2$.

Estudia en cada caso el tipo de polígono que se ha formado.

■ Formamos un cuadrado con doce palillos. ¿Cuál es el área de este cuadrado en unidades cuadradas? Construye con estos doce palillos distintas figuras de área 5, 4 y 3 unidades cuadradas. Indica de qué tipo son las figuras construidas.

Planteamos una última actividad, como refuerzo, en la que se presentan diferentes unidades de medida para calcular el área de una figura. Con este tipo de ejercicio se afianza la idea de unidad genérica, no necesariamente cuadrada, y además que el valor de la medida depende claramente de la unidad de medida a utilizar.

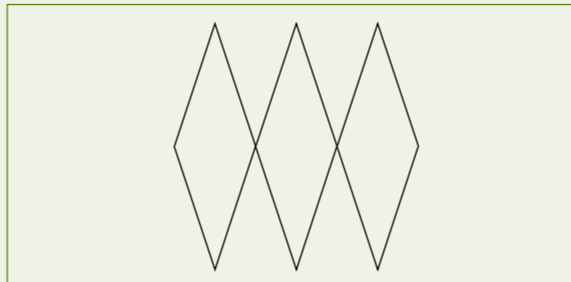


Figura 4.22. Quita dos palillos y mueve otros dos para formar figuras.

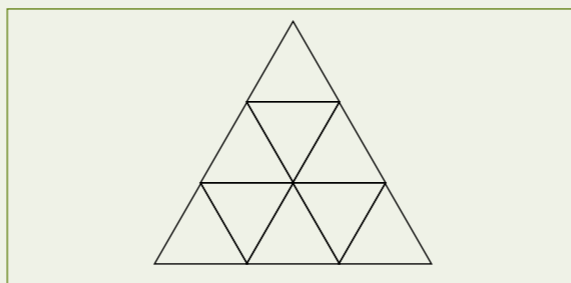


Figura 4.23. Retira 6 palillos y nombra las figuras que aparecen.

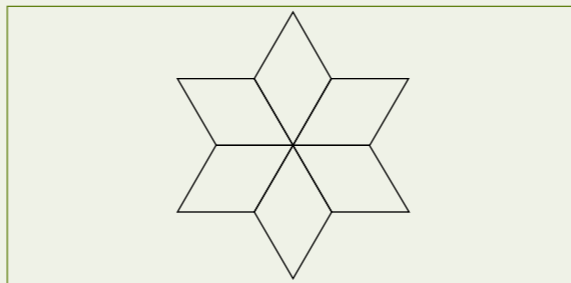


Figura 4.24. Mueve seis palillos para que te queden seis triángulos y otra figura.

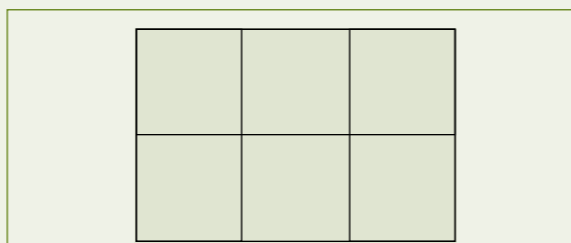


Figura 4.25. Quita un palillo de forma que el área de la figura resultante sea $5 u^2$.

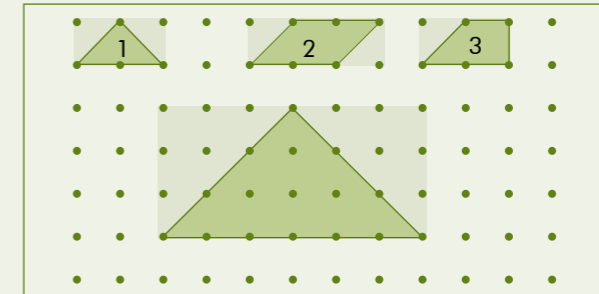


Figura 4.26. Medida con distintas unidades.

■ Calcula cuántas figuras 1, cuántas figuras 2 y cuántas figuras 3 caben en el triángulo inferior (figura 4.26). Completa la tabla siguiente:

Figuras	(unidad 1)	(unidad 2)	(unidad 3)

El alumno debe observar si caben exactamente o no. El profesor puede animar al alumno para que si no se puede hacer con una sola utilice dos o más unidades.

Todas las actividades anteriores deben llevar al alumno, guiado por su profesor, a la necesidad de una unidad de medida entendida por toda la comunidad. Para llegar a ello, debemos forzar una conversación en la que los alumnos expresen la medida de un objeto en unidades arbitrarias, por ejemplo, la superficie de la puerta en libretas de Juan, de Luis o de Miguel. Como los tamaños de las libretas son distintos entonces la puerta medirá 15 libretas, 20 libretas, 18 libretas respectivamente. Se planteará entonces un debate en el que surja la necesidad de utilizar todos la misma medida para poder entendernos, no solo en la clase sino a nivel de todas las personas con las que nos comunicamos. Dando lugar al paso de las unidades arbitrarias a las unidades convencionales.

4.5. Unidades convencionales de medida de superficie

Llega el momento de presentar las unidades convencionales. Recordemos que es conveniente comenzar por aquellas unidades más asequibles y más manipulables por los alumnos. En este caso, sería el dm^2 y el cm^2 y el m^2 .

En general, los documentos oficiales recomiendan que el alumno mida, con datos reales, objetos de la vida ordinaria. Por ello, sería conveniente comenzar con medida de objetos que sean medibles fácilmente y no causen tedio o aburrimiento en los alumnos. Pueden medir folios o medir una superficie-suelo, mesa, pupitre,... no muy grande utilizando cm^2 , dm^2 y m^2 , eligiendo la medida acorde con el tamaño del objeto a medir. Una vez obtenidos los resultados, observarlos y establecer relaciones.

En esta etapa, es importante también seguir utilizando la estimación antes de realizar la medida concreta. Los ejercicios de estimaciones se pueden hacer de diferentes formas:

1. El alumno ve la superficie y también la unidad de medida a utilizar.
2. El alumno ve la superficie pero tiene oculta la unidad de medida, la ve un tiempo limitado anterior a la estimación.
3. El alumno no tiene delante la superficie a medir, la ve durante un tiempo limitado y anterior a la estimación, pero sí tiene delante la unidad a utilizar.
4. El alumno no tiene delante ni la superficie ni la unidad, las ve un momento anteriormente a la estimación.

Estas actividades le ayudan a interiorizar el concepto de medir con la unidad adecuada y le posibilitan para utilizar estas estimaciones en su vida escolar.

Actividades para los alumnos.

El alumno trabaja en esta etapa recubriendo la superficie a medir con la unidad utilizada. Para ello el profesor debe tener suficientes patrones de dm^2 , cm^2 , m^2 , de madera, cartulina u otros materiales.

- Dada una superficie de cuatro decímetros cuadrados buscar superficies que tengan una medida aproximadamente igual. Se puede realizar con la medida decímetro cuadrado presente o no presente. Comprobar si ha sido buena la búsqueda realizando la medida.
- Repetir el ejercicio con 10 centímetros cuadrados. Para ello el alumno coloca sobre la mesa los 10 centímetros cuadrados en distintas posiciones antes de buscar los objetos.

A la vez, es esencial que el profesor realice actividades para que el alumno descubra por sí mismo las relaciones entre las diversas unidades, es decir, que un metro cuadrado tiene 100 decímetros cuadrados, para que le sea más fácil aprender posteriormente las tablas de equivalencias. Nunca deben aprenderse las tablas de equivalencias sin haberlas experimentado antes suficientemente.

La idea es que el alumno descubra por sus propios medios los múltiplos y submúltiplos, acostumbrándole a expresar la medida con la unidad adecuada a cada medición; y para ello, es bueno hacer siempre estimaciones antes de medir. Una tarea posterior es realizar estimaciones de una misma medición con distintos múltiplos o submúltiplos, para que vaya relacionando las distintas medidas de la escala métrica.

Otras veces, los profesores proponen ejercicios de cálculo de superficies tales como la medida del patio del colegio, campos de deportes o plazas que no se llegan a medir en realidad sino que mediante una medida unidimensional se transforman en la medida de un cuadrado, un rectángulo o un círculo dibujado sobre un papel. De esta forma, el alumno no realiza actividades de medida, sino que pasa directamente del

mundo de la medida (espacio medible) al mundo de los números donde se obtienen las medidas (números reales) y donde el alumno solamente trabaja realizando cuentas, adquiriendo una concepción falsa de la medida auténtica.

Al realizar la medida de forma real, el alumno puede observar la necesidad de tener que utilizar una medida mixta para medir superficies. El alumno observa que no puede medir exactamente una alfombra grande si utiliza solamente el metro cuadrado. Mide en metros cuadrados y le queda un espacio sobrante. Para llenar ese espacio observa que puede utilizar medidas más pequeñas como el decímetro cuadrado y en su defecto el centímetro cuadrado. De esta forma el alumno va adquiriendo la noción de medir no solamente con una unidad grande sino con una medida mixta, en la que utilizamos distintos múltiplos o submúltiplos.

El alumno puede realizar las medidas mixtas de dos formas. Las primeras medidas las puede realizar el alumno por superposición de la superficie a medir mediante varios metros cuadrados, decímetros y centímetros cuadrados de cartulina, madera, etc. que va colocando sobre la superficie hasta cubrirla toda. Después, el profesor puede enseñarle a medir utilizando una sola unidad de cada una, es decir, un solo metro cuadrado, un solo decímetro y centímetro cuadrado del material correspondiente. Esto es dificultoso, al principio, para muchos alumnos.

Por último, añadir que todas las actividades que se realizan con unidades arbitrarias se pueden realizar también con unidades convencionales de superficies. Así pues el profesor debe diseñar tareas en las que los alumnos expresen con varias unidades distintas la misma medida, relacionando múltiplos con submúltiplos y favoreciendo el aprendizaje del cambio de unas unidades a otras.



4.6. Estrategias para la enseñanza de las áreas de las figuras planas mediante medidas unidimensionales

Basándonos en la metodología activa, el trabajo o actividad a realizar sería el cálculo de las áreas de las principales figuras planas a partir de lo que ya conocemos.

El material a utilizar sería el geoplano o las tramas, que es una representación del geoplano mediante puntos en una hoja de papel. El alumno dibuja, realiza, acierta o se equivoca, borra, busca...

Realizamos en primer lugar actividades de cálculo de áreas y perímetros con el geoplano. Algunas actividades con el geoplano o con papel punteado pueden ser:

Actividades para los alumnos.

1. *Calcula el área de estas figuras (figura 4.27) en unidades cuadradas y el perímetro en unidades lineales tomando como unidad lineal el lado del cuadrado unidad.*
2. *¿Tienen alguna el mismo perímetro o área? ¿Las que tienen el mismo área tienen el mismo perímetro?*

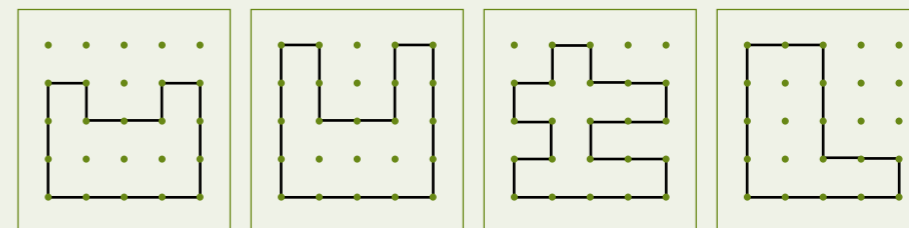


Figura 4.27 ¿Igualdad de áreas implica igualdad de perímetros y viceversa?

- Haz, en el geoplano, 5 figuras que tengan el mismo área pero su forma sea distinta. Igualmente, 5 figuras que tengan el mismo perímetro pero de distinta forma.
- Construye 3 cuadrados y 3 rectángulos en tu geoplano y calcula su área mediante un método que no sea contar los cuadrados uno por uno. Por ejemplo, contando las filas y las columnas, completa para ello la tabla de la figura 4.28.

Rectángulo	Longitud base	Longitud altura	área
A			
B			
C			
D			
E			
F			

Figura 4.28. Tabla de cálculo de áreas de rectángulos.

Mediante esta actividad, el alumno relaciona las unidades cuadradas que cubren el rectángulo con la longitud de la base (número de columnas) y la longitud de la altura (número de filas).

3. Área del cuadrado y del rectángulo.

Calcula el área de los rectángulos de la figura 4.29. Extrae conclusiones sobre la manera de calcularlo.

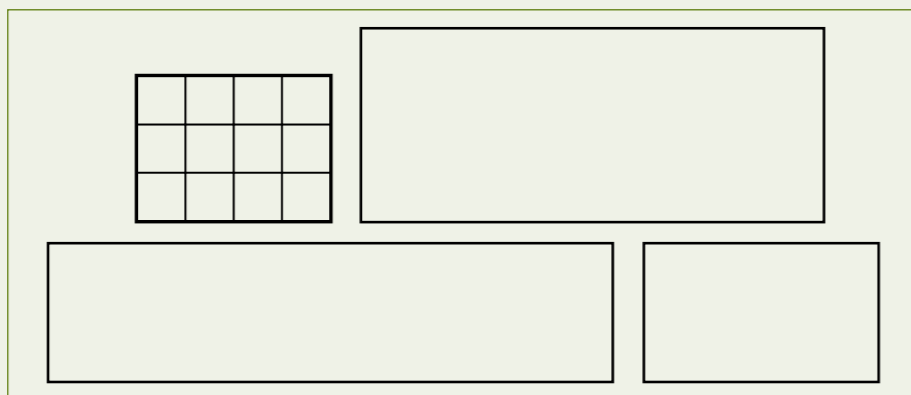


Figura 4.29. Calcular el área de los rectángulos.

Partimos de que el alumno ya ha aprendido a calcular el área del cuadrado y el rectángulo a través del geoplano y el papel punteado, mediante la toma de una unidad cuadrada que se superpone sobre la superficie a medir, o contando cuántas veces está dicho cuadrado unidad contenido en dicha superficie. Si empezamos por el cálculo de áreas pequeñas y luego pasamos a áreas mayores como la de la figura 4.30, obligamos al alumnado a buscar métodos alternativos para evitar el aburrimiento de contar una por una las unidades. Esta búsqueda les puede llevar al cálculo del área de forma bidimensional y obtener que el área se puede calcular multiplicando lado por lado o lo que es lo mismo base por altura (figura 4.30).

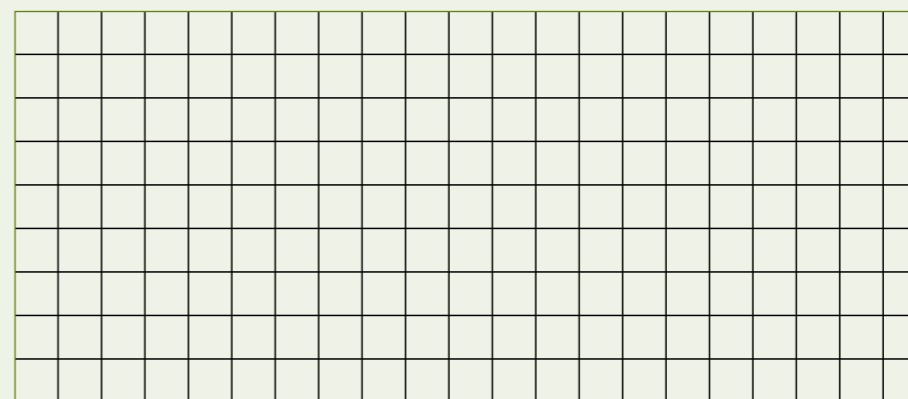


Figura 4.30. Área igual a base por altura.

4. Área del paralelogramo.

Hacemos, en primer lugar, en el geoplano o tramas, ejercicios del tipo:

- Calcula el área del paralelogramo y el rectángulo del papel punteado dados en la figura 4.31 ¿qué observas? ¿Puedes transformar el paralelogramo en el rectángulo? Si lo has hecho en papel punteado puedes recortarlo para la transformación.

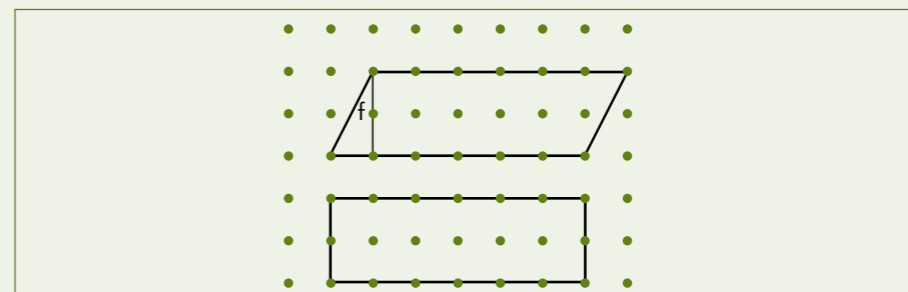


Figura 4.31. Transformación del paralelogramo en rectángulo de igual área.

Tomamos como punto de partida lo que el alumno sabe del ejercicio anterior: el área del rectángulo. $\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}$

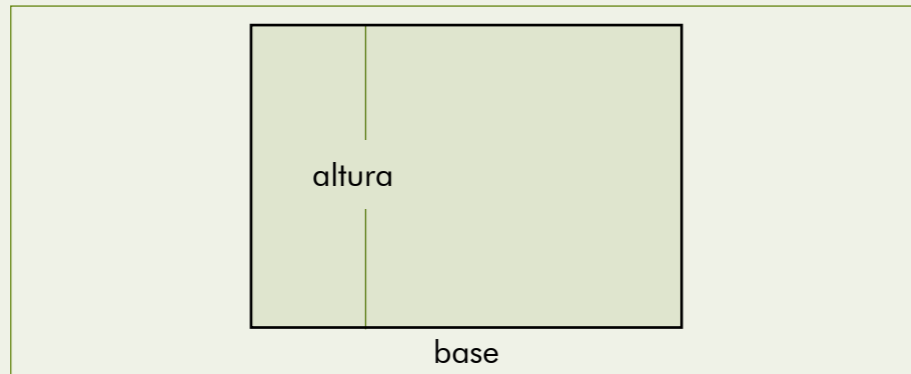


Figura 4.32. Área del rectángulo.

y queremos calcular el área del paralelogramo.

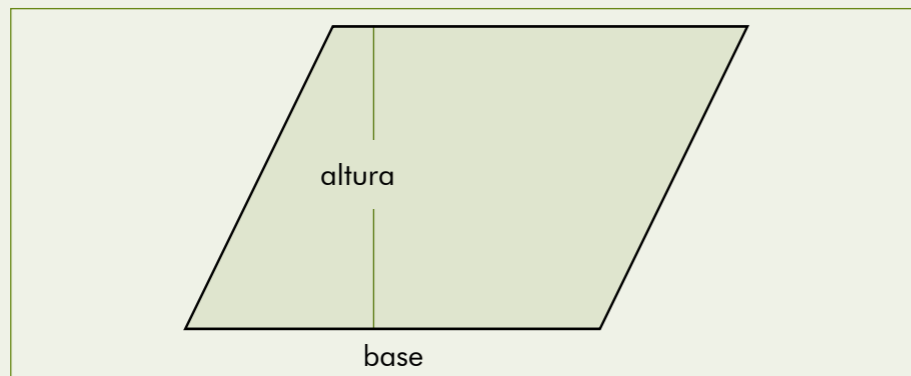
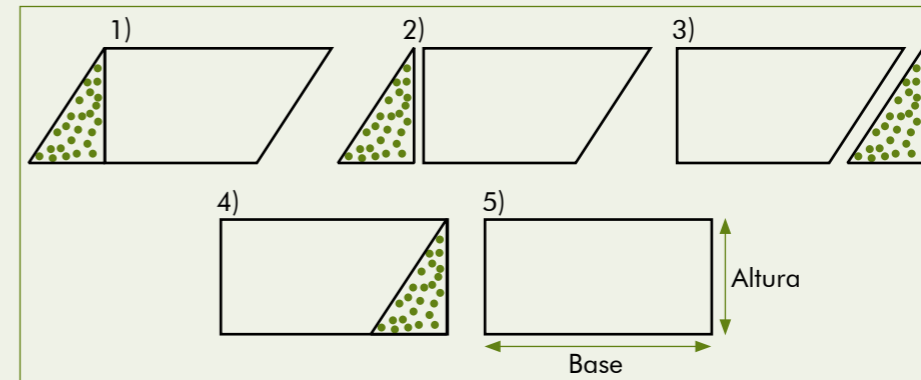


Figura 4.33. Área del paralelogramo.

Para realizar la exploración, el profesor invita al alumno a convertir el paralelogramo en un rectángulo, recortando o trazando áreas equivalentes. También se puede hacer en el papel punteado, dibujando. El alumno a partir de estas informaciones busca e investiga. Una forma para obtener la solución puede ser la siguiente (figura 4.34).

De esta forma, los alumnos prueban que el área del paralelogramo se calcula igual que el área del rectángulo

$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}.$$



Figuras 4.34. Transformación del paralelogramo en rectángulo de igual área.

Este ejercicio se debe hacer también con medidas numéricas hasta que el alumno descubra la generalidad. Después realizamos actividades de refuerzo como las siguientes:

- Toma las medidas necesarias de este rectángulo y este paralelogramo para calcular sus áreas (figura 4.35). Antes de calcularla se les pregunta: ¿son distintas? ¿por qué?

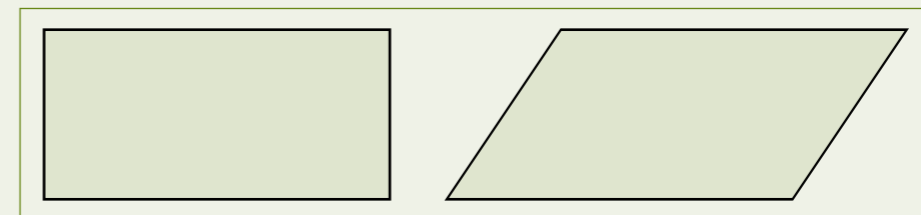


Figura 4.35. Comparación de áreas a partir de los datos.

5. **Área del triángulo.** Hacemos ejercicios previos en el geoplano.

- Construye en el geoplano un rectángulo como el dado (figura 4.36) y dos triángulos A y B. Calcula el área del rectángulo y de los triángulos y relaciónalos.

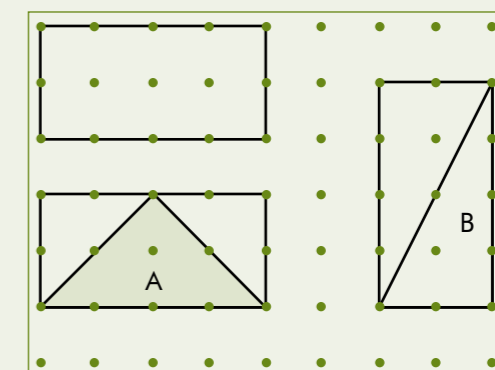


Figura 4.36. Área de triángulos.

El alumno observa que el área del triángulo es la mitad del área del rectángulo que ya sabe calcular mediante base por altura.

- Construye un paralelogramo y un triángulo con tres vértices comunes (figura 4.37). Calcula sus áreas y compáralas.

Es decir, el profesor tiene en cuenta lo que el alumno sabe que, en este caso, es el área del paralelogramo.

Y, a partir de aquí, el alumno investiga cómo puede calcular el área de un triángulo. El área de este paralelogramo es igual a la base por la altura, luego el área del triángulo punteado será la mitad. Igual a como lo hemos hecho en el papel punteado o en el geoplano (figura 4.38).

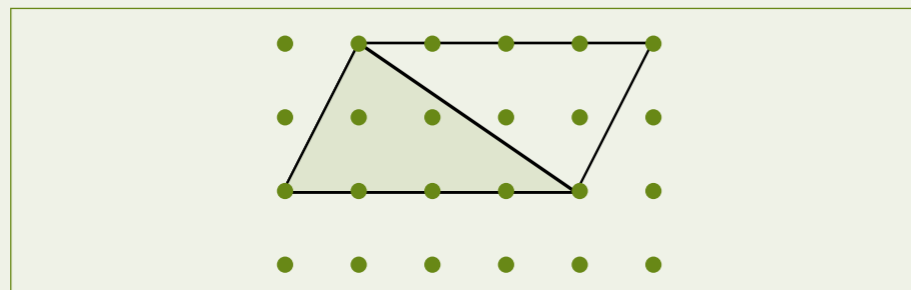


Figura 4.37. Área del triángulo la mitad del paralelogramo.

Creamos en el alumno un conflicto cognitivo, es decir, rompemos el equilibrio inicial de sus esquemas y surge la motivación por el aprendizaje. A partir de la información que tiene el alumno busca e investiga, pudiendo llegar a la respuesta correcta.

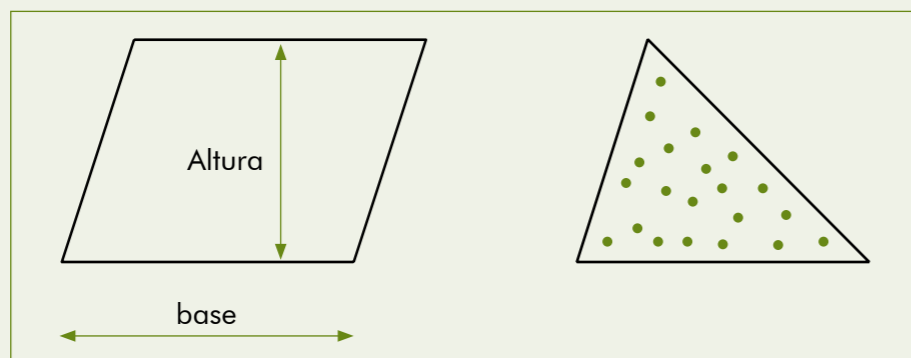


Figura 4.38. Área del triángulo la mitad de la base por la altura.

- También se le puede hacer observar que si dibuja un triángulo igual pero girado 180 grados se forma el paralelogramo y llegamos a la misma conclusión (figura 4.39).

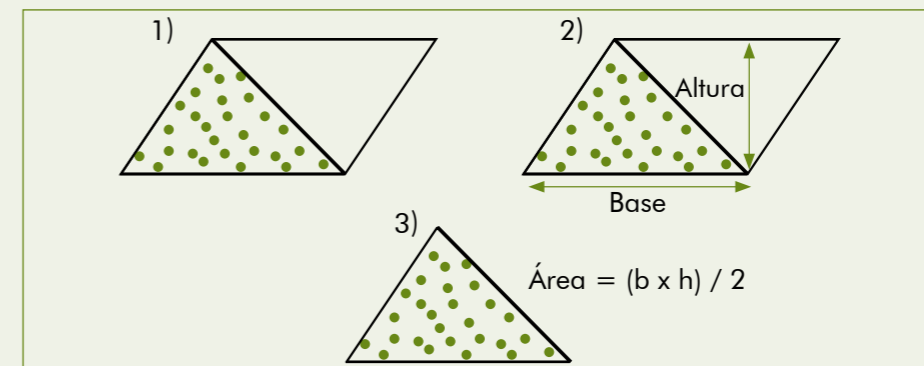


Figura 4.39. Área del triángulo = $(b \times h) / 2$.

Hay otras estrategias para llegar a calcular el área del triángulo que el alumno puede descubrir, por ejemplo:

- Parte el triángulo por la mitad de la altura y gira una de las partes para formar un paralelogramo (figura 4.40). Calcula el área del paralelogramo ¿Es la misma que la del triángulo?

Se forma entonces un paralelogramo de igual base pero de altura la mitad cuya área coincide con la del triángulo. El alumno extrae conclusiones.

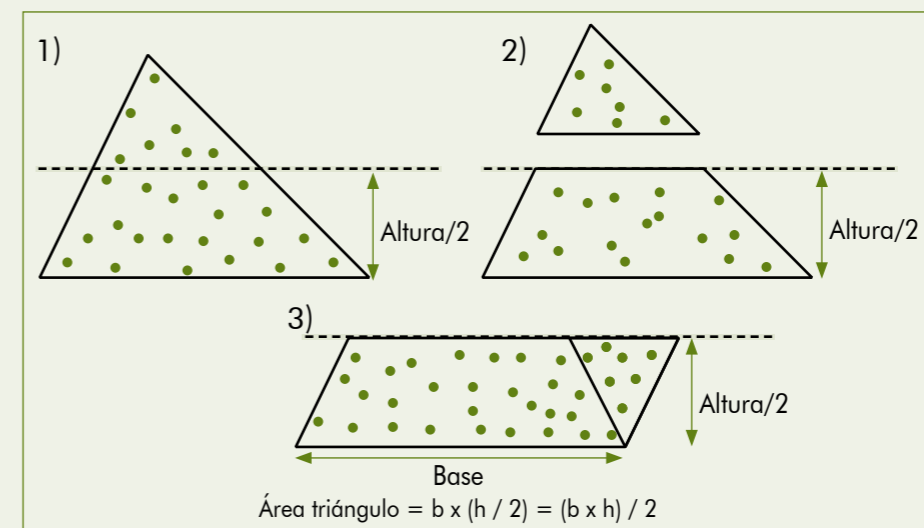


Figura 4.40. Otra forma de calcular el área del triángulo.

Ejercicio individual para estudiantes para profesores.

Probar que los dos métodos son válidos para cualquier triángulo. Probarlo para triángulos rectángulos, y obtusángulos.

Actividades para los alumnos.

Probar la fórmula obtenida para el cálculo del área de los triángulos en la siguiente malla cuadrada (figura 4.41). Realizar el cálculo mediante la fórmula y mediante la unidad cuadrado reticular.

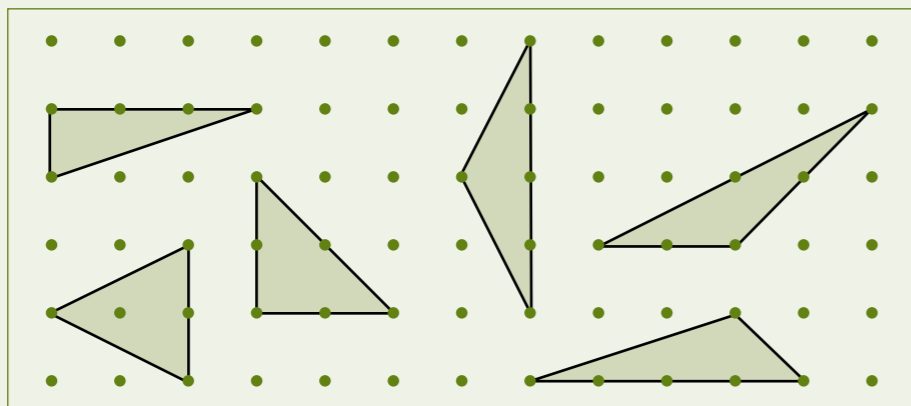


Figura 4.41. Malla para practicar la fórmula.

6. Cálculo del área del rombo a partir del área del rectángulo.

El rombo es un paralelogramo, luego siempre podemos calcular su área conocido el lado y la altura del rombo. Si conocemos sus diagonales, ¿cómo podemos llegar a la famosa fórmula?:

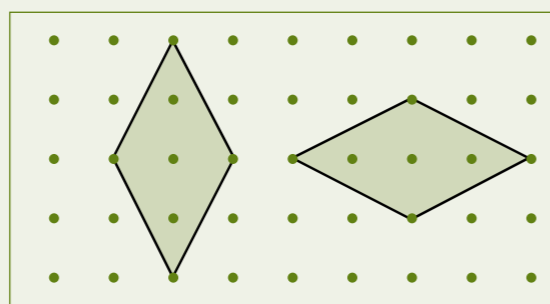


Figura 4.42. Área del rombo.

Área del rombo = (diagonal mayor x diagonal menor) / 2

Pista 1: Partimos del área del rectángulo luego lo que tenemos que hacer es inscribir el rombo en un rectángulo. Prueba en los siguientes rombos inscritos en sus respectivos rectángulos (figura 4.43) y extrae conclusiones.

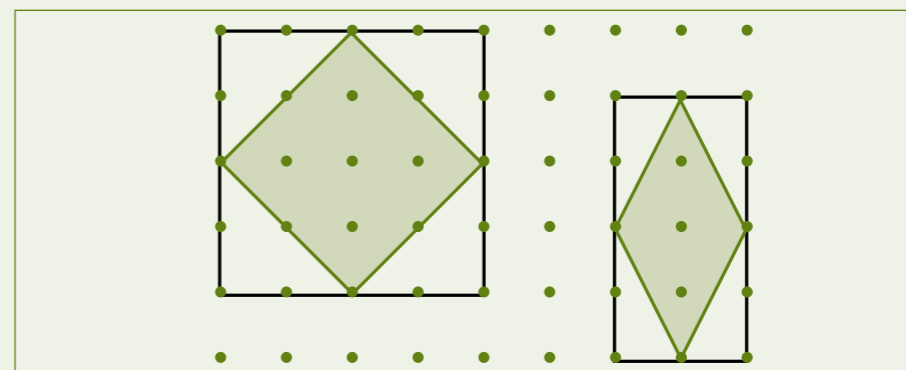


Figura 4.43. Área del rombo a partir del área de un rectángulo.

El alumno debe llegar a que el área del rectángulo es base por altura. Debe observar que la base y la altura del rectángulo coinciden con las diagonales del rombo. Luego, podemos decir, en este caso, que el área del rectángulo es diagonal mayor por diagonal menor. Solo le queda probar que el área del rombo es la mitad de la del rectángulo para obtener la conocida fórmula, basta con comprobar que las áreas 1, 2, 3 y 4 coinciden (figura 4.44).

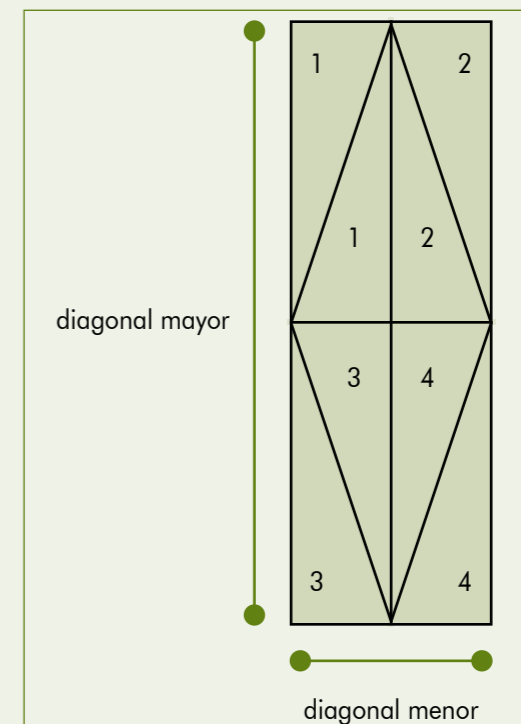


Figura 4.44. Área del rombo como la mitad de la del rectángulo.

■ ¿Se puede calcular el área del rombo partiéndolo por la mitad, como en el caso del triángulo?

7. **Área del trapecio.** Una vez conocidas las dos estrategias de poner dos figuras giradas o partir por la mitad, el alumno no debe tener mucho problema en obtener el área del trapecio.

Actividades para los alumnos.

Pero para ello vamos a hacer algunos ejercicios antes en el geoplano, del tipo:

- *Dibuja en tu geoplano los paralelogramos p1 y p2 y los trapecios A y B (figura 4.45). Calcula las áreas de todos y relaciona la de p1 con A y la de p2 con B. ¿Son las figuras C y D trapecios? Calcula sus áreas y relaciónalas C con A y D con B ¿si giras 180 grados C y D que se obtiene?*

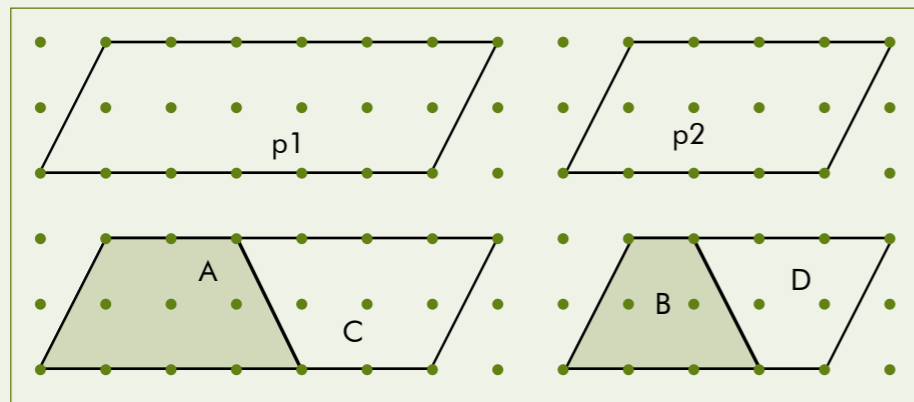


Figura 4.45. Área del trapecio a partir del área del paralelogramo.

- *Igual que en casos anteriores, partimos del trapecio de bases B y b, y de altura h y mediante giro de la figura llegamos a un paralelogramo. ¿Cuál es la base del paralelogramo? ¿Y la altura? Calcula su área ¿Cuál será entonces el área del trapecio?*

Se obtiene que el paralelogramo tiene de base: la suma de las dos bases y la misma altura. Lo mostramos mediante la figura 4.46.

Luego como el área del paralelogramo formado es $(B + b) \times h$, entonces el área del trapecio será la mitad, pues el paralelogramo está formado por dos trapecios iguales.

$$A = ((B + b) \times h) / 2$$

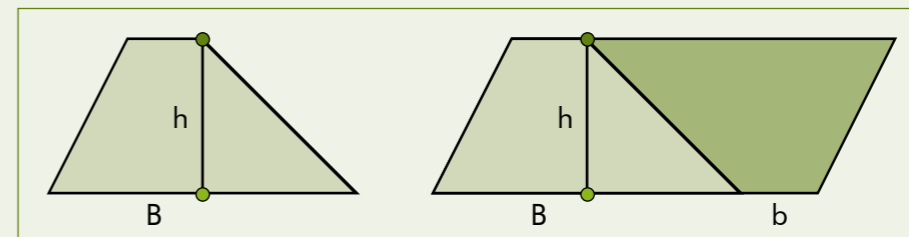


Figura 4.46. Giramos el trapecio y obtenemos un paralelogramo.

Volvemos a incidir en que estas actividades deben realizarse con los alumnos de forma numérica, con ejemplos, hasta que ellos lleguen o puedan comprender la generalidad de la fórmula.

Ejercicio individual para estudiantes para profesores.

1. *Obtener el mismo resultado mediante el método de partir la figura por la mitad y girar.*
2. *Obtener el área del trapecio rectángulo mediante su transformación en un rectángulo, por el método giro de la figura completa y por el método partición por la mitad.*

Hemos, pues, obtenido las áreas de las figuras planas anteriores mediante dos estrategias generales una que consiste en unir a la figura original y su homóloga mediante giro de 180º para formar un paralelogramo o un rectángulo; el otro método consiste en partir la figura por la mitad y girar igualmente una de las partes con el mismo objetivo de formar una figura de área conocida.

Hay una manera más de obtener el área del trapecio a partir del área de un triángulo:

- *Construye el trapecio en el papel punteado y traza una diagonal. Calcula el área de los dos triángulos que se forman (figura 4.47) y tienes el área del trapecio.*

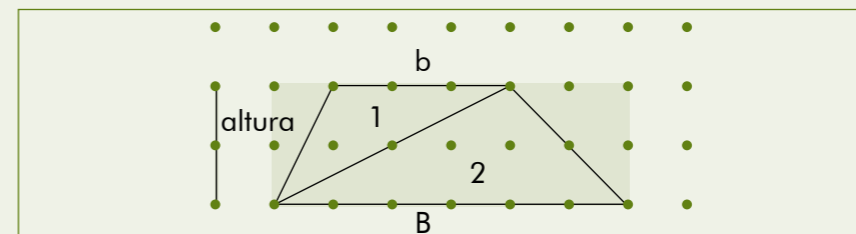


Figura 4.47. Obtener el área del trapecio a partir de esta figura.

Los dos triángulos tienen la misma altura (figura 4.47.) y como bases, las bases respectivas del trapecio, luego sumando las respectivas áreas se obtiene la misma fórmula del área del trapecio, es decir:

$$A_1 = \text{la mitad de } b \times h \quad A_2 = \text{la mitad de } B \times h$$

Sumando las dos obtenemos que el Área del trapecio es la mitad de $(B + b) \times h$.

7. **El área del resto de polígonos.** En general, siempre se puede calcular triangulando la figura sea cual sea la forma del polígono (figura 4.48.). Como ya conocemos cómo calcular el área de un triángulo, siempre podemos calcular el área de cualquier polígono, pues éstos siempre se pueden triangular. Se dice que el triángulo es el ladrillo de las áreas.

Actividades para los alumnos.

- Copia la figura 4.48 en un papel punteado y calcula el área mediante la triangulación de la figura. Para el cálculo mide las bases y las alturas de cada triángulo ¿Se pueden hacer varias triangulaciones? Dan todas las mismas áreas.

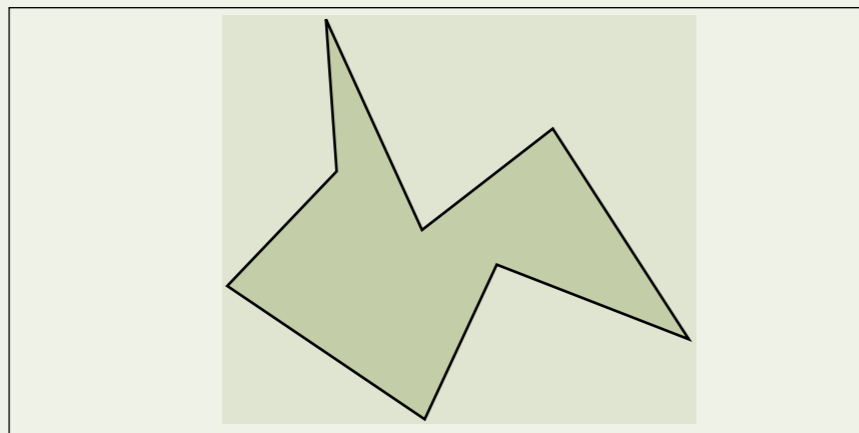


Figura 4.48. Cálculo del área triangulando.

1. **Polígonos regulares.** Hay áreas de polígonos particulares que admiten también una fórmula como las vistas anteriormente que nos simplifica el cálculo. Por ejemplo en los polígonos regulares.

Ejercicio individual para estudiantes para profesores.

Crea un procedimiento para obtener el centro de un polígono regular, dibujando o mediante la utilización de un programa informático como Cabri, o Geogebra.

Actividades para los alumnos.

- Calcula el área del pentágono regular, suponiendo que conoces el lado y la apotema.
- Triangula el polígono desde el centro y calcula el área como suma de las áreas de los triángulos (ver figura 4.49).

Cada triángulo tiene como base el lado y como altura la apotema, luego el área será igual a 5 veces el producto $a \times l$ donde a = apotema y l = lado. Pero como 5 veces el lado es el perímetro, por definición, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= P \text{ es } 5 \times \text{lado. Luego el área total será:} \\ \text{Área} &= \text{la mitad de } 5 \times l \times a = \text{la mitad de } P \times a \end{aligned}$$

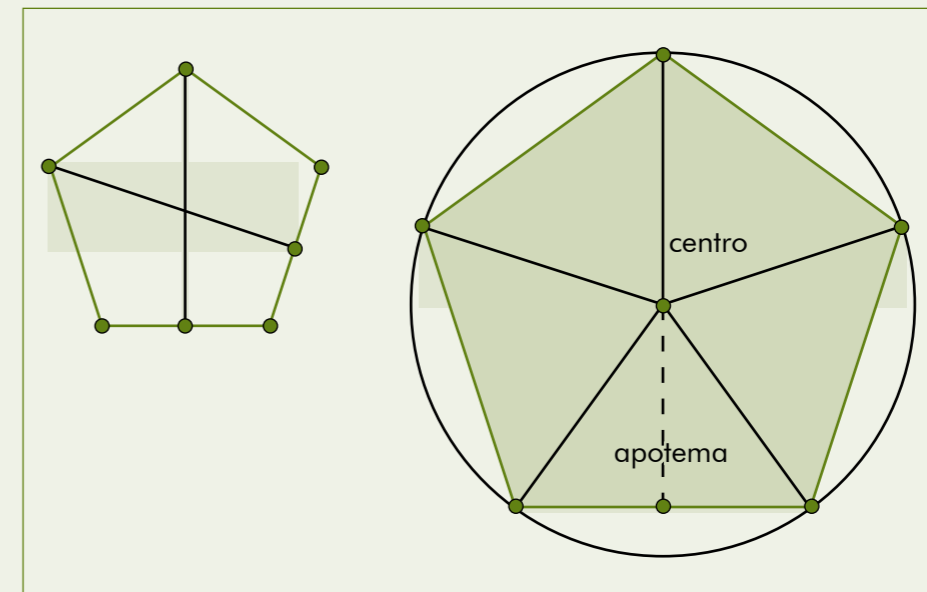


Figura 4.49. Área del pentágono. Búsqueda del centro.

También se obtiene el mismo resultado sumando las áreas de los triángulos que forman el pentágono, como en la figura 4.50. En este caso, el resultado final es un trapecio de base menor 2l y de base mayor 3l y calculando su área: La suma de las bases sería el perímetro, que multiplicado por la mitad de la apotema da la fórmula del área del pentágono igual que antes.

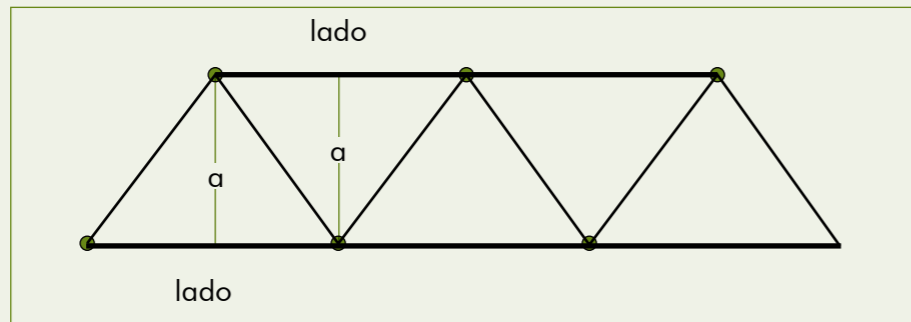


Figura 4.50. Cálculo del área del pentágono a partir de la fórmula del trapecio.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

1. *Aplica la misma metodología para calcular el área del exágono. ¿Qué figura se obtiene si se juntan las áreas de los triángulos como en el caso anterior?*
2. *Estudiar qué ocurre, en general, en cualquier polígono regular al juntar los triángulos para obtener el área. ¿De qué depende que se forme una figura u otra? Da un resultado genérico.*

Luego para todo polígono regular, el área es la conocida fórmula "perímetro por apotema partido por dos".

$$\text{Área polígono regular} = \text{la mitad de } P \times a$$

La última actividad sería:

Actividad para los alumnos.

- *Realizar un informe que resuma todas las áreas obtenidas y la manera de obtenerlas.*

4.7. Actividades de refuerzo

Vamos a proponer algunas actividades de refuerzo en las que se calculan áreas de figuras con los lados curvos mediante las áreas conocidas de los polígonos y una adecuada transformación. En estas actividades, además de conocer las áreas, el alumno tiene que desarrollar la visualización y la percepción de los objetos.

En el primer caso se trata de:

a. Descomposición de la figura y acoplamiento.

Primeramente, proponemos ejercicios de cálculos de áreas en los que primero hay que descomponer la figura en las partes convenientes y acoplarlas de forma que el cálculo de la nueva superficie equivalente sea conocido.

Actividades para los alumnos.

1. *¿Cómo calcularías el área de la primera figura 4.51?*

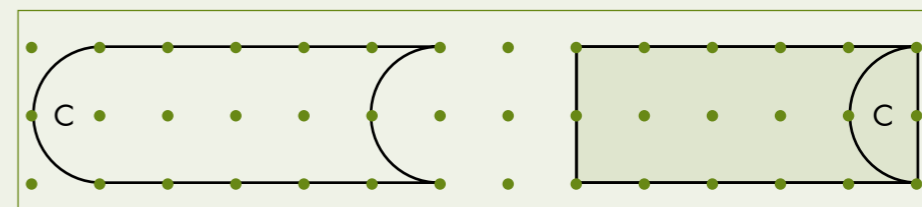


Figura 4.51. Cálculo por descomposición y acoplamiento.

La solución pasaría por recortar el medio círculo y formar el rectángulo de la segunda figura 5.36. Dicho rectángulo es ya fácilmente calculable con lo que sabe el alumno.

Aquí tenemos otros ejemplos más en las que se usa la misma estrategia.

2. Transforma el rombo de la figura 4.52 en un rectángulo que tenga igual área. Calcula el área rombo.
3. Transforma la figura 4.52 sombreada, mediante descomposición de partes y acoplamiento, en una figura que sea suma de cuadrados o rectángulos en la que sea más sencillo calcular su área.
4. Idem la figura de la bailarina y del jarrón.

Si observamos bien estas dos figuras últimas, descomponiendo las figuras en los trozos adecuados y luego volviéndolas a componer pueden evitarse tanto las zonas angulosas (bailarín) como las zonas curvas (jarrón) convirtiendo las figuras en otras de áreas ya conocidas por los alumnos, que es de lo que se trata.

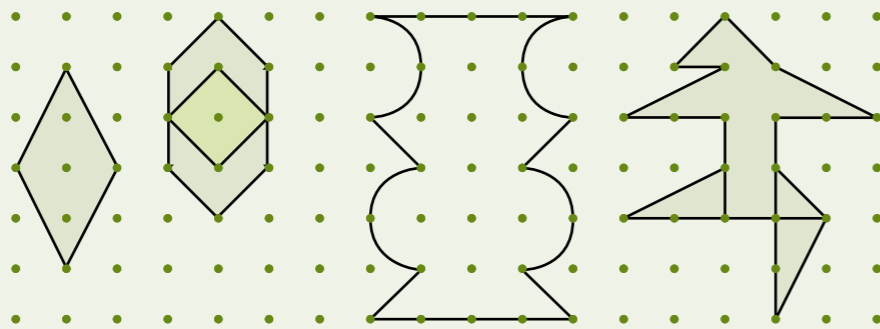


Figura 4.52. Cálculo de áreas por descomposición y acoplamiento.

b. Relación perímetro y área.

Como refuerzo, también, podemos plantear algunos problemas en los que el alumno tiene que manipular, buscar soluciones.

Actividades para los alumnos.

- Basándonos en una experiencia que E. Castelnuovo, maestra matemática de vocación, realizaba con un cordel, el alumno construye un rectángulo con una cuerda cerrada y no estirable (dicho rectángulo tendrá un área). Ahora modificamos el rectángulo con la misma cuerda de forma que la base y la altura sean distintas. El perímetro, evidentemente, es el mismo porque es la longitud de la cuerda, que no varía, ¿pero qué pasa con el área?

El geoplano es un buen recurso para que los alumnos resuelvan este problema manipulando la cuerda y midiendo el perímetro y las áreas obtenidas para llegar a conclusiones.

Por ejemplo, plantear la siguiente actividad:

Construimos un exágono en el geoplano o en papel punteado. El segundo exágono se ha obtenido presionando sobre un vértice ¿Tienen el mismo área? ¿y el perímetro? (figura 4.53).

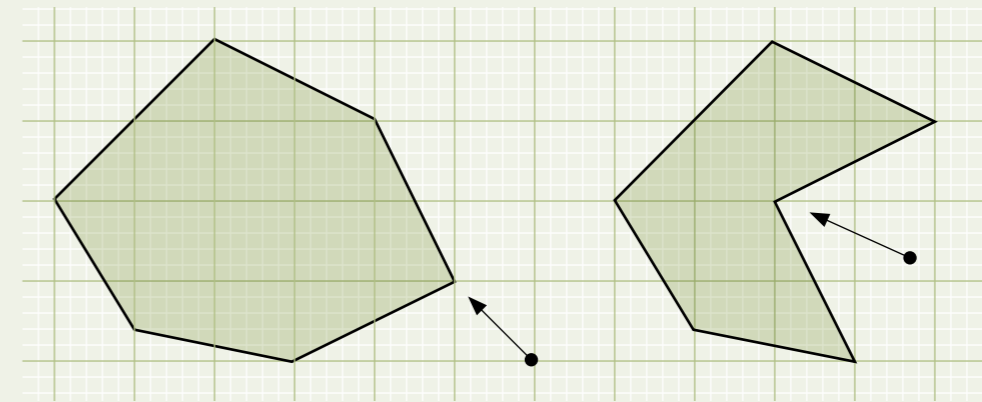


Figura 4.53. Exágono presionado. ¿Cambia el área y el perímetro?

Los estudiantes para maestro pueden también resolver el problema y extraer conclusiones sobre éste y la forma de abordarlo con los alumnos.

c. Otras actividades.

Actividades para estudiantes para profesores.

Los estudiantes para profesores también pueden resolver y reflexionar sobre los siguientes problemas para los alumnos. Estos problemas se pueden resolver con algún programa informático como Geogebra o similar. Las actividades también se pueden realizar sobre trama cuadrada (cm²) o triangular, según decida el profesor.

1. Dibuja un triángulo sobre tu cuaderno y calcula su área. Dibuja otros triángulos que tengan la misma área ¿Cuántos has encontrado? ¿En este caso qué ocurre con el perímetro?

2. Flory es jardinera, y tiene que diseñar jardines a escala que miden 10 cm^2 sobre el plano. Ayúdala y diseña jardines rectangulares con dichas dimensiones.
3. Dibuja un rectángulo A de 15 por 25 cm, de largo y ancho respectivamente. Busca las dimensiones de rectángulos iguales que puedan cubrir dicha superficie rectangular y el número total de ellos. Por ejemplo, con 9 cuadrados de $5 \times 5 \text{ cm}$ ¿podemos cubrir la superficie?
4. Calcula el área del cuadrado central del cuadrado de la figura 4.54 de lado 10 cm. Dicho cuadrado central se construye uniendo los puntos medios de los lados con los vértices, según se muestra en la figura. Utiliza al menos dos procedimientos distintos.

Este problema puede ser resuelto de manera sencilla cortando papel, en el geoplano o con papel punteado, y también puede ser resuelto mediante Geogebra o programa similar.

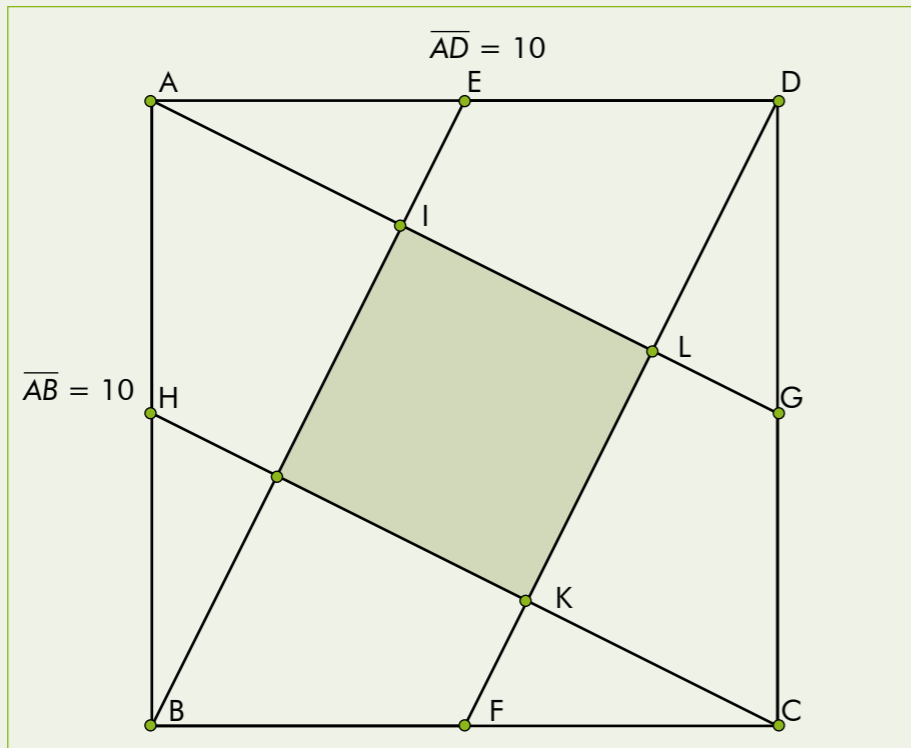


Figura 4.54. Cálculo del área del cuadrado central.

Con Geogebra también es fácil obtener la solución de una manera visual del siguiente problema:

5. Si un triángulo tiene la base fija y movemos el tercer vértice sobre una misma recta ¿qué tienen en común todos los triángulos? ¿son equivalentes? ¿tienen el mismo perímetro? ¿Cuál es el de menor perímetro?

Ilustramos este problema con la figura 4.55. Geogebra nos permite mover el tercer vértice sobre la recta e ir comprobando la variación o no del área y el perímetro.

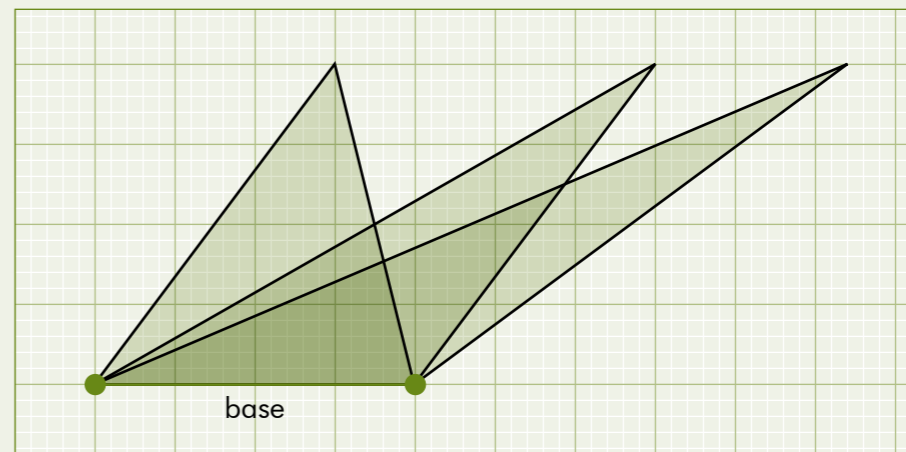
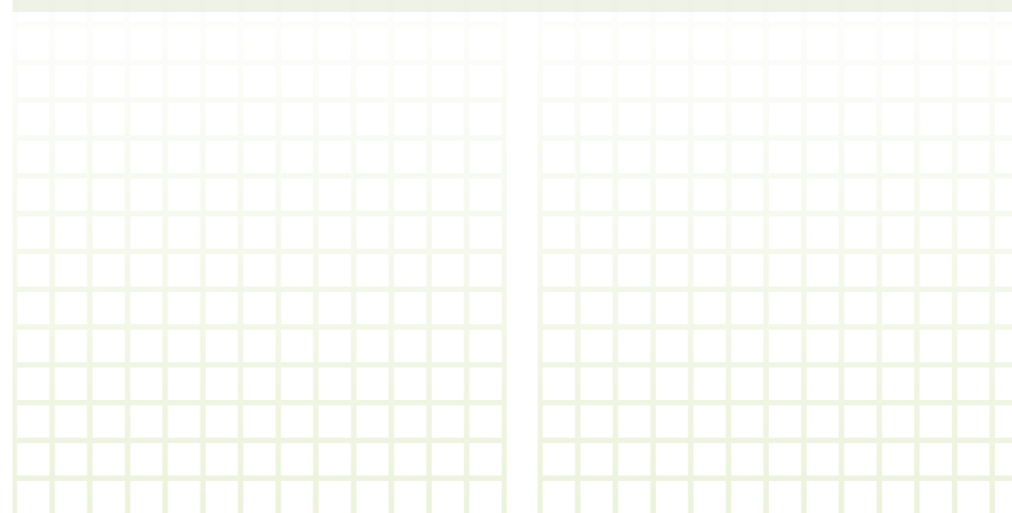


Figura 4.55. Cálculo del área con base fija.



TEMA **5**

Introducción a la enseñanza de las medidas de volumen



5.1. Aspectos previos de la medida de volumen

El espacio en el que nos movemos es un mundo de tres dimensiones. Los objetos de nuestra vida cotidiana todos tienen su volumen. Muchas de las actividades diarias están relacionadas con el volumen de nuestro cuerpo; por ejemplo, sabemos si cabemos en el hueco que queda dentro del ascensor lleno de gente, si un traje nos va a entrar o no antes de ponérselo. Igualmente, la vida nos enseña a estimar los volúmenes que nos rodean: si una habitación es mayor que otra, si caben los libros en el baúl, si un mueble cabe en un espacio determinado. El volumen es una magnitud de nuestra vida, pues el mundo y los seres vivos son tridimensionales.

Como hemos comentado anteriormente, la magnitud volumen está ligada a los conceptos geométricos y a las estructuras operacionales. Es decir, para calcular un volumen necesitamos las características geométricas del cuerpo y las estructuras aditivas para saber las veces que la unidad correspondiente está contenida en ese volumen. Pero el volumen también se puede calcular considerando sus tres dimensiones, y utilizando las estructuras multiplicativas para llevar la unidad longitud en cada dimensión y multiplicando el producto de esas cantidades, para obtener el volumen total. Así pues, la medida de volumen de un cuerpo también admite distintas formas de medición a tener en cuenta.

De tal manera, una forma de medida unidimensional, como ya sabemos, consiste en contar las veces que la unidad medida cabe en el volumen. También podemos calcular el volumen como productos de medidas de dimensiones lineales, por ejemplo: para calcular la medida de un ortoedro multiplicamos la altura, por la anchura por el largo. Esa forma de medir se conoce como producto de medidas dimensionales. En este caso, tridimensionales. Como ocurría con las áreas, está comprobado que los alumnos tienen bastante dificultades para calcular volúmenes en

estas edades mediante las medidas tridimensionales. Para los volúmenes, vamos a utilizar siempre la medida unidimensional porque es más asequible a estos niveles de la Educación Primaria, para que comprendan el concepto medida del volumen, dejando la medida tridimensional para la Secundaria.

Las primeras referencias sobre la medición de volúmenes se refieren a actividades con granos, líquidos y a la fabricación de recipientes. Las distintas civilizaciones que se asientan en Babilonia, Egipto y China se plantean problemas prácticos sobre el volumen de paredes o presas que presentan formas geométricas como pirámides, prismas, etc. Es en Grecia donde se presentan problemas clásicos como la duplicación del cubo y se presentan avances importantes como las fórmulas del volumen del cono, de las pirámides y el área de la esfera. El volumen siempre ha sido asociada a las medidas de longitud y de áreas a partir de las cuales se obtienen sus fórmulas. Como veremos posteriormente, la concepción de volumen se asocia a tres situaciones: espacio ocupado por un cuerpo, hueco delimitado en un cuerpo, o el espacio barrido por una superficie móvil.

5.2. Enseñanza de la magnitud volumen y sus medidas

La magnitud volumen es un tema de todos los currículos oficiales de Enseñanza Primaria y Secundaria. El volumen en la Educación Infantil se menciona como uno de los temas a tratar en clase, mediante actividades sencillas que sirvan, como siembra, para la posterior comprensión total del concepto. En Educación Primaria, se hace un importante trabajo con el concepto capacidad, y se introduce el volumen a partir de quinto curso, mediante algunos contenidos como son la utilización de las unidades de volumen más usadas en la vida ordinaria. Se practican actividades para que el alumno comprenda y utilice la equivalencia entre el kilo, el litro y el

decímetro cúbico (agua destilada) o la construcción de otras equivalencias entre las unidades de capacidad, masa y volumen.

Desde la Educación Infantil y Primaria, el alumno debe ir observando que el mundo en que se mueve tiene tres dimensiones, así como todos los objetos que se encuentran en él. El alumno empieza a observar su propio volumen experimentando si cabe en un baúl, si una camiseta le puede estar bien o no,... A lo largo de sus años de Primaria, va percibiendo y manejando los diferentes volúmenes, el de su propio cuerpo y el de los objetos que utiliza en su vida cotidiana, y, en algunos casos, hasta estimando su medida.

Sin embargo, el volumen se debe tratar en Primaria como un concepto introducción que se debe estudiar más detenidamente en Secundaria. Esto se puede hacer de forma similar a como hicimos en el área; podemos tratar el volumen como una medida unidimensional y una preparación o siembra de su tratamiento como medida producto de tres medidas que son alto, largo y ancho, llamada medida tridimensional o medida dimensional de superficie y altura.

Como ya hemos dicho, los alumnos tienen problemas cuando pasan de los procedimientos unidimensionales de medida a los procedimientos tridimensionales o bidimensionales. Los alumnos de Primaria no entienden la fórmula para obtener el volumen de un poliedro sencillo pues, para ellos, no es obvio medir un objeto midiendo sus tres dimensiones lineales o las dimensiones superficie y altura para obtener el volumen. Para realizar este tipo de medida el alumno debe conocer bien la longitud y la superficie para poder comprender el volumen. Los estudios consultados dicen que algunos alumnos pueden conservar el área completamente pero no conservar la longitud, y viceversa. También, algunos alumnos que conservan el volumen no conservan la longitud ni el área. De esta variedad, podemos deducir la complejidad del cálculo de los volúmenes para los alumnos y la razón por la que se recomiende utilizar esta medida en Secundaria y no en Primaria.

5.3. Actividades para la comprensión del concepto volumen

Como en las anteriores medidas, para empezar el estudio del volumen, el profesor debe cerciorarse de que el alumno ha adquirido la noción de conservación del volumen.

Las experiencias de conservación del volumen según Piaget, famoso psicólogo por sus estudios sobre el desarrollo cognitivo en los niños, se desarrollan de la siguiente forma:

1. Se da al alumno un trozo de barro que modela libremente en diferentes formas. Cada vez que construye una forma se introduce el trozo de barro en un líquido. Decimos que el alumno *conserva el volumen* cuando acepta que el barro ocupa el mismo volumen dentro del líquido sin depender de la forma que tenga.
2. También se puede probar de la siguiente forma: el alumno llena dos vasos iguales de un líquido; una vez que comprueba que los dos tienen el mismo volumen, se vierte el líquido de uno de los vasos sobre otro vaso más alto y estrecho (figura 5.1). Ahora, el profesor pregunta al alumno, si los dos vasos que contienen líquido tienen el mismo volumen. Cuando el alumno conserva el volumen la respuesta es afirmativa.
3. Otra actividad consiste en mostrar al niño una construcción formada por 36 cubos con una base de 3 x 3 cubos y cuatro alturas. El alumno debe poder construir otra sobre una base de 2 x 2 cubos que ocupe el mismo espacio.
4. Se muestra al alumno dos recipientes idénticos llenos de agua hasta la misma altura. Él mismo introduce una de las construcciones anteriores en uno de ellos y preguntamos: ¿qué va a ocurrir al introducir la construcción en el vaso de agua? Y después de contestar correctamente volvemos a preguntar: ¿si sumergimos la otra construcción en el otro vaso subirá más, menos o igual la altura del agua en el recipiente?

5. Mostramos al alumno dos bloques de plastilina iguales. Se coloca en una caja uno de los bloques de plastilina bien pegado. En otra caja igual se parte la plastilina en tres trozos iguales que se adhieren a la caja. Se pregunta al alumno: ¿El espacio que queda en la segunda caja es igual, más o menos que en la primera caja? Compruébalo llenando con arena y luego vaciándola.



Figura 5.1. Conservación del volumen.

Para Piaget, el volumen tiene distintos significados que hay que tener en cuenta en la enseñanza y aprendizaje de este concepto como veremos posteriormente. *Volumen interno* referido a la cantidad de unidades de material que conforman un cuerpo; *volumen ocupado* como la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos del entorno, y *volumen desplazado* como el volumen de agua desplazado por un cuerpo que se sumerge en este líquido.

Atendiendo a estos significados del volumen hemos diseñado diferentes actividades que ayuden al alumno en la comprensión y aprendizaje de este concepto y al profesor en su enseñanza y aprendizaje.

En Primaria, consideramos que es necesario en lugar de trabajar muchas fórmulas y actividades con ellas, que el alumno no comprende, que el profesor se ocupe de que sus alumnos adquieran una buena imagen mental del concepto de volumen.

- 1. Construcciones con cubos.** El objetivo es sembrar en los alumnos el volumen como *volumen interno* referido a la cantidad de unidades de material que conforman un cuerpo, según explicamos anteriormente.

Actividades para los alumnos.

Estas actividades es recomendable trabajarlas en el laboratorio con cubos encajables o centicubos para poder formar las pilas. También se pueden utilizar los bloques multibase que son de madera. En la figura 5.2. podemos ver estos tres materiales.



Figura 5.2. Materiales para sembrar el concepto de volumen.

1. ¿Cuántos cubos hay en la primera pila (figura 5.3.)? Estima los cubos que hay en la segunda pila ¿cómo has hecho la estimación?

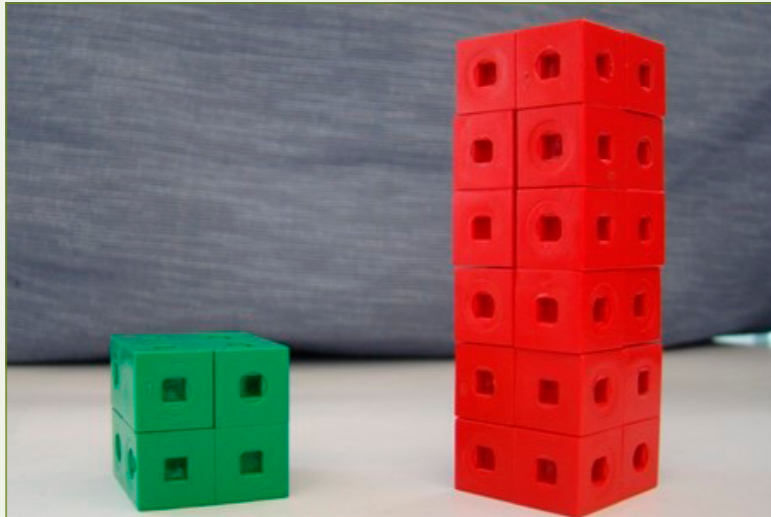


Figura 5.3. Estimaciones de cubos

Con estas actividades podemos hacer observar a los alumnos la aditividad del volumen, en el sentido de que la suma de los volúmenes de partes disjuntas de un todo es igual al volumen de este todo. Por ejemplo:

2. ¿Cuántos cubos hay en cada capa de la primera figura 5.4? ¿cuántas capas hay? ¿Qué nos sale si multiplicamos el número de cubos de cada capa por el número de éstas?
- Haz lo mismo con la segunda pila de la figura 5.4. Construye otra pila que tenga el mismo volumen.

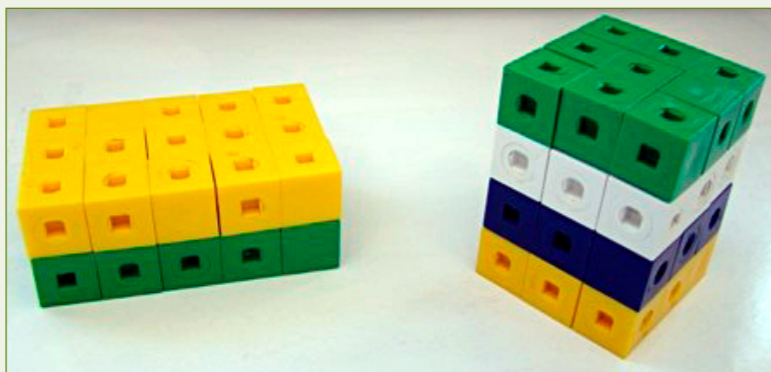


Figura 5.4. Introducción al volumen con centicubos.

- En la primera pila de cubos de la figura 5.5. ¿Cuántas caras de los cubos podemos ver en cada cara lateral y en la cara de arriba? ¿Sin verla, sabrías calcular cuántas caras tiene la base?

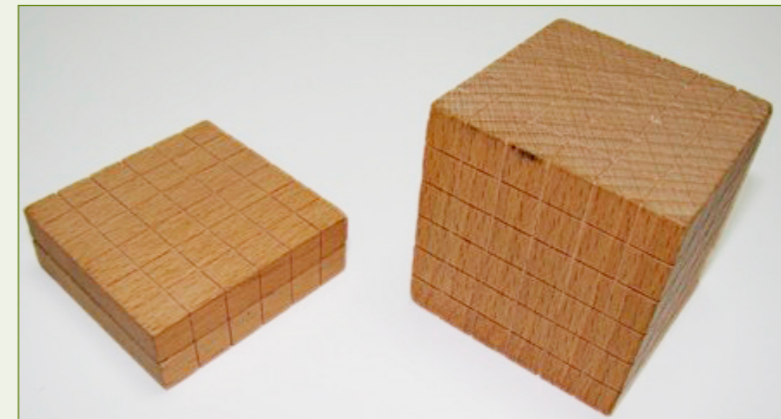


Figura 5.5. Introducción al volumen con bloques multibases

Con estas actividades queremos diferenciar entre el área lateral y el volumen.

Podemos también construir pilas cuyas capas no sean iguales y hacer las mismas actividades. En este caso, el alumno debe aplicar la misma técnica anterior pero por partes, de forma que vuelve a experimentar la aditividad del volumen.

3. Calcula el volumen de las pilas de cubos de la figura 5.6.

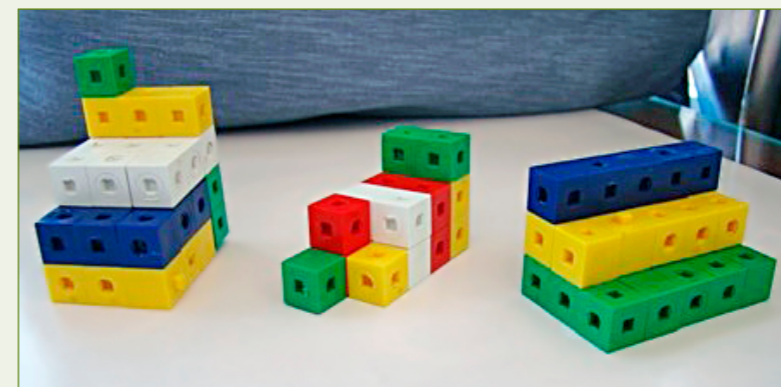


Figura 5.6. Cálculo del volumen.

Ahora vamos a realizar actividades como siembra de la fórmula que aprenderá en Secundaria sobre el cálculo del volumen a partir del área de la base por la altura. Estas actividades deben ser del tipo:

4. Sabiendo cuantas capas necesitas para llenar las cajas, calcula cuántos cubos caben en cada una de éstas (figura 5.7).

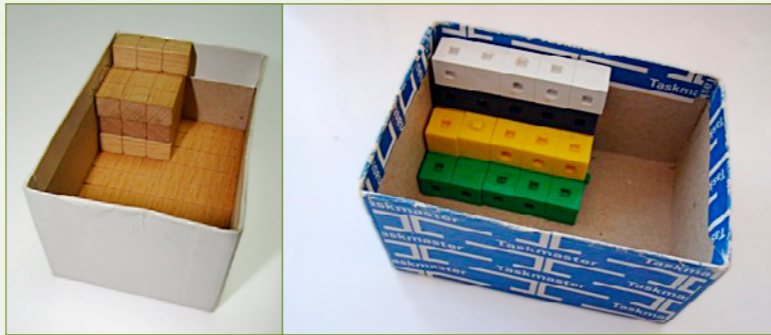


Figura 5.7. Introducción a la fórmula del cálculo del volumen.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

- Busca en los libros de Primaria actividades acordes con las tareas de volumen que te hemos presentado.
- Inventa o busca en internet actividades de estos tipos que estén relacionadas con la vida ordinaria.

Para reforzar los conceptos de **volumen** y **áreas laterales** se pueden hacer actividades como las que mostramos a continuación.

Actividades para alumnos.

5. El profesor da al alumno un cubo como el de la figura 5.8 que tiene pegados círculos en las caras laterales Y pregunta a los alumnos: Si quitamos sucesivos cubitos del cubo grande ¿qué caras tienen pegatinas? Por ejemplo, quitamos un cubito del centro de la primera fila, vemos las caras que tienen pegatinas. El cubo grande se construye de forma que solo tienen pegatinas las caras laterales.

Estas actividades es importante hacerlas, en principio, vivenciadas en el laboratorio.

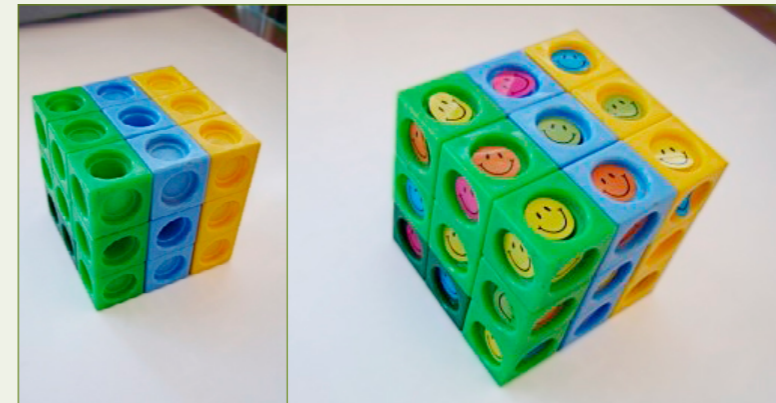


Figura 5.8. Introducción al área lateral.

6. En las siguientes pilas de cubos (figura 5.9), pega las pegatinas correspondientes en las caras del cubo o los cubos quitados, como lo hemos hecho en la primera figura. Esta actividad, como la anterior, será más fácil al alumno si puede manipular cubos, y su objetivo es la percepción espacial del espacio, trabajando lo que es el área lateral y el volumen. De esta forma, podemos mostrarle los dos conceptos, área lateral como las caras que tienen pegatinas, y volumen como el conjunto formado por todos los cubos (volumen interno).



Figura 5.9. Introducción al área lateral.

2. Actividades de traspasos. Son actividades del volumen entendido como *volumen ocupado*, es decir, como la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos del entorno.

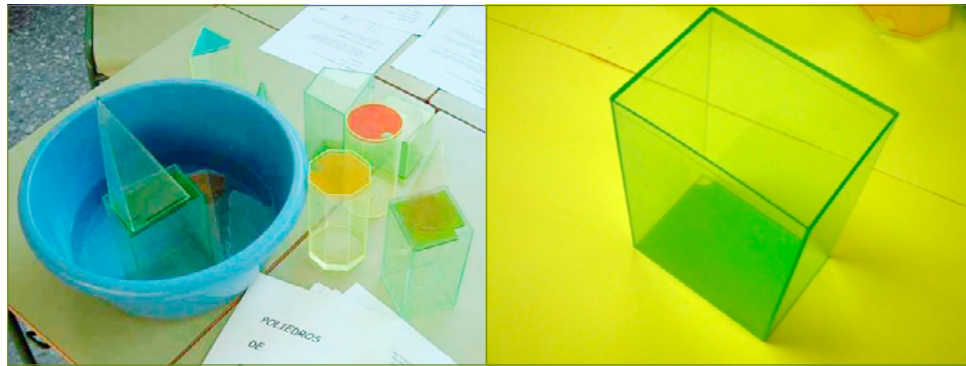


Figura 5.10. Actividades de traspasos.

Actividades para los alumnos.

1. El profesor dice a los alumnos: *Selecciona un ortoedro y una pirámide entre los sólidos transparentes que tengan la misma base y la misma altura. Haz una estimación de cuántas veces tendremos que llenar la pirámide de agua para mediante trasvase, llenar el ortoedro.*
2. *Comprueba tu estimación. Haz lo mismo con otros ortoedros y pirámides en las mismas condiciones.*
3. *¿Qué podemos deducir de la capacidad y del volumen de éstos dos cuerpos?*
El profesor debe hacer que el alumno diferencie entre capacidad y volumen, en el sentido de que en las actividades anteriores hablábamos de volumen como la cantidad del espacio ocupado por un cuerpo (volumen interno):
4. *¿En qué cuerpos podemos medir su volumen: un cubo, un dado, una hoja de papel? - ¿Incluso la hoja de papel?*

El alumno observa que puede medir el volumen de cualquier objeto de nuestro mundo tridimensional, mientras la capacidad se asocia con el espacio vacío del recipiente que podemos ocupar o volumen que cabe en un espacio (volumen ocupado).

El profesor hace ver a los alumnos que:

Los objetos de los que podemos medir su capacidad son aquellos que pueden ser llenados, es decir, los que tienen un espacio vacío, como son los recipientes. El alumno debe distinguir claramente entre la medida del volumen que se puede hacer en todos los objetos tridimensionales y los objetos en los que podemos medir la capacidad, que son los recipientes.

El profesor, de igual forma debe hacer observar a los alumnos que estas actividades nos muestran que los líquidos también tienen un volumen.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

- *Describe la actividad anterior tomando en este caso un cilindro y un cono de la misma base y altura.*
- *Busca en los libros de Primaria o en internet otras actividades relacionadas con los volúmenes ocupados.*

3. Actividades de inmersión que son actividades de volumen, como el volumen de líquido desplazado por un cuerpo que se sumerge en dicho líquido.

Actividades para los alumnos.

1. *El profesor dice a los alumnos: “Vamos a medir el volumen de una bola de plastilina mediante inmersión en una probeta graduada. Si introducimos la bola en la probeta que contiene agua hasta un cierto nivel, ¿qué pasa con el agua? ¿qué cantidad de agua ha subido? ¿cuál será el volumen de la bola de plastilina?”*
2. *Ahora introducimos una bola de plastilina en una probeta con agua y medimos el volumen mediante inmersión de la bola. A continuación, sacamos la bola y la moldeamos en otra forma, por ejemplo, de churro. La volvemos a introducir en la probeta. ¿qué pasa con el volumen? ¿varía?*

3. Tomamos dos probetas con la misma cantidad de agua. En una de ellas introducimos un cuerpo cualquiera, y en la otra, se introducen canicas o bolas pequeñas hasta que el agua alcance el mismo nivel que en la primera.

El alumno debe llegar a la conclusión de que el volumen del cuerpo y el de las canicas o bolas es el mismo, es decir, equivalente.

Debe calcular la relación entre el volumen del cuerpo y el número de canicas.

$$\text{Volumen de cuerpo} = X \text{ canicas}$$

Si repetimos la actividad con cubitos de madera impermeables iremos sembrando la idea de unidad de volumen. Mediante actividades de este tipo, el alumno también puede comprobar que la forma no influye en el volumen.

Por otra parte, las ideas erróneas sobre el peso y el volumen surgen cuando introducimos objetos en líquidos y se presenta un cambio de nivel. Algunos alumnos asocian ese cambio con el peso y no con el volumen. También entre los estudiantes para profesores hay ideas erróneas que hacen que no establezcan relación alguna entre el peso y el volumen, ni siquiera con cuerpos del mismo material. El profesor debe realizar actividades para erradicar todos estos errores.

3. Por ejemplo, el alumno toma dos cubos iguales, uno de papel y otro de madera. Como tienen diferentes características físicas, el maestro puede preguntar: ¿Cuál tiene mayor volumen?

Los alumnos que confundan capacidad y volumen pueden concluir que el cubo de papel al ser hueco tiene mayor volumen porque en el otro no cabe nada. Cuando el alumno confunde volumen con la materia o con el peso dirán que tiene mayor volumen el de madera. Solamente aquellos alumnos que asocien volumen con espacio ocupado dirán que ambos cubos tienen el mismo volumen.

4. El profesor dice: Tomamos dos cajitas, una con arena, y otra con monedas. Al cogerlas, comprobamos que el peso no es el mismo, pero ahora tenemos que comprobar su volumen. Las introducimos en dos probetas con la misma cantidad de agua y ¿qué ha pasado?

Mediante actividades de este tipo, el alumno puede observar que el peso no influye en el volumen.

5. ¿El aire pesa? Tomamos una percha y atamos dos globos desinflados en los extremos de forma que la percha quede equilibrada. Luego, inflamos uno de ellos, ¿qué ocurre?
6. Vamos a tomar ahora un matraz (figura 5.11) que es un recipiente de vidrio de cuello alto usado en los laboratorios, con un globo al final del tubo y un embudo que cierra herméticamente la boca, ¿qué pasara si llenamos el matraz de agua? ¿Se inflará el globo? ¿el aire del recipiente ocupa un volumen?



Figura. 5.11. Matraz con globo y embudo.

Con actividades de este tipo, el alumno observa que los gases tienen volumen y en el ejercicio 6º, el aire que hay dentro tiene que salir para dejar espacio al agua.

5.4. Proyectos de actividades de medidas conjuntas

Una vez que los alumnos van conociendo las unidades de las diferentes magnitudes, el profesor debe ir introduciendo actividades en las que los alumnos manejen dos o más magnitudes, como refuerzo, y para que observen que todas son necesarias en la vida ordinaria. En todos estos proyectos que planteamos, debe haber, en primer lugar, una puesta en común para organizar bien: ¿qué vamos a hacer?, formar los grupos de alumnos, organizar la

recogida, presentación y representación de datos, etc. Al final, también debe haber una puesta en común para que cada grupo de alumnos presente los logros obtenidos y, entre todos, se saquen unas conclusiones finales que destaquen las homogeneidades o diferencias de los datos del curso.

Actividades para los alumnos.

1. *Medidas del cuerpo.* El alumno debe realizar el estudio de las medidas de su cuerpo y de su familia directa, padres y hermanos. En la reunión de gran grupo, decidimos: ¿qué medidas podemos hacer del cuerpo humano? ¿a qué personas vamos a medir?, construcción de tablas estadísticas, representaciones de los datos, etc. Para la realización del proyecto, los propios alumnos miden y comparan las alturas, largo de brazos, contorno de cintura, peso del cuerpo, etc. Con esta actividad, trabajamos las magnitudes: longitud, peso, tiempo,... y en la organización de datos, estamos trabajando el tratamiento de la información.
2. *Oficios y profesiones.* Los alumnos, convenientemente agrupados, eligen una profesión e investigan, en la vida ordinaria o en internet, qué medidas son las que utilizan los trabajadores de dicha profesión. El grupo de alumnos hace una relación justificada de dichas medidas. Por ejemplo, el tendero utiliza el peso para las frutas, capacidad de la leche, tiempo de apertura y cierre, etc. Se pueden trabajar muchas otras profesiones como modista, el arquitecto, topógrafo, carpintero o las propias de los padres de los alumnos.
3. *Estimación y medida del aula y los objetos que contiene.* Se puede hacer un buen repaso de todas las unidades conjuntamente midiendo el aula y su mobiliario. Por ejemplo, medida de una silla: altura, anchura y largo de la silla, altura de las patas y el respaldo, medida de la superficie del asiento, peso, etc. se puede hacer un croquis, en el que el alumno va apuntando las medidas. Igualmente medir los pupitres, mapas, pizarra, armarios, ventanas, etc. Por último, medir la superficie de las paredes y el suelo.
4. *Diseño de nueva colocación de la clase.* El alumno, en grupos, hace un nuevo diseño del aula, que debe plasmar en un plano a una escala determinada indicando las medidas de los objetos. Si los alumnos no han estudiado la escala, pueden dibujar los objetos y ponerle las medidas correspondientes sin considerar escala. El alumno debe llegar a hacerse preguntas del tipo: ¿cabe la pizarra entre el armario y la columna? ¿podemos colocar una mesa

entre las dos ventanas? Estas preguntas y su resolución siembran en el alumno el interés y la utilidad de la medida. Igualmente se puede hacer el nuevo diseño de una plaza de su barrio o de su ciudad.

5. *Visita al supermercado.* Programamos una visita matemática a un supermercado o un mercado central en el que hay varios puestos de ventas. Los alumnos podrán observar que hay distintos sectores: carnicería, verdulería, frutería, pescadería, etc. Anotarán las medidas más comunes para cada magnitud ¿qué medidas se utilizan en cada uno de los puestos de venta? ¿cuál es la unidad más común? Observación de envases de productos: lectura e interpretación de escrituras como 1 kilo, 200 gramos, etc. Observación de las distintas balanzas que se utilizan: digitales, de dos platillos, de un solo platillo, romanas, etc. y cómo funciona cada una, dónde aparece el peso, el precio, etc.
6. *Visita a consultorio médico pediátrico:* En este caso, los alumnos deben observar las unidades de medida que se utilizan en los diferentes aparatos de medida. Observar los pesos para los niños y balanzas para bebés y observar las graduaciones. También se puede simular en la clase un consultorio de este tipo haciendo actividades con los diferentes materiales que podamos trasladar al aula. Se realizarán actividades como pesar un muñeco con una balanza típica de bebés, tomar medidas en el muñeco, tales como altura, contorno de la cabeza, medida de brazos, manos, etc. Se puede traer un peso y realizar pesadas siendo más precisos cuanto mayor es la edad del alumno.
7. *Visita de un gimnasio.* Los alumnos pueden observar las unidades de medida que existen en estos locales. Podemos encontrar metros verticales para medir la altura, balanza de pesos, distintas mancuernas de pesos variados. Si hay piscina climatizada, distintos termómetros para calcular temperaturas de sauna, aguas, etc. También suele haber bicicletas estáticas con contadores que nos dan velocidad, tiempo, calorías, etc. Todos estos aparatos dan muchas posibilidades para que el profesor realice un número importante de actividades para que el alumno comprenda las medidas y su utilidad en la vida ordinaria.

En conclusión, el alumno debe tener suficientes experiencias sobre el tema de la medida para que en su vida laboral posterior u ordinaria sea capaz de estimar y medir adecuadamente: longitudes, superficies... y el tema de la medida sea para él bastante útil y de contenidos aplicables a su entorno.

Bibliografía

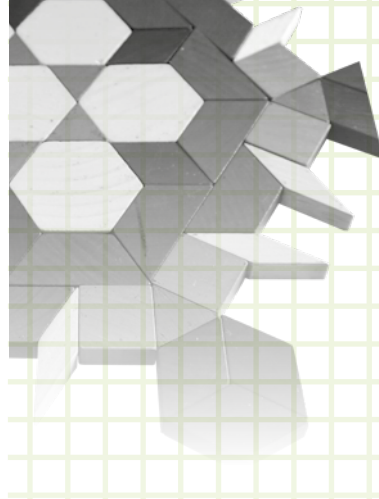
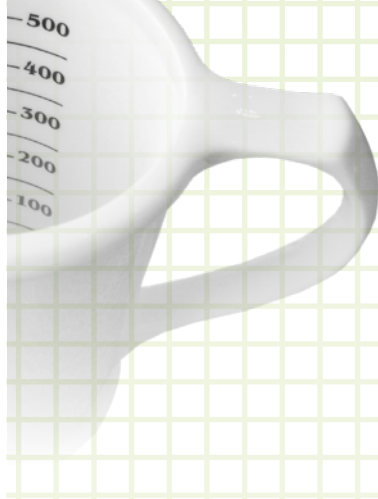


- Aballe, M.A. Aproximación al nivel de conocimiento matemático básico de futuros maestros de Primaria. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2000, 25, 89-107.
- Adame A., Casas L., Jiménez, M., Luengo, R., Mendoza, M. y Sánchez, C. *Instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura*. Zaragoza: Cajalón - Universidad de Zaragoza, 2001.
- Alsina, A. *Desarrollo de Competencias Matemáticas con recursos lúdicos-manipulativos*. Ed. Narcea.2004.
- Barrantes, M. y Revilla, D. Geometría para profesores de E.G.B. *Campo Abierto*, 1988, 5, 209- 227.
- Barrantes, M. Matemáticas: Ciencias y Letras. *Puertas a la lectura*, 1997, 2, 10-12.
- Barrantes, M. (ed.). *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 1988.
- Barrantes, M.; Masot, M.; Redondo; C. y Rodríguez, I. Interdisciplinariedad en Primaria a través de una ruta geométrica. *Campo Abierto*, 1998, 15, 311-329.
- Barrantes, M. Caracterización de la enseñanza aprendizaje de la geometría en Primaria y Secundaria. *Campo abierto*, 2003, 24, 15-36.
- Barrantes, M y Blanco, L. J. A study of prospective Primary teacher`s conceptions of teaching and learning geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2006, 9(5), 411-436.
- Barrantes, M. y Balletbo, I. *La enseñanza-aprendizaje de la geometría en revistas científicas españolas de mayor impacto de la última década*. Gobernación de Misiones. Universidad Nacional de Pilar. Asunción, Paraguay: Litocolor S.R.L. 2011.
- Barrantes, M. y Barrantes, M.C. *Geometría en la Educación Primaria*. Badajoz: Ed. Indugrafic digital. Badajoz. 2017.
- Barrantes, M.; Zapata, M. y Barrantes, M.C. *Didáctica de los números y operaciones en la Educación Primaria*. Piura (Perú): Universidad de Piura, 2020.
- Berenguer, M.I. y Pérez, R. Sobre la magnitud tiempo. *Uno: revista de dca. de las matemáticas*, 1996, 10, 79-87.
- Carrillo, J. La formación del profesorado para el aprendizaje de las Matemáticas. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2000, 24, 79-91.
- Casas L., Luengo R. y Sánchez C. Cultura, Historia y matemáticas: el tema de la Medida. *Revista Cátedra Nova*. 2000, 11, 277-304.
- Casas L. y Luengo R. Pedagogy, History and Mathematics: Measure as a Theme. En Katz, V. y Tzanakis, C.: *Recent Developments on introducing a historical dimensión in mathematics Education*, 113 - 122. Estados Unidos: Mathematical Association of America, 2011.
- Castro, E. (ed.) *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis, 2001.
- Chamorro, C. Y Belmonte, J.M. *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis, 1988.
- Chamorro, C. El currículum de medida en Educación Primaria y ESO y las capacidades de los escolares. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1996, 10, 43-62.
- Chamorro, C. Fenómenos de enseñanza de la medida en la escuela elemental. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1998, 18, 95-112.
- Chamorro, C. Ingeniería Didáctica para el aprendizaje de la longitud y la superficie. Esquemas invariantes operativos. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1999, 19, 89-103.
- Chamorro, M.C. (coord.) *Didáctica de las Matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson. 2003
- Corberán, R. *El área: Recursos didácticos para su enseñanza en Primaria*. Recuperado el 27 de marzo de 2014 en: <http://www.kekiero.es/area/ElArea.pdf>
- Contreras, P. y Albarracín, R. *Estimación de medida: El conocimiento didáctico del contenido de los maestros de Primaria*. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona, 2015
- Del Olmo, M. A.; Moreno, M. F. y Gil, F. *Superficie y volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Ed. Síntesis, 1989.
- Giménez, J. Estimación de medidas de capacidad. Estudio exploratorio a partir de objetos reales. *Epsilon*, 1993, 27, 11-22.
- Godino, J, Batanero, C y Roa, R. *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. Granada: Proyecto Edumat Maestros, 2002.
- Godino J. *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Granada: Proyecto Edumat – Maestros, 2004.
- Hart, K. Which comes first–Length, area, or volume? *Arithmetic Teacher*, 1984, 31 (9), 16–27.
- Hiebert, J. y Carpenter, T.P. Piagetian tasks as readiness measures in mathematical instruction. A critical review. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, 13, 329–345.
- Janvier, C. *Le volume. Mais où sont les formules*. Quebec: Modulo Editeur, Mont Royal, 1994
- Kula, W. *Las medidas y los hombres*. México: Siglo XXI Editores, 1980.
- Luengo, R; Casas , L.M.; y Sánchez, C. Recuperación del Patrimonio Histórico Artístico Extremeño y Geometría: Una experiencia curricular basado en el tema de la medida. En Barrantes, M. (ed.). *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Badajoz, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 1998, 93-115.
- Lovell, K. *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. Madrid: Ediciones Morata, 1977.
- Moreno, F., Gil, F. y Frías, A. Área y volumen. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis. 2001, 503-532.
- Pascual, R. La medida del tiempo. *Números*, 2000, 41, 37-44.

- Piaget, J. y Beth, E. W. *Epistemología matemática y Psicología*. Barcelona: Crítica, 1980.
- Piaget, J. y Buber, M. *El desarrollo de la noción de tiempo en el niño*. Madrid: S.L Fondo de cultura Económica de España, 2005.
- Polya, G. *Como plantear y resolver problemas*. Mexico: Trillas, 1965.
- Potari, D. y Spiliotopoulou, V. *Children's approaches to the concept of volume*. Science Education, 1996, 80 (3): 341-360.
- Rizo, C. y Campistrous, L. Una didáctica para el tratamiento de las situaciones de aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la escuela. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2008, 49, 73-85
- Rodríguez, P. Experiencia de aula con alumnos de 11-12 años: Utilización del espejo para crear y aprender Geometría. *Epsilon*, 1996, 36, 417- 432.
- Royo, J. I. Matemáticas y papiroflexia: una relación bidireccional. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2010, 53, 11-24.
- Sanz, I. *Matemáticas y su didáctica II. Geometría y medida*. Bilbao: Universidad del País Vasco, 2001.
- Sáiz, M. Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de Primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 2003, 8(18), 447-478.
- Sánchez, C. y Casas L. Recuperación de instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura como motivación al estudio de un tema curricular: la medida. En: *I Premio Joaquín Sama a la Innovación Educativa*. Badajoz: Junta de Extremadura, 1997, 87-303.

- Sánchez, C., Casas L. y Luengo R. Recuperación de instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura como motivación al estudio de la medida. *Revista Suma*, 1997, 25, 97-111.
- Segovia, I. y Rico, L. La estimación en medida. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1996, 10, 29-42.
- Segovia, I.; Castro, E. y Flores, P. El área del rectángulo. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1996, 10, 63-77.
- Segovia, I. y Rico, L. *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Pirámide, 2011.
- Sierra, M. El papel de la historia de la Matemática en la enseñanza. *Números*, 2000, 43-44, 93-96.
- Socas, M.M. Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio Siglo XXI*, 2011, 29(2), 199-224.
- Turegano, P. Propuesta metodológica para tratar de subsanar las dificultades didácticas y teóricas que se observan en la adquisición del concepto cualitativo de área. *Ensayos*, 1989, 3, 235-256.
- Van de Walle, J. A. *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Longman, 2001
- Velázquez, F. De la instrucción Matemática a la Educación Matemática. *Números*, 2000, 43-44, 129-134.





Manuel Barrantes López | Consuelo Barrantes Masot | Víctor Zamora Rodríguez

Didáctica de la medida en Primaria



UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA



DIDÁCTICA DE LA MEDIDA
EN PRIMARIA

MANUEL BARRANTES LÓPEZ
CONSUELO BARRANTES MASOT
VÍCTOR ZAMORA RODRÍGUEZ

DIDÁCTICA DE LA MEDIDA EN PRIMARIA



Cáceres 2020



© Los autores
© Universidad de Extremadura para esta 1ª edición

Esta obra ha sido objeto de una doble evaluación, una interna, llevada a cabo por el consejo asesor del Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, y otra externa, efectuada por evaluadores independientes de reconocido prestigio en el campo temático de la misma.

Edita:

Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones
C/ Caldereros, 2 - Planta 3ª. 10071 Cáceres (España).
Tel. 927 257 041 ; Fax 927 257 046
E-mail: publicac@unex.es
<http://www.unex.es/publicaciones>

I.S.B.N.: 978-84-09-15448-7.

Maquetación: Control P. 927 233 223. estudio@control-p.eu



ÍNDICE

PRÓLOGO	9
TEMA 1. DIDÁCTICA DE LA MEDIDA	11
1.1. Introducción	11
1.2. Importancia y breve historia de la medida	11
1.3. Principales medidas utilizadas en Primaria	13
1.4. Enseñanza de la medida en la Educación Primaria	14
1.5. Concepto de magnitud, cantidad y medida	15
1.6. La medida en los currículos oficiales de Primaria	17
1.7. Conservación de la medida y transitividad	19
1.8. Metodología para la resolución de problemas de medida	20
1.9. Las competencias básicas en relación con la enseñanza-aprendizaje de la medida	23
1.10. Aspectos previos para enseñar a medir	25
TEMA 2. ENSEÑANZA DE LAS MEDIDAS DE LONGITUD, CAPACIDAD Y MASA (PESO)	29
2.1. Desarrollo didáctico de la enseñanza de la Medida	29
2.2. Medida de la magnitud longitud	30
2.3. Unidades arbitrarias de longitud	31
2.4. Necesidad de utilizar las medidas convencionales de longitud	33
2.5. Unidades convencionales de longitud	34
2.6. Medida de la magnitud capacidad	38
2.7. Unidades arbitrarias de capacidad	39
2.8. Medidas convencionales de capacidad	41
2.9. Medida de masa (peso)	43
2.10. Unidades arbitrarias de masa	44
2.11. Medidas convencionales de masa	46
TEMA 3. DESARROLLO DIDÁCTICO DE LA ENSEÑANZA DE LA MEDIDA TIEMPO	49
3.1. Enseñanza de la medida de tiempo. Un poco de historia	49
3.2. Las medidas arbitrarias de tiempo	51
3.3. Unidades convencionales	57
TEMA 4. DESARROLLO DIDÁCTICO DE LA MEDIDA DE SUPERFICIE	65
4.1. Aspectos previos para la medida de la magnitud superficie	65
4.2. Aprendizaje del concepto área	66
4.3. Unidades arbitrarias	71
4.4. Materiales para la enseñanza de las áreas: tangrams y palillos	74
4.5. Unidades convencionales de medida de superficie	82
4.6. Estrategias para la enseñanza de las áreas de las figuras planas mediante medidas unidimensionales	84
4.7. Actividades de refuerzo	95

TEMA 5. INTRODUCCIÓN A LA ENSEÑANZA DE LAS MEDIDAS DE VOLUMEN	99
5.1. Aspectos previos de la medida de volumen.	99
5.2. Enseñanza de la magnitud volumen y sus medidas.	100
5.3. Actividades para la comprensión del concepto volumen.	100
5.4. Proyectos de actividades de medidas conjuntas.	108
BIBLIOGRAFÍA	111

PRÓLOGO

El objetivo del manual es la preparación metodológica de los estudiantes para profesores de Primaria en el contenido didáctico de la Medida en consonancia con las metodologías y currículos actuales. El libro también es válido para los profesores en ejercicio que estén interesado en la mejora de su tarea como enseñantes en el tema que nos ocupa.

El texto es, así mismo, un complemento de otros dos ya publicados, Barrantes y Barrantes (2017) y Barrantes, Zapata y Barrantes (2020) en los que presentamos la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, y los Números y sus operaciones, bloques tan importantes como éste de la Medida para que el alumno adquiera la competencia matemática.

El objetivo es ofrecer a los profesores o futuros profesores de Primaria herramientas y materiales suficientes para poder desarrollar el currículo sin la necesidad de considerar el libro de texto como el elemento único de la enseñanza-aprendizaje.

La medida es un tema que aparece en los distintos planes de estudio de cualquier país, y además está presente en muchos momentos de la vida ordinaria, solamente tenemos que pensar en las actividades que realizamos desde que nos levantamos hasta que nos acostamos.

Así pues, la medida tiene gran importancia en la vida cotidiana, lo que justifica su aprendizaje y enseñanza en la escuela no sólo como algo importante sino como algo necesario e imprescindible para el buen desarrollo de los alumnos en su vida diaria y, posteriormente en la laboral.

Esta importancia de la medida, hace organizar nuestra enseñanza didáctica partiendo de que el alumno se familiarice con los problemas reales, como cantidad de pintura para pintar una habitación, medir el área del patio del colegio, área del aula o de su dormitorio, volumen de una piscina, en lugar de los problemas teóricos de libros en los que se calculan superficies de terrenos o volúmenes de sólidos regulares que no son de su interés y en los que las medidas no son obtenidas por el alumno ya que se les dan como datos.

Por ello, aplicamos un método activo basado en la experiencia, la participación mediante casos particulares que van sugiriendo, las generalizaciones correspondientes y el razonamiento globalizado. Esta forma de presentar las actividades nos aleja de la enseñanza tradicional, centrada en el aprendizaje de definiciones y fórmulas que conllevan *una aritmetización* de la medida así como en el cálculo mecánico de operaciones, totalmente alejadas de la intuición del concepto de medida.

El conocimiento y uso de los materiales didácticos específicos, para la construcción de los distintos contenidos, transforman el aprendizaje en algo consistente y riguroso que afianzan y cambia las concepciones del profesor y el alumno hacía una tendencia más constructivista de la enseñanza.

Comentamos los diferentes temas del manual para posteriormente exponer la metodología utilizada para las muchas actividades incluidas en este libro.

El primer tema aborda la panorámica general sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Medida en Primaria. Comienza con una breve historia de la Medida, para continuar presen-

tando las definiciones de las distintas medidas utilizadas en Primaria, de una manera teórica y rigurosa. El capítulo continúa con un estudio genérico de la enseñanza actual de la Medida en Primaria, así como la importancia de ésta en los currículos oficiales y las metodologías necesarias para enseñarla.

En los siguientes temas se aborda, ya de una manera individual, el desarrollo didáctico de las medidas de las magnitudes que se trabajan en Primaria que son: longitud, capacidad, masa (peso), tiempo, superficie y volumen.

A la magnitud tiempo se le dedica un capítulo aparte, ya que sus unidades no siguen el sistema decimal, y por las peculiaridades propias de esta magnitud.

También, la magnitud superficie es tratada en otro capítulo para hacer hincapié en su medida de forma manipulativa huyendo de las fórmulas aprendidas y de los problemas en los que se dan los datos, sin que el alumno los obtenga por sus propios medios, con lo que se convierten en meros cálculos numéricos.

La magnitud volumen ha sido tratada como una mera introducción, mediante actividades, para que el alumno vaya comprendiendo el concepto que posteriormente se estudiará de una forma más completa en la Secundaria.

Estas medidas se enseñan siguiendo el esquema general en el que mediante juegos preparatorios se plantea la necesidad de medir, utilizando en un principio las medidas arbitrarias para posteriormente introducir las medidas convencionales, como conveniencia de entendernos de una manera más universal.

El texto contiene en cada tema un número suficiente de actividades que pueden ser útiles tanto para los profesores como para los estudiantes para profesores, para su reflexión y aprendizaje del trabajo en el aula.

Además, se incluyen actividades específicas para los alumnos de Primaria de todos los niveles, orientadas también al aprendizaje y análisis de los diferentes contenidos que se trabajan en el programa de Primaria.

Con las actividades planteadas, se busca que haya una conjunción práctica, una relación entre la escuela y la sociedad en la que se desenvuelve el alumno. Por ello, se relaciona la medida con contenidos propios de las matemáticas escolares como los Números y sus operaciones, así como con otras áreas del currículo.

El texto se culmina con una extensa bibliografía para que el lector que lo desee pueda ahondar más en sus conocimientos sobre cualquier tema tratado en este manual.

Los autores

TEMA 1

DIDÁCTICA DE LA MEDIDA

1.1. INTRODUCCIÓN

Érase un tiempo en que los comerciantes no medían las telas que vendían a los clientes. Éstos iban a comprarlas para hacerse un vestido, cortinas, lonas para tiendas, etc. y los vendedores les daban el trozo que les parecía.

Así, pasado un tiempo, los compradores se dieron cuenta que unos recibían más tela mientras otros, por el mismo precio, recibían menos. Esto originó numerosos altercados entre vendedores y compradores y dio lugar a que los comerciantes organizaran una reunión.

En dicha reunión, los vendedores decidieron fijar para un mismo precio, una misma cantidad de tela equivalente a la distancia que separaba sus narices de los pies.

Todo iba bien, hasta que al cabo de poco tiempo los vendedores más bajitos observaron que los clientes hacían colas en los puestos de los vendedores altos, pues adquirirían una medida de tela más grande por el mismo precio.

Los vendedores bajos perdieron toda la clientela. ¿Qué harán? Van corriendo a contárselo al rey, el cual llega al final del asunto decretando que, de aquí en adelante solo su propia y real medida “de la nariz al suelo” será legal.

Ordena a sus cortesanos tomar la real medida de tela y señalar su longitud sobre el suelo en el patio del palacio.

Desde entonces, todos los comerciantes tienen para medir un palo de la misma longitud que la señal del patio de palacio. Así se hizo justicia y los comerciantes bajitos, altos y compradores fueron felices.

De esta pequeña historia en forma de cuento y parecida a la realidad, podemos sin embargo, extraer dos conclusiones importantes para este estudio que comenzamos.

En primer lugar, la historia nos plantea la necesidad de medir, necesidad que el ser humano ha tenido desde los pueblos más primitivos. En segundo lugar, esa necesidad de medir lleva a los personajes de la historia al uso de medidas, primero, arbitrarias y posteriormente convencionales, debido a la necesidad que tenían todos para ponerse de acuerdo y poder vivir en convivencia pacífica. Estas dos conclusiones van a ser el eje principal del tema que vamos a desarrollar.

1.2. IMPORTANCIA Y BREVE HISTORIA DE LA MEDIDA

Si hiciéramos un estudio de los distintos planes de estudio de cualquier país, podríamos descubrir que en todos ellos está presente el tema de la medida. Solamente con que pensemos en las actividades que realizamos desde que nos levantamos hasta que nos acostamos, podemos darnos cuenta de cómo la medida y su cálculo están presentes en las actividades de la vida ordinaria.

Así pues, la utilidad de la medida y la necesidad de medir han llevado a que el hombre utilice diferentes sistemas para medir las magnitudes a lo largo de la historia. No podemos hacer un estudio completo de todos estos sistemas en este apartado, pero sí exponer a grandes rasgos algunos de los sistemas utilizados, cuya función principal ha sido, siempre, que el mayor número de seres humanos pudieran comprenderse y relacionarse en referencia a las distintas situaciones de medida que les plantea la vida, tanto a nivel cotidiano como a nivel laboral, de entretenimiento, etc.

La medida aparece junto con la Geometría en las civilizaciones antiguas para medir terrenos, hacer edificaciones, y en la astronomía.

En un principio, el hombre mide tomando como unidades distintas partes de su cuerpo. Este sistema podía ser utilizado por todos los individuos de cualquier grupo y las pequeñas diferencias que podían presentar las medidas no eran significativas pues el tipo de actividad que se realizaba no necesitaba de una gran precisión. Así pues las unidades utilizadas podemos denominarlas como *arbitrarias* en el sentido de que eran útiles para un número reducido de individuos normalmente de una sola comunidad o de un entorno próximo.

En longitud, las unidades arbitrarias ligadas al cuerpo humano y su movimiento son la braza, la mano, el paso, el pie, el codo. Para las medidas de capacidad, se utilizaban, como unidad, todo tipo de recipientes de diferentes tamaños, formas y capacidades para medir los líquidos y los sólidos, como por ejemplo, cereales. Para el peso, los hombres utilizaban balanzas en las que se colocaban pesas como unidades que eran de distintos materiales y distintos tamaños.

La medida del tiempo se hacía mediante la observación del cielo y los astros, como el sol, que aparecían en él. El tiempo no tiene un elemento físico que podamos manejar, sino que depende más del medio en el que estamos inmersos que del hombre mismo. Así aparecían la sucesión, día, noche, estaciones del año, y las partes de día, que venían determinados por necesidades sociales, construyéndose objetos como los relojes de arena que medían el tiempo de una determinada actividad.

Las primeras referencias sobre la medición del área y del volumen están asociadas al almacenamiento de granos, alimentos y líquidos, movimientos de tierras, cosechas, construcciones, etc. así como a la fabricación de vasijas y recipientes de cerámica.

La necesidad tecnológica y el avance de la sociedad hizo que el hombre fuera planteándose medidas cada vez más universales que abarcaban grandes comarcas o países. También, debían dar un paso más, para que el comercio entre países cercanos o alejados pudiera realizarse con medidas comprendidas y conocidas por todos.

De esta forma y pasado el tiempo, se implantó el Sistema Métrico Decimal en la Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en París en 1889. Se pretendía buscar un sistema de unidades que fuera único en el mundo y facilitara el intercambio de información cultural, científico y comercial de datos. Este sistema se caracterizaba por ser un sistema de cálculo decimal, es decir, los múltiplos y submúltiplos de cada unidad de medida están relacionados entre sí por múltiplos y submúltiplos de 10. A la vez había una coherencia interna entre las magnitudes, por ejemplo las unidades de capacidad, superficie y volumen derivan de la unidad de longitud.

1.3. PRINCIPALES MEDIDAS UTILIZADAS EN PRIMARIA

La forma actual del Sistema Métrico es el llamado Sistema Internacional de Unidades (SI) que define las principales medidas usadas por el profesor en Primaria, de la siguiente forma:

Metro: Unidad de longitud que equivale a la longitud de trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de $1/299\,792\,458$ de segundo, basada en que la velocidad de la luz en el vacío es exactamente $299.792.458$ metros / segundo (Conferencia General de Pesas y Medidas, CGPM, 1983). En unidades de Planck equivale a 6.19×10^{34} .

Segundo: Unidad de tiempo definida en 1967 en base al tiempo atómico y es la duración de $9.192.631.770$ oscilaciones de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del isótopo 133 del átomo de cesio a una temperatura de 0K. En unidades de Planck equivale a 1.85×10^{43} .

Kilogramo: Se define al fijar el valor numérico de la constante de Planck, h , en $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$, cuando se expresa en la unidad Julio por segundos que es igual a $\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$ donde el metro y el segundo se definen en función de la velocidad de la luz en el vacío y la frecuencia de la transición hiperfina del estado fundamental de un átomo de cesio 133 no perturbado.

El 20 de mayo de 2019, la definición del kilogramo pasó a estar ligada con la constante de Planck.

Se utiliza el término kilogramo-fuerza o kilopondio en el campo del Sistema Técnico de unidades que se define como el peso de una masa de 1kg en la gravedad estándar de la superficie terrestre con un valor de 9.80665 m/s^2 .

Las unidades de Planck o Sistema natural de unidades miden varias de las magnitudes fundamentales del universo: tiempo, longitud, carga eléctrica, masa y temperatura. El sistema se define de tal forma que las constantes universales del universo tomen el valor de la unidad, estas constantes son: velocidad de la luz en el vacío, constante de gravitación universal, constante reducida de Planck, constante de la fuerza de Coulomb y constante de Boltzmann.

La “capacidad” y el “volumen” son términos que se encuentran estrechamente relacionados. Se define la capacidad como *el espacio vacío de alguna cosa que es suficiente para contener a otra u otras cosas*. Se define el volumen como *el espacio que ocupa un cuerpo*. Por lo tanto, entre ambos términos existe una equivalencia que se basa en la relación entre *el litro* (unidad de capacidad) y el *decímetro cúbico* (unidad de volumen). En el SI la unidad de volumen o *metro cúbico* es una unidad derivada, es decir, son resultado de combinar magnitudes físicas tomadas como básicas. Sabemos que el metro cúbico surge a partir del cubo de la longitud, una de las magnitudes básicas.

El litro es aceptado en el (SI), aunque ya no pertenece estrictamente a él. Fue adoptado por la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en 1879 y en 1901 fue descrito como *el volumen ocupado por una masa de 1 kg de agua pura en su máxima densidad y a presión normal (a $4\text{ }^\circ\text{C}$ y 1 atm respectivamente)*. Esta definición fue derogada en 1964 porque el litro difería del decímetro cúbico en aproximadamente 28 partes por millón, induciendo a error en las mediciones que requieren bastante precisión. Actualmente sólo es usado como un nombre especial del decímetro cúbico.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

Proyecto: La medida en tu Comunidad Autónoma.

Se puede enfocar haciendo el estudio de la historia de la medida desde la antigüedad, las medidas antiguas y cómo se evoluciona hacia la unificación de medidas a nacional y mundial.

También se puede enfocar considerando una magnitud: longitud, tiempo, etc. y haciendo una búsqueda más exhaustiva de las medidas no convencionales, solamente de esa magnitud, utilizadas en diversas épocas hasta llegar a las medidas convencionales. De esta forma se pueden obtener varios trabajos, cada uno de una magnitud, que mediante una puesta en común le darían al estudiante una muestra muy completa de las medidas en su Comunidad.

1.4. ENSEÑANZA DE LA MEDIDA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA.

Hay una colección de actividades matemáticas que son necesarias y aparecen en todas las culturas. Estas tareas podemos considerarlas como las necesidades matemáticas que un alumno debe satisfacer y dominar, y son: contar, localizar, medir y explicar.

Como todos sabemos, contar se refiere a establecer una relación íntima entre el alumno y el mundo de los números de forma que no tenga problemas en el entorno familiar y laboral en el que pasa el mayor tiempo de su vida.

Localizar y medir suponen actividades directamente relacionadas con la geometría y la medida, donde el alumno debe saber interpretar y manejar mapas, planos para poder ubicarse y establecer direcciones a la vez que realiza medidas de todo tipo, longitud, tiempo, grupos de personas, ...

Explicar, sin embargo, se entiende como la aportación que el vocabulario matemático hace al lenguaje cotidiano, incluyendo en dicho lenguaje una serie de vocablos que nos permiten ser más precisos, establecer ordenaciones de argumentos, deducciones lógicas, información numérica; conceptos que cada vez son más utilizados en las conversaciones y en los medios de comunicación actuales.

Así pues, la medida tiene gran importancia en la vida ordinaria, lo que justifica su aprendizaje y enseñanza en la escuela no solo como algo importante sino como algo necesario e imprescindible para el buen desenvolvimiento de los alumnos en su vida ordinaria y, posteriormente, laboral.

Diferentes investigadores de la psicología evolutiva entre ellos Piaget consideran que los alumnos construyen el espacio en orden inverso al desarrollo matemático. Es decir, aunque la topología es desarrollada en el siglo pasado, y la geometría ha sido estudiada desde los griegos, los niños perciben en un primer lugar las relaciones topológicas (contorno abierto, cerrado, vecindad, continuidad, con agujeros...) después las relaciones orientativas (izquierda, derecha, delante, detrás ...), y, por último, las relaciones geométricas (distancia, longitudes, ángulos). Esto nos dice que el alumno debe haber madurado suficientemente para poder comprender adecuadamente el tema de la medida.

En este punto, la primera pregunta que debe hacerse el profesor es: *¿Cuándo enseñar la*

medida? ¿cómo enseñar la medida?, ¿qué materiales y recursos existen para ello y cuál es la forma más aconsejable de realizarla?

En los siguientes apartados, contestamos a estas preguntas estableciendo una metodología general que suministre al futuro profesor herramientas suficientes para poder abordar en la escuela la enseñanza de las magnitudes fundamentales de una forma eficaz.

1.5. CONCEPTO DE MAGNITUD, CANTIDAD Y MEDIDA

Consideramos que el estudiante para profesor tiene que comprender perfectamente los conceptos básicos del tema: magnitud, cantidad y medida, que va a tener que utilizar en todo momento y enseñar a sus alumnos.

Se define **la magnitud**, según la oficina Internacional de Pesos y Medidas, como *un atributo de un fenómeno, un cuerpo o sustancia que puede ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente*. Las magnitudes con las que vamos a trabajar son cuantificables pues hay otras que no lo son como los colores, gusto, ruidos texturas, la forma. Dentro del SI nosotros trabajamos en Educación Primaria con las magnitudes fundamentales o básicas cuantificables: longitud, tiempo y masa y también con las magnitudes derivadas: peso, superficie, volumen y ya hemos comentado lo que ocurre con la capacidad.

Además de éstas, y para comprender bien el concepto, otros ejemplos de magnitudes pueden ser:

- Cajas de botellas de zumo de limón que hay en un almacén. De acuerdo con la definición anterior las botellas tienen como atributo zumo de limón y pueden ser contabilizadas.
- Altura de los habitantes de Cáceres, igualmente es un atributo que puede ser observado y medido mediante las unidades de longitud.

Llamamos **cantidad** a cada estado particular de la magnitud mensurable (lo que ocurre en un momento determinado). Por ejemplo, en las magnitudes anteriores serían: Cajas de botellas que hay de zumo de limón el día 20 de febrero de 2019 y Altura de Pablo Alcivar, vecino de Cáceres. También, la longitud de una mesa, la masa de una moneda, el volumen de un cubo de madera, son otros ejemplos de cantidades.

De una forma más rigurosa, si tomamos una magnitud, todos los objetos con igual medida pertenecen a la misma clase (clasificación); esta clase es lo que denominamos cantidad. De esta forma, se ha hecho una partición en el conjunto de todos los objetos medibles y se han asociados a distintas clases disjuntas entre sí. En esta partición, dos objetos que pertenecen a distintas clases tienen diferentes medidas por lo que se puede hacer una ordenación de las clases. Por ejemplo, en la magnitud longitud, todos los objetos con igual longitud pertenecen a la misma clase (clasificación); cada clase es una cantidad de longitud. Tenemos una partición en el conjunto de todos los objetos medibles longitudinalmente de forma que dos objetos que pertenecen a distintas clases tienen diferentes medidas y pueden ser ordenados.

La definición de **medida** se refiere a la relación que se establece de *una cantidad de magnitud (patrón) con otra u otras (de la misma especie) estableciendo una comparación*. Los patrones básicos se llaman unidades de medida y son universalmente aceptados. Así pues, hay que situar

la unidad tantas veces como hagan falta hasta cubrir la cantidad inicial que queremos medir. Para especificar el valor de una cantidad de una magnitud hay que dar la unidad de medida y el número que relaciona ambos valores. De nada sirve decir que la altura de un árbol es de 5 veces en lugar de decir 5 metros.

También se define la medida como *una función que asigna un número a un objeto medible*. Por ello, el conjunto origen está formado por las cantidades de todos los objetos medibles con una determinada magnitud y el conjunto final son los números reales.

Por ejemplo, si queremos conocer la longitud de un campo de fútbol, tenemos que medir el segmento longitud campo (objeto medible) y asignarle un número (conjunto de los números reales) que llamaremos la medida longitud del campo de fútbol. Pero para asignar un número a esa longitud, tenemos que tomar una unidad de medida, que tiene una longitud determinada y el número real asignado a dicha longitud es *precisamente las veces que esa unidad de medida está contenida en el segmento longitud del campo*. Así, si tomamos como medida el metro, al segmento longitud campo podríamos asignar el número 105, o lo que es lo mismo, diríamos que el campo de fútbol mide 105 metros.

Podemos observar que la medida final depende de la unidad con la que se mida el objeto, y la cantidad unidad siempre mide 1, es decir, se le asigna el número real 1.

Algunas propiedades de las medidas son:

- Si componemos las cantidades de dos objetos medibles mediante una misma magnitud, la medida resultante es igual a la suma de las medidas de dichos objetos. De esta forma, siempre podremos hablar de suma de longitudes, suma de tiempos, etc.
- También ocurre que al multiplicar la cantidad de un objeto medible mediante una misma magnitud por un número, la medida total queda multiplicada por ese número. Si la cantidad de un objeto medible por una magnitud es más pequeña que la cantidad de otro entonces la medida del primero es menor que la del segundo.

Por ejemplo, si tenemos un lápiz que pesa 5 gramos y otro lápiz que pesa 4 gramos podemos decir que los dos lápices juntos pesan 9 gramos. Y si un lápiz pesa 5 gramos, entonces 3 lápices pesan 15 gramos. Si un lápiz es más pequeño que otro de las mismas características entonces el primero pesa menos que el segundo.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

Sea la magnitud: asistentes a los partidos de fútbol del R. Madrid.

Estado particular o cantidad: asistentes al último partido de la liga jugado por el R. Madrid, este año.

¿Cómo medimos esa cantidad? Comparándola con otra conocida (unidad de medida). Puede ser, de uno en uno, por decenas, por cientos, por miles, por billones,... entonces el resultado puede ser 20000 asistentes al último partido de la liga jugado por el R. Madrid, este año. También, 200 decenas o 20 millares.

En función del evento que estemos considerando se utiliza una unidad u otra. En los partidos importantes de fútbol se suele utilizar “miles de personas”.

Resuelve estos otros ejemplos.

1. *¿Qué unidad de medida crees que se utiliza en la magnitud “asistentes a una manifestación”? Da un ejemplo de cantidad que sea verdadera (busca en las noticias de actualidad) y mídela.*
2. *Da un ejemplo de cantidad verdadera y unidad para la magnitud: tiempo empleado por el campeón de la vuelta ciclista a España en realizarla.*

1.6. LA MEDIDA EN LOS CURRÍCULOS OFICIALES DE PRIMARIA

La medida ha constituido un contenido de enseñanza en todos los programas escolares, no solo españoles sino de los países suficientemente avanzados por la importancia práctica que tiene dicho tópico.

Actualmente, los currículos oficiales de Primaria parten siempre de que el profesor debe conseguir que sus alumnos sepan captar, interpretar y utilizar todas las informaciones que le llegan en la vida cotidiana, en las que se manejan las principales magnitudes. Es decir, se parte de un conocimiento intuitivo de las magnitudes y de la construcción sucesiva de ellas, mediante el estudio del Sistema Métrico, sus aplicaciones y la utilización de instrumentos de medida favorecedores de buenos resultados.

El alumno debe ir conociendo las magnitudes y realizar mediciones en progresión cada vez más compleja. Deben comenzar *por la necesidad de medir* como la mejor manera de resolver ciertos problemas, utilizando en primer lugar *unidades no convencionales o arbitrarias* para llegar progresivamente a las *unidades e instrumentos de medidas convencionales*.

Las magnitudes que se tratan en los primeros cursos de Primaria son: longitud, tiempo, peso/masa y capacidad. En todas ellas se comienza con una iniciación a la medida no convencional, prestando particular atención al reconocimiento de las unidades de este tipo, locales y regionales.

El siguiente paso es la utilización de unidades convencionales para medir. El profesor debe ir procurando que el alumno sea capaz de seleccionar y utilizar la unidad apropiada para medir. Además, el alumno debe realizar estimaciones de resultados de medidas (distancias, tamaños, pesos, capacidades, tiempos...) en contextos familiares, haciendo la explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.

Diferentes investigaciones insisten en la práctica del *cálculo mental* y las actividades con números no exactos, es decir, la realización de *estimaciones*. A veces, el alumno identifica la exactitud con la solución correcta y la inexactitud con la incorrecta. Sin embargo, se debe hacer ver al alumnado que la mayoría de las veces hacemos operaciones con cantidades inexactas sobre todo con la medida. Se debe valorar que la pérdida de exactitud nos puede llevar a realizar un cálculo que es más sencillo y se puede hacer mediante el cálculo mental.

El profesor no debe olvidar nunca los problemas de medida de estimación. Tenemos que tener en cuenta que en una estimación de la medida, es necesario que el alumno interiorice previamente la unidad de medida que va a utilizar para estimar, por lo que estas estimaciones son más complejas que las puramente numéricas.

Las medidas que el alumno realice deben ser de la vida real y no de aquellos objetos que aparecen en los libros, cuyas magnitudes reales son diferentes y, sin embargo, en dichos dibujos aparecen iguales. Por ejemplo, el dibujo en el libro de un autobús y un lápiz tienen la misma longitud. Medir estos objetos dibujados con la regla implica una mala enseñanza de la magnitud correspondiente y, por supuesto, imposibilita la posterior estimación de la medida de estos objetos en la vida real.

En los dos últimos cursos se sigue estudiando los contenidos anteriores, haciendo hincapié en que el alumno utilice la medida adecuada para medir, pero ahora se le exige saber distinguir entre la medida exacta y la medida aproximada, y una utilización más precisa de los instrumentos para medir. De esta, el alumno debe expresar la medida de una actividad en minutos y segundos y debe saber realizar todas las equivalencias y transformaciones que se dan entre las horas, minutos y segundos, siempre en un contexto de situaciones cotidianas y de su entorno. El alumno debe empezar a manejar el Sistema Sexagesimal, propio de la medida de tiempo.

Aunque en los primeros cursos, los alumnos trabajan el Sistema Métrico Decimal, no es hasta bien entrada la Primaria cuando se entra más de lleno en el conocimiento y uso de los múltiplos y submúltiplos de las distintas unidades, utilizadas en contextos cotidianos. Estas actividades llevan también a la realización de comparaciones y ordenaciones de unidades y cantidades de una misma magnitud, siempre mediante la explicación oral y escrita de las estrategias, personales o no, utilizadas en la medición. Las actividades a desarrollar van encaminadas a que el alumno experimente las equivalencias entre las unidades de una misma magnitud y la composición y descomposición de unidades de medida de ella.

Las conversiones de medidas son las actividades que más ocupan dentro del estudio de la medida. Sin embargo, en la mayoría de los casos, los alumnos no trabajan con medidas propiamente, sino que se convierten dichas conversiones en una mera actividad numérica en la que el alumnado en lugar de pasar de millares a decenas pasa de kilómetro a metro o de kilos a gramos. Se busca más que un trabajo de medida, un algoritmo de resolución mediante tablas, escaleras o representaciones que nos dan un resultado automáticamente. Otras veces, los problemas nos dan ya los resultados de medida calculados de forma que el alumnado solamente tiene que hacer las operaciones que indique el problema. En este caso, no hay un problema de medida sino un ejercicio numérico pues la medida de los objetos ya viene calculada.

Se identifica el aprendizaje de la medida con el conocimiento y dominio del sistema métrico decimal y se considera que el alumno alcanza las competencias correspondientes cuando efectúa conversiones con cierta rapidez y seguridad. De esta forma, encontramos alumnos que expresan superficies en metros, o dan soluciones ilógicas como que una bola de billar pesa 10 kg o el agua contenida en una piscina olímpica es 200 litros.

En los últimos años, se introducen dos nuevas magnitudes que son el área y el volumen. Se introduce la magnitud área mediante un estudio histórico de las medidas tradicionales de esta magnitud o bien mediante la realización de cálculos reales de perímetro y de superficies de figuras planas.

Como hemos dicho, son meras actividades de introducción. Así, se deben realizar tareas con unidades de superficies, múltiplos o submúltiplos que impliquen cálculos de uso cotidiano o del entorno del alumno como pueden ser perímetros o áreas de figuras planas tales como campos de deportes, mesas, etc. como expresión cuantitativa de su tamaño. Otras actividades

pueden llevar a los alumnos a realizar comparaciones de superficies bien por superposición, descomposición o medición.

La magnitud volumen se introduce mediante la utilización de las unidades de volumen más comunes, o también mediante un estudio histórico. Es importante que el profesor diseñe actividades de laboratorio para que el alumno comprenda y maneje la equivalencia entre el litro, el kilo y el decímetro cúbico. Como en otros casos, es necesario que el alumno conozca las equivalencias entre las unidades de capacidad, masa y volumen, que se puede realizar mediante representación de una tabla.

El objetivo es sembrar los conceptos superficie y volumen, mediante actividades, de manera que tengan una buena preparación para su estudio en la Secundaria.

Es interesante también realizar actividades de conservación de la magnitud correspondiente, de forma que los alumnos observen que los cambios que alteran la disposición espacial, la forma, el aspecto perceptivo quedan invariante para la medida. Estas actividades dan a conocer al profesor el desarrollo psicogenético del alumno.

J. Piaget se interesó por analizar los procesos de aprendizaje de la medida de magnitudes y elaboró un modelo teórico para explicar dichos procesos. Este investigador identifica dos procesos fundamentales situados en la base de la medición de todas las magnitudes que son: La conservación de las medidas y la transitividad de las medidas que estudiamos en el siguiente apartado.

1.7. CONSERVACIÓN DE LA MEDIDA Y TRANSITIVIDAD

Según Piaget, el concepto de medida se relaciona íntimamente con la lógica, de forma que hay una serie de conceptos o ideas lógicas que son imprescindibles para que el aprendizaje sea significativo, y no algo mecánico y sin sentido, como es aprendido por muchos alumnos.

La conservación es uno de los importantes requisitos para que el profesor tenga éxito en la didáctica de la medida. Cuando hablamos de *conservación de la cantidad*, nos referimos a *la capacidad de percibir que ciertas propiedades como número, longitud o sustancia no varían cuando en ellas se producen cambios de forma, tamaño o posición*.

Por ejemplo, damos a un alumno dos cintas de telas y éste comprueba que tienen la misma longitud; después, una de ella la estiramos y la otra la doblamos, el alumno debe seguir pensando que aunque hayamos cambiado la forma siguen teniendo la misma longitud. Conservar significa que el alumno comprende que las relaciones cuantitativas entre dos series de objetos no varían a pesar de que produzcamos cambios que no impliquen ni adición ni substracción de objetos. Dichos cambios pueden ser agrupamientos, separaciones, amontonamiento, etc.

Piaget distingue diferentes etapas en la consecución de la conservación correspondiente. Así en una primera *etapa de génesis*, el alumno muestra un pensamiento rígido, sujeto a la percepción directa, que se caracteriza por la falta de conservación, es decir, el alumno se deja llevar por la apariencia de los objetos y no descubre la invariancia cuando se somete el objeto a transformaciones.

La segunda etapa se llama *etapa de transición o elaboración*, en la que la conservación aparece pero no se generaliza, ya prima la lógica sobre la apariencia y el alumno empieza a observar

la conservación en algunos casos. En esta etapa, el alumno duda en muchas ocasiones sobre si se ha producido una invariancia o no. Por ejemplo, es capaz de observar la invariancia de la longitud de una cinta colocada en círculo pero no si hacemos un lazo con ella. La última etapa es *de logro o adquisición*, donde el alumno es capaz de responder correctamente a todas las preguntas relacionadas con la conservación.

Según diferentes investigadores, los alumnos conservan la longitud a los 6 años, la masa entre 8 y 9 años y el peso entre los 9 y 10 años, el tiempo entre los 7 y 8 años, el área a los 10 y el volumen a partir de los 12 años. Estas edades son orientativas pues puede haber alumnos que alcancen la conservación antes o después. Lo importante es observar que el alumno no adquiere la conservación a la misma edad, en todas las magnitudes, sino que se sigue una secuencia. La conservación es anterior a la medición por lo que el profesor debe asegurarse que el alumno conserva bien la magnitud correspondiente antes de enseñarla. En cada una de las medidas mostraremos diferentes actividades para que el profesor observe la conservación de éstas.

Año	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Longitud		-----	———								
Masa				-----	———	———					
Área						-----	———				
Volumen								-----	———		
Tiempo			-----	———	———	-----					

Fig. 1.1. Conservación de la medida.

La propiedad de la transitividad de las medidas consiste en que, *si un objeto A mide lo mismo que otro objeto B y el objeto B mide lo mismo que otro objeto C, entonces el objeto A mide lo mismo que el objeto C*. La transitividad es una propiedad que va a tener sentido cuando se utilice una unidad de medida para medir los tres objetos y no se midan superponiendo unos sobre los otros.

Por ejemplo, para resolver los problemas de seriación, el alumno debe aplicar la regla lógica de la transitividad. Parte del problema surge porque no comprenden que, en una serie ordenada de palitos de menor a mayor, un objeto en la mitad de la serie es a la vez más corto que los que le siguen y más largo que los que le preceden. Los niños de mayor edad pueden construir mentalmente relaciones entre los objetos. Saben inferir la relación entre dos si conocen su relación con un tercero. De tal forma, si saben que el palo A es más corto que B y que éste es más corto que el palo C, el palo A deberá ser entonces más corto que C. Conforme a la teoría de Piaget, la transitividad se alcanza entre los 7 y 11 años de edad.

1.8. METODOLOGÍA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MEDIDA

Los problemas de medida son muy comunes en la vida ordinaria; por ello, es importante enseñar al alumno la resolución de estos problemas siguiendo los pasos de resolución de problemas de Polya.

El modelo más clásico y conocido es el de George Polya, todavía vigente, que consta de cuatro fases: Comprensión del tema, Planificación, Ejecución del plan y Supervisión. La gran

mayoría de los modelos que se han elaborado posteriormente guardan estrecha relación con el modelo de Polya y sus fases.

Las etapas de resolución de problemas, según el modelo de Polya, se refirieren, en primer lugar, a que el alumno *comprenda el tema* como requisito principal antes de actuar. Esto consiste en mudar cada oración a una representación mental para posteriormente integrar esta información en un esquema coherente. En la siguiente etapa, *la planificación*, el alumno aprende a razonar cuáles son las ideas o procesos lógicos que le llevan a la solución; para ello, examina las estrategias generales que puede aplicar y elige las acciones que debe realizar. Después, en la ejecución del *plan* organizado en la etapa anterior, se traducen las ideas en términos de operaciones mediante las que se obtiene la solución o las soluciones. La última etapa sería la *supervisión* en la que se evalúan las decisiones tomadas y los resultados del plan realizado, por ejemplo, se comprueba que la solución es coherente y lógica para el problema planteado.

El modelo de Polya y todos los modelos propuestos posteriormente nos confirman la similitud entre la organización de las actividades humanas y la resolución de problemas. En ambos casos encontramos dificultades que superar, tomamos decisiones mediante las que encontramos caminos intermedios que nos van acercando a nuestro objetivo, es decir, se alcanzan los fines buscados mediante una planificación teniendo en cuenta los recursos que tenemos a nuestro alcance. Así pues, la educación matemática, mediante la resolución de problemas, es la mejor forma de desarrollar en los individuos capacidades en las que sepa responder a situaciones con cierta flexibilidad, aprender a sacar partido de circunstancias imprevistas, saber encontrar semejanzas entre situaciones que aparentemente no son parecidas y realizar síntesis de antiguos conceptos que den lugar a nuevas ideas e hipótesis de planteamientos.

Una vez que el alumno conoce los pasos para resolver un problema, el profesor debe aplicar en las actividades la conocida *metodología de resolución de problemas*.

Esta metodología está basada en la aplicación de la medida a diversas situaciones o problemas en complejidad adecuada al nivel del alumno y que tienen que ver con su vida ordinaria. Por ello, pueden aparecer con datos incompletos, tener una o varias soluciones, presentados de forma gráfica, sin datos numéricos... entre otros casos.

La justificación de la conveniencia de utilizar esta metodología, se basa en que se considera que la dificultad de aprendizaje está más relacionada con las estrategias de enseñanza de la medida que con el contenido.

La metodología de resolución de los problemas requiere una serie de etapas como son:

Fase motivadora. De experimentación: en la que se realicen diferentes pruebas o ensayos relacionados con el entorno real.

Fase de comprensión: mediante la representación gráfica y simbólica, reflexión e interiorización y comunicación oral o escrita en la que los aprendizajes sean lo más significativos posible.

Fase de aplicación: para profundizar y comprobar los conocimientos aprendidos, en la que se realicen otros ejercicios y problemas del entorno real en los que también puedan surgir nuevos conceptos.

En estas fases deben tenerse en cuenta las estrategias, el lenguaje y los algoritmos y destrezas del alumnado.

En esta metodología, el profesor tiene que saber motivar adecuadamente la realización de las actividades, siendo claro y breve en sus explicaciones, poniendo el énfasis en la aplicabilidad y la relación del tema de estudio con otros temas. Mientras el alumno realiza las tareas, el profesor va proporcionando sugerencias, mediante la formulación de preguntas o subrayando la importancia de justificar lo que se vaya obteniendo. En los debates, su papel es de moderador, que hace hablar al alumno promoviendo la discusión y el análisis, contracte de los resultados debidamente justificados.

Se deben abordar los contenidos matemáticos desde las experiencias que posee el alumnado en Primaria. Pero esto debe ser solamente un punto de partida, para llegar de una manera progresiva a la abstracción y a la formalización del conocimiento matemático. Es en la Secundaria cuando el profesor debe aprovechar los conocimientos empíricos de los alumnos para transformarlos en otros más estructurados y rigurosos, sin olvidar, en esta etapa, los planteamientos experimentales.

Suponemos que planteamos a los alumnos el siguiente problema:

Si quisiéramos empapelar este aula en el que nos encontramos ¿cuántos euros nos costaría?

La etapa de comprensión del problema según Polya, en este caso queda minimizada pues el enunciado es simple y concreto. La fase de comprensión de la metodología resolución de problemas coincide con la etapa de planificación de Polya, se establece un debate en el que los alumnos deben llegar a que para poder empapelar el aula es necesario saber sus dimensiones, es decir, el cálculo de la superficie del aula, es decir, área de cada una de las paredes. Es preciso que los alumnos, divididos en grupo, en esta fase motivadora elaboren un plan para el cálculo total de dicha superficie. Mediante pruebas y ensayos van decidiendo calcular primero el área de cada una de las paredes, teniendo en cuenta los vanos que se encuentran en ellas. Buscan estrategias de cuál es la mejor forma de calcular dichas áreas, dividiéndola en paneles iguales y luego sumando, restando los vanos iguales, etc. Posteriormente hay que realizar el cálculo de los rollos de papel que hay que comprar, teniendo en cuenta los diferentes precios que podemos encontrar en el mercado.

También es en la fase de comprensión cuando se desarrolla la ejecución del plan concebido en la etapa anterior; para ello, mediante la resolución práctica del problema los alumnos reflexiona y se van haciendo preguntas sobre la exactitud de la solución y si podemos comprar el papel exacto que mide la superficie, etc.

Para la fase de aplicación de la metodología de resolución de problema se buscan problemas relacionados con el que acabamos de resolver como el cálculo de la superficie de la fachada de un edificio señero como puede ser una iglesia o un estadio.

Metodológicamente la resolución de problemas pone de manifiesto la eficacia del trabajo en grupo, tanto en el planteamiento y en la resolución del problema como en la superación de las dificultades de los alumnos menos dotados.

En esta metodología, es muy importante tener en cuenta que el alumno resuelva problemas adecuados a su nivel de conocimientos pues en caso contrario, al fracasar repetidas veces, no se ve compensado con el éxito y no desarrollará capacidades satisfactorias de resolución de problemas.

Es necesario que los problemas que presentemos a los alumnos estén planteados desde diferentes contextos: deportes, viajes, vacaciones, trabajo, escuela, ... en los que trataremos los mismos conceptos matemáticos, pero que pueden ser más valorados por los alumnos por su

aplicación en diferentes situaciones de la vida ordinaria. Así podemos hacer un estudio de las medidas que se utilizan en los deportes, con lo que el alumno llegará a valorar más la importancia y utilidad de esta materia en la sociedad.

La metodología de resolución de problema es una idea simple, pero que requiere mucho cuidado en su puesta en práctica. Una de las cosas más difíciles para el profesor novel será encontrar y plantear cuestiones, actividades y problemas que los alumnos sean capaces de 'abordar' y a partir de los cuales, dicho profesor, pueda comenzar a introducir los conceptos o materia correspondientes, útiles en los problemas reales y cotidianos. Ahora bien, en el pensamiento de cada alumno se encuentran situaciones cotidianas, de su fantasía, de la realidad social, etc., que se pueden traer al aula y convertirlas en problemas de todo el alumnado.

1.9. LAS COMPETENCIAS BÁSICAS EN RELACIÓN CON LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MEDIDA

Se denominan competencias básicas aquellas competencias que un alumno debe alcanzar al finalizar la enseñanza obligatoria, para realizarse como persona y como ciudadano. Éstas harán que su incorporación a la vida adulta sea de forma natural, y le darán confianza para seguir aprendiendo durante toda su vida.

De acuerdo con la propuesta realizada por la Unión Europea, se identifican las siguientes competencias clave:

1. Competencia matemática y competencias en ciencia y tecnología.
2. Competencia en comunicación lingüística.
3. Competencia digital.
4. Sentido de la iniciativa y el espíritu de empresa.
6. Aprender a aprender.
7. Competencias sociales y cívicas.
8. La conciencia y la expresión cultural.

La competencia matemática es la capacidad del alumno para utilizar los conceptos matemáticos aprendidos y aplicar el razonamiento matemático en la resolución de los problemas que le presenta su vida cotidiana diaria y de trabajo.

La adquisición de esta competencia va a llevar al alumno a manejar los procesos de pensamiento, como la inducción y la deducción, los cálculos y la lógica. El alumno debe conocer la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para: calcular, medir, ubicarse en el espacio, representar e interpretar la realidad, a partir de la información disponible. En nuestro tema, se debe dar al alumno la posibilidad real de utilizar las actividades de medida en contextos tan variados como sea posible.

La competencia matemática la van consiguiendo los alumnos en la medida que los contenidos matemáticos los utilizan en un mayor número posible de situaciones que se le presentan en su vida cotidiana, fuera del aula. Se va modelando un individuo con capacidad crítica para afrontar su vida. Se entiende que la carencia de esta competencia en el alumnado le va a suponer tener dificultades en la organización individual o colectiva tanto en el mundo personal como en el laboral.

Desde esta materia, también se contribuye *a las competencias en Ciencia y Tecnología* contribuyendo con la Orientación espacial y la Geometría en optimizar su capacidad de orientación para hacer construcciones o mejora en el empleo de planos, mapas, dibujos que mediante la medida se facilita la comunicación de resultados e informaciones rigurosas.

La enseñanza y aprendizaje de la medida colabora en la competencia en *comunicación lingüística* mediante el lenguaje específico de esta materia, enseñando al alumno nuevas palabras y expresiones que debe incorporar progresivamente a su lenguaje usual. Se trata de que el alumno haga descripciones verbales de las actividades o resultados obtenidos, pero también que sea capaz de atender y entender a las explicaciones de otros compañeros y participar en los debates, para desarrollar su capacidad de crítica y sus habilidades comunicativas. Se debe conseguir que el alumno se exprese correctamente y con la mayor precisión posible en los temas relacionados con la medida. La comunicación y el debate le ayudan a comprender mejor los conceptos y las destrezas procedimentales que aplica, ya que debe esforzarse en establecer relaciones entre los conceptos y las actividades, clarificando y justificando las acciones que realiza o ha realizado.

En el logro de la *competencia digital* se colabora mediante la iniciación de los alumnos en los usos de calculadora, programas de ordenadores e internet para realizar actividades de medidas.

En el sentido de *la iniciativa y el espíritu de empresa*, que se basa en la habilidad de transformar las ideas en actos y en el desarrollo de la creatividad, la innovación y asumir riesgos, está muy presente la resolución de problemas de medida mediante sus etapas de planificar mediante el razonamiento, ejecución del plan, y la valoración y análisis de los resultados. La planificación, en este caso, enseña a los alumnos a pensar y analizar con precisión la situación que se le plantea, para trazar un plan que le lleve a la solución óptima de la situación. En definitiva, debe buscar estrategias, tomar decisiones y gestionar los recursos para obtener la solución. Valorar esa solución, observando sus pros y sus contras le hace concebir otras variaciones del problema que mejoren la solución obtenida. Estas actividades forman a un alumno con una mayor iniciativa personal.

En el desarrollo de la *competencia aprender a aprender* influye el carácter práctico de la Medida en las que el aprendizaje se consigue mediante herramientas básicas, materiales y recursos que se utilizan en las metodologías de resolución de problema. Mediante estas metodologías se pretende ayudar al alumno a ser consciente de los saberes que domina, de sus carencias, de lo que necesita aprender para evitar las lagunas, optimizando y orientando los procesos de aprendizaje hacia sus objetivos personales. También, contribuyen a desarrollar su pensamiento estratégico, es decir, la capacidad de cooperar, de autoevaluarse, y el manejo eficiente de un conjunto de recursos y técnicas de trabajo intelectual, individuales o colectivas, desarrolladas mediante experiencias de aprendizaje. El objetivo es que el alumno se implique en ser consciente, gestione y controle sus capacidades desde un sentimiento de competencia o eficacia personal.

En este sentido, se contribuye también al logro de la *competencias sociales y cívicas* pues, como en otras áreas, el trabajo en equipo adquiere una dimensión singular, ya que enseña al alumno a escuchar y a aceptar otros puntos de vista distintos al propio, como se extrae de todo el proceso que debe realizar en la resolución de problemas.

Con respecto a la *conciencia y expresión cultural*, la Medida ha sido siempre considerada clave en el desarrollo cultural de las distintas civilizaciones. No se puede concebir el Arte en

todas sus manifestaciones, pintura, escultura, arquitectura, etc. y en todas las culturas sin la medida, la geometría y, por supuesto, los números.

Por último, concluir que estas competencias no son aisladas sino que son interdependientes desde la reflexión crítica, la creatividad, la resolución de problemas, la toma de decisiones y la gestión constructiva.

1.10. ASPECTOS PREVIOS PARA ENSEÑAR A MEDIR

En este apartado, abordamos, ya de una manera concreta, la enseñanza y aprendizaje de la medida en Primaria. Pero antes de estudiar cada una de las medidas que se aprenden en Primaria, vamos a comentar algunos aspectos previos y comunes a todas las medidas de estudio.

Para empezar, el profesor puede realizar una actividad que consiste en:

- *Piensa en un día normal y anota todas aquellas situaciones de tu vida ordinaria y escolar que estén relacionadas con la estimación o medida de alguna magnitudes conocidas como, longitud, masa, tiempo, capacidad, superficie, volumen.*

El profesor hace observar al alumno que estas situaciones son muchas más de las que podía pensar, lo que justifica la importancia de saber estimar y medir las distintas magnitudes correspondientes a Primaria. Siguiendo con la metodología, en este apartado, el profesor busca la comprensión por parte del alumno de aquellas situaciones en las que se utilizan magnitudes. Emulando a cómo ha sucedido en la historia, se considera en un principio la necesidad de medir, empezando las medidas de objetos con unidades arbitrarias para pasar posteriormente a reflexionar sobre la necesidad de utilizar medidas entendidas por todos, lo que llamamos medidas convencionales.

Así pues, vamos a considerar diferentes recomendaciones o aspectos previos a la enseñanza de la medida:

Las primeras recomendaciones son preparatorias para el aprendizaje de la medida.

1. **Sucesos continuos y discontinuos.** En la vida ordinaria observamos *sucesos discontinuos* como contar las bolas de un collar, los pasos que hay hasta la casa, que son fácilmente calculable mediante el conteo. Pero hay otros sucesos, los que llamamos *continuos*, como el paso del tiempo, los desplazamientos, que no pueden ser medidos mediante el conteo. Por ello, el alumno debe saber distinguir bien entre los sucesos continuos y los discontinuos para observar qué objetos puede medir y cuáles no.
2. **Orientación espacial.** Para un trabajo adecuado con el alumno, referente a la medida, es interesante que éste conozca y domine el espacio donde se mueve, es decir, sepa entender los conceptos espaciales como cerca, lejos, delante, detrás, pues serán utilizados en las actividades propias de la medida. En Barrantes y Barrantes (2017) se dedica un capítulo completo a la orientación espacial en las que los conceptos espaciales se estudian siguiendo unas etapas acorde con el desarrollo evolutivo del alumno.
3. **Clasificación y seriación.** Los procesos de clasificación y seriación deben ser también comprendidos por los alumnos ya que el concepto de magnitud está construido sobre éstos como hemos visto en la definición de cantidad de una magnitud.

4. ***Dominio del sistema decimal.*** Es necesario que el alumno domine el sistema decimal y las operaciones correspondientes que tenga que realizar cuando hace actividades de medida.
5. ***Desarrollo evolutivo.*** Desde corta edad, el alumno realiza actividades relacionadas con la medida, construye porteras, reparte un refresco en dos vasos y los iguala para que tengan la misma cantidad, o sirva más o menos en un vaso. Por ello, el maestro debe conocer en qué estadio de comprensión se encuentra el alumno, es decir, los estadios de desarrollo cognitivo según Piaget y debe conocer también el desarrollo evolutivo del alumno, esto es, las edades a las que el niño es capaz de comprender las distintas magnitudes logrando la conservación de ellas.
6. ***Etapas del aprendizaje.*** El aprendizaje atravesará tres etapas bien definidas que son:

– ***Etapas manipulativa:*** El alumno piensa y resuelve mediante la actividad concreta, básicamente, esto es, aprende midiendo los objetos. Los métodos tradicionales basadas en un alumno pasivo han sido causa de muchos fracasos en el aprendizaje de la medida.

La manipulación es básica en estos niveles de estudio. Solo manipulando se puede distinguir las propiedades de los objetos; si el alumno no toma en sus manos dos bolas de igual apariencia, es difícil hacerle ver que una pesa más que otra. El trabajo con unidades, sobre todo con aquellas cuyo tamaño lo permite, se debe hacer desde la manipulación, que habitúa al alumnado con el orden de la magnitud, requisito importante para realizar estimaciones de medida y, posteriormente, poder descubrir y generalizar la relación entre los distintos órdenes de las unidades de medida. Solo desde las actividades prácticas, el alumno puede dar sentido a los múltiplos y submúltiplos de la unidad de medida correspondiente al compararla con la cantidad a medir. Solo así se le puede presentar la necesidad de utilizar otra unidad mayor o menor acorde con dicha cantidad.

Los alumnos que no están acostumbrados a medir, no se ven forzados a buscar estrategias para buscar entre los objetos cotidianos instrumentos para realizar medidas. Estos alumnos, que apenas practican y que solo conocen los instrumentos convencionales para medir, hacen elecciones poco adecuadas en su vida cotidiana como por ejemplo, el uso de una regla graduada para medir la longitud de una circunferencia, cuando mucho más idóneo sería un metro de tela o una cuerda.

– ***Etapas gráfica:*** El alumno realiza las mismas o semejantes actividades de la etapa anterior mediante imágenes que tiene que construir, dibujar, colorear etc. relacionadas con las actividades manipulativas.

– ***Etapas simbólica:*** Consiste en transformar la actividad en símbolos numéricos o matemáticos conocidos por los alumnos.

En todos los casos sería necesario la *traducción oral*, esto es, que el alumno *fuera explicando lo que va haciendo* para conseguir la competencia básica referida a la utilización del lenguaje.

Así pues, el aprendizaje no se produce de manera pasiva, sino que se da como resultado de una construcción activa que queda bien plasmada en el famoso dicho *Oigo y olvido, Veo y recuerdo y Hago y comprendo.*

Estas otras recomendaciones son ya más relacionadas con el verdadero aprendizaje de medir.

1. **Necesidad de medir.** En los contenidos de Primaria debe considerarse la necesidad de la medición, manejando la medida en situaciones diversas relacionadas con el entorno del alumno, así como estableciendo los mecanismos para efectuarla: elección de unidad, relaciones entre unidades y grado de fiabilidad.
2. **Uso de todos los sentidos.** En esta metodología es imprescindible el uso de los sentidos para realizar estimaciones, sin imposiciones externas a ellos. Cuando el alumno solo utiliza un sentido como la vista para estimar la masa o la capacidad, se tropieza con situaciones como la ya conocida del peso del kilo de paja y el kilo de hierro asociando grandes masas a grandes volúmenes. Los sentidos bien utilizados son la base sensorial necesaria para una buena formación de los conceptos de longitud y demás magnitudes.
3. **Estimación de las medidas.** Como hemos visto, en los currículos actuales de medida se indica que es conveniente que el alumno realice actividades en las que la estimación sea más importante que el mero resultado exacto. Las diferentes estimaciones de una medida llevan al alumno a practicar la idea de aproximarse cada vez más a la verdadera medida, lo que afianza en el alumno la idea de que, en la práctica, no podemos llegar a la medida exacta sino a aproximaciones cada vez mejores. Es de una forma teórica, mediante cálculos, como se puede obtener medida sin errores.
4. **Actividades de la vida cotidiana y laboral.** Por ello, es conveniente que el alumno se familiarice con los problemas reales, como cantidad de pintura para pintar una habitación, medir el área del patio del colegio, volumen de una piscina, superficie de la carrocería de un coche, cuya medida práctica siempre van a obtener mediante una aproximación en la que se intenta medir con el mínimo error, en lugar de los problemas teóricos de libros en los que se calculan superficies de terrenos o volúmenes de sólidos regulares que no son del interés del alumno.
5. **Unidad de medida.** Como hemos dicho anteriormente, la medida de un objeto depende unívocamente de la unidad de medida. Es importante que el profesor mediante las actividades correspondientes haga ver a su alumnado la importancia de establecer la unidad de medida antes de realizar la actividad de medir. Está comprobada la cantidad de errores que cometen los alumnos cuando olvidan reiteradamente la unidad de medida que están utilizando al tener que expresar el resultado de las mediciones. El alumno debe comprender y automatizar que el cambio de unidad presupone el cambio en la medida de una cantidad de magnitud. En este tema los profesores suelen hacer más hincapié en la escritura correcta de las medidas y su conversión en unidades. Sin embargo, consideramos que es necesario realizar actividades de estimación y medidas aproximadas que son más útiles en la vida ordinaria o profesional del alumnado.
6. **Cambio de unidades.** Antes de la memorización de los distintos algoritmos que se utilizan para los cambios de unidades (escala) es necesario que el alumno realice actividades manipulativas que puedan asegurar al profesor que el alumno comprende y ha descubierto las distintas relaciones entre las unidades. Trabajar en el Sistema Métrico Decimal sin haber hecho actividades de cambio de unidades no convencionales dificulta y puede que el alumno no observe y aprenda las regularidades propias de dicho sistema al no compararlas con nada.

7. **Medidas directas e indirectas.** Sabemos que podemos medir de dos formas distintas. Por una parte, si se toma una medida unidad, se establece una relación medida que a la superficie dada le hace corresponder el número de veces que la unidad de medida está contenida en ella. Esta es una forma de *medida directa* y el procedimiento de medir es simplemente contar las veces que la unidad medida cabe en la magnitud del objeto a medir. Algunas magnitudes también se pueden medir como productos de medidas, por ejemplo para calcular el área de rectángulo multiplicamos la base por la altura. Esa forma de medir se conoce como *medidas indirectas*, que es bidimensional o tridimensional, según la magnitud a medir.

Aunque las dos formas de medir son equivalentes para las soluciones de las medidas; sin embargo, no se considera así desde la didáctica. La medida indirecta implica realizar multiplicaciones mientras con la medida directa el resultado es aditivo y de manera inmediata. Por ello, está comprobado que los alumnos tienen bastantes dificultades para calcular medidas en estas edades mediante la medida indirecta.

Hay magnitudes, como son la masa y la capacidad, donde la medida directa siempre puede ser utilizada, pero otras, como la superficie y el volumen, dependen de la forma geométrica del cuerpo a medir y, por tanto, se presentan casos en los que tenemos que aplicar la medida indirecta. Así, no se puede utilizar la medida directa, por ejemplo, si queremos medir un trapecio isósceles.

8. **Medida exacta y medida entera.** Cuando el alumno ya mide con cierta precisión se puede confundir la medida exacta con la medida entera. Por ejemplo, se habla de 2 metros como exacto y 5,6 metros como inexacto cuando si la medida se ha hecho bien las dos cantidades son igualmente de exactas. En este sentido, el abuso de actividades con cantidades enteras choca con las medidas de la realidad en las que las cantidades enteras, como por ejemplo 3 metros, son fruto de la casualidad, más que de la cotidianidad en la que es más común obtener 5,87 metros.

9. **Patrimonio cultural.** Es interesante, también, para preservar y tomar conciencia del patrimonio cultural de la zona, que los alumnos, sobre todo en los últimos ciclos, hagan reconocimientos de unidades e instrumentos de medidas tradicionales, bien locales o bien regionales mediante proyectos escolares, visitas a museos, etc. En la bibliografía encontramos una extensa bibliografía sobre las medidas tradicionales en Extremadura de Sánchez y Casas, profesores, que puede ser también extensible a otras comunidades.

TEMA 2

ENSEÑANZA DE LAS MEDIDAS DE LONGITUD, CAPACIDAD Y MASA (PESO)

2.1. DESARROLLO DIDÁCTICO DE LA ENSEÑANZA DE LA MEDIDA

Para la enseñanza-aprendizaje de la medida con las distintas magnitudes, consideramos que el futuro profesor debe tener un esquema general del que partir que le ayude a hacer su trabajo docente mucho más sencillo. El esquema general que nosotros proponemos sería el siguiente:

1. **Juegos preparatorios** para la magnitud correspondiente en los que el objetivo es que el alumno sienta la necesidad de medir. El estudio de la medida de las magnitudes implica la comprensión previa de varios conceptos por parte de los alumnos, como hemos comentado en el apartado anterior. Normalmente, el profesor, en un principio, no conoce cuál es la experiencia anterior y la formación de conceptos de sus alumnos; por ello, es necesario comenzar realizando ejercicios en grupo que permitan al docente saber cuál es el estado de desarrollo de cada alumno en los preconceptos de medida, para recordarlos, simplemente, o para ayudar a aquellos que sufren un posible retraso.

En todas estas actividades que el profesor propone a los alumnos, en un principio, se debe buscar que éstos hagan comparaciones intuitivas, mediante la observación sin que se les presente la necesidad de medir; para ello, debe haber diferencias notables de medidas entre los objetos a comparar. El procedimiento más sencillo de comparación es hacerla mirando los objetos a comparar, como el estadio más primitivo de la estimación sensorial. O bien mediante una superposición de los objetos.

Posteriormente, se irán limitando esas diferencias, de forma que el alumno vaya sintiendo la necesidad de medir, al no poder diferenciar a simple vista qué objeto tiene mayor o menor medida. Es mediante estas actividades, como el alumno va a empezar a sentir la necesidad de utilizar una unidad de medida que le sirva como referencia; esas unidades van a ser, en el primer momento, las unidades arbitrarias.

2. **Unidades no convencionales** o arbitrarias que son las primeras con las que los alumnos aprenden a medir. Las unidades arbitrarias que debe utilizar el alumno para medir las distintas magnitudes deben ser propuestas por él principalmente, aunque algunas pueden ser sugeridas por el profesor. Así pues, se debe elaborar una tabla con unidades arbitrarias, que el alumno puede utilizar para cada magnitud.
3. **Unidades convencionales** porque llega la necesidad de comparar y comunicarnos las medidas, unas personas con otras.
4. **Actividades conjuntas** con dos o varias medidas, para trabajar y reforzar éstas dentro de contextos relacionados con los alumnos y para plantear la necesidad de precisar, mediante la introducción de los múltiplos y divisores.

Vamos a desarrollar de una forma más específica y particularizando para cada magnitud, todo lo estudiado en el tema anterior, así como las fases de enseñanza- aprendizaje. Concretamente en este tema nos vamos a centrar en las medidas de longitud, capacidad y masa (peso).

2.2. MEDIDA DE LA MAGNITUD LONGITUD

En su vida cotidiana, el alumno puede realizar actividades en las que tenga que medir las tres dimensiones de un objeto o bien el espacio distancia que hay entre dos puntos u objetos. Atendiendo a estas dos formas de utilización de la longitud cotidianamente, el profesor debe realizar actividades como las que comentamos a continuación.

Juegos preparatorios

En primer lugar, el profesor realiza unas actividades de Conservación de la longitud pues es un requisito necesario para que el alumno pueda comprender las medidas de longitud.

- *Se presenta a los alumnos dos varillas idénticas colocadas con sus extremos coincidentes. El alumno debe tener claro que las dos miden la misma longitud. Ahora desplazamos una de ella de forma que no coinciden los extremos y el profesor pregunta: ¿cuál de las dos varillas es más larga? ¿Por qué? Ídem doblando una de las varillas como muestra la figura 2.1.*
- *Damos al alumno dos cuerdas. Éste observa que son de igual longitud y para ello se le pregunta: ¿Es igual o diferente la longitud de las dos cuerdas? Ahora hacemos que una de las cuerdas tenga varias curvas y preguntamos: ¿Si tus dedos anduvieran sobre los dos caminos de cuerdas, en cuál se tardaría más en llegar de un extremo al otro? Razona por qué es esto así.*

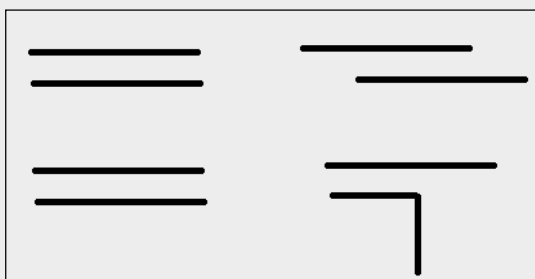


Figura 2.1 Conservación de la longitud.

El profesor elaborará un listado de aquellas palabras que están relacionadas con las medidas de longitud. Por ejemplo, podemos asociar la longitud con las palabras: largo, corto, cerca, lejos.

Una vez elaborada la lista, el profesor realiza algunos juegos preparatorios como:

- *Hacer comparaciones mirando los objetos a comparar en las que las longitudes de los dos objetos sean significativas, por ejemplo, ¿esta aula es más larga o ancha?*
- *O bien mediante una superposición de los objetos, por ejemplo, varias tiras de papel. En este caso, el alumno debe colocar las tiras haciendo coincidir uno de los extremos para poder observar cuál de ellas es la más larga.*
- *Se le dan una serie de varas y los alumnos eligen la más corta y la más larga, las ordenan por tamaño de mayor a menor o igualmente se puede hacer comparación de estaturas.*
- *También, se colocan objetos de forma que satisfagan condiciones de lejanía o proximidad.*

2.3. UNIDADES ARBITRARIAS DE LONGITUD

Por ejemplo: bolígrafos, palos, cuarta, paso, largo de un folio, cajas y las que los alumnos consideren oportunas.

El profesor debe hacer diferenciar al alumnado entre *la medida del objeto* y *la medida unidad en sí*. Por ejemplo, si utilizamos un folio para medir longitudes, en este folio podemos tomar dos medidas unidades diferentes (el ancho y el largo). En este caso, hay que fijar una de los dos medidas como medida unidad. Es por ello, que debemos hacer hincapié entre diferenciar la medida del objeto y la medida de longitud que tomamos como unidad.

Nos interesa que el alumno aprenda a realizar estimaciones y reflexione sobre la importancia que tienen éstas en su vida ordinaria. Las estimaciones antes de medir les ayudarán a acostumbrarse a la unidad con la que miden y esto tendrá mucha más importancia cuando utilicemos medidas convencionales. El alumno debe utilizar diversas estrategias para realizar estimaciones. Por ejemplo:

- Llevar mentalmente la medida unidad sobre el objeto a medir. Así, puede estimar la longitud de una mesa utilizando una vara o una libreta, o la longitud de la pizarra utilizando un bolígrafo.
- A veces la misma estructura o configuración del objeto a medir les ayuda a estimar una parte solamente para poder hacer la estimación total. Así, una fachada con ventanas, una valla con tablas a una cierta distancia, pupitres colocados a la misma distancia, etc. son elementos que ayudan a estimar longitudes de una manera más cómoda, mediante la estimación de una parte y multiplicando por un cierto número para realizar la estimación total. Todas estas estrategias deben ser descubiertas por los alumnos y ensayadas para llegar a obtener la mejor estimación.

Actividades para los alumnos.

1. *Dramatizar el cuento con el que comienza el tema 1, y posteriormente desarrollar una puesta en común en la que se analicen con los alumnos todas las situaciones que se producen relacionada con la medida.*
2. *Estimar distancias en el aula o en el patio, elegir la unidad de estimación para cada caso. Comprobar si es buena la estimación mediante la medida. Repetir el ejercicio con otras unidades arbitrarias.*
3. *Usar el palmo para medir la longitud de la pizarra, de las ventanas y de la mesa del profesor. Ordenar las medidas realizadas.*
4. *Hacer las mismas medidas con unidades corporales como el pie, el palmo, la braza.*

El profesor debe hacer observar a los alumnos las variaciones que se producen atendiendo a la estructura corporal de cada uno.

Ejercicio individual para estudiantes para profesores.

- *Estimar y medir una pared con diferentes unidades arbitrarias. Buscar las unidades arbitrarias más idóneas y establecer conclusiones. Defina la actividad concreta que haría con sus alumnos y enuncie las preguntas que haría como profesor.*

Actividades para los alumnos.

1. *Sistema métrico corporal. Construir con los alumnos el sistema métrico de nuestro cuerpo, que podemos llamar Sistema Métrico Corporal. Partimos de la unidad más pequeña que es la falange y el alumno va obteniendo las siguientes equivalencias de medidas mediante pruebas:*

Un dedo = 3 falanges Un palmo = 2 dedos Una braza = 2 palmos

Un brazo = 2 brazas (hasta la nuez) Dos brazos = Altura de esa persona.

A partir de aquí, el profesor diseña preguntas para establecer todas las relaciones que desee, por ejemplo:

- *Calcular todas las medidas anteriores tomando como unidad el dedo, ¿Cuál es la altura de una persona en palmos? Calcula la longitud de tu mesa en dedos, palmos, brazas o bien utilizando las tres medidas a la vez.*
4. *Lanzamiento de canicas o tazos u otro elemento de juego del niño. El juego consiste en lanzar la canica lo más lejos posible. En un primer momento todos los jugadores tiran desde una línea y habrá que observar visualmente o mediante comparación de longitudes qué canica ha llegado más lejos.*

En una variación posterior del juego, cada jugador elegirá el punto de referencia desde donde desea lanzar (marcar con una X en el piso) y la dirección en la que lanza. El problema sería averiguar qué jugador lanzó su canica más lejos. En este caso, la percepción es más complicada por lo que sería preciso aplicar estrategias de medida, que son más precisas, ¿Qué tenemos que hacer para saber qué canica recorrió más distancia? ¿Hay alguna otra forma de averiguar cuál fue más lejos? Efectivamente, una solución es medir con una unidad desde la X hasta donde ha llegado la canica, y esto para todos los jugadores. Otra variación de la actividad sería: agregar más canicas por jugador y gana quién obtenga una distancia suma mayor.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

- *Enunciar tres problemas concretos para utilizar el Sistema Métrico Corporal presentado en los párrafos anteriores.*
- *Definir un Sistema Métrico Libretal para medir longitudes mediante libretas de distintos tamaños. Explicarlo didácticamente como si fuera para tus alumnos, y enuncia tres actividades concretas.*

2.4. NECESIDAD DE UTILIZAR LAS MEDIDAS CONVENCIONALES DE LONGITUD

La utilización de las medidas arbitrarias hace observar a los alumnos la necesidad de una unidad de medida con la que todos los resultados de medida sean el mismo y no dependan del individuo que mide. Por ejemplo, los alumnos observarán que cuando miden la longitud de la clase en pasos, unos obtienen una medida y otros, otra medida distinta, pues dicho número está condicionado por la zancada de cada niño. Lo mismo ocurre si dos alumnos miden la duración de una carrera con palmadas, pues dependiendo del ritmo con que el alumno toque las palmas durará más o menos la misma carrera.

Así pues, para que todos obtengamos el mismo valor de la medida de un mismo objeto y nos podamos entender, no solo en el aula, sino también con las demás personas, padres, familia, amigos, etc. y además no se den las imprecisiones que se observan al medir con unidades arbitrarias, el profesor recomienda a los alumnos elegir unas nuevas unidades que llamaremos unidades convencionales. La siguiente actividad aclara estas ideas.

Actividad para los alumnos.

Longitud

- *Los alumnos miden el largo de la pizarra con los lápices de distinta longitud de los niños José, Jorge y Angel.*

Como los tamaños de los lápices son distintos entonces la medida de la pizarra dará distintas medidas, por ejemplo, 15, 20 o 18 lápices, respectivamente.

También se puede realizar este ejercicio con medidas corporales como el palmo, pie, braza.

- *El profesor fuerza una conversación con preguntas a los alumnos: si en vuestra casa queréis contar a vuestros padres cuánto mide la pizarra ¿Qué frase utilizaríais? Los alumnos contestarán con las diferentes medidas o con varias a la vez.*

El profesor lleva la conversación a que los alumnos se den cuenta que los padres tienen que conocer, también, la medida utilizada, para poder hacerse una idea de la longitud de la pizarra, pero no conocen esa medida unitaria pues es un lápiz concreto de un niño de medida no determinada.

- *¿Sería bueno que todos utilizáramos la misma medida? ¿Nos valen los lápices como medida para que nos entienda nuestro padre?*

Un metro, un centímetro son medidas que el alumno ha escuchado muchas veces pero sin embargo es raro ver medir a alguien con lápices salvo en actividades poco rigurosas o necesidad imperiosa. Es entonces el momento para presentarles la unidad convencional correspondiente; en el caso de nuestro ejemplo, sería el decímetro o el metro intentando que el objeto medido, en este caso la pizarra, tuviera medidas exactas o muy aproximadas en dichas unidades.

Ejercicio para los estudiantes para profesores.

Elabora actividades para las medidas de capacidad y masa de forma que se planteen la necesidad de utilizar las unidades convencionales para poder entendernos todos, como hemos hecho con la magnitud longitud.

2.5. UNIDADES CONVENCIONALES DE LONGITUD

Llegado el momento, presentamos a los alumnos las distintas unidades convencionales atendiendo a las necesidades que les surjan al realizar las actividades.

Desde un punto de vista didáctico, las definiciones que dimos al principio sobre las principales medidas en el SI no es recomendable considerarlas en Primaria, ni siquiera en las tareas de los alumnos, pues no solo son incomprensibles para ellos sino, también, para un número considerable de adultos. En Primaria tal precisión y exactitud no es necesaria; por ello, para utilizar las unidades convencionales sin definir las, nos bastamos con metros de madera, flexibles, etc.

Para la enseñanza de las medidas convencionales de longitud, es conveniente comenzar utilizando aquellas unidades más asequibles al alumno, en el sentido de que pueda manipularlas mejor, y dejar para después aquellos múltiplos y submúltiplos que son menos usuales en su vida ordinaria o bien no son manipulables por lo que suponen más dificultad de comprensión. Por ejemplo, el kilómetro es una unidad usada en la vida cotidiana pero no manipulable y difícil de ser comprendida por los alumnos que se encuentran en las etapas de las operaciones concretas, según Piaget, donde la mejor forma es aprender tocando. Es posible que el alumno hable de kilómetros pues en la vida familiar es un término utilizado normalmente, de lo que hablamos nosotros es de si realmente comprende el concepto.

De esta forma, las unidades convencionales ordenadas que según el profesor las debe trabajar con los alumnos serían, en un principio:

Longitud: el metro, decímetro y centímetro.

Estas unidades de longitud diremos que están interiorizadas por el alumno cuando es capaz de reconocerlas, y de señalar objetos que tengan aproximadamente la medida de la unidad en cuestión. Para ello hay que realizar múltiples actividades como las que veremos más adelante pues los alumnos en un principio sólo son capaces de interiorizar su altura.

Posteriormente, se pasaría a las otras unidades como decámetro, hectómetro o milímetro que el alumno tiene más dificultad para asimilarlas pues son menos manipulables y menos utilizadas comúnmente.

El alumno debe descubrir por sus propios medios los múltiplos y submúltiplos más usuales, acostumbrándose a expresar la medida con la unidad adecuada a cada medición; para ello es bueno seguir haciendo estimaciones antes de medir.

Es adecuado que el profesor plantee estimaciones de una misma medición con distintos múltiplos o submúltiplos, para que el alumno vaya relacionando las distintas medidas de la escala métrica.

En un principio, el alumno para medir utiliza varios metros, decímetros y centímetros que va colocando en línea delante del objeto a medir. Después, podemos enseñarle a medir utilizando una sola cuerda o vara de cada unidad (metro, decímetro y centímetro), lo que es dificultoso al principio para muchos alumnos.

Actividades para los alumnos.

Podemos utilizar varios tipos de metros: flexible, enrollable o cinta métrica, rígido, graduado o no, y de carpintero o plegable que es de madera y flexible por decímetros, que incluso pueden

ser elaborados por los alumnos (figura 2.2). Existe también el metro para medir alturas, que es una barra rígida graduada con un resorte móvil que se apoya en la cabeza de la persona medible, de forma que nos acota la medida de altura de dicha persona.



Figura 2.2. Distintos tipos de metros (cinta métrica elaborada por los alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado, U. de Extremadura).

- Se le da al alumno algún tipo de metro o cuerdas que midan un metro, éste debe buscar objetos que midan aproximadamente un metro. Se le hacen preguntas como ¿mide más o menos de un metro?
 - Comparándolos con un metro, ordenar diversos objetos como una escoba, una papelera, una silla, un bolígrafo y el mismo metro rígido. Se pregunta qué objetos son mayores que un metro y cuáles menores. Después ordena los que están por encima del metro y por debajo.
 - Se le dan varias varas de metros rígidos y deben hacer distintas medidas como la longitud de la clase, la anchura y altura de la portería de fútbol, la anchura de un pasillo, etc.
 - Medir perímetro de formas poligonales o circulares como las que aparecen en el suelo de un campo de baloncesto. Hacer observar que las circunferencias también se miden con unidades de longitud. Buscar el tipo de metro adecuado para estas medidas.
 - Expresa la unidad (centímetro, metro, decímetro) para medir estas longitudes.
1. La altura de una puerta. 2. La longitud de un lápiz. 3. Tu altura. 4. La anchura de la clase. 5. La goma de borrar.

La rueda métrica es una rueda cuya circunferencia mide un metro, unida a un listón que avanza en contacto con el suelo y mediante un contador de vueltas se sabe los metros que hemos recorrido. Se suele utilizar para medir distancias de campos, por lo que además de medir metros nos es válida para presentar los múltiplos del metro como decámetro o hectómetro.

- Realizar medidas mediante la rueda métrica. Por ejemplo, la longitud del patio del colegio, la anchura y largo del gimnasio.



Figura 2.3. Rueda métrica con contador en la parte trasera.

El profesor debe hacerles observar que algunas medidas no se pueden obtener exactamente con una cierta unidad de medida, por ejemplo, utilizar la unidad metro para medir una pared. Los alumnos deben observar que para medir el espacio sobrante pueden utilizar el decímetro y en su defecto el centímetro. Así, de esta forma, el alumno va adquiriendo la noción de medir no solamente con una unidad grande sino con una medida mixta, en la que utilizamos distintos múltiplos o submúltiplos.

- *Estimar y calcular la longitud de la clase, utilizando un mínimo de unidades, es decir, medir primero en metros hasta que el resto que quede se tenga que medir en decímetros e igualmente, el resto siguiente en centímetro.*

El alumno debe comprobar la equivalencia entre los múltiplos y submúltiplos del metro llegando hasta el centímetro y el decámetro. Basta con hacerlo por superposición utilizando también una cuerda de diez metros. Los alumnos con estas actividades, deben aprender que el sistema de medida es un sistema regular con cambios de 10 en 10.

- *Estimar y medir objetos como la longitud de la fachada de una casa, la longitud del campo de fútbol del colegio, utilizando cuerdas de 10 metros o decámetros.*

Posteriormente, se debe pasar también a construir y trabajar con el metro graduado, en el que mediante actividades de comparación con los decímetros y centímetros, el alumno llegue a reforzar las equivalencias correspondientes. Por último, el alumno realiza medidas con ese metro graduado obteniendo los metros, decímetros y centímetros correspondientes. Es necesario pues, diseñar las actividades correspondientes para que se establezcan esas equivalencias.

← u →						
km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Figura 2.4. Ábaco de cambios de unidades.

Actividades para los alumnos.

- Visitar un parque cercano y realizar medidas reales en metros, decímetros y centímetros del mobiliario de dicho parque. El trabajo se puede hacer en grupos y posteriormente en el aula realizar una puesta en común. La misma actividad se puede realizar en un lugar de interés para el alumno y cercano al centro escolar.
- Construir un ábaco que tenga móvil la placa de las unidades como el de la figura 2.4 para favorecer los cambios de unidades.

Después realizar tareas como: ¿ $6 \text{ km} = \text{hm}$? ¿ $4 \text{ dam} = \text{dm}$? ¿ $50 \text{ dm} = \text{m}$? utilizando dicho ábaco.

Es necesario trabajar las mediciones en las que la unidad de medida es mayor que la medida del objeto a medir. Por ejemplo, medir con un metro la longitud de un papel Din A4. Estas actividades posibilitan que el alumno comprenda el fraccionamiento de la unidad, en unidades más pequeñas, lo que nos lleva, también, a la siembra de las fracciones y los números decimales. Así, el alumno hablará de una barra que mide medio metro, un cuarto de metro, etc.



Figura 2.5. Unidad mayor que la longitud del objeto a medir.

Por ejemplo,

- Medida de objetos con reglas. Vamos a ver cuánto mide la goma en centímetros; para ello la colocamos sobre la regla a partir de cero (figura 2.5).
- Medimos la goma en decímetros utilizando en este caso una unidad mayor que la longitud del objeto a medir.
- Colocar sobre las regla, así mismo, otros objetos pequeños que tú tengas en la mesa y mídelos también en centímetros y en decímetros.

Actividades de investigación para los alumnos.

- ¿Cómo calcular el grosor de las hojas que utilizamos para escribir?
- ¿Cómo calcular la altura de una torre?

Extraemos conclusiones de estas actividades.

2.6. MEDIDA DE LA MAGNITUD CAPACIDAD

Siguiendo con el esquema general, e igualmente que con la longitud hay que realizar actividades preparatorias para poder abordar con éxito la comprensión de la magnitud capacidad.

Juegos preparatorios.

Hacemos juegos de conservación de líquidos como los que se muestran a continuación. Estas actividades son propias para un laboratorio de matemáticas en el que el alumno realiza los trasvases de líquidos.

- *Se le dan dos recipientes iguales y comprueba que en los dos hay la misma cantidad de líquidos. Se vierte el contenido del recipiente B en C más estrecho (figura 2.6) . Se le pregunta ¿hay la misma cantidad en los dos recipientes A y C?*

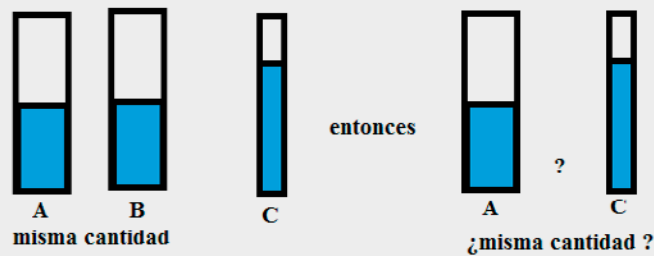


Figura 2.6. Conservación de la cantidad.

- *Misma actividad con un recipiente más ancho como se puede ver en la figura 2.7. El alumno comprueba que hay la misma cantidad de líquido en A y B. Delante de éste se vierte el contenido de B en D y ahora el profesor le pregunta: ¿Hay la misma cantidad de líquido en A y D?*

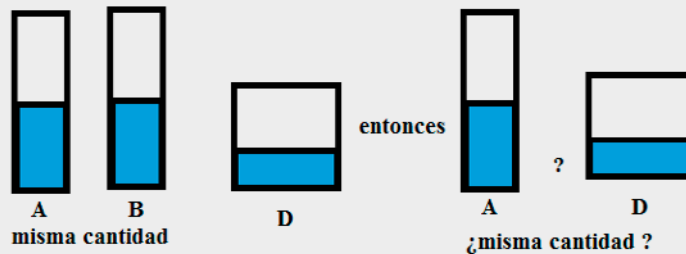


Figura 2.7. Conservación de la cantidad.

- *El alumno comprueba que en A hay más cantidad de líquido que en B (figura 2.8). Pasamos el contenido de B a C (más estrecho que A y B) y preguntamos ¿hay menos cantidad en A o en C?*
- *Misma actividad haciendo que en A haya menos cantidad de líquido que en B.*

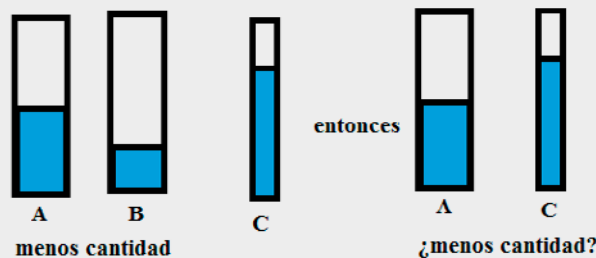


Figura 2.8. Conservación de la cantidad.

- *Tomamos varios recipientes y en todos vertemos un vaso de agua. ¿En qué recipiente hay más agua? ¿y en qué recipiente hay menos agua? El alumno debe comprender que la forma del recipiente no influye para que haya más o menos agua.*



Figura 2.9. Utensilios distintas capacidades.

Con la capacidad se asocian palabras que el profesor debe trabajar como son lleno, vacío, medio, casi, poco, mucho. Una vez elaborada la lista, el profesor realiza algunos juegos preparatorios que se resuelven mediante la observación directa o el trasvase de líquidos:

- *Dados varios recipientes clasificarlos atendiendo a que tengan la misma capacidad (figura 2.9).*
- *Dados varios recipientes llenarlos con otro más pequeño y apuntar el número de veces que el líquido del pequeño cabe en cada uno. Estimar la capacidad de otro recipiente si queremos llenarlo con el mismo recipiente pequeño. Comprobar la estimación.*
- *Ordenar recipientes atendiendo a su capacidad. El alumno enumera una serie de recipientes y los ordena según su capacidad para ello resuelve preguntas como ¿cuántos frascos del número 1 caben en el número 2? ¿Si llenamos el número 3 con el líquido del número 2 sobra o falta líquido? En las respuestas el alumno va extrayendo conclusiones.*

Así pues se va planteando la necesidad de medir para poder pasar a utilizar las unidades arbitrarias.

2.7. UNIDADES ARBITRARIAS DE CAPACIDAD

Se pueden utilizar objetos con pequeña capacidad como son utensilios cotidianos como son cucharas, cucharones, medidores graduados de jarabes u otros en forma de jarras graduadas. Otros objetos como probeta, biberones, pulverizadores, que muchas veces están graduados, hasta recipientes de bebidas: botellas, tetrabrik, u objetos caseros como: cazuelas, baños, etc. de capacidades ya mayores.

Una de las tareas del profesor es que el alumnado diferencie entre la medida y la unidad, mediante actividades. Por ejemplo, si tomamos diferentes botellas, el profesor hace observar al alumno que las botellas pueden utilizarse para medir capacidades según el líquido que pueda contener. A su vez, debe hacer ver al alumnado que no todas las botellas tienen la misma capacidad y, por lo tanto, podrían ser tomadas como unidades de capacidad distintas. El valor medida de la capacidad correspondiente va a depender de la botella que se tome como unidad.

Para realizar estimaciones puede utilizar las siguientes estrategias:

- Llevar mentalmente la medida unidad sobre el objeto a medir. Así, puede estimar la capacidad de una vasija utilizando un cazo a simple vista o haciendo marcas sobre el recipiente, vertiendo un cazo y luego estimar los que faltan para llenarlo, etc.
- A veces la misma estructura o configuración del objeto a medir les ayuda a estimar una parte solamente para poder hacer la estimación total. Por ejemplo, para calcular la capacidad de varios recipientes puede estimar la capacidad de uno y multiplicar por el número de recipientes. Todas estas estrategias deben ser descubiertas por los alumnos y ensayadas para llegar a obtener la mejor estimación.
- Estimar y luego medir capacidades con todo tipo de objetos: botellas de litro, de medio litro, de cuarto, que posteriormente van a ser nuestra unidades convencionales, pero también todo tipo de utensilios como latas, sartenes, cazuelas... para que el alumno adquiera o refuerce la conservación de la cantidad, es decir, que puede haber la misma cantidad de líquido en objetos altos y estrechos, como objetos bajos y anchos.

El alumno debe observar, mediante ejercicios de transvase de líquidos, que la capacidad depende de tres variables y no solo de dos.

Ejercicio individual para estudiantes para profesores.

1. *Enuncia un ejercicio concreto para hacer transvases de líquidos de recipientes altos y delgados a otros recipientes de distintas formas de manera que observemos si el alumno tiene adquirida la noción de conservación de la cantidad, es decir, que el alumno perciba que una cantidad de sustancia no varía, cualesquiera sean los cambios que se realicen en su configuración total. Manifiesta las preguntas que como profesor haría a los alumnos.*

Actividades para los alumnos.

2. *Carreras de agua. Dos grandes tinajas o cuencos transparentes para depositar agua. Dos equipos y cada jugador lleva un vaso de agua. El juego consiste en averiguar qué equipo es capaz de transportar más agua desde el grifo a su respectiva tinaja. Para aprovechar el juego se puede observar previamente con el grupo, la medida o capacidad de tinajas tomando como unidad el vaso de agua u otras que decidan los alumnos ¿Se puede medir la cantidad de agua con una cinta?*

Después de haber realizado el juego, mediremos la cantidad de agua depositada. En un principio, utilizaremos recipientes transparentes e iguales en tamaño y forma para que los niños efectúen estimaciones perceptivas o comparaciones del nivel del agua acercando las dos tinajas o recipientes. Más adelante, utilizaremos tinajas o recipientes opacos y diferentes en forma para reducir la cantidad de estrategias posibles y “forzar” a aplicar una unidad de medida con la que saber cuál tiene más agua y conocer el equipo ganador.

3. *Construcción de un Sistema Métrico para capacidades. Partimos de la observación de recipientes graduados como probetas o biberones infantiles que nos sirven como modelos para realizar la siguiente actividad. Comienzan los alumnos haciendo graduaciones en diversos objetos a partir de un recipiente más pequeño, que sería la unidad medida 1. Posteriormente, realizan graduaciones con otro objeto que tenga doble capacidad del primero, que será la unidad medida 2 (las marcas se hacen con otro color). Y a partir de aquí, el profesor puede diseñar distintas actividades como: comparar la capacidad de los dos objetos medidas, observar las medidas en los diferentes objetos, con las dos medidas unidad establecer conclusiones sobre cómo las graduaciones son un medio de comunicarnos, unos a otros, la cantidad de líquido que hay en un recipiente, etc.*
4. *Ejercicios de comparación con las diferentes unidades, por ejemplo, dado una serie de frascos numerados, resolver cuestiones como éstas: ¿Cuántos frascos del nº 1 caben en el nº 2? ¿cuántos del nº 3?*

2.8. MEDIDAS CONVENCIONALES DE CAPACIDAD

Igual que hicimos en la magnitud longitud es conveniente hacer observar a los alumnos la necesidad del uso de unidades de capacidad que sean entendibles por toda la comunidad en la que nos movemos. De esta manera, los alumnos deben observar que hablar de cazos, botellas, etc. no son unidades fácilmente entendibles por las personas de nuestra familia, amigos, etc. El profesor recomienda a los alumnos elegir unas nuevas unidades que llamaremos unidades convencionales.

De esta forma, las unidades convencionales de capacidad ordenadas que el profesor debe trabajar con los alumnos serían, en un principio: el litro, medio litro y el cuarto de litro.

Estas unidades de capacidad son las más usuales en la vida ordinaria por lo que nos interesa que sean interiorizadas por el alumno de forma que sean capaces de reconocerlas, y de señalar objetos que tengan aproximadamente la medida de la unidad en cuestión.

- *Buscar objetos de capacidad un litro. Para ello construimos un decímetro cúbico, cubo de un decímetro de lado, para comprobarlo. Señala también los que tienen menos y más de un litro.*
- *Estima y mide la capacidad de los recipientes de la tarea anterior.*

Posteriormente se pasaría a las otras unidades como decilitro, centilitro utilizadas también, por ejemplo, en los medicamentos, o decalitro y hectolitro que son menos comunes y prácticamente inusuales en la vida ordinaria del alumno por lo que éste tiene más dificultad para comprenderlas.

- *Observar las medidas de capacidad que se utilizan en los dosificadores de jarabes. Estimar a partir de estas medidas cuál es la capacidad que tiene el envase del jarabe. Comprobarlo utilizando un líquido inocuo como agua.*

Como se ha hecho en la medida de longitud, el profesor plantea estimaciones de una misma medición con distintos múltiplos o submúltiplos, para que vaya relacionando las distintas medidas de la escala métrica.

- *Estimar y calcular la capacidad de un barreño de agua en litros, medios litros y cuartos de litros. Para ello se puede graduar una botella de litro y medio con una escala que marque los litros, los medios y los cuartos. Igualmente se puede graduar una botella en decilitros, que nos puede ser muy útil para muchas actividades de capacidad.*

En un principio, el alumno para medir puede utilizar varias botellas de la misma capacidad que va rellenando por ejemplo de litros. Después, podemos enseñarle a medir utilizando un solo envase para, posteriormente, mostrarle probetas o botellas graduadas, en las que mediante actividades de comparación, el alumno llegue a establecer las equivalencias correspondientes.

- *Graduar una botella de dos litros con una escala que marque los decilitros, medios litros y cuarto de litros. Idem una botella de litro y, de litro y medio.*

Por último, el alumno realiza medidas con ese recipiente graduado obteniendo, por ejemplo, decilitros. Es necesario pues diseñar las actividades correspondientes para que se establezcan esas equivalencias. También se pueden utilizar probetas o vasos graduados de laboratorios.

El profesor debe hacerles observar que algunas medidas no se pueden obtener exactamente con una cierta unidad de medida; los alumnos deben observar que para medir la capacidad sobrante pueden utilizar el decilitro y en su defecto el centilitro. Así, de esta forma, el alumno va adquiriendo la noción de medir no solamente con una unidad grande sino con una medida mixta, en la que utilizamos distintos múltiplos o submúltiplos.

Es necesario también, trabajar las mediciones en las que la unidad de medida es mayor que la medida del objeto a medir. Así, si tomamos como unidad el litro de agua (figura 2.10), calcula el agua que hay en las botellas A y B que son idénticas a la primera pero contienen menos agua.

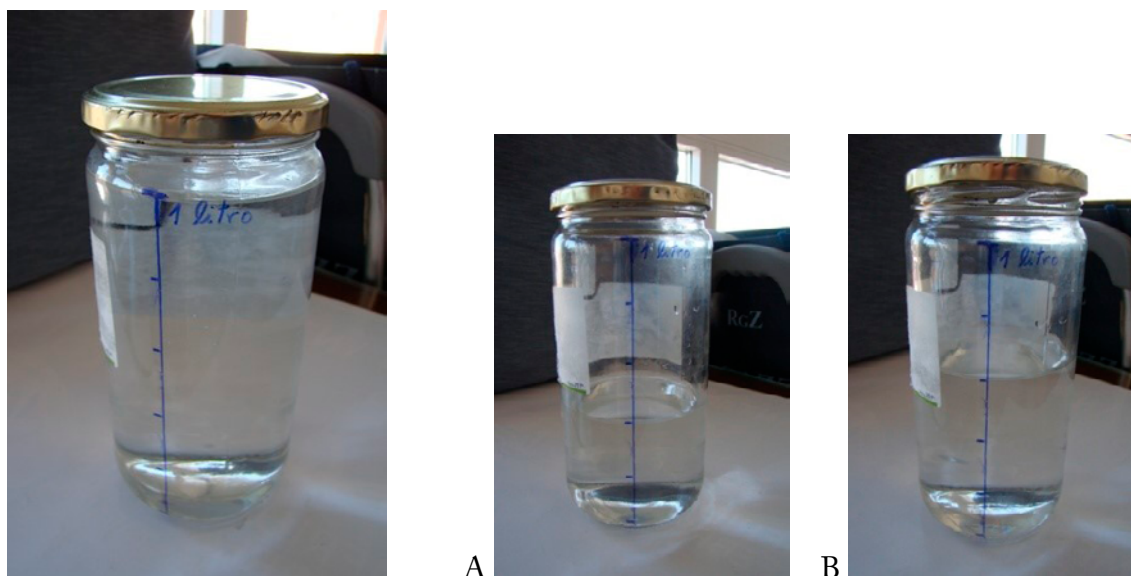


Figura 2.10. La unidad de medida mayor que la medida del objeto a medir.

Estas actividades posibilitan que el alumno comprenda el fraccionamiento de la unidad, en unidades más pequeñas, lo que nos lleva, también, a la siembra de las fracciones y los números decimales. Así hablaremos de medio litro o un quinto de litro y 0,5 litros o 0,20 litros.

Actividades para los estudiantes para profesores.

- *Realiza un ábaco con unidad móvil como el que se hizo en la magnitud longitud. Plantea tareas para los alumnos en las que dicho ábaco les facilite la solución.*

Actividades de investigación para los alumnos.

- *¿Cómo medir la capacidad de una cuchara de café? ¿y una cuchara sopera?*
- *Extraemos conclusiones de estas actividades.*

2.9. MEDIDA DE MASA (PESO)

Hemos de recordar que aunque los conceptos de masa y peso son distintos, a nivel elemental son complicados de distinguir, por eso los identificamos como si fueran uno solo. En estas primeras etapas estos conceptos se adquieren por la experiencia de pesadas en las que el alumno experimenta la resistencia que oponen los cuerpos al ser levantados.

Juegos preparatorios.

Hacemos también primeramente ejercicios de conservación de la masa de acuerdo con los principios de Piaget.

- *Se presentan varias bolas de barro y se le dice al alumno que escoja las dos bolas que tienen la misma cantidad de barro. El profesor dice a continuación: Ahora fijate en lo que hago. Voy a hacer esta bola como chorizo ¿Cuál bola crees que pesa más? ¿Qué te hace pensar así?*
- *Se presentan varias bolas de plastilina y se le dice al alumno que escoja las dos bolas que tienen la misma cantidad de masa. El profesor dice a continuación: Voy a hacer varias bolas pequeñas con una de las dos bolas grande ¿Qué pesa más la bola grande que ha quedado o todas las bolas pequeñas juntas? ¿Qué te hace pensar así?*

Hay que hacer que el número de bolas pequeñas aumente para así afianzar más el concepto de conservación.

Después hay que trabajar las palabras relacionadas con la masa.

- *Hacer actividades para comprender el significado de las palabras, pesado, ligero. Se pueden hacer actividades de comparación directa utilizando las manos como balanzas:*
- *Con objetos muy pesados y poco pesados,*
- *Con objetos de distintos pesos pero de igual tamaño y forma,*
- *Con objetos del mismo peso, pero distinto tamaño y forma.*
- *Escribe objetos que pesan más que un tetrabrik lleno de arena.*

- *Escribe objetos que pesan menos que tu libreta.*
- *Aprender a manejar la balanza de los platillos, dando significado a las distintas posiciones que pueden ocupar.*
- *Utilizar las balanzas para comprobar las estimaciones con las manos.*
- *Estimar y medir el peso de objetos. Tomamos dos objetos uno más pesado y otro más ligero, el alumno estima el más pesado con las manos y comprueba con la balanza de dos platillos. Observar qué platillo es el que baja más (figura 2.11). Igual actividad con dos objetos de igual peso ¿qué ocurre ahora con los platillos?*



Figura 2.11. Pesada de objetos.

- *Se pueden hacer también clasificaciones de objetos pesados y ligeros, bien utilizando las manos o una balanza de platillos.*

El objetivo es ir planteando la necesidad de medir para poder pasar a utilizar las unidades arbitrarias.

2.10. UNIDADES ARBITRARIAS DE MASA

En este caso se utilizan todos los objetos relacionados con la vida ordinaria del alumno que tengan masa como: canicas, bolas de hierro o de madera, chapas,...

Como en las medidas anteriores, vamos a proponer algunas actividades de estimación para los alumnos.

- *Equilibrar una bola de plastilina mediante otros objetos más pequeños como tuercas. Equilibrar la misma bola ahora con otros objetos como canicas y comparar las dos medidas.*
- *Realizar en la balanza de platillos estimaciones de dos objetos, por ejemplo, antes de pesarlos, coge en una mano, tres libretas y en la otra, cinco bolas de hierro, ¿decir qué pesa más? Comprueba tu solución pesando los objetos en la balanza. Y ahora vamos a ver cuánto pesa más uno que otro, para ello añadimos una unidad arbitraria chapas, clavos, para ver cuánto pesa uno más que el otro.*

El alumno debe mostrar que sabe la diferencia pero no cuánto pesa cada objeto.

Es también importante que el alumno conozca la importancia de una buena elección de la unidad adecuada al tipo de medida que se vaya a efectuar, por ejemplo:

Queremos encontrar la masa de un paquete de detergente mediante una balanza de dos platillos.

Elige una medida arbitraria de las que te damos para calcularla. Granos de arroz, tuercas, tetrabrik de agua. Razona cuál es a tu parecer la mejor unidad para medir el detergente.

Después de estas actividades el alumno debe aprender a medir con:

- cualquier unidad arbitraria,
- varias unidades distintas un mismo objeto,
- comparar las medidas de un mismo objeto con distintas unidades arbitrarias e
- irse concienciando de la unidad a elegir para cada actividad de medida de masa.

Para que se verifique la competencia conciencia y expresión cultural tendríamos que trabajar con las medidas tradicionales locales o regionales. En este punto proponemos el siguiente ejercicio a los estudiantes:

Ejercicio para varios grupos de estudiantes para profesores.

*A partir, de los resultados obtenidos en el Proyecto **La medida en tu Comunidad Autónoma** (ver apartado 1.3.), elaborar actividades, orientadas a los alumnos de Primaria, utilizando esas medidas tradicionales para:*

- *Tipo a. Dar a conocer a los alumnos las medidas tradicionales y sus nombres.*
- *Tipo b. Crear la necesidad de utilizar medidas convencionales.*

Cada grupo, siguiendo la línea de la elaboración del Proyecto, realizará actividades correspondientes a la magnitud que desarrollará en el Proyecto, es decir, el grupo de alumnos que hizo el proyecto sobre la magnitud longitud elaborará estas actividades sobre dicha medida.

Por ejemplo:

Una fanega es la cantidad de terreno necesaria para sembrar una fanega de grano, valor diferente para cada comarca. Así, cuando dos agricultores de pueblos distintos decían que habían sembrado 20 fanegas de trigo, sabían que su cosecha sería diferente pues no es el mismo valor en todos los lugares, así en Castilla una fanega de tierra era 6439,2 m², en Álava 2510 m² y en Sevilla 5944,4 m².-

Se pueden plantear problemas como:

- *¿Cuál es la diferencia de 100 fanegas de tierra en los diferentes lugares nombrados anteriormente?*
- *Una fanega equivale a 65 áreas ¿cuántos decímetros y metros cuadrados son sabiendo que un área es una unidad de superficie que equivale a 100 metros cuadrados? El múltiplo más conocido de las áreas es la hectárea y a veces el submúltiplo centiárea que equivale al metro cuadrado.*

Para sólidos existe también la fanega que equivale a 55,5 litros y es una unidad de capacidad o volumen utilizada para productos agrícolas como los cereales y para áridos. También varía según los lugares, así en Badajoz media fanega son 27,92 litros, en Granada 27,35 litros y en Cáceres 26,88 litros.

Preguntamos a los alumnos: *¿cuántas fanegas se necesitan para que entre Badajoz y las otras provincias haya una diferencia de 10 litros?*

2.11. MEDIDA CONVENCIONALES DE MASA

Los ejercicios comentados anteriormente lleva al profesor a realizar un debate en el que se presenten las siguientes cuestiones ¿porqué ya no se utilizan las medidas como fanega actualmente? ¿Las bolas de hierro sería una buena medida para que nos entendieran nuestros familiares y amigos cuando hablamos de pesos? Por ejemplo, yo peso 30 bolas de hierro.

Así pues, para que todos obtengamos el mismo valor de la pesada de un mismo objeto y nos podamos entender, no solo en el aula, sino también con las demás personas, padres, familia, amigos, etc., el profesor recomienda a los alumnos elegir unas nuevas unidades que llamaremos unidades convencionales.

Como hemos dicho en las medidas anteriores, hay que dar a conocer a los alumnos las medidas más manipulables y aquellas que les van a ser más útiles en la vida ordinaria, como son el kilogramo, medio kilogramo, un cuarto y el gramo. Estas medidas son las más usuales y que puede encontrarlas en la vida cotidiana tanto en su casa como en el comercio, por lo que nos interesa que sean interiorizadas por el alumno de forma que sean capaces de reconocerlas y de señalar objetos que tengan aproximadamente la medida de la unidad en cuestión.

- *Buscar objetos que pesen 1 kilogramo aproximadamente, comprobar su peso mediante una balanza de doble platillo utilizando una pesa de 1 kg. Igualmente medio kilogramo y cuarto.*
- *Buscar objetos que pesen 5, 10 gramos y comprobarlo con la balanza.*
- *Estima cuántas piezas de las frutas que más te gustan hacen un kilo. Pregunta en casa y anota el número real.*

Posteriormente se pasaría a las otras unidades como decagramo o hectogramos que son menos comunes y prácticamente inusuales en la vida ordinaria del alumno por lo que éste tiene más dificultad para asimilarlas. La única unidad que también aparece en la vida ordinaria para cálculo de grandes masas es la tonelada. Podemos plantear las siguientes actividades para adecuar la medida a la masa que se quiere medir.

- *¿Sabes cuál es la unidad más apropiada para medir la masa de: un camión, una cucharadita de azúcar, tus zapatos, un niño bebé, una lata de refresco, la pizarra de clase?*

Previamente hemos hecho una actividad para ver cuál es la masa de algunos objetos para saber lo que podemos medir realmente con cada unidad.

Ahora, el profesor plantea estimaciones de una misma medición con distintos múltiplos o submúltiplos, para que vaya relacionando las distintas medidas de la escala métrica.

- *Pesada de objetos. Estimación y peso de objetos del aula con diferentes unidades como pudiera ser: pesar un diccionario con pesas de un gramo, de cinco gramos, de medio kilo. Valorar las estimaciones y las pesadas, si son buenas o malas, y establecer conclusiones que hagan que el alumno haga reflexiones, por ejemplo, la relación que existe entre las pesadas obtenidas con las distintas medidas.*
- *Comparar objetos del mismo aspecto exterior pero de masa distinta.*
- *Clasificar objetos atendiendo a que tienen la misma masa (pesan 1 kg, medio o cuarto).*
- *Estudiar un sistema regular de pesas estableciendo las equivalencias.*
- *Pesar un libro con las distintas pesas para comprobar las equivalencias.*
- *Estimar pesos de objetos escolares y buscar la unidad idónea para pesarlos.*

- *Estimar pesos de frutas dependiendo de su tamaño como sandías en kilos, cerezas en gramos...*
- *Conocer las distintas balanzas: de dos platillos, de un solo platillos, digitales, de precisión y pesar objetos. Comprobar que el peso de un objeto coincide en ellas.*
- *Hacer un debate relativo a los usos de cada una de las balanzas en los distintos trabajos.*
- *Hacer un estudio del peso de distintos animales. Elaborar una tabla en la que expresamos dichos pesos.*
- *Hacer un estudio del peso de las personas de su familia. Hacer una tabla resumen.*

En un principio, el alumno para medir puede utilizar varias pesas de igual medida. Después, podemos enseñarle a medir utilizando pesas de diferentes medidas. El profesor debe hacerles observar que algunas medidas no se pueden obtener exactamente con una cierta unidad de medida; los alumnos deben observar que para medir la masa sobrante pueden utilizar pesas de menor medida e incluso de gramos. Así, de esta forma, el alumno va adquiriendo la noción de medir no solamente con una unidad única sino con una medida mixta, en la que utilizamos distintos múltiplos o submúltiplos.

Igualmente, es necesario trabajar las mediciones en las que la unidad de medida es mayor que la medida del objeto a medir.

Actividades para los estudiantes para profesores.

- *Realiza un ábaco con unidad móvil como el que se hizo en la magnitud longitud.*
- *Plantea tareas para los alumnos en las que dicho ábaco les facilite la solución.*

Actividades de investigación para los alumnos.

- *¿Cómo calcular el peso de objetos pequeños por ejemplo granos de arroz?*
- *¿Cómo calcular el peso de un billete? Se supone no tenemos balanzas de precisión.*
- *¿Tienen los líquidos masa? Vamos a pesar un recipiente vacío y luego lleno de agua. Explica lo que ocurre. ¿Y los gases? Vamos a ver si pesa el aire. Tomamos una percha con dos hilos colgando. En uno ponemos un globo desinflado y en el otro inflado. Explica lo que ocurre.*
- *Extraemos conclusiones de estas actividades.*

Posteriormente, cuando estudiemos la magnitud volumen volveremos a realizar actividades conjuntas de capacidad, masa y volumen relacionando y estableciendo las equivalencias de las distintas medidas.

TEMA 3

DESARROLLO DIDÁCTICO DE LA ENSEÑANZA DE LA MEDIDA TIEMPO

Una vez que hemos tratado las medidas en general y las magnitudes de longitud, capacidad y peso (masa), nos vamos a referir a tres de las magnitudes que consideramos son menos trabajadas, desde el punto didáctico, en la enseñanza-aprendizaje de las medidas en Primaria. Comenzamos por la medida de tiempo, para continuar con la medida de superficie y la introducción que se debe de hacer del volumen, como preparatorio de los contenidos que van estudiar los alumnos en Secundaria.

3.1. ENSEÑANZA DE LA MEDIDA DE TIEMPO. UN POCO DE HISTORIA

Los conceptos temporales son difíciles de asimilar por los alumnos. La adquisición del tiempo es un proceso que comienza en la Educación Infantil y se desarrolla durante toda la Primaria.

En la Educación Infantil, los niños conciben el tiempo como una sucesión temporal donde los sucesos día y noche, ayer hoy y mañana, antes y después, significan una ordenación de los distintos sucesos y cambios que van experimentando. En esta etapa, el tiempo va asociado a las necesidades biológicas, asociando la mañana, la tarde o la noche con sus tiempos de alimentación y de acostarse.

En la Educación Primaria, se abordan ya conceptos más relacionados con la duración como son las horas, días, meses y años pero que también implican una ordenación.

De esta forma podemos considerar que los conceptos temporales se enmarcan en dos componentes como son **el orden de los sucesos temporales y la duración de los mismos**, que da lugar al aprendizaje de las medidas de tiempo.

Vamos a hacer un poco de historia sobre la medida de tiempo, antes de adentrarnos en su estudio didáctico.

El cálculo de tiempo hoy es muy sencillo de hacer y de saber en qué momento concreto nos encontramos. Podemos hablar de años, meses, horas, minutos y segundos con gran precisión y sin temor a equivocarnos. Incluso podemos medir décimas, centésimas y milésimas de segundo y en cualquier parte del mundo nos entenderían, pero esto no siempre ha sido así.

Si nos desplazamos a los primeros tiempos, las primeras observaciones que hacía el hombre sobre las variaciones de tiempo fueron: el día y la noche. Esta alternancia podemos decir era el primer reloj de los seres humanos. Ante la necesidad de controlar el tiempo las antiguas civilizaciones se guiaban por el día y la noche o los ciclos de la luna.

Pasado el tiempo, los hombres fueron capaces de medir cortos periodos mediante los relojes de agua (clepsidra) o arena,... o largos periodos mediante los calendarios.

Uno de los primeros relojes que crearon los hombres fue el reloj solar, mediante la sombra que proyectaba una varita se indicaban los momentos del día. Se sabe que en China se utilizó aproximadamente 3.000 años antes de Cristo, y también fue conocido por los egipcios e incas.

Como los relojes de sol no se pueden usar ni los días sin sol, ni por la noche, surge el reloj de agua o clepsidra que encontramos en las culturas egipcia, babilónica, griega y romana. Marcaba el tiempo por medio del agua que pasaba de una vasija graduada a otra. Este sistema es el antecesor al reloj de arena, que tuvo su auge en el siglo III y se construye mediante dos recipientes de vidrio unidos por una fina boca por la que pasa la arena de uno a otro. Este reloj mide un tiempo limitado, 5 minutos, 10 minutos, etc. cuando toda la arena cae del recipiente superior al inferior. Su funcionamiento solo necesita de la fuerza de la gravedad.

Los romanos usaban también el reloj de fuego, que consistía en velas finas marcadas que se iban consumiendo mediante el fuego y cada marca indicaba un intervalo de tiempo pasado.

Con respecto a los tiempos largos, las distintas civilizaciones comenzaron a medirlos mediante los calendarios. Un calendario es un sistema inventado por el ser humano para dividir el tiempo en periodos regulares: años, meses, semanas, días. A lo largo de la historia ha habido muchos tipos de calendarios en las distintas civilizaciones como el calendario persa, egipcio o maya.

El emperador Julio Cesar instauró el Calendario Juliano del que proceden los nombres de los meses actuales: Ianuarius: mes de Jano, dios de los portales. Februarius: mes de las hogueras purificadoras (februa). Martius: mes de Marte, dios de la guerra. Aprilis: mes de las flores. Maius: mes de Maia, diosa de la abundancia. Iunius: mes de Juno, diosa del hogar y la familia. Quintilis: mes quinto. Sextilis: mes sexto. September: mes séptimo. October: mes octavo. November: mes noveno. December: mes décimo.

Este calendario, en principio, tenía diez meses. El primer mes era Martius que era el mes de la primavera, y siguiendo el orden anterior llegaríamos a los meses sin nombre propio y nombrados por el orden en la sucesión, es decir, desde Quintilis: mes quinto hasta December: mes décimo. Después se introdujeron Ianuarius y Februarius.

Fue Marco Antonio quien cambió el nombre del mes quinto por el de Julium en honor a Julio Cesar y, posteriormente, el Senado cambio el mes sexto por Augustum en honor de



Figura 3.1. Reloj de arena construido por los alumnos de la Facultad de Formación de Profesorado. U. de Extremadura.

Octavio Augusto, quedando así contruidos los nombres de los que provienen los actuales meses en castellano.

En el calendario Juliano los meses que son impares, como enero, marzo, mayo, etc., tienen 31 días y los meses pares, como abril, junio, etc., 30 días, sin embargo febrero tendrá 28 días y 29 días en los años bisiestos.

El emperador Constantino I el Grande fue quien implantó la semana de siete días a partir del calendario lunar mesopotámico. Esta división de siete días se popularizó en las distintas culturas posteriores.

En la Edad Media, solamente se preocupaban del tiempo la nobleza laica y eclesiástica. Su interés venía dado por importantes acontecimientos de la vida ordinaria como, nacimientos, bodas, etc. Se celebraban grandes fiestas en los aniversarios correspondientes con un gran número de invitados. Este tiempo es la continuación de la época romana con su calendario juliano y sus días, semanas y meses. Se medían los ciclos largos teniendo en cuenta las labores del campo como, la siembra y las recogidas. El calendario más popular era el religioso con sus oficios y sus fiestas: Natividad, de la Cuaresma, de Pascua, etc.

El sistema actual, con comienzo de año el 1 de enero, procede del antiguo calendario Juliano y se llama Estilo de la Circuncisión o de Gracia. En España se comenzó a aplicar en el siglo XV, pero estuvo conviviendo con otros sistemas diferentes.

El calendario Juliano establecido en el año 46 a.C. había producido un desfase al considerar que el año tenía 365,25 días cuando solamente tenía 365,241 días, según se demostró en el siglo XVI. La diferencia de tiempo había hecho que las estaciones quedaran desplazadas. Por ello, el Papa Gregorio XIII ordenó que se corrigiera el desfase pasando del 4 de octubre al 15 de octubre de 1582 quedando así establecido el Calendario Gregoriano. Este calendario es el que se utiliza actualmente en todo el mundo cristiano.

3.2. LA MEDIDAS ARBITRARIAS DE TIEMPO

La percepción del tiempo no es una propiedad que pueda ser observable materialmente, sino que depende en muchos casos de acciones y del estado anímico del sujeto que lo percibe. Esto hace que en su enseñanza en Primaria se presenten dificultades más complejas que en la enseñanza de las otras magnitudes. Un alumno puede saber leer la hora y eso no significa que tenga asimilada la noción del tiempo. Para Piaget, el alumno tiene la noción de tiempo cuando se da cuenta que hay sucesos que ocurren siguiendo una secuencia y entre los sucesos se encuentran intervalos que son identificables.

Como hemos dicho al principio del capítulo, el tiempo hay que comenzar a estudiarlo desde la Educación Infantil donde los profesores y padres deben enseñar al niño a discriminar los conceptos temporales.

Para ello, se debe comenzar por mostrar a los alumnos las partes del día con los astros propios de cada momento como son el Sol, la Luna o las estrellas o con las actividades propias de cada etapa como son: de día te vistes y vas al colegio, al mediodía tomas el almuerzo, por la tarde hacemos las actividades extraescolares, tomas la merienda y juegas, y por la noche, cenas te pones el pijama y te acuestas.

Actividades:

- *El profesor hace preguntas sobre la seriación día noche.*
- *El profesor hace preguntas sobre las estaciones climatológicas y comenta la importancia de éstas en la antigüedad para controlar el éxito de la siembra.*

Estas dos actividades las acompaña con material gráfico que va mostrando a los alumnos mientras comentan.

- *Anotar en un día normal todas aquellas situaciones en la que aparecen estimaciones o medidas de tiempo.*

El objetivo de esta actividad es hacer observar al alumno que son muchas más de las que podía pensar y así se justifica la necesidad de conocer bien esta medida.

El vocabulario se debe ir elaborando por un proceso de asociación “te levantas” es por la mañana, “te acuestas” es por la noche, “juegas y hay luz” es de día, si “hace frío” es invierno,...Con el tiempo se relacionan palabras como tiempo, duración, antiguamente, corto, largo, demasiado, poco, mucho, tanto tiempo como, has tardado más que..., has tardado menos que ...

- *Escribe las actividades que haces:*
- *Antes de ir al colegio.*
- *Un domingo, antes de tomar el almuerzo.*
- *Cuando es de noche.*
- *Después de almorzar.*

Queremos que el niño distinga que hay una serie de sucesos que se realizan en un orden temporal y que entre dos sucesos median intervalos, cuya duración hay que valorar.

Debido a su egocentrismo, el niño no es capaz de tener conciencia de una sensación de duración, salvo si esta duración está en relación directa con su propia existencia. Es decir, un acontecimiento sólo ha sucedido “antes”, si ese “antes” se relaciona con un hecho vivido por el niño: antes del desayuno, antes de las vacaciones...

Por ello, en la Educación Infantil, se deben trabajar *el orden de los sucesos temporales*: antes, ahora y después o ayer, ahora y mañana mediante las diferentes actividades que realizan en el aula o en su vida ordinaria. Es, en esta etapa, donde el niño debe empezar a comprender el tiempo como una ordenación de sucesos que se presentan en su vida.

Una vez trabajado y asimilado el orden del tiempo podemos pasar a trabajar el *tiempo como duración*. Para ello es imprescindible introducir las unidades arbitrarias, bien en los últimos años de la Educación Infantil o en los primeros de la Educación Primaria. Vamos a comenzar con un ejercicio preparatorio.

Juegos preparatorios.

Pesca magnética. El juego consiste en pescar 10 pececitos que llevan un enganche magnético. El alumno mediante una caña con idéntico enganche puede coger dichos peces que nadan en un barreño de agua. El alumno debe hacerse del mayor número de peces posibles en un tiempo indicado por el profesor, pero los participantes no actúan todos a la vez, sino de uno en uno.

Los alumnos observarán que es necesario utilizar una medida para calcular el tiempo que le corresponde a cada uno. Entre todos, profesor y alumnos, pueden elaborar una tabla con unidades arbitrarias de tiempo para medir los tiempos de la pesca magnética, como pueden ser: Palmada, reloj de arena, golpe del pie, gotas de grifo, velas graduadas...

Una vez realizada la actividad, el profesor los motivará preguntándole: ¿quién sacó más peces? ¿quién lo hizo más rápido? ¿quién tardó más tiempo?

Cuando los alumnos no comprenden bien el tiempo suelen tener problemas en la duración de espacios temporales, es decir, el alumno atribuye la duración del tiempo con relación a la percepción visual, así puede afirmar que aunque a dos niños se le haya calculado el mismo tiempo, tarda más tiempo el que ha cogido más peces.



Figura 3.2. Juego de pesca magnética.

Esta falta de comprensión del tiempo se aprecia, también, en el siguiente ejercicio:

- *Se abren dos grifos a la vez, que manan con distinta presión, para depositar agua en botellas de igual capacidad, pasado un tiempo se cierran a la vez. El profesor pregunta al alumno ¿qué botella tiene más agua? ¿en cuál de las dos botellas se tardó más tiempo en depositar el agua?*

El alumno puede afirmar que se invierte más tiempo en la que tiene mayor cantidad de agua.

- *Dos alumnos echan una carrera y salen los dos desde una misma meta. Los alumnos corren y a un toque de silbido deben pararse. Después el profesor pregunta ¿quién recorrió más distancia? ¿quién tardó más tiempo?*

Igualmente en esta carrera a tiempos iguales, el alumno puede afirmar que tarda más tiempo el que recorre más distancia. En este caso, también el tiempo se puede relacionar con percepciones motoras, es decir, el tiempo depende de la velocidad del individuo.

Otra variedad de juego de pesca de peces puede ser calculando el tiempo que tardan en sacar un número determinado de peces. ¿Quién tardó menos? ¿Quién tardó más que Juan? El juego de la pesca nos sirve como juego preparatorio de las unidades arbitrarias de tiempo, igualmente que el juego siguiente.

Secuencia de sonidos. El profesor expondrá una serie de cuatro secuencias de sonidos. Los alumnos deben escucharlos y escribir si consideran que la duración es larga o corta, es decir, dura mucho o poco. De nuevo, el profesor mostrará la secuencia de sonidos. Los alumnos deben medir cuánto dura cada secuencia con unidades no convencionales, por ejemplo palmadas, chascando los dedos, golpes en la mesa... e intentar ordenarlas.

Las estimaciones de tiempo son una actividad prioritaria en el manejo de unidades arbitrarias, o posteriormente convencionales. Además de estimar los tiempos de la pesca magnética, se pueden realizar otras actividades de estimación como estimar tiempos de duración de actividades cotidianas.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

- *Hacer una lista de actividades de patio en las que se pueda estimar el tiempo de duración.*
- *Estimar con palmadas el tiempo de duración de la carrera de un niño. Establecer un debate en el que se resalte y se prevenga cuáles son los problemas con los que posiblemente nos vamos a encontrar.*
- *Calcular el tiempo que dura una actividad mediante un reloj de arena, y otras unidades de tiempo más pequeñas como el goteo de un grifo, golpear el suelo con el pie. Definir una actividad concreta por ejemplo una canción y enuncie las preguntas que como profesor haría a los alumnos.*

Siguiendo con las unidades arbitrarias presentamos otras actividades, como son:

Actividades para los alumnos.

Construir un reloj de sol. Primeramente el profesor explica a los alumnos las características del reloj de sol. Después se confecciona un reloj portátil utilizando cartón, un palito, hilos, lápices de colores y fotocopias.

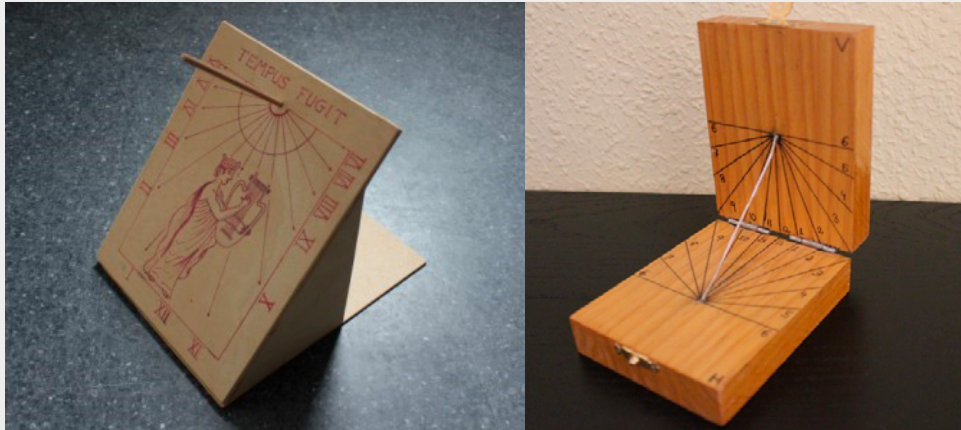


Figura 3.3. Relojes de sol portátiles.

1. *Construir un reloj de arena. Para ello se rellena con arena una botella de plástico. Coloca el alumno, en su apertura, un disco de cartulina con un agujero en medio para permitir el paso de la arena. Después otra botella sobre la primera, uniendo boca con boca mediante cinta adhesiva, y ahora se unen las dos botellas mediante unos listones de madera que se adhieren a éstas con cinta adhesiva, como se muestra en la figura 3.4. Una vez construido los alumnos deben comprobar que funciona.*

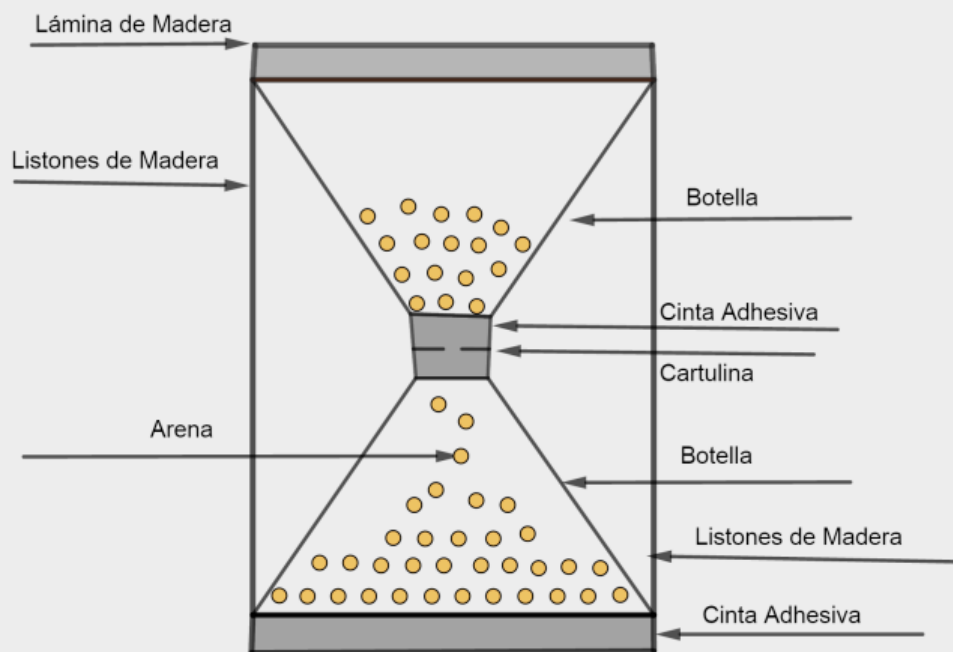


Figura 3.4. Reloj de arena casero.

2. *Construir un reloj de arena para un minuto, para cinco minutos y para diez minutos. Les explicamos a los niños que, dependiendo de la arena que echen, medirán un tiempo específico. Para saber los tiempos correspondientes el profesor o el alumno, mediante un reloj de agujas o digital, deberá medir la cantidad de arena que se necesita para medir un tiempo determinado.*

3. *Debate sobre los relojes de arena. La siguiente actividad es mostrar un reloj de arena para poder establecer un debate entre todos. El profesor explica que antiguamente se usaban esos relojes. El profesor hace preguntas como: ¿por qué se usaban los relojes de arena? ¿Por qué es más fácil usar los relojes corrientes? ¿sería difícil llevar un reloj de arena consigo a cualquier parte? ¿cabría en el bolsillo? ¿se podría romper? u otras que puedan surgir. Los alumnos mientras dan sus opiniones manipulan el reloj de arena y le dan vueltas hasta que baje toda la arena.*

- *Colección de relojes de arena. Traer relojes de arena, siempre en casa suele haber alguno. Observar y comparar su duración de forma que el alumno pueda ordenarlos de mayor a menor duración.*
- *Debate manipulando dos relojes de arena. Nos fijamos en dos relojes cuya diferencia de duración sea significativa y medimos con ellos; una actividad concreta, hacledles observar el número de vueltas que damos a los relojes. A partir de los resultados obtenidos establecer conclusiones con los alumnos mediante preguntas ¿a qué reloj le hemos tenido que dar más vueltas? ¿por qué? ... antes de comenzar la actividad también podemos preguntar ¿a qué reloj le daremos más vueltas? ¿por qué?*

Evidentemente, el alumno debe haber observado qué reloj es más lento en la caída de la arena y cuál tiene más cantidad de arena. La duración del reloj depende de la velocidad de caída y de la cantidad de arena. Dos variables que el alumno tiene que controlar, lo que implica una apreciable dificultad.

- *Construcción de un reloj de fuego. Los alumnos pueden construir, también, un reloj de fuego mediante marcas en una vela delgada. Los niños deberán marcar la vela y saber cada cuánto deberán marcar la vela para medir el tiempo correctamente.*

2. *Debate sobre la medida del tiempo. Establecer debates con los alumnos en los que introducimos las medidas en otros tiempos que hemos expuesto en el primer apartado. Se puede plantear:*

¿Por qué crees que es importante medir el tiempo? Justifica tu respuesta. Por ejemplo: necesito saber cuánto tardo desde mi casa hasta el colegio para no llegar tarde.

¿Cómo medían antiguamente el tiempo? ¿Cómo crees tú que sabían antiguamente en qué estación estaban? Por ejemplo en verano.

¿Cómo crees que medían tiempos cortos en la antigüedad cuando era de noche? ¿y de día?

Luego se hará una puesta en común entre todos los alumnos.

Otras actividades pueden ser:

- *Elaborar un cómic en el que se muestran las acciones sucesivas de un día cualquiera. Mismo ejercicio secuenciando otras actividades como una excursión o contar las actividades realizadas durante unas vacaciones.*
- *Escuchar canciones grabadas y estimar cuál dura más o menos.*

En la realización de estas actividades es cuando surge **la necesidad de una unidad de medida** con la que todos los resultados de medida sean el mismo y no dependan del individuo que mide. Por ejemplo, los alumnos observarán que si dos alumnos quieren medir el tiempo que se tarda en el juego de la pesca en pescar dos peces, y lo hacen tocando las palmas, observarán que dependiendo del ritmo con que el alumno toque las palmas, un alumno tardará más o menos.

Así pues, para como el resto de las medidas, tendremos que llegar a utilizar una medida convencional que sea precisa, no dependa del medidor, y entendible por las demás personas.

3.3. UNIDADES CONVENCIONALES

Como hemos dicho en el apartado anterior, llega el momento de presentar las unidades convencionales de tiempo. Sabemos que el orden de presentarlas para que sean más asequibles al aprendizaje de los alumnos es: segundo, minutos, hora, día, semana, mes y año. Los alumnos son capaces de interiorizar el segundo, el minuto y la hora. Sin embargo, la interiorización de las otras medidas es más complejo pues no son fácilmente perceptibles.

Teniendo en cuenta las recomendaciones dadas en el apartado 2.1., vamos a desarrollar de una forma más exhaustiva algunas actividades con la magnitud tiempo.

Actividades para los alumnos.

1. *Estimar segundos y minutos.* El profesor, con los alumnos de los primeros años, puede realizar estimaciones de tiempo basadas en las tareas diarias.

Los alumnos pueden estimar tiempo que tardas en segundos en:

- *escribir tu nombre con mayúsculas,*
- *beber un vaso de agua, sacar punta a un lápiz,*
- *dar cuatro vueltas a la clase: corriendo, andando despacio, a la pata coja...*

Otro alumno calcula los mismos tiempos de estas actividades con un cronómetro. Un tercer alumno apunta todos los resultados en una tabla de dos columnas: en la primera pone las estimaciones (segundos) y en la segunda los tiempos reales calculados con el cronómetro. Igualmente se puede hacer para los minutos.

El profesor puede enseñar a los alumnos a estimar segundos mediante técnicas de conteo, esto es en lugar de contar uno, dos, tres, se estiman mejor los segundos diciendo: “cuatrocientos uno, cuatrocientos dos,... Probarlo con los ejercicios anteriores.

El profesor puede hacer estimar a los alumnos cuándo ha transcurrido un minuto. Los alumnos en silencio empiezan a estimar el minuto a partir de que el profesor dé la orden de salida. Éste va preguntando a los alumnos cosas sin transcendencia con el objetivo de que no vayan contando mentalmente. Cuando un alumno cree que ha pasado el minuto levanta la mano, el profesor anota el tiempo estimado. Y así sucesivamente para todos los alumnos que levanten la mano en el momento considerado. Una vez terminada la actividad, el profesor da a cada alumno los tiempos estimados y eligen el mejor estimador. Igual se puede hacer la actividad con otros tiempos, como dos o cinco minutos. La repetición de esta actividad hace que el alumno vaya estimando con más precisión los tiempos.

Se pueden hacer actividades del tipo:

- *Estima y apunta el tiempo que tardas en: desayunar, levantarte de la cama, ir al colegio, subir las escaleras del colegio, el tiempo de recreo. El profesor compara las respuestas de cada alumno y establece un debate.*
- *Sabiendo ya que tiempo es más o menos un minuto, escribe si te tarda más o menos de un minuto en realizar las siguientes actividades.*
 1. *Tomar una medicina.*
 2. *Beber un vaso de leche.*
 3. *Contar del 1 al 50.*
 4. *Ir de tu casa al colegio.*
 5. *Hacer una visita.*

El profesor hace un debate preguntando si todos los alumnos tardan el mismo tiempo en hacer las actividades.

3. *La hora.* El tiempo hora es demasiado largo para los alumnos de los primeros cursos. Lo mejor es relacionar los ejercicios de lectura del reloj con actividades de relevancia en la vida del niño, como por ejemplo: horario de clase, las horas de los programas de televisión, la de volver a casa al terminar las clases del colegio... aunque estas actividades no se correspondan con horas en punto o medias horas; por ello, su comprensión se debe acompañar de un reloj de pared o en su defecto de la alarma de un reloj (actualmente los niños suelen tener todos relojes con alarma). En último extremo se puede utilizar un despertador que suene cada hora o con un cronómetro/ temporizador puesto en la pizarra digital (se encuentran en internet, por ejemplo *classroomscreen*).



Figura 3.5. Horario de clase.

Los alumnos elaboran el horario de clase (figura 3.5) distribuido por horas que pueden ir coloreando conforme pasen las horas. El profesor puede proponer actividades de socialización en las que el alumno debe observar y apuntar horarios fijos, como pueden ser: entrada, hora del recreo, hora de comer, hora entrada de actividades extraescolares, hora de marchar a casa. Igualmente, el profesor diseña actividades para desarrollar los términos referidos a la organización temporal. “A las 12 nos vamos” o “cuando la aguja chica y la grande estén en el número 12”.

- El alumno a partir de Segundo curso comienza a conocer las horas del reloj, las medias y los cuartos aunque estas últimas no deben introducirse hasta que el alumno domine bien el concepto de hora.

Debe aprender a manejar el reloj digital y el reloj analógico, aunque hay que tener en cuenta que los alumnos pueden dominar adecuadamente el día correspondiente, horas, minutos y segundos, que le marca el reloj sin tener un concepto de tiempo. Comprender el tiempo implica que coordinan en la mente los instantes y los intervalos del continuo temporal.

Para este aprendizaje el profesor tiene que tener en cuenta que para los relojes analógicos, aunque ya son poco usados:

- *El niño tiene que saber qué indica cada manecilla.*
- *Saber las unidades que representan y las equivalencias entre ellas.*
- *Las horas se expresan de 1 a 12, no existiendo diferencia entre las horas anteriores y posteriores al mediodía.*

En el caso del reloj digital :

- *Las horas se expresan de 1 a 12 y aparecen las siglas AM (Ante Merídiem) hace referencia al período anterior al mediodía, mientras que PM (Post Merídiem) indica el tiempo posterior al mediodía o bien se expresan las horas en un intervalo de 00 a 23.*
- *Para la comprensión de la sucesión de los minutos y segundos, los niños deben saber contar de unidad en unidad hasta 60.*
- *Las horas, los minutos y segundos son indicados mediante números que los alumnos ya conocen.*
- *Su lectura se hace de forma que los dos primeros números indican la hora, los siguientes los minutos y a veces también aparecen dos últimos números que indican los segundos.*

Pueden realizar actividades del tipo:

- *Piensa si se tarda más, menos o una hora en realizar las siguientes actividades.*
 1. *Escribir tu nombre y apellidos.*
 2. *La clase de Matemáticas.*
 3. *El recreo.*
 4. *Construir un colegio.*
 5. *Las vacaciones.*
- *Escribe 5 actividades, que hagas normalmente ,que duren más de una hora y otras que duren menos de una hora.*

Diciembre

L	M	X	J	V	S	D
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
1	2	3  cumpleaños	4	5	6	7
8  vacaciones	9  crismas	10  crismas	11  adornos	12  villancicos	13	14
15  árbol	16	17	18  Belén	19	20  vacaciones	21  viaje
22	23	24  Papá Noel	25  Navidad	26	27	28
29	30	31  Noche Vieja				

Figura 3.6. Semanas y mes.

4. *El día y la semana. Para la noción de día, se elabora un calendario para cada alumno, una serie de cuadros vacíos (con la disposición de un mes de almanaque como en la figura 3.6) que ellos van rellenando cada día, bien coloreando el cuadrado o poniendo la fecha, a la vez que van aprendiendo los días de la semana. Así surge el concepto de semana. Por ejemplo, podemos ir coloreando cada semana de un color. También se pueden introducir los términos mañana y tarde, separados por el almuerzo.*

CALENDARIO 2019



Figura 3.7. Meses y año.

5. *El mes, el año y el almanaque.* Para introducir el almanaque, el profesor presenta gradualmente los días de la semana, la sucesión de los días del mes, los meses del año, el cambio de estaciones y el año actual (figura 3.7). Con esta actividad se pretende que el grupo clase comprenda la función social del tiempo y posibilite contextualizar términos del lenguaje coloquial referidos a la organización temporal. Los alumnos deben acercarse al almanaque con actividades reales.

El profesor puede hacer actividades en las que se refuerzan todas las unidades aprendidas como:

- *Escribe la unidad o unidades que se usan en los siguientes instrumentos de medida de tiempo: un calendario de bolsillo, un reloj digital, un cronómetro, un reloj de agujas, un calendario de pared.*
- *Con qué unidades podemos expresar los siguientes intervalos de tiempo.*
 1. *Desde el invierno hasta el verano.*
 2. *Desde que tomas las vacaciones de Navidad hasta que vuelves al colegio.*
 3. *Desde que te levantas hasta que te acuestas.*
 4. *Desde que comienzas a tomar la sopa hasta que acabas.*
 5. *Desde el día que naciste hasta tu próximo cumpleaños.*

El profesor puede diseñar también pequeñas excursiones o paseos matemáticos para hacer observaciones de grandes relojes que pueden encontrarse en lugares cercanos como iglesias, ayuntamiento, estación de autobuses o estaciones de tren. Los alumnos harán actividades previamente diseñadas y comentadas en el aula. Como por ejemplo, *hacer el estudio y comprensión de la tabla de horarios de salida y llegada de los autobuses y los trenes.*

Esta actividad se puede empezar a introducir en el Cuarto curso. El profesor debe cuidadosamente preparar las tablas de horario de una forma sencilla y comprensible para los alumnos de los cursos correspondientes, y posteriormente hacerlas más complicadas introduciendo nuevos datos y variables. Un ejemplo de tabla en la figura 3.8.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

A partir de una tabla real de salidas y entradas de autobuses, trenes o aviones, elaborar actividades para que los alumnos refuercen el conocimiento de las unidades de tiempo y manejen los tiempos de llegada y partida de una forma comprensiva. Por ejemplo, en la tabla de la figura 3.8. ¿A qué hora sale el primer autobús para Gévora? ¿Y el último? ¿Cuánto tarda el autobús de Badajoz a Valdebotoa? La familiaridad con los relojes digitales puede resultar especialmente útil a este respecto.

- *Elegir varios países, estudiar sus horarios y elaborar actividades con las distintas horas según los países, por ejemplo, ¿Si en Perú son las cuatro de la mañana qué hora es en España? El estudiante para profesor puede valerse de la información que obtiene en internet y hacer una tabla horario de varios países. Para ello, elabora una regla de obtención de la hora para cada país a partir de la hora española.*



Figura 3.8. Horarios de autobuses.

- Realizar una programación de actividades para que los alumnos conozcan calendarios y relojes de otras culturas o de las culturas americanas como: Aztecas, Mayas, Incas. Cada grupo de estudiantes para profesor puede dedicarse a una cultura.

Actividades para los alumnos.

1. *Talleres del tiempo.* El profesor puede organizar talleres de construcción de material didáctico en los que los alumnos confeccionan los relojes de arena, agua y sol que pueden utilizarse en juegos reglados u otras actividades.
2. *Taller de cocina.* Una actividad relacionada con el tiempo es este taller (debe haber un lugar para realizarlo) en el que el alumno aprende muchas cosas pero, en particular, el profesor puede aprovecharlo para programar actividades relacionadas con el tiempo, así puede realizarse actividades como la estimaciones horaria en la cocción de diversos productos como huevos, fideos, pasta, verduras, etc. o la preparación de otros como gazpacho, salsa mahonesa, salsa alioli, etc. El alumno aprende el vocabulario asociado “hervir 5 minutos”, “cocinar 1 hora a fuego lento”, “batir dos minutos con batidora eléctrica o cinco minutos a mano”. Esta actividad se puede complementar con el uso de un reloj de cocina y el estudio de su función, o de un temporizador.

3. *El tiempo y la física.* En las actividades físicas de plano inclinado también pueden programarse actividades de tiempo. Disponemos un tablón bastante largo que colocamos en una pared formando un cierto ángulo con el suelo y por el que hacemos deslizarse una pelota. Medimos con el cronómetro el tiempo que tarda en bajar la pelota por el tablón desde la parte más alta a la más baja. De una forma visible para el alumno hacemos variaciones del ángulo del tablón y volvemos a medir los tiempos. El objetivo es que el alumno aprecie la medida del tiempo y observe que si la pendiente es menor la pelota tarda más que si es mayor, en cambio la velocidad es menor, cuando la pendiente es más pequeña, es decir, el ángulo de pendiente es directamente proporcional a la velocidad e inversamente proporcional al tiempo de bajada.

Actividades para los estudiantes para profesores.

- *Investigar y recopilar algunos recursos y aplicaciones interactivas que son utilizables y se encuentran en Internet, para reforzar todos los aprendizajes referidos al tiempo. Utilizar las palabras claves correspondientes como tiempo, actividad, primaria, juego, etc.*

TEMA 4

DESARROLLO DIDÁCTICO

DE LA MEDIDA DE SUPERFICIE

4.1. ASPECTOS PREVIOS PARA LA MEDIDA DE LA MAGNITUD SUPERFICIE

El estudio que se hace de la enseñanza del área de una superficie en Primaria y Secundaria se reduce al estudio de fórmulas para calcular dicha medida. Está probado que la mayoría de los alumnos de Primaria entiende las áreas como el cálculo de producto de longitudes y una fórmula para calcular el área del círculo.

Este tipo de enseñanza tradicional siembra en el alumno una concepción muy pobre de dicho concepto reduciéndolo al cálculo numérico de fórmulas, lo que va en contraposición con su rico contexto dentro de la sociedad, la cultura y la naturaleza.

Además esta concepción hace que el alumno para profesor no capte la importancia de enseñar el área como número de unidades que recubren una superficie y como una propiedad que se conserva con el recorte y pegado. El alumno tampoco aprende diferentes estrategias para medir en la vida ordinaria, que le van a ser más útiles que las fórmulas aprendidas pero sin utilidad en muchas de las circunstancias que se le pueden plantear en su quehacer diario.

Las primeras referencias que nos hablan de la medida de superficies las encontramos en las civilizaciones antiguas como en Babilonia o en Egipto donde estas medidas se relacionan con problemas cotidianos, como las construcciones y trabajos de la tierra, cosechas, etc. Se conocían ya las áreas de varias figuras geométricas y el área del círculo al que daban el valor del triple del radio. Las civilizaciones chinas e hindú también utilizan reglas para cálculos de áreas de distintas figuras planas. Sin embargo, es la civilización griega donde se resuelven de una manera más precisa, con numerosas aportaciones, los problemas relacionados con las áreas. La evolución histórica hasta nuestros tiempos está plagado de hechos que no vamos a describir pero queremos reseñar como la medida de área ha estado siempre ligada a la magnitud longitud y desde ahí la propuesta de fórmulas mediante esta relación.

Las magnitudes superficie y volumen participan tanto de la geometría como de las estructuras elementales. Es decir, si queremos obtener el área de una superficie necesitamos conocer sus características geométricas, como la forma, si es regular o no... pero también las estructuras aditivas para calcular, mediante una unidad dada, cuántas veces está contenida dicha unidad en la superficie a estudiar. También, es necesario utilizar las estructuras multiplicativas cuando la medida de la superficie se calcula considerando sus dos dimensiones, llevando la unidad longitud en cada dimensión y multiplicando el producto de esas razones, obteniendo el total de número de unidades necesarias para igualar a ese cuerpo en superficie. Así pues, la medida de una superficie de un cuerpo admite distintas formas de medición que el profesor debe tener en cuenta.

Por otra parte, si se toma una medida unidad, podemos establecer una correspondencia-medida que a la superficie de un objeto le hace corresponder el número de veces que la unidad de medida está contenida en ella. Es decir, es la cantidad de plano ocupado por la superficie. Esta es una forma de medida unidimensional, como ya sabemos, y el procedimiento de medir es simplemente contar las veces que la unidad medida cabe en la superficie.

Por otra parte, las superficies de lados rectos, también se pueden medir como productos de medidas de dimensiones lineales, por ejemplo: para calcular el área de un paralelogramo multiplicamos la base por la altura. Esa forma de medir se conoce como producto de medidas dimensionales. Para el caso de las superficies se llaman medidas bidimensionales.

Aunque las dos formas de medir son equivalentes y llegamos a la misma solución, sin embargo, está comprobado que los alumnos tienen bastante dificultades para calcular áreas en estas edades mediante las medidas dimensionales.

Sabemos que las medidas dimensionales implican relaciones multiplicativas que no son suficientemente coordinadas. Somos conscientes de las dificultades que tienen los alumnos, incluso los estudiantes para profesores para coordinar las compensaciones aditivas con las compensaciones multiplicativas, es decir, los alumnos trasladan a las superficies las propiedades de la longitud de forma que, por ejemplo, al doblar los lados de un cuadrado consideran que la superficie del cuadrado es el doble. De ahí las dificultades que tienen los alumnos para comprender las fórmulas para el cálculo de algunas superficies.

En el caso de las superficies, podríamos utilizar siempre la medida unidimensional, porque es más fácil, pero a veces las formas geométricas de dichas superficies hace imposible poder utilizar una medida unidimensional, por lo que tenemos que recurrir a la medida dimensional, por ejemplo en el cálculo de áreas de triángulos o de figuras irregulares.

Aunque el área, según los currículos oficiales, se empieza a estudiar en el quinto año, es un concepto, como el resto de las magnitudes, que puede ser trabajada desde la Educación infantil, mediante ejercicios que supongan un buena siembra para que en su momento el alumno puede llegar a adquirir un buen esquema mental del concepto.

Es notorio, también, que en la magnitud superficie no se suelen hacer mediciones reales sobre el objeto. Generalmente el profesor da los datos y rápidamente sustituye las verdaderas mediciones por fórmulas que calculan dichas superficies o medidas mediante las unidades lineales correspondientes. Como mucho, las actividades de medida que se suelen hacer esos profesores son conteos de superficies cuadrículadas mediante la medida unidad.

Así pues, el alumnado debe diferenciar entre los conceptos: *superficie*, como una cualidad (extensión) de los objetos, y el *área*, como medida dada por un número, es decir: la medida de la cantidad de superficie respecto a la unidad de medida escogida. De tal forma, la superficie es una magnitud, matemáticamente hablando, una cualidad de los polígonos.

4.2. APRENDIZAJE DEL CONCEPTO ÁREA

Para poder medir un objeto, éste tiene que tener una serie de cualidades esenciales susceptibles de ser medibles. Así, la superficie es una de estas cualidades esenciales que podemos medir; a dicha superficie, por tanto, se le asocia un número que corresponde a su medida. Con la superficie se asocian palabras, como: extenso, amplio, ancho, estrecho, largas, cortas...

Las primeras actividades relativas a las medidas de superficies tienen que ir relacionadas con la conservación del área de la superficie. Algunas actividades recomendadas por Piaget son las siguientes:

Juegos preparatorios

Se presenta al alumno dos rectángulos idénticos colocados uno junto a otro. El profesor pregunta al alumno, si hay la misma cantidad de papel en los dos rectángulos. Si el alumno contesta afirmativamente, se corta uno de los rectángulo en dos partes y formamos un trapecio como en la figura 4.1. El profesor vuelve a preguntar si hay ahora la misma cantidad de papel en el rectángulo o en el trapecio. Igualmente se puede hacer haciendo otros cortes más sencillos como cortarlo en dos partes por la diagonal.



Figura 4.1. Conservación del área de la superficie.

Se presentan a los alumnos dos hojas idénticas coloreadas de verde que simulan dos campos (figura 4.2). Se colocan el mismo número de casitas en los dos campos, en uno alineadas y en el otro distribuidos al azar; se pregunta al alumno en qué campo hay más cantidad de hierba.



Figura 4.2. Conservación del área de la superficie.

Afirma Piaget que los alumnos son capaces de contestar que hay la misma cantidad de hierba cuando introducimos una sola casa en cada campo, pero a medida que vamos introduciendo más casas, a los alumnos le cuesta más trabajo comprender la conservación del área de la superficie.

El concepto de área es un concepto básico pero a la vez mucho más complejo que el concepto cualitativo de longitud, y su adquisición es posterior al de éste. El área es, pues, la extensión de un cuerpo; también representa un hueco vacío delimitado que trabajaremos con los palillos o el espacio barrido por una línea.

Podemos decir que uno de los primeros problemas que se presenta al profesor es que el concepto de área no depende de la forma, así si mostramos a los alumnos un cuadrado y un triángulo como los de la figura 4.3 y preguntamos por la relación entre sus áreas no obtenemos una respuesta inmediata debido a que no podemos recurrir a la comparación directa.

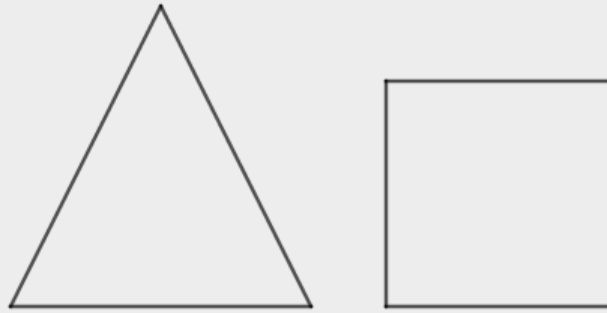


Figura 4.3. Comparación directa.

El problema no tiene fácil solución salvo que una de las figuras se pueda descomponer en partes de manera que superpuestas sobre la otra nos dé la respuesta, pudiendo realizarse el cubrimiento correspondiente, como podemos ver en la siguiente figura 4.4 donde se observa que el cuadrado es mayor que el triángulo.

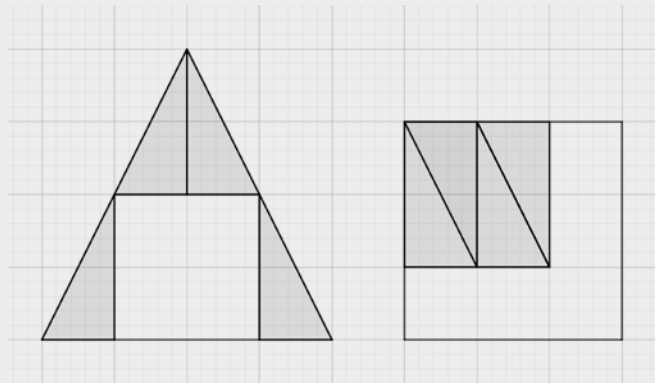


Figura 4.4. Comparación directa por descomposición. El cuadrado es una unidad mayor.

De este modo, dos superficies tendrán la misma área cuando al descomponer una de ellas en partes podemos cubrir la otra con dichas partes.

1. Ejercicio de figuras equivalentes.

Algunas figuras de estos ejercicios están en la figura 4.5.

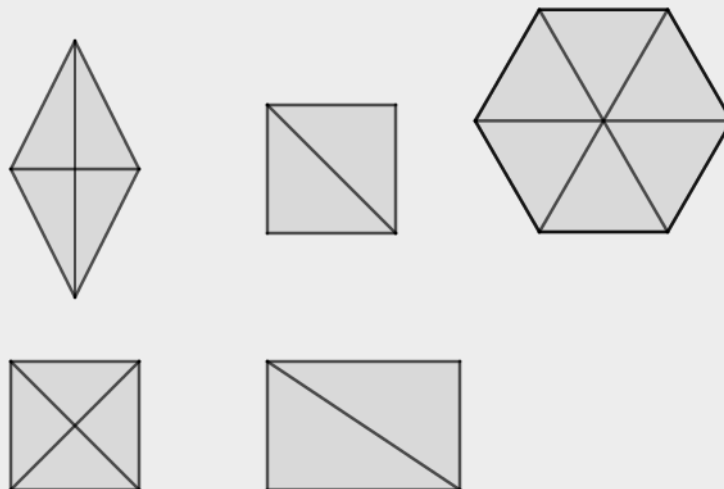


Figura 4.5. Ejercicio de figuras equivalentes.

- *Dibuja un rombo, traza las diagonales. El rombo queda dividido en cuatro partes, corta estas partes y forma figuras equivalentes, es decir, que tienen el mismo área que el rombo.*
 - *Dibuja un cuadrado, córtalo por una diagonal. Obtén como en el problema anterior polígonos equivalentes.*
 - *Dibuja un hexágono regular, córtalo por sus diagonales y obtén un paralelogramo equivalente con todas las piezas.*
 - *Dibuja un pentágono regular, córtalo por las diagonales y obtén un trapecio equivalente con todas las piezas.*
 - *Dibuja un cuadrado córtalo por las diagonales y obtén un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio y un triángulo, utilizando todas las piezas en cada figura.*
 - *Dibuja un rectángulo, córtalo por una diagonal, y con las dos piezas resultantes obtén dos tipos de triángulos, y dos tipos de paralelogramos.*
2. *Dibuja un triángulo, haz un corte para obtener dos piezas de manera que al manipularlas puedas obtener un paralelogramo. Dibuja el paralelogramo obtenido y haz un corte para obtener dos piezas de manera que obtengas un rectángulo.* La actividad consiste en pasar de triángulo a paralelogramo y a rectángulo, y comprobar que todas las figuras son equivalentes.

Actividades geométricas.

Consideramos que la medida de superficie debe ser aprendida, en un principio, mediante verdaderas actividades geométricas en las que se tengan en cuenta la forma de la unidad o forma de la superficie a medir para conseguir el cubrimiento total.

Las primeras actividades se llaman *geométricas*, ya que en los razonamientos no utilizamos los números. El profesor compara áreas para establecer relaciones de igualdad o de inclusiones sencillas que nos lleven a establecer que una de ellas es la mitad, el doble, el triple,...

Estas primeras comparaciones se llaman directa porque se procede a superponer una de las superficies sobre la otra o bien cubriendo la más grande con la otra en forma de pavimento.

Actividades para los alumnos.

1. *Dadas dos hojas de papel, comprobar, superponiéndolas, que son de igual área. El profesor divide una de ellas en varias partes y pregunta al niño, qué área es mayor la de la hoja entera o el área total de la suma de las partes divididas.* Estas actividades ayudan en la comprensión por parte del alumno de la conservación del área de una superficie. El área total que cubre un trozo de papel no cambiará si el papel es cortado en pedazos ni si los pedazos son colocados en formas nuevas.

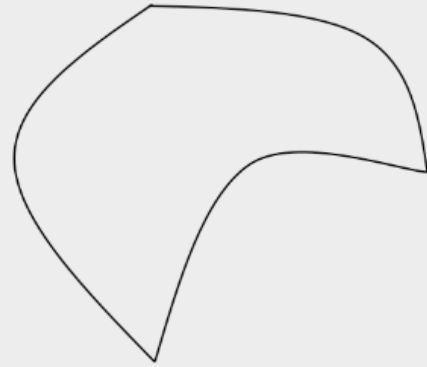
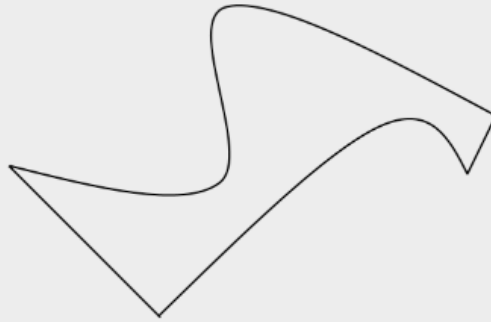


Figura 4.6 ¿Cuál es más grande?

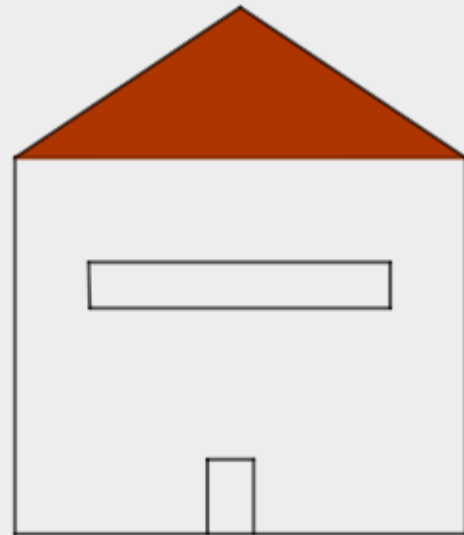
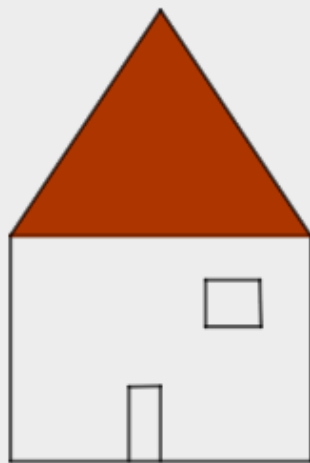


Figura 4.7 ¿Tejado con más pintura?

2. *Emilio y Teo han dibujado dos superficies cerradas como las de la figura 4.6 ¿Cuál de las dos superficies es más grande? Se calcan y recortan las superficies para que los alumnos puedan manipularlas y se pueden cortar los trozos que sean necesarios de una de ella para que la superposición nos dé la solución.*

3. *¿Qué tejado de los de la figura 4.7, lleva más pintura roja?*

Como en el problema anterior el alumno puede calcar y recortar los tejados.

Ejercicio para los estudiantes para profesores.

Busca otros problemas en los que el alumno tenga que comparar superficies de la vida cotidiana, como campos de fútbol, jardines,...

4.3. UNIDADES ARBITRARIAS

La forma unidimensional, al ser más sencilla, es la que utilizamos para comenzar a medir superficies con unidades arbitrarias. Se pueden considerar como unidades arbitrarias las baldosas, distintos cuadrados, rectángulos o triángulos de cartón, papel o plástico, folios de papel, ... Vamos a ver una serie de actividades que son recomendables.

Actividades para los alumnos.

1. *¿qué superficie de las de la figura 4.8. es mayor?* El alumno estima primero cuál es mayor y luego intenta buscar una medida triangular para medirlas.

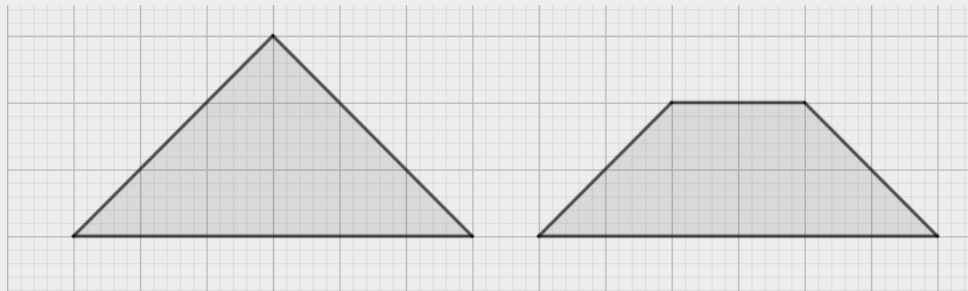


Figura 4.8 ¿Qué superficie es mayor?

Una solución posible sería la que se muestra en la figura 4.9:

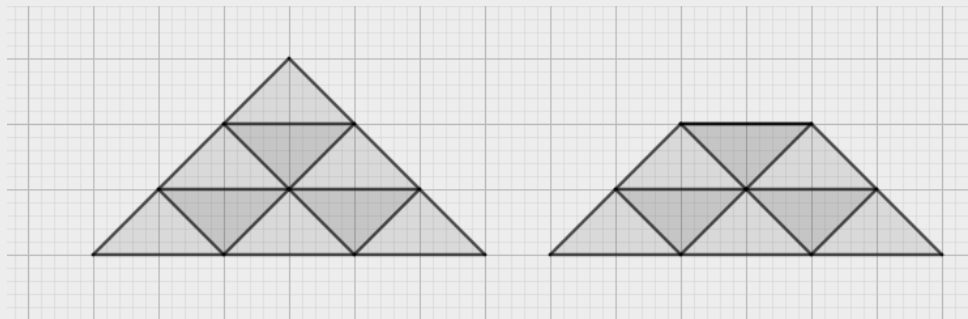


Figura 4.9. Solución.

Por otra parte, ya hemos dicho que la magnitud es una cualidad de los objetos, mientras que la medida es el valor obtenido al comparar el objeto con el objeto unidad, respecto a esa magnitud. El cálculo con medidas unidimensionales debe ser anterior a los cálculos con medidas dimensionales, que nos llevan a la utilización de las fórmulas. El cálculo mediante fórmulas sabemos que es mejor por cuestiones prácticas, pero no se debe nunca olvidar el cálculo directo o unidimensional para que posteriormente le dé sentido a dichas fórmulas.

Reducir inmediatamente las actividades al cálculo mediante fórmulas delimita el verdadero sentido de la magnitud superficie como una cualidad y no como un número, distanciando al alumno de la enseñanza de cantidad de superficie respecto a la unidad de medida elegida y del aspecto lineal de la medida como reiteración de unidades.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

- Demuestra, cortando papel, que un paralelogramo y un rectángulo de la misma base y altura tienen la misma cantidad de superficie.
- ¿Cómo tienen que ser la base y la altura de un trapecio isósceles para que tenga la misma cantidad de superficie que un rectángulo? ¿y si el trapecio es rectángulo? ¿y si es un triángulo?

Actividades para alumnos

Además de estas actividades que hemos planteado, que se pueden hacer en el laboratorio de Matemáticas o en el aula, vamos a trabajar la medida de superficies en los entornos cotidianos que se mueve el alumno.

1. *Elige una medida cuadrada. Estima y mide algunas superficies del colegio, elígela primero en el plano.*

Se les suministra un plano (figura 4.10) para que observen y apunten las medidas obtenidas. Como iniciación a la proporcionalidad, los alumnos también pueden medir las áreas correspondientes en el plano y establecer la relación entre áreas del plano y áreas reales.

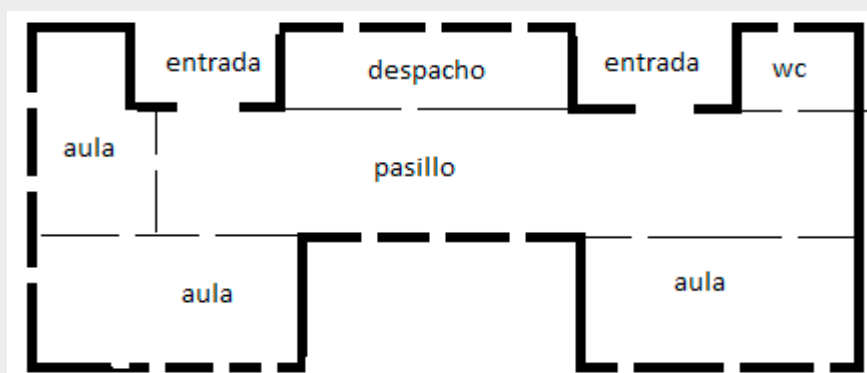


Figura 4.10. Plano ejemplo de un colegio.

1. *Estimación y medida de las superficies del aula. Tomando una medida arbitraria de superficie, los alumnos estiman y posteriormente miden todas las superficies accesibles del aula, como pueden ser: suelo, asientos de sillas, tablero superior y laterales de la mesa del maestro, pizarra, ventanas, etc. Los alumnos miden por recubrimiento total de la superficie y contando las unidades que cubren. Es importante que practiquen tanto con unidades cuadradas, como de otro tipo, por ejemplo, rectangular o triangular, para que su imagen mental de unidad de medida sea más genérica.*
2. *Aprender a estimar por partes. Por ejemplo, una fachada que presenta azulejos, muros cuadrículados, etc. son elementos que ayudan a estimar superficies de una manera más cómoda, mediante la estimación de una parte y multiplicando por un cierto número para realizar la estimación total. Por ejemplo, para estimar la superficie de la clase con la unidad baldosa, se puede recurrir a estimar la mitad o la cuarta parte y luego multiplicar por dos o por cuatro.*

3. *Experimentar y saber llevar mentalmente la medida unidad sobre el objeto a medir. Estimar la superficie de una mesa utilizando una baldosa, la superficie de la pizarra mediante una unidad folio.*

4. *Medimos superficies irregulares: El profesor da una hoja cuadrículada a los alumnos en la que para medir toma la cuadrícula como medida unidad. Pregunta al niño ¿Cuántas cuadrículas crees que mide tu mano? Colócala sobre la hoja cuadrículada y dibújala (figura 4.11). Ahora cuenta las cuadrículas para ver si has hecho buena estimación. Compara tu mano con la de otros compañeros.*

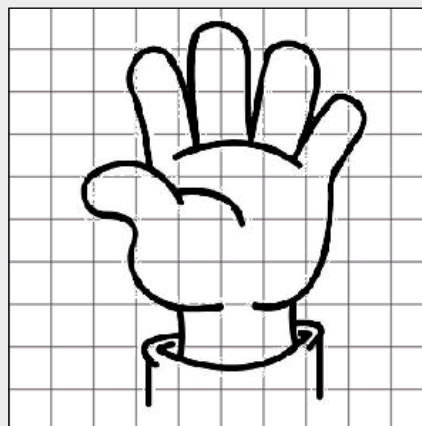


Figura 4.11. Mano en cuadrícula.

Este ejercicio hace que el alumno mida mediante aproximación, que puede ser por defecto o por exceso (medida de superficies curvas), pero además le hace reflexionar sobre la imposibilidad de la medida exacta. Si medimos ahora con cuadrícula pequeña ¿es más o menos exacta esta medida total? El alumno debe observar que si la cuadrícula es más pequeña la medición es más precisa pero nunca exacta.

- **Propiedad inversa de la medida.** Otra propiedad importante que se aprende con la utilización de distintas medidas unidad es que existe una relación inversa entre la unidad de medida y el número de unidades que necesitamos para cubrir una superficie. El descubrimiento de que a mayor tamaño de medida tenemos menos unidades para cubrir la superficie medible y, por tanto, menos exactitud en medida de superficies irregulares, les lleva a reconocer la utilidad de medir una superficie con distintas unidades para llegar a una mejor medida. Estamos sembrando, también, la consideración de la magnitud superficie como una magnitud autónoma, es decir, separación entre la superficie y el número que la mide.

Ejercicio individual para estudiantes para profesores.

- *Estimación de medidas de pequeñas superficies mediante unidades arbitrarias como folios, cuartillas, estampas, cromos... Elección de la medida más idónea y verificación posterior mediante recubrimientos. Defina la actividad concreta y enuncie las preguntas que como profesor haría a los alumnos.*

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

- *Inventar y exponer al gran grupo un Sistema Métrico para medir superficies utilizando todo tipo de papel: blanco, cuartillas, tamaños Din,... Establecer las relaciones entre la unidad, sus múltiplos y submúltiplos. Enuncie tres actividades concretas para realizar con los alumnos.*

4.4. MATERIALES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ÁREAS: TANGRAMS Y PALILLOS

Vamos a dedicar este apartado a presentar dos materiales importantes en el aprendizaje del concepto de área de una forma manipulativa, de manera que el alumno experimente mediante actividades y de una forma directa dicho concepto.

1. TANGRAMS

Los puzzles han sido juegos muy aceptados por los niños de todos los tiempos. Ya en la Educación Infantil, el alumno realiza puzzles para reconstruir figuras geométricas, símbolos numéricos,...

El tangram no es un juego milenario como algunos indican sino que apareció posteriormente. Las últimas investigaciones de Jerry Slocum lo sitúan entre 1796 y 1801. Los primeros libros con Tangrams y soluciones aparecen en Europa a principio del siglo XIX. Estos libros tenían muchas propuestas de figuras chinas, animales, casas, flores,...

Durante este siglo, este juego se hace popular en varios países, no solo como un juego de niños, sino también como una diversión de adultos. Actualmente además de ser un juego entretenido para todos, se utiliza como material didáctico para la enseñanza de algunas partes de las Matemáticas como figuras geométricas, medida o fracciones.

El Tangram es un juego (de madera, cartón duro o plástico) formado por un número de piezas a partir de las cuales podemos construir diferentes figuras y, en particular, figuras geométricas. Sin embargo, también se pueden utilizar para el estudio del concepto de área, que es la principal utilización que le daremos en este apartado. Las actividades geométricas ya fueron presentadas y desarrolladas en Barrantes y Barrantes (2017).

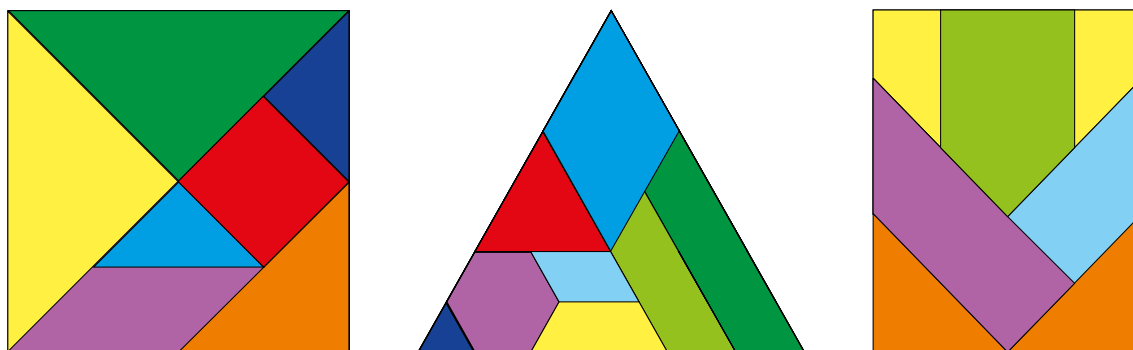


Figura 4.12. Tipos de tangrams: cuadrado, triangular y pitagórico.

Podemos encontrar diferentes tipos de Tangram, que reciben su nombre normalmente de la figura en la que encuadramos sus piezas: Así tenemos: el Tangram triangular que tiene 8 piezas, el cuadrado con 9 piezas y pentagonal y pitagóricos con 7 piezas. Éstos no son todos los modelos de tangram que existen, como podemos comprobar en internet.

Todos los tangram son iguales de útiles en la enseñanza de las áreas. Vamos a desarrollar actividades de los Tangrams cuadrado y triangular, aunque posteriormente trabajaremos los demás tangram planteando actividades para los estudiantes para profesores.

Tangram cuadrado

Empezaremos por la construcción de un tangram cuadrado. Su construcción es fácil (figura 4.13).

- Tomamos un cuadrado de lado AB como el de la figura y marcamos los puntos medios, G, H y F. Marcamos también el punto E central del cuadrado mediante las diagonales del cuadrado. La obtención de las piezas no tiene dificultad teniendo en cuenta que la pieza 3 es un cuadrado de lado FE.

Una vez contruidos, vamos ahora a desarrollar una metodología de cómo se utiliza este material. Sería necesario que todos los alumnos tuvieran un tangram, que puede ser de plástico, madera o construido con papel fuerte o cartón.

- a. En un primer momento, los alumnos se deben familiarizar con este material y para ello, los dejaremos un tiempo de juego libre en el que el alumno manipula el tangram, construye figuras y va poco a poco conociendo las piezas.
- b. En un segundo tiempo, hacemos actividades dirigidas. Para ello, el alumno se familiariza con las piezas mediante la observación y *nombrando el tipo de figuras que constituyen esas 7 piezas, así como su tamaño: único, grande, mediano o pequeño* (figura 4.13).

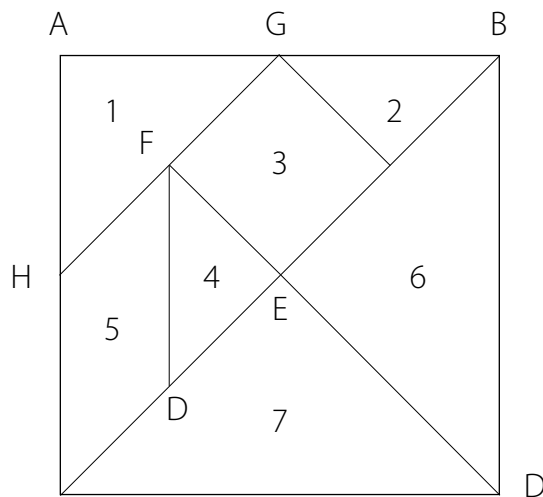


Figura 4.13. Tangram cuadrado.

Podemos observar la importancia que tiene la percepción, la intuición y las imágenes mentales que tengan los alumnos sobre las distintas formas para llevar a cabo estas actividades con éxito.

Podemos iniciar al alumno en el tema de **figuras equivalentes**, es decir, *figuras que tienen la misma superficie*, para ello se pueden plantear actividades como las que siguen.

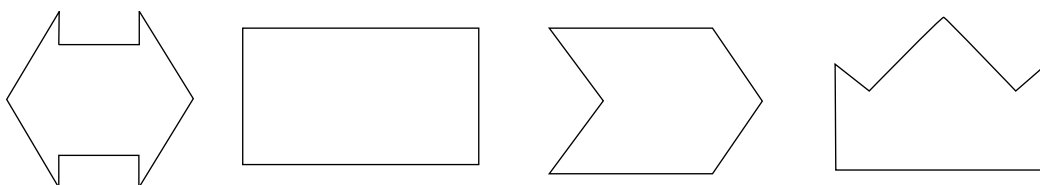


Figura 4.14. Cálculo de áreas.

Actividades para los alumnos.

- *Construye varias figuras con un triángulo grande, el paralelogramo, y dos triángulos pequeños. Observar que tienen distintas formas pero todas tienen la misma superficie. Añadimos ahora el cuadrado y construimos figuras como antes. El profesor pregunta a los alumnos si las figuras construidas ahora tienen la misma superficie, y si tienen la misma superficie que las construidas anteriormente.*

Con este material se puede estudiar o reforzar el concepto de área. Se puede tomar como medida unidad el triángulo más pequeño y, a partir de éste, obtener las áreas de las demás piezas del tangram. De este modo, llegamos a que:

Los dos triángulos grandes miden cuatro pequeños y el resto de las piezas miden dos triángulos. Podíamos ahora preguntar: *¿cuántos triángulos mide el cuadrado total formado por todas las piezas?*

- *Medir las áreas de las figuras 4.14, tomando como medida unidad el triángulo pequeño.*

Tangram triangular

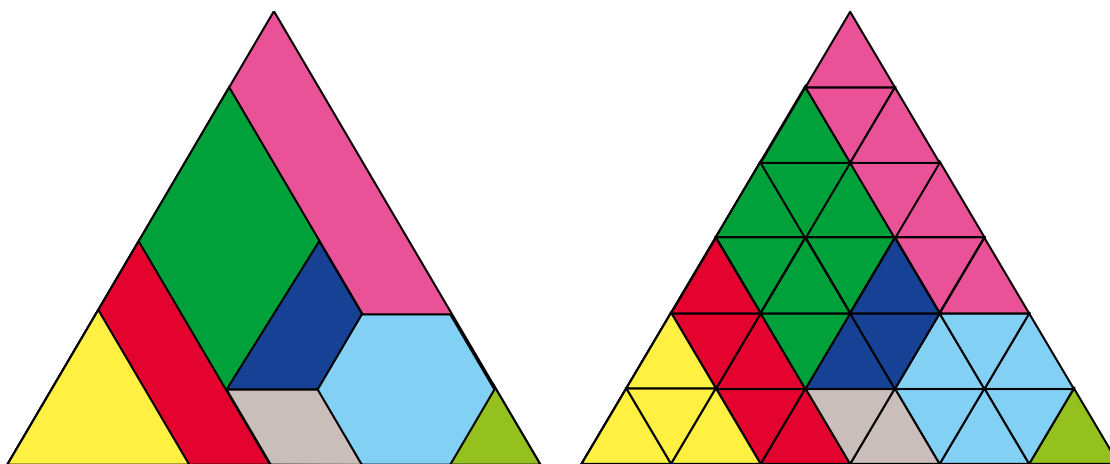


Figura 4.15. Tangram triangular y su triangulación.

Podemos también trabajar con el tangram triangular (figura 4.15), cuyas piezas son las de la figura izquierda. Dicho tangram sale de un triángulo equilátero dividido convenientemente por un triángulo unidad, como muestra la figura de la derecha.

Podemos observar que son ocho piezas, construidas todas a partir de la más pequeña (triángulo pequeño), y que podemos denominar: triángulo pequeño y grande, rombo pequeño y grande, trapecio pequeño, mediano y grande, y exágono.

A diferencia del tangram cuadrado, todas las piezas son diferentes. Este hecho, y que tenga una pieza más que el cuadrado, hace que las figuras sean más difíciles de construir, mejorando así la capacidad mental, la ubicación espacial y el razonamiento del alumnado.

Actividades para los alumnos.**1. Medida de todas las piezas.**

- Si damos al triángulo pequeño el valor 1, ¿qué valor daremos a las demás piezas? *Elabora una lista con los valores de cada pieza.*
- Si damos al rombo pequeño el valor 1, ¿qué valor daremos a las demás piezas? *Igual se puede hacer con las demás piezas.*

Esta actividad es una práctica interesante, en primer lugar porque se trabaja con unidades triangulares a las que los alumnos no están acostumbrados. Al manejar distintas unidades, el alumno descubre el valor tan considerable que tiene la medida unidad para obtener el resultado numérico de la “medida final” de la figura correspondiente. El alumno experimenta cómo a unidades de medida distintas obtenemos valores distintos de la medida de un mismo objeto. Dependiendo de la unidad elegida se trabaja con números naturales o fraccionarios.

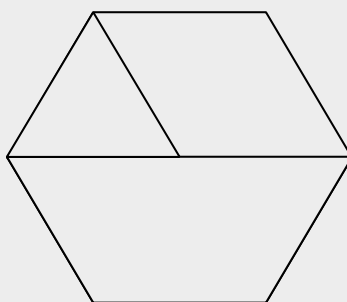


Figura 4.16. Exágono construido con piezas del tangram triangular.

2. Figuras equivalentes. Se puede estudiar también el concepto de *figuras equivalente*.

- *Forma una figura con dos, tres, cuatro,..., piezas y halla su área. Después, forma una figura distinta con las mismas piezas e igualmente halla su área. Medir las dos figuras con la misma unidad ¿qué ocurre? Da una explicación.*
- *Construimos un exágono con el triángulo pequeño, el rombo pequeño y el trapecio pequeño, como el de la figura 4.16. Con estas mismas piezas puedes construir otra figura. Nombra dicha figura y calcula el área ¿Qué relación existe entre las dos áreas? ¿Podemos decir que son equivalentes? Construye otras figuras con estas piezas y observa que su área es siempre la misma.*
- *El profesor da una figura geométrica determinada y pide al niño que forme una figura equivalente.*
- *Dadas una serie de figuras, hallar el área de las mismas y deducir las que son equivalentes. – Construye un trapecio que llamaremos T con las cinco piezas: el triángulo pequeño y mediano, trapecio pequeño y mediano, y rombo pequeño. Construye un triángulo que llamaremos A con el triángulo pequeño, y los tres trapecios. Son figuras equivalentes T y A ¿por qué?*
- *Construye una figura que llamaremos F que no sea equivalente al trapecio T ¿es dicha figura equivalente al triángulo A?*

3. Actividades para el concepto de perímetro.

El profesor debe trabajar conjuntamente con la superficie el concepto de perímetro. El trabajar con materiales el concepto de perímetro ayuda a que el alumno, mediante el tacto, pueda hacer una diferenciación clara entre las longitudes y las áreas, como distintas magnitudes. Cuando los alumnos trabajan estos conceptos con fichas de trabajo tienen más dificultad en establecer las diferencias ya que las figuras aparecen dibujadas en dichas fichas, y el perímetro no es más que esa línea dibujada en el papel, y que no tocan. Estos alumnos tienen problemas en identificar área y perímetro y adquieren creencias como que a mayor perímetro tenemos mayor área, pues asocian que la medida del área depende de los lados, cuando esto solo ocurre cuando los polígonos son regulares.

Vamos a utilizar en principio hilos o cuerdas de distintos colores. Se rodean las distintas piezas del Tangram con hilos de colores y se corta el hilo. Comparamos dos a dos las longitudes obtenidas. Y entre todas las piezas del Tangram, buscamos la de perímetro más grande, las que son iguales en perímetro y la más pequeña. Se puede proceder igual con composiciones hechas con dos o más piezas del tangram.

Actividades para los alumnos.

- *Elige cuatro piezas del tangram triangular de ocho piezas. Construye con ellas figuras geométricas. Dibuja en una trama triangular dichas figuras. Calcula el perímetro midiendo con hilos de colores o con regla, tomando como unidad el lado del triángulo-trama y calcula el área tomando como unidad el triángulo de la trama. Construye una tabla en la que anotarás el nombre de la figura, el perímetro y el área. Observa las propiedades que tienen en común y en qué se diferencian. Por ejemplo, tienen el mismo perímetro,...*
- *Toma las ocho piezas del tangram y calcula su área y su perímetro y construye una tabla como la anterior ¿qué observas ahora? ¿Existen figuras con el mismo perímetro y distinto área? ¿y viceversa?*

Actividades para grupos de estudiantes para profesores.

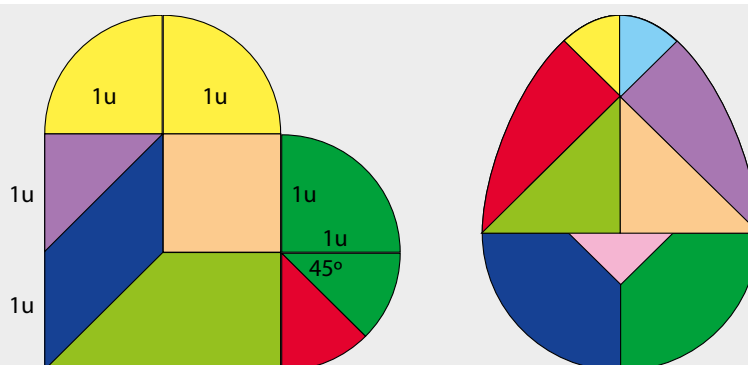


Figura 4.17. Tangram corazón y tangram ovoide.

- Cada grupo va a hacer un estudio de cada uno de los tangram, similar al que hemos hecho anteriormente, cuyas líneas de trabajo pueden ser:

1º Investigar de forma libre las posibilidades del tangram elegido relacionadas con el tema de medida.

2º Estudiar qué conceptos del currículo escolar de Primaria podemos estudiar con dicho tangram. Elaborar algunas actividades muestra de dichos conceptos y presenta algunas actividades.

Los Tangrams objetos de estudio son los nombrados anteriormente (figura 4.12) añadiendo los tangrams corazón y ovoide (figura 4.17)

2. PALILLOS

Los palillos son un material sencillo y barato que podemos utilizar para la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométrica y de longitudes, en particular el perímetro. Con los palillos, los alumnos pueden trabajar los conceptos de segmentos y su clasificación. También pueden construir todos los tipos de ángulos, clasificarlos y estudiar su medida.

Es un material importante para el estudio del área como *espacio vacío delimitado*, en nuestro caso, por los palillos.

Existe un gran número de pasatiempos y actividades para realizar con palillos que desarrollan en el alumno su pensamiento lógico, pero nuestro estudio, aunque no ignora estas actividades, se centra más en aquellas en las que trabajemos algún contenido del currículo de Primaria.

La construcción de los polígonos es también tarea sencilla, así como el cálculo de sus áreas considerando como unidad de medida el área cuadrada formada por cuatro palillos o bien el área triangular formada por tres palillos. Los palillos son un material idóneo para trabajar las fracciones, y en Secundaria, el teorema de Pitágoras y las semejanzas.

Planteamos o proponemos, a modo de muestra, algunas actividades centrándonos en el tema que nos ocupa, que son las medidas de superficies, aunque también trabajaremos el concepto perímetro conjuntamente para que el alumno aprenda a diferenciarlos.

Actividades para los alumnos.

- En la figura 4.18 intenta quitando dos palillos obtener dos cuadrados ¿cómo se relacionan sus áreas? Se toma como unidad la unidad cuadrada.

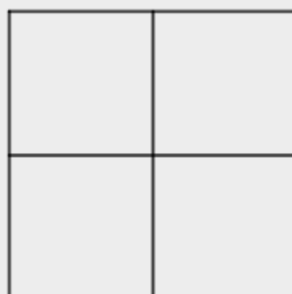


Figura 4.18. Quitando dos palillos obtener dos cuadrados.

- En la figura 4.19, quitando tres palillos intentar obtener un solo triángulo. Tomando como unidad la unidad triangular ¿cuánto mide el área de ese nuevo triángulo?
 - En la misma figura si retiras dos palillos puedes obtener dos triángulos. Mide sus áreas.
 - Quitando tres palillos convierte la figura en un rombo y un triángulo. Relaciona el área del rombo y del triángulo.
 - En la figura 4.20 formada por palillos podemos ver triángulos y un exágono central. Mueve dos palillos para que todas las figuras sean triángulos, luego calcula el área de los triángulos en unidades triangulares.
 - Formamos la figura 4.21 con doce palillos
 - Descubre por lo menos cuatro formas geométricas en dicha figura ¿Cuánto mide el área de dicha figuras, tomando como medida la unidad triangular ¿Cuánto mide el área de la figura total?
 - Quitando cuatro palillos forma solamente tres triángulos equiláteros. Mide sus áreas.
 - Quitando dos palillos observa qué formas quedan. Las formas son distintas según los palillos que quitamos, pues haz una lista de las posibilidades que encuentres y calcula el área de las figuras resultantes.
6. A partir de la figura 4.22 formada por tres rombos.
- Quita dos palillos y mueve otros dos para formar figuras. Expresa el nombre de las figuras formadas y su área.
7. Si tomamos 18 palillos podemos construir el triángulo de la figura 4.23.
- Retira 6 palillos y observa las figuras que vas obteniendo. Dí su nombre y su área. Repite la operación retirando otros distintos.

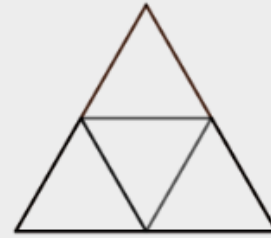


Figura 4.19. Quitando tres palillos obtener un solo triángulo.

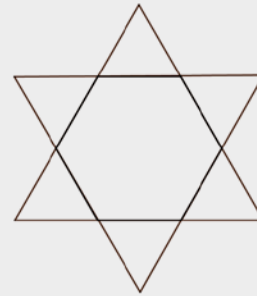


Figura 4.20. Mueve dos palillos para que todas las figuras sean triángulos.

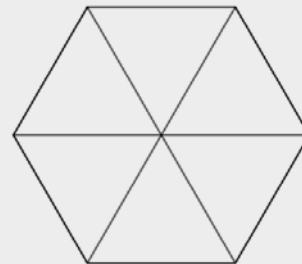


Figura 4.21. Descubre cuatro formas geométricas.



Figura 4.22. Quita dos palillos y mueve otros dos para formar figuras.

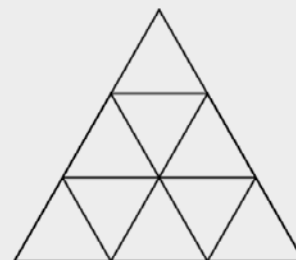


Figura 4.23. Retira 6 palillos y nombra las figuras que aparecen.

- En la figura 4.24, mueve seis palillos para que te queden seis triángulos y otra figura. Dime qué figura es la que sale y calcula su área.
- Coloca 17 palillos como en la figura 4.25, formando un rectángulo cuya área es $6 u^2$.
 - a) Quita 1 palillo de manera que el área de la figura resultante sea $5 u^2$.
 - b) Quita 2 palillos de manera que queden $5 u^2$.
 - c) Quita 3 palillos de manera que queden $4 u^2$.

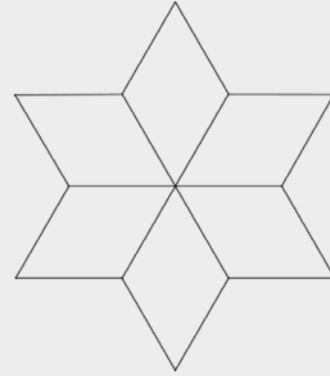


Figura 4.24. Mueve seis palillos para que te queden seis triángulos y otra figura.

Estudia en cada caso el tipo de polígono que se ha formado.

- Formamos un cuadrado con doce palillos. ¿Cuál es el área de este cuadrado en unidades cuadradas? Construye con estos doce palillos distintas figuras de área 5, 4 y 3 unidades cuadradas. Indica de qué tipo son las figuras construidas.

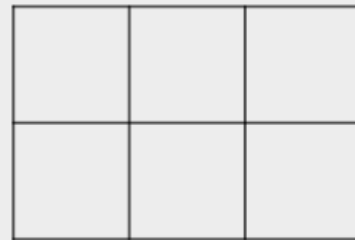


Figura 4.25. Quita un palillo de forma que el área de la figura resultante sea $5 u^2$.

Planteamos una última actividad, como refuerzo, en la que se presentan diferentes unidades de medida para calcular el área de una figura. Con este tipo de ejercicio se afianza la idea de unidad genérica, no necesariamente cuadrada, y además que el valor de la medida depende claramente de la unidad de medida a utilizar.

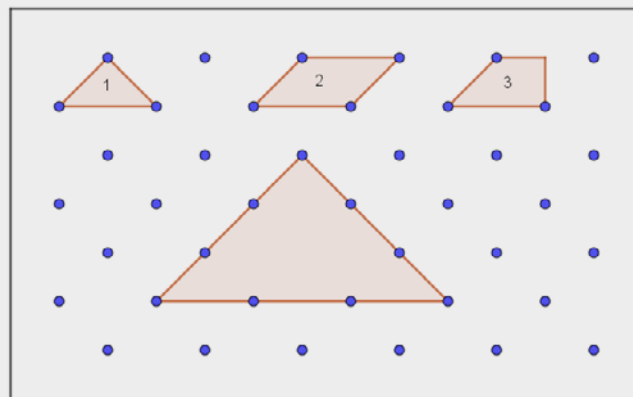


Figura 4.26. Medida con distintas unidades.

- Calcula cuántas figuras 1, cuántas figuras 2 y cuántas figuras 3 caben en el triángulo inferior (figura 4.26). Completa la tabla siguiente:

Figuras	(unidad 1)	(unidad 2)	(unidad 3)

El alumno debe observar si caben exactamente o no. El profesor puede animar al alumno para que si no se puede hacer con una sola utilice dos o más unidades.

Todas las actividades anteriores deben llevar al alumno, guiado por su profesor, a la necesidad de una unidad de medida entendida por toda la comunidad. Para llegar a ello, debemos forzar una conversación en la que los alumnos expresen la medida de un objeto en unidades arbitrarias, por ejemplo, la superficie de la puerta en libretas de Juan, de Luis o de Miguel. Como los tamaños de las libretas son distintos entonces la puerta medirá 15 libretas, 20 libretas, 18 libretas respectivamente. Se planteará entonces un debate en el que surja la necesidad de utilizar todos la misma medida para poder entendernos, no solo en la clase sino a nivel de todas las personas con las que nos comunicamos. Dando lugar al paso de las unidades arbitrarias a las unidades convencionales.

4.5. UNIDADES CONVENCIONALES DE MEDIDA DE SUPERFICIE

Llega el momento de presentar las unidades convencionales. Recordemos que es conveniente comenzar por aquellas unidades más asequibles y más manipulables por los alumnos. En este caso, sería el dm^2 y el cm^2 y el m^2 .

En general, los documentos oficiales recomiendan que el alumno mida, con datos reales, objetos de la vida ordinaria. Por ello, sería conveniente comenzar con medida de objetos que sean medibles fácilmente y no causen tedio o aburrimiento en los alumnos. Pueden medir folios o medir una superficie-suelo, mesa, pupitre, ... no muy grande utilizando cm^2 , dm^2 y m^2 , eligiendo la medida acorde con el tamaño del objeto a medir. Una vez obtenidos los resultados, observarlos y establecer relaciones.

En esta etapa, es importante también seguir utilizando la estimación antes de realizar la medida concreta. Los ejercicios de estimaciones se pueden hacer de diferentes formas:

1. El alumno ve la superficie y también la unidad de medida a utilizar.
2. El alumno ve la superficie pero tiene oculta la unidad de medida, la ve un tiempo limitado anterior a la estimación.
3. El alumno no tiene delante la superficie a medir, la ve durante un tiempo limitado y anterior a la estimación, pero sí tiene delante la unidad a utilizar.
4. El alumno no tiene delante ni la superficie ni la unidad, las ve un momento anteriormente a la estimación.

Estas actividades le ayudan a interiorizar el concepto de medir con la unidad adecuada y le posibilitan para utilizar estas estimaciones en su vida escolar.

Actividades para los alumnos.

El alumno trabaja en esta etapa recubriendo la superficie a medir con la unidad utilizada. Para ello el profesor debe tener suficientes patrones de dm^2 , cm^2 , m^2 , de madera, cartulina u otros materiales.

- *Dada una superficie de cuatro decímetros cuadrados buscar superficies que tengan una medida aproximadamente igual. Se puede realizar con la medida decímetro cuadrado presente o no presente. Comprobar si ha sido buena la búsqueda realizando la medida.*

- *Repetir el ejercicio con 10 centímetros cuadrados. Para ello el alumno coloca sobre la mesa los 10 centímetros cuadrados en distintas posiciones antes de buscar los objetos.*

A la vez, es esencial que el profesor realice actividades para que el alumno descubra por sí mismo las relaciones entre las diversas unidades, es decir, que un metro cuadrado tiene 100 decímetros cuadrados, para que le sea más fácil aprender posteriormente las tablas de equivalencias. Nunca deben aprenderse las tablas de equivalencias sin haberlas experimentado antes suficientemente.

La idea es que el alumno descubra por sus propios medios los múltiplos y submúltiplos, acostumbrándole a expresar la medida con la unidad adecuada a cada medición; y para ello, es bueno hacer siempre estimaciones antes de medir. Una tarea posterior es realizar estimaciones de una misma medición con distintos múltiplos o submúltiplos, para que vaya relacionando las distintas medidas de la escala métrica.

Otras veces, los profesores proponen ejercicios de cálculo de superficies tales como la medida del patio del colegio, campos de deportes o plazas que no se llegan a medir en realidad sino que mediante una medida unidimensional se transforman en la medida de un cuadrado, un rectángulo o un círculo dibujado sobre un papel. De esta forma, el alumno no realiza actividades de medida, sino que pasa directamente del mundo de la medida (espacio medible) al mundo de los números donde se obtienen las medidas (números reales) y donde el alumno solamente trabaja realizando cuentas, adquiriendo una concepción falsa de la medida auténtica.

Al realizar la medida de forma real, el alumno puede observar la necesidad de tener que utilizar una medida mixta para medir superficies. El alumno observa que no puede medir exactamente una alfombra grande si utiliza solamente el metro cuadrado. Mide en metros cuadrados y le queda un espacio sobrante. Para llenar ese espacio observa que puede utilizar medidas más pequeñas como el decímetro cuadrado y en su defecto el centímetro cuadrado. De esta forma el alumno va adquiriendo la noción de medir no solamente con una unidad grande sino con una medida mixta, en la que utilizamos distintos múltiplos o submúltiplos.

El alumno puede realizar las medidas mixtas de dos formas. Las primeras medidas las puede realizar el alumno por superposición de la superficie a medir mediante varios metros cuadrados, decímetros y centímetros cuadrados de cartulina, madera, etc. que va colocando sobre la superficie hasta cubrirla toda. Después, el profesor puede enseñarle a medir utilizando una sola unidad de cada una, es decir, un solo metro cuadrado, un solo decímetro y centímetro cuadrado del material correspondiente. Esto es dificultoso, al principio, para muchos alumnos.

Por último, añadir que todas las actividades que se realizan con unidades arbitrarias se pueden realizar también con unidades convencionales de superficies. Así pues el profesor debe diseñar tareas en las que los alumnos expresen con varias unidades distintas la misma medida, relacionando múltiplos con submúltiplos y favoreciendo el aprendizaje del cambio de unas unidades a otras.

4.6. ESTRATEGIAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS MEDIANTE MEDIDAS UNIDIMENSIONALES

Basándonos en la metodología activa, el trabajo o actividad a realizar sería el cálculo de las áreas de las principales figuras planas a partir de lo que ya conocemos.

El material a utilizar sería el geoplano o las tramas, que es una representación del geoplano mediante puntos en una hoja de papel. El alumno dibuja, realiza, acierta o se equivoca, borra, busca...

Realizamos en primer lugar actividades de cálculo de áreas y perímetros con el geoplano. Algunas actividades con el geoplano o con papel punteado pueden ser:

Actividades para los alumnos.

1. *Calcula el área de estas figuras (figura 4.27) en unidades cuadradas y el perímetro en unidades lineales tomando como unidad lineal el lado del cuadrado unidad.*
2. *¿Tienen alguna el mismo perímetro o área? ¿Las que tienen el mismo área tienen el mismo perímetro?*

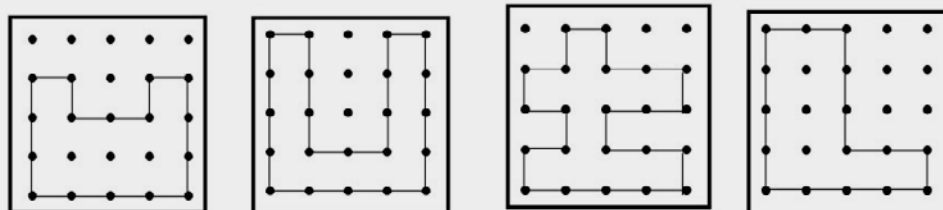


Figura 4.27 ¿igualdad de áreas implica igualdad de perímetros y viceversa?

- *Haz, en el geoplano, 5 figuras que tengan el mismo área pero su forma sea distinta. Igualmente, 5 figuras que tengan el mismo perímetro pero de distinta forma.*
- *Construye 3 cuadrados y 3 rectángulos en tu geoplano y calcula su área mediante un método que no sea contar los cuadrados uno por uno. Por ejemplo, contando las filas y las columnas, completa para ello la tabla de la figura 4.28.*

Rectángulo	Longitud base	longitud altura	área
A			
B			
C			
D			
E			
F			

Figura 4.28. Tabla de cálculo de áreas de rectángulos.

Mediante esta actividad, el alumno relaciona las unidades cuadradas que cubren el rectángulo con la longitud de la base (número de columnas) y la longitud de la altura (número de filas).

3. Área del cuadrado y del rectángulo.

Calcula el área de los rectángulos de la figura 4.29. Extrae conclusiones sobre la manera de calcularlo.

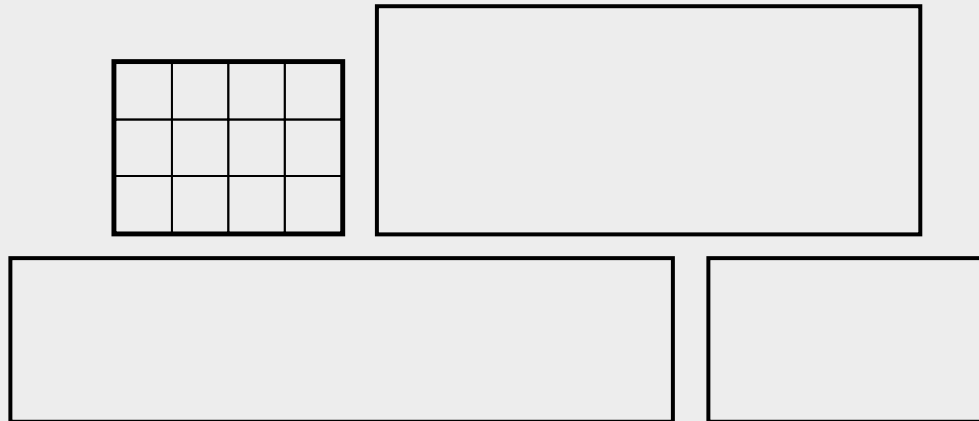


Figura 4.29. Calcular el área de los rectángulos.

Partimos de que el alumno ya ha aprendido a calcular el área del cuadrado y el rectángulo a través del geoplano y el papel punteado, mediante la toma de una unidad cuadrada que se superpone sobre la superficie a medir, o contando cuántas veces está dicho cuadrado unidad contenido en dicha superficie. Si empezamos por el cálculo de áreas pequeñas y luego pasamos a áreas mayores como la de la figura 4.30, obligamos al alumnado a buscar métodos alternativos para evitar el aburrimiento de contar una por una las unidades. Esta búsqueda les puede llevar al cálculo del área de forma bidimensional y obtener que el área se puede calcular multiplicando lado por lado o lo que es lo mismo base por altura (figura 4.30).

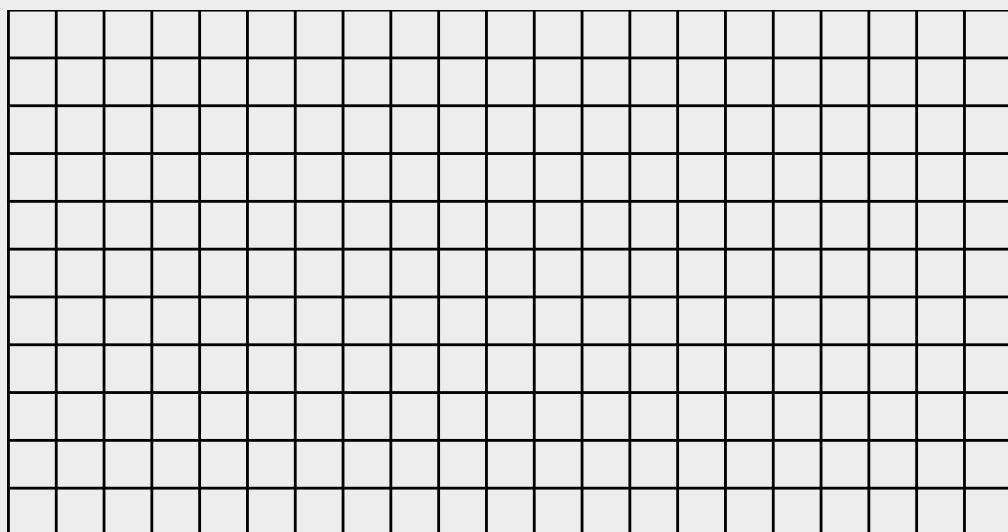


Figura 4.30. Área igual a base por altura.

4. Área del paralelogramo.

Hacemos, en primer lugar, en el geoplano o tramas, ejercicios del tipo:

- *Calcula el área del paralelogramo y el rectángulo del papel punteado dados en la figura 4.31 ¿qué observas? ¿Puedes transformar el paralelogramo en el rectángulo? Si lo has hecho en papel punteado puedes recortarlo para la transformación.*

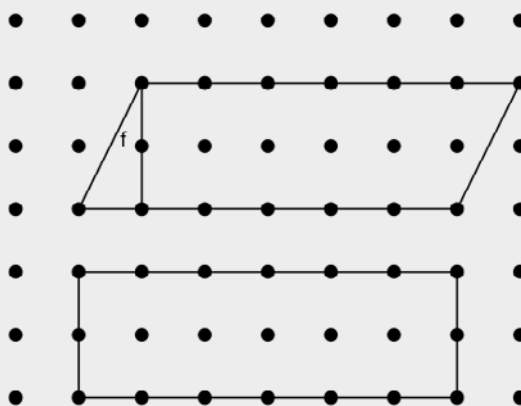


Figura 4.31. Transformación del paralelogramo en rectángulo de igual área.

Tomamos como punto de partida lo que el alumno sabe del ejercicio anterior: el área del rectángulo. Área = base x altura

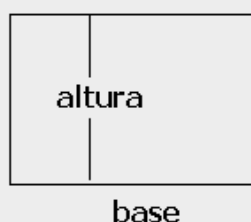


Figura 4.32. Área del rectángulo.

y queremos calcular el área del paralelogramo.

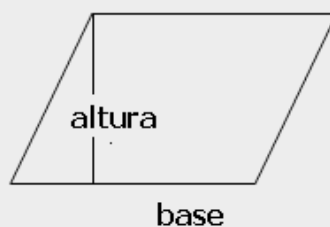
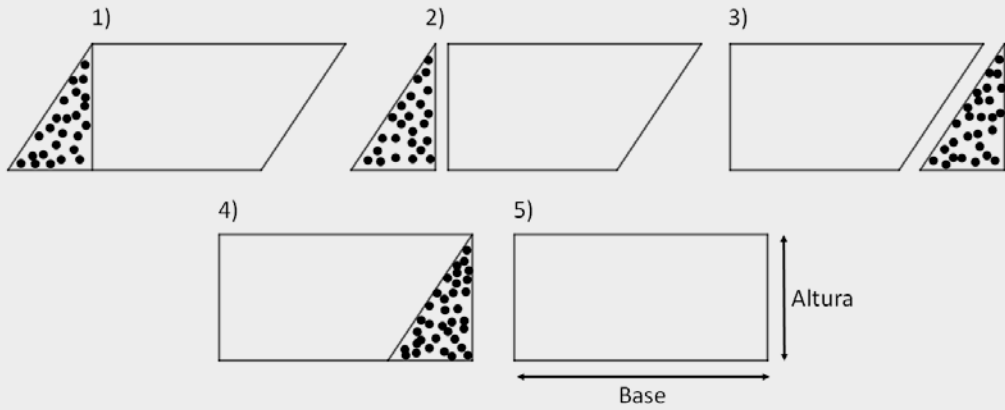


Figura 4.33. Área del paralelogramo.

Para realizar la exploración, el profesor invita al alumno a convertir el paralelogramo en un rectángulo, recortando o trazando áreas equivalentes. También se puede hacer en el papel punteado, dibujando. El alumno a partir de estas informaciones busca e investiga. Una forma para obtener la solución puede ser la siguiente (figura 4.34).

De esta forma, los alumnos prueban que el área del paralelogramo se calcula igual que el área del rectángulo

$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura.}$$



Figuras 4.34. Transformación del paralelogramo en rectángulo de igual área.

Este ejercicio se debe hacer también con medidas numéricas hasta que el alumno descubra la generalidad. Después realizamos actividades de refuerzo como las siguientes:

- Toma las medidas necesarias de este rectángulo y este paralelogramo para calcular sus áreas (figura 4.35). Antes de calcularla se les pregunta: ¿son distintas? ¿por qué?

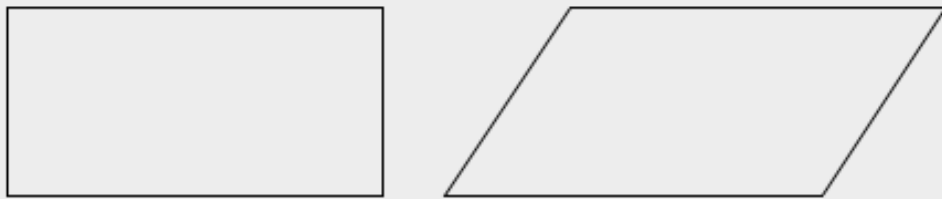


Figura 4.35. Comparación de áreas a partir de los datos.

5. Área del triángulo. Hacemos ejercicios previos en el geoplano.

- Construye en el geoplano un rectángulo como el dado (figura 4.36) y dos triángulos A y B. Calcula el área del rectángulo y de los triángulos y relaciónalos.

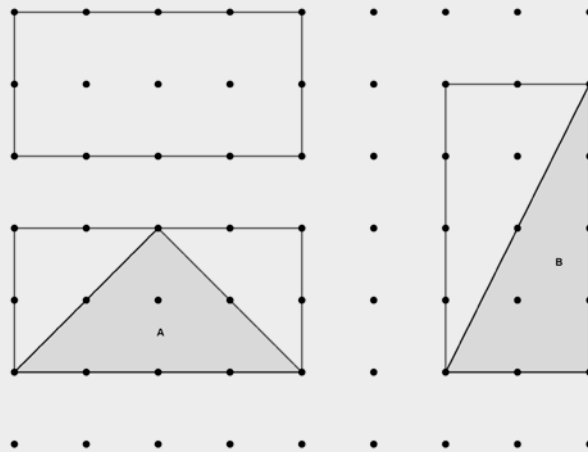


Figura 4.36. Área de triángulos.

El alumno observa que el área del triángulo es la mitad del área del rectángulo que ya sabe calcular mediante base por altura.

- *Construye un paralelogramo y un triángulo con tres vértices comunes (figura 4.37). Calcula sus áreas y compáralas.*

Es decir, el profesor tiene en cuenta lo que el alumno sabe que, en este caso, es el área del paralelogramo.

Y, a partir de aquí, el alumno investiga cómo puede calcular el área de un triángulo. El área de este paralelogramo es igual a la base por la altura, luego el área del triángulo punteado será la mitad. Igual a como lo hemos hecho en el papel punteado o en el geoplano (figura 4.38).

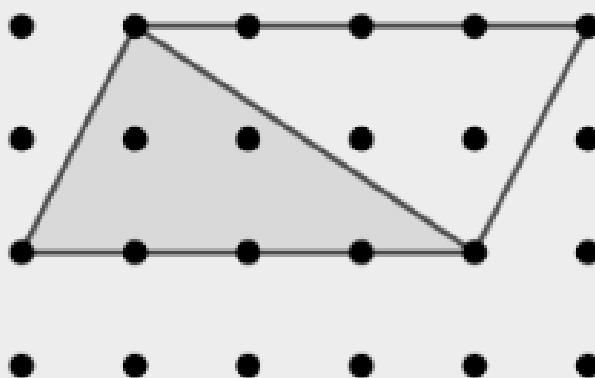


Figura 4.37. Área del triángulo la mitad del paralelogramo.

Creamos en el alumno un conflicto cognitivo, es decir, rompemos el equilibrio inicial de sus esquemas y surge la motivación por el aprendizaje. A partir de la información que tiene el alumno busca e investiga, pudiendo llegar a la respuesta correcta.

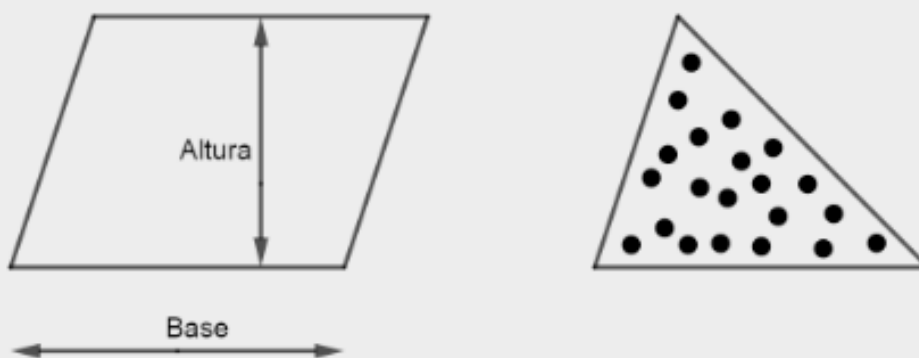


Figura 4.38. Área del triángulo la mitad de la base por la altura.

- *También se le puede hacer observar que si dibuja un triángulo igual pero girado 180 grados se forma el paralelogramo y llegamos a la misma conclusión (figura 4.39).*

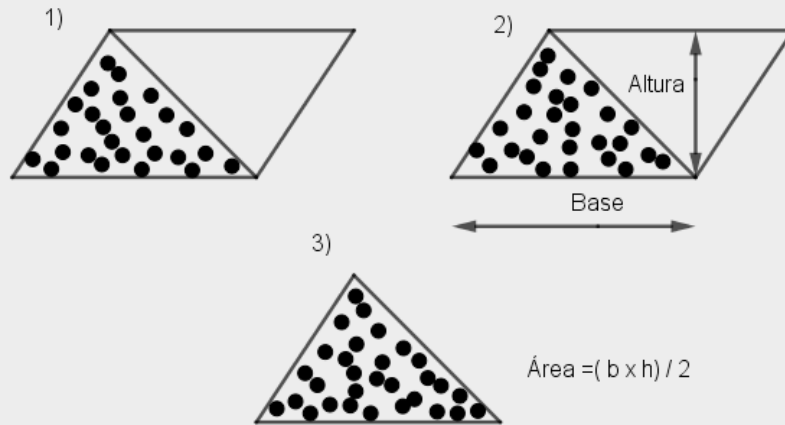


Figura 4.39. Área del triángulo = $(b \times h) / 2$.

Hay otras estrategias para llegar a calcular el área del triángulo que el alumno puede descubrir, por ejemplo:

- *Parte el triángulo por la mitad de la altura y gira una de las partes para formar un paralelogramo (figura 4.40). Calcula el área del paralelogramo ¿Es la misma que la del triángulo?*

Se forma entonces un paralelogramo de igual base pero de altura la mitad cuya área coincide con la del triángulo. El alumno extrae conclusiones.

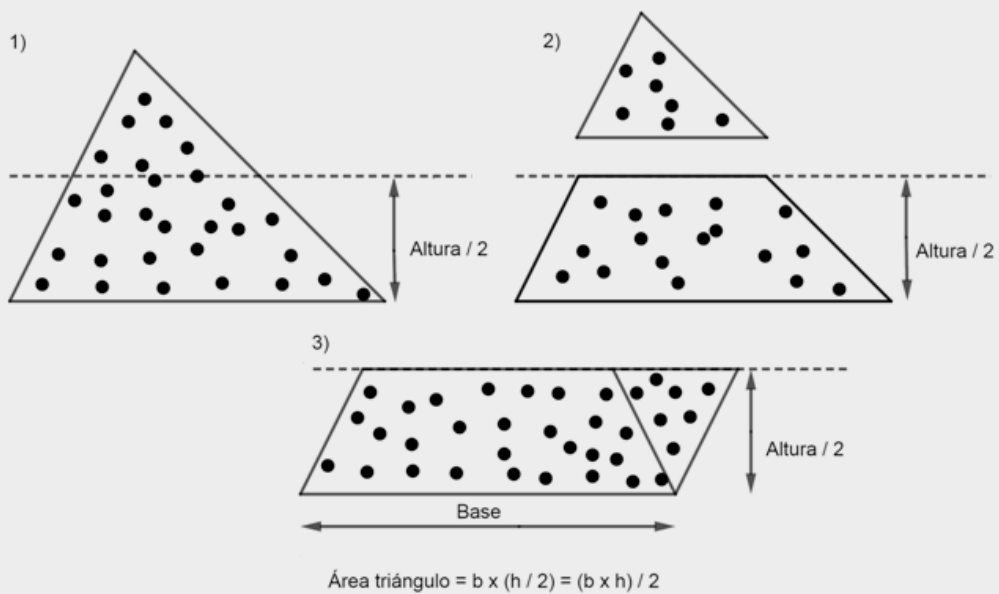


Figura 4.40. Otra forma de calcular el área del triángulo.

Ejercicio individual para estudiantes para profesores.

Probar que los dos métodos son válidos para cualquier triángulo. Probarlo para triángulos rectángulos, y obtusángulos.

Actividades para los alumnos.

Probar la fórmula obtenida para el cálculo del área de los triángulos en la siguiente malla cuadrada (figura 4.41). Realizar el cálculo mediante la fórmula y mediante la unidad cuadrado reticular.

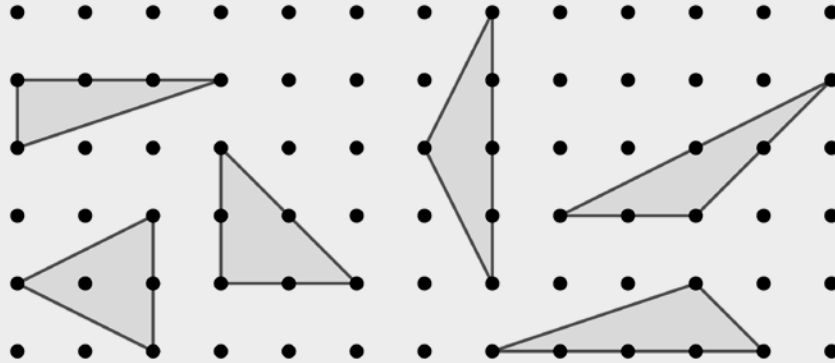


Figura 4.41. Malla para practicar la fórmula.

6. Cálculo del área del rombo a partir del área del rectángulo.

El rombo es un paralelogramo, luego siempre podemos calcular su área conocido el lado y la altura del rombo. Si conocemos sus diagonales, ¿cómo podemos llegar a la famosa fórmula?:

$$\text{Área del rombo} = (\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}) / 2$$

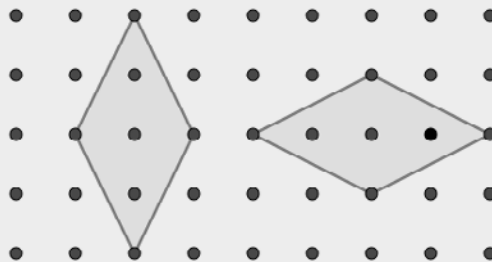


Figura 4.42. Área del rombo.

Pista 1: Partimos del área del rectángulo luego lo que tenemos que hacer es inscribir el rombo en un rectángulo. Prueba en los siguientes rombos inscritos en sus respectivos rectángulos (figura 4.43) y extrae conclusiones.

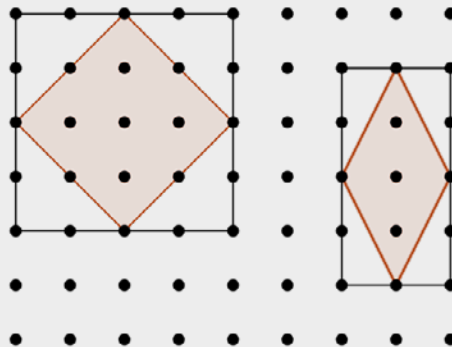


Figura 4.43. Área del rombo a partir del área de un rectángulo.

El alumno debe llegar a que el área del rectángulo es base por altura. Debe observar que la base y la altura del rectángulo coinciden con las diagonales del rombo. Luego, podemos decir, en este caso, que el área del rectángulo es diagonal mayor por diagonal menor. Solo le queda probar que el área del rombo es la mitad de la del rectángulo para obtener la conocida fórmula, basta con comprobar que las áreas 1, 2, 3 y 4 coinciden (figura 4.44).

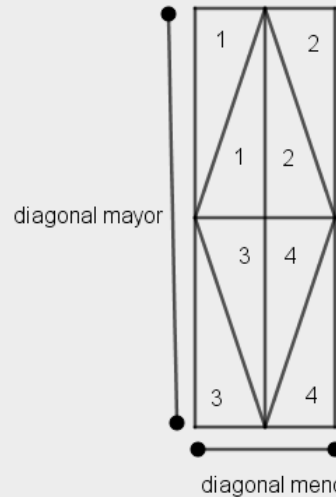


Figura 4.44. Área del rombo como la mitad de la del rectángulo.

- ¿Se puede calcular el área del rombo partiéndolo por la mitad, como en el caso del triángulo?

7. **Área del trapecio.** Una vez conocidas las dos estrategias de poner dos figuras giradas o partir por la mitad, el alumno no debe tener mucho problema en obtener el área del trapecio.

Actividades para los alumnos.

Pero para ello vamos a hacer algunos ejercicios antes en el geoplano, del tipo:

- Dibuja en tu geoplano los paralelogramos $p1$ y $p2$ y los trapecios A y B (figura 4.45). Calcula las áreas de todos y relaciona la de $p1$ con A y la de $p2$ con B . ¿Son las figuras C y D trapecios? Calcula sus áreas y relaciónalas C con A y D con B ¿si giras 180 grados C y D que se obtiene?

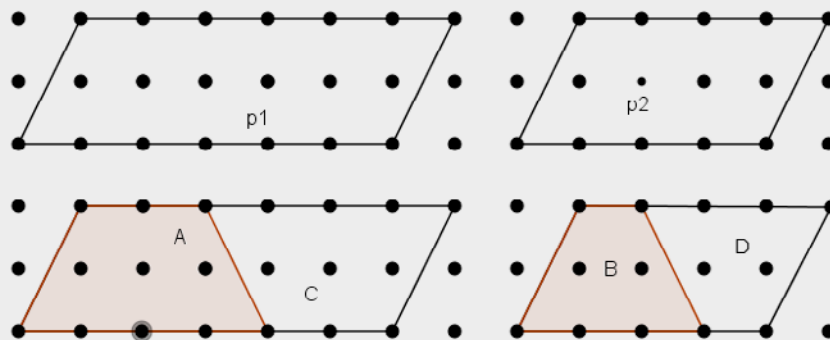


Figura 4.45. Área del trapecio a partir del área del paralelogramo.

- Igual que en casos anteriores, partimos del trapecio de bases B y b , y de altura h y mediante giro de la figura llegamos a un paralelogramo. ¿Cuál es la base del paralelogramo? ¿Y la altura? Calcula su área ¿Cuál será entonces el área del trapecio?

Se obtiene que el paralelogramo tiene de base: la suma de las dos bases y la misma altura. Lo mostramos mediante la figura 4.46.

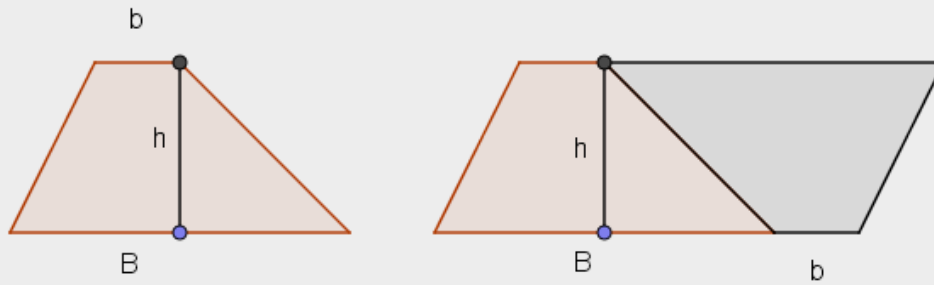


Figura 4.46. Giramos el trapecio y obtenemos un paralelogramo.

Luego como el área del paralelogramo formado es $(B + b) \times h$, entonces el área del trapecio será la mitad, pues el paralelogramo está formado por dos trapecios iguales.

$$A = ((B + b) \times h) / 2$$

Volvemos a incidir en que estas actividades deben realizarse con los alumnos de forma numérica, con ejemplos, hasta que ellos lleguen o puedan comprender la generalidad de la fórmula.

Ejercicio individual para estudiantes para profesores.

1. Obtener el mismo resultado mediante el método de partir la figura por la mitad y girar.
2. Obtener el área del trapecio rectángulo mediante su transformación en un rectángulo, por el método giro de la figura completa y por el método partición por la mitad.

Hemos, pues, obtenido las áreas de las figuras planas anteriores mediante dos estrategias generales una que consiste en unir a la figura original y su homóloga mediante giro de 180° para formar un paralelogramo o un rectángulo; el otro método consiste en partir la figura por la mitad y girar igualmente una de las partes con el mismo objetivo de formar una figura de área conocida.

Hay una manera más de obtener el área del trapecio a partir del área de un triángulo:

- Construye el trapecio en el papel punteado y traza una diagonal. Calcula el área de los dos triángulos que se forman (figura 4.47) y tienes el área del trapecio.

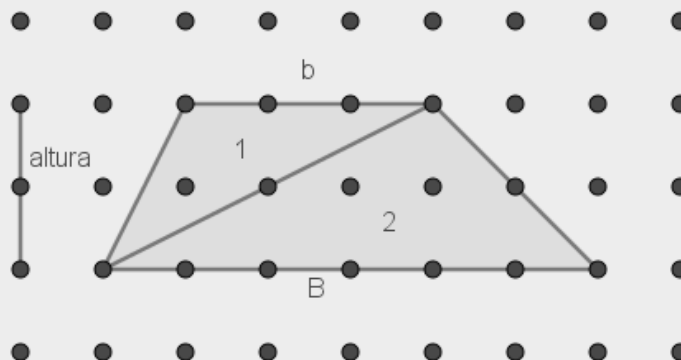


Figura 4.47. Obtener el área del trapecio a partir de esta figura.

Los dos triángulos tienen la misma altura (figura 4.47.) y como bases, las bases respectivas del trapecio, luego sumando las respectivas áreas se obtiene la misma fórmula del área del trapecio, es decir:

$$A_1 = \text{la mitad de } b \times h \quad A_2 = \text{la mitad de } B \times h$$

Sumando las dos obtenemos que el Área del trapecio es la mitad de $(B + b) \times h$.

7. **El área del resto de polígonos.** En general, siempre se puede calcular triangulando la figura sea cual sea la forma del polígono (figura 4.48.). Como ya conocemos cómo calcular el área de un triángulo, siempre podemos calcular el área de cualquier polígono, pues éstos siempre se pueden triangular. Se dice que el triángulo es el ladrillo de las áreas.

Actividades para los alumnos.

– Copia la figura 4.48 en un papel punteado y calcula el área mediante la triangulación de la figura. Para el cálculo mide las bases y las alturas de cada triángulo ¿Se pueden hacer varias triangulaciones? Dan todas las mismas áreas.

1. **Polígonos regulares.** Hay áreas de polígonos particulares que admiten también una fórmula como las vistas anteriormente que nos simplifica el cálculo. Por ejemplo en los polígonos regulares.



Figura 4.48. Cálculo del área triangulando.

Ejercicio individual para estudiantes para profesores.

Crea un procedimiento para obtener el centro de un polígono regular, dibujando o mediante la utilización de un programa informático como Cabri, o Geogebra.

Actividades para los alumnos.

- Calcula el área del pentágono regular, suponiendo que conoces el lado y la apotema.
- Triangula el polígono desde el centro y calcula el área como suma de las áreas de los triángulos (ver figura 4.49).

Cada triángulo tiene como base el lado y como altura la apotema, luego el área será igual a 5 veces el producto $a \times l$ donde a = apotema y l = lado. Pero como 5 veces el lado es el perímetro, por definición, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= P \text{ es } 5 \times \text{lado. Luego el área total será:} \\ \text{Área} &= \text{la mitad de } 5 \times l \times a = \text{la mitad de } P \times a \end{aligned}$$

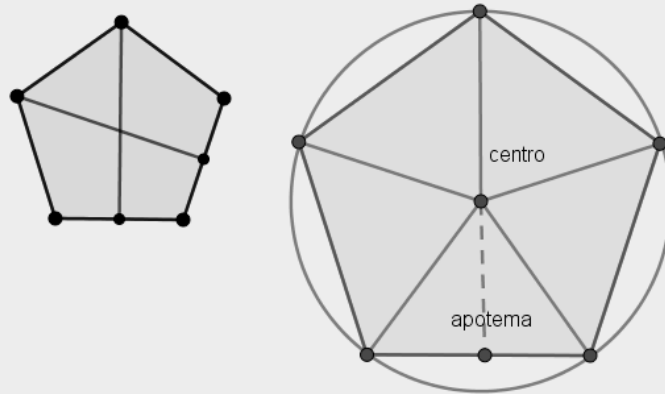


Figura 4.49. Área del pentágono. Búsqueda del centro.

También se obtiene el mismo resultado sumando las áreas de los triángulos que forman el pentágono, como en la figura 4.50. En este caso, el resultado final es un trapecio de base menor $2l$ y de base mayor $3l$ y calculando su área: La suma de las bases sería el perímetro, que multiplicado por la mitad de la apotema da la fórmula del área del pentágono igual que antes.

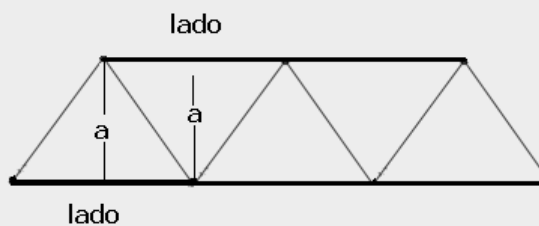


Figura 4.50. Cálculo del área del pentágono a partir de la fórmula del trapecio.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

1. *Aplica la misma metodología para calcular el área del exágono. ¿Qué figura se obtiene si se juntan las áreas de los triángulos como en el caso anterior?*
2. *Estudiar qué ocurre, en general, en cualquier polígono regular al juntar los triángulos para obtener el área. ¿De qué depende que se forme una figura u otra? Da un resultado genérico.*

Luego para todo polígono regular, el área es la conocida fórmula “perímetro por apotema partido por dos”.

$$\text{Área polígono regular} = \text{la mitad de } P \times a$$

La última actividad sería:

Actividad para los alumnos.

- *Realizar un informe que resuma todas las áreas obtenidas y la manera de obtenerlas.*

4.7. ACTIVIDADES DE REFUERZO

Vamos a proponer algunas actividades de refuerzo en las que se calculan áreas de figuras con los lados curvos mediante las áreas conocidas de los polígonos y una adecuada transformación. En estas actividades, además de conocer las áreas, el alumno tiene que desarrollar la visualización y la percepción de los objetos.

En el primer caso se trata de:

A. DESCOMPOSICIÓN DE LA FIGURA Y ACOPLAMIENTO.

Primeramente, proponemos ejercicios de cálculos de áreas en los que primero hay que descomponer la figura en las partes convenientes y acoplarlas de forma que el cálculo de la nueva superficie equivalente sea conocido.

Actividades para los alumnos.

1. ¿Cómo calcularías el área de la primera figura 4.51?

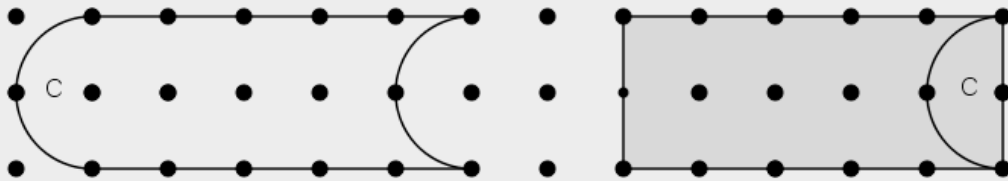


Figura 4.51. Cálculo por descomposición y acoplamiento.

La solución pasaría por recortar el medio círculo y formar el rectángulo de la segunda figura 5.36. Dicho rectángulo es ya fácilmente calculable con lo que sabe el alumno.

Aquí tenemos otros ejemplos más en las que se usa la misma estrategia.

2. Transforma el rombo de la figura 4.52 en un rectángulo que tenga igual área. Calcula el área rombo.
3. Transforma la figura 4.52 sombreada, mediante descomposición de partes y acoplamiento, en una figura que sea suma de cuadrados o rectángulos en la que sea más sencillo calcular su área.
4. Idem la figura de la bailarina y del jarrón.

Si observamos bien estas dos figuras últimas, descomponiendo las figuras en los trozos adecuados y luego volviéndolas a componer pueden evitarse tanto las zonas angulosas (bailarín) como las zonas curvas (jarrón) convirtiendo las figuras en otras de áreas ya conocidas por los alumnos, que es de lo que se trata.

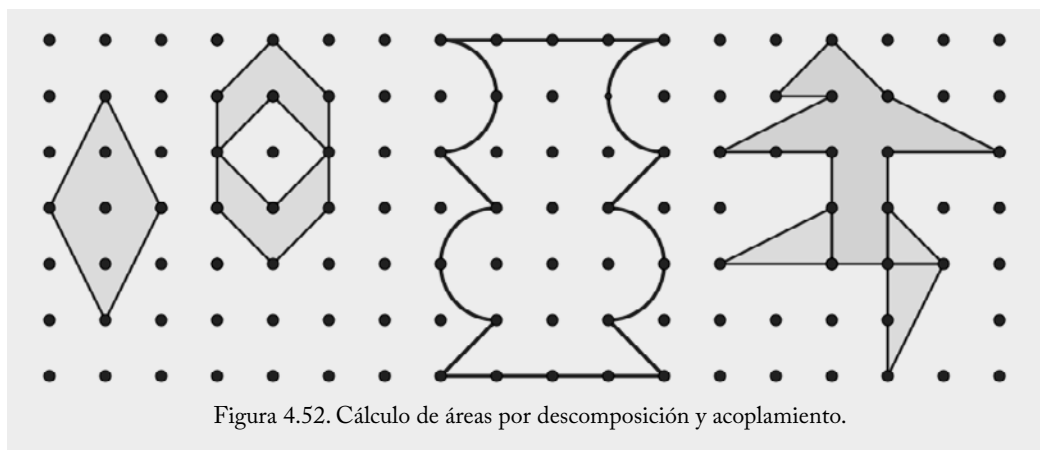


Figura 4.52. Cálculo de áreas por descomposición y acoplamiento.

B. RELACIÓN PERÍMETRO Y ÁREA.

Como refuerzo, también, podemos plantear algunos problemas en los que el alumno tiene que manipular, buscar soluciones.

Actividades para los alumnos.

Figura 4.53. Exágono presionado. ¿Cambia el área y el perímetro?

- *Basándonos en una experiencia que E. Castelnuovo, maestra matemática de vocación, realizaba con un cordel, el alumno construye un rectángulo con una cuerda cerrada y no estirable (dicho rectángulo tendrá un área). Ahora modificamos el rectángulo con la misma cuerda de forma que la base y la altura sean distintas. El perímetro, evidentemente, es el mismo porque es la longitud de la cuerda, que no varía, ¿pero qué pasa con el área?*

El geoplano es un buen recurso para que los alumnos resuelvan este problema manipulando la cuerda y midiendo el perímetro y las áreas obtenidas para llegar a conclusiones.

Por ejemplo, plantear la siguiente actividad:

Construimos un exágono en el geoplano o en papel punteado. El segundo exágono se ha obtenido presionando sobre un vértice ¿Tienen el mismo área? ¿y el perímetro? (figura 4.53).

Los estudiantes para maestro pueden también resolver el problema y extraer conclusiones sobre éste y la forma de abordarlo con los alumnos.

C. OTRAS ACTIVIDADES.

Actividades para estudiantes para profesores.

Los estudiantes para profesores también pueden resolver y reflexionar sobre los siguientes problemas para los alumnos. Estos problemas se pueden resolver con algún programa informático como Geogebra o similar. Las actividades también se pueden realizar sobre trama cuadrada (cm^2) o triangular, según decida el profesor.

1. *Dibuja un triángulo sobre tu cuaderno y calcula su área. Dibuja otros triángulos que tengan la misma área ¿Cuántos has encontrado? ¿En este caso qué ocurre con el perímetro?*
2. *Flory es jardinera, y tiene que diseñar jardines a escala que miden 10 cm^2 sobre el plano. Ayúdala y diseña jardines rectangulares con dichas dimensiones.*
3. *Dibuja un rectángulo A de 15 por 25 cm, de largo y ancho respectivamente. Busca las dimensiones de rectángulos iguales que puedan cubrir dicha superficie rectangular y el número total de ellos. Por ejemplo, con 9 cuadrados de $5 \times 5 \text{ cm}$ ¿podemos cubrir la superficie?*
4. *Calcula el área del cuadrado central del cuadrado de la figura 4.54 de lado 10 cm. Dicho cuadrado central se construye uniendo los puntos medios de los lados con los vértices, según se muestra en la figura. Utiliza al menos dos procedimientos distintos.*

Este problema puede ser resuelto de manera sencilla cortando papel, en el geoplano o con papel punteado, y también puede ser resuelto mediante Geogebra o programa similar.

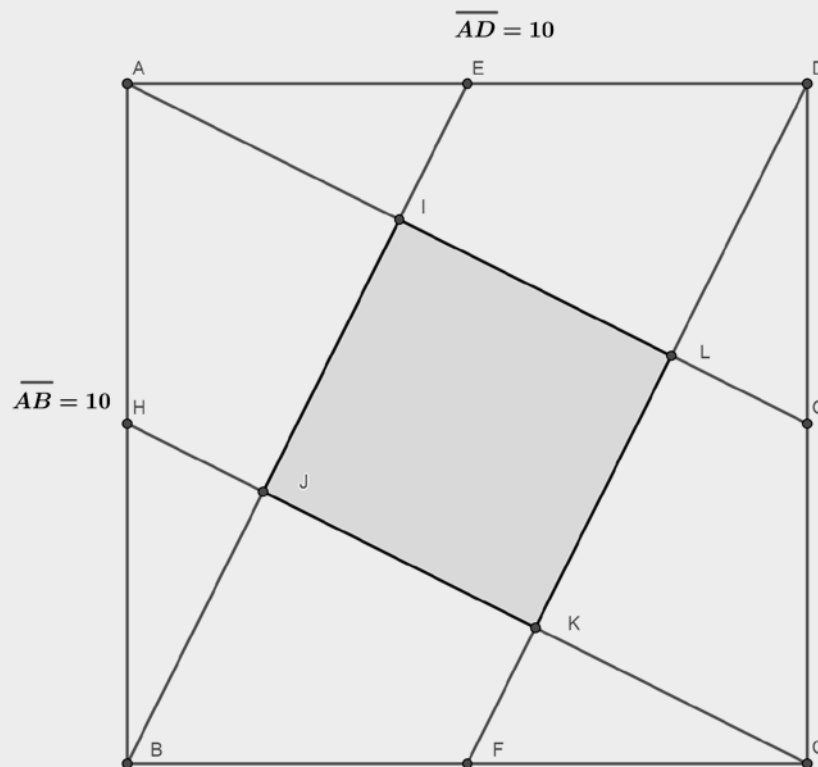


Figura 4.54. Cálculo del área del cuadrado central.

Con Geogebra también es fácil obtener la solución de una manera visual del siguiente problema:

5. Si un triángulo tiene la base fija y movemos el tercer vértice sobre una misma recta ¿qué tienen en común todos los triángulos? ¿son equivalentes? ¿tienen el mismo perímetro? ¿Cuál es el de menor perímetro?

Ilustramos este problema con la figura 4.55. Geogebra nos permite mover el tercer vértice sobre la recta e ir comprobando la variación o no del área y el perímetro.

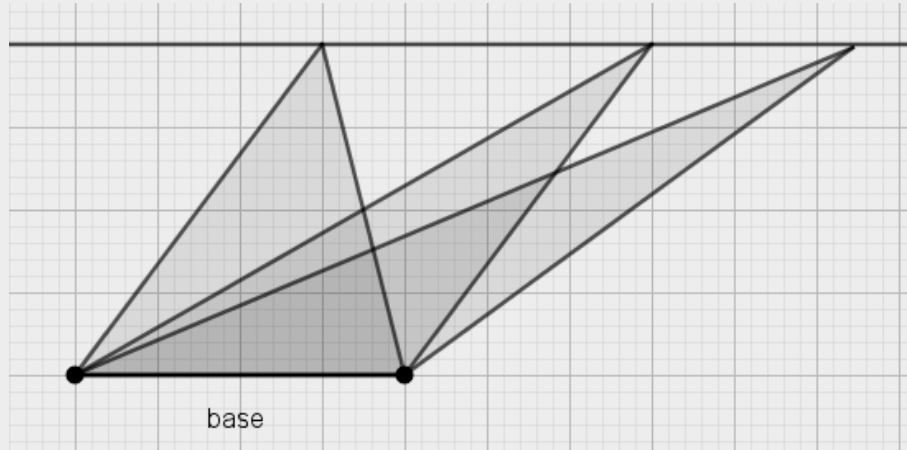


Figura 4.55. Cálculo del área con base fija.

TEMA 5

INTRODUCCIÓN A LA ENSEÑANZA DE LAS MEDIDAS DE VOLUMEN

5.1. ASPECTOS PREVIOS DE LA MEDIDA DE VOLUMEN

El espacio en el que nos movemos es un mundo de tres dimensiones. Los objetos de nuestra vida cotidiana todos tienen su volumen. Muchas de las actividades diarias están relacionadas con el volumen de nuestro cuerpo; por ejemplo, sabemos si cabemos en el hueco que queda dentro del ascensor lleno de gente, si un traje nos va a entrar o no antes de ponérselo. Igualmente, la vida nos enseña a estimar los volúmenes que nos rodean: si una habitación es mayor que otra, si caben los libros en el baúl, si un mueble cabe en un espacio determinado. El volumen es una magnitud de nuestra vida, pues el mundo y los seres vivos son tridimensionales.

Como hemos comentado anteriormente, la magnitud volumen esta ligada a los conceptos geométricos y a las estructuras operacionales. Es decir, para calcular un volumen necesitamos las características geométricas del cuerpo y las estructuras aditivas para saber las veces que la unidad correspondiente está contenida en ese volumen. Pero el volumen también se puede calcular considerando sus tres dimensiones, y utilizando las estructuras multiplicativas para llevar la unidad longitud en cada dimensión y multiplicando el producto de esas cantidades, para obtener el volumen total. Así pues, la medida de volumen de un cuerpo también admite distintas formas de medición a tener en cuenta.

De tal manera, una forma de medida unidimensional, como ya sabemos, consiste en contar las veces que la unidad medida cabe en el volumen. También podemos calcular el volumen como productos de medidas de dimensiones lineales, por ejemplo: para calcular la medida de un ortoedro multiplicamos la altura, por la anchura por el largo. Esa forma de medir se conoce como producto de medidas dimensionales. En este caso, tridimensionales. Como ocurría con las áreas, está comprobado que los alumnos tienen bastante dificultades para calcular volúmenes en estas edades mediante las medidas tridimensionales. Para los volúmenes, vamos a utilizar siempre la medida unidimensional porque es más asequible a estos niveles de la Educación Primaria, para que comprendan el concepto medida del volumen, dejando la medida tridimensional para la Secundaria.

Las primeras referencias sobre la medición de volúmenes se refieren a actividades con granos, líquidos y a la fabricación de recipientes. Las distintas civilizaciones que se asientan en Babilonia, Egipto y China se plantean problemas prácticos sobre el volumen de paredes o presas que presentan formas geométricas como pirámides, prismas, etc. Es en Grecia donde se presentan problemas clásicos como la duplicación del cubo y se presentan avances importantes como las fórmulas del volumen del cono, de las pirámides y el área de la esfera. El volumen siempre ha sido asociada a las medidas de longitud y de áreas a partir de las

cuales se obtienen sus fórmulas. Como veremos posteriormente, la concepción de volumen se asocia a tres situaciones: espacio ocupado por un cuerpo, hueco delimitado en un cuerpo, o el espacio barrido por una superficie móvil.

5.2. ENSEÑANZA DE LA MAGNITUD VOLUMEN Y SUS MEDIDAS

La magnitud volumen es un tema de todos los currículos oficiales de Enseñanza Primaria y Secundaria. El volumen en la Educación Infantil se menciona como uno de los temas a tratar en clase, mediante actividades sencillas que sirvan, como siembra, para la posterior comprensión total del concepto. En Educación Primaria, se hace un importante trabajo con el concepto capacidad, y se introduce el volumen a partir de quinto curso, mediante algunos contenidos como son la utilización de las unidades de volumen más usadas en la vida ordinaria. Se practican actividades para que el alumno comprenda y utilice la equivalencia entre el kilo, el litro y el decímetro cúbico (agua destilada) o la construcción de otras equivalencias entre las unidades de capacidad, masa y volumen.

Desde la Educación Infantil y Primaria, el alumno debe ir observando que el mundo en que se mueve tiene tres dimensiones, así como todos los objetos que se encuentran en él. El alumno empieza a observar su propio volumen experimentando si cabe en un baúl, si una camiseta le puede estar bien o no, ... A lo largo de sus años de Primaria, va percibiendo y manejando los diferentes volúmenes, el de su propio cuerpo y el de los objetos que utiliza en su vida cotidiana, y, en algunos casos, hasta estimando su medida.

Sin embargo, el volumen se debe tratar en Primaria como un concepto introducción que se debe estudiar más detenidamente en Secundaria. Esto se puede hacer de forma similar a como hicimos en el área; podemos tratar el volumen como una medida unidimensional y una preparación o siembra de su tratamiento como medida producto de tres medidas que son alto, largo y ancho, llamada medida tridimensional o medida dimensional de superficie y altura.

Como ya hemos dicho, los alumnos tienen problemas cuando pasan de los procedimientos unidimensionales de medida a los procedimientos tridimensionales o bidimensionales. Los alumnos de Primaria no entienden la fórmula para obtener el volumen de un poliedro sencillo pues, para ellos, no es obvio medir un objeto midiendo sus tres dimensiones lineales o las dimensiones superficie y altura para obtener el volumen. Para realizar este tipo de medida el alumno debe conocer bien la longitud y la superficie para poder comprender el volumen. Los estudios consultados dicen que algunos alumnos pueden conservar el área completamente pero no conservar la longitud, y viceversa. También, algunos alumnos que conservan el volumen no conservan la longitud ni el área. De esta variedad, podemos deducir la complejidad del cálculo de los volúmenes para los alumnos y la razón por la que se recomiende utilizar esta medida en Secundaria y no en Primaria.

5.3. ACTIVIDADES PARA LA COMPRESIÓN DEL CONCEPTO VOLUMEN

Como en las anteriores medidas, para empezar el estudio del volumen, el profesor debe cerciorarse de que el alumno ha adquirido la noción de conservación del volumen.

Las experiencias de conservación del volumen según Piaget, famoso psicólogo por sus estudios sobre el desarrollo cognitivo en los niños, se desarrollan de la siguiente forma:

1. Se da al alumno un trozo de barro que modela libremente en diferentes formas. Cada vez que construye una forma se introduce el trozo de barro en un líquido. Decimos que el alumno *conserva el volumen* cuando acepta que el barro ocupa el mismo volumen dentro del líquido sin depender de la forma que tenga.

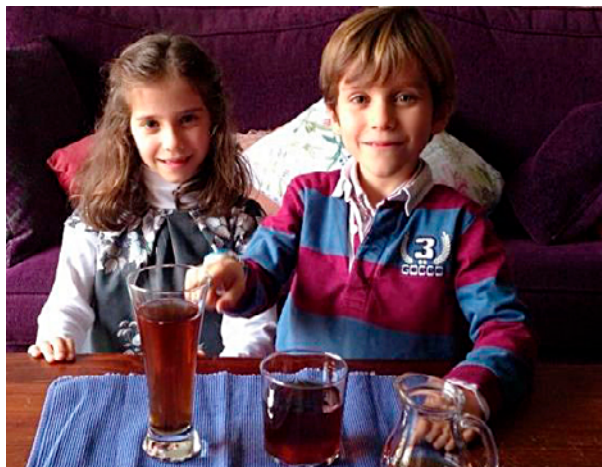


Figura 5.1. Conservación del volumen.

2. También se puede probar de la siguiente forma: el alumno llena dos vasos iguales de un líquido; una vez que comprueba que los dos tienen el mismo volumen, se vierte el líquido de uno de los vasos sobre otro vaso más alto y estrecho (figura 5.1). Ahora, el profesor pregunta al alumno, si los dos vasos que contienen líquido tienen el mismo volumen. Cuando el alumno conserva el volumen la respuesta es afirmativa.
3. Otra actividad consiste en mostrar al niño una construcción formada por 36 cubos con una base de 3 x 3 cubos y cuatro alturas. El alumno debe poder construir otra sobre una base de 2 x 2 cubos que ocupe el mismo espacio.
4. Se muestra al alumno dos recipientes idénticos llenos de agua hasta la misma altura. Él mismo introduce una de las construcciones anteriores en uno de ellos y preguntamos: ¿qué va a ocurrir al introducir la construcción en el vaso de agua? Y después de contestar correctamente volvemos a preguntar: ¿si sumergimos la otra construcción en el otro vaso subirá más, menos o igual la altura del agua en el recipiente?
5. Mostramos al alumno dos bloques de plastilina iguales. Se coloca en una caja uno de los bloques de plastilina bien pegado. En otra caja igual se parte la plastilina en tres trozos iguales que se adhieren a la caja. Se pregunta al alumno: ¿El espacio que queda en la segunda caja es igual, más o menos que en la primera caja? Compruébalo llenando con arena y luego vaciándola.

Para Piaget, el volumen tiene distintos significados que hay que tener en cuenta en la enseñanza y aprendizaje de este concepto como veremos posteriormente. *Volumen interno* referido a la cantidad de unidades de material que conforman un cuerpo; *volumen ocupado* como la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos del entorno, y *volumen desplazado* como el volumen de agua desplazado por un cuerpo que se sumerge en este líquido.

Atendiendo a estos significados del volumen hemos diseñado diferentes actividades que ayuden al alumno en la comprensión y aprendizaje de este concepto y al profesor en su enseñanza y aprendizaje.

En Primaria, consideramos que es necesario en lugar de trabajar muchas fórmulas y actividades con ellas, que el alumno no comprende, que el profesor se ocupe de que sus alumnos adquieran una buena imagen mental del concepto de volumen.

1. CONSTRUCCIONES CON CUBOS. El objetivo es sembrar en los alumnos el volumen como *volumen interno* referido a la cantidad de unidades de material que conforman un cuerpo, según explicamos anteriormente.

Actividades para los alumnos.

Estas actividades es recomendable trabajarlas en el laboratorio con cubos encajables o centicubos para poder formar las pilas. También se pueden utilizar los bloques multi-bases que son de madera. En la figura 5.2. podemos ver estos tres materiales.



Figura 5.2. Materiales para sembrar el concepto de volumen.

1. *¿Cuántos cubos hay en la primera pila (figura 5.3.)? Estima los cubos que hay en la segunda pila ¿cómo has hecho la estimación?*

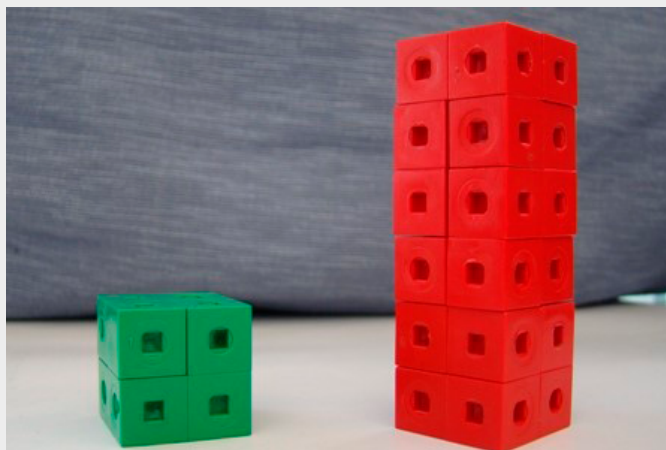


Figura 5.3. Estimaciones de cubos

Con estas actividades podemos hacer observar a los alumnos la aditividad del volumen, en el sentido de que la suma de los volúmenes de partes disjuntas de un todo es igual al volumen de este todo. Por ejemplo:

2. *¿Cuántos cubos hay en cada capa de la primera figura 5.4? ¿cuántas capas hay? ¿Qué nos sale si multiplicamos el número de cubos de cada capa por el número de éstas?*

- *Haz lo mismo con la segunda pila de la figura 5.4. Construye otra pila que tenga el mismo volumen.*

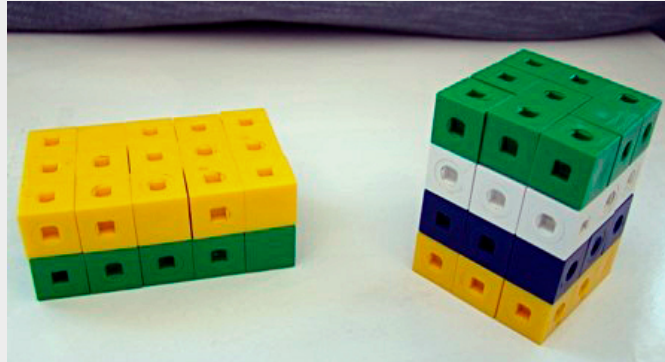


Figura 5.4. Introducción al volumen con centicubos.

- *En la primera pila de cubos de la figura 5.5. ¿Cuántas caras de los cubos podemos ver en cada cara lateral y en la cara de arriba? ¿Sin verla, sabrías calcular cuántas caras tiene la base?*

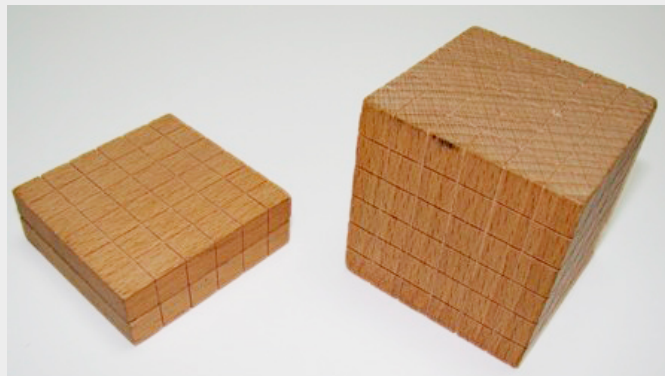


Figura 5.5. Introducción al volumen con bloques multibases

Con estas actividades queremos diferenciar entre el área lateral y el volumen.

Podemos también construir pilas cuyas capas no sean iguales y hacer las mismas actividades. En este caso, el alumno debe aplicar la misma técnica anterior pero por partes, de forma que vuelve a experimentar la aditividad del volumen.

3. *Calcula el volumen de las pilas de cubos de la figura 5.6.*

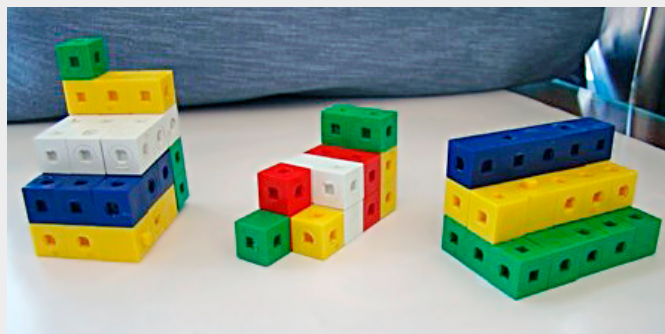


Figura 5.6. Cálculo del volumen.

Ahora vamos a realizar actividades como siembra de la fórmula que aprenderá en Secundaria sobre el cálculo del volumen a partir del área de la base por la altura. Estas actividades deben ser del tipo:

4. Sabiendo cuantas capas necesitas para llenar las cajas, calcula cuántos cubos caben en cada una de éstas (figura 5.7).

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

- Busca en los libros de Primaria actividades acordes con las tareas de volumen que te hemos presentado.
- Inventa o busca en internet actividades de estos tipos que estén relacionadas con la vida ordinaria.

Para reforzar los conceptos de **volumen y áreas laterales** se pueden hacer actividades como las que mostramos a continuación.

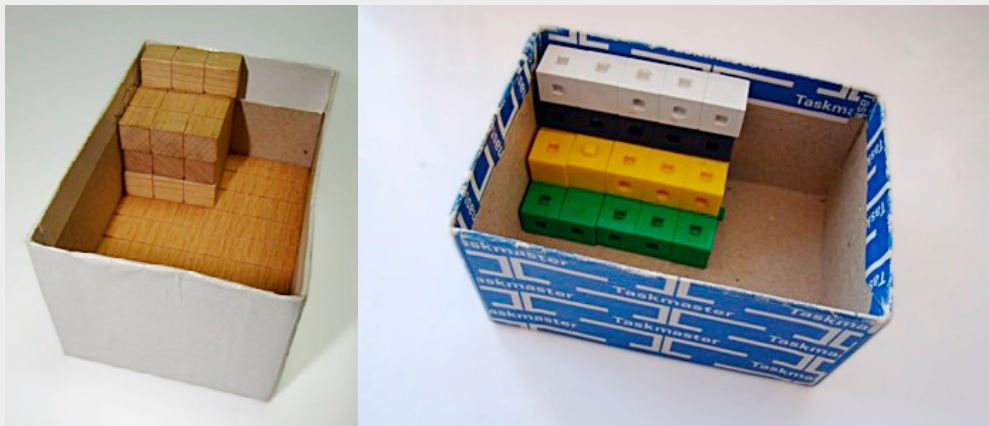


Figura 5.7. Introducción a la fórmula del cálculo del volumen.

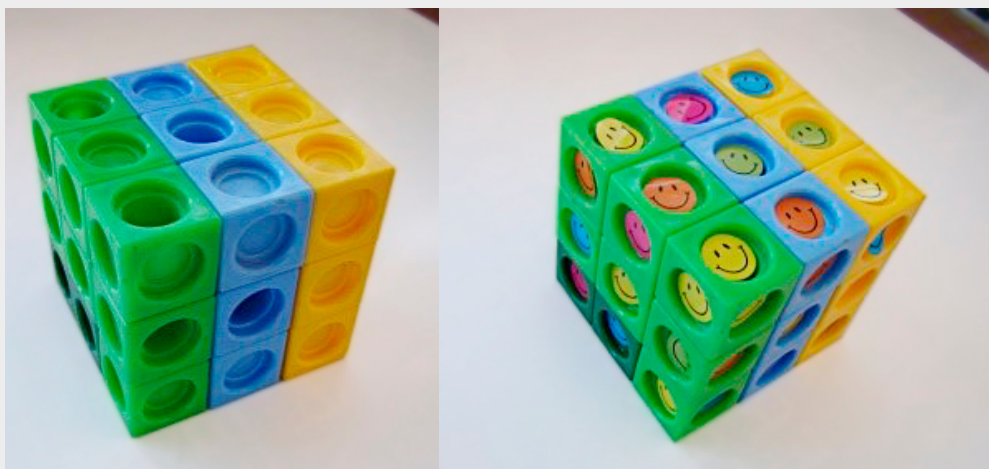


Figura 5.8. Introducción al área lateral.



Figura 5.9. Introducción al área lateral.

Actividades para alumnos.

5. El profesor da al alumno un cubo como el de la figura 5.8 que tiene pegados círculos en las caras laterales Y pregunta a los alumnos: Si quitamos sucesivos cubitos del cubo grande ¿qué caras tienen pegatinas? Por ejemplo, quitamos un cubito del centro de la primera fila, vemos las caras que tienen pegatinas. El cubo grande se construye de forma que solo tienen pegatinas las caras laterales.

Estas actividades es importante hacerlas, en principio, vivenciadas en el laboratorio.

6. En las siguientes pilas de cubos (figura 5.9), pega las pegatinas correspondientes en las caras del cubo o los cubos quitados, como lo hemos hecho en la primera figura. Esta actividad, como la anterior, será más fácil al alumno si puede manipular cubos, y su objetivo es la percepción espacial del espacio, trabajando lo que es el área lateral y el volumen. De esta forma, podemos mostrarle los dos conceptos, área lateral como las caras que tienen pegatinas, y volumen como el conjunto formado por todos los cubos (volumen interno).

2. ACTIVIDADES DE TRASPASOS. Son actividades del volumen entendido como *volumen ocupado*, es decir, como la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos del entorno.



Figura 5.10. Actividades de trasposos.

Actividades para los alumnos.

1. *El profesor dice a los alumnos: Selecciona un ortoedro y una pirámide entre los sólidos transparentes que tengan la misma base y la misma altura. Haz una estimación de cuántas veces tendremos que llenar la pirámide de agua para mediante trasvase, llenar el ortoedro.*
2. *Comprueba tu estimación. Haz lo mismo con otros ortoedros y pirámides en las mismas condiciones.*
3. *¿Qué podemos deducir de la capacidad y del volumen de éstos dos cuerpos?*

El profesor debe hacer que el alumno diferencie entre capacidad y volumen, en el sentido de que en las actividades anteriores hablábamos de volumen como la cantidad del espacio ocupado por un cuerpo (volumen interno):

4. *¿En qué cuerpos podemos medir su volumen: un cubo, un dado, una hoja de papel? - ¿Incluso la hoja de papel?*

El alumno observa que puede medir el volumen de cualquier objeto de nuestro mundo tridimensional, mientras la capacidad se asocia con el espacio vacío del recipiente que podemos ocupar o volumen que cabe en un espacio (volumen ocupado).

El profesor hace ver a los alumnos que:

Los objetos de los que podemos medir su capacidad son aquellos que pueden ser llenados, es decir, los que tienen un espacio vacío, como son los recipientes. El alumno debe distinguir claramente entre la medida del volumen que se puede hacer en todos los objetos tridimensionales y los objetos en los que podemos medir la capacidad, que son los recipientes.

El profesor, de igual forma debe hacer observar a los alumnos que estas actividades nos muestran que los líquidos también tienen un volumen.

Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.

- Describe la actividad anterior tomando en este caso un cilindro y un cono de la misma base y altura.
- Busca en los libros de Primaria o en internet otras actividades relacionadas con los volúmenes ocupados.

3. ACTIVIDADES DE INMERSIÓN que son actividades de volumen, como el *volumen de líquido desplazado por un cuerpo* que se sumerge en dicho líquido.

Actividades para los alumnos.

1. El profesor dice a los alumnos: “Vamos a medir el volumen de una bola de plastilina mediante inmersión en una probeta graduada. Si introducimos la bola en la probeta que contiene agua hasta un cierto nivel, ¿qué pasa con el agua? ¿qué cantidad de agua ha subido? ¿cuál será el volumen de la bola de plastilina?”
2. Ahora introducimos una bola de plastilina en una probeta con agua y medimos el volumen mediante inmersión de la bola. A continuación, sacamos la bola y la moldeamos en otra forma, por ejemplo, de churro. La volvemos a introducir en la probeta. ¿qué pasa con el volumen? ¿varía?
3. Tomamos dos probetas con la misma cantidad de agua. En una de ellas introducimos un cuerpo cualquiera, y en la otra, se introducen canicas o bolas pequeñas hasta que el agua alcance el mismo nivel que en la primera.

El alumno debe llegar a la conclusión de que el volumen del cuerpo y el de las canicas o bolas es el mismo, es decir, equivalente.

Debe calcular la relación entre el volumen del cuerpo y el número de canicas.

$$\text{Volumen de cuerpo} = X \text{ canicas}$$

Si repetimos la actividad con cubitos de madera impermeables iremos sembrando la idea de unidad de volumen. Mediante actividades de este tipo, el alumno también puede comprobar que la forma no influye en el volumen.

Por otra parte, las ideas erróneas sobre el peso y el volumen surgen cuando introducimos objetos en líquidos y se presenta un cambio de nivel. Algunos alumnos asocian ese cambio con el peso y no con el volumen. También entre los estudiantes para profesores hay ideas erróneas que hacen que no establezcan relación alguna entre el peso y el volumen, ni siquiera con cuerpos del mismo material. El profesor debe realizar actividades para erradicar todos estos errores.

3. Por ejemplo, el alumno toma dos cubos iguales, uno de papel y otro de madera. Como tienen diferentes características físicas, el maestro puede preguntar: ¿Cuál tiene mayor volumen?

Los alumnos que confundan capacidad y volumen pueden concluir que el cubo de papel al ser hueco tiene mayor volumen porque en el otro no cabe nada. Cuando el

alumno confunde volumen con la materia o con el peso dirán que tiene mayor volumen el de madera. Solamente aquellos alumnos que asocien volumen con espacio ocupado dirán que ambos cubos tienen el mismo volumen.

4. *El profesor dice: Tomamos dos cajitas, una con arena, y otra con monedas. Al cogerlas, comprobamos que el peso no es el mismo, pero ahora tenemos que comprobar su volumen. Las introducimos en dos probetas con la misma cantidad de agua y ¿qué ha pasado?*

Mediante actividades de este tipo, el alumno puede observar que el *peso no influye en el volumen*.



Figura. 5.11. Matraz con globo y embudo.

5. *¿El aire pesa? Tomamos una percha y atamos dos globos desinflados en los extremos de forma que la percha quede equilibrada. Luego, inflamamos uno de ellos, ¿qué ocurre?*
6. *Vamos a tomar ahora un matraz (figura 5.11) que es un recipiente de vidrio de cuello alto usado en los laboratorios, con un globo al final del tubo y un embudo que cierra herméticamente la boca, ¿qué pasará si llenamos el matraz de agua? ¿Se inflará el globo? ¿el aire del recipiente ocupa un volumen?*

Con actividades de este tipo, el alumno observa que los gases tienen volumen y en el ejercicio 6º, el aire que hay dentro tiene que salir para dejar espacio al agua.

5.4. PROYECTOS DE ACTIVIDADES DE MEDIDAS CONJUNTAS

Una vez que los alumnos van conociendo las unidades de las diferentes magnitudes, el profesor debe ir introduciendo actividades en las que los alumnos manejen dos o más magnitudes, como refuerzo, y para que observen que todas son necesarias en la vida ordinaria. En todos estos proyectos que planteamos, debe haber, en primer lugar, una puesta en común para organizar bien: ¿qué vamos a hacer?, formar los grupos de alumnos, organizar la recogida, presentación y representación de datos, etc. Al final, también debe haber una puesta en común para que cada grupo de alumnos presente los logros obtenidos y, entre todos, se saquen unas conclusiones finales que destaquen las homogeneidades o diferencias de los datos del curso.

Actividades para los alumnos.

1. *Medidas del cuerpo. El alumno debe realizar el estudio de las medidas de su cuerpo y de su familia directa, padres y hermanos. En la reunión de gran grupo, decidimos: ¿qué medidas podemos hacer del cuerpo humano? ¿a qué personas vamos a medir?, construcción de tablas estadísticas, representaciones de los datos, etc. Para la realización del proyecto, los propios alumnos miden y comparan las alturas, largo de brazos, contorno de cintura, peso del cuerpo, etc. Con esta actividad, trabajamos las magnitudes: longitud, peso, tiempo, ... y en la organización de datos, estamos trabajando el tratamiento de la información.*
2. *Oficios y profesiones. Los alumnos, convenientemente agrupados, eligen una profesión e investigan, en la vida ordinaria o en internet, qué medidas son las que utilizan los trabajadores de dicha profesión. El grupo de alumnos hace una relación justificada de dichas medidas. Por ejemplo, el tendero utiliza el peso para las frutas, capacidad de la leche, tiempo de apertura y cierre, etc. Se pueden trabajar muchas otras profesiones como modista, el arquitecto, topógrafo, carpintero o las propias de los padres de los alumnos.*
3. *Estimación y medida del aula y los objetos que contiene. Se puede hacer un buen repaso de todas las unidades conjuntamente midiendo el aula y su mobiliario. Por ejemplo, medida de una silla: altura, anchura y largo de la silla, altura de las patas y el respaldo, medida de la superficie del asiento, peso, etc. se puede hacer un croquis, en el que el alumno va apuntando las medidas. Igualmente medir los pupitres, mapas, pizarra, armarios, ventanas, etc. Por último, medir la superficie de las paredes y el suelo.*
4. *Diseño de nueva colocación de la clase. El alumno, en grupos, hace un nuevo diseño del aula, que debe plasmar en un plano a una escala determinada indicando las medidas de los objetos. Si los alumnos no han estudiado la escala, pueden dibujar los objetos y ponerle las medidas correspondientes sin considerar escala. El alumno debe llegar a hacerse preguntas del tipo: ¿cabe la pizarra entre el armario y la columna? ¿podemos colocar una mesa entre las dos ventanas? Estas preguntas y su resolución siembran en el alumno el interés y la utilidad de la medida. Igualmente se puede hacer el nuevo diseño de una plaza de su barrio o de su ciudad.*
5. *Visita al supermercado. Programamos una visita matemática a un supermercado o un mercado central en el que hay varios puestos de ventas. Los alumnos podrán observar que hay distintos sectores: carnicería, verdulería, frutería, pescadería, etc. Anotarán las medidas más comunes para cada magnitud ¿qué medidas se utilizan en cada uno de los puestos de venta? ¿cuál es la unidad más común? Observación de envases de productos: lectura e interpretación de escrituras como 1 kilo, 200 gramos, etc. Observación de las distintas balanzas que se utilizan: digitales, de dos platillos, de un solo platillo, romanas, etc. y cómo funciona cada una, dónde aparece el peso, el precio, etc.*
6. *Visita a consultorio médico pediátrico: En este caso, los alumnos deben observar las unidades de medida que se utilizan en los diferentes aparatos de medida. Observar los pesos para los niños y balanzas para bebés y observar las graduaciones. También se puede simular en la clase un consultorio de este tipo haciendo actividades con los diferentes materiales que podamos trasladar al aula. Se realizarán actividades como pesar un muñeco con una balanza típica de bebés, tomar medidas en el muñeco, tales como altura, contorno de la cabeza, medida de brazos, manos, etc. Se puede traer un peso y realizar pesadas siendo más precisos cuanto mayor es la edad del alumno.*

7. *Visita de un gimnasio. Los alumnos pueden observar las unidades de medida que existen en estos locales. Podemos encontrar metros verticales para medir la altura, balanza de pesos, distintas mancuernas de pesos variados. Si hay piscina climatizada, distintos termómetros para calcular temperaturas de sauna, aguas, etc. También suele haber bicicletas estáticas con contadores que nos dan velocidad, tiempo, calorías, etc. Todos estos aparatos dan muchas posibilidades para que el profesor realice un número importante de actividades para que el alumno comprenda las medidas y su utilidad en la vida ordinaria.*

En conclusión, el alumno debe tener suficientes experiencias sobre el tema de la medida para que en su vida laboral posterior u ordinaria sea capaz de estimar y medir adecuadamente: longitudes, superficies... y el tema de la medida sea para él bastante útil y de contenidos aplicables a su entorno.

BIBLIOGRAFÍA

- Aballe, M.A. Aproximación al nivel de conocimiento matemático básico de futuros maestros de Primaria. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2000, 25, 89-107.
- Adame A., Casas L., Jiménez, M., Luengo, R., Mendoza, M. y Sánchez, C. *Instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura*. Zaragoza: Cajalón - Universidad de Zaragoza, 2001.
- Alsina, A. *Desarrollo de Competencias Matemáticas con recursos lúdicos-manipulativos*. Ed. Narcea. 2004.
- Barrantes, M. y Revilla, D. Geometría para profesores de E.G.B. *Campo Abierto*, 1988, 5, 209- 227.
- Barrantes, M. Matemáticas: Ciencias y Letras. *Puertas a la lectura*, 1997, 2, 10-12.
- Barrantes, M. (ed.). *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 1988.
- Barrantes, M.; Masot, M.; Redondo; C. y Rodríguez, I. Interdisciplinariedad en Primaria a través de una ruta geométrica. *Campo Abierto*, 1998, 15, 311-329.
- Barrantes, M. Caracterización de la enseñanza aprendizaje de la geometría en Primaria y Secundaria. *Campo abierto*, 2003, 24, 15-36.
- Barrantes, M y Blanco, L. J. A study of prospective Primary teacher`s conceptions of teaching and learning geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2006, 9(5), 411-436.
- Barrantes, M. y Balletbo, I. *La enseñanza-aprendizaje de la geometría en revistas científicas españolas de mayor impacto de la última década*. Gobernación de Misiones. Universidad Nacional de Pilar. Asunción, Paraguay: Litocolor S.R.L. 2011.
- Barrantes, M. y Barrantes, M.C. *Geometría en la Educación Primaria*. Badajoz: Ed. Indugrafic digital. Badajoz. 2017.
- Barrantes, M.; Zapata, M. y Barrantes, M.C. *Didáctica de los números y operaciones en la Educación Primaria*. Piura (Perú): Universidad de Piura, 2020.
- Berenguer, M.I. y Pérez, R. Sobre la magnitud tiempo. *Uno: revista de dca. de las matemáticas*, 1996, 10, 79-87.
- Carrillo, J. La formación del profesorado para el aprendizaje de las Matemáticas. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2000, 24, 79-91.
- Casas L., Luengo R. y Sánchez C. Cultura, Historia y matemáticas: el tema de la Medida. *Revista Cátedra Nova*. 2000, 11, 277-304.
- Casas L. y Luengo R. Pedagogy, History and Mathematics: Measure as a Theme. En Katz, V. y Tzanakis, C.: *Recent Developments on introducing a historical dimensión in mathematics Education*, 113 - 122. Estados Unidos: Mathematical Association of America, 2011.
- Castro, E. (ed.) *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis, 2001.
- Chamorro, C. Y Belmonte, J.M. *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis, 1988.
- Chamorro, C. El currículum de medida en Educación Primaria y ESO y las capacidades de los escolares. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1996, 10, 43-62.
- Chamorro, C. Fenómenos de enseñanza de la medida en la escuela elemental. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1998, 18, 95-112.
- Chamorro, C. Ingeniería Didáctica para el aprendizaje de la longitud y la superficie. Esquemas invariantes operativos. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1999, 19, 89-103.
- Chamorro, M.C. (coord.) *Didáctica de las Matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson. 2003

- Corberán, R. *El área: Recursos didácticos para su enseñanza en Primaria*. Recuperado el 27 de marzo de 2014 en: <http://www.kekiero.es/area/ElArea.pdf>
- Contreras, P. y Albarracín, R. *Estimación de medida: El conocimiento didáctico del contenido de los maestros de Primaria*. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona, 2015
- Del Olmo, M. A.; Moreno, M. F. y Gil, F. *Superficie y volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Ed. Síntesis, 1989.
- Giménez, J. Estimación de medidas de capacidad. Estudio exploratorio a partir de objetos reales. *Epsilon*, 1993, 27, 11-22.
- Godino, J, Batanero, C y Roa, R. *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. Granada: Proyecto Edumat Maestros, 2002.
- Godino J. *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Granada: Proyecto Edumat –Maestros, 2004.
- Hart, K. Which comes first—Length, area, or volume? *Arithmetic Teacher*, 1984, 31 (9), 16–27.
- Hiebert, J. y Carpenter, T.P. Piagetian tasks as readiness measures in mathematical instruction. A critical review. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, 13, 329–345.
- Janvier, C. *Le volume. Mais où sont les formules*. Quebec: Modulo Editeur, Mont Royal, 1994
- Kula, W. *Las medidas y los hombres*. México: Siglo XXI Editores, 1980.
- Luengo, R; Casas, L.M.; y Sánchez, C. Recuperación del Patrimonio Histórico Artístico Extremeño y Geometría: Una experiencia curricular basado en el tema de la medida. En Barrantes, M. (ed.). *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Badajoz, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 1998, 93-115.
- Lovell, K. *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. Madrid: Ediciones Morata, 1977.
- Moreno, F., Gil, F. y Frías, A. Área y volumen. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis. 2001, 503-532.
- Pascual, R. La medida del tiempo. *Números*, 2000, 41, 37-44.
- Piaget, J. y Beth, E. W. *Epistemología matemática y Psicología*. Barcelona: Crítica, 1980.
- Piaget, J. y Buber, M. *El desarrollo de la noción de tiempo en el niño*. Madrid: S.L Fondo de cultura Económica de España, 2005.
- Polya, G. *Como plantear y resolver problemas*. Mexico: Trillas, 1965.
- Potari, D. y Spiliotopoulou, V. *Children's approaches to the concept of volume*. Science Education, 1996, 80 (3): 341–360.
- Rizo, C. y Campistrus, L. Una didáctica para el tratamiento de las situaciones de aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la escuela. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2008, 49, 73-85
- Rodríguez, P. Experiencia de aula con alumnos de 11-12 años: Utilización del espejo para crear y aprender Geometría. *Epsilon*, 1996, 36, 417- 432.
- Royo, J. I. Matemáticas y papiroflexia: una relación bidireccional. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2010, 53, 11-24.
- Sanz, I. *Matemáticas y su didáctica II. Geometría y medida*. Bilbao: Universidad del País Vasco, 2001.
- Sáiz, M. Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de Primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 2003, 8(18), 447-478.
- Sánchez, C. y Casas L. Recuperación de instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura como motivación al estudio de un tema curricular: la medida. En: *I Premio Joaquín Sama a la Innovación Educativa*. Badajoz: Junta de Extremadura, 1997, 87-303.
- Sánchez, C., Casas L. y Luengo R. Recuperación de instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura como motivación al estudio de la medida. *Revista Suma*, 1997, 25, 97-111.

- Segovia, I. y Rico, L. La estimación en medida. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1996, 10, 29-42.
- Segovia, I.; Castro, E. y Flores, P. El área del rectángulo. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1996, 10, 63-77.
- Segovia, I. y Rico, L. *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Pirámide, 2011.
- Sierra, M. El papel de la historia de la Matemática en la enseñanza. *Números*, 2000, 43-44, 93-96.
- Socas, M.M. Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio Siglo XXI*, 2011, 29(2), 199-224.
- Turegano, P. Propuesta metodológica para tratar de subsanar las dificultades didácticas y teóricas que se observan en la adquisición del concepto cualitativo de área. *Ensayos*, 1989, 3, 235-256.
- Van de Walle, J. A. *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Longman, 2001
- Velázquez, F. De la instrucción Matemática a la Educación Matemática. *Números*, 2000, 43-44, 129-134.

