UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

TESIS DOCTORAL

“RECURSOS EN EL AULA DE CLASE PARA LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES EN EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA MEDIA DE LAS INSTITUCIONES DE EDUCACIÓN PÚBLICAS DE LA CIUDAD DE LATACUNGA (ECUADOR)”.

Julio Ramiro Salazar Molina

“INVESTIGACIÓN EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES, SOCIALES, MATEMÁTICAS Y LA ACTIVIDAD FÍSICA Y DEPORTIVA”

2021

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

TESIS DOCTORAL

"RECURSOS EN EL AULA DE CLASE PARA LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES EN EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA MEDIA DE LAS INSTITUCIONES DE EDUCACIÓN PÚBLICAS DE LA CIUDAD DE LATACUNGA (ECUADOR)".

Julio Ramiro Salazar Molina

"INVESTIGACIÓN EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES, SOCIALES, MATEMÁTICAS Y LA ACTIVIDAD FÍSICA Y DEPORTIVA"

Conformidad de los Directores:

La conformidad del Director de la Tesis consta en el original en papel de esta Tesis Doctoral

Fdo: Dr. Luis Manuel Casas

2021

DEDICATORIA

A mi esposa, la primera, la única, mi todo: Aida, mi mayor reconocimiento a la amiga, a la mujer, a la profesional de la educación y madre de mis hijos, porque tenerla a mi lado, es lo mejor que ha podido sucederme en la vida.

A mis hijos Yohana, Maxwell y Yamall por su amor que es totalmente correspondido y que constituyen el eje central de mi atención.

Julio

AGRADECIMIENTO

A mi amigo y asesor metodológico: Con admiración y respeto le agradezco infinitamente al Dr. Luis Manuel Casas García por su apoyo, por el tiempo brindado para compartir sus conocimientos, por ser el guía en la investigación, escuchar mis inquietudes y brindarme la confianza necesaria para el desarrollo y culminación de la Tesis de investigación.

No puedo dejar de agradecerles a todas las personas que compartieron este proceso de investigación, a los profesores y estudiantes de las unidades educativas de la ciudad de Latacunga Provincia de Cotopaxi.

Julio

RESUMEN

A través de la presente investigación, se desarrolla uno de los temas del área de las matemáticas específicamente el estudio de las fracciones, en la cual los estudiantes dentro del sistema escolar convencional presentan dificultades de aprendizaje. La manera convencional de enseñar fracciones genera dificultad para los estudiantes debido a las diferentes interpretaciones que los números pueden tener por lo que se genera algún grado de repulsión a la matemática, convirtiéndose en angustia y rechazo por parte de los alumnos, reflejando un bajo rendimiento al momento de ser evaluados en el tema, mostrando resultados regulares o insuficientes y un bajo rendimiento académico. La investigación está conformada por tres etapas.

En la primera etapa, se realizó una encuesta acompañada de un cuestionario a un total de 54 docentes, de las Unidades Educativas Gubernamentales de Educación General Básica Media (EGBM) de la ciudad de Latacunga Provincia de Cotopaxi, con el propósito de obtener información sobre los materiales y recursos que los docentes emplean en la enseñanza de las fracciones.

La segunda etapa se llevó a cabo con el uso de un cuestionario, a través de preguntas abiertas y cerradas a los estudiantes del 11º año de EGMB de 10 Unidades Educativas urbanas de la ciudad de Latacunga, provincia de Cotopaxi. Aquí se determinaron los errores en el estudio de las fracciones de un total de 600 estudiantes entre niños y niñas.

La tercera fase trató de una propuesta para desarrollar las destrezas lógico-matemáticas de los estudiantes. Se llevó a cabo con el uso de recursos didácticos en la enseñanza de fracciones, de cada institución educativa se seleccionaron 2 paralelos del mismo año escolar, la selección se la realizó de forma aleatoria, los estudiantes de los paralelos “A” actuarían como grupo de control y los estudiantes de los paralelos “B” intervendrían como un grupo experimental. En ambos grupos se dictó varias clases sobre el tema de fracciones (definición, partes, operaciones básicas) con la diferencia que el grupo experimental utilizó el material de apoyo mientras que el otro grupo, el de control recibió la clase sin este material.

En los paralelos “B” se dictaron las clases con los materiales recortados prediseñados (tiras de papel de colores que representan las partes de una fracción, además de pequeños cuadros de papel que representan la unidad en la cual los estudiantes los dividirán para representar el valor de una fracción), que por ser de bajo costo los materiales están al alcance de docentes y estudiantes, además servirá como estrategia lúdica para fortalecer el aprendizaje de las fracciones.

Posteriormente se realizó la comparación entre los estudiantes de los paralelos “A”, los cuales recibieron la clase de fracciones sin ningún tipo de material de apoyo y con los paralelos “B” que sí lo emplearon. Se seleccionó los paralelos tomando en consideración que es el mismo docente el que imparte la asignatura, esto con el propósito de asegurar, en alguna medida que el nivel de los estudiantes sea el mismo.

Finalmente se determinó que el uso de materiales recortados prediseñados y las estrategias didácticas diseñadas en el proceso de investigación favorece la conceptualización del concepto de las fracciones y su aplicación en la resolución de diversos ejercicios que los alumnos enfrentan durante el proceso educativo.

Palabras clave:

Educación, fracciones, didáctica, recursos y materiales

ABSTRACT

Through this research, one of the topics in the area of mathematics is developed, specifically the study of fractions, in which students within the conventional school system have learning difficulties. The conventional way of teaching fractions generates difficulty for students due to the different interpretations that numbers can have, which is why some degree of repulsion to mathematics is generated, turning into anguish and rejection on the part of students, reflecting poor performance when moment of being evaluated on the subject, showing regular or insufficient results and low academic performance. The investigation is made up of three stages.

In the first stage, a survey was carried out accompanied by a questionnaire to a total of 54 teachers, from the Government Educational Units of General Basic Education (EGBM) of the city of Latacunga Province of Cotopaxi, with the purpose of obtaining information on the materials and resources that teachers use to teach fractions.

The second stage was carried out with the use of a questionnaire, through open and closed questions to the students of the 11th year of EGMB from 10 urban Educational Units of the city of Latacunga, province of Cotopaxi. Here the errors in the study of the fractions of a total of 600 students between boys and girls were determined.

The third phase dealt with a proposal to develop students' logical-mathematical skills. It was carried out with the use of didactic resources in the teaching of fractions, from each educational institution 2 parallels of the same school year were selected, the selection was carried out randomly, the students of the parallel’s "A" would act as a group of control and students from parallels "B" would act as an experimental group. In both groups, several classes were given on the subject of fractions (definition, parts, basic operations) with the difference that the experimental group used the support material while the other group, the control group, received the class without this material.

In the parallel "B" classes were taught with pre-designed cut-out materials (strips of colored paper that represent the parts of a fraction, as well as small squares of paper that represent the unit in which the students will divide them to represent the value of a fraction), which because the materials are low-cost are available to teachers and students, will also serve as a playful strategy to strengthen the learning of fractions.

Subsequently, the comparison was made between the students of the parallel's "A", who received the class of fractions without any type of support material and with the parallels "B" that did use it. The parallels were selected taking into consideration that it is the same teacher who teaches the subject, this with the purpose of ensuring, to some extent, that the level of the students is the same.

Finally, it was determined that the use of pre-designed cut-out materials and the didactic strategies designed in the research process favors the conceptualization of the concept of fractions and its application in the resolution of various exercises that students face during the educational process.

Key words:

Education, fractions, didactics, resources and materials

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

La matemática, por generaciones, ha sido una de las asignaturas con mayor dificultad en la comprensión por parte de estudiantes y porque no decirlo de los docentes, la enseñanza está basada en simple teoría dejando de lado la práctica, esto significa que el conocimiento adquirido no es aplicado en problemas de la vida cotidiana, siendo esto una de las razones para que los estudiantes no les guste la asignatura.

Las matemáticas forman parte de la historia de la humanidad y ha sido indispensable en el desarrollo de nuestra civilización tal como sugiere Alsina (2002):

> Desde el inicio de la civilización humana, la matemática ha sido fundamental en el desarrollo de la vida cotidiana, considerándola, por encima de todo, un recurso de conocimiento más que una disciplina teórica que debe enseñarse en un contexto artificial. (p.13)

Los primeros números que se utilizaron para representar las situaciones cotidianas fueron los números naturales. Sin embargo, conforme crecía la población, estos números dejaron de ser suficientes para representar todas las situaciones cotidianas. Por tal motivo, surgieron nuevos números para representar valores más complejos como, por ejemplo, los números racionales.

Pero, es a partir del inicio de las civilizaciones que surgen la necesidad de usar fracciones, ya que estas permiten expresar las situaciones poco cotidianas en números y mejorar toma de decisiones de forma racional. Por ejemplo, las fracciones en aquel entonces y actualmente se utiliza para comparar el tiempo (sea en días, horas y minutos) y la distancia, permitiendo conocer si el tiempo y la distancia entre una ciudad y otra es similar a una tercera ciudad o si es la mitad. Posteriormente, el uso de las fraccione se hizo necesario y frecuente usándolo también en las actividades cotidianas de las civilizaciones.

Es bastante común que los estudiantes presenten problemas al momento de estudiar fracciones ya que el método de enseñanza de un gran porcentaje de docentes no es el adecuado, lo que ocasiona que el alumno jamás adquiera un conocimiento conceptual apropiado del tema de fracciones. Como prueba, se observa los resultados obtenidos por la

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) en la cual, a través de una investigación realizada en un grupo de estudiantes de escuelas norteamericanas, solamente el 50% de los estudiantes clasificaron adecuadamente un grupo de fracciones (Consejo Nacional de Profesores de Matemática., 2007, p. 3).

El tema de las fracciones siempre ha presentado varios desafíos a docentes como a estudiantes, tanto en la enseñanza, así como en el aprendizaje. En el actual sistema educativo se puede observar que los estudiantes pasan una gran cantidad de tiempo en la instrucción y estudio de fracciones, y, sin embargo, siguen enfrentando problemas con este tema en particular. La razón principal de que esto suceda es la metodología usada por los docentes al momento de impartir sus clases, la cual es una forma mecánica y aislada que está basada únicamente en la resolución de ejercicios y problemas. Históricamente, la resolución de problemas ha sido uno de los focos principales de la educación matemática a nivel internacional (Arcavi y Friedlander, 2007).

Los estudiantes comúnmente memorizan el proceso de resolución de un modelo matemático y enseguida practican lo aprendido resolviendo ejercicios similares al mismo problema, incluso si estos no entendieron el significado del problema, se enfocan únicamente en un proceso mecánico para la resolución del mismo. Así que, si nos preguntarnos si los juegos son importantes en las clases de matemáticas, la respuesta será siempre afirmativa, independientemente del enfoque o metodología del docente. Como indican Meza y Barrios (2010) “Sin duda, el juego experimental es muy importante, pero no hay unidad en la razón de ello, muchos profesores continúan ofreciendo la mayoría de las clases en forma expositiva” (p.15).

Según Flores, Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina (2011), “para la enseñanza de la matemática todavía son escasos o insuficientes los materiales y recursos didácticos que existen en los centros educativos y más aún rara es su utilización en clase” (p.5). Actualmente estos recursos o materiales están siendo sustituidos por herramientas tecnológicas con la incorporación de computadores o Tablet. Sin embargo, es importante dar un lugar en el aula al uso de materiales y recursos que puedan ser manipulados directamente por el alumno, ya que constituyen una ayuda importante durante el proceso de aprendizaje.

El estudio para la matemática necesita un nuevo enfoque tal como sugiere Flores et al. (2011):

> La enseñanza de fracciones utilizando recursos o materiales didácticos tiene que cambiar el concepto de lo que es un aula de clases, y convertirla en taller o laboratorio de matemática, dando un mayor protagonismo de la enseñanza indirecta, en la que el alumno desarrolla conocimientos a partir de su trabajo con la manipulación de materiales.

Esto fomentará el uso de varios recursos didácticos para que los alumnos no solo memoricen formulas o procedimientos, más bien se enfoquen en entender lo que las fracciones representan y su verdadero uso con ejemplos más reales. El objetivo es que los estudiantes concluyan que para aprender algún concepto matemático hay que "hacer", es decir que deben buscar una aplicación tangible con la que se pueda aplicar el concepto, utilizando los materiales y recursos que permitan que el alumno haga. Los usos de estos materiales deben ser diferenciados entre actividades de enseñanza y actividades de aprendizaje, para que el proceso educativo entre estudiantes y docentes este bien definido.

Los docentes en el Ecuador están ligados a un estilo de enseñanza anticuado, al punto que incluso con las nuevas tecnologías y metodologías esto parece no cambiar. Mediante la encuesta que se realizara a los docentes se pretende determinar si estos usan herramientas adicionales, cuanto les interesa mejorar como docentes a través de cursos y el tiempo que se han desempeñado como docentes. La investigación abordará distintos tipos de actividades o recursos que el docente empleará en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las fracciones, mismas que permitan a los alumnos y alumnas interactuar con diferentes materiales didácticos, intercambiar opiniones y puntos de vista para la resolución de problemas, así como identificar la utilidad de los conocimientos adquiridos, y de esta manera conseguir que los estudiantes logren una educación de calidad.

Al momento de enseñar fracciones se debe considerar múltiples opciones ya que como sugiere Zarzar (2013):

> Desde el punto de vista práctico, el concepto de fracción es aplicable a una gran cantidad de situaciones y problemas de la vida diaria; para la psicología cognitiva

constituye un área con la cual se pueden desarrollar estructuras mentales necesarias para dar continuidad al desarrollo intelectual; finalmente, para las matemáticas el entendimiento de las fracciones es fundamental para comprender las operaciones algebraicas elementales. (p.35)

1. CAPÍTULO 1

1.1. Planteamiento del problema.

Las matemáticas son comúnmente conocidas como una asignatura de difícil entendimiento tal como menciona D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli (2008): "La matemática en una ciencia que normalmente presenta un cierto grado de dificultades, ya sea durante la enseñanza, así como para su aprendizaje y más concretamente, lo relacionado con los números racionales." (p.15). Entre los problemas que los estudiantes presentan al momento de estudiar fracciones, se encuentran las fallas de aprendizaje en temas anteriores, debido a que es fundamental que el aprendizaje del alumno se sostenga en los conocimientos ya adquiridos previamente en los grados anteriores, para sintetizar un nuevo conocimiento. En este sentido el estudiante debe saber qué son los números, y dominar las operaciones básicas como lo son la suma, resta, multiplicación y división (Gonzales, 2015).

Otro de los inconvenientes al momento de estudiar fracciones, se debe a la enseñanza del lenguaje de las fracciones en edad temprana, así como a la implementación de tareas abstractas relacionadas con estos números. Por lo cual, Hincapié (2011) propone que: "hay que fortalecer las prácticas de enseñanza, favoreciendo la comprensión conceptual de las fracciones a partir de situaciones problema que involucren sus diferentes significados y representaciones" (p.13).

Además, la enseñanza de manera tradicional de fracciones ha permitido que los estudiantes tengan algún grado de repulsión a la matemática, provocando que los estudiantes generen algún grado de angustia y rechazo hacia la matemática en general. Lo que desencadena el bajo rendimiento académico.

El concepto de las fracciones siempre ha constituido un obstáculo notable, el cual fue reconocido por parte de la comunidad matemática desde tiempos remotos (desde el 2000 a. C. en Egipto o tal vez antes). Sin embargo, en tiempos antiguos parecería que no existían indicios de limitaciones o impedimentos por parte de las personas para construir conocimiento, pero un estudio histórico atento y crítico muestra lo contrario.

Por ejemplo, Bachelard (1981) menciona que, los obstáculos se presentan de manera muy evidente en la antigüedad y en la época medieval, ya que se pone en evidencia que las limitaciones no son propios de una comunidad científica en especial o de una etapa de la historia del conocimiento, sino que están presentes en los sujetos que han pretendido hacer ciencia a lo largo de todos los tiempos.

El conocimiento nace de la experiencia tal como afirma Vergnaud (1983): "el conocimiento emerge de problemas que puedan ser resueltos. Por lo cual, tanto las concepciones, como los modelos y teorías son formados a partir de las situaciones que experimenta un sujeto." (p.3). En ese sentido, la instrucción escolar debe ofrecer varios escenarios a los estudiantes, en los cuales ellos puedan descubrir diversas relaciones en un mismo contenido matemático. Actualmente, se conoce que los estudiantes presentan lagunas en un determinado contenido matemático. Por ejemplo, en fracciones ellos pueden hacer referencia a un conjunto de situaciones tan limitadas que los alumnos no podrán comprender ni usar las herramientas necesarias para resolver ciertos problemas.

El poder impartir el concepto de matemáticas a temprana edad resulta ser un factor determinante para el futuro desarrollo de los estudiantes, Llinares (2003) destaca que: "la práctica de las fracciones en los primeros años de estudio, permite introducir a los alumnos a un nuevo mundo matemático, permitiendo el desarrollo de una mejor manera de pensar y conceptualizar mejor los conceptos" (p. 12). Dentro de la matemática, las fracciones son de los contenidos más difíciles de asimilar, por consiguiente, varios autores han realizado estudios para intentar dar solución a los problemas encontrados durante el proceso de aprendizaje. Debido a tal motivo los docentes cada vez recurren más a métodos en los que se involucra situaciones más familiares y fáciles de reconoces para los estudiantes, Tal como menciona Freudenthal (1983) "Una de las causas de la dificultad de aprendizaje es, que son poco usadas en situaciones de la vida real, por lo tanto, los niños cuentan con escasos conocimientos previos al momento de inician el estudio en la escuela primaria" (p.8).

Hoy en día, existe un acuerdo común de que para una mejor comprensión de la matemática en los primeros grados o cuando se introduce un nuevo tema, es importante el uso de materiales manipulables (herramientas que permitan representar el valor de un numero de forma práctica y palpable por parte de los estudiantes). Según lo informan Salazar, Jiménez y Mora (2013) "La aparición de este tipo de materiales surgió durante la década de los 60, con la publicación de las bases teóricas propuestas por Zoltan Dienes en el año de 1960 en su libro (Building up mathematics) y por Jerome Bruner en el año de 1961 en su libro (The Process of Education)" (p. 3). Los mismos que pusieron mayor énfasis en los procesos cognitivos del niño, lo cual permitió que las teorías de la pedagogía y del aprendizaje revolucionaran. Su teoría del aprendizaje por descubrimiento orienta y dirige la labor educativa por senderos en los que el educando se hace cada vez más autónomo e independiente, ubicándose en una posición privilegiada dentro del escenario educativo.

Recientes investigaciones muestran que para que los niños comprendan matemática, los profesores deben constantemente hacer conexiones entre números abstractos y ejemplos del mundo real, aplicando ciertos modelos concretos en la enseñanza de fracciones. Hurtado (2012) asegura que los estudiantes presentan problemas en la interpretación de textos que involucran las fracciones y en la solución de problemas que requieren de los conocimientos básicos de la fracción, en virtud a que sus experiencias y conocimientos sobre las fracciones han sido adquiridas a través de la aplicación mecánica de algoritmos. Los estudiantes comprenden mejor la matemática cuando se utilizan imágenes y modelos concretos.

Esta investigación permitirá determinar los recursos empleados por el docente en el aula de clase, (recursos explicados en detalle más adelante) sean estos tradicionales o no, sirviendo de apoyo a la comprensión de las fracciones, para de esta manera lograr los resultados del aprendizaje, y sobre todo que los estudiantes tengan una visión distinta en el desarrollo de ejercicios que se llevara a cabo con recursos del aula o instrumentos caseros de bajo costo, permitiendo que el estudiante tenga una postura diferente mejorando la asimilación del aprendizaje.

Se indagará sobre las concepciones y recursos respecto a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones que tienen los docentes en servicio, y los estudiantes de educación general básica media de las instituciones de educación públicas de la ciudad de Latacunga.

Se realizará mediante una investigación de campo y descriptiva, donde se utilizará técnicas de investigación como el cuestionario, la entrevista, y la observación, las cuales permitirán obtener datos para conocer lo que piensas los docentes y estudiantes. Además, para argumentar el marco teórico se revisará las distintas investigaciones desarrolladas sobre esta temática, así como bibliografía disponible en revistas y otras publicaciones referentes a la enseñanza de las fracciones.

Esta investigación será de interés para el Ministerio de Educación del Ecuador y se espera que los resultados de la presente investigación contribuyan a orientar procesos de capacitaciones que permitan lograr actualizaciones y mejoras en la formación de los docentes.

La investigación se llevará a cabo en la ciudad de Latacunga, Provincia de Cotopaxi en Ecuador, a los docentes del área de matemática de Educación General Básica Media (EGBM); del quinto, sexto y séptimo año, y a los estudiantes del séptimo año.

Todos estos recursos necesitan ser investigados con el fin de explorar las mejores estrategias empleadas por parte de los docentes, para el estudio de fracciones y así evitar el fracaso escolar que se extiende a lo largo de todo el proceso educativo. Hoy en día el uso de las fracciones sigue siendo de gran utilidad para las actividades cotidianas del ser humano, pero debido a problemas de aprendizaje, las fracciones no son asimiladas correctamente, resultando en el poco entendimiento y aplicación por parte de los estudiantes y adultos.

1.2. Objetivo de la investigación.

1.2.1. Pregunta de Investigación.

¿Cuáles son los recursos que más emplean los docentes en la enseñanza de fracciones en Educación General Básica Media (EGBM)?

1.2.2. Objetivo General.

Determinar los recursos empleados en el aula de clase, por los docentes en la enseñanza de las fracciones en EGBM de la ciudad de Latacunga, proponiendo mejoras en las estrategias de enseñanza-aprendizaje.

1.2.3. Objetivos Específicos.

- Identificar los recursos que utilizan los docentes en el aula de clase para la enseñanza de fracciones de los estudiantes de EGBM de la ciudad de Latacunga.
- Determinar la diferencia que existe entre los estudiantes que recibieron las clases con el material didáctico con los que recibieron las clases de la manera tradicional.
- Evaluar mediante un cuestionario los recursos utilizados por el docente en la enseñanza de fracciones.
- Identificar las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones.

2. CAPÍTULO 2

2.1. Marco teórico.

2.1.1. Origen de las Fracciones.

Las fracciones nacen con la necesidad del ser humano hacia contar, medir y repartir, entre varias otras actividades relacionadas con la distribución de artículos entre muchas otras cosas. Sin embargo, la comprensión del concepto de fracción necesita de un largo recorrido, debido a sus varias interpretaciones. Tal como sugiere Llinares y Sánchez (1997) "Al momento de hacerse la pregunta "¿qué son las fracciones?", es necesario preguntarse también cómo es que estas surgen, debido a que la concepción de una idea matemática va directamente relacionada con su emergencia y evolución histórica" (p. 16).

Aproximadamente en el año 900 AC, se realizaron avances en el área de las matemáticas, que para ese entonces parecían estar olvidadas, así que gracias a los resultados de previos investigadores los árabes lograron avances significativos en esta área tal como afirman Barba, Varon y Binimelis (2019):

> Los árabes extendieron el sistema indio decimal a las fracciones decimales, La primera figura destacada en la matemática árabe es Muhammad Musa Al-Khuwarizmi (780-850), autor del libro de aritmética llamado Al-jam' w'al-tafriq ib hisab al-hind (adición y sustracción en aritmética hindú). (p. 22).

El desarrollo de la humanidad como especie siempre ha estado estrechamente relacionado a una necesidad de solucionar problemas. Así que cuando al ser humano se le presentó el problema de medir distancias, áreas, volúmenes, pesos y otras medidas necesarias en sus actividades cotidianas, los números naturales dejaron de ser suficientes, debido a que aparecían cantidades diferentes a la unidad. Por lo cual, se necesitaba otra forma para representar el reparto lo que conllevo a la creación de las fracciones, también conocidas con el nombre de "quebrados".

A lo largo de la historia, se puede identificar dos posibles causas que desencadenaron en la invención de las fracciones. La primera, fue debido a la existencia de divisiones inexactas, ya que durante la operación de división el cociente no es factor del dividendo, y por lo tanto la operación tiene residuo. Por ejemplo: 4 dividido entre 3, al no existir ningún número cardinal que multiplicado por 3 dé como producto 4, lo más exacto es escribir 4/3.

La segunda razón que desencadenó el desarrollo de las fracciones fue debido a la necesidad de una manera de medir longitudes. Para realizar la medida de un espacio, se tomaba un tramo como unidad de medida, y se contaba las veces que este tramo se repetía a lo largo de lo que se deseaba medir, como no siempre este tramo completaba lo que se deseaba medir de manera exacta, se procedía a dividir el trazo que servía de unidad en varias partes iguales más pequeñas, para que el resultado fuera exacto, este resultado de la medición se expresaba en fracción.

El estudio de las fracciones datan desde mucho atrás, según afirma León (2011) “Durante la historia se piensa que fueron los egipcios quienes utilizaron por primera vez el concepto de fracciones, pero sólo aquellas de la forma 1/n o las que pueden obtenerse como combinación de ellas” (p.13). Las fracciones usadas por los egipcios tenían la unidad por numerador, con estas fracciones los egipcios conseguían hacer cálculos fraccionarios de todo tipo, su notación era como se muestra en la figura 1.

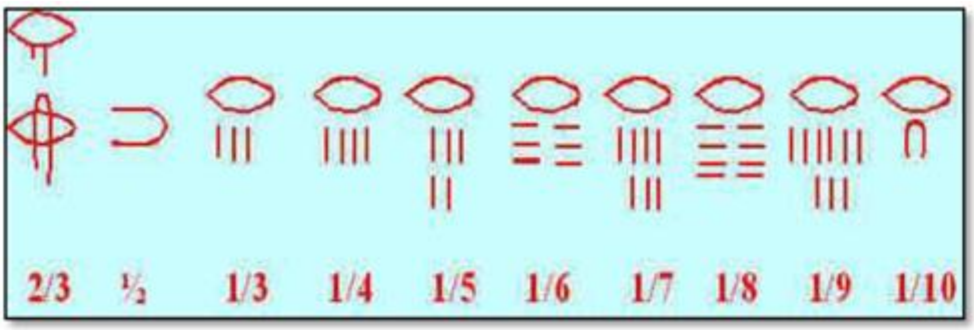


Figura 1. Símbolos que representan las fracciones en Egipto. (Neugebauer, 1962).

El uso de las fracciones se debe al alcance de una cultura en la edad de bronce, que requirió la necesidad del uso de un concepto más entendible sobre fracciones.

Otro tipo de fracciones que presentaban el numerador distinto de la unidad se solían distribuir en sumas de fracciones unitarias como se observa a continuación:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

$$\frac{97}{40} = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{7}{8}$$

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Además, los egipcios tenían a disposición un método de numeración aditivo, el cual consistía en que las fracciones de la forma m/n para n siendo impar del 5 a 101 eran representas también como suma de fracciones unitarias. Esto, se evidencia en varios registros históricos hallados en tablillas hechas por esta antigua civilización como el Papiro de Ahmes o Papiro Rhind (documentos escritos en un papiro de unos 6 m de longitud y 33 cm de ancho).

Los egipcios ya tenían registros sobre sus estudios, según Neugebauer (1962) "En el papiro de Rhind (manual práctico de matemáticas egipcias) escrito hacia el 1.650 AC, se puede apreciar que los egipcios expresaban las fracciones como suma de fracciones unitarias" (p. 5).

> Por ejemplo, aplicando las fracciones a una actividad común, si alguien quería repartir 3 panes entre 5 personas, esta dividía los 3 panes en dos partes iguales haciendo un total de 6 pedazos y entregaba un medio pedazo a cada persona haciendo un total de 5, así que el medio pan restante era dividido en 5 pedazos lo que equivale a 1/10. Entonces cada uno recibía 1/2 + 1/10, lo que equivale a 6/10, de este modo podían expresar la fracción deseada. (Neugebauer, 1962, p.6)

Así el Papiro Rhind utilizaba fracciones de unidades de medida de forma habitual, usadas en problemas concretos de repartos iguales o desiguales (alimentos, salarios de trabajadores entre otros).

> El papiro de Rhind presenta una lista de fracciones de ese tipo y su descomposición. El símbolo usado para la representación de la fracción se reconoce como ro, correspondía a una boca e indicaba la cantidad de gramo (volumen) que podía contener un bocado, una parte o una fracción. (García, 2017, p.9)

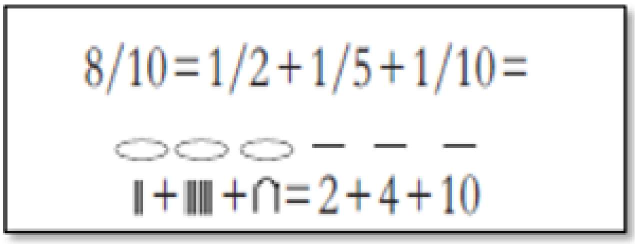


Figura 2. Símbolos que representan las fracciones en Egipto.

(Neugebauer, 1962).

Los antiguos egipcios recurrían al uso de fracciones en la resolución de problemas de la vida cotidiana como lo era la repartición de pan, así como en aplicaciones más complejas como la construcción de pirámides o para estudiar el planeta tierra. Además, utilizaban jeroglíficos para representar las fracciones, los cuales fueron constados en los papiros. Por ejemplo, en el papiro de Ahmes encontrado en 1858 en una ciudad comercial del Nilo por el anticuario escocés (Boyer, 1987).

Además de los egipcios, tenemos a los babilonios, los cuales desarrollaron un sistema de notación fraccionaria bastante funcional, que les permitió representar aproximaciones decimales más precisas, dejando como evidencia miles de tablillas de arcilla como la que se observa en la figura 3. En más de 500 de estas tablillas se encuentran representaciones matemáticas que nos ha permitido identificar aplicaciones matemáticas como su sistema de numeración en base 60 o sus conocimientos sobre el teorema de Pitágoras.

Figura 3. Tablilla Plimpton 322. (Gutiérrez, 2009).

Matemáticos de civilizaciones como la antigua escritura sumeria y la antigua Babilonia utilizaban un sistema sexagesimal para representar fracciones, el cual consistía en tener un único denominador el cual era el número 60 como se muestra en la figura 4.

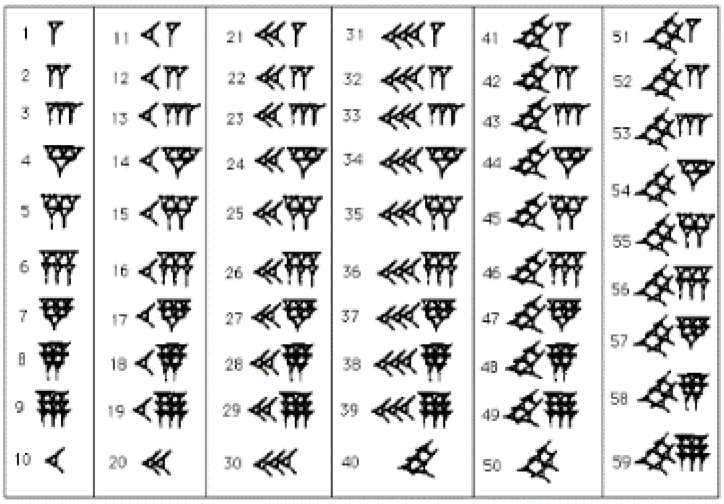


Figura 4. Sistema de numeración sexagesimal base 60. (Gutiérrez, 2009).

La evolución del sistema de fracciones utilizados por la antigua Babilonia permitió el desarrollo de nuevos procesos algebraicos que aun hoy en día son indispensables en las matemáticas modernas como por ejemplo el cálculo de la raíz cuadrada. Sin embargo, tal como afirma Macas (2015) “fue en el siglo VI, cuando los hindúes lograron establecer las reglas al momento de trabajar con fracciones. En esa época, Aryabhata se preocupó de estas leyes, y después lo hizo Bramagupta, en el siglo VII.” (p .3)

Posteriormente los griegos, así como los romanos, utilizaron las fracciones unitarias, el cual era un método que consistía en marcar el numerador con un acento y marcar el denominador con dos. Proceso que siguió evolucionando y extendiéndose tal como explica Hurtado (2012):

> Posteriormente lograron reconocer las fracciones equivalentes y usaron todo tipo operaciones con fracciones. Además, en occidente los musulmanes introdujeron a España el sistema de numeración indo arábigo, haciendo de esto un acontecimiento que permitió el avance para la comprensión del concepto de fracciones. Se conoce que la forma de representar fracciones por los árabes era similar a la de los egipcios. (p.6).

Mientras se continuaba extendiendo el conocimiento acerca de las fracciones este continúo evolucionando gradualmente, así Alsina (2002) afirma que:

> Fueron los Mahavira en el siglo IX y Bháskara en el siglo XII quienes desarrollaron las reglas que actualmente son utilizadas para trabajar con fracciones. Además, fue Juan de Luna quien acuño el término de fracción, al traducir la palabra “fractio” del latín en el siglo XII, sin embargo, la palabra “fractio” ya había sido traducida de la palabra árabe "al-Kasr” del libro de aritmética de Al-Juarizmi, que significa quebrar o romper. (p.4).

Mientras más estudios se hacían acerca del tema de fracciones estas fueron tomando forma a lo que conocemos en la actualidad, Zúñiga (2003) afirma:

> Al pasar por varios cambios lo que actualmente conocemos como una fracción empieza finalmente a tomar forma después de que Leonardo de Pisa, al cual lo conocían como Fibonacci, durante un punto sin especificar el siglo XIII implementara el uso de una línea horizontal entre el número superior y el número inferior que es lo que caracteriza a las fracciones. (p.29).

Si avanzamos un poco más en el tiempo se puede observar que el uso de las fracciones se incrementa, según afirma Zúñiga (2003):

> A inicio del siglo XV, se sabe que fue el árabe Al Kashi el cual dio origen a la manera en que utilizamos los números decimales en la actualidad. Posteriormente, a finales del siglo XVI Simón Stevin, fue quien fomento el uso de las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales. Fue durante los inicios del siglo XVII, donde los números decimales comenzaron a aparecer del modo como son representados en la actualidad, separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal. (p.30)

Posteriormente el uso de las fracciones continúo avanzando en la región europea tal como afirma Valdez (2007) “En el siglo XVIII, más específicamente en el año 1792, el concepto de números decimales se implantó con éxito en casi todos los países europeos, al momento que deciden adoptar el sistema métrico decimal como un estándar” (p.11).

El interés que existía en las fracciones fue muy grande, sin embargo, posteriormente al ver que su estudio no contribuía de manera significativa con las investigaciones que se planteaban, su estudio quedo rezagado tal como afirma Valdez (2014):

> A finales del siglo XIX, se consideraba que el estudio de las fracciones conllevaría al descubrimiento de los secretos mejor guardados de la teoría de los números, sin embargo, esto no cumplió con su objetivo por lo que el estudio de las fracciones fue temporalmente olvidado, no fue hasta finales del siglo XX donde el tema de fracciones resurgen como tema de investigación, utilizando nuevos métodos y diferentes enfoques generando el desarrollo de nuevos campos como los sistemas dinámicos, teoría de aproximación entre otras. (p.16)

Tal como se explicó anteriormente durante el siglo XX el interés en el estudio de las fracciones se incrementó lo que permitió tener registros más exactos, Leyssenne (1913) citado en Ordóñez (2014) afirma:

> Durante el siglo XX es donde el estudio de fracciones da un gran avance, empezando por el año de 1913, que se da a conocer que una fracción también puede ser considerada como una razón, y además que las razones pueden emplear todas las características y propiedades que tienen las fracciones, y que todas las operaciones de cálculo se ejecutan tanto en una como otras. (p.34)

Posteriormente se forma un concepto más complejo a lo que representan las fracciones, según afirma Piaget, Inhelder y Szemiska (1960):

> Existe una representación parte-todo, donde se toma un objeto que representa la unidad como referencia, el cual tiene que ser dividido en varias partes iguales. Si el objeto es dividido en dos partes se lo denomina "dos medios", si es dividido en tres partes se lo denomina "tres tercios", y así sucesivamente, esta interpretación es generadora, en la escuela elemental, de lenguaje y simbología matemática. (citado en Moreno, 2013, p.13).

Siguiendo con el estudio de las fracciones, gracias a las investigaciones de Kieren (1976) explica que "El concepto de fracción dependía de varios otros subconstructos, y además que su entendimiento en general, consiste en comprender los diferentes significados de la fracción, así como sus respectivas interrelaciones" (p.15). Así eventualmente fue Kieren (1980) el cual señaló "Las fracciones constan de cuatro subconstructos: medida, razón, cociente y operador." (p.6). Gracias a estos aportes el concepto de parte-todo de las fracciones tomo forma y se consideró una idea básica para el estudio de las fracciones.

El concepto de parte-todo se vuelve algo indispensable para posteriores estudios, no solo de los docentes sino también de los alumnos que están estudiando, tal como afirma Llinares y Sánchez (1997) “La interpretación de la fracción como parte-todo, constituye la base sobre la que se van a desarrollar las restantes interpretaciones, resaltando que la relación parte-todo es la más natural para los niños”. (p.4). Para Ellerbruch y Payne (1978) al introducir el concepto de fracción es conveniente usar una interpretación simple, además recomiendan desarrollar un concepto solido acerca de fracciones antes de empezar con el estudio de operaciones,

Con el concepto de fracciones mejor establecido, los investigadores tuvieron la oportunidad de realizar estudios e investigaciones con la colaboración de varios grupos de estudiantes, según informa Metaute (2017):

> Durante la década de los sesenta se hicieron estudios a estudiantes de entre 14 y 18 años, donde sobresalió el estudio sobre el concepto y operaciones entre números fraccionarios y las dificultades relacionadas con ellas, aquí evidencian siete significados diferentes sobre fracción, reconociendo que una de las dificultades es precisamente la cantidad de significados que se relacionan con el tema. (p.20)

En los años ochenta, se realizaron estudios a estudiantes de 14 años, enfocándose principalmente en factores como, el aprendizaje en general, aprendizaje de operaciones con fracciones, comparaciones entre valores de las fracciones y los problemas relacionados con las interpretaciones de fracción.

Estas investigaciones continuaron durante los años siguientes, así durante los años noventa se realizaron varias investigaciones en la cual participaron numerosos alumnos con edades comprendidas entre los 6 y 14 años. Los estudios involucraron varios temas, los más destacados fueron el estudio de fracciones, números decimales, números racionales, y combinaciones.

2.1.2. Conceptos de fracciones.

Como se pudo revisar en la sección anterior, el concepto de fracciones tuvo que atravesar por un largo camino antes de poder dar un concepto específico, el cual es como explican Carrillo, Henríquez, Bravo, Mellado y Manzi (2008):

> La fracción o también conocida como números racionales o quebrados son la representación de un todo dividido en varias partes iguales, y cada parte es una fracción del entero. Mientras que los números enteros son útiles para realizar el conteo, la fracción es útil como operador aritmético, esta actúa sobre un conjunto determinado, es decir asocia cada elemento de un conjunto de inicio con los elementos de un conjunto de llegada. (p.15)

Una fracción está conformada por, una parte superior conocida como numerador y una parte inferior conocida por denominador, los cuales están separados por una línea horizontal. El numerador representa el número de partes que se toma del todo, mientras que el denominador representa el número de veces que se dividió el todo, tanto el numerador como el denominador son siempre números enteros.

Las fracciones, se usan para comparar un mismo tipo de objetos como partes de un todo. Así como explican Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008).

> Las fracciones son consideradas como un modelo general conformado por números racionales a/b, donde a y b son números enteros y b ≠0, y como tales están estrechamente vinculadas a los porcentajes, los números decimales, las razones y las tasas. (p.6)

Los números decimales también representan un valor fraccionario, por lo tanto, es posible escribir fracciones utilizando números decimales sin el denominador. Por ejemplo, el número decimal 0.3 representa exactamente el valor de la fracción 3/10. Otra forma de representar las fracciones es aquella cuyo denominador es 100, estas fracciones se conocen como porcentajes y son utilizadas con gran frecuencia, por ejemplo, un porcentaje de 20% representa un numerador de una fracción en la cual el valor del denominador es 100, esto significa que, el 20% tiene el mismo valor a la fracción 20/100, la cual por medio de las fracciones equivalentes es igual a 1/5.

Las fracciones son estudiadas en todo el mundo debido a su alto grado de importancia en el estudio de las matemáticas, tal como indica Fandiño (2009):

> La introducción del concepto de fracción parece ser igual en todo el mundo, una determinada unidad concreta es dividida en partes iguales, asegura además que esta acepción intuitiva de la fracción de la unidad tiene la ventaja de ser clara y fácil de adquirir. (p.10)

Un entendimiento más profundo de fracciones se puede explicar usando varios conceptos tal como señalan Gallardo, González y Quispe (2008): “El conocimiento de que la fracción manifiesta distintos significados como: parte-todo, cociente, razón, medida y operador que se reporta desde investigaciones sistemáticas” (p.6). Estos significados son sustentados Freudenthal (1983), el cual afirma. “Forman parte de la propia naturaleza compleja del número racional positivo y se contemplan como organizadores de los contextos y situaciones donde tiene sentido el empleo de la fracción” (p.11). Según Ruiz (2013) “la relación parte-todo, es un sistema concreto pre-matemático desde el cual se puede construir el concepto de partidor de unidad de cada magnitud” (p.8). Según señala Meza y Barrios (2010) “un número racional a/b puede tener varias interpretaciones, pero también establecer relaciones entre ellas. En total se conoce de cinco conceptos a considerar en esta investigación: medida, reparto, operador, razón y relación parte-todo” (p.5). Con estas interpretaciones hablaremos de las fracciones ya que no todos los autores las mencionan de la misma manera, pero el concepto es el mismo para todo el mundo.

Las fracciones no son un tema el cual simplemente se debe memorizar, sino es un tema el cual hay que entender, y esto no es posible a menos que se posea la suficiencia experiencia con ellas. Goutard (1964) señala “La clave del éxito en la iniciación al estudio de las fracciones es la variedad, el cambio, la diversidad de puntos de vista” (p.2). Si los docentes lograran realizar una adecuada enseñanza de los significados de las fracciones, dando profundidad y dotando de utilidad este conocimiento, aumentaría su uso en situaciones de la vida diaria y resultaría aún más familiar su lenguaje.

El conocimiento de que la fracción manifiesta distintos significados que se reportan en investigaciones sistemáticas (Behr et al, 1983), en las que distinguen cinco significados de fracciones. Ver figura 5.

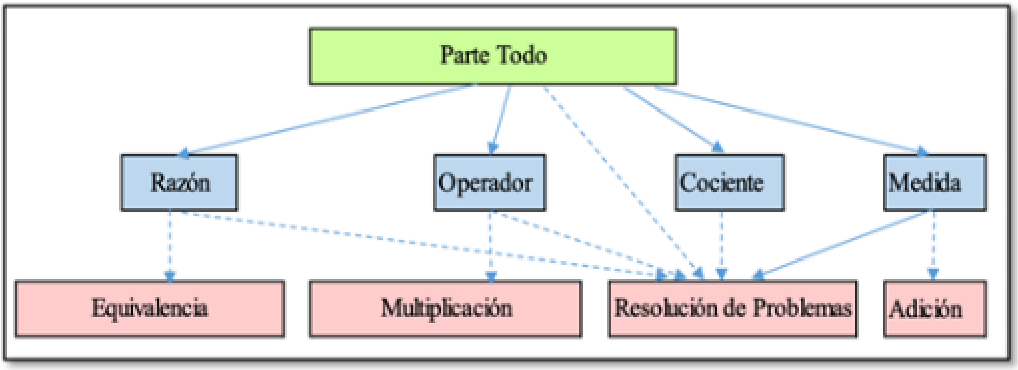


Figura 5. Significado de fracciones. (Behr et al, 1983).

A continuación, se explica todos estos conceptos de forma más detallada.

2.1.2.1. Parte-todo.

El concepto parte todo es el principal para el entendimiento de fracciones tal como explica Gairín y Sancho (2002):

> El significado de parte-todo se presenta al interpretar a la fracción a/b como una relación existente entre dos cantidades específicas: un "todo" o unidad b (continua o discreta), que representa un número total de partes iguales a la que el todo es dividido, y una "parte" a, que representa un número específico de estas partes iguales que fueron tomadas del total, es decir que las fracciones indican la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes, el todo recibe el nombre de unidad. (p.10)

El origen del concepto parte-todo es claramente explicado por Escolano y Gairín (2005):

> La fracción como significado parte-todo, no surge de las necesidades humanas, puesto que la génesis histórica del número racional se encuentra en la medida de cantidades de magnitudes bien realizada directamente o bien para expresar el resultado un reparto o en la comparación de dos cantidades de magnitud, ya medidas, que da sentido a la idea de razón. (p.2)

Las investigaciones realizadas por Piaget, Inhelder y Szeminska (1960): señalan que el concepto de parte-todo requiere de la comprensión de 7 aspectos fundamentales.

1. Un todo o unidad está formado por elementos que pueden ser separados, debe existir una relación entre el número de partes, dependiendo de la figura geométrica a ser subdividida o la cantidad de elementos a ser divididos.
2. Un todo puede ser dividido en un número de partes iguales sin resto, no se puede subdividir solamente una parte del todo e ignorar las otras partes del mismo todo.
3. Las reuniones de todas las partes forman un todo.
4. El número de partes no es igual al número de cortes, por ejemplo, si se divide una figura en dos partes, esta necesita de un corte en la unidad o el todo.
5. Las partes del todo deben ser congruentes, es decir que estas partes deben tener la misma forma independientemente de su orientación. Sus particiones en partes congruentes se realizan tomando el status de número, teniendo en cuenta unidades fraccionarias: (1/2, 1/3, 1/4, 1/5,...) sin perder la noción de la unidad.
6. Cada parte individual puede ser considerada un todo individual, es decir que cada parte puede ser dividida en varias partes más y así sucesivamente.
7. El todo se conserva, es decir que la suma de todas las fracciones individuales debe ser igual al todo que inicialmente fue dividido.

El concepto de todo puede ser interpretado de varias maneras, tal como explica Freudenthal (1983). “El ‘todo’ puede ser definido o indefinido, discreto o continuo, estructurado o carente de estructura” (p.25).

El concepto de un todo definido se puede entender mediante un ejemplo explicado por Freudenthal (1983):

> De una bolsa de canicas (todo definido discreto), se procede a extraer una décima parte, así toda la atención está fijada solamente en esta décima parte, y quizás también en los restantes nuevos dígitos. De las mismas canicas que se tiene en frente, quietas o rodando, estructuradas como una secuencia, se tomó arbitrariamente una décima parte una elección no estructurada o la primera décima parte o una de cada diez elecciones estructuradas. (p.26)

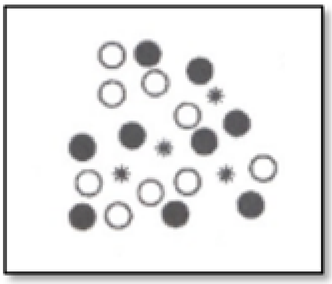


Figura 6. Ejemplo con canicas (Definido discreto). (Freudenthal, 1983).

Del mismo modo la definición de todo indefinido se realiza mediante un ejemplo por parte de Freudenthal (1983). “La humanidad todo indefinido discreto dividida de acuerdo con los grupos sanguíneos, donde la atención se presta a uno o más de ellos”. (p.26)

Tal como se explicó anteriormente, el todo puede ser considerado, como no estructurado, o como estructurado de acuerdo con el sexo, la raza, la distribución geográfica etc. Por ejemplo, si observamos un piso recubierto de baldosas, estructuradas mediante un patrón de ladrillos o clasificados de acuerdo con el color, los dibujos, el material, etc. De este modo se muestra cómo se puede realizar la clasificación en estructurado o no estructurado.

Es necesario que la categorización se realice de forma adecuada tal como explica Freudenthal (1983):

> En casos de llamar algo “estructurado”, es posible dejar de lado la estructura si no vale la pena tenerla en cuenta, y en casos en que apunto “no estructurado”, se puede introducir una estructura. Hay transiciones entre discreto y continuo: las partículas pueden ser tan pequeñas que el todo parezca continuo, pero en un todo discreto, se puede construir una conexión sobre relaciones de vecindad. (p.9)

Se puede representar la unidad como una forma continua, pero también se puede tener como un “todo”, según Piaget et al. (1960). “En el contexto discreto, viendo las fracciones en la relación parte-todo, se debe tener cuidado con el hecho de hacer divisiones de la unidad en partes iguales”.

En la figura 7 se refieren a cantidades de canicas, es decir lo que se conceptualiza hace referencia a cantidades, números y no a objetos concretos.

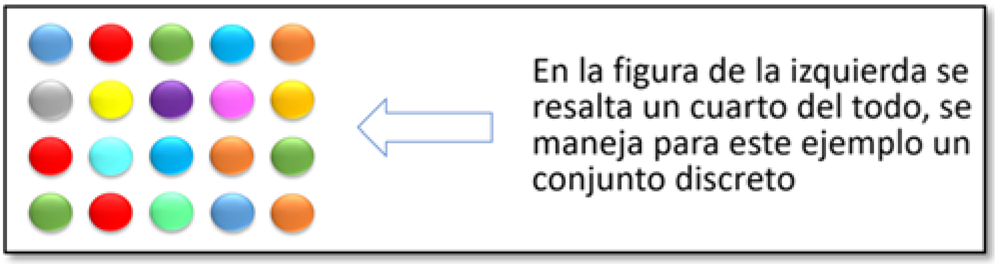


Figura 7. Conjunto discreto de canicas.

Otro de los ejemplos, para contextos discretos en la figura 8 se muestras dos tipos de imágenes: círculos y cuadrados, algunos tienen un punto dentro y otras no.

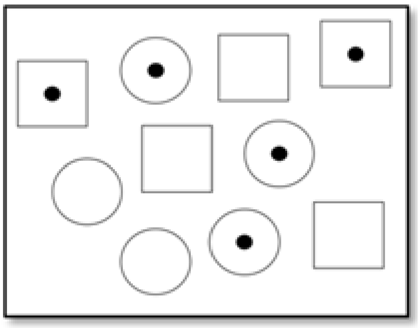


Figura 8. Conjunto discreto.

La relación parte-todo es la base para comprender los demás significado de fracciones como cociente, medida, razón y operador, cuya medida es el eje básico, porque establece la relación cuantitativa entre dos magnitudes.

2.1.2.2. Cociente.

El concepto de cociente es otro de los significados necesarios para un estudio de las fracciones, según explica Obando, Vanegas y Vásquez (2006) "la fracción como cociente es el resultado de dividir uno o varios objetos entre un número de personas o partes" (p.69). En este caso, la fracción como cociente es el resultado de realizar una división de un número natural por otro (a/b), cuyo objetivo es encontrar el tamaño de cada una de las partes residuales después de dividir (a/b), de esta manera, cuando una fracción es representada como el resultado de una división, esta fracción tendrá un significado, lo cual es importante para posteriormente preparar el entendimiento de los números racionales.

Al representar las fracciones como cociente y además en las operaciones de división-reparto en las que un "todo" se divide en un número de partes determinados, se pueden reconocer dos situaciones:

- La primera situación es cuando se informa el valor que posee el "todo", el número de partes en las que este debe ser dividido, y además se nos informa el valor que debe tener el reparto. Por ejemplo: "tres pizzas entre cinco niños", el número de pizzas representa el todo y el número de niños representa el total a dividir.

- La segunda situación es cuando se nos informa la cantidad total que representa el "todo" y además se nos informa el valor de cada parte correspondiente y nos piden el número de partes (medida). Por ejemplo: "tres pizzas y a cada niño le ha correspondido los 3/5 de una pizza. ¿A cuántos niños hemos podido dar pizza?", en este ejemplo las tres pizzas representan el "todo", los 3/5 representa el valor que la división debe tener, y el número de niños representa la suma de las partes.

Aunque una persona pueda hacer una división en el mundo real, entenderlo de forma numérica es más complicado, según informó Kieren (1980):

> Para una persona que está aprendiendo a utilizar las fracciones, el dividir una "unidad" o el "todo" en un número de partes iguales por ejemplo 4 partes y tomar solamente 3 (3/4), es diferente de dividir tres unidades entre cuatro personas, aunque el resultado sea el mismo. (p.16)

Lo más importante al momento de trabajar con fracciones, es que las operaciones deben ser construidas o desarrolladas por los propios estudiantes, por medio de su propia actividad, conocimiento informal y utilizando modelos de ciertos recursos, por lo cual esquemáticamente Llinares (1997) propone los siguientes principios:

> La construcción debe ser basada en la propia actividad del estudiante, acorde a su estimación y desarrollo de sentido del orden y del tamaño.
> Es importante valorar adecuadamente las actividades realizadas por el estudiante, los métodos y procedimientos que este empleó puede llevar a una solución correcta, aunque sean diferentes de las aproximaciones formales.
> Es importante enfatizar la verbalización del estudiante, y del conocimiento adquirido, además de la capacidad de formular reglas y comprender el poder de las generalizaciones.

Es de gran utilidad el conocimiento informal del estudiante como base para profundizar la enseñanza, por ejemplo, si el estudiante ya conoce el significado de las mitades o de tercios, además de su conocimiento previo en lo que respecta a dividir y repartir.

Desarrollar situaciones donde sea posible comparar y ordenar, en las cuales el estudiante pueda desarrollar procedimientos que den solución a problemas por medio de dividir, ordenar, medir, componer.

Además, es útil apoyarse en modelos de apoyo (regiones o segmentos, recta numérica, tablas de razones) y otros tipos de situaciones que sirvan de conexión entre ellas y el trabajo numérico. (p.34)

El concepto de fracciones puede ser interpretado de varias maneras por ejemplo En la figura 9, se representa un mismo problema con 3 diferentes maneras de resolverlo, el cual consiste en una repartición equitativa de 3 barras de chocolate entre 2 personas, la primera por medio de una gráfica, la segunda mediante una expresión verbal y la tercera por medio de una representación más numérica. Aunque las tres maneras muestran una misma solución el proceso es diferente y es importante determinar cuál es el mejor método para que entiendan los estudiantes.

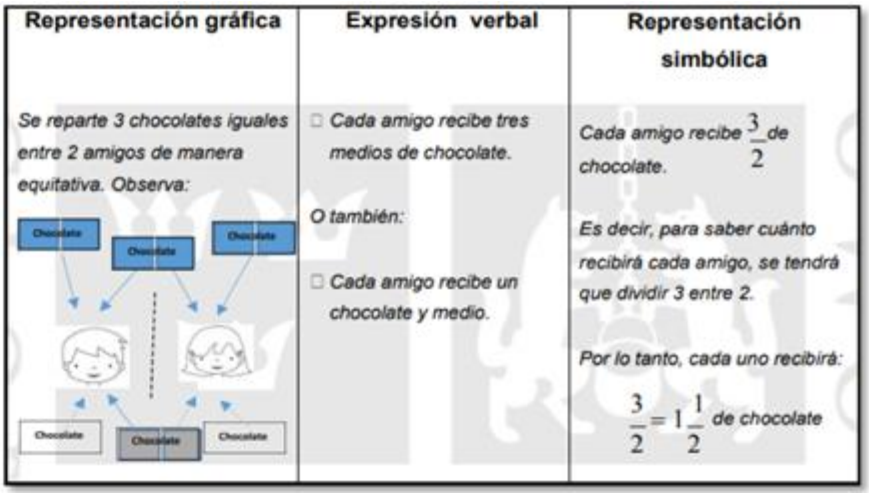
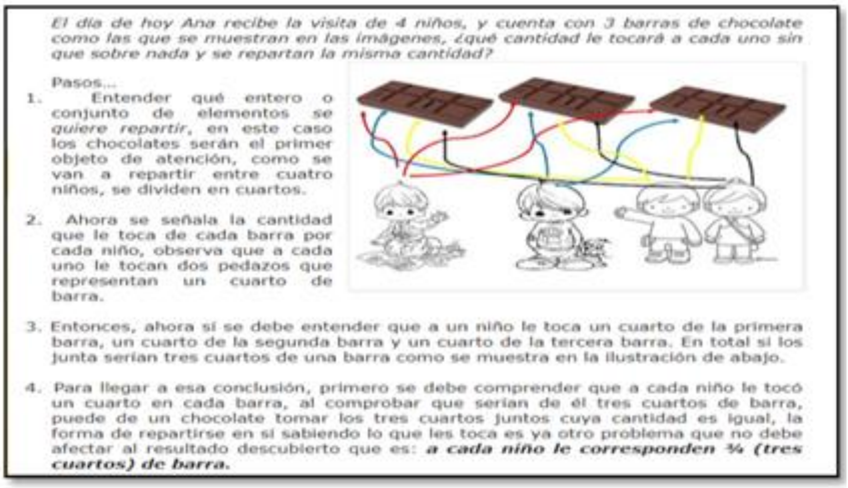


Figura 9. Concepto de fracción como cociente. (Castro, 2017).

Tal como el ejemplo anterior en la figura 10, se muestra un ejemplo de fracciones en el cual se debe realizar la repartición de 3 barras de chocolate entre 4 niños, la figura muestra los pasos para resolver el problema de una manera más conceptual, lo que sería muy complicado para un estudiante normal.



El día de hoy Ana recibe la visita de 4 niños, y cuenta con 3 barras de chocolate como las que se muestran en las imágenes, ¿qué cantidad le tocará a cada uno sin que sobre nada y se repartan la misma cantidad?

Pasos...

1. Entender qué entero o conjunto de elementos se *quiere repartir*, en este caso los chocolates serán el primer objeto de atención, como se van a repartir entre cuatro niños, se dividen en cuartos.
2. Ahora se señala la cantidad que le toca de cada barra por cada niño, observa que a cada uno le tocan dos pedazos que representan un cuarto de barra.
3. Entonces, ahora sí se debe entender que a un niño le toca un cuarto de la primera barra, un cuarto de la segunda barra y un cuarto de la tercera barra. En total si los junta serían tres cuartos de una barra como se muestra en la ilustración de abajo.
4. Para llegar a esa conclusión, primero se debe comprender que a cada niño le tocó un cuarto en cada barra, al comprobar que serían de él tres cuartos de barra, puede de un chocolate tomar los tres cuartos juntos cuya cantidad es igual, la forma de repartirse en sí sabiendo lo que les toca es ya otro problema que no debe afectar al resultado descubierto que es: ***a cada niño le corresponden ¾ (tres cuartos) de barra.***

Figura 10. Fracciones y sus conceptos. (Zabala, 2012, p.10).

Con un ejemplo más simple entender el concepto de cociente se vuelve más simple, por ejemplo, Ruiz (2013), propone un ejemplo con reparto de cartas, como se muestra en la figura 11, donde se representa a la fracción como cociente en una actividad de reparto de cartas, en la cual se pueden generar situaciones de reparto en contextos discretos, así, por ejemplo: repartir en partes iguales 10 cartas entre 5 personas, el resultado obvio es 2 cartas para cada persona.

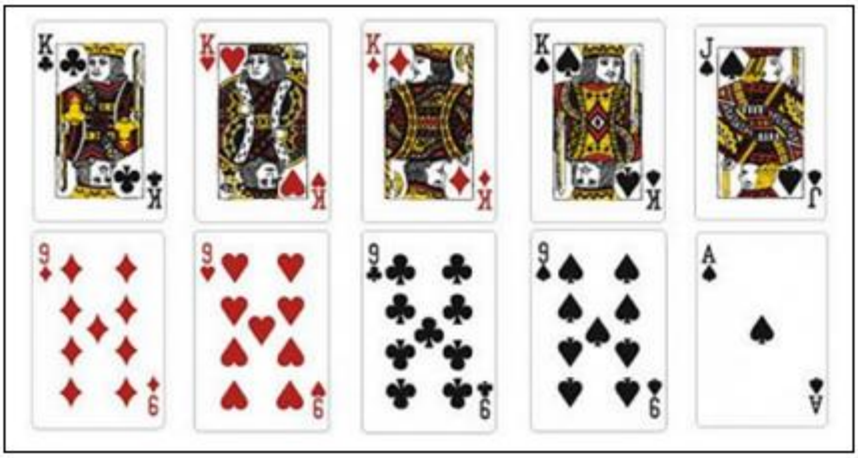


Figura 11. Cartas en un reparto.

2.1.2.3. Medida.

Al momento de pasar del número natural hacia el número racional, implica el entendimiento de los procesos de medición y partición de una unidad. Obando, Vanegas y Vásquez (2006) menciona: “El acto de medir es importante en el proceso de conceptualizar los números racionales, pues de ella se derivan las fracciones, cuando lo que se mide no es un múltiplo entero de veces la unidad patrón de medida usada” (p.63)

La medida como fracción puede representar facilidad al estudiante en ciertas circunstancias ya que, la acción de medir no siempre estará relacionada con una longitud, esta podría ser, área, volumen, tiempo, cantidad, masa, etc. Como afirma Dickson (1984), “a pesar que, esta forma de representar las fracciones provoca algunas dificultades a algunos niños entre edades de 8 a 12 años, también presenta algunas ventajas” (p.14). Las cuales se detallan a continuación.

- Se puede representar las fracciones impropias (aquellas fracciones que son mayores que la unidad) aparezcan de forma mucho más natural, así como la notación como números mixtos $1\frac{1}{3}$.
- El conjunto de las fracciones forma una extensión del conjunto de los números naturales, las fracciones rellenan los espacios existentes entre los números naturales.
- Las fracciones poseen una conexión con el concepto de medida, por medio del uso de escalas.

Por ejemplo, en la figura 12, se puede apreciar que la fracción 3/5 está representada dentro de la recta numérica entre el valor cero y uno. En este caso se puede pensar que el valor de la fracción no se relaciona con una parte de alguna figura, más bien, se reduce a un número abstracto, así como el 3/5 es un número entre el cero y el uno, el (8/5 o 1+3/5) es un número entre el uno y el dos.

$$1 + \frac{3}{5} = 1\frac{3}{5}$$

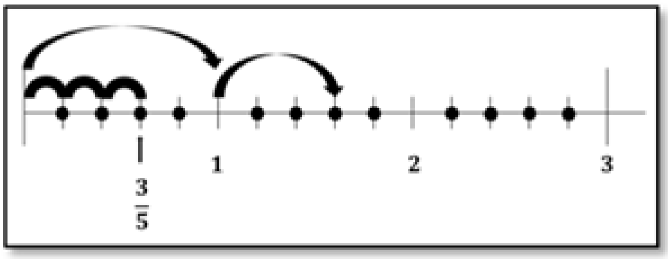
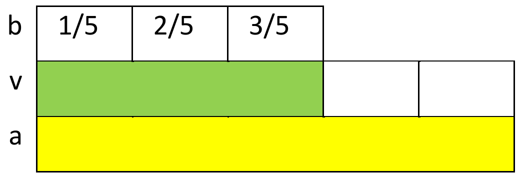


Figura 12. Fracción como medida.

A continuación, se muestran 2 ejemplos en los cuales se explica la utilización de las fracciones como medida, el, ejemplo 1 muestra una forma de encontrar el valor de una fracción, mientras que el ejemplo 2 muestra como una fracción puede ser representada de tres formas diferentes.

Ejemplo 1: Para este modelo se trazaron 3 filas de diferente color entre sí, a la fila amarilla se la denomina como la unidad, la fila blanca está segmentada representando las fracciones, mientras que la fila verde representa el valor que se desea conocer, así que la pregunta es: ¿Cuánto mide la fila verde?



Nomenclatura: a amarilla, b blanca y v verde

Primero se puede observar que cinco veces la fila blanca es una fila amarilla. La fila blanca es una de las cinco partes que forman a la amarilla, por lo tanto, se puede deducir que:

$$b = \frac{1}{5} \times a$$

Por consiguiente, la fila verde que es el valor que se desea conocer está conformada por tres filas blancas, por lo tanto, el resultado será:

$$v = 3 \times b$$

$$v = 3 \times \left(\frac{1}{5} \times a \right)$$

$$v = \frac{3}{5} a$$

Pr lo tanto la respuesta es que la franja verde mide los tres quintos de la franja amarilla.

Ejemplo 2: La figura 13, muestra las tres posibles maneras de representar un mismo problema, en la parte izquierda mediante una representación gráficas, en la parte intermedia por medio de una expresión verbal y en la parte derecha una representación simbólica.

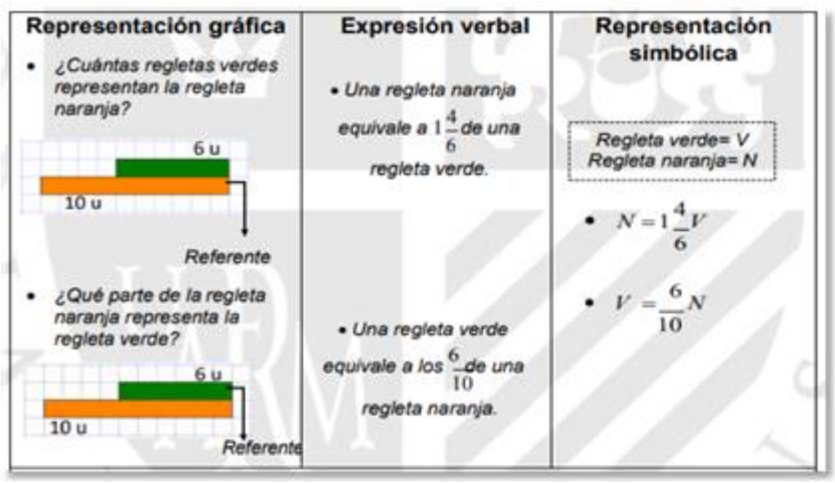


Figura 13. Fracción como medida. (Castro, 2017).

La relación parte todo (tanto en su representación continua como su representación discreta), constituye el fundamento para el entendimiento de las fracciones como medida, es decir que están tan relacionadas que son necesarios estos conceptos para un completo entendimiento de las fracciones.

2.1.2.4. Razón.

La fracción como razón es definida por Kieren (1980), como "La comparación numérica entre dos magnitudes, este concepto permite interpretar a la fracción como un valor numérico que resulta de la comparación entre dos cantidades, ya sea de igual o diferente magnitud" (p.23). Las razones pueden ser comparaciones parte-parte en un conjunto o comparaciones parte-todo. Por ejemplo, en la figura 14, se observa que la relación entre la altura del muñeco A es 3/5 de la B: (3 ÷ 5) y la relación entre la altura del muñeco B es 5/3 de la A: (5 ÷ 3).

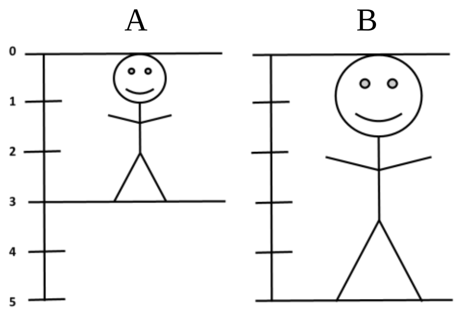


Figura 14. Ilustración de ejemplo.

La relación existente entre los conceptos de razón y fracción en el proceso educativo es en ocasiones confusa para un gran número de estudiantes: las razones normalmente se definen del mismo modo que las fracciones, lo que genera que se pregunten inquietudes como, por ejemplo, ¿para qué necesitamos las razones si ya tenemos las fracciones?, lo que muchas veces es difícil para los profesores responder a ese tipo de inquietudes.

El concepto de "razón" ha sido objeto de varios estudios, independientemente de la relación de esta tenga con las fracciones. Kieren (1988) afirma: "En los estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales, las razones son tratadas como uno de los significados (o constructos) posibles de las fracciones" (p.16). Lo que significa que la fracción (a/b) no representa la partición de ningún objeto, más bien representa la relación entre dos cantidades.

Dicha comparación se realiza entre las cantidades dadas por el numerador y el denominador, por lo que se concluye que, el orden de los valores es primordial en el entendimiento de la fracción.

Una de las investigaciones que se realizaron acerca de las razones con las fracciones, fue la realizada por Brousseau (1981), donde afirma “las razones desempeñan un papel necesario, como precursoras de las fracciones” (p.3). Sin embargo, no fue el único en reconocer su importancia, posteriormente Rouche (1992) afirma: “El interés de la noción de razón durante el aprendizaje de las matemáticas parece ocurrir, sobre todo, antes de que ésta se exprese con una fracción o bien independientemente de la fracción” (p.2).

La fracción tiene significado de razón cuando se pretende representar la relación entre dos cantidades o conjuntos de unidades. En una razón el primer elemento o numerador, se le conoce como antecedente, y al segundo elemento, o denominador, se lo conoce como consecuente. Por lo tanto, se concluye que en la interpretación de la fracción como razón se encuentra implícito la relación “todo-todo” o “parte-parte” y se puede comparar el “todo” con la “parte” o la “parte” con el “todo” como una razón. Es decir, si se tiene un número a y un número b, la razón entre ellos se representa mediante la fracción a/b. Por ejemplo:

- La razón entre 6 y 2 es 3, ya que 6/2=3
- La razón entre 1 y 0,2 es 5, ya que 1/0,2=5
- La razón entre 100 y 10 es 10, ya que 100/10=10

Para el caso de la comparación entre cantidades discretas de dos colecciones de objetos, el conjunto que se quiere dividir es discreto y el número de objetos es múltiplo de las partes, por lo tanto, una representación de los objetos, puede visualizar el problema de reparto, considerando que una magnitud es discreta si no tiene infinitos valores dentro de cualquier intervalo finito. Ver figura 15.

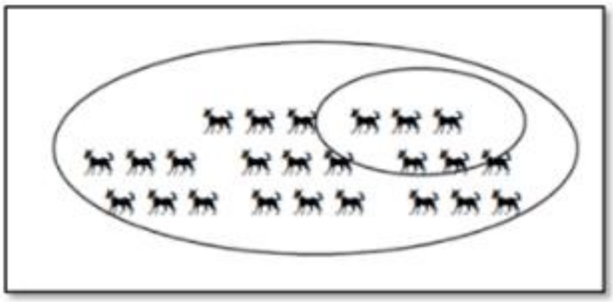


Figura 15. Representación gráfica discreta. (Robles, 2012).

A continuación, se muestran algunos ejemplos en donde la fracción es tratada como razón:

Ejemplo 1: Si se presenta dos barras, la primera mide 20 cm de longitud y la segunda mide 25 cm, se puede afirmar que la primera barra representa 4/5 de la segunda barras. Por lo tanto, si las dos barras a las que llamaremos V1 y V2 poseen una relación de 4/5, estas pueden poseer diferentes medidas, pero guardando la misma relación o razón. En la figura 16, se puede observar las posibles medidas de las barras mencionadas. Además, es posible que intercambien los elementos si la relación se expresa de manera diferente. Así, se diría que el V2 son los 5/4 del V1, pudiendo afirmar que V1 y V2 están en relación de 4/5, y V2 y V1 están en relación de 5/4. Estas dos afirmaciones significan lo mismo ya que en cierto sentido son intercambiables.

Varilla V1	8	12	16	.....	**A**
Varilla V2	10	15	20	.....	**B**

Figura 16. Representación gráfica de las varillas.

Ejemplo 2: La fracción como razón también se puede usar con cantidades discretas. Así, si tenemos una caja en la que se encuentran 9 naranjas y 12 manzanas, entonces se diría que, en esa caja, la cantidad de naranjas es ¾ de la cantidad de manzanas.

Al momento de realizar la comparación entre dos partes de un todo, algunos investigadores creen que, para algunos estudiantes, es más complicado entender el concepto de fracción dentro de un conjunto discreto de objetos. Puede suceder el caso en donde no se tome el conjunto completo como el entero y caracterizan cada parte asociando a numerador y denominador. Por ejemplo, si se le entrega a un grupo de niños 9 fichas las cuales, 3 fichas se encuentran sombreadas y 6 fichas sin sombrear y entonces se les pregunta: "¿Qué parte de estas fichas están sombreadas?, algunos niños responden "3/6". Ver figura 17.

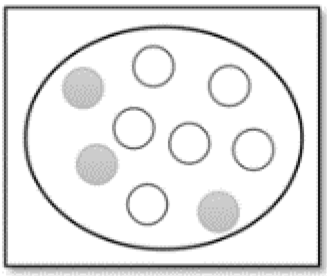


Figura 17. Representación gráfica de ejemplo de fracciones.

2.1.2.5. Operador.

La fracción a/b empleada como operador se define como el número que modifica un valor particular que llamaremos (n), mediante la multiplicación por un valor (a) y dividiéndolo por un valor (b). Este proceso hace actuar a la fracción como un trasformador o función de cambio de un determinado estado inicial. Además, el operador fracción puede actuar sobre objetos y relacionarlos entre sí, con respecto a cantidades y valores de magnitud como con los números, longitud o peso. Por ejemplo, si se aplica la fracción (2/3) al valor de 90, este reduce esta cantidad a un valor de 60. "Los porcentajes son un caso particular de fracción como operador, el símbolo (a/b) representa la manera en que un objeto o una cantidad se transforman". (Kieran, 1981, p.5).

La idea del operador en las fracciones se realiza con el fin de describir a los números racionales como mecanismos, debido a que se procede a asignar un conjunto multiplicativamente en otro conjunto. Kieren (1980) afirma: "Esta idea de operador, fija la atención de los números racionales como elementos dentro del álgebra de funciones" (p.136). Según Freudenthal (1994): "El correcto entendimiento de este concepto, ayudara a que los estudiantes obtengan una mayor facilidad al momento de resolver problemas en los cuales se encuentre presente la multiplicación de fracciones" (p.36).

A continuación, se muestran unos ejemplos de las fracciones como operador.

Ejemplo 1: Se considera a un conjunto de niños conformado por un total de 36 alumnos toma como una situación de partida (estado-unidad), en la cual se le aplica el operador de 2/3, este nos da como resultado el valor de 24 niños o representado en forma de fracción, 2/3 de los niños, tal como se ve en la figura 18.

Estado – Unidad (situación)	Operador	Estado Final
36 niños 	Dividido por 3 Multiplicado por 2	24 niños 

Figura 18. Representación gráfica de ejemplo de porcentaje.

Al trabajar con fracciones, el operador presenta un orden en cuanto se refiere a la multiplicación y división, primero se trabaja con la división y posteriormente con la multiplicación, así se permite establecer el concepto de parte-todo. Es importante recalcar que de esta manera las fracciones representan una doble función, la primera es que describe una acción a realizar lo que llamamos operador, y la segunda describe una situación. Si regresamos al ejemplo de la figura 18, se puede observar que se utilizaron ambos aspectos. De forma sistemática, si se representa todo del ejemplo como una unidad, es decir igual a "1" y se procede a aplicar el operador "2/3" por uno, el resultado final que se obtendrá será de 2/3 tal y como se puede ver en la ver figura 19.

Estado – Unidad (situación)	Operador	Estado Final
1	Dividido por 3 Multiplicado por 2 $x\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Figura 19. Representación gráfica de ejemplo de fracción.

Ejemplo 2: En la figura 20, se puede observar un ejemplo en el cual se pretende obtener la cantidad específica de cada tipo de animal dentro de una granja, a partir de conocer el valor que cada tipo de animal representa como fracción.

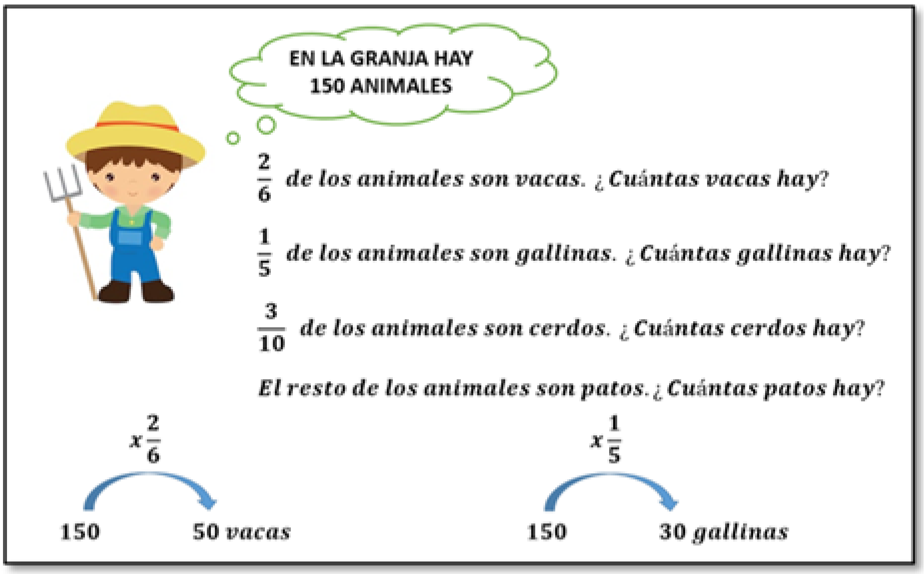


Figura 20. Significados del número racional.

2.1.2.6. Conclusiones

Los conceptos explicados anteriormente, están estrechamente relacionados con la naturaleza de los números racionales y representan las diferentes situaciones donde se utilizan las fracciones. Tal como sugiere Freudenthal (1983) “Las características epistemológicas y fenomenológicas de estos significados se reflejan también a nivel cognitivo, al mostrarse como condicionantes de la comprensión que los estudiantes poseen de la fracción”. (p.35)

Dentro del tema de fracciones hay varios procesos para solucionar los diferentes problemas. Saíz (1990) informa "existe un gran número de reglas para sumar fracciones que tengan el mismo denominador y otras reglas para fracciones con diferentes denominadores, además de una gran cantidad de reglas para varias otras operaciones con fracciones" (p.26).

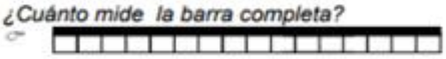
Las fracciones pueden ser interpretadas dependiendo de lo que se quiera representar, por ejemplo, el mismo valor de ¾, podría representar todas las siguientes situaciones:

- Un terreno que fue dividido en 4 partes iguales, donde se han tomado ¾ del terreno, en este caso este ejemplo representa el significado parte-todo.
- Si se tiene un salón de clases, donde se sabe que el total de hombres representa el valor de ¾ del total de estudiantes, esto significa que, por cada 4 estudiantes, un total de 3 resulta que son hombres, en este caso la fracción representa una razón.
- Se desea repartir 4 pasteles entre 3 diferentes personas, en este caso el valor de ¾ representa la forma en la que se realiza la partición de los pasteles en partes iguales, bajo esta situación la fracción representa el significado de cociente.
- El valor numérico de ¾, también puede ser utilizado para realizar una comparación entre cantidades, por ejemplo, se tiene 2 barras una de 3 metros y la otra de 4 metros se puede representar como que, una barra mide ¾ de la otra, en este caso la fracción es usada como medida.

Así como se pudo observar con los ejemplos anteriores, todos los diferentes significados de las fracciones están relacionados con la situación en la que una fracción es utilizada, por lo tanto, dependen del contexto que se maneje. Es por este motivo que los estudiantes en una gran mayoría no logran establecer una clara diferenciación y una correcta construcción de todas esas reglas y menos en poco tiempo, por lo cual ellos tienden a memorizarlas mecánicamente. Es en esos momentos, cuando surge complicaciones como: confusiones de las reglas, olvidos de las mismas, e incluso el poco o nulo uso de las fracciones en situaciones de la vida cotidiana.

En la tabla 1, se muestran de una manera resumida los significados de las fracciones con un ejemplo para su mejor entendimiento.

Tabla 1. Significados de Fracciones. (Aspauza, 2011).

Universo de significados	**Objetivos**	**Enunciado de Ítems**
Parte-todo (continuo)	Interpretar una situación problemática, enunciada en forma verbal, de la fracción en su significado 'parte-todo continuo' proponiendo una explicación simbólica y gráfica.	**[S1]** *Si divide una naranja en cuatro trozos iguales, de los cuales come tres, ¿qué fracción de naranja le queda?*
Parte-todo (discreto)	Interpretar una situación problemática de la fracción, enunciada en forma verbal, en su significado 'parte-todo discreto' proponiendo una explicación simbólica y gráfica.	**[S2]** *Si tienes tres lapiceros de color rojo y cuatro de color azul, ¿qué fracción del total de lapiceros son de color azul?*
Cociente	Interpretar una situación problemática, enunciada en forma verbal, de la fracción en su significado como "cociente" y explica el reparto usando símbolos y gráficas.	**[S3]** *Tres amigos quieren repartirse 5 barras de chocolate de manera equitativa, ¿qué cantidad de chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?*
Medida	Interpretar una representación gráfica lineal que trasmite el significado de la fracción como 'medida' y traduce a representación simbólica.	**[S4]** *Utilizando esta unidad de medida:*  *¿Cuánto mide la barra completa?* 
Razón	Interpretar el enunciado problemático que involucra fracciones en su significado de 'razón' a través de una explicación simbólica y o gráfica.	**[S5]** *Para elaborar una torta, se necesitan cuatro kilos de harina y nueve huevos, ¿cuál es la razón entre la cantidad de harina y huevos?*
Operador	Identificar la fracción en su significado como 'operador' y lo utiliza para la solución de una situación problemática.	**[S6]** *En un salón de 35 estudiantes aprueban matemática solo 4/5. ¿Cuántos aprueban matemática?*

Desde edades muy tempranas los estudiantes logran aprender el tema de fracciones, una vez que estos han logrado entender correctamente lo que significa el numerador, el denominador y logran hacen operaciones fraccionarias, interpretando los resultados para llegar a proponer soluciones válidas. La comprensión de la fracción requiere que, las tareas matemáticas dentro del aula de clases involucren una mayor cantidad de ejemplos prácticos donde se requiera el uso de los distintos significados de las fracciones, la relación parte-todo, la fracción como cociente, como razón, como porcentaje y como operador.

El aprendizaje y correcto entendimiento del tema de las fracciones depende de conocer ciertas particularidades como señala Clarke & Sukenik (2006), los cuales son los siguientes:

- Para el estudio de las fracciones se requiere de un adecuado entendimiento de sus significados explicados anteriormente.
- Las fracciones normalmente presentan ciertas dificultades al momento de entender los diferentes significados, sin embargo, en algunos casos es más fácil de comprender como, por ejemplo, el significado de parte-todo suelen ser más comprensibles que el significado de la medida.
- El dominio en el aprendizaje de unos determinados significados conduce a la interferencia en el entendimiento de los otros significados.
- El estudio de las fracciones se ve obstaculizado por propuestas curriculares que priorizan el aprendizaje de solamente ciertos significados, por ejemplo, parte–todo o cociente, en contraparte de otros como lo serian la medida, razón u operador.

A lo largo de los años se han realizado varios estudios sobre la enseñanza de las fracciones en el nivel básico de educación. Según señala Fandiño (2005): “desde que empezó el estudio de la matemática dentro del sistema educativo, las fracciones son de los temas más conflictivos debido a que representan una de las áreas con mayor dificultad entre un gran porcentaje de estudiantes” (p.11). Esto es respaldado por Perera y Valdemoros (2007), los cuales afirman “Las fracciones son uno de los contenidos dentro de las matemáticas que presentan una gran dificultad ya sea para la enseñanza o el aprendizaje, especialmente en los niveles básicos de educación” (p.6).

También existe el hecho de que los estudiantes cometen varios errores basados en la analogía de fracción como parte-todo, como es el caso de las fracciones impropias. Por ejemplo, si tenemos el valor de 3/2, muchos de los estudiantes se preguntan ¿Cómo podemos tomar tres partes de un todo que fue dividido en dos? esto claramente se debe a la falta de entendimiento de los significados. Ese problema se puede explicar gráficamente tal como se muestra en la figura 21.

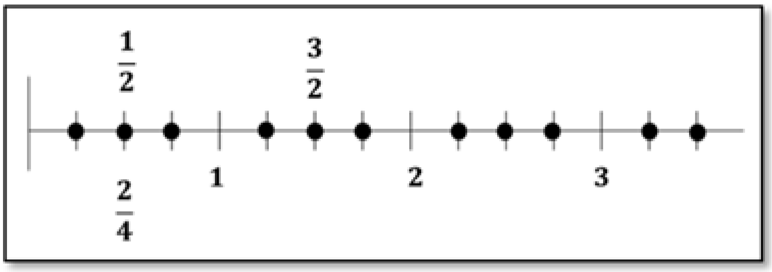


Figura 21. Representación gráfica de las fracciones en la recta numérica.

Con el ejemplo anterior se puede concluir que el concepto de fracción como partes del todo, en ocasiones genera confusión y dificultad en entendimiento adecuado del concepto, creando una dependencia al uso de objetos concretos cuando se trabaja con fracciones.

Basándose en las relaciones fundamentales de las fracciones, Vergnaud (1983) afirma que:

> La relación “parte-todo” y la relación “parte-parte” presenta varias tipologías básicas, utilizadas para la adquisición de ese contenido matemático. En una de ellas, indica que los estudiantes requieren de la habilidad necesaria para comprender que un “todo” se encuentra siempre formado por varios otros elementos que separados y que una fracción determina cierto número de partes. Otra tipología señala que el “todo” puede ser exhaustivamente subdividido, es decir que se lo puede dividir en infinidad de partes, sin embargo, no se puede subdividir partes del “todo” y simplemente ignorar las otras partes. (p.25)

Es importante que los docentes entiendan que el aprendizaje del concepto de fracción no puede ser dirigido exclusivamente sobre la base de las definiciones, según señala Ávila (1989) “las fracciones significan una representación equitativa y es necesario realizar varios ejemplos para que los estudiantes entiendan el reparto como una fracción parte de todo y así poder reconocer las equivalencias entre los diferentes tipos de fracciones que existen.” (p.3)

El correcto entendimiento de las fracciones depende de cómo se entienda cada significado, por lo tanto, es necesario aclararlos. Vergnaud (1983) considera que:

> La formación de un concepto o significado de las fracciones, no se basan en aspectos prácticos, ni teóricos, además que no se limita a la manipulación de objetos, sino más bien involucra aspectos mucho más amplios a los cuales llama campos conceptuales. (p.13)

El entendimiento de fracciones es más complejo de lo que a primera vista se muestra tal como sugiere Llinares y Sánchez (1997):

> Llegar a la comprensión del concepto de fracción es un largo camino, debido principalmente a sus múltiples interpretaciones, sin mencionar, a las ya establecidas desde el lenguaje cotidiano, cuestión que suele estar presente en los procesos de aprendizaje de estos temas. (p.17)

2.1.3. Tipos de fracciones.

2.1.3.1. Fracciones propias.

Una fracción es propia cuando el valor del numerador es menor que el valor del denominador y su valor se encuentra comprendido entre cero y uno. Por ejemplo, una carrera cuyo recorrido total representa la unidad y tiene una distancia de 1 kilómetro, en esta el corredor Juan tiene que llegar a la meta. En la figura 22, se muestra una recta que representa la posición exacta del corredor Juan en un instante específico de la carrera.

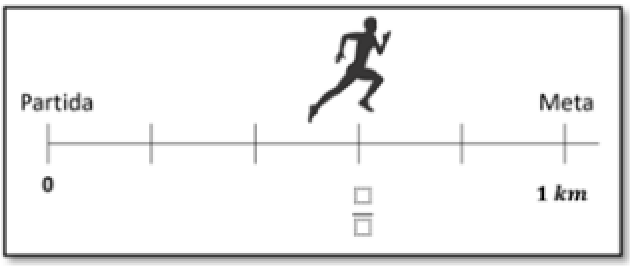


Figura 22. Ejemplo de la carrera.

En este caso, todo el tramo de la carrera ha sido segmentado entre 0 y 1, obteniendo así 5 segmentos de igual longitud, por lo cual se evidencia que Juan está sobre la tercera marca, es decir ha recorrido 3 veces 1/5 o 3/5 de kilómetro. Para poder determinar un punto dentro de la recta numérica, se deben considerar las partes en que se ha dividido el trayecto, y posteriormente sumar el total de segmentos hasta llegar al punto que se desea identificar en este caso el lugar donde se encuentra el corredor. Así, gráficamente se obtiene tal y como se muestra la figura 23.

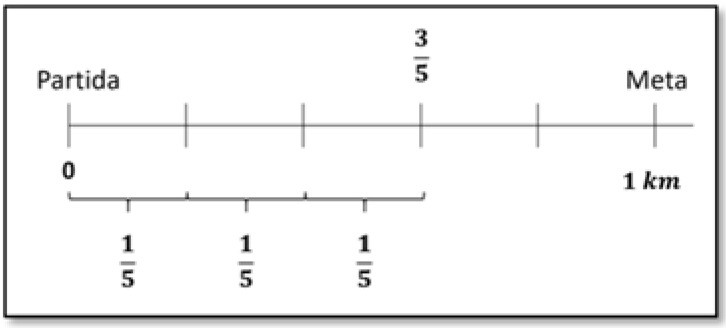


Figura 23. Ejemplo de la carrera con fracciones.

2.1.3.2. Fracción impropia.

Se denomina como fracciones impropias a aquellas fracciones en las cuales el número de la parte superior, al cual llamamos numerador, es mayor al número de la parte inferior o denominador, esto significa que las fracciones impropias son siempre mayores que la unidad. Este tipo de fracciones posee la cualidad de que pueden ser representados como la suma de número natural más una fracción propia.

Las fracciones impropias son útiles para hacer operaciones con fracciones y enteros, o con fracciones y números mixtos, ya que nos permiten manejar solamente un tipo de números, lo que facilita obtener el resultado, que en muchos casos puede ser una fracción impropia o se lo puede convertir en número mixto. Por ejemplo: En una jarra de 4 litros, agregamos 2 litros de agua, luego agregamos otro 1/2 litro, después sacamos 3/4 de litro, agregamos 1/2 litro, y luego sacamos 3/4. Si en este problema, se usa número enteros y fracciones, se hace sumas y restas se obtiene que en la jarra queda 1 litro y medio.

2.1.3.3. Fracciones mixtas.

Una fracción mixta o también llamado número mixto, es una fracción que se encuentra conformado por una parte entera y otra parte fraccionaria. Es importante destacar que la construcción de este tipo de números se realiza a partir de las fracciones propias y la necesidad de cuantificar cantidades mayores que un entero. Si se requiere comparar los valores de dos diferentes fracciones mixtas, primero se tiene que revisar la parte entera de ambos valores y posteriormente si la parte entera de ambos son iguales, se procede a comparar las fracciones propias correspondientes. Por ejemplo, en la figura 24, se tiene 2 diferentes fracciones mixtas, las cuales en ambos casos tiene el valor de 1 como parte entera, por tanto, para saber cuál de estos números es mayor, se procede a comparar las partes fraccionarias.

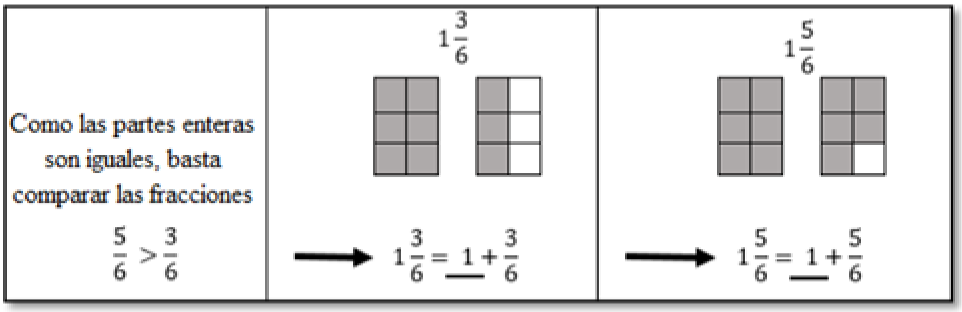


Figura 24. Ejemplo de números mixtos.

2.1.3.4. Fracción decimal.

Una fracción decimal es una representación de las fracciones en la cual el valor del entero ha sido separado en decenas, centenas etc. Esto quiere decir que, para una fracción decimal, el denominador es siempre una potencia de diez (10, 100, 1000, 10000…, etc.) es decir, la unidad seguida de ceros. Por ejemplo, el valor decimal 0.8 puede ser representado como fracción 8/10 o el valor de 0.05 puede ser la fracción 5/100. Linares y Sánchez (1997) indican que: “las fracciones decimales derivan de una estandarización de la relación parte-todo, debido a que este sistema se basa en la división de un todo en un valor especifico en este caso una potencia de diez” (p.6). Por ejemplo, si se tiene un cuadrado y este ha sido cortado en 100 partes cada parte es 1/100 o una centésima.

Es importante recalcar que las fracciones decimales y los números decimales representan los mismos conceptos y que esto pude generar confusión entre los estudiantes, así como mencionan (Owens y Supper, 1993) “para el estudiante es una idea difícil de asimilar que cualquier concepto, especialmente que un número pueda tener más de un símbolo para representarlo” (p .3).

2.1.3.5. Fracción como porcentaje.

La fracción como porcentaje es cuando el denominador de una fracción es 100 es decir el porcentaje genera una representación basado en números derivados entre 100. Según señala Parra (2004) “hablar de porcentaje es hablar del tanto por ciento” (p. 6). El signo para representar al porcentaje es [%], este símbolo siempre va después del valor numérico por ejemplo 25%. El concepto de porcentaje es bastante conocido independientemente del nivel de educación de las personas ya sea en mayor o menor medida. El porcentaje es aplicable ya sea para valores discretos, por ejemplo, el número de personas o a valores continuos por ejemplo el área de un terreno.

El paso de un tipo de magnitud a otro puede contribuir de manera importante a la comprensión de la noción de porciento, como se puede ver en los siguientes ejemplos, en los cuales se muestra el uso del porcentaje.

Ejemplo 1: En un recipiente se colocan 3 cucharadas de jugo de limón por cada 4 cucharadas de azúcar, por lo tanto, el total de cucharadas sería de 7, por ende, la resolución consistiría en: 3 cucharadas de limón sobre 7, representando un porcentaje de (42,86%) y 4 partes de azúcar sobre 7 representando un porcentaje de (57,14%).

Ejemplo 2: Por cada 100 ecuatorianos hay 20 que son fumadores, es decir que, el 20% de la población del 100% son fumadores. Usando el mismo modelo de ejemplo se puede decir que en el Ecuador existe una mujer por cada 9 hombres es decir que los hombres representan el 90% de la población. (Estos datos no representan la realidad, son únicamente con fines explicativos).

Ejemplo 3: Si se requiere realizar una comparación entre dos cantidades de una misma magnitud continúa se puede hacer el siguiente ejemplo. Se tiene 2 segmentos A y B respectivamente, tal como se ve en la figura 25, donde la longitud del segmento A es 2/3 de la del segmento B y la longitud del segmento B es 3/2 de la del segmento A. Por consiguiente, A es el 66,66% de B y B es el 150% de A.

Figura 25. Ejemplo de fracción como porcentaje.

Ejemplo 4: Un contenedor en forma de cilindro está lleno de pelotas de 2 colores azul y verde tal como se ve en la figura 26. La razón o relación entre las pelotas verdes y azules del cilindro es de tres cuartos (3/4), esto es igual que (75/100) por lo tanto el porcentaje de las pelotas verdes es del 75% de las pelotas del cilindro.

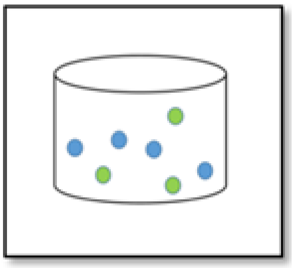


Figura 26. Ejemplo de fracción como porcentaje 2.

2.1.3.6. Fracciones equivalentes.

Las fracciones equivalentes hacen referencia a fracciones con un valor similar, esto significa que representan la misma situación de reparto. Así, dos fracciones comunes son consideradas equivalentes cuando tienen el mismo valor (Skemp, 1986). Por ejemplo, las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}\ y\ \frac{x}{2x}$ son todas equivalentes, ya que representan la cantidad un medio.

Las fracciones son equivalentes cuando se puede obtener el mismo valor entre las fracciones ya sea multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número, es decir se realiza el proceso de simplificación, por ejemplo.

2/4	Después de simplificar el resultado es estas fracciones, el resultado es:	2/4 = 1/2
3/6		3/6 = 1/2
4/8		4/8 = 1/2

Como se ve en el ejemplo anterior todas las fracciones de la izquierda son equivalentes ya que todas las fracciones representan el valor de ½.

Las fracciones equivalentes están relacionadas con los números racionales, esto es debido a que, el número racional es el conjunto de todas las fracciones que son equivalentes a una fracción dada, por lo tanto, se puede representar de la forma a/b, donde a y b son números enteros y b debe ser un entero positivo diferente de cero.

Para entender el concepto de fracciones equivalentes, es importante el uso de otras representaciones, tal y como sugiere Hincapié (2011), el uso de diferentes representaciones y diferentes situaciones le brindan sentido al concepto que se quiere construir.

A continuación, se detallan algunos ejemplos en donde se hace uso de las fracciones equivalentes.

Ejemplo 1: al hablar de fracciones equivalentes y considerar el círculo de la figura 27, como una unidad, se puede establecer que cada color ocupa una fracción. En este caso, la distribución es: las regiones celestes y rojas ocupan la misma parte de la unidad. Por tanto, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ y se afirma que las fracciones son equivalentes. Las regiones amarillas y verdes ocupan la misma parte de la unidad. Por tanto, $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ y se afirma que las fracciones son equivalentes.

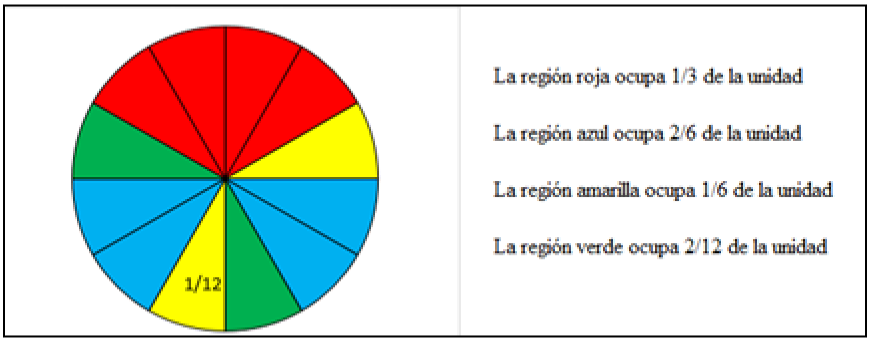


Figura 27. Fracciones equivalentes. (Ministerio de Educación 2016).

Ejemplo 2: se puede obtener fracciones equivalentes a $\frac{15}{60}$ mediante la aplicación de la ampliación y la simplificación.

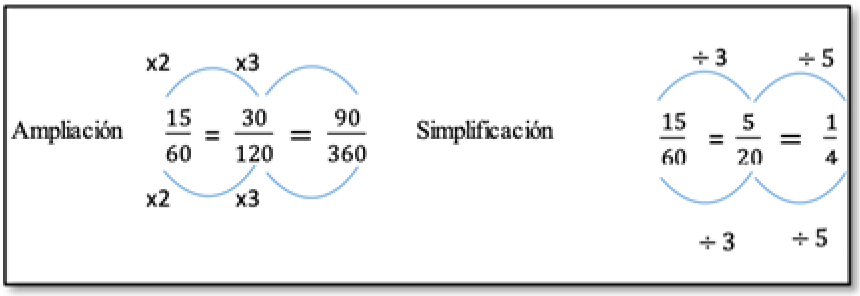


Figura 28. Fracciones equivalentes, simplificación y ampliación.

Ejemplo 3: al hablar de fracciones equivalentes el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

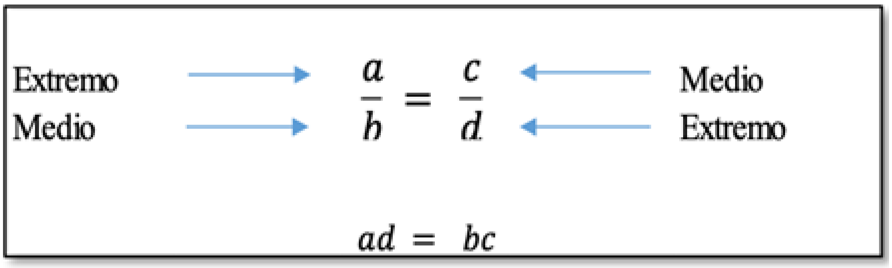


Figura 29. Fracciones equivalentes.

2.1.3.7. La fracción como probabilidad.

Las fracciones pueden ser usadas también para representar la probabilidad de que ocurra un evento, ya que el numerador de la fracción representa el número de casos favorables que ocurra el suceso y el denominador representa el número de casos posibles. Por ejemplo, si se tira un dado la probabilidad de que salga el número 6 es de 1/6, debido a que un dado tiene 6 lados. No obstante, la probabilidad es muy parecida a la definición parte todo, en este caso se asume que el numerador son los eventos favorables (parte) y el denominador como los eventos posibles (todo).

2.1.3.8. La fracción como proporción.

Una proporción se presenta por medio de una igualdad entre dos fracciones, en la que el producto cruzado entre los numeradores y denominadores da como resultado valores iguales. Así según indican Batanero y Godino (2002): "Cualquier intercambio entre los valores tanto de los numeradores como de los denominadores de las dos fracciones que no afecte el producto en cruz, dará origen a una nueva proporción" (p.9). Tal como se muestra en la figura 30, en donde con 2 fracciones se crearon cuatro proporciones.

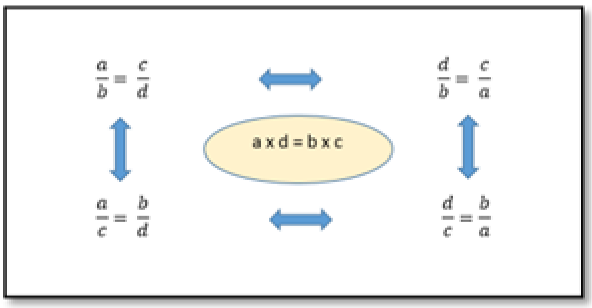
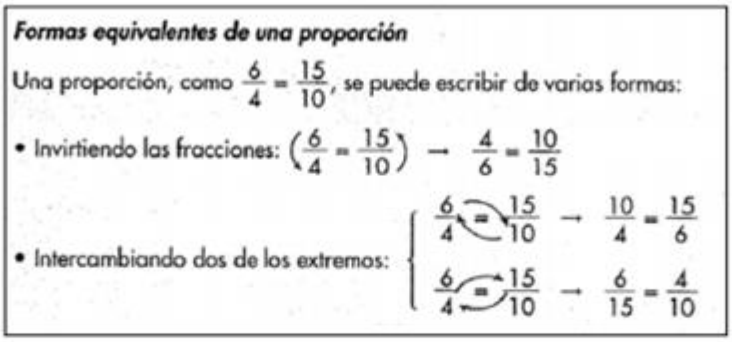


Figura 30. Ilustración de la proporción.

En la figura 31, se muestra el concepto anterior en un ejemplo numérico para mostrar las formas equivalentes de una proporción.



Formas equivalentes de una proporción

Una proporción, como $\frac{6}{4} = \frac{15}{10}$, se puede escribir de varias formas:

- Invirtiendo las fracciones: $\left(\frac{6}{4} = \frac{15}{10}\right) \rightarrow \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$
- Intercambiando dos de los extremos: $\begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{15}{10} \rightarrow \frac{10}{4} = \frac{15}{6} \\ \frac{6}{4} = \frac{15}{10} \rightarrow \frac{6}{15} = \frac{4}{10} \end{cases}$

Figura 31. Forma equivalente de una proporción. (Álvarez, 2002, p. 78)

Normalmente al momento de trabajar con las proporciones se establece que una de las fracciones tendrá un valor desconocido, el cual debe ser hallado con la razón de proporcionalidad.

2.1.3.9. Comparación de fracciones unitarias.

Las fracciones unitarias son las más simples al momento de empezar el estudio de las fracciones, ya que usa el concepto de que un todo es dividido equitativamente, por lo que es recomendable empezar el estudio con este tipo de comparaciones. Por lo tanto, se diseñan actividades con apoyo de material concreto, cuya estrategia se enfoque en la comparación de fracciones unitarias, permitiendo que los estudiantes reconozcan que mientras mayor es el denominador, la fracción es menor. Por ejemplo, se propone cuantificar 1/5 de cuadrado y 1/10 de cuadrado, para profundizar en esta idea se puede presentar una representación como la que aparece en la figura 32 y luego preguntar: ¿A qué fracción de un entero corresponde cada parte? ¿Es mayor 1/5 que 1/10? ¿Se pueden comparar?

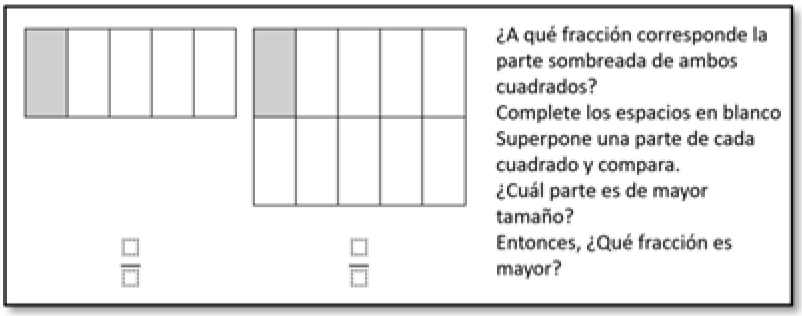


Figura 32. Comparación de fracciones.

El proceso consiste en superponer ambas partes de las fracciones y deducir que la pieza que corresponde al valor de 1/5 tiene un mayor tamaño que la pieza que corresponde a la de 1/10; por tanto, pueden establecer que la fracción 1/5 es mayor a 1/10. Es posible apoyar esta idea con situaciones más prácticas, por ejemplo, no es lo mismo comerse 1/2 de una pizza de tamaño individual a comerse 1/2 de una pizza de tamaño familiar, por tanto, para comparar dos fracciones es necesario que hagan alusión al mismo referente.

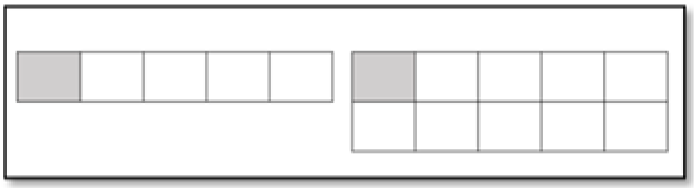


Figura 33. Comparación de fracciones.

Por lo tanto, cuando el denominador de una fracción unitaria es muy grande, se hace más pequeña la fracción en relación al entero, es decir que el entero se ha fraccionado en más partes.

2.1.4. Representación de Fracciones.

Dentro de las matemáticas es necesario que exista una forma de representar diferentes conceptos, para que estos sean más entendibles y fáciles de manipular, además de poder realizar diferentes operaciones, en el caso de las fracciones estas formas de representación deben ser polimorfos, lo que significa que pueden tener varias formas.

Las fracciones pueden ser representados dentro de diferentes campos ya sea verbal, numérico o gráfico, más adelante se aclarará a mayor detalle dichos campos. Sin embargo, es importante recalcar que estas representaciones presentan diferentes grados de dificultad, por lo tanto, es necesario estudiar cómo estas representaciones se relacionan unas con otras, para que posteriormente se pueda desarrollar experiencias más fáciles para el estudiante y poco a poco introducir contextos y situaciones más difíciles.

2.1.4.1. Representación numérica.

La representación numérica puede presentar varias formas para expresar el mismo resultado tal como se detalla a continuación:

- *Notación usual:* La manera convencional de representar las fracciones es mediante el numerador y el denominador separados por una línea horizontal, por ejemplo $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5},$ etc.
- *Decimales:* 0.5
- *Porcentajes:* 50%
- *Sistema sexagesimal:* (Horario) 12:15:30
- *Equivalencia:* $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
- *Número mixto:* $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

2.1.4.2. Representación verbal.

En el caso de la representación verbal, es el lenguaje en que determina como se representa las fracciones, empezando por el numerador seguido del denominador con la notación correcta (medios, tercios, cuartos, etc.). Por ejemplo, la fracción 1/2, mediante la notación verbal se escribe como (un medio).

2.1.4.3. Representación gráfica.

Para representar fracciones de forma gráfica, se tiene dos diferentes formas, la primera mediante una representación en forma de grafico continuo y la segunda la representación de forma de gráfico discreto.

a. *Representación en forma de gráfico continúo.*

Dentro de esta forma de representación se tienen 2 modelos, el primero, modelo de áreas, y el segundo modelos lineales.

Modelos de áreas: Este tipo de representación, está conformada por una figura geométrica, principalmente un rectángulo o un circular, el cual es dividido en secciones del mismo tamaño según indique el denominador de la fracción, donde se procede a colorear la sección o secciones según indique el numerador tal como se muestra en la figura 34.

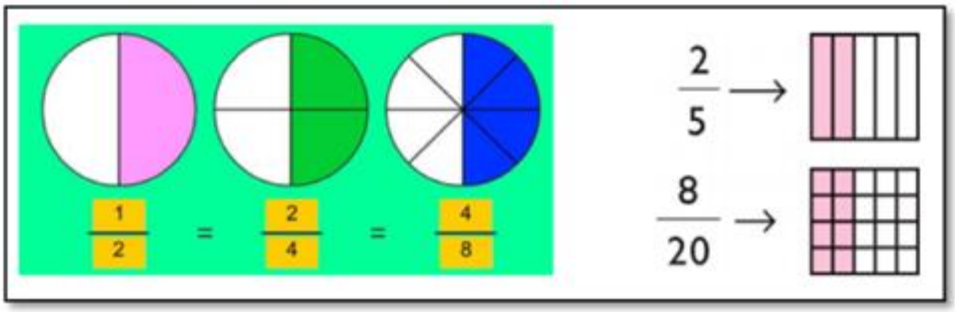


Figura 34. Modelos de áreas. (Robles, 2012).

Modelos lineales: Las fracciones pueden ser representadas en una recta numérica del mismo modo que se representan los números naturales. Según señaló Whitehead (1944) "las fracciones son números dentro de la recta numérica, los cuales se presentan por medio de una marca entre el principio [0] y el final de la recta [X], la cual se pude prolongar indefinidamente, tal como se muestra en la figura 36, donde las letras (O, A, B, C, D) representan los números enteros y las letras (M, N, P, Q) representan un valor fraccionario". (p.16).

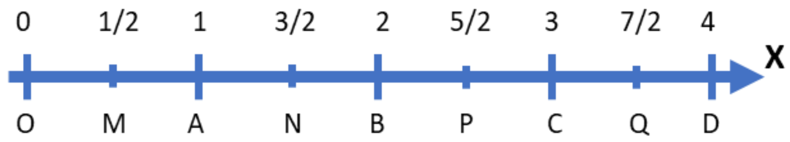


Figura 35. Los números racionales en la recta numérica.

La representación por medio de la recta numérica en ocasiones genera dificultades a los estudiantes, por ejemplo, dentro de un salón de clases un profesor pidió a un grupo de estudiantes determinar la fracción que representa el punto marcado sobre la siguiente recta numérica tal como se muestra en la figura 36.

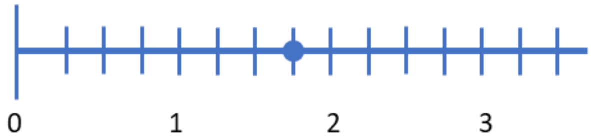


Figura 36. Recta numérica donde el punto representa la fracción a encontrar.

En este ejemplo, los estudiantes presentaron tres diferentes respuestas las cuales eran: 3/4, 8/3 y 7/4. Esto se debe a que los estudiantes no lograron comprender correctamente el uso de la recta numéricas, sin embargo, si se les enseña el proceso adecuado estos deberían llegar a la solución correcta.

A continuación, la figura 37, ilustra una manera diferente para realizar la representación de las fracciones en la recta numérica, este modelo es sugerido por Robles (2012).

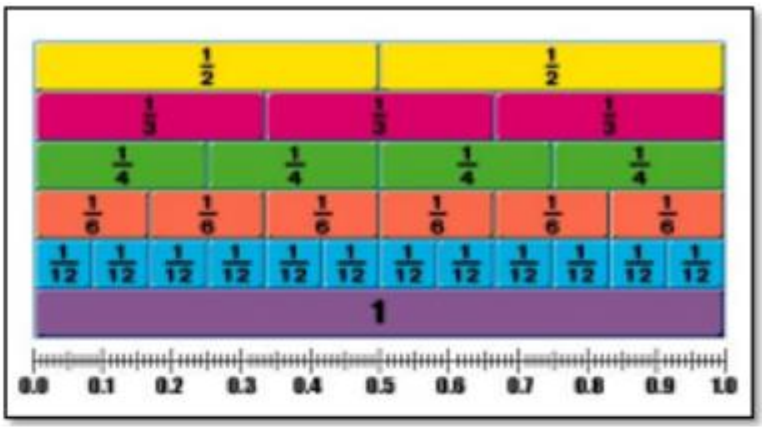


Figura 37. Representación de fracciones. (Robles, 2012).

b. Representación en forma de gráfico discreto.

En la representación discreta, el todo está conformado por un conjunto de elementos u objetos tal como se muestra en la figura 38.

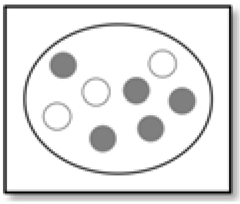


Figura 38. Conjunto de elementos.

Por lo tanto, la fracción está conformada por un subconjunto del todo como se muestra en la figura 39.

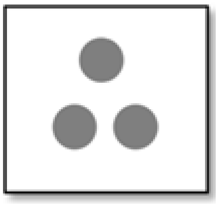


Figura 39. Subconjunto del todo.

Así, la figura 40 muestra un ejemplo de cómo se realiza esta representación gráfica, el valor de la fracción representado es de 10/3.

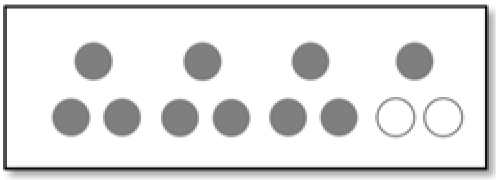


Figura 40. Fracción 10/3 representada gráficamente.

2.1.4.4. Procedimientos de traducción entre los sistemas de representación.

Cada una de estas diferentes formas para la representación de las fracciones puede ser convertida hacia otra, la tabla 2 muestra de manera resumida el proceso adecuado para cada ocasión.

Tabla 2. Representaciones de Fracciones. (Andonegui, 2006).

Para pasar del sistema	Al sistema	Procedimiento	Ejemplo
Numérico	Verbal	Lectura de *a/b*	2/5 → dos quintos
	Gráfico continuo	Dividir una región en *b* partes congruentes y señalar *a* de ellas	
	Gráfico discreto	Ídem, para un conjunto discreto	
	Decimal	Dividir *a* entre *b*	2/5 → 0,4
	Porcentual	(Decimal x 100) % (*Sólo cuando no haya más de 2 decimales exactos*)	0,4 → (0,4 x 100)% = 40%
	Punto recta	Dividir el segmento unidad en *b* partes congruentes y señalar el punto final de las primeras *a* de ellas	2/5 0 1
Decimal	Numérico	(*Reglas de transformación*)	0,4 → 4/10 = 2/5
	Porcentual	(Decimal x 100) % (*Sólo cuando no haya más de 2 decimales exactos*)	0,4 → (0,4 x 100)% = 40%
	Todos los demás	Pasar a la forma *a/b* y de ahí a los demás sistemas	
Porcentual	Decimal	Porcentaje : 100 (dividir)	40% → 40 : 100 = 0,4
	Numérico	Porcentaje/100 (simplificar)	40% → 40/100 = 2/5
	Todos los demás	Pasar a la forma *a/b* y de ahí a los demás sistemas	
Punto recta	Numérico	Numerador: medida del segmento que va del 0 al punto. Denominador: medida del segmento unidad (de 0 a 1)	
	Todos los demás	Pasar a la forma *a/b* y de ahí a los demás sistemas	
Verbal Gráfico continuo Gráfico discreto	Numérico	Traducción directa desde la expresión verbal o desde la gráfica	
	Todos los demás	Pasar a la forma *a/b* y de ahí a los demás sistemas	

2.1.5. Orden en las fracciones.

Las fracciones presentan propiedades que determinan su equivalencia, lo que permite que puedan ser ordenadas. Así cuando un estudiante se enfrenta a la necesidad de ordenar un grupo de fracciones, este presenta una serie de dificultades que proviene de distintas fuentes, como la influencia de los números naturales, las características lingüísticas del orden entre fracciones y la construcción de la fracción como pareja de números.

Uno de los más comunes errores que se presentan es el error de interpretación, según afirmó Gómez (1999) “los estudiantes tienden a confundir la lectura y escritura de los números fraccionarios” (p.17). Por ejemplo, a la fracción 8/10 (ocho décimos) los estudiantes la interpretan como (ocho diez), en lugar de utilizar la correcta terminología.

Otro error al momento de ordenar fracciones es cuando los estudiantes no consideran el valor real de la fracción completa, y solamente consideran ya sea solo el numerador o solo el denominador, así como explica Godino (2003) “El conocimiento que se tiene de los números naturales puede representar un obstáculo para el aprendizaje de los números racionales, debido a que erróneamente se usan las propiedades de estos números naturales hacia los números racionales” (p.22)

Por ejemplo, si se tienen 2 fracciones, la primera 1/3 y la segunda 1/4, muchos estudiantes considerarían 1/4 como mayor solamente porque 4 es mayor que 3, a pesar que realmente 1/3 es mayor.

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

Los estudiantes conocen como ordenar números, pero su experiencia se reduce a los naturales, por ello se puede llegar erróneamente a la conclusión de que la segunda fracción es mayor, porque 4 es mayor que 3. Sin embargo, esta apreciación sería válida si comparan fracciones cuyos denominadores son iguales como en el siguiente caso.

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$$

Pero no lo es cuando se comparan siendo iguales los numeradores, como en el primer caso planteado.

En base a lo descrito anteriormente se puede concluir que la falta de comprensión en el orden de las fracciones, se debe al error en la consideración de los numeradores y denominadores.

Otra de las dificultas lingüísticas que desencadenan las fallas en el orden de fracciones es la falta de comprensión entre el estudiante y el docente. Según menciona Post, Cramer, Behr, Lesh y Harel (1993) durante una clase el docente pregunto a un alumno "¿Dime cuál es mayor?", entonces el alumno respondió que no comprendía la pregunta, este no entendía si se preguntaba por cuál fracción poseía mayor número de partes o cual fracción era mayor en su tamaño.

La tercera dificultad se presenta cuando se requiere convertir las fracciones a ser ordenadas, a fracciones con un mismo denominador. Así, por ejemplo, si se tiene 2 fracciones 7/8 y 4/5, bastaría con encontrar el mínimo común múltiplo para ambas fracciones y ordenar basándose en el valor obtenido por los numeradores tal como se muestra a continuación.

$$\frac{7}{8} \quad \frac{4}{5}$$

$$\frac{35}{40} > \frac{32}{40}$$

Estas incomprensiones son el origen, prácticamente, de todos los errores observables, en algunos casos de forma evidente.

Cuando se comparan dos fracciones se pueden presentar tres casos:

- Fracciones con igual denominador, donde se compara solamente el numerador:
  Por ejemplo: $\frac{7}{3} > \frac{5}{3}$ porque $7 > 5$

- Fracciones con igual numerador, cuando es mayor la fracción que presenta menor denominador.
  Por ejemplo: $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$ porque $3 < 5$

- Fracciones con diferente numerador y denominador, donde se reducen a común denominador las fracciones y se comparan los numeradores.
  Por ejemplo, se tiene $\frac{7}{8}, \frac{11}{12} \rightarrow \frac{21}{24}, \frac{22}{24} \rightarrow \frac{21}{24} < \frac{22}{24}$, por lo tanto, $\frac{7}{8} < \frac{11}{12}$

2.1.6. Dificultades, obstáculos y errores en la enseñanza de fracciones.

Las fracciones son una parte de las matemáticas que requieren de un proceso para su resolución, por lo tanto, esto genera conflicto tanto para los docentes que deben enseñar el tema, así como los alumnos que deben estudiarla, ya que como señala Abrate, Pochulo y Vargas, (2006) todo proceso de enseñanza es potencialmente generador de errores. En el caso de los alumnos, los errores pueden ser apreciados en las tareas o evaluaciones que el docente les asigna. Estos errores o fallas pueden estar presentes debido a múltiples causas tanto a factores externos a las fracciones, como el conocimiento erróneo adquirido anteriormente o por la propia falta de interese del estudiante para aprender. Según Brousseau (1998), existen tres tipos de obstáculos al momento de estudiar fracciones, los cuales se diferencian dependiendo del motivo, los cuales son los siguientes:

- *Obstáculos ontogenéticos:* Los cuales se encuentran relacionados con el estudiante y su naturaleza.
- *Obstáculos didácticos:* Los cuales se encuentran relacionados con el docente y sus elecciones al impartir las clases.
- *Obstáculos epistemológicos:* Los cuales están relacionados con la naturaleza de los argumentos de la matemática, es decir con el propio concepto de las fracciones.

Los errores conceptuales son los más comunes durante el estudio de las fracciones, debido a que, el docente posee varias formar para transmitir estos conocimientos. A pesar que la presente investigación se centra específicamente en los recursos empleados por los docentes, esto no quiere decir que las dificultades y los obstáculos se quedan al margen. Según informan Moreno y Flores (2000) algunos errores conceptuales se encuentran presentes al momento de relacionar las distintas interpretaciones de las fracciones.

Los problemas al momento del aprendizaje de las fracciones no es un tema nuevo, ya que han existido desde que las fracciones aparecieron como concepto, sin embargo, acorde a las investigaciones realizadas por Fandiño (2005) citada por Flores, R. y Martínez, G. (2009), en su trabajo sobre la construcción y operatividad de las fracciones, hay tres periodos que son más importantes al momento de considerar la problemática del estudio de fracciones, los cuales son más detallados a continuación.

Primer periodo: Este periodo se desarrolla dentro de los años (1960 – 1980). Durante el transcurso de estos años se realizaron varias investigaciones en las que se involucraron a estudiantes de edades entre 14 a 18 años, de instituciones educativa de los Estados Unidos. Entre los principales temas presentados en estas investigaciones, sobresalen los estudios relacionados acerca del concepto de fracción, operaciones entre fracciones, dificultades en el estudio de fracciones, y la relación que tienen los significados de la fracción. Por lo tanto, los resultados que estos estudios presentaron fue que la existencia de los significados para el término "fracción", es precisamente uno de los obstáculos más importantes durante el proceso de aprendizaje ya que el significado está ligado directamente con los demás procesos, mostrando que es una de las principales dificultades para su aprendizaje.

Además, se clasificaron los errores en 2 niveles (individual y colectivo), debido a que los errores cometidos eran similares entre una o más personas. A nivel individual, los estudiantes presentaron una consistencia al momento de realizar los ejercicios con fracciones, mientras que a nivel colectivo un grupo de diferentes estudiantes cometían los mismos errores en determinadas circunstancias. Por lo tanto, los errores se clasificaron por su naturaleza, su posible origen o su forma de manifestarse.

El análisis también considera la categorización de "Errores fortuitos o poco trascendentes" según la categorización de Radatz (1979) (citado por Rico, 1995). Estas categorías son debido a varios factores detallados a continuación:

- *Lenguaje*: Al momento de tratar con los conceptos y vocabulario matemático.
- *Información espacial*: aparecen en la representación de un problema geométrico.
- *Aprendizaje deficiente*: Los conocimientos previos son muy incompletos.

- *Asociaciones incorrectas*: causados por la falta de flexibilidad en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas.
- *Aplicación de reglas*: son producidos por aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

El segundo período se encuentra comprendido entre los años (1980 – 1990). Durante este lapso de tiempo se realizaron estudios en estudiantes de aproximadamente 14 años, en los cuales se tuvo especial interés en cuatro directrices:

- Aprendizaje de los estudiantes en general.
- Operaciones y ejercicios con números fraccionarios.
- Comparaciones de las fracciones entre números decimales, naturales y decimales.
- Las diferentes interpretaciones del significado de “fracción”.

El tercer período empieza durante el año 1990, y continua hasta la actualidad, durante esta época se han realizado investigaciones más específicas tomando como referente a estudiantes cuyas edades se encuentran entre los 6 a 14 años, a los cuales se les ha evaluado en áreas más específicas como fracciones, números decimales, números racionales y algunas combinaciones de todos estos. Fandiño (2005) identifica que muchos de los errores más comunes en los estudiantes de todo el mundo, se encuentran principalmente los ligados a las operaciones entre fracciones y entre números racionales.

La comprensión del concepto de fracción exige que el profesor tenga pleno dominio de los diversos contenidos, y que sus actividades de aula sean coherentes y abarquen diversidad de circunstancias, para que el alumno pueda diferenciar el significado de la fracción. De este modo se pretende investigar cuántas de esos significados se extienden al realizar operaciones con fracciones mediante la utilización de recursos didácticos presentados por el docente, para posteriormente evidenciar las vinculaciones entre los significados y en lo posible identificar la existencia de un modelo de enseñanza que los integre. El conocimiento previo de los obstáculos, errores y dificultades sirven para preparar al docente y que este pueda pensar y ejecutar nuevos planes para la enseñanza anticipándose a los conceptos que se sabe los estudiantes presentan mayor dificultad.

Además de los problemas que se tengan a la hora de estudiar fracciones, es necesario considerar que, el estudio de este tema en particular requiere de una cierta cantidad de tiempo para su completo entendimiento, tal como afirma Goutard (1964) "Las fracciones no son algo que hay que saber, sino algo que hay que comprender, y no es posible comprenderlas antes de tener una suficiente experiencia con ellas". (p.16). Gairín y Muñoz (2005), afirman que el concepto de número racional queda opacado por el estudio de aspectos procedimentales, haciendo difícil la transferencia de este concepto a problemas de la vida diaria. Además, según Robles (2012) "La conceptualización de las fracciones lleva tiempo y los alumnos lo necesitan para comprender, interpretar y usar sus anotaciones con sentido en las diferentes aplicaciones de las mismas" (p.12)

Normalmente estas dificultades aparecen en una edad temprana, según Perera y Valdemoros (2009), "las dificultades comienzan cuando el niño se enfrenta al estudio de las fracciones, sin tener los conocimientos previos necesarios". Algunos errores conceptuales se presentan al relacionar distintas interpretaciones de la fracción, como menciona León (1998) "las dificultades en el aprendizaje de las fracciones se deben a la limitada conceptualización donde la fracción parte de un entero que es 1, lo que dificulta el posterior concepto de las equivalencias". (p.19).

Los errores también se presentan al momento de realizar los cálculos, esto sucede si se induce a los estudiantes a realizar cálculos antes de entender los conceptos, ya que estos confundirán los números naturales con los fraccionarios, en este sentido se puede considerar que las operaciones asimiladas con los números naturales son un obstáculo para las operaciones realizadas con racionales. Por ejemplo, si se realiza la operación de multiplicación dentro de los números naturales siempre se presentará un número mayor, mientras que en los fraccionarios el número podría resultar menor. Es difícil para los alumnos comprender el hecho que el producto de dos fracciones puede ser menor que las fracciones individuales, al contrario de lo que sucede en los números naturales.

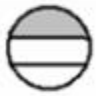
Trabajar con las fracciones también implica trabajar con números decimales, y es en estos casos donde un gran grupo de estudiantes presentan dificultades al tratar el número 0, ya sea en su lectura o notación o equivalencia cuando se trata de decenas, centenas o milésimas, una vez más esto se debe al conocimiento previo de los números naturales.

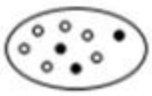
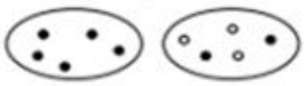
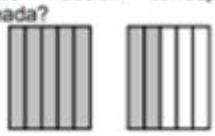
Los docentes deben encontrar una manera de que sus estudiantes puedan resolver problemas y ejercicios de fracciones, ya sea si estos tienen o no un conocimiento previo, sin embargo, también es importante que se permita a los alumnos autoevaluarse y calificarse a sí mismo ya que después de que sean conscientes de sus errores estos tendrán una mejor comprensión del concepto. Si se considera a la enseñanza no solo de las fracciones en específico, sino además la enseñanza de las matemáticas, como un elemento culturalmente indispensable dentro de la sociedad, se debe dejar de tratar como un concepto que se debe dominar, sino más bien tratarla con una forma de pensamiento abierto, la cual está sujeta a la creatividad, y cuyo desarrollo varia segur el ritmo de cada individuo.

2.1.7. Dificultades presentadas en los estudiantes al momento del estudio de las fracciones.

Como ya se ha mencionado antes, los diferentes significados que las fracciones poseen, generan cierto grado de dificultad en los estudiantes al momento de su estudio. La correcta conceptualización de las fracciones requiere de tiempo, haciendo que las horas de clase sean insuficientes, pero estos no son los únicos problemas que los estudiantes presentan, a continuación, en la tabla 3 se muestra un resumen de las dificultades junto con un ejemplo explicativo para mayor comprensión.

Tabla 3. Dificultades de los alumnos en la adquisición de las fracciones. Bordón, et al. (2001).

Ejemplo	Dificultad
¿Indica la zona sombreada 3/5 del triángulo?  El dibujo de 1/3 	Muchos alumnos responden que sí. No tienen en cuenta la necesidad de que las partes sean equivalentes en área y se centran tan sólo en el número de partes.
¿Resultan las partes sombreadas iguales a 2/4? 	Muchos alumnos contestan que no, fundamentando su respuesta en que las áreas sombreadas no son de igual forma y/o no son contiguas, (desconociendo que lo que interesa en la gráfica en figuras es la equivalencia de áreas).
En la comparación de fracciones los niños piensan que: **1/3 < 1/5** **o también que:** **1/5 es la mitad de 1/10**	En el primer ejemplo, como los numeradores son iguales y 3 < 5 entonces 1/3 < 1/5. En el segundo ejemplo, los numeradores son iguales y 5 es la mitad de 10. Trasladan las propiedades del conjunto de los números naturales al campo numérico de los números racionales, sin tener en cuenta que las fracciones forman un conjunto de números con propiedades específicas, distintas de las propiedades de los números naturales.
Cuando operan suelen hacer: **2/3 + 4/5 = 6/8** **4 - 2/ 7 = 2/7**	Suman o restan los numeradores entre sí y los denominadores entre sí porque generalizan las propiedades de la adición de números naturales en el campo de los números racionales.

Ejemplo	Dificultad
a) Si se les presenta a los niños 3 fichas negras y 6 blancas y se les pregunta: "¿Qué parte de estas fichas son negras?, algunos niños responden: "3/6" 	No toman el conjunto completo como el entero y caracterizan cada parte asociando a numerador y denominador.
b) En este caso, ¿qué fracción hemos representado? La respuesta de algunos niños es 7/10 	La respuesta que dan es 7/10 en lugar de 7/5. Hay confusión sobre la naturaleza del entero unidad. El modelo de unidades múltiples discontinuas ofrece a los alumnos algunos de los inconvenientes del modelo de áreas cuando se trata de ilustrar fracciones impropias aplicando la relación parte todo.
¿A qué fracción corresponde la zona sombreada?  Los niños representan la zona sombreada como 7/10 en lugar de 7/5	No reconocen el entero 5/5 y llevan a un entero de 10/10 Para ellos existe una incoherencia de la definición de la fracción como parte de un todo y la existencia de fracciones impropias (mayores que el entero) De hecho, la aceptación de la definición de una fracción en el sentido de parte de un todo resulta incoherente con la existencia misma de dichas fracciones impropias.

Ana y José tienen ambos dinero en el bolsillo. Ana se gasta $\frac{1}{4}$ del suyo y José $\frac{1}{2}$ del suyo. ¿Es posible que Ana haya gastado más que José? ¿Por qué piensas que es así? Respuesta de muchos niños: "Es imposible que Ana gaste más porque $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{4}$."	Una posible explicación de esta respuesta es que los niños no reconocen la posibilidad de que las cantidades de dinero de Ana y José puedan ser diferentes, es decir sean enteros diferentes, y al utilizar áreas (o en la recta numérica) usan enteros iguales para representar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, lo cual los conduce a una respuesta equivocada.
El punto representativo de 3/5 es señalado por los alumnos en 3. 0 1 2 3 4 5 El punto representativo de 3/2 es señalado como 3 y medio. 0 1 2 3 4 5	En el primer caso se está tomando el segmento entero (0-5) como unidad en analogía con el modelo de área, en lugar de tomar el segmento comprendido entre 0 y 1, que representa una unidad numérica. En el segundo caso, la representación se ajusta a la expresión oral de la fracción que se expresa como "tres medios" siendo interpretada como tres y medio.

2.1.8. Actividades recreativas usadas como recursos en la enseñanza de fracciones.

Las actividades recreativas o juegos, son una manera eficiente para que los estudiantes tengan una mejor comprensión de ciertos conceptos, ya que por medio de los juegos es posible crear diversas situaciones donde los estudiantes tengan la libertad de pensar experimentar, y resolver problemas de carácter matemático, de una manera más relajada, lo que desencadenara en una mejor absorción de lo que se está haciendo y de lo que se está estudiando. Tal como indican Corbalán (1994) "Las implicaciones de tipo emocional y de carácter lúdico, son una manera de motivación, que proporcionan una forma distinta a la tradicional de acercarse al aprendizaje". (p.5).

Las actividades recreativas pueden influir en el aprendizaje independientemente de la edad del estudiante, tal como sugieren Blatner y Blatner (1997): "Los juegos requieren de una serie de procesos que contribuyen con el desarrollo integral, emocional y social de las personas, no solamente de los niños, sino también de los jóvenes y adultos" (p.17). Por lo tanto, estas actividades contribuyen con el proceso de enseñanza ya que para los estudiantes es más fácil el estudio cuando estos se están divirtiendo. Tal como sugiere Jiménez (2004) "los juegos son actividades amenas que indudablemente requieren esfuerzo físico y mental, sin embargo, el alumnado las realiza con agrado". (p.6)

El juego dentro del aula de clases no es una forma de entretenimiento, por el contrario, es una herramienta de enseñanza que no genera cansancio hacia los estudiantes, ni tampoco distracciones dentro del aula de clases, cuando esta se la realiza de forma planificado en conjunto con las clases y el currículo que el docente haya desarrollado. Según Piaget (1985) "los juegos ayudan a construir una amplia red de dispositivos que permiten al niño la asimilación total de la realidad, incorporándola para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla" (p.65).

Al incluir actividades como juegos en el aula de clases, el estudiante tiene la oportunidad de reforzar su entendimiento, en cuanto a un concepto, tal como afirma Rojas (2009): "El juego es una herramienta que permite evaluar el conocimiento adquirido por los estudiantes, ya que favorece a la adquisición de un conjunto de destrezas, habilidades y capacidades de gran relevancia para el desarrollo tanto personal como social" (p.33). Al momento de plantear los juegos, los alumnos piensan en diferentes soluciones, lo que conlleva al desarrollo de nuevas estrategias y abre la puerta hacia la discusión con otros de sus compañeros con el fin de comprobar si su respuesta era correcto o errónea.

La complejidad de los juegos puede ser variable dependiendo del tema el cual se esté tratando. Esto se puede hacer fácilmente cambiando el material o modificando las reglas, esto con el propósito de tener un mejor entendimiento de una parte en específico. Sin embargo, dependiendo de la situación esta podría no ser tan simple, ya que es importante que el juego sea un método de enseñanza y si se cambia demasiado las reglas de un juego ya establecido, este podría no proporcionar ningún resultado benéfico hacia los estudiantes. Como ya se mencionó antes, no se trata de basar la enseñanza exclusivamente con el uso de juegos, más bien de incluirlos dentro del proyecto de enseñanza. El propósito es que el docente encuentre el conjunto de recursos apropiados para ser incluidos durante sus clases. Encontrando un balance sobre lo que se enseña, los materiales para la clase, el orden el que las clases se llevaran a cabo, de los días y el tiempo necesario para cada tema.

Según informan (Solé y Coll, 1999) el estudiante posee una mejor capacidad de aprendizaje cuando, este es capaz de generar una representación más personal acerca del contenido que está estudiando, este proceso es conocido como concepción constructivista. Dentro de este proceso los estudiantes modifican e interpretan los conocimientos que tienen, y los integran con lo que van adquiriendo.

Estas actividades han ayudado a los estudiantes que presentaban dificultades al momento de aprender. Esto se debe a que los juegos hacen a un lado los esquemas convencionales que representan el aula de clases, permitiéndoles generar su propio conocimiento, con la interacción entre sus compañeros de clase y con la adecuada guía del profesor.

Existen algunos precedentes que determinan que el juego fortalece la enseñanza, tal como muestra Yepes (2004) el cual realizo un estudio acerca de juegos de estrategia para mejorar la enseñanza, en la cual mostró resultados que, aseguran que los estudiantes presentaron una mejoría en cuanto a las fallas que tenían en relación a la resolución de ejercicios y operaciones básicas de fracciones, además que mostraron una mejor comprensión acerca del efecto de las matemáticas en la vida diaria.

Otro ejemplo son las investigaciones realizadas por (López, 2012) el cual realizó una propuesta para la enseñanza de fracciones considerando la relación parte-todo, donde los resultados mostraron que, un gran número de los estudiantes estuvo bastante satisfecho con las clases impartidas, ya que para ellos fue más dinámica, resaltando el hecho que el uso de materiales como hojas, dibujos o figuras, les proporciono una mejor participación al momento de estudiar.

El juego puede ser considerado como una ayuda dentro de la educación, y por lo tanto merece ser considerado como una herramienta para mejorar el conocimiento de los estudiantes, como sugiere Bruner (1884) “los niños que ejecutan tareas que requieren habilidades manipulativas, que los ponen en ventaja con respecto a los que estudian puramente teoría”. (p.13). El juego es algo que queda grabado dentro de las personas debido a que estas actividades son asimiladas por las personas de forma natural en el ser humano, lamentablemente, son muy pocos docentes e instituciones educativas que recurren a los juegos didácticos por lo que no se aprovecha su verdadero potencial.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de algunos juegos que pueden ser usador durante el proceso de aprendizaje.

2.1.8.1. Ejemplos de Juegos.

1. *Domino de fracciones:* El objetivo de usar este juego es que el estudiante entienda el concepto de fracciones, debido a que si este domina el concepto posteriormente podrá continuar con las operaciones matemáticas. El juego consiste en el uso de piezas de domino, con la diferencia que estas piezas en lugar de tener números enteros, tienen fracciones representadas con números y con figuras geométricas, permitiendo que el estudiante practique no solamente con el conocimiento numérico, además permite la práctica por medio de representaciones geométricas. Con este juego se busca fortalecer el concepto de fracción y sus diferentes formas de expresión (Ver foto en anexos A). El juego consta de 28 fichas y pueden participar hasta cuatro jugadores. y las reglas del juego son las siguientes:

2. *Parqués de fracciones equivalentes:* Es una actividad para desarrollar el concepto de suma de fracciones (Ver foto en anexos B). Para jugarlo se necesita de 4 personas cada una con 3 fichas y de 2 dados comunes.

3. *Carrera fraccionaria:* Con este juego también se plantea practicar con la suma de fracciones y fracciones equivalentes, pero lo más importante es repasar con los conocimientos teóricos de las fracciones (Ver imagen en el anexo D). El juego consta de una pista en forma de elipse, fichas para desplazar a los jugadores, tarjetas con preguntas relacionadas con las fracciones, un total de 10 estaciones de preguntas (ver preguntas del juego en el anexo C) y dos dados de fracciones equivalentes. Es posible jugar con un máximo de diez personas.

4. *Formar uno con la perinola.*

Este juego consiste en formar enteros haciendo girar una perinola con 6 lados, en los cuales cada lado posee una fracción con el numerador igual a uno. Por cada turno los alumnos hacer girar la perinola y retiran el valor fraccionario que esta saca hasta completar la unidad. También se puede utilizar un dado en lugar de la perinola, simplemente se debe agregar los valores de las fracciones en los lados del dado. También se pueden hacer variaciones en las reglas para en lugar de formar 1 se tenga que armar algún otro valor ya sea entero o fraccionario 1/4, o 1 1/2 o 2, incluso se puede jugar con más de una perinola o dado a la vez.

5. *Juego con cartas.*

Las cartas son una herramienta que puede ser usada para el desarrollo de varias dinámicas en la clase de matemática, dependiendo del tema que se quiera tratar durante el periodo que dure la clase. Es un material didáctico muy fácil de conseguir, y pueden ser modificadas para múltiples propósitos. En el ejemplo descrito a continuación se tiene 2 tipos de cartas las que tienen una representación gráfica y otras que tienen el valor correspondiente en fracciones, el objetivo del juego es formar pares entre el grafico y el número tal como se ve en la figura 41.

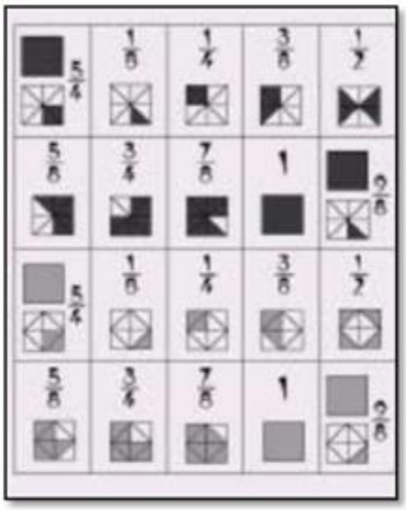


Figura 41. Cartas con Fracciones en Cuadrados. (Hanfling y Machiunas, 2004).

2.1.9. Materiales y Recursos en la Enseñanza De Matemática.

El uso de juegos para la enseñanza demuestra ser muy eficiente, sin embargo, es importante recalcar el hecho de que para muchos juegos se requiere de materiales concretos para su ejecución. El uso de materiales en el aprendizaje de fracciones nace en los años 60's, gracias al trabajo de Zoltan Dienes en 1960 y por Jerome Bruner en 1961. Ambos investigadores empezaron con la manipulación de diversas figuras geométricas, haciendo que la matemática sea una materia que estudia y observa patrones geométricos, Doménech y Viñas (1997) afirman:

> "A través de los años, se ha encontrado evidencia que el uso de materiales y recursos educativos es de importancia para el aprendizaje de la matemática porque permiten una mayor comprensión de conceptos por parte del estudiante, promueve el conocimiento conceptual y posteriormente el abstracto" (, p.15)

A partir de las numerosas investigaciones realizadas en la década de los 60s y 70s el investigador Sowell (1989), demostró que el rendimiento en el estudio de la matemática, se incrementa con el uso a largo plazo de materiales educativos. Décadas más tarde Ojose y Sexton (2009), llegan a la misma conclusión después de estudiar el efecto del uso de materiales concretos en el logro de estudiantes de primer grado de primaria. Entre sus resultados se determinaron que los estudiantes obtuvieron una mejor calificación en sus exámenes después del uso de materiales en sus clases.

En Latinoamérica también se han llevado a cabo estudios para determinar la efectividad del uso de material adicional durante las clases. Uno de estos fue la investigación de Murillo y Román (2011), donde se muestra que:

> Los estudiantes que asisten a instituciones educativas que poseen la infraestructura adecuada para el uso de recursos educativos, obtienen mejores rendimientos que los alumnos que estudian en instituciones que carecen de ellos o los tienen en menor proporción. Este es un hecho que

> se refleja independientemente de los recursos socioeconómicos o del nivel cultural de los estudiantes. (p.15)

A través del uso de materiales es posible ayudar a los estudiantes, para que estos generen una mayor comprensión de las fracciones, a pesar que incluso sin el material el estudiante puede llegar a la conclusión correcta, es evidente que los materiales brindan una gran ayuda. Esto se produce debido a que las actividades con instrumentos de apoyo brindan un mejor entendimiento de un tema abstracto, mediante actividades como clasificar objetos por tamaño o color etc.

Cada estudiante tiene su propio ritmo para aprender, por lo que es importante no imponer un solo método incluso si funciona en otros estudiantes, en este punto el acompañamiento del tutor es de vital importancia, lo correcto es probar varias metodologías, estrategias y materiales para garantizar el aprendizaje “Los diversos métodos pueden proporcionar información y así se puede planificar de mejor manera la resolución” (Alsina, 2002). Cuando el niño aprende a través de sus propias vivencias y experiencias, surge el aprendizaje de manera espontánea sin necesidad de motivación extrínseca.

Las actividades en grupo son otra herramienta que los docentes pueden usar dentro del aula de clases, esto facilita la discusión entre los estudiantes y el docente sobre que metodología empleada es la más eficiente dependiendo del tema a tratar, ademan de formular conjeturas, estimar resultados, acotar errores, examinar alternativas y consecuencias. Todo este proceso provocara que los alumnos maduren los conceptos adquiridos.

Los alumnos logran encontrar sus propios descubrimientos mediante procesos activos, lo que significa que requieren de la interacción de algún objeto que les permita relacionar el conocimiento con la realidad, es en este punto que entran los distintos materiales, tal y como afirma Kinzie y Berch (2012), los materiales son recursos que aportan al desarrollo del pensamiento lógico en los niños y niñas de preescolar y primaria, además de fomentar la exploración de relaciones espaciales, formas y medidas y el dominio de conceptos específicos.

2.1.9.1. Recursos y Materiales.

Recursos y materiales son dos conceptos separados, tal como señala Cascallana (1988), “a los materiales estructurados se los conoce como materiales, mientras que a los no estructurados son llamados recursos”. Ambos conceptos involucran un gran número de elementos y herramientas con las cuales interactúan los alumnos, por lo tanto, cualquier cosa que el estudiante pueda manipular se considera recurso o material.

Tanto recursos como materiales son herramientas necesarias para el estudio de cualquier asignatura, sin embargo, hay que entender adecuadamente la diferencia entre los dos conceptos, según afirma Flores, 2011: “Los recursos son básicamente cualquier material que no haya sido diseñado bajo un concepto orientado a la educación, más bien el docente toma algún objeto y lo involucra dentro de sus clases” (p.37). Por ejemplo, imagen, diapositivas, artículos de periódicos o revistas, los programas y anuncios de radio y TV, programas de ordenador de propósito general procesadores de texto, hojas de cálculo, etc.

La ventaja que presenta el uso de estos recursos es que pueden ser usados para un gran número de campos de estudio, no solo en la matemática, sin embargo, ya que se basan en la forma en que el docente los use dentro del aula de clases estos podrían no conducir hacia los resultados deseados, por ejemplo, si el profesor usa un software para que practiquen ejercicios sin haber dado una correcta clase introductoria, los estudiantes podrían dominar el software sin entender lo que realmente representa.

Según la definición proporcionada por Álvarez (1996), los materiales didácticos hacen referencia todo objeto, aparato, juego y medio técnico capaz de ayudar al alumno y al docente durante su proceso de enseñanza – aprendizaje. Los diferentes materiales disponibles son ampliamente usados tal como aseguran Ogalde y Barbadid (1991) “Los materiales son usados dentro del ámbito educativo con el fin de acceder más fácilmente a la información, adquisición de habilidades y destrezas, y a la formación de actividades y valores” (p .15).

La gran diferencia existente entre los materiales y los recursos son que los materiales son específicamente diseñados con propósitos educativos, sin embargo, incluso los materiales que han sido desarrollados con un propósito claro en ocasiones pueden ser adaptado para otro uso, por este motivo Flores, Luipáñez y Berenger (2015) consideran que, no hay una separación que limite claramente qué es un material y qué es un recurso.

Los materiales didácticos constituyen un impulso para llegar al objetivo de una clase y sus variaciones o modificaciones dependerán de este objetivo al cual se desea llegar. Por ejemplo, cuando el docente está preparando la clase de fracciones, este primero debe revisar que tema se va a enseñar y consultar el material acorde a los problemas que plantee en su clase. Por lo tanto, todas las instituciones educativas requieren de materiales, que puedan ser usados para múltiples temas y no solo uno en específico.

El material didáctico no solo desempeña el papel de herramienta para entender mejor un concepto, también forma parte de desencadenar la motivación y el interés hacia los estudiantes ya que la motivación adecuada favorece el interés para aprender y es un factor esencial en cualquier asignatura. Tal como afirman Gómez y Coronel (2008): “los cuales aseguran que las características del material, la novedad y la variedad en su presentación logran atrapar el interés del estudiante” (p.17). Por lo tanto, estos se sienten estimulados y predispuestos para aprender. Básicamente los materiales didácticos son interpretados por los estudiantes como juegos, donde se desarrollan sus destrezas.

El que los docentes usen materiales para sus clases no es un aspecto reciente, siempre se ha requerido de alguna herramienta que ayude en el proceso educativo, tal como afirma Adam (1958) citado en Nortes (1996): “es necesario enseñar a nuestros alumnos a descubrir el contenido matemático de las cosas que nos rodean, ya sea por simple observación y manejándolas convenientemente”. (p.60).

El uso de materiales permite a los estudiantes abordar cada tema a su propio ritmo, a la vez que desarrolla los conceptos con sus compañeros de clase y con la guía del docente lo que favorece la real integración del grupo en el aula a través del juego, favoreciendo el aprendizaje de los estudiantes que presentan desajustes en su formación. Sin embargo, para que esto se logre se requiere de que se cumplan ciertas condiciones tal como explica Coriat (1997), las condiciones son resumidas de la siguiente manera:

- El material que será usado debe estar disponible para ser usado lo que conlleva a una correcta planificación por parte del docente.
- El material debe ser el suficiente para todos los alumnos o para los grupos que el docente planea formar.
- El docente debe tener un conocimiento previo sobre las reglas del juego, y a su vez debe haber explicado con detalle estas reglas a los estudiantes.
- El docente debe planificar adecuadamente el tiempo de la clase para profundizar el tema en cuestión.

Los materiales didácticos transforman la manera tradicional de enseñar matemática, convirtiendo las clases convencionales en dinámicas y divertidas para los alumnos. Incentivan las actividades en grupo, promoviendo el pensamiento lógico y la interacción entre estudiante y docente. En conclusión, el material didáctico tiene como propósito que los estudiantes trabajen para descubrir, adquiriendo más experiencia y aproximándolo a la realidad. Por ello, los docentes de matemática deben necesariamente utilizar recursos y material didáctico en la enseñanza de fracciones.

2.1.9.2. Clasificación de materiales o recursos.

El material didáctico o recurso es todo aquello que se puede ver, tocar, manipular. Por lo tanto, se puede deducir que todo aquello que se incluya en el aula de clases que el estudiante puede ver, tocar, y además le ayuda a aprender, es un material didáctico.

Los recursos o materiales didácticos son introducidos en la clase de matemática por que ayudan a optimizar la atención, la comprensión y en general al aprendizaje por parte de los alumnos. Por ello, los docentes deben estar familiarizados con todas las clasificaciones de materiales o recursos, de esa manera ellos podrán segregar los elementos que promuevan el cumplimiento de sus objetivos.

Los materiales para la enseñanza de las matemáticas se suelen agrupar de dos formas, materiales impresos y materiales manipulables.

a. *Material impreso.*

El material impreso corresponde a todo lo que se encuentre escrito en papel, ya sean palabras, gráficos. Dentro de este grupo se encuentran los libros de texto, fichas, cuadernos de ejercicios y gracias a los avances de la tecnología también se incluyen, programas, juegos de ordenador, vídeos, etc.

b. *Material manipulable.*

Dentro de los materiales manipulables se encuentran los objetos que permiten una interacción concreta con el estudiante. Estos a su vez se clasifican en dos tipos diferentes mostrados en la figura 42.

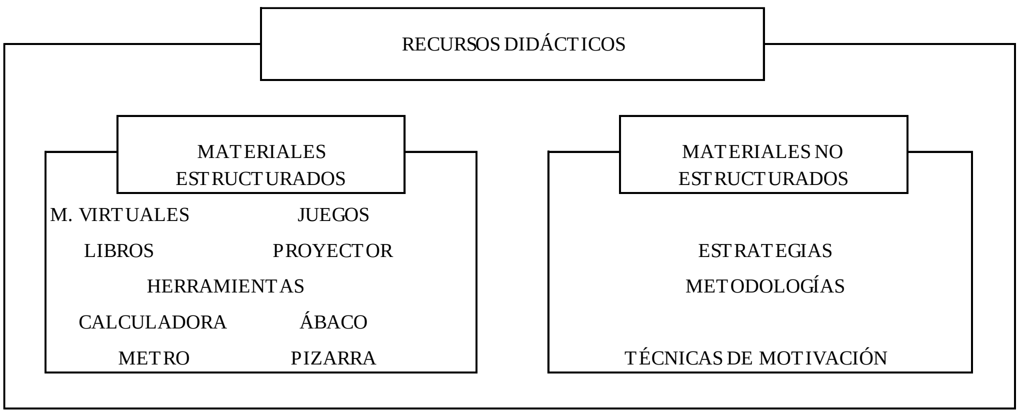


Figura 42. Clasificación de los recursos didácticos.

- *Material estructurado:* Corresponde a todos los materiales que fueron desarrollados bajo un sistema conceptual y que pueden ser adaptados para la enseñanza de un tema en particular, por ejemplo, los "bloques multibase" para estudiar los sistemas de numeración y los "bloques lógicos" para estudiar operaciones lógicas elementales. Además de los juegos que tienen varios usos como ya se explicó anteriormente, o herramientas como el ábaco que se usan para aprender operaciones básicas.

- *Material no estructurado:* Este está constituido por los materiales que han sido diseñados para el estudio de temas específicos, más concretamente aspectos parciales o el desarrollo de ciertas habilidades. Por ejemplo, Los juegos de cartas, las piezas de domino, los dados, y cualquier material geométrico que se pueda conseguir.

  El material ambiental también es considerado dentro de la clasificación de material no estructurado, este es un material el cual los docentes tienen una gran afinidad debido a que son más fáciles de conseguir, por ejemplo, las semillas, cromos, monedas, envases, entre otros. Básicamente son cualquier tipo de material que hasta un niño puede encontrar.

Para una educación integral se requiere que los docentes y alumnos hagan uso de la manipulación de objetos y materiales durante las horas de clases, ya sean estos estructurados o no estructurados, debido a que es indispensable para la formación académica básica de los estudiantes y logren un mejor aprendizaje. Por lo tanto, las instituciones educativas son un espacio fundamental para generar una cultura de, el uso de materiales didácticos, sustentada en principios que garanticen una educación apropiada.

c. *Recursos digitales.*

Los recursos digitales están constituidos por todo el contenido que se encuentre disponible de manera digital o electrónica, que sirven como la base para los estudiantes a distancia pero que además sirven como herramienta de sustento y soporte pedagógico para el aprendizaje en general. Tal como sugiere Duarte (2011) estos recursos son susceptibles al uso en las modalidades a distancia, como apoyo para la enseñanza presencial.

Con el continuo avance de la ciencia, cada vez más este tipo de recursos son más comunes, debido a que los avances científicos y tecnológicos son exponenciales, por lo tanto, la utilización de este tipo de recursos se está volviendo indispensable básicamente en todas las áreas, eso incluye a la educación. Mientras los estudiantes recurren a la manipulación de diversos objetos tales como, hojas de papel, recipientes, cajas y los combine con los recursos tecnológicos, nos permitirá aprovechar al máximo los conocimientos que se vaya adquiriendo.

También existe una clasificación de los materiales didácticos proporcionada por Álvarez (1996), donde se desarrolla para la clasificación de materiales didácticos, en esta clasificación se agrupa a todos los materiales independientemente si estos fueron creados para los propósitos educativos (figuras geométricas, ábacos, regletas) o si fueron adaptados (proyectores, videos, lecturas, instrumentos para dibujo o medida). Sin embargo, como ya se mencionó anteriormente la línea que separa a los recursos de los materiales no es muy clara, se concluye que deben ser los docentes quienes determinen que es lo que usaran durante sus clases. “Lo que deberían considerar es que los materiales y recursos son objetos físicos, la diferencia entre ellos se da en que los materiales han sido diseñados con intención educativa, mientras que los recursos no”. (Castro, 1994, p.13)

RECURSOS DIDÁCTICOS				
BARAJAS			HERRAMIENTAS	
JUEGOS	FIGURAS GEOMÉTRICAS			
			REGLETAS	LIBROS
MONEDAS	ÁBACO	ESTRATEGIAS		
METODOLOGÍA				FICHAS
	PROYECTOS	CALCULADORA		VIDEOS
		CUBOS NUMÉRICOS		

Figura 43. Ejemplos de recursos didácticos.

2.1.9.3. Materiales y recursos adecuados para la enseñanza de las fracciones.

Los diferentes recursos utilizados para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, se encuentran clasificados en dos grupos: los materiales y recursos conceptuales y los materiales para ejercitarse. Dentro del primer grupo se encuentran herramientas que permiten al estudiante representa el valor de las fracciones, comparar unas fracciones con otras, realizar operaciones de manera manipulativa, y relacionar su correspondiente valor con otras fracciones, por ejemplo, el círculo de fracciones, diagrama de Freudenthal, transparencias de cuadrados, regletas Cuisenaire y el libro de fracciones.

El segundo grupo corresponde a los materiales para ejercitarse, los cuales facilitan a crean condiciones lúdicas para motivar a los alumnos a trabajar con fracciones, en los cuales se pueden destacar el dominó de fracciones, carrera de fracciones y los juegos con barajas, que previamente se describieron.

A continuación, se detallan en mejor manera algunos de estas herramientas, como funcionan, cuáles son sus reglas y lo que se requiere para hacerlos funcionar.

a. *Círculo de fracciones.*

Los círculos de fracciones son una herramienta de carácter lúdico intuitivo y dinámico, que el estudiante puede manipular, con el objetivo de realizar comparaciones entre fracciones, para facilita la apropiación de conceptos fundamentales sobre fracciones. Está conformada por un grupo de fracciones menores o mayores que la unidad, dentro de un círculo de papel, y otro círculo completamente entero, al combinar ambas secciones, se puede estiman partes de una unidad como fracción.

Es un material cuya elaboración es bastante simple y de muy bajo costo. El proceso consiste en recortar dos círculos de papel o cartulina del mismo tamaño, pero de diferente color para identificar el que representa al entero y el que será dividido en fracciones. Posteriormente se realiza un corte en ambos círculos exactamente por sus respectivos radios, esto con el propósito de que puedan girar una vez que se han sobrepuesto una entre la otra tal como se muestra en la figura 44. Finalmente, tal como explica Gaviria (2016): "Plegando sobre el círculo 1 se gradúa el círculo 2, de esta manera se obtiene 1⁄2, 1⁄4 y 1⁄8 y midiendo con un transportador se determinan el resto de fracciones que se desee: 1⁄3, 1⁄5, 1⁄6 o 1⁄10". (p .14).

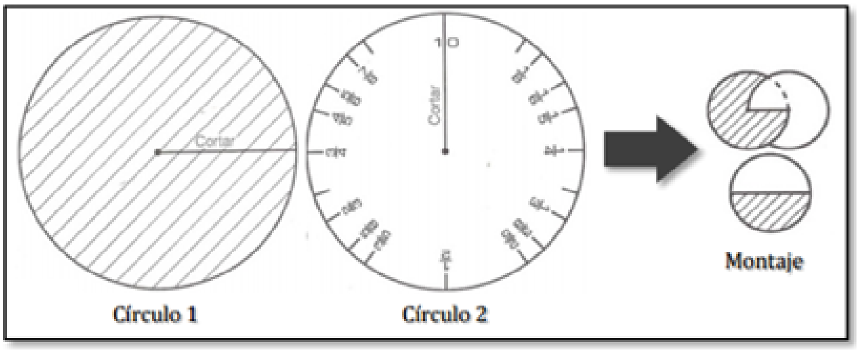


Figura 44. Construcción del círculo de fracciones. (Gaviria, 2016)

b. *Diagrama de Freudenthal o muro de fracciones.*

Para entender el diagrama de Freudenthal hay que revisar el concepto según informó Flores et al. (2011)

> "El Diagrama de Freudenthal o muro de fracciones son un rectángulo en franjas, cada una de ellas representando una unidad, el cual se encuentran divididas en distintas porciones, permitiendo la comparación de las fracciones, analizar la relación que existe entre ellas y realizar operaciones". (p.41).

El muro de fracciones consiste en una tabla segmentada horizontalmente donde se escriben el valor de cada fracción empezando por la unidad en la parte superior y con las fracciones en la parte inferior tal como se muestra en la figura 45.

Cada franja horizontal es subdividida de forma vertical dependiendo de las fracciones que se quieran representar por ejemplo; si es 1/2 entonces se divide en dos secciones, si es 1/3 se divide en tres y así sucesivamente hasta que el papel lo permita. Gracias a estas divisiones en la tabla, se puede representadas varias fracciones con su respectivo valor equivalente, permitiendo que se puedan hacer agrupaciones con alguna fracción correspondiente (Muñoz, 2014).

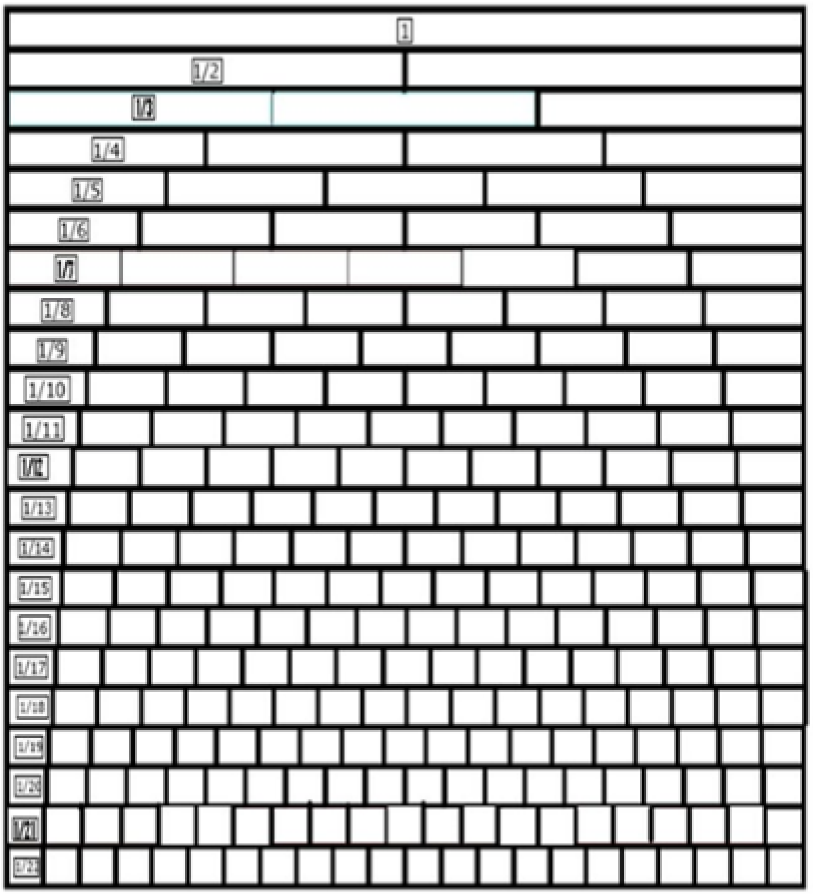


Figura 45. Muro de fracciones Flores et al. (2011)

Con la ayuda de este grafico se puede conocer las relaciones existentes entre las fracciones, por lo que es posible resolver problemas simples, como la suma o resta de dos números fraccionarios. Por ejemplo, un grupo de 30 estudiantes salieron al recreo, al momento de regresar al aula solamente 2/5 de los alumnos regresaron al aula a tiempo, se sabe que del grupo que no regreso 1/3 corresponde a las niñas, así que ¿Cuántas niñas están fuera del salón?

En la figura 46 se puede apreciar la resolución de este problema por medio del muro de fracciones. Primero los 30 estudiantes conforman la unidad o el entero, los 2/5 de los estudiantes que regresaron conforman un total de 12, por lo tanto, el número de estudiantes que se quedaron fuera son 18, y matemáticamente el 1/3 de 18 es 6, así que la respuesta al problema es 6.

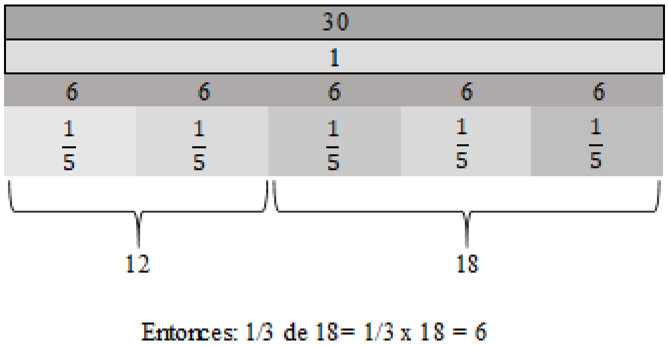


Figura 46. Representación gráfica y simbólica del problema usando el muro de fracciones.

c. *Puzzle de fracciones.*

Los puzzles de fracciones o rompecabezas de fracciones son una variación de los muros de fracciones, pero construidos en madera o plástico, tal como se observa en la figura 48, formando pequeños cubos con la misma estructura que los muros de fracciones explicador anteriormente. La figura 47a muestra el conjunto completo, mientras que la figura 47b muestra como las piezas pueden ser movidas para su respectivo uso.

La ventaja de este puzzle es que los estudiantes pueden manipular y mover las piezas para realizar operaciones básicas como sumas y restas, además de entender los conceptos más básicos de las fracciones.

Puzle de fracciones Figura A   Suma de Fracciones Figura B

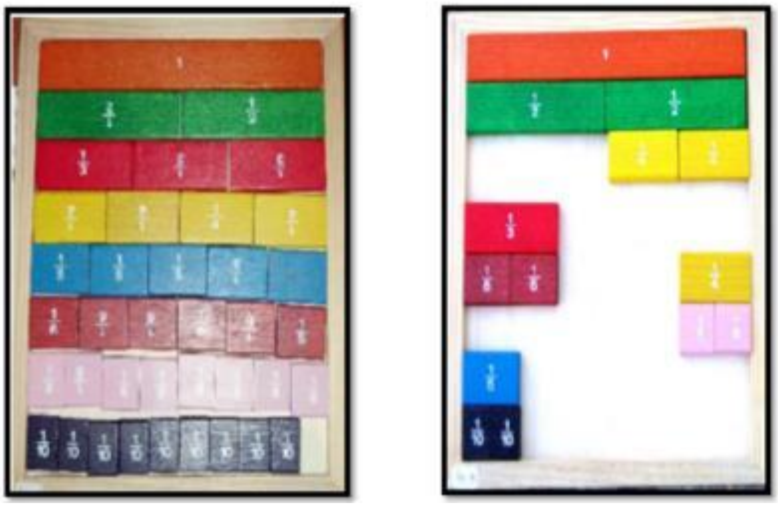


Figura 47. Materiales y recursos en el Aula de Matemáticas Flores et al. (2011)

Si se quisiera resolver un problema con el muro de fracciones, en el que se busca las mitades de 1/4, se requeriría de una búsqueda en las bandas inferiores del muro para determinar cuál de ellas hace que las divisiones de 1/4 queden divididas en dos partes, esta explicación es más detallada en la figura 48.

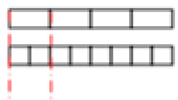
Expresión verbal	Representación en Muro de Fracciones	Expresión con operaciones	Frases derivadas
(Ejemplo) La mitad de $\frac{1}{4}$ es __		$\frac{1}{4}:2=\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}:\frac{1}{8}=2$ $2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$	La mitad de $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ cabe 2 veces en $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ contiene 2 veces a $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ es el doble de $\frac{1}{8}$

Figura 48. Representación de un muro de fracciones. (Flores, 2011)

Por otro lado, utilizando el puzzle de fracciones se puede deducir el resultado encontrado simplemente moviendo las piezas hasta encontrar el valor equivalente que sea correcto. Sin embargo, la desventaja que presenta es que es más costoso de producir y requiere de más tiempo, ya que los muros de fracciones simplemente pueden ser fotocopiados las veces que sea necesario.

d. *Transparencias de cuadrados.*

La transparencia de cuadrados está conformada por 2 hojas del mismo tamaño una transparente y la otra opaca, tal como se muestra en la figura 49. En ambas se dibujan cuadrados de manera que la hoja quede segmentada en varias partes del mismo tamaño. A continuación, se detallan las diferentes actividades que se pueden hacen con este material.

- Se puede realizar un reconocimiento de las fracciones que aparecen en las hojas, además de buscar cuantas más se puede obtener a partir de estas.
- Los estudiantes pueden usas las hojas para armar grupos de fracciones equivalentes.
- Se puede realizar operaciones básicas de fracciones como suma, resta, multiplicación (siempre que no sean valores muy complejos).
- Se puede crear gráficos con las transparencias que representen las operaciones realizadas.

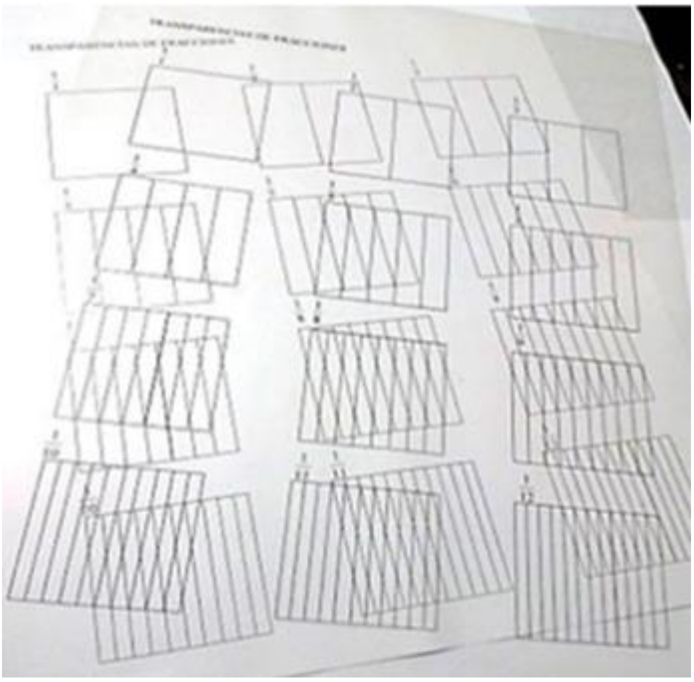


Figura 49. Transparencia de cuadrados. (Peralta, 2015)

Con un ejemplo se puede entender esta herramienta con mayor facilidad. Si se desea realizar una suma de 2 números fraccionarios, en este caso $\frac{5}{12}\ y\ \frac{2}{6}$ se procede de la siguiente manera:

Primero, se realiza la representación gráfica de la primera fracción realizando las divisiones de manera vertical, tal y como se muestra en la figura 50, y de la segunda fracción realizando las divisiones de manera horizontal tal y como se muestra en la figura 51.

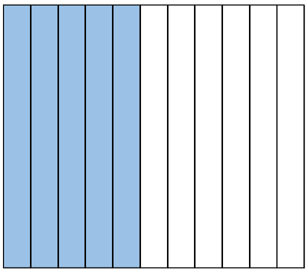


Figura 50. Representación de la fracción 5/12.

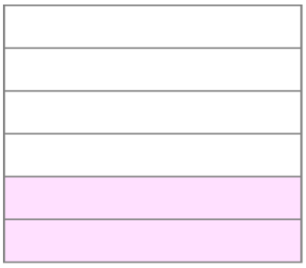


Figura 51. Representación de la fracción 2/6.

Luego se ubica la figura 51 en forma perpendicular a la figura 50, es decir que se sobreponen la una a la otra de tal manera que se obtiene, lo mostrado en la figura 52.

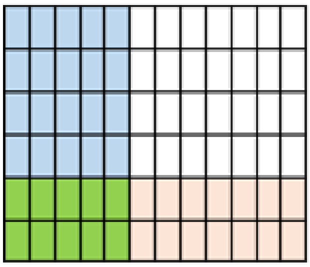


Figura 52. Representación de (5/12) + (2/6).

La sección verde representa el valor en la multiplicación, sin embargo, este ejemplo trata acerca de sumar fracciones por lo que aún es necesario un paso adicional. La intersección en color verde se lo traslada a la región que quedo sin colorear, tal como se muestra en la figura 53.

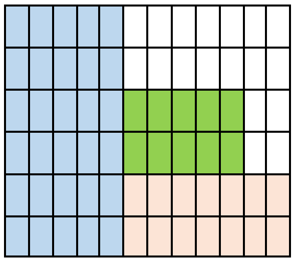


Figura 53. Representación de (5/12) + (2/6) = 54/72 = 3/4.

Finalmente, para hallar la suma de las dos fracciones simplemente se escribe la fracción que relaciona el total de todas las partes coloreadas con el total de divisiones del cuadrado, es decir se suman todas las partes coloreadas, tal como se explica a continuación.

La sección azul tiene un total de 30 cuadros, la sección rosa tiene un total de 14 cuadros y la sección verde tiene un total de 10 cuados. Por lo tanto, la suma es 30+14+10=54 cuadros, y el total de divisiones que el cuadro tiene son 72, por lo tanto, el valor de la suma es de 54/72, valor que al ser simplificado da como resultado 3/4.

Con este método también se puede llevar a cabo ejercicios de multiplicación, el proceso es muy similar a la suma mostrada anteriormente con la diferencia es que la respuesta es el área que ambos cuadrados comparten al momento de ponerlos una encima de otra. Por ejemplo, si se quiere saber el resultado de 1/2 multiplicado por 1/3 se procede de la siguiente manera.

Se toma el primer cuadrado dividido en dos partes y se lo coloca sobre el cuadrado dividido en tres partes. Estos formaran un cuadrado dividido en seis partes tal como se muestra en la figura 54, donde es posible identificar que solo uno de los cuadrados comparte un área en común con las 2 hojas sobrepuestas, por lo tanto, la respuesta correcta es 1/6.

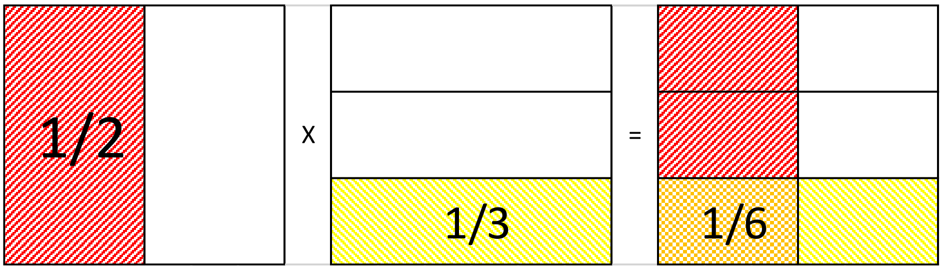


Figura 54. Multiplicación de un medio por un tercio con transparencia.

e. *Regletas cuisenaire.*

Las regletas cuisenaire son un material didáctico desarrollado para un nivel de educación más básico, donde los estudiantes pueden manipular los objetos para entender la equivalencia de los números y poder realizar operaciones matemáticas simples.

Las regletas consisten en unas barras rectangulares de madera o plástico de colores diferentes, las cuales cada barra es más grande que la anterior, tal como se muestra en la figura 55. Las barras empiezan con una longitud de 1 cm y cada barra va creciendo en tamaño 1 cm a la vez, por lo tanto, la barra final tendrá 10 cm. A cada barra se le asigna un número que coincide exactamente con su longitud con un color característico, lo cual es detallado en la tabla 4.

Tabla 4. Colores y valor numérico de las regletas cuisenaire.

Color	Longitud	Valor Numérico
Blanco	1 cm	1
Rojo	2 cm	2
Verde	3 cm	3
Rosa	4 cm	4
Amarillo	5 cm	5
Verde	6 cm	6
Negro	7 cm	7
Marrón	8 cm	8
Azul	9 cm	9
Naranja	10 cm	10

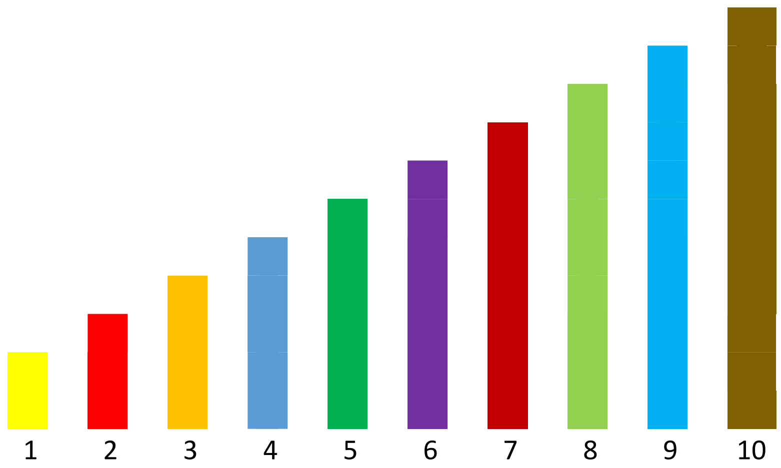


Figura 55. Las regletas de cuisenaire.

Este material es principalmente usado en los primeros años de educación, debido a que su uso permite un enfoque más simple para los estudiantes más jóvenes, permitiéndole desarrollar las siguientes habilidades.

- Mejorar conceptos básicos
- Los alumnos pueden experimentar para llegar a sus propias conclusiones.
- Realizar operaciones simples como sumas y restas.
- Identificar las equivalencias de cada número con respecto a otro.
- Ayuda a los estudiantes a entender los conceptos más básicos sobre que numero es mayor o menor.

f. *Dominó de fracciones.*

El dominó tradicional es un juego que puede ser adaptado para una gran variedad de situaciones, en este caso es usados para el estudio de las fracciones. Es un juego para 4 personas y costa de 28 fichas, con representaciones de fracciones tal como se ve le la figura 56.

Figura 56. Fichas para el dominó de fracciones.

El objetivo del juego consiste en compartir las fichas que se han repartido de manera que se formen parejas de la fracción con una figura que represente su equivalente, tal como se muestra en la figura 57. En el momento que no se puedan poner más fichas se acaba el juego y gana el jugador que menos fichas tenga. Las fichas pueden estar representadas con alguna figura geométrica apropiadamente dividida, junto a algún número fraccionario.

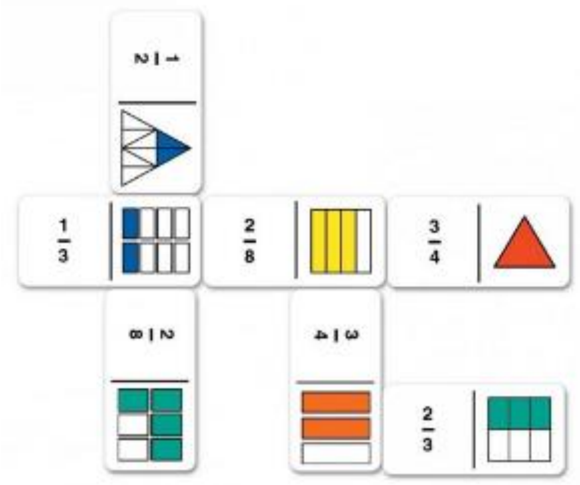


Figura 57. Dominó de fracciones.

g. *Libro de fracciones.*

Son una herramienta constituida, por varias páginas divididas en secciones mediante gráficos, que representan las fracciones. Su disposición se asemeja al usado por los muros de fracciones al momento de representar las fracciones equivalentes. Con la diferencia de que poseen dos juegos de hojas que corresponden a fracciones con denominador potencias de 2 y las ligadas a las divisiones en tres partes. Por lo cual, el libro de fracciones permite obtener fracciones equivalentes y operar con fracciones.

Algunos de los ejemplos de actividades con el libro de fracciones son:

- Obtener fracciones equivalentes.
- Descomponer las fracciones en varios equivalentes, como: 1/2, 2/3 y 5/6.
- Estudiar cuántas veces una fracción contiene a otra. Por ejemplo, cuántas veces 1/2 contiene a 1/4. Qué porción de 1/3 es 4/6. Cuántos sextos se necesitan para cubrir 2/3 etc.

La figura 58, muestra la forma que tiene el libro de fracciones.

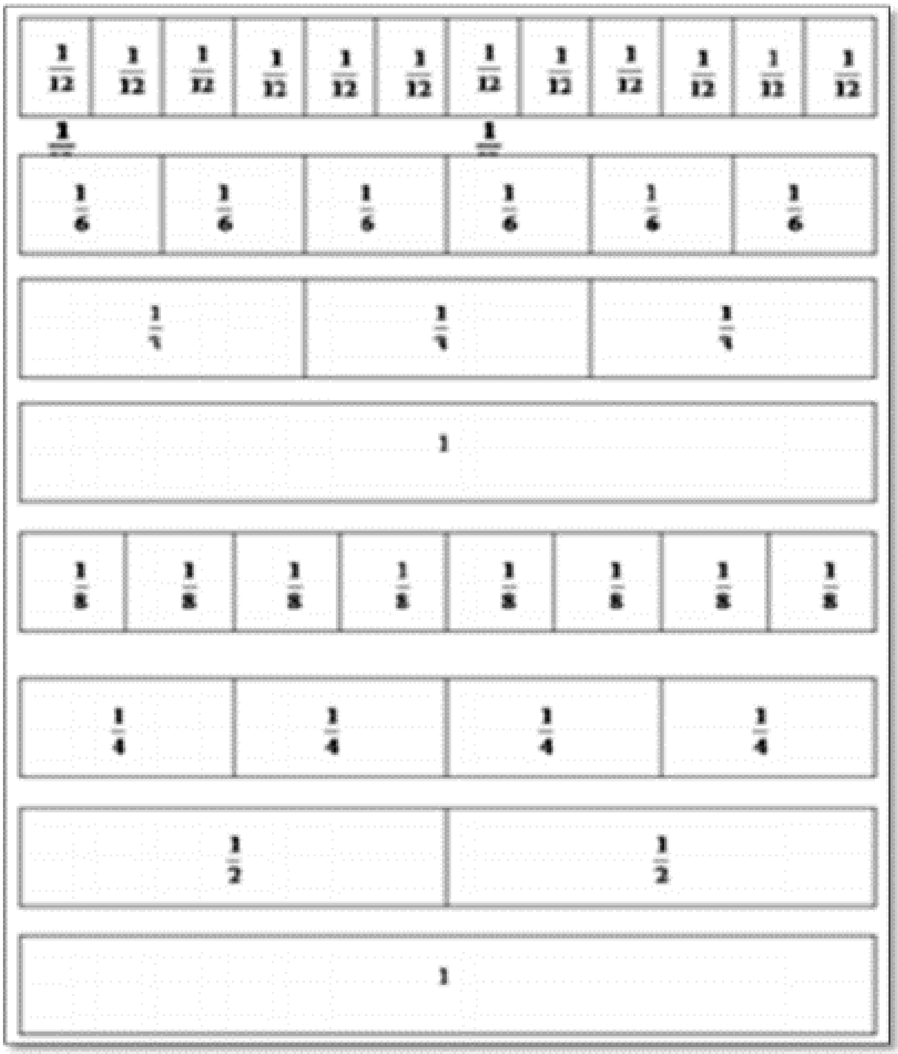


Figura 58. Páginas para hacer el libro de fracciones.

h. *Piezas de lego para aprender fracciones.*

Los legos son pequeñas piezas de plástico diseñadas para que los niños puedan construir varios modelos usando solamente figuras básicas, por lo tanto, estas piezas pueden ser usadas en el estudio de las fracciones, ya que son el perfecto ejemplo de como un todo puede ser dividido en múltiples partes.

i. *Materiales recortados prediseñados.*

Son cualquier tipo de material que un docente fabrica para explicar el concepto de fracciones, por ejemplo, papel recortado, figuras de cartulina o cartón.

j. *Fracciones Lineales.*

Para ubicar fracciones en una línea o recta numérica se divide la unidad o entero en partes iguales, dependiendo del valor del denominador, y se ubica la facción según indica el numerador. Previamente se explicaron algunos ejemplos de esta herramienta.

k. *Juego de la rayuela para aprender fracciones.*

Para el estudio de las fracciones usando el juego de la rayuela, se debe dibujar una rayuela en el piso empezando desde el cero en el primer cajón y terminando en el uno en el último cajón, mientras que en los cajones intermedios se escalan las fracciones con sus equivalentes**,** por ejemplo, si se coloca la fracción 1/8 en el segundo cajón, el tercer cajón es 2/8 con sus equivalentes 1/4, mientras que el tercer cajón es 3/8 y así sucesivamente hasta completar la unidad.

Mientras los estudiantes saltan en la rayuela, estos caen dentro uno de los cuadros, así que los alumnos repiten la fracción en la que se encuentran con sus respectivos equivalentes, por ejemplo, si cae en el cuadro 1/4, el estudiante repite (un cuarto es igual a dos octavos), y así siguen practicando las fracciones equivalentes ver anexo F.

l. *Bingo de fracciones.*

El bingo de fracciones, es una herramienta para que los estudiantes practiquen el concepto de fracciones equivalentes por medio del juego, las reglas son las siguientes:

- Cada jugador o estudiante posee una tarjeta con fracciones aleatorias. El anexo F muestra en detalle cómo es una tarjeta para el juego.
- La persona que se encargue de llamar o dirigir el juego no es un jugador, así que normalmente es el profesor en turno.
- El espacio central de las tarjetas es libre y todos los alumnos pueden marcarlo.
- La persona que dirige el juego selecciona un grupo de fracciones preparadas previamente.
- La persona que dirige el juego lee en voz alta una de las fracciones y permite a los estudiantes marcarlo en sus tarjetas si el valor coincide con el mismo valor o su respectivo equivalente.
- Si un estudiante no tiene ningún valor que coincida este no puede marcar nada.
- El juego continuara hasta que un estudiante logre completar una fila, columna o diagonal en su tarjeta.

m. *Representación Gráfica.*

La representación gráfica de fracciones consiste en seleccionar una figura geométrica (círculo, cuadrado, rectángulo, etc.). Esta figura se divide en varias partes según indica el denominador, después se colorean las partes según indique el numerador. Esta es la manera más simple de representar las fracciones.

n. *Torres con equivalencias.*

Las fracciones en torres con equivalencias, son un material con forma de un prisma rectangular (ortoedro) o cubos, fabricados con plástico resistente. Está constituido por un total de 51 piezas distribuidas entre: la unidad entera 1, la unidad dividida en medios 1/2, en tercios 1/3, en cuartos 1/4, en quintos 1/5, en sextos 1/6, en octavos 1/8, en décimos 1/10 y en doceavos 1/12.

En una cara está escrito el número fraccionario, en la otra el porcentaje del total, en otra el número decimal y otra no está escrita. Permite trabajar el concepto de fracción antes que el número escrito, ver anexo F.

o. *Set de fracciones circulares.*

Un set de fracciones circulares consiste en un conjunto de piezas circulares elaboradas en plástico o madera, está conformado por un total de 60 piezas, distribuidos de la siguiente manera: la unidad entera, la unidad dividida en medios, en tercios, cuartos, sextos, octavos, doceavos y veinticuatroavos, ver anexo F.

p. *Set de fracciones de madera.*

El set de fracciones de madera, es una herramienta usada para iniciar a los estudiantes en el estudio de las fracciones. En una cara está escrito el número fraccionario y en la otra no. Están rodeados por un marco para guardarlas con facilidad e incluye etiquetas con las fracciones. Consta de una bandeja con 39 piezas en madera en total, distribuidas de la siguiente manera: la unidad, 2 medios, 3 tercios, 4 cuartos, 5 quintos, 6 sextos, 8 octavos y 10 décimos. Ver anexo F.

q. *Parqués de fracciones.*

El parqués de fracciones o también conocido como parchís de fracciones, es una adaptación del popular juego de mesa parchís con la diferencia que en los cuadros para avanzar en el tablero se encuentra fracciones y operaciones fraccionarias básicas, los cuales tienen que ser resueltos por el estudiante para poder avanzar. Ver anexo B.

2.1.9.4. Problemas del uso de materiales y recursos en el aula de matemática.

Como se mencionó anteriormente el uso de los materiales y recursos han contribuido significativamente en el proceso educativo, sin embargo, hay problemas que se pueden presentar al momento de su uso los cuales se detallan a continuación:

a. *Los materiales y recursos son de difícil categorización.*

Existen varias opiniones acerca si un objeto es considerado material o no, debido a que, como se explicó anteriormente los materiales pueden ser modificados haciendo que se pierda su propósito original. Por ejemplo, si se considera a un libro de texto, este proporciona información a los estudiantes, pero no se lo puede usar para alguna actividad o juego por lo que no podría ser considerado como material.

b. *El ambiente escolar.*

La cultura escolar de cada institución educativa puede generar un problema metodológico, debido a que existen instituciones con más recursos que otros, por lo tanto, el docente tiene la labor de encontrar un balance sobre los métodos y materiales que se usaran. Después de hallar las ventajas y desventajas del método a emplear es necesario tomar una serie de decisiones que faciliten las actividades del grupo. Así que para que los materiales usados tengan una repercusión positiva se requiere de lo siguiente:

- Que el docente les muestre a los estudiantes exactamente qué deben hacer.
- El grupo de estudiantes dentro de la clase debe tener un tiempo adecuado para asimilar lo explicado.

c. *Dificultades curriculares:*

Los diferentes materiales didácticos y recursos que se utilizan, pueden desencadenar una serie de diferentes dificultades curriculares, provocando en las actividades planeadas, algunas de ellas explicadas a continuación:

- La formación y capacitación de los docentes cuando se trata de aplicar estos materiales, ya que en ocasiones este puede ser escaso.
- La falta de adquisición de estos materiales por parte de la institución educativa, debido una falta de interés para emplear los recursos dentro del aula de clases.
- La falta de espacios dedicados para el aprendizaje, como lo son los laboratorios de matemáticas.
- El uso de los materiales en ocasiones no muestra una mejora evidente.

Los materiales que los estudiantes manipulan, sirven para relacionar ciertos conceptos matemático, sin embargo, no es posible relacionar todos los conceptos con algún tipo de material y no todos los materiales pueden ser usados para todos los conceptos, por lo tanto, el docente tiene la tarea de enfrentar esas limitaciones. Por ejemplo, es imposible construir un triángulo equilátero en el geoplano, o la raíz cuadrada de 2 con las regletas de Cuisenaire. Tal como sugiere Fernández (2005) Los recursos simbólicos, son utilizados para dar significado a las actividades de los estudiantes, algunos actúan sobre el plano lógico y racional, y otros sobre la intuición y la emoción.

Debido a lo mencionado, sobre los materiales manipulativos y los recursos simbólicos, es conveniente que su uso en el aula de clases no se imponga sobre el concepto matemático que se desea impartir. Después de que se ha decidido sobre que material o recurso utilizar, aún es necesario algunas consideraciones adicionales, las cuales son las siguientes.

- Se planea solamente realizar una exposición, o se proyecta que los estudiantes manipulen los objetos. Dependiendo del tema una simple demostración tal vez sea suficiente, sin embargo, hay ocasiones en las que es indispensable que los alumnos manipulen para aprender.
- Se debe considerar si el material será uno previamente preparado o si será construido por los propios estudiantes, esta es una importante consideración ya que, aunque el material preparado sea de mejor calidad dependiendo de lo que se tenga planeado explicar, el hecho que los estudiantes fabriquen sus herramientas puede contribuir en el aprendizaje, aunque esto pude requerir de más tiempo el cual no siempre es disponible, dentro de una hora de clases.
- El docente debe decidir si recurrirá al material desde el inicio de la clase o si lo usara únicamente cuando los estudiantes muestren alguna dificultad en entender el tema.
- El docente también debe decidir si se darán las clases buscando actividades que exigen el uso del ordenador o se utilizarán únicamente como apoyo para resolver tareas habituales.

Finalmente se pude concluir que tanto los materiales como los recursos son necesarios para dar sentido en la enseñanza comprensiva, ya que se ha demostrado que el uso de estar herramientas de una manera adecuada incorpora a los alumnos un mayor grado de autonomía y una mejor capacidad para dar sentido y profundizar en matemática. Por supuesto, es necesario que el docente tenga un cierto dominio con materiales didácticos y recursos para obtener un resultado favorable dentro de la clase.

2.1.9.5. Didáctica de las fracciones.

El conocimiento de las fracciones está relacionado con el proceso que siguen los estudiantes para resolver los problemas, es decir que se relaciona con los procesos matemáticos para obtener la respuesta deseada, tal como afirman Solé y Coll (1999):

> Un camino favorable al momento de tratar con el tema de fracciones, es que los estudiantes se entretengan mientras trabajan dentro de un ambiente lúdico, donde el docente interviene como guía y mediador para el estudiante. (p.17)

Para que los estudiantes puedan resolver los ejercicios o problemas matemáticos, estos deber ser planteados de tal manera que los alumnos puedan generar una interpretación más realista de lo que se está pidiéndoles calcular. Presentarles los problemas de esta manera les permite visualizar de una forma más fácil el concepto, en lugar de recurrir únicamente a lo que hayan memorizado. Además, existe una gran cantidad de ejemplos que los docentes pueden usar para el planteamiento de los problemas, básicamente se puede utilizar cualquier objeto que pueda ser cuantificable y que pueda ser puesto en contexto de fracciones, por ejemplo, la comida, los líquidos, el tiempo etc. Entre más simple sea el objeto para los estudiantes será más fácil conceptualizarlo. Streefland (1993) apunta que "la enseñanza debe apegarse a la realidad para que dicho conocimiento tenga un significado para el niño". (p.18)

A pesar de lo expuesto anteriormente no siempre será sencillo para los estudiantes entender el concepto de fracción, ni para los docentes el hecho de explicarlo, debido a que, los alumnos en ocasiones son capaces de entender correctamente un problema planteado dentro de un entorno más real y continuar fallando al momento de dar una respuesta cuando el mismo problema se lo describen de manera numérica usando las fracciones. Por ejemplo, un estudiante pude saber que se suman dos mitades se obtienen un entero, sin embargo, si se le plantea numéricamente 1/2 + 1/2 este en ocasiones responderá que la respuesta es 2/4, lo cual obviamente es una respuesta incorrecta. Esto podría ser resultado de varios factores como la errónea concepción de fracciones, o fallas acarreadas por años anteriores. Por lo tanto, según Fazio y Siegler (2011) es indispensable que los docentes relacionen adecuadamente los ejemplos con sus respectivos valores numéricos, haciendo una correcta notación fraccionaria, ya que este tipo de actividades profundizaran el conocimiento que los estudiantes ya poseen volviéndolo más intuitivo.

Después de una revisión bibliográfica de investigaciones referidas al tema, sobre todo enfocada en la enseñanza de las fracciones se procedió a discernir algunas ideas didácticas de la matemática que ofrecen un fundamento al presente estudio. Según Perera y Valdemoros (2009) “las fracciones son uno de los contenidos de las matemáticas que presentan dificultades para su enseñanza y aprendizaje, principalmente, en los niveles básicos de educación”. (p.27)

La enseñanza tradicional es uno de los factores que repercuten en el aprendizaje de los estudiantes, debido a no realizar una correcta relación entre los problemas plantados en clase y representación con el mundo real. Según afirmó Freudenthal (1983): “la enseñanza tradicional basada en el desarrollo de conceptos, acentúa el aspecto formal de las definiciones, además, que la enseñanza tradicional fragmenta las relaciones con otros contenidos matemáticos y no se fundamenta en la experiencia del estudiante” (p.24). Por lo tanto, todo lo que el estudiante aprenda queda apartado de la realidad, volviendo inútil el proceso de aprendizaje. Es importante que los docentes tengan presente que, para dominar los significados de las fracciones, no se puede basar la educación exclusivamente sobre la base de definiciones teóricas.

Para que un estudiante comprenda el concepto de fracciones se requiere de más elementos, no solo teóricos o prácticos. Según afirmó Vergnaud (1990): “el entendimiento de las fracciones no se limita a la manipulación de objetos, sino también implica la consideración de aspectos mucho más amplios conocidos como campos conceptuales” (p.23). El estudiante aprende según los problemas que ha resuelto de manera apropiada, tanto las concepciones, como los modelos y teorías son formulados tomando como base las situaciones que experimenta un individuo. Basándose en esa premisa las instituciones educativas y los docentes tienen el trabajo de ofrecer una amplia gama de posibilidades al momento de enseñar, en las cuales el estudiante pueda descubrir diversas relaciones en un mismo contenido matemático.

Como se ha mencionado con anterioridad, en ocasiones los estudiantes ya tienen un conocimiento previo de las fracciones, el cual en muchos casos resulta ser erróneo o incompleto, lo que desencadena que el alumno no se dé cuenta de cual proceso seguir para resolver un problema, tal como afirma Vergnaud (1990):

> Los conceptos preconcebidos que los estudiantes acarrean durante sus años de estudio son extremadamente difíciles de remover, ya que en muchos casos se vuelve como hábitos, solamente es posible eliminar estas concepciones erróneas, el estudiante requiere estar expuesto constantemente a las diversas ideas que involucran el concepto ya sea de fracciones o cualquier otro tema. (p.23)

El enfoque de las fracciones requiere del uso de situaciones cotidianas, donde existen una serie de fenómenos que requieren del conocimiento matemático, donde los estudiantes deben construir una correlación entre el fenómeno y el concepto. El desafío didáctico consiste en reconocer aquellos "fenómenos", relacionados al tema de fracciones, que permitan a todos los estudiantes comprender los conceptos involucrados con las fracciones. El aprendizaje de las fracciones requiere que los estudiantes posean un nivel de pensamiento crítico más elevado, según aseguró Kamii (1994) el enfoque constructivista para la enseñanza de las fracciones señala que la confrontación de ideas entre los escolares facilita el desarrollo de los conocimientos previos que existen en su mente.

Por lo tanto, la concepción constructivista se encuentra conformada por un grupo de reglas que son utilizados para establecer juicios acordes a la enseñanza, según la propuesta de Kieren (1983) "existen dos tipos de herramientas o mecanismos que permiten la construcción del conocimiento de los números fraccionarios". (p.15). La primera son las herramientas de desarrollo, las cuales se encuentran relacionados con la experiencia, donde se identifican con la conservación del todo y el razonamiento proporcional. La segunda es la herramienta constructiva, la cual está ligado con la partición, la equivalencia cuantitativa y la generación de unidades divisibles. Los significados y sus respectivas herramientas se encuentran enlazados a situaciones específicas y conforman lo que se conoce como matemática intuitiva.

3. CAPÍTULO 3

3.1. El currículo y sus reformas en el área de matemática.

El currículo académico es la base con la que los profesores tienen que trabajar para planificar su clase, según define Foucault (1992): "el currículo es una de las herramientas en la cual se encuentra detallado todas las herramientas y recursos necesarios para el proceso educativo (temas, procesos, metodología, recursos humanos y físicos, etc.)" (p.31). La estructura que este currículo debe tener, se lo realiza en conjunto con todos los involucrados en el proceso educativo, según Tovar y Sarmiento (2011):

> Es una actividad en la que se deben involucrar un gran número de personas entre (alumnos, docentes, autoridades académicas, graduados, empleadores y organizaciones profesionales) para que el currículo se realice considerando múltiples factores y no se limite a objetivos inmodificables. (p.36)

El currículo se lo hace teniendo los objetivos educativos claros, tomando en cuenta las capacidades de los alumnos tal como siguieren Bonilla, Block, y Waldegg (1993):

> A nivel mundial el currículo académico se realiza tomando en consideración varias perspectivas, evidenciando una clara relación entre cada país con su propia cultura, desarrollo científico – tecnológico y las habilidades más básicas de sus estudiantes, con el propósito de generar un plan que les permita aprovechar al máximo sus recursos, por lo que normalmente se enfocan en la resolución de problemas y al significado de los contenidos. (p.12)

El concejo nacional de maestros de matemática de los Estados Unidos o NCTM por sus siglas en inglés, destaca que:

> El currículo debe concentrarse en evaluar las capacidades que tienen los alumnos para relacionar las matemáticas con su lectura, escritura y representación visual. Teniendo en consideración la utilización de un vocabulario matemático,

> notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones (National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 1991, p.87).

Cada país tiene su propia definición de lo que es un currículo académico, en Ecuador acorde con la definición del Ministerio de Educación del Ecuador [MINEDUC] (2016):

> El currículo es la expresión del proyecto educativo, que los integrantes de un país o de una nación elaboran con el fin de promover el desarrollo y la socialización de las nuevas generaciones y en general de todos sus miembros". (p.6)

Dentro de este se encuentran detalladas la visión educativa de una nación y el cómo se debe abordar la evaluación del mismo, para determinar si los resultados han sido satisfactorios, además, Dentro del sistema educativo ecuatoriano, la Educación General Básica (EGB) se encuentra constituido por diez niveles de estudio.

> "La culminación de estos diez niveles debe garantizar la generación y aprendizaje de información necesaria, para que todos los alumnos adquieran la habilidad de expresarse en forma correcta, interpretar y plantear soluciones a situaciones problemáticas, desarrollar un criterio único mediante su interacción y participación social" (MINEDUC, 2016, p.122).

Toda reforma educativa resulta de un proceso el cual evalúa el sistema actual de un país y si su sistema educativo influye positiva o negativamente en la sociedad. Dentro de la reestructuración educativa que se ha llevado a cabo en Ecuador desde el año 2012 se han implementado una serie de reformas, dentro de estas se encuentran cambios en el currículo académico en básicamente todos los niveles. Dichos cambios se han llevado a cabo a través del uso de nuevas metodologías dentro del aula de clases, mediante el uso de materiales y recursos didácticos estableciendo estándares educativos. Algunos de los cambios que se realizaron durante la reforma educativa son el incremento de la cantidad de docentes por cada institución educativa, incrementar los salarios a los docentes, aumento de horas laborales, fomentar el uso de herramientas digitales, establecer una correcta jerarquía dentro de las instituciones cada uno con su respectiva función, entre otros. Dentro de esta investigación se considera los cambios dentro del currículo académico.

El estado ecuatoriano se ha preparado para mejorar el sistema educativo actual, sus planes consisten en un proyecto que empezó en el año 2016 y concluirá hasta el año 2025, tal como mencionó el entonces ministro de educación Augusto Espinosa (2016) "los retos de la siguiente década tienen íntima relación con la calidad educativa, puesto que aún no se logra el desarrollo esperado y aún evidencia falencias". Dentro de las mejoras a realizar se mencionan tres aspectos:

- Cambios en currículo de educación inicial, básica y bachillerato.
- Impulsar la formación académica del docente
- El desarrollo de la ciencia, la tecnología y la investigación en todos los niveles y tipos de enseñanza.

Los cambios que se realizan al currículo académico se los hacen para fomentar políticas educativas que se encargaran de resolver los problemas que se encuentren presentes en el sistema educativo. Para un correcto proceso se deben considerar ciertos factores, algunos de los cuales son los siguientes:

- Las tasas de escolaridad.
- Rendimiento escolar.
- Sistemas y metodología de evaluación.
- Cronograma escolar.

3.2. Cambios al currículo académico ecuatoriano.

En el año 1996 el gobierno ecuatoriano realizo la primera renovación al currículo académico dentro de todo el sistema de educación general básica. Dentro de los cambios se consideraron varios lineamientos en el currículo para enfocarse en lo que se consideraba prioridad dentro de la educación. Los aspectos que se consideraron fueron las habilidades básicas de los alumnos, los temas obligatorios para cada año escolar y las metodologías necesarias para cada área de estudio. Sin embargo, las reformas que se llevaron a cabo tenían muchas falencias, mismas que no fueron identificadas oportunamente, por ejemplo, muchos cambios carecían de valides, no se consideró criterios de evaluación apropiados además de que no se aclaró adecuadamente cuales son los contenidos mínimos a estudiar. Todas estas fallas contribuyeron al mal desarrollo de las destrezas de los estudiantes.

Posteriormente, el MINEDUC llevo a cabo un balance para conocer el impacto que las reformas tuvieron dentro de la educación básica a nivel nacional. Se determinó los logros y dificultades de los estudiantes además que se evaluó las metodologías didácticas. Por este motivo en el año 2010, el MINEDUC dio inicio a una etapa de actualización al sistema educativo donde se llevó a cabo unas nuevas reformas al currículo académico en un proceso que fue conocido como "Reforma Curricular de la Educación Básica". Dichos cambios se enfocaron principalmente en el incremento de las habilidades de los estudiantes. "El estudiante debe convertirse en el principal protagonista de los procesos enseñanza-aprendizaje con el objeto de prepararlo para enfrentarse a problemas de la vida cotidiana" (Ajuste curricular EGB, 2016, p.56).

Finalmente, para el año 2016, después de varios cambios realizados a la malla curricular, se tiene un currículo académico bastante consistente, especializado, coherente y preparado para cumplir los requerimientos de aprendizaje de la sociedad. Además, que se establecieron los recursos necesarios para garantizar las condiciones necesarias para el entorno educativo, garantizando procesos de enseñanza y aprendizaje de calidad. Por lo tanto, dentro del currículo académico de años anteriores se han eliminado algunos contenidos e introducidos otros nuevos.

Los cambios que se realizaron al currículo en el área de matemática dentro de la educación básica fueron enfocados en que los estudiantes se orienten en lo siguiente:

- Desarrollar las habilidades necesarias para resolver varios tipos de problemas.
- Entendimiento de reglas, teoremas y fórmulas.
- Mejorar el sentido común de los alumnos.
- En ciertos niveles se redujo el nivel de exigencia, mientras que en otros esto fue incrementado.

Todo lo anterior se realizó con el propósito de permitir a los estudiantes en general desarrollar sus habilidades para interactuar con seguridad en un mundo cada vez más competitivo y cambiante. Sin embargo, en todos los niveles son los docentes quienes tienen el trabajo de verificar si sus alumnos comprendieron las clases y si asimilaron los conceptos correctamente con el fin de generar verdadero conocimiento.

En el área de matemática el eje curricular es el de *Interpretar y Resolver Problemas de la Vida*. Esto significa que en cada nivel académico la educación se debe enfocar en que el estudiante resuelva problemas y ejercicios con la estrategia y metodología adecuadas, no sólo en el aprendizaje de contenidos, sino también como un enfoque general a momento de trabajar. Según la información del MINEDUC, (2016) "Este eje curricular se divide en tres ejes del aprendizaje que se evidencian en los cinco bloques curriculares de segundo a décimo de básica". (p.67). Las cuales con las siguientes:

- Formación de Conceptos: Es un elemento necesario para la creación de conocimiento y el entendimiento de los códigos y las reglas.
- Desarrollo de Procesos: Habilidad necesaria para poner en práctica el conocimiento adquirido.
- Aplicación en la práctica: Necesario para la solución de problemas y entender el motivo de los métodos empleados.

Además de estos, según el MINEDUC (2016) se conoce de cinco bloques curriculares dentro del área de matemáticas, los cuales son los siguientes:

- Bloque de relaciones y funciones.
- Bloque numérico.
- Bloque geométrico.
- Bloque de medida.
- Bloque de estadística y probabilidades.

En el reajuste del 2016, la destreza con criterios de desempeño tiene la misma estructura: destrezas, conocimiento y nivel de complejidad, manteniéndose los bloques curriculares del 2010 pero tiene variantes:

- Presenta una codificación (ahora las materias son catalogadas con un número de identificación, el cual es el mismo para todas las instituciones educativas)
- Las destrezas que los estudiantes desarrollan están categorizadas por colores para identificar su grado de importancia, en el área de matemáticas las destrezas que se deben alcanzar están de color azul denominadas destrezas con criterios de desempeño imprescindibles y otras de color blanco que son las destrezas con criterios de desempeño deseables, las mismas que se pueden o no desarrollar, como se puede apreciar en el anexo E.
- Las destrezas con criterios de desempeño propuestas en este currículo pueden, ser alcanzadas en el trascurso del nivel, por ejemplo, en el nivel superior la destreza que se plantee puede ser alcanzada tanto en octavo como en décimo de Educación General Básica.
- Se puede evidenciar la flexibilidad existente para el alcance de los aprendizajes.

Una vez analizado parte del currículo y ciertas reformas educativas de EGB, se procede a realizar un análisis de los contenidos en temas de fracciones de EGBM que comprende 5°, 6° y 7° grados que generalmente son impartidos a estudiantes de entre 9 a 11 años de edad.

A continuación, en la sección 3.3, se detallan las metodologías usadas para los 5°, 6° y 7° grados, en donde se detalla lo siguiente:

- Contenidos Programáticos: Donde se detallan los temas principales a estudiar.
- Objetivo: Donde se explica cuál es el propósito de estudiar estos temas.
- Destrezas con criterios de desempeño: Donde se detalla que es lo que se tiene que aprender.
- Actividades: Donde se explica cuáles son las tareas que se deben hacer para cumplir con los objetivos.

Todo lo anterior esta detallado según los libros proporcionados por el MINEDUC (2016).

3.3. Quinto Grado [5°].

En el texto de quinto grado mostrado en la figura 59, se refiere a reconocer las fracciones como números que permiten un reparto equitativo y exhaustivo de objetos fraccionables, MINEDUC, (2016). Los significados detectados, en el libro corresponden a reconocer las fracciones como números y los tipos de fracciones propias, impropias, equivalentes, aparentes, homogéneas y heterogéneas.

Figura 59. Libro de quinto grado. (MINEDUC, 2016).

3.3.1. Bloque de algebra y funciones.

En el estudio del álgebra, este se debe llevar a cabo de forma progresiva cada uno de los diferentes conjuntos numéricos: naturales (N), enteros (Z), racionales (Q) y reales (R); tratando a su vez, las operaciones de adición, producto y sus respectivas propiedades algebraicas.

3.3.2. Contenidos programáticos.

- Operaciones combinadas con números naturales.
- Fracciones como números.
- Tipo de fracciones.
- Fracciones simples.
- Fracciones simples, representación gráfica.
- Fracciones simples en la semirrecta numérica.

- Relación de orden entre fracciones.
- Números decimales.
- Números decimales o fraccionario.

3.3.3. Objetivo

El objetivo según el MINEDUC (2016) es "Participar en equipos de trabajo, en la solución de problemas de la vida cotidiana, empleando como estrategias los algoritmos de las operaciones con números naturales, decimales y fracciones". (p.34).

3.3.4. Destrezas con criterios de desempeño.

- Identificar apropiadamente los números decimales: décimos, centésimos y milésimos, como una forma de representación de las fracciones, con la división como herramienta.
- Identificar a las fracciones como números que facilitan un reparto equitativo y exhaustivo de objetos fraccionables.
- Representar fracciones gráficamente en la recta numérica, para expresar y resolver problemas cotidianos.
- Representar todos los tipos de fracciones con su respectiva representación gráfica.
- Reconocer las fracciones teniendo como base un objeto, un grupo de objetos fraccionables o una unidad de medida.
- Establecer relaciones de secuencia y orden entre números naturales, fraccionarios y decimales, utilizando el material concreto y la simbología matemática adecuada (=, <, >).

3.3.5. Actividades del libro de texto de quinto grado.

Actividad 1 – Conforma un conjunto de ejercicios para reconocer las fracciones como números que permiten un reparto equitativo y exhaustivo de objetos fraccionables.

El siguiente ejemplo consiste en reconocer la representación de la unidad y una fracción.

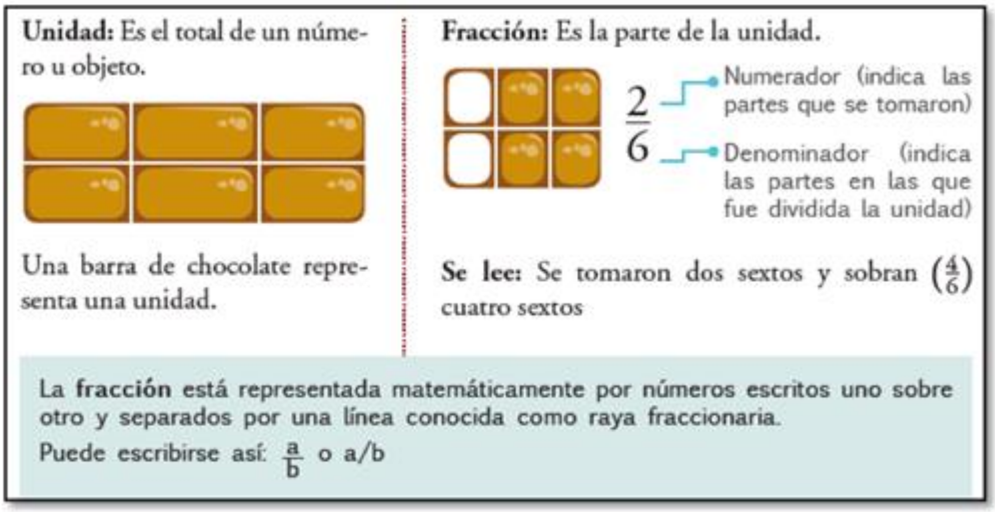


Figura 60. Representación de unidad y fracción. (MINEDUC, 2016).

El siguiente ejemplo muestra como un conjunto de elementos pueden ser representados como fracciones.

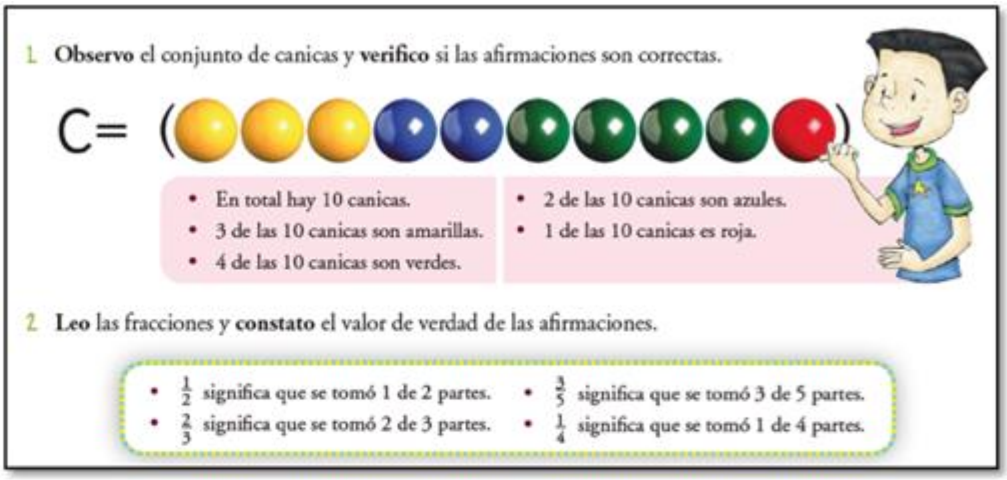


Figura 61. Ejemplo para identificar las partes de un conjunto. (MINEDUC, 2016).

El siguiente ejemplo se diseñó con el fin de que los estudiantes visualicen los problemas y los resuelvan mentalmente.

Figura 62. Ejercicio para resolución mental. (MINEDUC, 2016).

El siguiente ejemplo consiste en conocer la forma correcta de escribir las fracciones.

Figura 63. Representación escrita de las fracciones. (MINEDUC, 2016).

Actividad 2: Corresponde a un conjunto de actividades para identificar un tipo de fracciones con su representación gráfica.

El siguiente ejemplo muestra los tipos de fracciones, su definición, su representación numérica y su representación gráfica.

Tipo de fracciones	Definición	Fracción	Representación gráfica
Propia	Cuando el numerador es menor que el denominador.	$\frac{2}{3}$	
Impropia	Cuando el numerador es mayor que el denominador.	$\frac{3}{2}$ o $1\frac{1}{2}$	
Equivalente	Cuando dos fracciones representan la misma cantidad o valor aunque se escriban diferente.	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	
Aparente	Cuando el numerador es divisible para el denominador.	$\frac{8}{4} = 2$	
Homogénea	Cuando los denominadores son iguales.	$\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$	
Heterogénea	Cuando los denominadores son diferentes.	$\frac{2}{4}, \frac{1}{6}$	

Figura 64. Tipos de fracciones con su representación gráfica. (MINEDUC, 2016).

El siguiente ejemplo consiste en relacionar correctamente un valor fraccionario con su respectiva representación gráfica.

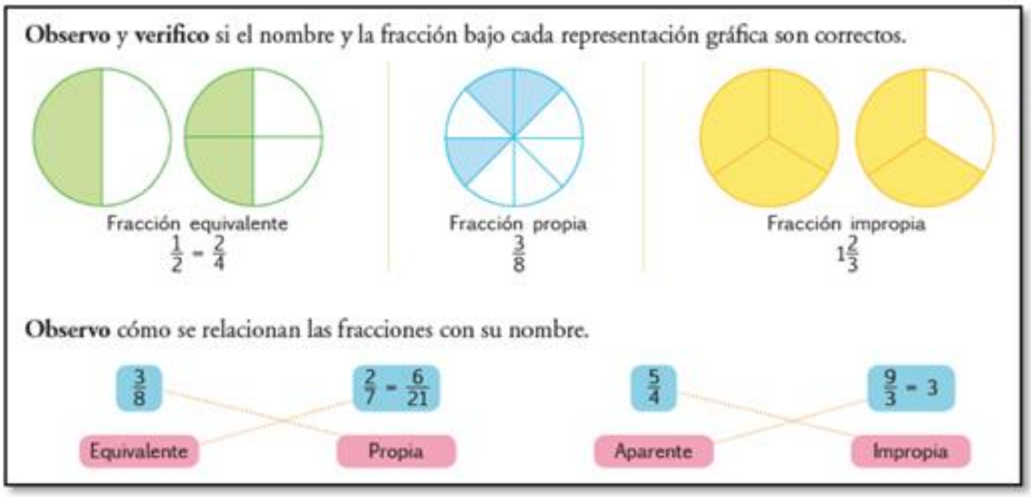


Figura 65. Ejemplo de fracción propia, impropia y equivalente. (MINEDUC, 2016).

El siguiente ejemplo consiste en una representación más textual de cómo trabajar con fracciones.

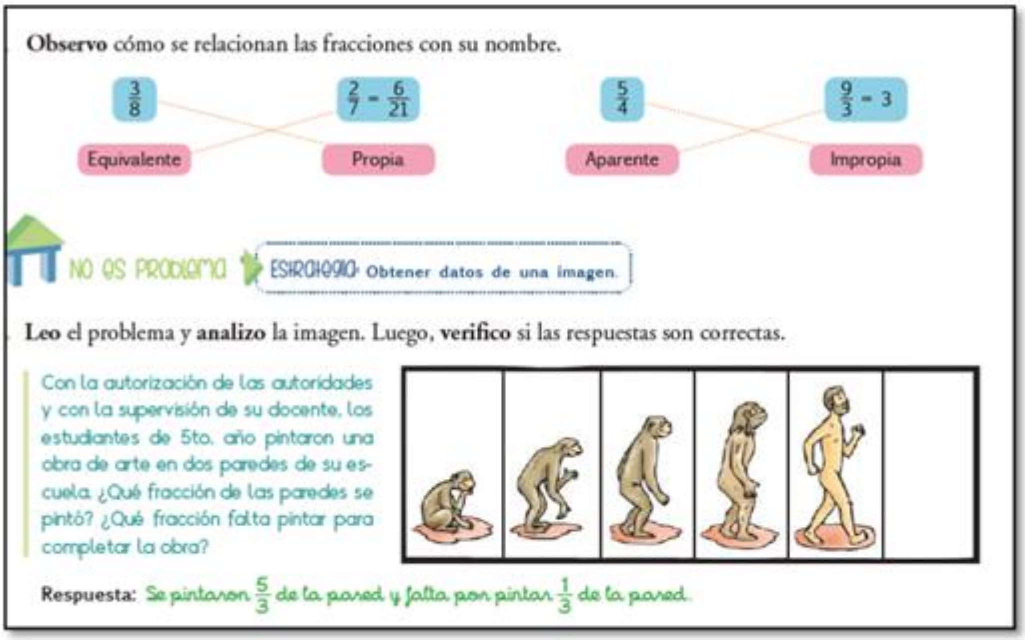


Figura 66. Ejemplo Ilustrativo de fracciones. (MINEDUC, 2016).

Actividad 3: Leer y escribir fracciones a partir de un objeto, un conjunto de objetos fraccionables o una unidad de medida.

El siguiente ejemplo consiste en observar si las respuestas proporcionadas son correctas.

Figura 67. Verificar si las respuestas al ejercicio son correctas. (MINEDUC, 2016)

El la figura 68 se muestran ejemplos de cómo se escriben correctamente las fracciones.

Analizo cómo se leen fracciones simples y **confirmo** si la parte tomada de la unidad es correcta.

Se escribe	Se lee	Numerador
$\frac{1}{2}$	Un medio	1
$\frac{2}{2}$	Dos medios	2
$\frac{2}{3}$	Dos tercios	2
$\frac{3}{3}$	Tres tercios	3

Se escribe	Se lee	Numerador
$\frac{3}{4}$	Tres cuartos	3
$\frac{2}{4}$	Dos cuartos	2
$\frac{4}{5}$	Cuatro quintos	4
$\frac{5}{8}$	Cinco octavos	5

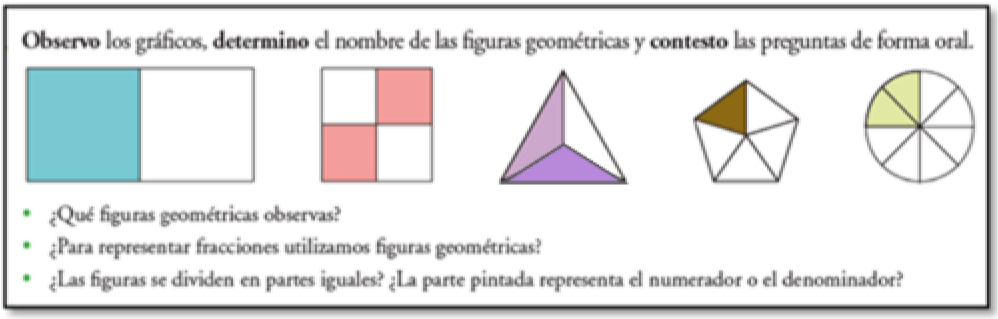
Relaciono la representación gráfica de las fracciones con la información de la tabla.

Numerador	1	2	3	3	2	1
Denominador	4	4	5	5	3	5
Se lee	Un cuarto	Dos cuartos	Tres quintos	Tres quintos	Dos tercios	Un quinto

Figura 68. Representación escrita de las fracciones. (MINEDUC, 2016)

Actividad 4: Representar fracciones en la semirrecta numérica y gráficamente para expresar y resolver situaciones cotidianas.

Los ejemplos de las figuras 69 y 70 muestran que se puede usar cualquier figura geométrica para representar fracciones.



Observo los gráficos, **determino** el nombre de las figuras geométricas y **contesto** las preguntas de forma oral.

- ¿Qué figuras geométricas observas?
- ¿Para representar fracciones utilizamos figuras geométricas?
- ¿Las figuras se dividen en partes iguales? ¿La parte pintada representa el numerador o el denominador?

Figura 69. Figuras geométricas para representar fracciones. (MINEDUC, 2016).

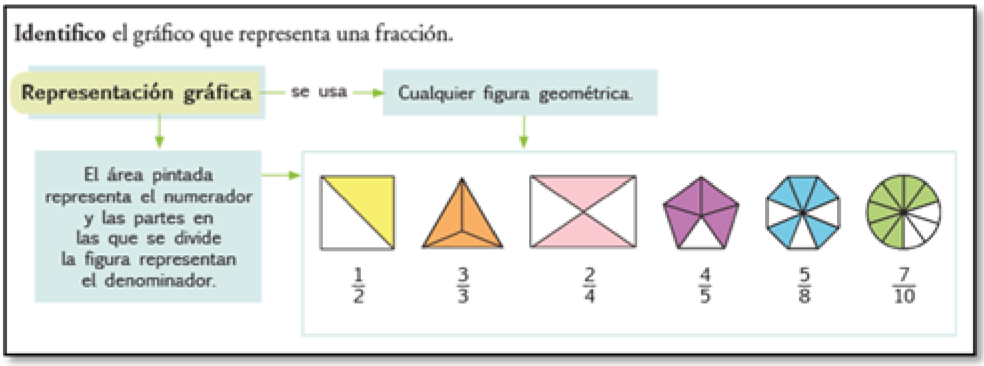


Figura 70. Representación gráfica de fracciones con cualquier figura geométrica. (MINEDUC, 2016).

El siguiente ejemplo trata de enlazar un concepto matemático con una actividad más profesional y con otra área diferente, en este caso con las Ciencias Naturales. Lea la información, observe los tanques y verifica si las fracciones que contienen son correctas.

Figura 71. Ejemplo de fracciones dentro de un contenedor de hidrocarburos. (MINEDUC, 2016).

Actividad 5: Conjunto de actividades para representar fracciones en la recta numérica y gráficamente para expresar y resolver situaciones cotidianas.

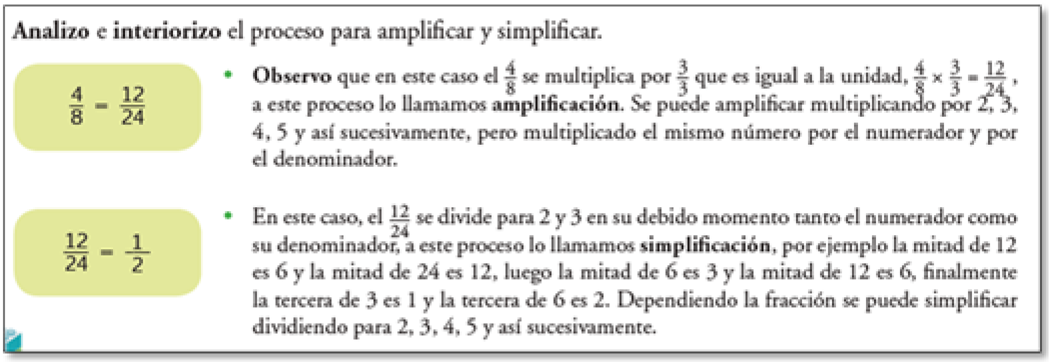


Figura 72. Fracciones equivalentes, agrandar y simplificar. (MINEDUC, 2016).

La figura 73 y 74 muestran cómo se representan las fracciones dentro de la recta numérica tanto para fracciones propias como impropias.

Figura 73. Fracciones en la recta numérica. (MINEDUC, 2016).

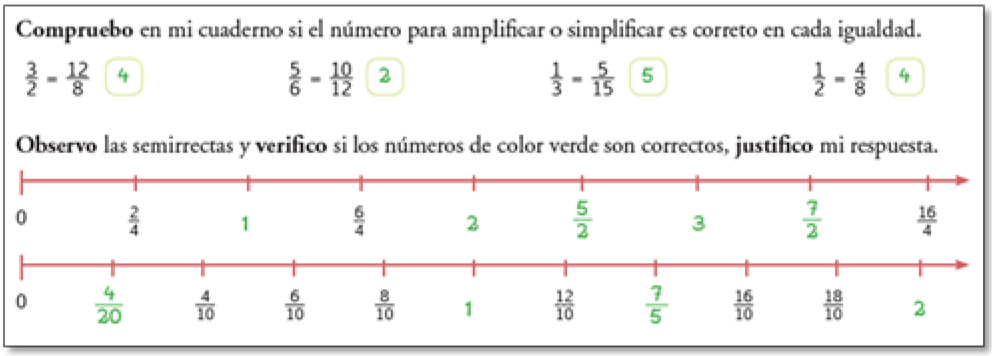


Figura 74. Fracciones propias e impropias en la recta numérica. (MINEDUC, 2016).

Actividad 6: Ejemplos desarrollados para establecer relaciones de orden entre fracciones, utilizando material concreto, la semirrecta numérica y simbología matemática. (=, <, >).

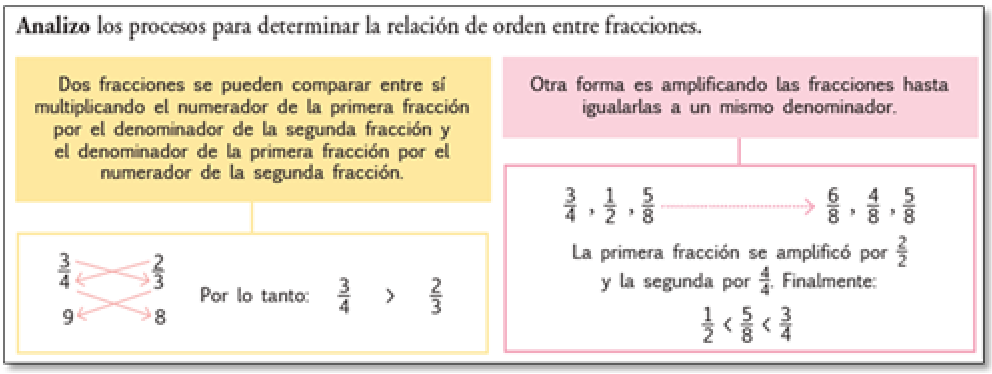


Figura 75. Relación de orden entre fracciones 1. (MINEDUC, 2016).

Analizo las fracciones y **verifico** si los procesos de comparación y símbolos son correctos.

$\frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{10}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{3}{5}$	$\frac{4}{8}$ $\frac{4}{10}$
20 24	10 8	5 9	40 32
Por lo tanto:	Por lo tanto:	Por lo tanto:	Por lo tanto:
$\frac{5}{8} < \frac{3}{4}$	$\frac{1}{4} > \frac{2}{10}$	$\frac{1}{3} < \frac{3}{5}$	$\frac{4}{8} > \frac{4}{10}$

Figura 76. Relación de orden entre fracciones 2. (MINEDUC, 2016).

Actividad 7: Actividades desarrolladas para reconocer los números decimales décimos, centésimos y milésimos como la expresión decimal de fracciones por medio de la división.

Verifico si los valores escritos en letras coinciden con las cantidades numéricas y **compruebo** los procesos.

Se escribe	Proceso	Se lee	
$\frac{8}{10}$	8 ÷ 10	0,8	Ocho décimas. Cero unidades y ocho décimas.
$\frac{24}{100}$	24 ÷ 100	0,24	Veinticuatro centésimas. Cero unidades y veinticuatro centésimas.
$\frac{1\ 680}{1\ 000}$	1 680 ÷ 1 000	1,680	Mil seiscientas ochenta milésimas. Un entero con seiscientas ochenta milésimas o una unidad con seiscientas ochenta milésimas.

Figura 77. Fracciones como decimales. (MINEDUC, 2016).

Actividad 8: Actividad diseñada para convertir números decimales a fracciones con denominador 10, 100 y 1000.

En el siguiente ejemplo se muestra un valor decimal el cual es representado como una fracción, mostrando la importancia de amplificar y simplificar.

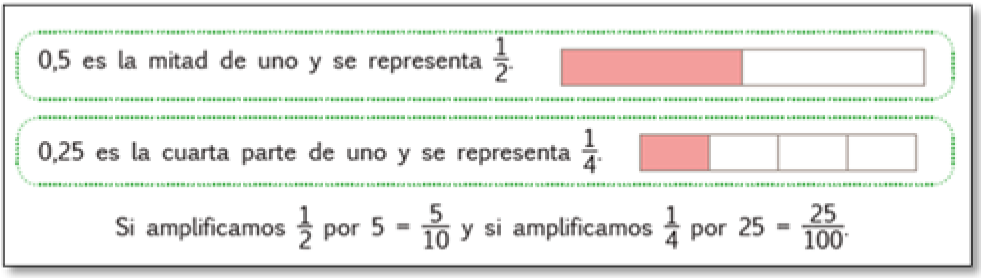


Figura 78. Representación de un decimal como fracción. (MINEDUC, 2016).

3.4. Sexto grado [6°].

En el libro los estudiantes cuentan con más ejemplos para reforzar los conocimientos adquiridos y con situaciones problemáticas reales que están acompañadas de sus respectivas estrategias de solución, con lo cual se demuestra la praxis de la matemática e incluye un espacio que evidencia el carácter interdisciplinario de la matemática. También, se puede apreciar que, en tres unidades, hablan de fracciones entre las cuales se refieren a las fracciones impropias, números mixtos relación de órdenes entre fracciones, adición y sustracción de fracciones heterogéneas y divisiones entre números naturales y decimales.

Figura 79. Libro de sexto grado. (MINEDUC, 2016).

3.4.1. Contenidos programáticos

- Fracciones impropias, números mixtos.
- Relación de orden entre fracciones.
- Adiciones y sustracciones con fracciones homogéneas.
- Adiciones y sustracciones con fracciones heterogéneas.
- Problemas de fracciones con suma y resta.
- Fracciones y decimales a porcentaje.

3.4.2. Objetivo

El objetivo para los estudiantes de sexto grado es, según el MINEDUC (2016) “Participar en equipos de trabajo, en la solución de problemas de la vida cotidiana, empleando como estrategias los algoritmos de las operaciones con números naturales, decimales y fracciones”. (p.56).

3.4.3. Destrezas con criterios de desempeño

- Realizar la conversión entre fracciones impropias a número mixto y viceversa.
- Establecer relaciones de secuencia y orden entre números naturales, fraccionarios y decimales, utilizando el material concreto y la simbología matemática adecuada (=, <, >).
- Realizar operaciones de suma y resta con fracciones, a través del cálculo de un denominador común, tanto para fracciones homogéneas y heterogéneas.
- Proponer y solucionar problemas en los que se involucre operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Resolver y plantear problemas de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con fracciones.
- Representar la solución correcta dentro del contexto del problema.
- Representar los valores de porcentajes como valores fraccionarios y viceversa.

3.4.4. Actividades del libro de texto de sexto grado.

Actividad 1: Ejemplos desarrollados para practicar la conversión de fracciones impropias a número mixto y viceversa.

La figura 80, muestra el proceso a seguir para la conversión desde una fracción impropia a un número mixto. En esta actividad los estudiantes tienen que responder a las preguntas en base a lo que se observa.

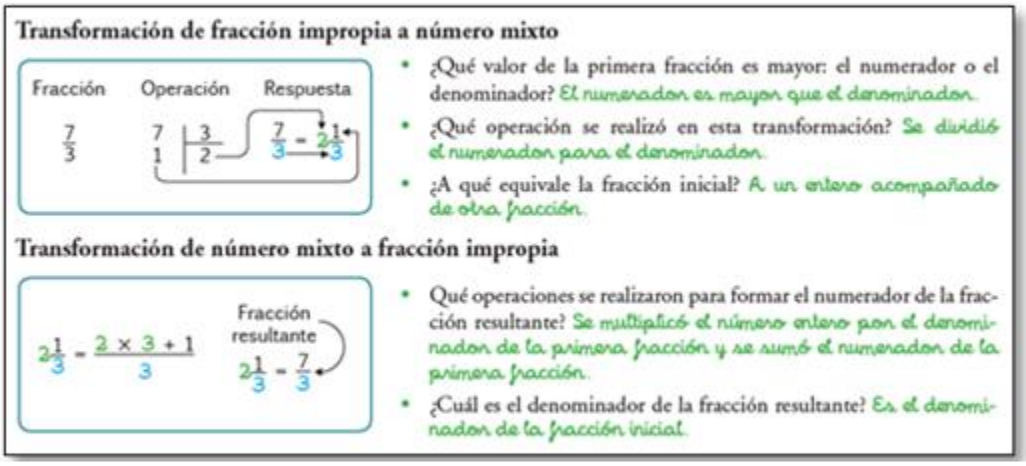


Figura 80. Conversión de fracción impropia a número mixto y viceversa. (MINEDUC, 2016).

La figura 81, muestra cómo se realiza la conversión de forma numérica, en este ejemplo los estudiantes tienen que calcular numéricamente para realizar la conversión.

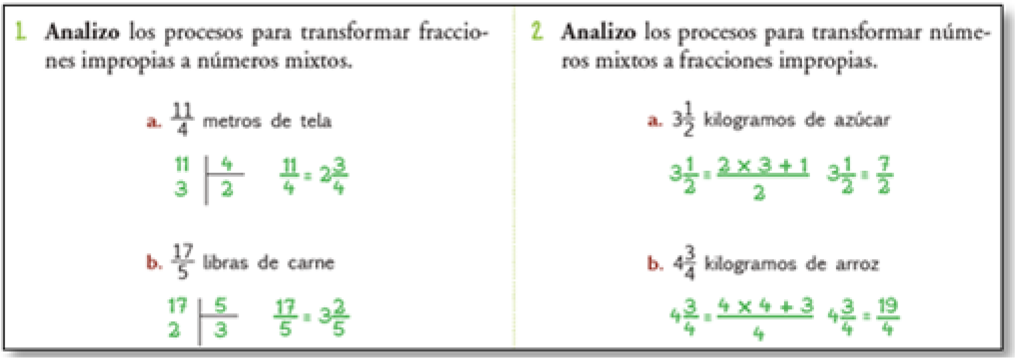


Figura 81. Conversión de fracción impropia a número mixto y viceversa. (MINEDUC, 2016).

Actividad 2: Actividades desarrolladas para que los alumnos puedan establecer relaciones de orden entre fracciones.

Observe las fracciones y establezca reglas para determinar su orden, según las preguntas y respuestas. En el ejemplo mostrado en la figura 82, lo estudiantes tienen que determinar cuál fracción es mayor en base al grafico mostrado, además de contestar unas preguntar que garantizan que entendieron el concepto correctamente.

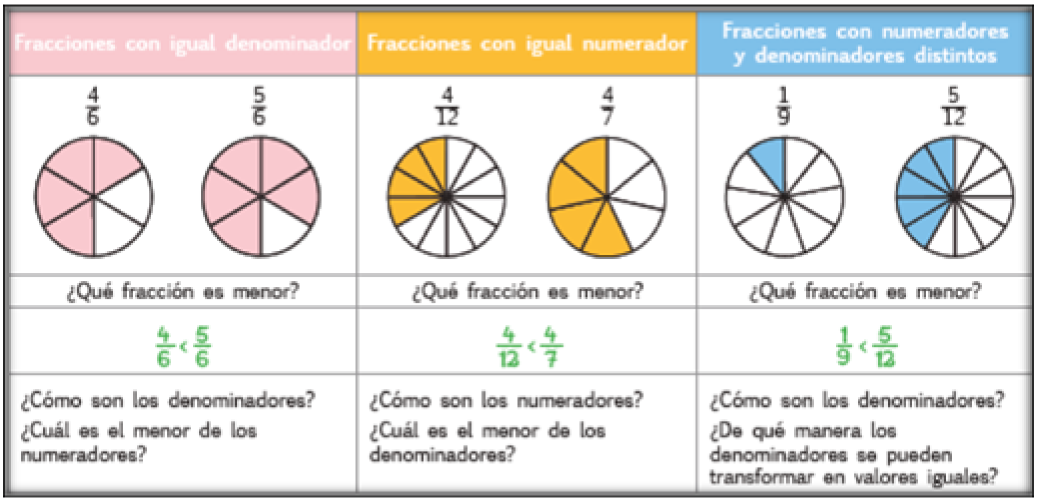


Figura 82. Determinar cuál fracción es mayor a través del gráfico. (MINEDUC, 2016).

El ejemplo de la figura 83, es para dar una explicación de cómo reconocer que fracción es mayor a través del uso de la recta numérica.

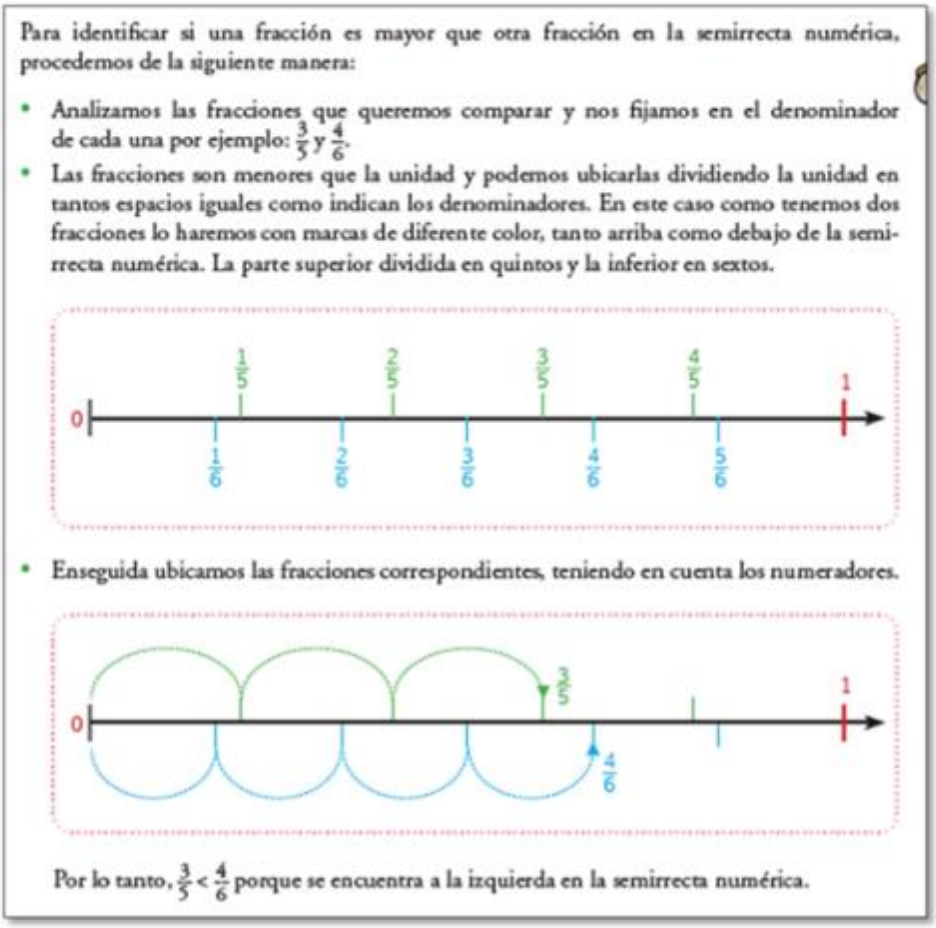


Figura 83. Representación de fracciones en la recta numérica. (MINEDUC, 2016).

Actividad 3: Actividades desarrolladas para que los alumnos realicen cálculos de sumas y restas con fracciones obteniendo el denominador común.

La figura 84 muestra un ejemplo para que los estudiantes entiendan el proceso para la suma y resta de fracciones homogéneas, además de responder algunas preguntas.

$\frac{1}{7}+\frac{4}{7}=\frac{1+4}{7}=\frac{5}{7}$	• ¿Cómo son los denominadores de las fracciones sumadas? • ¿Qué valor tiene el denominador de la fracción de la suma total? • ¿Cómo se formó el numerador de la fracción que corresponde a la suma total?
$\frac{8}{9}-\frac{6}{9}=\frac{8-6}{9}=\frac{2}{9}$	• ¿Cómo son los denominadores de las fracciones del minuendo y del sustraendo? • ¿Qué valor tiene el denominador de la fracción de la diferencia? • ¿Cómo se formó el numerador de la fracción que corresponde a la diferencia?

Figura 84. Suma y resta de fracciones homogéneas. (MINEDUC, 2016)

La figura 85 muestra un ejemplo de un problema el cual tiene que ser interpretado por los estudiantes para su resolución.

Gonzalo vende las dos sextas partes de un terreno y cede la sexta parte del mismo para la construcción de una calle. ¿Qué fracción del terreno entrega Gonzalo?

- ¿Qué fracción del terreno vende Gonzalo? Gonzalo vende $\frac{2}{6}$ partes del terreno.
- ¿Qué fracción del terreno cede Gonzalo para la calle? Gonzalo cede $\frac{1}{6}$ parte del terreno.
- ¿Qué operación debe realizar para saber la cantidad de terreno que entrega? Sumar las partes del terreno que vendió y cedió.

$$\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Respuesta: Gonzalo entrega la mitad de su terreno.

Tomado de: http://goo.gl/pFoq6e

Figura 85. Problema de fracciones. (MINEDUC, 2016).

Actividad 4: Actividades diseñadas para que los alumnos aprendan a calcular sumas y restas de fracciones heterogéneas a través del cálculo del denominador común.

La figura 86, explica a los estudiantes paso a paso del proceso para sumar fracciones heterogéneas, además deben contestar unas preguntas de manera verbal.

$\frac{3}{2}+\frac{1}{5}$	• ¿Cómo son los denominadores de las fracciones que se están sumando?
$\frac{3}{2}+\frac{1}{5}=\frac{\quad}{10}$	• ¿Cuál es el mcm de los denominadores (2 y 5)?
$\frac{3}{2}+\frac{1}{5}=\frac{(5\times 3)+}{10}$	• ¿Cuál es el resultado de dividir el mcm para el primer denominador? • ¿Por cuál valor se multiplicó al numerador de la primera fracción?
$\frac{3}{2}+\frac{1}{5}=\frac{(5\times 3)+(2\times 1)}{10}$	• ¿Cuál es el resultado de dividir el mcm para el segundo denominador? • ¿Por cuál valor se multiplicó al numerador de la segunda fracción?
$\frac{3}{2}+\frac{1}{5}=\frac{15+2}{10}=\frac{17}{10}$	• ¿Cómo se obtuvo el numerador de la fracción total?

Figura 86. Suma de fracciones heterogéneas, paso a paso (MINEDUC, 2016).

La figura 87, muestra dos ejemplos uno de suma y uno de resta que el estudiante debe calcular, paso a paso.

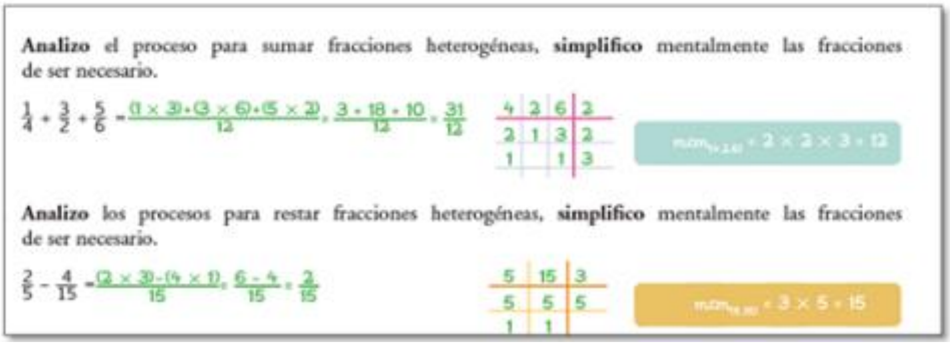


Figura 87. Ejemplos de suma y resta de fracciones. (MINEDUC, 2016).

Actividad 5: Actividades diseñada para que los estudiantes puedan resolver y plantear problemas de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con fracciones e interpretar la solución dentro del contexto del problema.

La figura 88 muestra un problema en el cual el estudiante debe interpretar los datos planteados, y llegar a una solución apropiada, además de que tiene que responder algunas preguntas para garantizar que entendió correctamente el problema.

Figura 88. Problema de fracciones que el estudiante debe solucionar. (MINEDUC, 2016).

La figura 89 muestra un problema de fracciones, el cual el estudiante debe resolver calculando el mínimo común múltiplo (m.c.m).

Figura 89. Problema de fracciones. (MINEDUC, 2016).

Actividad 6: Las siguientes actividades son diseñadas para que los estudiantes puedan expresar porcentajes como fracciones o decimales, en función de explicar situaciones cotidianas.

La figura 90 es un ejercicio en el cual el alumno tiene que pintar el número de cuadros según lo indique el valor de porcentaje.

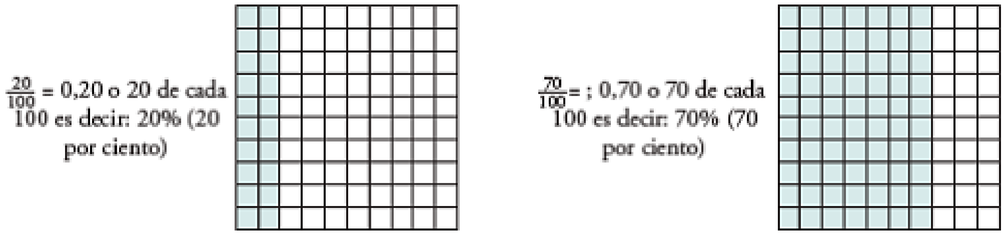


Figura 90. Ejercicio de fracción como porcentaje. (MINEDUC, 2016).

La figura 91, muestra a los estudiantes una explicación de cómo el porcentaje es representado como fracción.

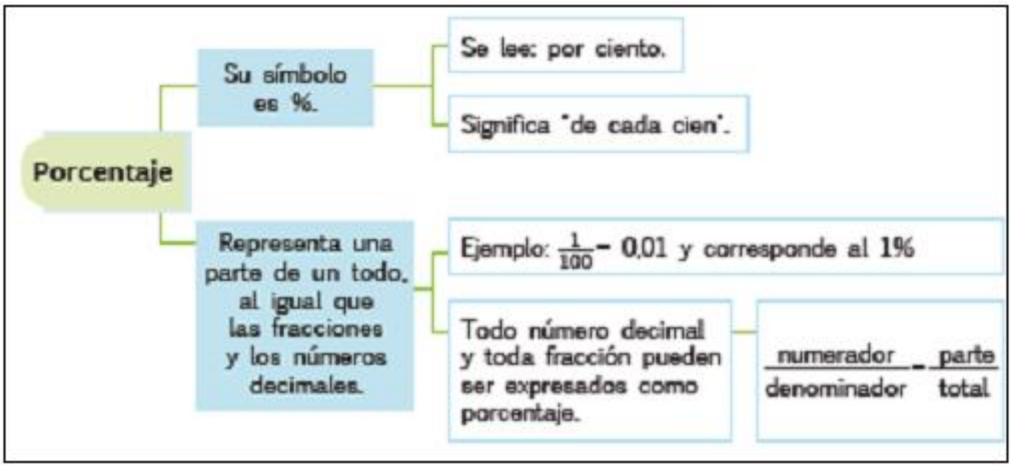


Figura 91. Explicación de porcentaje como fracción. (MINEDUC, 2016).

3.5. Séptimo grado [7°].

Dentro del sistema educativo ecuatoriano, durante el séptimo grado los estudiantes aprenden multiplicaciones y divisiones con fracciones, utilizando la simplificación como una herramienta, además aprende a solucionar problemas donde se expresan combinaciones de suma, resta, multiplicación y división. La figura 92 muestra el libro utilizado desde el 2016, el cual fue desarrollado para que el alumno pueda establecer relaciones de secuencia y orden entre números naturales, fracciones y decimales.

Figura 92. Libro de Séptimo grado. (MINEDUC, 2016)

3.5.1. Contenidos programáticos.

- Ejercicios de multiplicación con números fraccionarios.
- Ejercicios de división con números fraccionarios.
- Ejercicios combinados con fracciones.
- Ejercicios y problemas en los cuales intervienen más de una operación con fracciones (suma, resta, multiplicación, división).
- Establecer relación de orden dentro del conjunto de los números naturales, fraccionarios y decimales.
- Operaciones combinadas con números naturales fracciones y decimales.

3.5.2. Objetivo.

El objetivo para los séptimos grados según el (MINEDUC, 2016) es "Participar en equipos de trabajo, en la solución de problemas de la vida cotidiana, empleando como estrategias los algoritmos de las operaciones con números naturales, decimales y fracciones". (p.32).

3.5.3. Destrezas con criterios de desempeño.

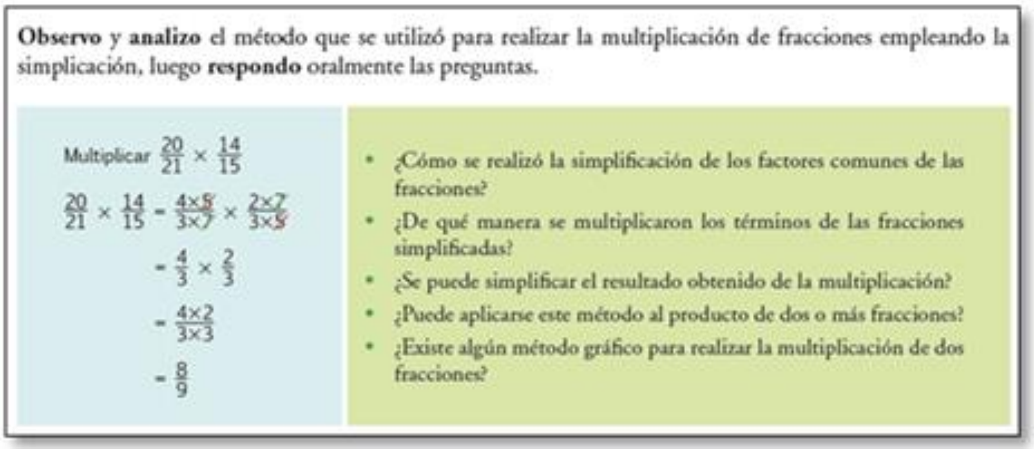
- Ejercicios de multiplicación y división entre fracciones, recurriendo a la estrategia la simplificación.
- Resolver ejercicios y problemas de suma, resta, multiplicación y división con fracciones, y representar la solución apropiadamente.

- Realizar ejercicios con operaciones combinadas.

3.5.4. Actividades del libro de texto de séptimo grado.

Actividad 1: Las siguientes actividades están diseñadas para que los estudiantes aprendan a realizar multiplicaciones y divisiones entre fracciones empleando como estrategia la simplificación.

La figura 93 muestra un ejercicio de multiplicación de fracciones, con algunas preguntas para conocer si los alumnos entendieron el proceso.



Observo y **analizo** el método que se utilizó para realizar la multiplicación de fracciones empleando la simplicación, luego **respondo** oralmente las preguntas.

Multiplicar $\frac{20}{21} \times \frac{14}{15}$

$$\frac{20}{21} \times \frac{14}{15} = \frac{4\times\cancel{5}}{3\times\cancel{7}} \times \frac{2\times\cancel{7}}{3\times\cancel{5}}$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4\times 2}{3\times 3}$$

$$= \frac{8}{9}$$

- ¿Cómo se realizó la simplificación de los factores comunes de las fracciones?
- ¿De qué manera se multiplicaron los términos de las fracciones simplificadas?
- ¿Se puede simplificar el resultado obtenido de la multiplicación?
- ¿Puede aplicarse este método al producto de dos o más fracciones?
- ¿Existe algún método gráfico para realizar la multiplicación de dos fracciones?

Figura 93. Explicación de la multiplicación de fracciones con preguntas para contestar. (MINEDUC, 2016).

La figura 94 muestra un problema el cual el estudiante debe responder correctamente.

Figura 94. Problema de multiplicación. (MINEDUC, 2016).

La figura 95, muestra a los estudiantes el proceso para realizar la división de fracciones, del lado izquierdo se encuentra el método de multiplicación en cruz y en el lado derecho el método de extremos y medios.

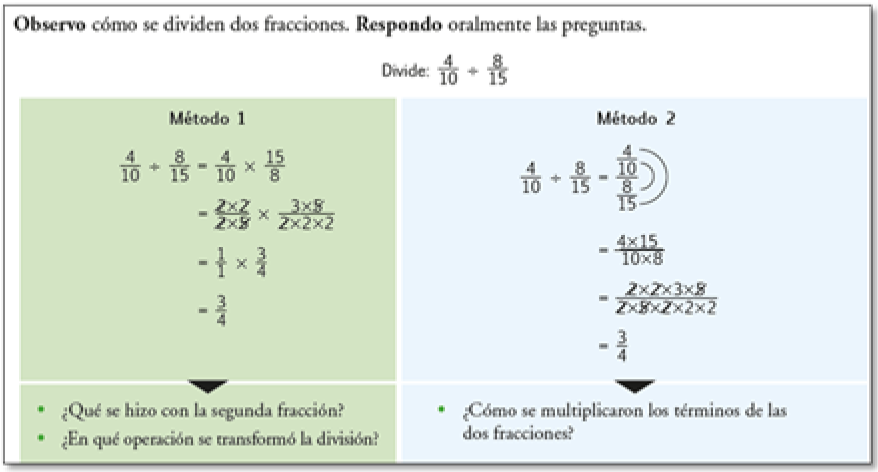


Figura 95. Proceso para realizar división de fracciones. (MINEDUC, 2016).

La figura 96, muestra a los estudiantes el proceso para realizar la división de fracciones de forma gráfica.

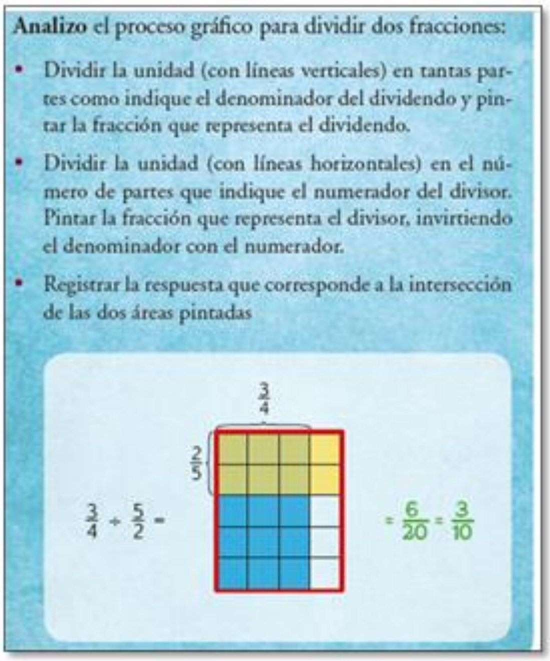


Figura 96. División de fracciones de forma gráfica. (MINEDUC, 2016).

Actividad 2: Actividades diseñadas para que los estudiantes aprendan a resolver y plantear problemas de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con fracciones e interpretar la solución dentro del contexto del problema.

La figura 97, muestra un ejemplo de un ejercicio con múltiples combinaciones de suma, resta, multiplicación y división, junto con un grupo de preguntas que el estudiante debe responder.

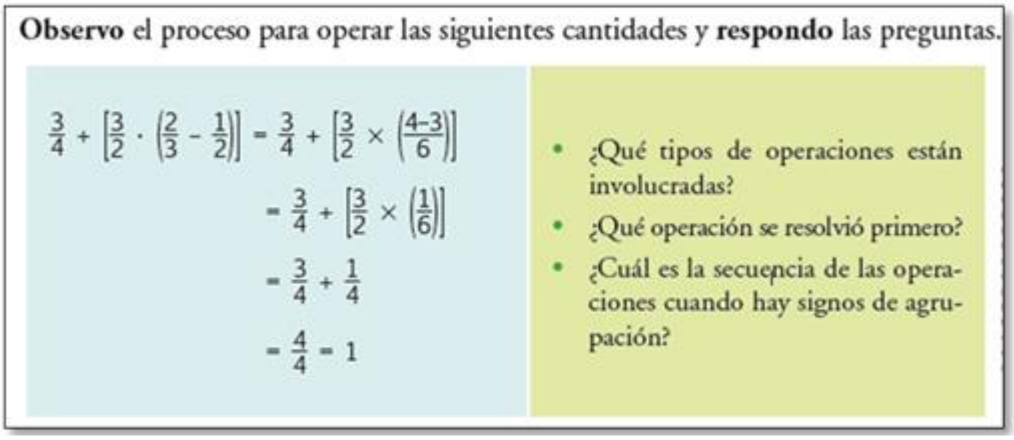


Figura 97. Ejercicio con operaciones combinadas. (MINEDUC, 2016).

Actividad 3: Las siguientes actividades esta diseñadas para que el estudiante aprenda a realizar cálculos combinados entre fracciones.

La figura 98, muestra los estudiantes el proceso para realizar operaciones combinadas con números fraccionarios, del lado izquierdo se explica cómo resolver ejercicios con signos de agrupación y del lado derecho sin signos de agrupación.

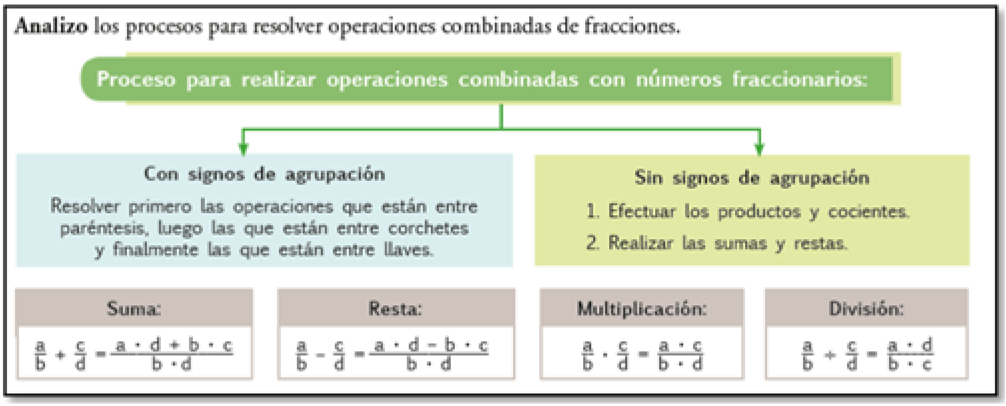


Figura 98. Proceso para realizar operaciones combinadas. (MINEDUC, 2016).

La figura 99, es un problema que los estudiantes deben resolver en grupo, con un total de cinco preguntas a responder, usando operaciones de fracciones.

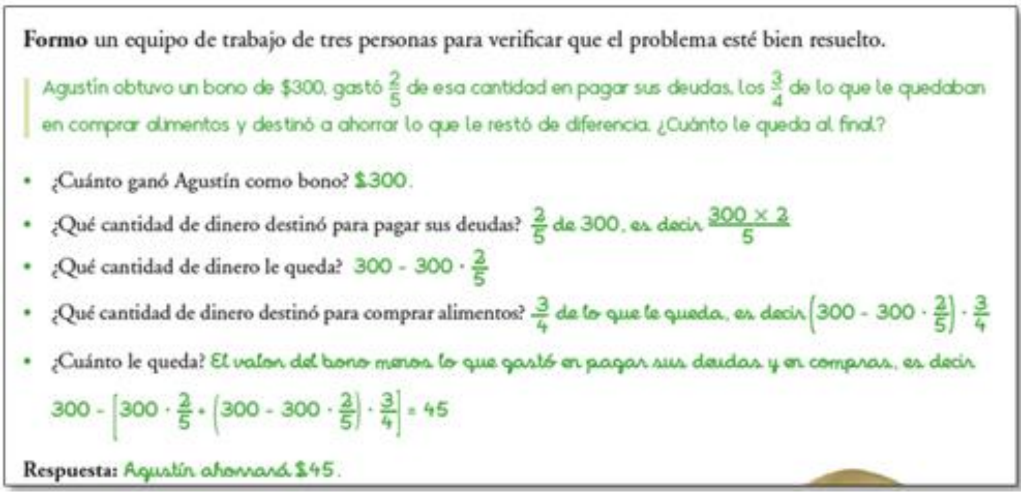
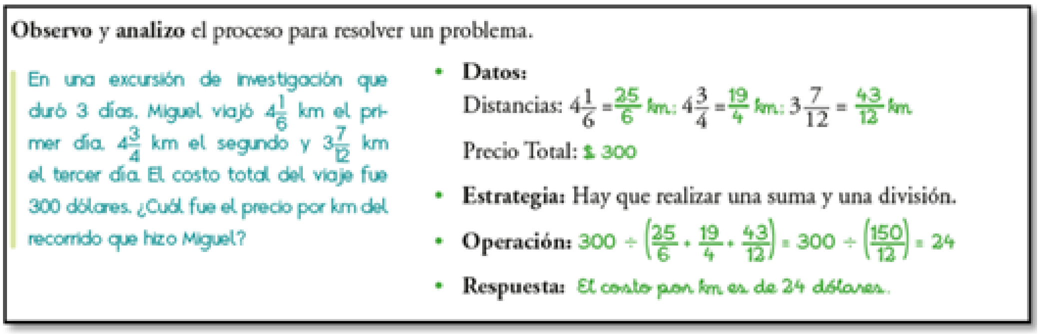


Figura 99. Problema de fracciones para resolver en grupo. (MINEDUC, 2016).

Actividad 4: El siguiente grupo de actividades están diseñadas para que los estudiantes aprendan a resolver y plantear problemas que contienen combinaciones de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números naturales, fracciones y decimales.

La figura 100, muestra un problema que el estudiante debe resolver paso a paso, empezado por distinguir los datos, y proceder con la estrategia a emplear, la operación matemática y finalmente determinar la respuesta correcta.

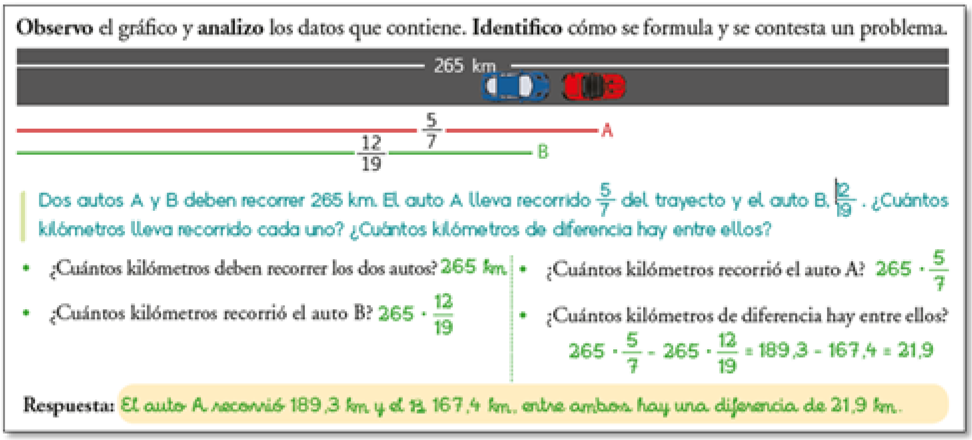

Observo y **analizo** el proceso para resolver un problema.

En una excursión de investigación que duró 3 días, Miguel viajó $4\frac{1}{6}$ km el primer día, $4\frac{3}{4}$ km el segundo y $3\frac{7}{12}$ km el tercer día. El costo total del viaje fue 300 dólares. ¿Cuál fue el precio por km del recorrido que hizo Miguel?

- **Datos:**
  Distancias: $4\frac{1}{6} = \frac{25}{6}$ km; $4\frac{3}{4} = \frac{19}{4}$ km; $3\frac{7}{12} = \frac{43}{12}$ km
  Precio Total: $ 300
- **Estrategia:** Hay que realizar una suma y una división.
- **Operación:** $300 \div \left(\frac{25}{6} + \frac{19}{4} + \frac{43}{12}\right) = 300 \div \left(\frac{150}{12}\right) = 24$
- **Respuesta:** El costo por km es de 24 dólares.

Figura 100. Problema que involucra más de una operación con fracciones. (MINEDUC, 2016).

La figura 101, muestra un problema en el cual se involucran las fracciones de forma gráfica, donde el alumno debe responder unas preguntas concretar después de observar el grafico.



Dos autos A y B deben recorrer 265 km. El auto A lleva recorrido $\frac{5}{7}$ del trayecto y el auto B, $\frac{12}{19}$. ¿Cuántos kilómetros lleva recorrido cada uno? ¿Cuántos kilómetros de diferencia hay entre ellos?

- ¿Cuántos kilómetros deben recorrer los dos autos? 265 km.
- ¿Cuántos kilómetros recorrió el auto B? $265 \cdot \frac{12}{19}$
- ¿Cuántos kilómetros recorrió el auto A? $265 \cdot \frac{5}{7}$
- ¿Cuántos kilómetros de diferencia hay entre ellos? $265 \cdot \frac{5}{7} - 265 \cdot \frac{12}{19} = 189{,}3 - 167{,}4 = 21{,}9$

Respuesta: El auto A recorrió 189,3 km y el B 167,4 km, entre ambos hay una diferencia de 21,9 km.

Figura 101. Problema gráfico de fracciones. (MINEDUC, 2016).

Actividad 5: Las siguientes actividades están diseñadas para que el estudiante aprenda a establecer relaciones de secuencia y orden entre números naturales, fracciones y decimales.

La figura 102, es un ejemplo de cómo relacionar el valor de un número dependiendo si es natural, fracción o decimal. En este problema el estudiante debe responder algunas preguntas.

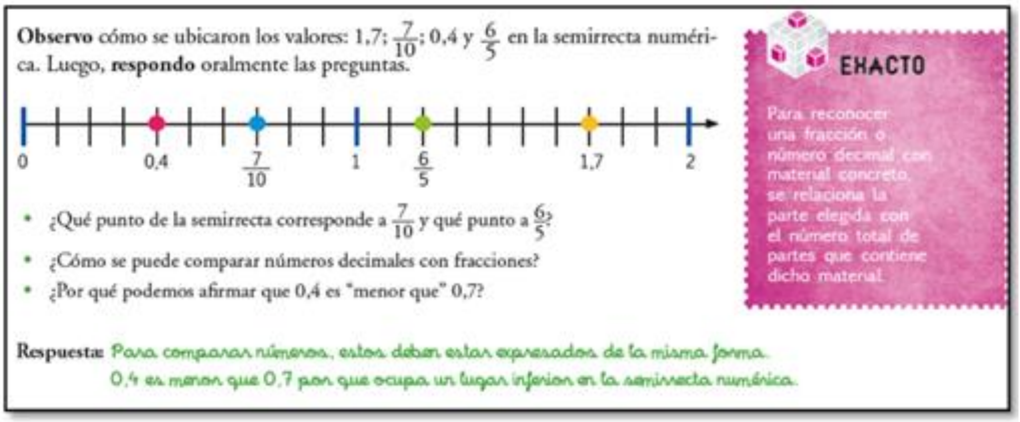


Figura 102. Relación de orden entre números naturales, fracciones y decimales. (MINEDUC, 2016).

La figura 103, son unas preguntas que el alumno debe responder en base al enunciado propuesto.

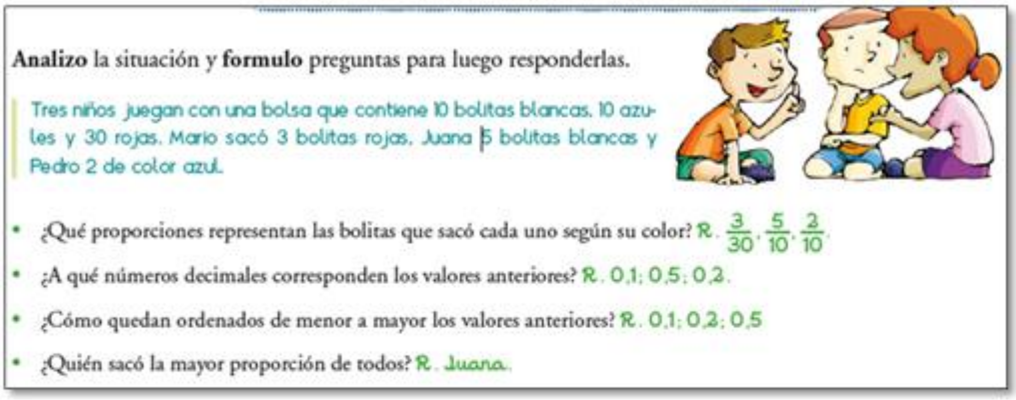


Figura 103. Problema de fracciones. (MINEDUC, 2016).

3.6. Análisis de los libros de texto.

Los texto del MINEDUC son elaborados según el modelo epistemológico de la matemática, lo que significa que dentro de este modelo se considera que el estudiante logra un aprendizaje más significativo cuando este soluciona ejemplos y problemas de matemática cuando se encuentran en un contexto de la vida real, recurriendo a varios materiales, herramientas y conceptos que ya se saben que funcionan. Junto con el modelo epistemológico se encuentra la visión epistemológica la cual según el NCTM (2000) "se plantea una visión pedagógica que se debe tener en cuenta en la organización de la enseñanza, ya que permite que el estudiante sea el protagonista del proceso educativo y los procesos matemáticos".

Cuando a un alumno se le plantea un problema dentro de una situación real independientemente del grado de dificultad, el alumno es capaz de interpretarlo por medio de un conjunto de habilidades desarrolladas y expresarlos en, expresiones algebraicas, modelos, gráficos, etc. Posteriormente, será capaz de establecer que acción tomar para resolver el problema.

La resolución de problemas aritméticos, algebraicos y contextualizados no es el objetivo principal de la enseñanza de las fracciones, sino la herramienta fundamental para lograr el aprendizaje. Por lo cual, la resolución de problemas debe implicar:

- *La exploración de posibles soluciones:* El alumno debe considerar previamente que tipo de respuesta obtendrá del problema.
- *Modelización de la realidad:* El alumno debe conceptualizar y visualizar el problema para su resolución.
- *Desarrollo de estrategias:* El alumno debe pensar en los métodos requeridos para resolver el problema.
- *Aplicación de técnicas:* Usar correctamente lo aprendido para la resolución del problema.

Así, el estudiante acompañado del uso de recursos verbales, simbólicos y gráficos, tendrá oportunidades para plantear, explorar, y resolver problemas.

Dentro de los libros de texto en el área de fracciones se utiliza un lenguaje matemático de manera representacional, debido a que se puede expresar e interpretar objetos abstractos y hacer referencia a palabras, símbolos o gráficas. El lenguaje utilizado es primordial para lograr los siguientes objetivos:

- Comunicar las interpretaciones matemáticas de forma correcta.
- Dar solución a los problemas planeados.
- Establecer conexiones entre los diferentes conceptos.
- Aplicar las fracciones a problemas de la vida real.
- Lograr utilizar los nuevos recursos tecnológicos.

El razonamiento de los estudiantes y la demostración de los problemas son factores fundamentales para el conocimiento y entendimiento de las fracciones, debido a que por medio de la observación de fenómenos, el planteamiento de hipótesis y la verificación de resultados acerca de un gran número de temas de diferentes niveles de dificultad, permite que el estudiante pueda apreciar el sentido de la matemática en el tema de fracciones, conectar las fracciones entre sí, y aplicarlas en otras áreas dentro de un contexto de su propio interés. Logrando que el aprendizaje de las fracciones se vuelve profunda y duradera.

Los textos empleados para la enseñanza de fracciones en EGBM, están elaborados considerando los artículos de la Constitución del Ecuador, por lo tanto, se presentan problemas dentro de situaciones reales, que invitan a los estudiantes a reflexionar y establecer normas de convivencia dentro del aula de clases. Los ejercicios planteados no se limitan al espacio científico de las matemáticas, sino que introducen otros ámbitos fenomenológicos como: el cuidado del medio ambiente, la agricultura-ganadería y el ser humano. Esto con el propósito de poder dar respuesta a una de las preguntas que más se escucha en las aulas de clases realizados por los alumnos “¿pero esto sirve para algo?” o “¿para qué sirve esto?”.

Además, para fomentar e invitar a la lectura, los textos son llamativos, empleando dibujos didácticos a multicolor.

La ejecución del proyecto educativo ecuatoriano, requiere de varios materiales y herramientas previamente preparados, que estén acordes con la edad de los alumnos y nivel académico que se encuentre cursando. Por lo que los textos son estructurados de la siguiente manera:

- *Entrada de unidad:* Corresponde a una sección la cual proporciona los objetivos educativos y las destrezas con criterios de desempeño que se desarrollarán en la unidad.
- *Mi carátula:* a partir de una flexión sobre el entorno, los estudiantes se involucrarán activamente en el proceso de enseñanza – aprendizaje y crearán ingeniosas carátulas de la unidad
- *Contenidos:* luego de una activación de conocimientos previos y una retroalimentación de los saberes mínimos requeridos para abordar los nuevos temas, los estudiantes edificarán sus saberes mediante un proceso inductivo – deductivo.
- *Actividades resueltas:* en esta sección los estudiantes cuentan con más ejemplos para reforzar los conocimientos adquiridos y con situaciones problemáticas reales que están acompañadas de sus respectivas estrategias de solución, con lo cual se demuestra la praxis de la matemática. También se incluye un espacio que evidencia el carácter interdisciplinario de la matemática en el tema de fracciones.

Además de lo explicado anteriormente, para impulsar el desarrollo de los conocimientos, los libros de texto cuentan con las siguientes mini secciones:

- *Buen Vivir:* Conjunto de datos relacionados con el tema de las fracciones y que generan un sentido de convivencia entre las personas y su entorno.
- *Tu mundo digital:* Contiene un grupo de páginas web debidamente aprobadas por el ministerio de educación y recomendadas para expandir los conocimientos de los alumnos.

- *Evaluación diagnóstica:* Una evaluación dirigida a los estudiantes, por la cual los profesores podrán evaluar los conocimientos actuales de sus alumnos y posteriormente mejorar y nivelar los conocimientos aprendidos en el año lectivo anterior.
- *Matemática en acción:* La sección consiste en una evaluación formativa, que está diseñada en dos partes: la primera evaluación se la realiza a los estudiantes en el aula de clases y la segunda evaluación los estudiantes la resuelven en sus hogares.
- *Construyendo el Buen Vivir:* A partir de artículos de la Constitución del Ecuador, se plantean situaciones reales, con el propósito que los alumnos reflexionen y establezcan normas de convivencia.
- *Mi proyecto:* Consiste en un proyecto práctico que deben realizar los alumnos, el cual está vinculado con la ciudadanía y con el desarrollo del "Buen Vivir".
- *Mi mapa de la unidad:* Sesión conformada por organizadores gráficos, con los cuales, los estudiantes pueden retroalimentar lo previamente aprendido en cada una de las unidades que tiene el libro.
- *Evaluación formativa-sumatoria:* Es una evaluación parcial, la cual fue diseñada considerando los objetivos principales de la respectiva unidad, (las unidades 3 y 6 corresponden a las respectivas evaluaciones quimestrales).
- *Evaluando mi desempeño:* Radica en una autoevaluación donde los estudiantes podrán determinar su nivel de aprendizaje alcanzado.
- *Plan de mejora:* Consiste en un grupo de actividades de refuerzo, que el docente proporciona a los estudiantes considerando los resultados que los estudiantes obtuvieron de la evaluación sumatoria y de la autoevaluación.

Al revisar detalladamente los libros suministrados por el ministerio de educación, se evidencia que en ningún texto (5º, 6º y 7º grado de EGBM) se utilizan recursos no convencionales para su enseñanza de fracciones como: el diagrama de freudenthal, el puzzle de fracciones, el dominó y trasparencia de cuadrados entre otros descritos anteriormente. Además, los ejercicios de fracciones que presentan los textos se centran solo en el número de partes sin tomar en consideración la necesidad de que las partes sean equivalentes en área y representaciones gráficas discretas. También si se consideran las nuevas tecnologías que existen para la enseñanza de fracciones, en los textos no se evidencia su uso, consta solamente como bibliografía o referencia, tal como se explicó en el apartado anterior ("Tu mundo digital") solamente se las menciona y no se las utiliza.

Debido a la falta de usos de nuevos métodos que no se encuentran en los textos, los docentes caen en la monotonía al momento de enseñar esta asignatura. Lo que conduce al hecho de que los docentes no deben usar exclusivamente un solo libro, por lo tanto, es necesario enfatizar que las estrategias y la metodología didácticas de los docentes no tienen por qué ser monótonas ni tediosas. El docente tiene la tarea de incentivar y estimular a sus estudiantes para que despierten interés en los temas a explicar. Aunque los texto son útiles y están diseñados bajo rigurosos estándares, en necesario que los docentes actualicen la enseñanza tradicional que está basada en el uso del pizarrón y la enseñanza de conceptos, con el uso de materiales didácticos y recursos que los estudiantes puedan manipularla para que estos reconozcan a las matemáticas como algo más natural y entretenido. Al utilizar varios materiales y diversos recursos al momento de enseñar fracciones, los estudiantes no se restringirán al concepto básico y lograrán explorar más significados.

4. CAPÍTULO 4

4.1. Diseño o modalidad de la investigación.

La metodología consiste es una serie de métodos (técnicas, ensayos, pruebas, diseño experimental, modelo estadístico, etc.) de carácter científico que se aplican sistemáticamente a lo largo de un proceso de investigación con el propósito de lograr un resultado teórico que sea verídico y funciona como el soporte conceptual que rige la manera en que se aplica los procedimientos en una investigación (Sánchez, 2004). La metodología corresponde a un momento donde se debe tener claridad sobre el tipo de investigación que se va a realizar, por esa razón, a continuación, se describe paso a paso cada una de las fases por las cuales atraviesa el presente proceso investigativo:

- **Primera fase:** la técnica de investigación que se empleará es la encuesta, acompañada de un cuestionario, se determinará los materiales y recursos que los docentes de las Unidades Educativas Gubernamentales de EGBM de la Ciudad de Latacunga Provincia de Cotopaxi emplean en la enseñanza de la matemática en el tema de fracciones dentro del aula de clase ver anexo F.

- **Segunda fase:** de todos los materiales y recursos que acabamos de describir no se pretende que los decentes se vean influenciados en el uso de uno u otro material por lo que la propuesta comprende el uso de materiales recortados prediseñados, que por ser de bajo costo, está al alcance de docentes y estudiantes que servirá como estrategia lúdica para fortalecer el aprendizaje de fracciones que se aplicará mediante un cuestionario a los niños y niñas de diez Unidades Educativas Públicas de la Ciudad de Latacunga, a los séptimo año paralelo “B” y de esta manera se realizará un análisis comparativo entre los paralelo “A” que no utilizo ningún recurso y material y los paralelo “B” que si utilizaron materiales recortados prediseñados.

- **Tercera fase:** la investigación se llevo a cabo en diez Unidades Educativas Públicas Urbanas de la Ciudad de Latacunga - Ecuador, aquí se determinaro los errores que involucra el estudio de las fracciones de niños y niñas de los 7° año paralelo A y B de EGBM y la técnica de investigación que se utilizará es el cuestionario a través de preguntas abiertas y cerradas ver anexo G.

Para lograr los objetivos planteados de la investigación se empleará la metodología cuantitativa. Los estudios de investigación cuantitativa están diseñados para evaluar, predecir y estimar las actitudes y comportamiento de los alumnos y alumnas mediante el uso de varias estrategias de muestreo, para indagar las concepciones con respecto a la enseñanza y aprendizaje de fracciones, así como los recursos empleados.

En este contexto, se realizó el estudio mediante un instrumento descriptivo, que fue mediante el lenguaje. Para ello se usó un cuestionario, la cual es una técnica muy utilizada para recolectar información y datos, con él se pretende conocer lo que hacen, opinan o piensan los encuestados mediante preguntas realizadas por escrito. Como menciona Buendía (1998):

> "La encuesta es la metodología más indicada para recoger opiniones, creencias o aptitudes, porque si bien los encuestados pueden no decir lo que piensan realmente, al menos manifiestan lo que desean que el investigador sepa de ellos, por lo que es muy utilizada para obtener informaciones subjetivas de un gran número de sujetos". (p.34)

Finalmente, se presentarán los resultados obtenidos de encuestas a docentes y el cuestionario a estudiantes de EGBM.

4.2. Tipo de investigación.

La presente investigación por sus características responde a una investigación descriptiva, es decir, describe los hechos como son observados. Se basa fundamentalmente en la investigación cuantitativa de carácter descriptivo. Según Tamayo (2014) la misma comprende la descripción, registro, análisis e interpretación de la naturaleza actual, y la estructura o proceso de los fenómenos. La orientación se hace sobre conclusiones dominantes: grupo de personas, o cosas. Por su parte Goetz (1988) menciona que la investigación descriptiva permite establecer cuáles son los eventos y magnitud en que se encuentra en el sujeto estudiado o en la comunidad, buscando describir solo la realidad. Para Hernández, Fernández y Batista (2006), “la investigación descriptiva busca especificar las propiedades, características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis”. Por ello, en general, se dice que el objetivo del investigador consiste en describir fenómenos, situaciones, contextos y eventos esto es, detallar como son y de qué manera se manifiestan.

En este tipo de investigación es aplicativa y explicativa en donde se utiliza la observación participativa y no participativa, a través del análisis de comportamientos, actitudes, experiencias, encuestas y documentos legales como la constitución.

- Es aplicada porque está dirigida a solucionar problemas en el campo educativo mediante la utilización de recursos en el estudio de fracciones.
- Es explicativa porque su principal objetivo se basará en buscar las causas y efectos que produce el uso de modelos, recursos o material concreto, en la enseñanza de fracciones y el desarrollo de la destreza matemática en los alumnos del EGBM.

Para la recolección de datos de los estudiantes de EGBM se utiliza el cuestionario, mientras que para los docentes se utiliza la encuesta. Los resultados, se procesan a través del uso de herramientas estadísticas, ya que permiten obtener mayores niveles de confiabilidad y entender de forma racional los efectos de diversos recursos empleados por el docente en el aula de clase.

Otra técnica que se empleó, es la observación antes y después de la investigación para verificar la validez de la propuesta, en este caso materiales recortados prediseñados utilizados en la enseñanza de fracciones, material concreto manejado en el desarrollo de las destrezas matemáticas y el instrumento que se aplicará, es el fichaje utilizada especialmente por el investigador, consiste en registrar los datos que se van obteniendo en los instrumentos llamados fichas, las cuales, debidamente elaboradas y ordenadas contienen la mayor parte de la información que se recopila de la investigación realizada al grupo de docentes y estudiantes de EGBM de la ciudad de Latacunga Provincia de Cotopaxi.

Y por último se aplicará la observación directa porque habrá reuniones previas con el hecho o fenómeno que se trata de investigar, es decir habrá acercamientos previos con docentes y estudiantes, tomando en consideración que la observación es un elemento fundamental de todo proceso investigativo, en ella se apoya el investigador para obtener el mayor número de datos. Van y Meyer (1981) consideran que "la observación juega un papel muy importante en toda investigación porque le proporciona uno de sus elementos fundamentales". (p.54).

4.3. Unidad de estudio o población de los docentes.

En la primera actividad, ilustrada en la tabla 5, unidad de estudio o población son los docentes del área de matemática de EGBM información obtenida de las Unidades Educativas Gubernamentales Urbanas de la ciudad de Latacunga Provincia de Cotopaxi – Ecuador.

Tabla 5. Número de docentes de las unidades educativas de la ciudad de Latacunga.

UNIDADES EDUCATIVAS	5°TO GRADO	6°TO GRADO	7°MO GRADO	TOTAL
1. VICTORIA V. CUVI	2	2	1	5
2. LUIS F. RUIZ	1	2	2	5
3. 11 DE NOVIEMBRE	3	2	2	7
4. MANUEL ALBÁN	1	1		2
5. ISIDRO AYORA	4	3	3	10
6. VICENTE LEÓN	3	2	2	7
7. 1 DE ABRIL	2	1	1	4
8. MAGNO ANDRADE	1			1
9. CLUB ROTARIO	2	2	1	5
10. TRAJANO NARANJO	1	1	1	3
TOTAL				**54**

4.4. Tamaño de la muestra

Para la investigación, se ha considerado las diez Unidades Educativas Públicas Urbanas distribuidas en la ciudad de Latacunga, Provincia de Cotopaxi. En la tabla 5, se aprecia que en total hay 54 docentes de planta para toda la EGBM (niños y niñas entre 9 y 11 años de edad, distribuidos en el 5to, 6to y 7mo grado).
Por ser una población pequeña de docentes, para el estudio del primer evento se considera el total de profesores.

En cuanto a determinar los errores y aplicar la propuesta, se toma en cuenta a los estudiantes del 7mo grado paralelo A y B de un total de 10 Instituciones Educativas de la ciudad de Latacunga-Ecuador, cuya población total en dichos grados ascienden a 600 estudiantes 30 estudiantes por cada paralelo A y B, de las 10 instituciones educativas.

4.5. Resultados de la encuesta realizada a los docentes.

Los resultados que se describen a continuación corresponden a la encuesta sobre los recursos que emplean los docentes para la enseñanza de fracciones. La encuesta consta de 30 preguntas y fue aplicada a los 54 docentes de EGBM de la ciudad de Latacunga.

1. **Género de los docentes.**

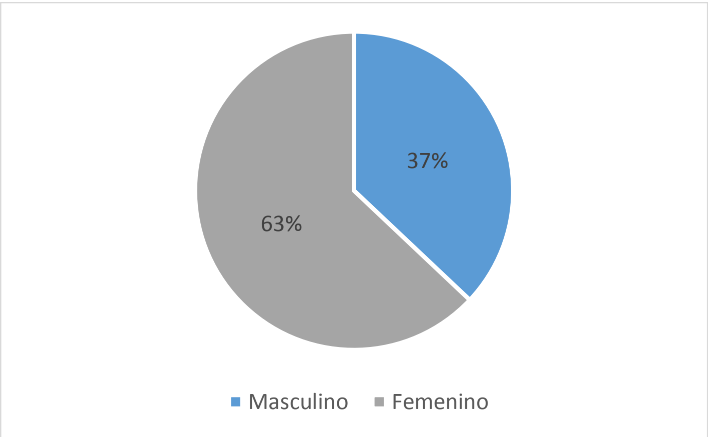


Figura 104. Género de los docentes encuestados expresados como Porcentaje.

Tabla 6. Género de los docentes encuestados.

Alternativas	Frecuencia	Porcentaje (%)
Masculino	20	37
Femenino	34	63
Total	**54**	**100**

Con respecto al género de los docentes, se aprecia en la tabla 6, que en su mayoría los docentes son mujeres y siendo casi el doble que los docentes hombres, lo que sugiere que son las mujeres que en su mayoría opta por impartir clases a este grupo específico de estudiantes.

2. Edad de los docentes.

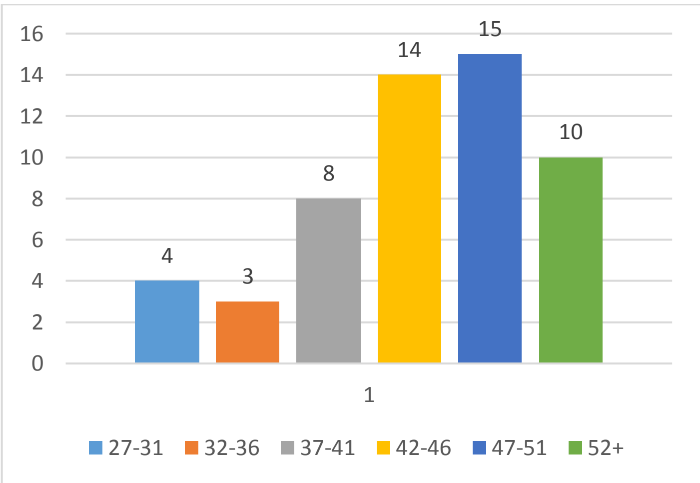


Figura 105. Edades de los docentes representados en 6 grupos.

Tabla 7. Edades de los docentes encuestados.

Alternativas	Frecuencia	Porcentaje (%)
27 hasta 31 años	4	7
32 hasta 36 años	3	6
37 hasta 41 años	8	15
42 hasta 46 años	14	26
47 hasta 51 años	15	28
52 en adelante	10	18
Total	**54**	**100**

Con respecto a la edad de los docentes, se pueden observar en la tabla 7, que las frecuencias más altas corresponden a docentes con edades comprendidas desde 42 años en adelante, el cual corresponde al 72% del total de docentes, esto sugiere que los docentes de educación general básica media de estas instituciones educativas cuentan con una vasta experiencia en el área.

3. Años de servicio en dentro de la Educación General Básica Media (EGBM).

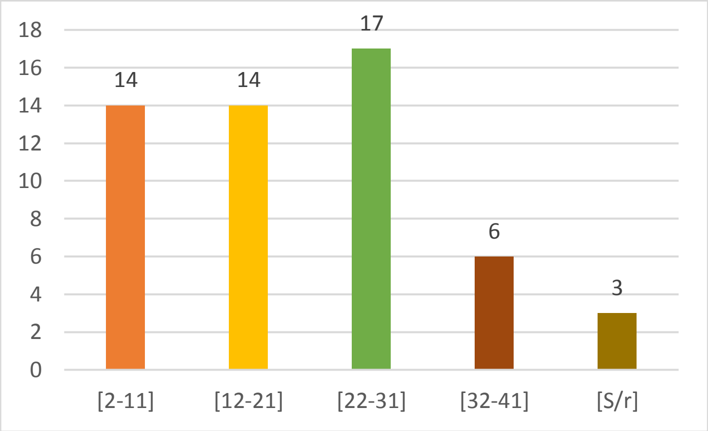


Figura 106. Años de servicio por parte de los docentes, representado en 5 grupos.

Tabla 8. Años de servicio de los docentes encuestados.

Alternativas	Frecuencia	Porcentaje (%)
2 hasta 11 de servicio	14	26
12 hasta 21 de servicio	14	26
22 hasta 31 de servicio	17	31
32 hasta 41 de servicio	6	11
S/r	3	6
Total	**54**	**100**

Respecto a los años de servicio en EGBM, en la tabla 8 se evidencia, que la mayor parte docentes tienen desde 22 hasta 31 años de servicio, siendo 31% el porcentaje más alto, correspondiente a docentes entre 22 hasta 31 años de servicio, lo que confirma que los docentes cuentan con una extensa experiencia.

4. **Nivel Académico de los docentes (marque el mayor grado)**

Tabla 9. Estudios universitarios de los docentes encuestados.

Alternativas	**Frecuencia**	**Porcentaje (%)**
Licenciatura	49	91
Maestría	5	9
Doctorado	0	0
Total	**54**	**100**

La tabla 9 señala que la mayoría de los docentes cuentan únicamente con estudios de tercer nivel (licenciatura), y que apenas una gran minoría de los docentes cuentan con una maestría. Esto es relevante ya que, debido a la situación actual del país, un título de tercer nivel no es suficiente para cumplir con los requisitos impuestos por el MINEDUC para cumplir con el rol de docente.

5. **De acuerdo con su opinión, el número de alumnos óptimos en un grupo para lograr aprendizajes significativos es:**

Tabla 10. Cantidad de alumnos.

Alternativas	**Frecuencia**	**Porcentaje (%)**
10 alumnos	1	2
20 alumnos	21	39
30 alumnos	32	59
40 alumnos	0	0
Total	**54**	**100**

En base a los resultados de la tabla 10, se puede apreciar que la gran mayoría de los docentes consideran que 30 alumnos es un número óptimo para lograr aprendizajes significativos. Además, hay que recalcar que ningún docente considera que un número de estudiantes que exceda los 30 no es recomendable en el proceso educativo.

6. **Valore del 1 al 5, para usted como docente, enseñar el tema de las fracciones, resulta un proceso 1 muy difícil, 2 difícil, 3 complicado, 4 fácil y 5 muy fácil.**

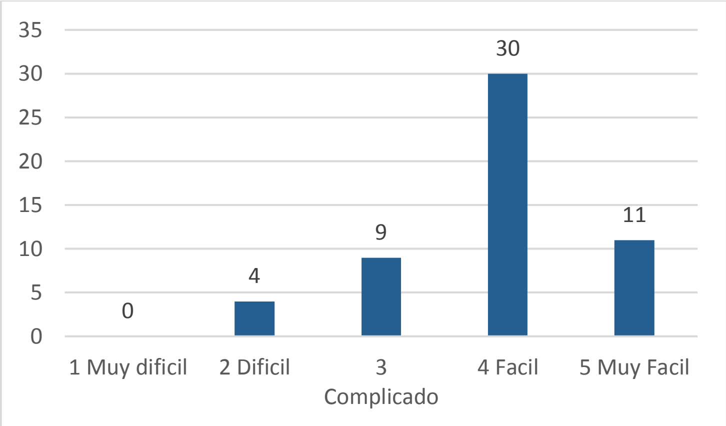


Figura 107. Dificultad de los docentes al momento de enseñar las fracciones.

Tabla 11. Dificultad de enseñanza.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Enseñar el tema de fracciones resulta:	1	0	0
	2	4	7
	3	9	17
	4	30	56
	5	11	20
Total		**54**	**100**

En la tabla 11, se puede ver que la mayoría de docentes consideran que el estudio de fracciones es fácil o muy fácil, esto se debe a que los docentes ya han pasado por una instrucción donde se estudia temas más complicados.

Para las siguientes preguntas, se solicita a los docentes que valoren la pregunta del 1 al 5, en donde 1 corresponde a de acuerdo, 2 parcialmente de acuerdo, 3 totalmente de acuerdo, 4 en desacuerdo y 5 totalmente en desacuerdo.

7. **En la enseñanza de las fracciones la manipulación de objetos constituye la base primordial de la construcción de conceptos.**

Tabla 12. Manipulación de objetos.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
En la enseñanza de las fracciones la manipulación de objetos constituye la base primordial de la construcción de conceptos.	1 – De acuerdo	12	22
	2 – Parcialmente de acuerdo	3	6
	3 – Totalmente de acuerdo	39	72
	4 – Desacuerdo	0	0
	5 – Totalmente desacuerdo	0	0
Total		**54**	**100**

Se puede observar en la tabla 12 que la mayoría de docentes están totalmente de acuerdo con la idea de que la manipulación de objetos es primordial en la enseñanza de fracciones, además de que ningún docente esta de algún modo en desacuerdo.

8. **Las actividades presentadas en los textos oficiales en el tema de las fracciones en EGMB son suficientes para generar aprendizajes significativos.**

Tabla 13. Uso del material oficial.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Las actividades presentadas en el libro de texto oficial referidas a las fracciones en EGMB son suficientes para generar aprendizajes significativos	1 – De acuerdo	3	6
	2 – Parcialmente de acuerdo	12	22
	3 – Totalmente de acuerdo	7	13
	4 – Desacuerdo	24	44
	5 – Totalmente desacuerdo	8	15
Total		**54**	**100**

De acuerdo con la opinión de los docentes, **s**e puede ver en la tabla 13, que la gran mayoría de los docentes están en desacuerdo con la idea que, los contenidos de los textos oficiales son suficientes para lograr aprendizajes significativos. Los docentes, así como alumnos toman el libro como una guía más no como una herramienta única dentro del aprendizaje de las fracciones, lo que brinda un mayor campo de posibilidades a desarrollar destrezas en este tema.

9. **La enseñanza de fracciones es una de las más importantes habilidades que deben poseen los niños/as.**

Tabla 14. Importancia de estudio.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
La enseñanza de fracciones es una de las más importantes habilidades que deben poseen los niños/as	1 – De acuerdo	6	11
	2 – Parcialmente de acuerdo	13	24
	3 – Totalmente de acuerdo	26	48
	4 – Desacuerdo	9	17
	5 – Totalmente desacuerdo	0	0
Total		**54**	**100**

En la tabla 14, se puede ver que una cantidad mayoritaria de docentes están de algún modo de acuerdo con la idea de que la enseñanza de las fracciones es importante, además es transcendental recalcar que ningún docente considera que las fracciones no son importantes.

10. **Las dificultades que presentan los niños/as para manejar el concepto de fracciones obedecen a la no utilización de materiales manipulables.**

Tabla 15. Dificultad de los estudiantes.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Las dificultades que presentas los niños/as para manejar el concepto de fracciones obedecen a la no utilización de materiales manipulables	1 – De acuerdo	9	17
	2 – Parcialmente de acuerdo	19	35
	3 – Totalmente de acuerdo	26	48
	4 – Desacuerdo	0	0
	5 – Totalmente desacuerdo	0	0
Total		**54**	**100**

En la tabla 15, se aprecia todos los docentes están en algún grado de acuerdo con que los estudiantes tienen dificultades de aprendizaje debido a que no utilizan algún tipo de material al momento de estudiar el concepto de fracciones, sin embargo, debido a que la encuesta está dirigida a los docentes no se puede saber cuáles son esas dificultades que se le presentan al estudiante.

Para las siguientes preguntas se solicita a los docentes que valoren del 1 al 5, donde 1 corresponde a siempre, 2 frecuentemente, 3 algunas veces, 4 rara vez y 5 nunca.

11. ¿Cuándo usted enseña fracciones recurre a "materiales recortados prediseñados"?

Tabla 16. Frecuencia de uso de materiales.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Materiales recortados prediseñados	1 – Siempre	13	24
	2 – Frecuentemente	18	33
	3 – Algunas veces	13	24
	4 – Rara vez	3	6
	5 – Nunca	7	13
Total		**54**	**100**

Entre las respuestas de los docentes, se puede ver en la tabla 16, que la gran mayoría de docentes, están utilizando en alguna manera material adicional para la enseñanza de las fracciones, mientras que los docentes que casi no utilizan estas herramientas son una gran minoría.

12. Frecuencia de uso de bloques de fracciones o muro de fracciones.

Tabla 17. Uso de bloque de fracciones.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Bloques de fracciones	1 – Siempre	14	26
	2 – Frecuentemente	12	22
	3 – Algunas veces	12	22
	4 – Rara vez	10	19
	5 – Nunca	6	11
Total		**54**	**100**

Entre las respuestas de los docentes mostrados en la tabla 17, se puede observar que, entre siempre, frecuentemente y algunas veces el 70% de docentes han recurrido al uso de bloques de fracciones para enseñar este tema, como parte de la metodología que emplean.

13. Frecuencia de uso de las regletas Cuisenaire.

Tabla 18. Regletas Cuisenaire.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Regletas Cuisenaire	1 – Siempre	12	22
	2 – Frecuentemente	9	17
	3 – Algunas veces	11	20
	4 – Rara vez	6	11
	5 – Nunca	16	30
Total		**54**	**100**

Según se muestra en la tabla 18, el 30% de docentes nunca han recurrido a estas regletas Cuisenaire para la enseñanza de fracciones, sin embargo, se puede ver que la mayor parte de ellos han hecho uso de ellas por lo menos alguna vez dentro de sus años de enseñanza y del proceso aprendizaje de fracciones por parte de los alumnos.

14. Aplicando las TIC.

Tabla 19. TIC.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Aplicando las TIC	1 – Siempre	10	18
	2 – Frecuentemente	16	30
	3 – Algunas veces	7	13
	4 – Rara vez	12	22
	5 – Nunca	9	17
Total		**54**	**100**

En la tabla 19 se puede observar, que la mayor parte de docentes aplican frecuentemente las TIC para la enseñanza de fracciones, o lo han hecho por lo menos alguna vez, lo que muestra que los docentes están familiarizados con las tecnologías de información y comunicación y su favorable participación dentro del proceso de enseñanza, pues la dinámica de estas herramientas llama mucho más la atención de los alumnos en cualquiera que sea el tema que se esté tratando durante las clases.

15. Grado de utilización de fracciones lineales.

Tabla 20. Fracciones lineales.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Fracciones lineales	1 – Siempre	10	18
	2 – Frecuentemente	9	17
	3 – Algunas veces	9	17
	4 – Rara vez	17	31
	5 – Nunca	9	17
Total		**54**	**100**

A partir de los porcentajes que se describen en la tabla 20, se puede ver que, un gran número de docentes han recurrido rara vez o nunca al uso de las fracciones lineales dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de fracciones, sin embargo, también existe un porcentaje casi igual de docentes que han recurrido a fracciones lineales siempre, frecuentemente o alguna vez durante el proceso de enseñanza.

16. Sólo ejercicios del libro que le proporciona el Ministerio de Educación.

Tabla 21. Uso exclusivo del material oficial.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Solo ejercicios del libro que le proporciona el Ministerio de educación.	1 – Siempre	9	17
	2 – Frecuentemente	9	17
	3 – Algunas veces	16	29
	4 – Rara vez	13	24
	5 – Nunca	7	13
Total		**54**	**100**

Se puede ver en la tabla 21 que, la mayor parte de docentes no toman al libro del Ministerio de Educación como único material de ejercicios y que han recurrido a otros medios de información, como libros escritos por otros autores que tengan una perspectiva diferente de la noción de fracciones, o diferentes materiales que contengan ejercicios o referencia teóricas que lo docentes consideran pertinentes hacerlas llegar a los alumnos y que los textos del Ministerio de Educación no disponen.

17. Enseñanza de fracciones con piezas de Lego

Tabla 22. Piezas de Lego

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Usando piezas de LEGO	1 – Siempre	3	6
	2 – Frecuentemente	14	26
	3 – Algunas veces	8	15
	4 – Rara vez	14	26
	5 – Nunca	15	27
Total		**54**	**100**

En la tabla 22, se puede observar que, el porcentaje de docentes que nunca o rara vez han utilizado piezas de legos son casi iguales, mientras que el porcentaje de docentes que usan estas piezas siempre, frecuentemente o algunas veces, durante las clases son pocos.

18. Enseñanza de fracciones usando el muro de fracciones

Tabla 23. Muro de fracciones

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Muro de fracciones	1 – Siempre	13	24
	2 – Frecuentemente	7	13
	3 – Algunas veces	8	15
	4 – Rara vez	14	26
	5 – Nunca	12	22
Total		**54**	**100**

En la tabla 23 se indica que, un gran número de docentes el 48% han recurrido al uso del muro de fracciones rara vez o nunca, seguido de un 52% de docentes que si los usan de alguna manera. De esta diferencia entre las frecuencias se evidencia que esta herramienta no es la preferida entre las que se dispone para enseñar fracciones.

19. Estudio de fracciones con el juego de la rayuela.

Tabla 24. Rayuela.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Fracciones con la rayuela	1 – Siempre	4	8
	2 – Frecuentemente	5	9
	3 – Algunas veces	11	20
	4 – Rara vez	14	26
	5 – Nunca	20	37
Total		**54**	**100**

En la tabla 24 se puede observar que, la mayor parte de docentes nunca o rara vez han recurrido a la enseñanza de fracciones con el método de la rayuela, hay pocos docentes que hayan recurrido en algún momento a este método, esto puede ser evidencia de que esta herramienta no es conocida por parte de los docentes o que no consideran que colabore sustancialmente al proceso de enseñanza.

20. Estudio de fracciones usando el juego (Bingo de Fracciones)

Tabla 25. Bingo de fracciones.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Bingo de fracciones	1 – Siempre	7	13
	2 – Frecuentemente	10	19
	3 – Algunas veces	13	24
	4 – Rara vez	13	24
	5 – Nunca	11	20
Total		**54**	**100**

En la tabla 25, se puede observar que, la mayor parte de docentes han recurrido al bingo de fracciones algunas veces o rara vez y tendiendo como tercera frecuencia más alta a la cantidad de docentes que nunca han hecho uso del bingo de fracciones para desarrollar e impartir sus clases de fracciones. A pesar de que si existen docentes que aplican o recurren al bingo de fracciones para las clases de este tema resulta importante destacar que esta metodología no es necesariamente la preferida entre los docentes y que podría considerarse como una opción complementaria, dentro del bagaje de herramientas existentes.

21. Representación gráfica de fracciones.

Tabla 26. Gráficamente.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Representación gráfica de fracciones	1 – Siempre	31	58
	2 – Frecuentemente	5	9
	3 – Algunas veces	11	20
	4 – Rara vez	2	4
	5 – Nunca	5	9
Total		**54**	**100**

En la tabla 26 se puede ver que, la mayor parte de docentes siempre han recurrido a representaciones gráficas de fracciones, además que un gran porcentaje de docentes lo utilizan de algún modo, y que hay pocos profesores que desconocen o evitan esta metodología, esto se debe a que resulta fácil realizar una representación gráfica de fracciones y relacionarles con cantidades cotidianas que los estudiantes observan o conviven.

22. Enseñanza de fracciones usando el juego (Dominó de fracciones).

Tabla 27. Dominó de fracciones.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Dominó de fracciones	1 – Siempre	10	18
	2 – Frecuentemente	12	22
	3 – Algunas veces	9	17
	4 – Rara vez	9	17
	5 – Nunca	14	26
Total		**54**	**100**

En la tabla 27 se puede observar que, existe una especia de equilibrio entre los docentes que utilizan y los que no utilizan el domino de fracciones, la diferencia entre los porcentajes no es lo suficientemente grande como para afirmar que una valoración es más usada que otra.

23. Uso de fracciones en torres con equivalencias.

Tabla 28. Torres con equivalencias.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Fracciones en torres con equivalencias	1 – Siempre	4	7
	2 – Frecuentemente	12	22
	3 – Algunas veces	16	30
	4 – Rara vez	9	17
	5 – Nunca	13	24
Total		**54**	**100**

En la tabla 28 se puede ver que, la mayor parte de docentes han recurrido en algún momento a las fracciones en torres con equivalencias dentro del proceso de enseñanza de fracciones, sin embargo el porcentaje de rara vez o nunca es significativo, por lo que se demuestra que no es una opción muy viable para los docentes.

24. Estudio de fracciones con un set de fracciones circulares.

Tabla 29. Fracciones circulares.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Set de fracciones circulares	1 – Siempre	14	26
	2 – Frecuentemente	8	15
	3 – Algunas veces	13	24
	4 – Rara vez	9	17
	5 – Nunca	10	18
Total		**54**	**100**

Con la tabla 29 se puede determinar que, la mayor parte de docentes dentro de la enseñanza de fracciones han usado siempre un set de fracciones circulares, así mismo, existen docentes que no hacen uso de estos sets por lo que naturalmente optarán por otras fuentes metodológicas.

25. Estudio de fracciones usando un panel de equivalencias de fracciones.

El panel de fracciones equivalentes es un recurso pedagógico ideado para la comprensión concreta de las equivalencias utilizando tarjetas de tamaño proporcional que están codificadas por colores para que los valores equivalentes coincidan, igual al muro de fracciones.

Tabla 30. Panel de equivalencias.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Panel de equivalencias de fracciones	1 – Siempre	7	13
	2 – Frecuentemente	10	19
	3 – Algunas veces	12	22
	4 – Rara vez	10	19
	5 – Nunca	15	27
Total		**54**	**100**

De acuerdo con la tabla 30, se puede ver que, la mayor parte de docentes han recurrido al uso de panel de fracciones de equivalencias algunas veces o nunca seguido de la cantidad de docentes que han recurrido a estos paneles casi siempre y rara vez. Esta variabilidad entre las frecuencias evidencia que esta herramienta no es la preferida entre las que se dispone para enseñar fracciones, y que algunas veces es una herramienta opcional dentro del aula de clases.

26. Enseñanza de fracciones usando fracciones de madera.

Tabla 31. Fracciones de madera.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Fracciones de madera	1 – Siempre	5	9
	2 – Frecuentemente	3	5
	3 – Algunas veces	16	30
	4 – Rara vez	16	30
	5 – Nunca	14	26
Total		**54**	**100**

En la tabla 31, se observa que un porcentaje elevado de docentes como algunas veces, rara vez o nunca han recurrido al uso de fracciones, pero el porcentaje de docentes que si los usa como siempre y frecuentemente es muy bajo y se debería impulsar el uso de este material por sus bondades que presenta.

27. Otros; tales como (describa).

En esta sección se preguntó a los docentes si utilizan algún material que no se haya detallado anteriormente.

Tabla 32. Otros recursos.

Alternativas		Frecuencia	Porcentaje (%)
27. otros; tales como (describa)	Material del medio	6	11
	Materiales Didácticos	3	5
	Papel bond	2	4
	s/r	43	80
TOTAL		**54**	**100**

La tabla 32 señala que, el 80% de los docentes, siendo la mayoría no brindaron una respuesta, ante otro tipo de materiales que podría ser utilizados dentro del proceso de la enseñanza de las fracciones y que son muy pocos los docentes que utilizan alguna otra herramienta en el proceso de enseñanza.

28. ¿En los dos últimos años cuantos cursos ha tomado sobre actualización docente?

Tabla 33. Actualización de los docentes.

Alternativas	Frecuencia	Porcentaje (%)
1 hasta 5 cursos actualización docente	31	57
6 en adelante cursos actualización docente	0	0
Ninguno	23	43
Total	**54**	**100**

La tabla 33 recoge las respuestas de los docentes en lo referente a los cursos de actualización docente en los últimos dos años, y los resultados muestran que la mayor parte de docentes han realizado por lo menos un curso de actualización docente. Esto evidencia que la mayor parte de los docentes sienten la necesidad de estar actualizados en cuanto a metodologías de enseñanza y didácticas para promover un aprendizaje adecuado en los alumnos. Sin embargo, también es evidente que una proporción alta de docentes no han realizado ningún curso de actualización.

Para la siguiente pregunta, se solicita a los docentes que valoren la pregunta del 1 al 5, en donde 1 corresponde de acuerdo, 2 parcialmente de acuerdo, 3 totalmente de acuerdo, 4 en desacuerdo y 5 totalmente en desacuerdo.

29. ¿Considera que la actualización del docente que ofrece el Ministerio de Educación es adecuada para los requerimientos didácticos en EGBM?

Tabla 34. Actualización docente proporcionada por el Ministerio de Educación.

Ítem	Valoración	Frecuencia	Porcentaje (%)
Actualización docente que ofrece el Ministerio de Educación es adecuada	1 – De acuerdo	3	5
	2 – Parcialmente de acuerdo	29	54
	3 – Totalmente de acuerdo	10	19
	4 – En desacuerdo	7	13
	5 – Totalmente en desacuerdo	5	9
Total		**54**	**100**

Según la opinión de los docentes se puede ver en la tabla 34, que la gran mayoría de los docentes se encuentran de alguna manera de acuerdo con que, la actualización para el docente que ofrece el Ministerio de Educación es adecuada para los requerimientos didácticos en EGBM, además que un porcentaje muy bajo de docentes no está de acuerdo con esto.

30. ¿Cuántos cursos ha tomado sobre el tema de fracciones?

Tabla 35. Número de cursos tomados.

Alternativas	Frecuencia	Porcentaje (%)
1 hasta 5 cursos tomados en fracciones	24	44
6 en adelante cursos tomados en fracciones	1	2
Ninguno	29	54
Total	**54**	**100**

En base a las respuestas de los docentes con respecto los cursos que ha tomado sobre el tema de fracciones se pueden ver en la tabla 35 que, la mayor parte de los docentes no han realizado un curso particular de fracciones. Asimismo, existe una cantidad considerable de docentes que sí han realizado por lo menos un curso de fracciones habiendo también quien ha realizado más de 6 cursos referentes a este tema. Todos estos cursos seguramente ayudarán al docente a un mejor desenvolvimiento dentro del aula de clases en este tema.

4.6. Análisis de los datos obtenidos de las encuestas a los docentes.

En los siguientes gráficos se muestran la información necesaria para determinar si existe alguna relación entre las diferentes respuestas obtenidas a través de la encuesta.

Los gráficos 108 y 109 muestran que el número de docentes, tanto para hombres y mujeres corresponden la mayoría a edades de 37 años en adelante. También es importante recalcar que en el caso de los hombres el número de docentes es mayor cuando la edad esta entre 47 y 52 años, por el contrario que en las mujeres, que en el mismo rango son un porcentaje muy pequeños.

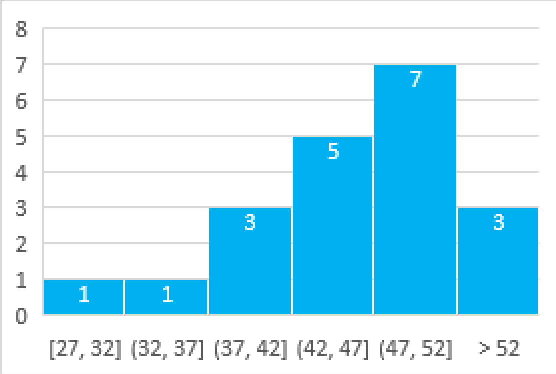


Figura 108. Edades de los docentes divididos por género (Hombres).

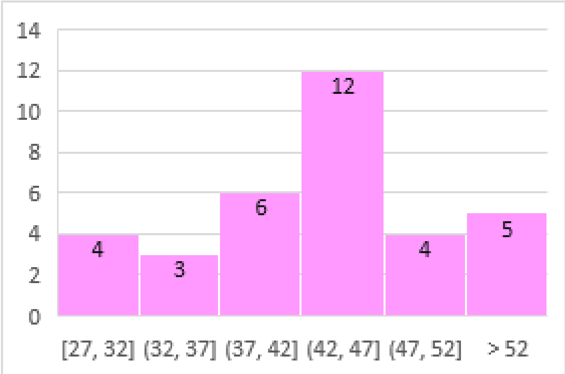


Figura 109. Edades de los docentes divididos por género (Mujeres).

Los años que han trabajado los profesionales como docentes pueden ser divididos según el género tal como se muestra en las figuras 110 y 111. En las cuales se aprecia que los años son bastante similares, lo que significa que este tampoco es un factor decisivo al momento de enseñar.

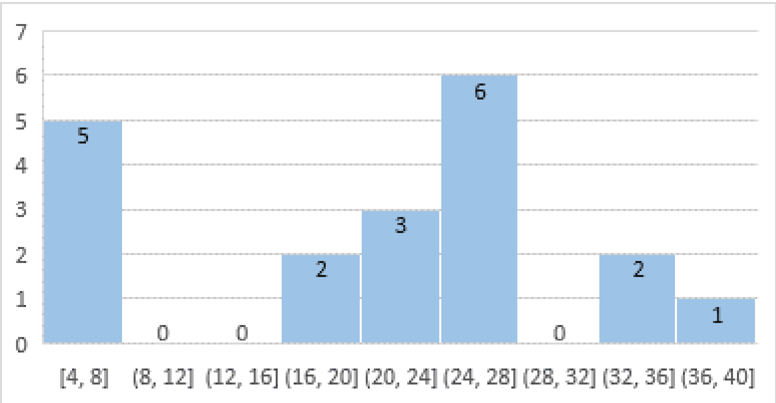


Figura 110. Años de servicio de los docentes hombres.

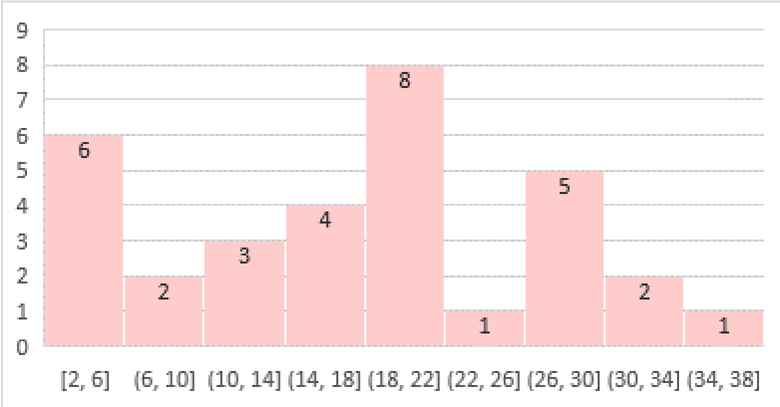


Figura 111. Años de servicio de las docentes mujeres.

En la figura 112 se observa la relación entre la edad de los docentes y el grado de dificultad que estos consideran al enseñar fracciones. Al ordenar las edades de menor a mayor (barras azules) se pretendía que su percepción al enseñar fracciones creciera o descendiera en la misma medida (puntos rojos del 1 al 5), sin embargo, como se ve en el grafico esto no sucede, por lo que se puede determinar que no existe una relación directa en estos dos aspectos.

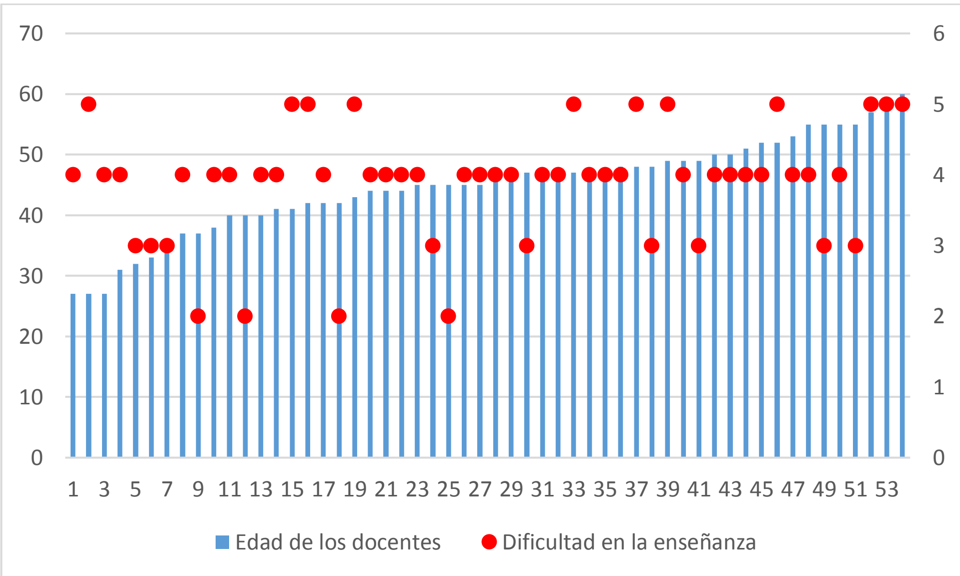


Figura 112. Relación entre la edad de los docentes y su interpretación de la dificultad para enseñar fracciones.

Del mismo modo se observa gráficamente una relación entre los años de experiencia en la docencia y su propia concepción de si enseñar fracciones es fácil o no, sin embargo, al igual que el caso anterior no se encontró una relación directa, ya que en el grafico 113 se puede ver que, a pesar que los años de servicio están ordenados de menor a mayor (barras azules), estas no se asocian con la enseñanza de las fracciones (puntos amarillos).

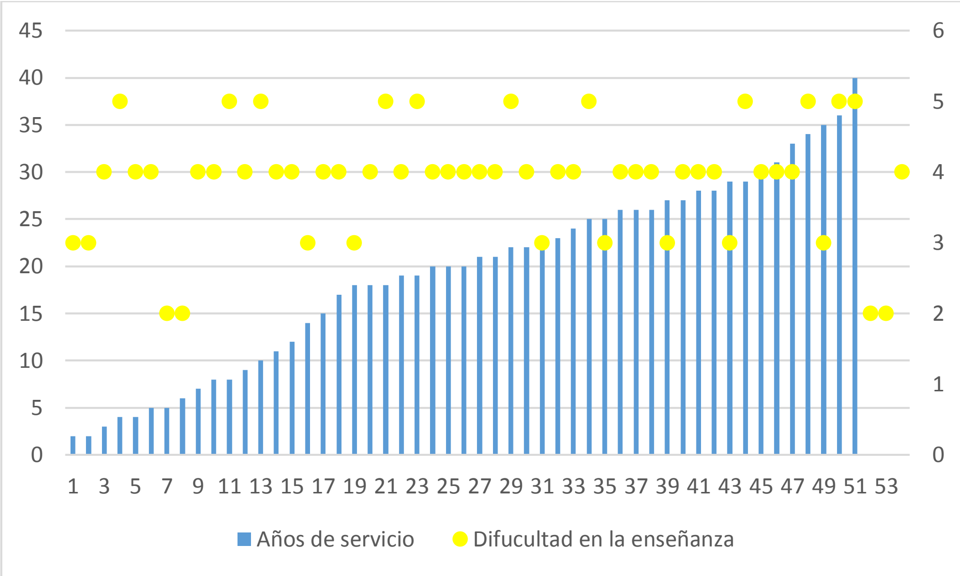


Figura 113. Relación entre los años de servicio y la interpretación de los docentes sobre la dificultad de enseñar fracciones.

Como conclusión del grafico 112 y 113, se puede observar que la edad no tiene relación con el hecho que un gran porcentaje de docentes consideran que la enseñanza de fracciones es fácil.

La figura 114 muestra que, un gran número de docentes considera que el uso de materiales realmente es importante para la enseñanza de las fracciones. Si se remonta al contenido de las preguntas señaladas en el grafico se puede observar que el hecho de que la mayoría de las respuestas están de acuerdo con estas afirmaciones en mayor o menor medida.

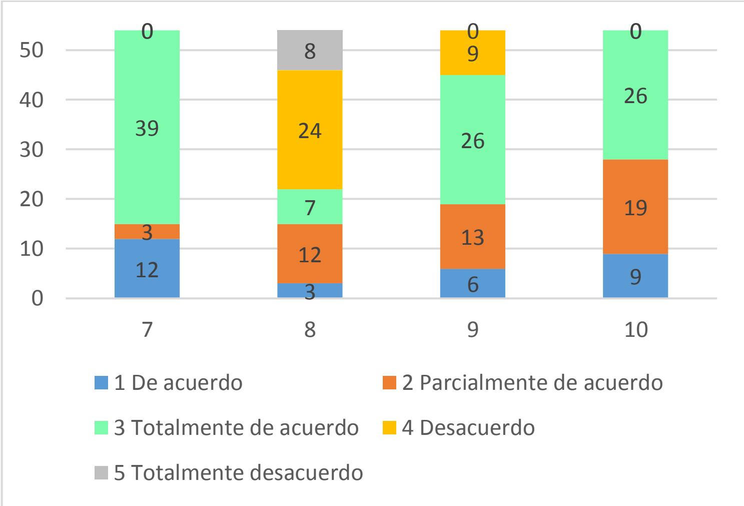


Figura 114. Preguntas de la encuesta 7 - 10.

La figura 115 es una representación de la frecuencia de uso de diferentes herramientas y materiales, que usan para enseñar fracciones los 54 docentes a los cuales se les realizo la encuesta. Con la ayuda del grafico se hace evidente que con la gran mayoría de las respuestas son algunas veces, rara vez o nunca. Lo que significa que los docentes generalmente no utilizan ninguna herramienta adicional cuando imparten sus clases.

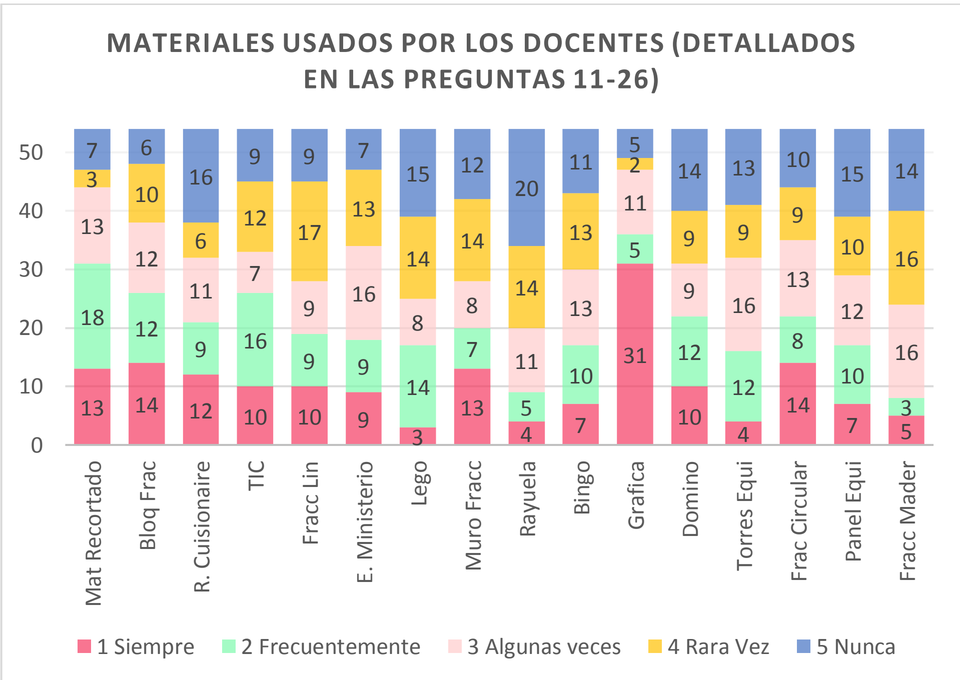


Figura 115. Frecuencia de uso de los materiales a los que los docentes recurren al momento de dar clases.

En la figura 116 se evidencia que para la mayoría de los docentes los servicios de actualización de conocimientos que el ministerio de educación ofrece son suficientes para mantener al día al docente en cuanto al tema de fracciones. Sin embargo, este puede ser un factor que influya en el hecho que no muchos docentes optan por un curso adicional.

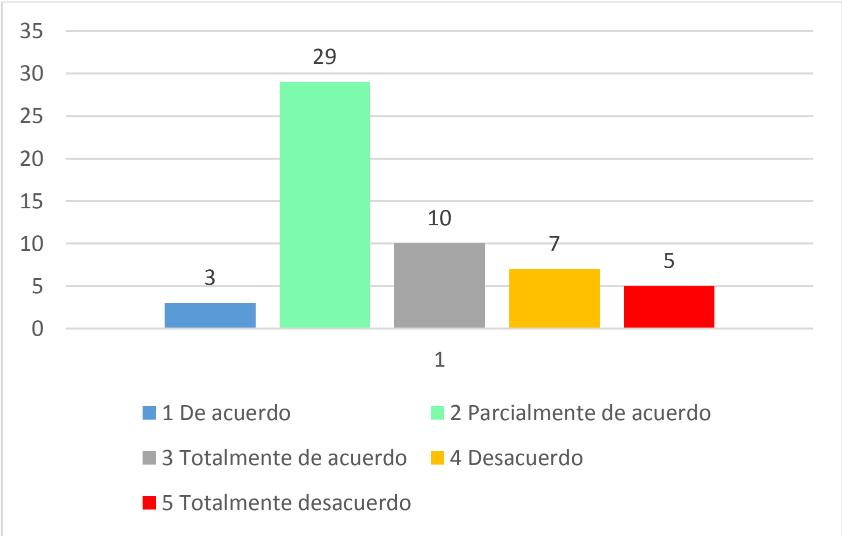


Figura 116. Los cursos de actualización a los docentes, realizados por parte del ministerio de educación son suficientes para mejorar el conocimiento del docente.

Si se observa el grafico 117, el total de cursos de actualización docente entre los 54 profesores es de 105, lo que significa que en promedio cada docente ha realizado solamente 2 cursos en los últimos 2 años. Además de esos 105 solamente 46 cursos fueron de fracciones, esto significa que en promedio la actualización específicamente en fracciones es de menor de 1 por docente.

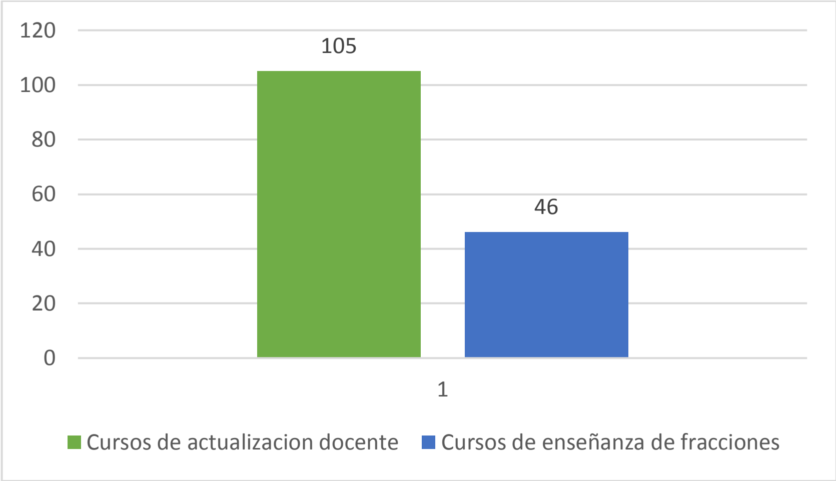


Figura 117.Total de los cursos realizados por los 54 docentes encuestados, en contraste con los cursos de fracciones que han realizado.

El hecho que los docentes estén conformes solamente con los cursos del MINDEDUC hace evidente que a los docentes no les interesa buscar otras alternativas ya que los promedios son muy bajos.

En el Ecuador a los docentes se les ofrece entre 6 y 8 cursos de actualización docente por año, sin embargo, la mayoría son opcionales y solamente 1 o 2 son obligatorios, esto es evidente con los datos obtenidos ya que los docentes al parecer solo optan por tomar el curso obligatorio de todos los que ofrece el ministerio.

Normalmente se podría pensar que los docentes entre más jóvenes sean serían más propensos a tomar más cursos, sin embargo, gracias al grafico 118 se observa que eso no sucede ya que los cursos que los docentes toman al parecer no tienen ninguna relación directa con su edad.

Del mismo modo se pensó que los años de servicio tendrían alguna relación con el número de cursos tomados por los docentes, pero se puede ver en la figura 119 que esto tampoco sucede, debido a que, al ordenar los años de servicio de menor a mayor, no hay una relación evidente con el número de cursos.

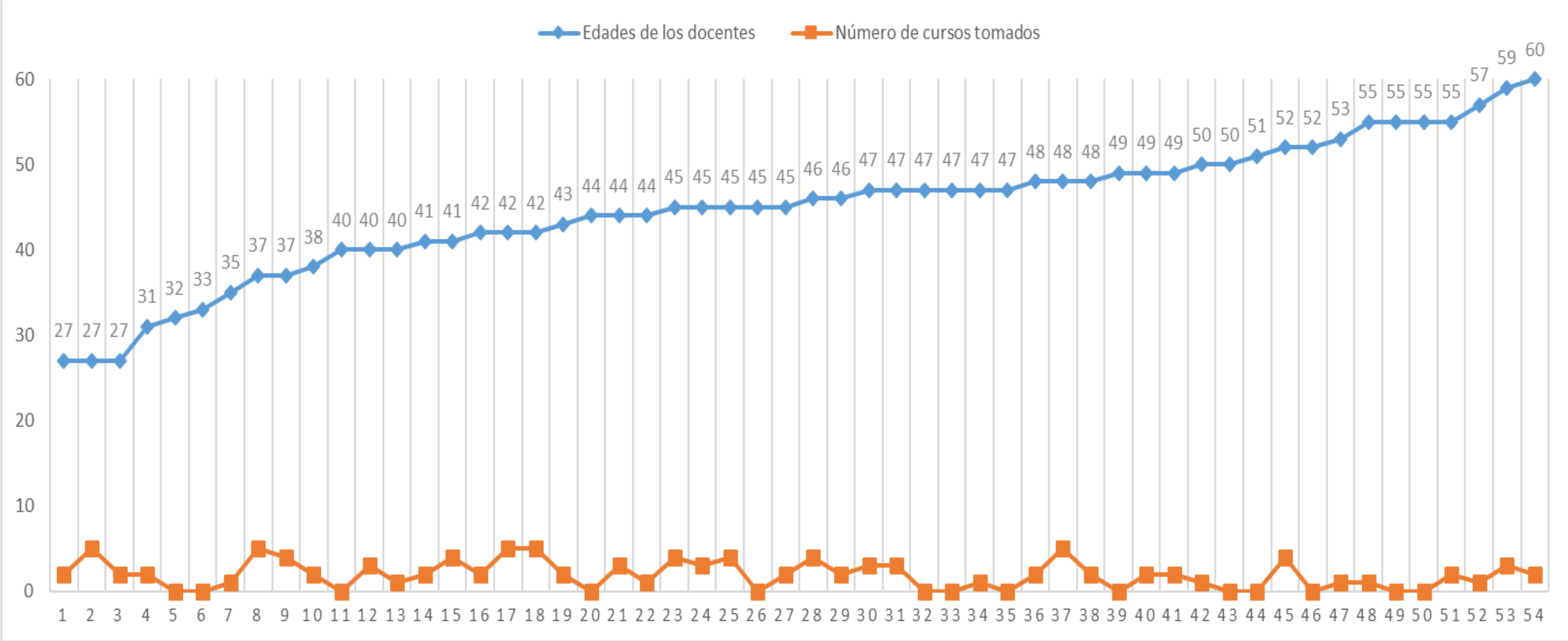


Figura 118. Edad de los docentes en relación con el número de cursos que han tomado en los dos últimos años.

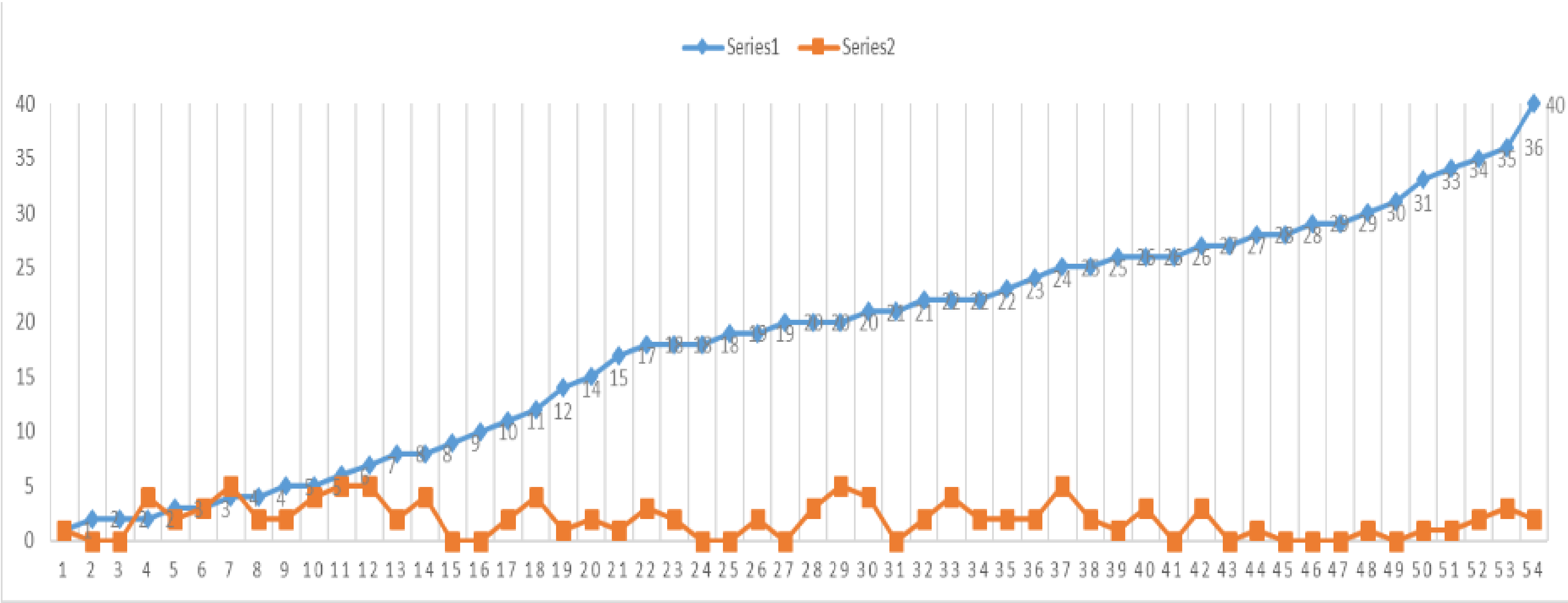


Figura 119. Años de servicio como docentes en relación con el número de cursos tomados.

Tanto el gráfico 118 y 119 se superpuso las edades de los docentes y los años de servicio con el número de cursos de actualización que han tomado en los últimos años, se lo hizo con la hipótesis de que entre mayor era la edad o mayor los años de servicio los docentes tomarían más cursos de actualización, sin embargo, en el grafico se observa que entre mayor sea los años, el número de cursos no crece de la misma manera.

Después de comprobar si la edad influye en el número de cursos se procede a evaluar si el género de los docentes tiene una influencia en la cantidad de cursos tomados. Las figuras 120 y 121 se realizaron para determinar qué grupo realizó más cursos si los docentes hombres o los docentes mujeres.

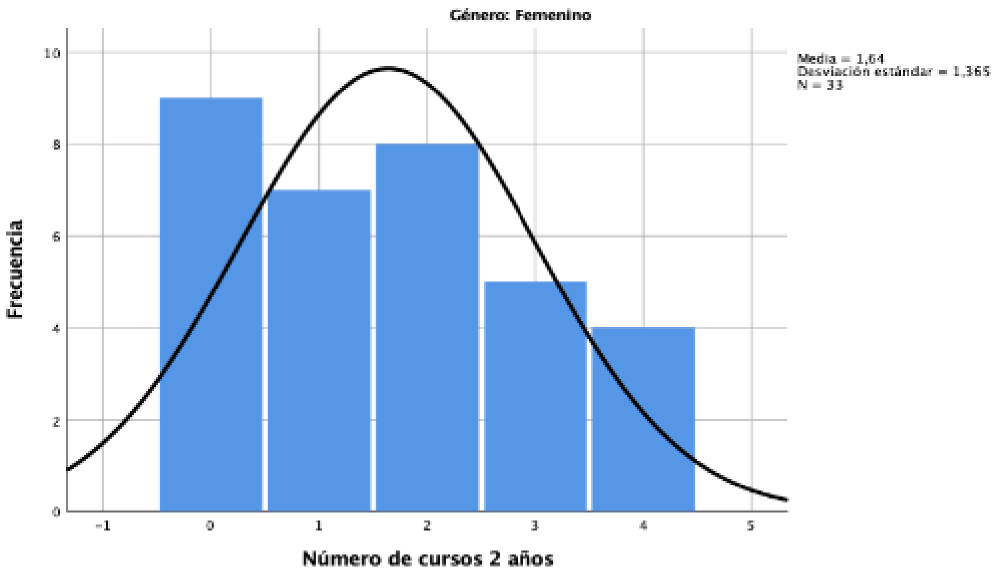


Figura 120. Media de cursos realizados por docentes Mujeres.

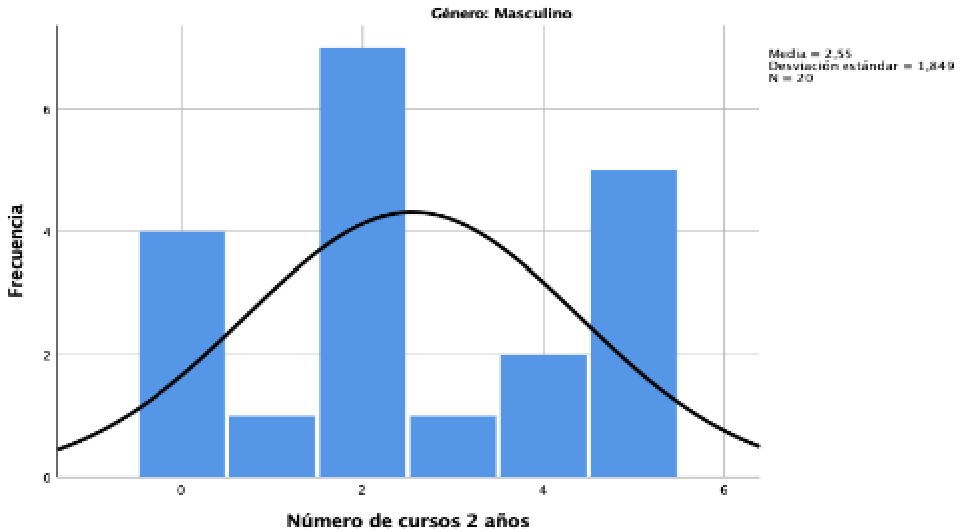


Figura 121. Media de cursos realizados por docentes Hombres

Los datos descriptivos indican la media de 2.55, tanto de cursos de formación en general en los últimos dos años como específicamente cursos sobre fracciones.

Los datos obtenidos de la figura 120 y 121 nos muestran que, en promedio los docentes masculinos hacen más cursos en comparación de los docentes femeninos.

La tabla 36 ilustra el número de cursos realizados por los docentes encuestados sobre actualización en los dos últimos y sobre fracciones. Se observa que en promedio los docentes de género masculino han hecho 2.55 cursos de actualización (con una desviación de 1,849), el cual sobrepasa en 55% con relación a los hechos por los docentes de género femenino. En cuanto a los cursos sobre fracciones, los docentes de género masculino han hecho 0,95 cursos (con una desviación de 0,999), un 20% más que los hechos por las docentes de género femenino. En general, los docentes de género masculino realizan en promedio más cursos que los docentes de género femenino.

Tabla 36. Estadísticas de Grupo, número de cursos realizados por los docentes encuestados.

	Género	N	Media	Desv. Desviación	Desv. Error promedio
Número de cursos de actualización en los dos últimos años	Femenino	33	1,64	1,365	,238
	Masculino	20	2,55	1,849	,413
Cursos de fracciones	Femenino	34	,79	1,274	,218
	Masculino	20	,95	,999	,223

Como los datos de tabla 36, son dos muestras independientes, medidos a nivel de intervalo y contienen un elevado número de posibles valores, es necesario conocer si hay una diferencia entre la magnitud de la variable que se está estudiando, es decir hay diferencia entre las medias de los números de cursos tomados entre los docentes de género masculino y los femenino.

Para contestar esta interrogante se puede usar la t-Student, el cual es utilizado para determinar si hay una diferencia significativa entre las medias de dos grupos, en donde se asume que las variables dependientes tienen una distribución normal. Sin embargo, para ser usada con una prueba valida los datos deben cumplir ciertas condiciones: las muestras deben ser aleatorias, la población se debe distribuir normalmente y los dos grupos de la población (hombres y mujeres) tienen la misma varianza.

Para determinar la normalidad de los datos se aplica la prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra, exhibida en la tabla 37, la cual es un procedimiento de "bondad de ajuste", verifica si las puntuaciones de la muestra siguen o no una distribución normal, es decir, permite medir el grado de concordancia existente entre la distribución de un conjunto de datos y una distribución teórica específica, lo que hace es contrastar si las observaciones podrían razonablemente proceder de la distribución especifica (Frank y Massey, 1951).

La hipótesis nula (Ho) establece que los datos se aproximan a la distribución normal, mientras que la hipótesis alternativa (H1) establece que los datos no se aproximan a la distribución normal. Se comprueba a través del p-valor, con un nivel de significancia del 95%, si este es menor que 0.05, se rechaza la Ho y la distribución no es normal, si es mayor que 0.05 no se rechaza la Ho y la distribución es normal. En este caso, para ambas muestras, el p-valor es menor a 0.05 por lo tanto los datos no se aproximan a la distribución normal.

Tabla 37. Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		Número de cursos de actualización en los dos últimos años	Cursos de fracciones
N		53	54
Parámetros normales[a,b]	Media	1,98	,85
	Desv. Desviación	1,611	1,172
Máximas diferencias extremas	Absoluto	,175	,303
	Positivo	,175	,303
	Negativo	-,109	-,234
Estadístico de prueba		,175	,303
Sig. asintótica(bilateral)		,000[c]	,000[c]

a. La distribución de prueba es normal.
b. Se calcula a partir de datos.
c. Corrección de significación de Lilliefors.

Para evaluar la igualdad de las varianzas de una variable calculada para dos o más grupos, se aplica la prueba de Levene ilustrada en la tabla 38 la Ho establece que las varianzas poblacionales son iguales mientras que el H1 establece que las varianzas poblacionales no son iguales. Se comprueba a través del p-valor, con un nivel de significancia del 95%, si este es menor que 0.05, se rechaza la Ho, si es mayor que 0.05 no se rechaza la Ho. En ambos casos, el p-value al 95% es mayor a 0.05, por lo tanto, la hipótesis nula de igualdad de varianzas no se rechaza y se concluye que no hay diferencia entre varianzas en la población. (Amat, 2016)

Tabla 38. Prueba de Levene

		Prueba de Levene de igualdad de varianzas	
		F	Sig.
Número de cursos de actualización en los dos últimos años	Se asumen varianzas iguales	3,204	,079
	No se asumen varianzas iguales		
Cursos de fracciones	Se asumen varianzas iguales	1,132	,292
	No se asumen varianzas iguales		

Como los datos no cumplen con el requisito de normalidad, no se puede utilizar la prueba t-Student. Por ello, se evalúa la prueba U de Mann-Whitney, ilustrada en la tabla 39. La prueba U de Mann-Whitney se utiliza cuando dos muestras son independientes, se desea conocer si hay una diferencia en la magnitud de la variable que se está estudiando y los datos no cumplen con las condiciones para el uso de la t-Student (Dietrichson, 2019).

Tabla 39. Estadísticos de prueba[a] de las encuestas a los docentes (Número de cursos realizados según el género).

	Número de cursos 2 años	Cursos de fracciones
U de Mann-Whitney	236,000	283,000
W de Wilcoxon	797,000	878,000
Z	-1,764	-1,120
Sig. asintótica(bilateral)	,078	,263

a. Variable de agrupación: Género

La prueba se basa en la comparación de cada observación de una muestra, con cada observación en la otra muestra, y si tienen una misma mediana, entonces cada observación tiene un 50% de oportunidad de ser mayor o menor que la observación correspondiente a la otra muestra.

En esta prueba la Ho establece que no hay diferencia entre la media de las muestras frente a la H1 que si lo hay. En la tabla 39 se observa que los valores de la prueba de U de Mann-Whithney del "numero de cursos de actualización en los dos últimos años" y "curso de fracciones" fueron de 236,000 (con p-valor =0,078) y 283,000 (con p-valor= 0,263) respectivamente, por lo que no se rechaza la Ho, y se concluye que el número de cursos de actualización en los dos últimos años y cursos de fracciones no difiere significativamente entre docentes femeninos y masculinos.

A continuación, se analizará cuáles son los materiales más empleados:

En la figura 122, se puede observar la media de la respuesta a la pregunta de los materiales más usados por los docentes, donde se observa que varios de estos materiales son frecuentemente usados por los docentes durante sus clases.

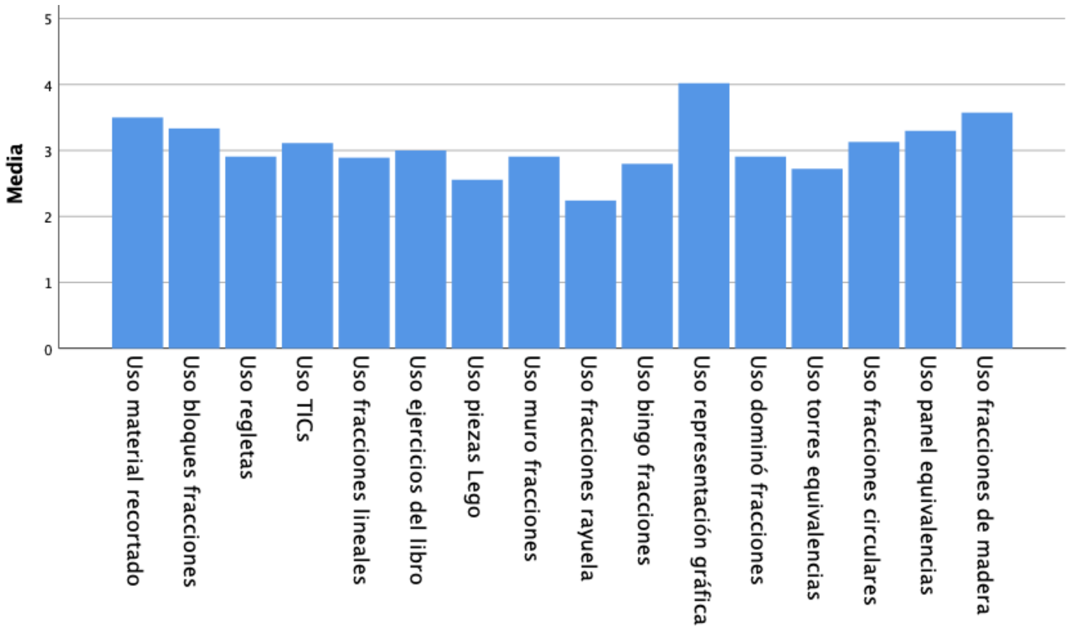


Figura 122. Materiales más utilizados según los docentes encuestados (Media).

La media de la respuesta de los materiales más usados nos muestra que los docentes han usado en algún momento todas las herramientas, sin embargo, los docentes usan unas con más frecuencia que otras tal como se ve en la figura 123 a continuación.

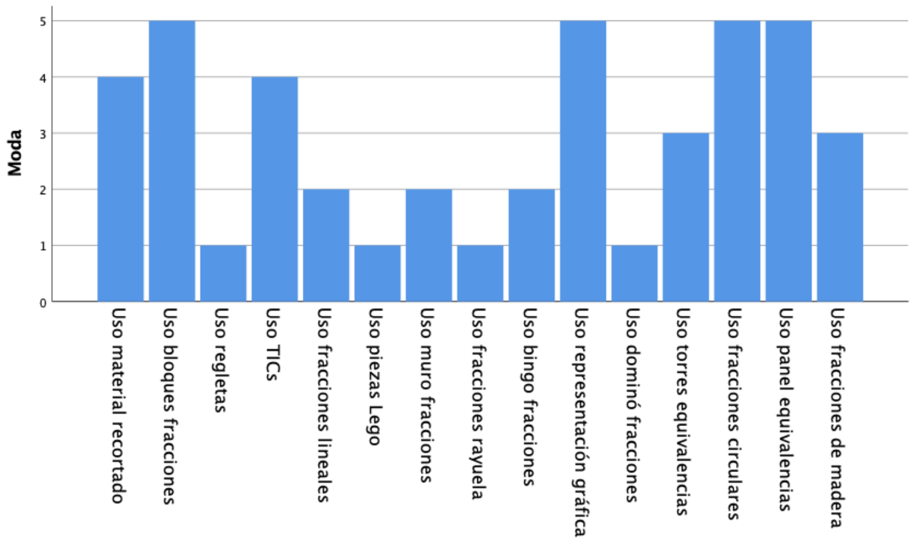


Figura 123. Materiales más utilizados (Moda).

El valor de la moda, nos indica la opción más elegida. Podemos observar que los materiales más utilizados son los bloques de fracciones, representación gráfica, fracciones circulares y paneles de equivalencia, mientras que hay otros que se utilizan muy poco.

En la enseñanza de las fracciones la manipulación de objetos constituye la base primordial de la construcción de conceptos.

Como se trabaja con variables medidas a nivel ordinal, para el análisis se utiliza la prueba no paramétrica U de Mann-Whitney ilustradas en la tabla 40 y 41. La prueba U de Mann-Whitney se utiliza cuando dos muestras son independientes, se desea conocer si hay una diferencia en la magnitud de la variable que se está estudiando y los datos no cumplen con las condiciones para el uso de la t-Student (Dietrichson, 2019).

En esta prueba la Ho establece que no hay diferencia entre la media de las muestras frente a la H1 que si lo hay. En las tablas 40 y 41 se observa que los valores del p-valor de acuerdo a la prueba de U de Mann-Whithney de las "respuesta de los docentes separados por género" y "según su grado de formación académica" se mantienen en la región de "no rechazo", por lo cual no se rechaza la Ho y se concluye que las respuestas no difieren significativamente por género o formación académica de los docentes.

Tabla 40. Estadísticos de prueba[a] (Respuesta de los docentes separados por género)

	Dificultad fracciones	Importancia manipulación	Suficiencia act. Textos ofic.	Importancia fracciones	Dificultad por no utilizar materiales
U de Mann-Whitney	307,500	317,000	300,500	283,000	312,500
W de Wilcoxon	517,500	527,000	510,500	493,000	522,500
Z	-,645	-,515	-,747	-1,088	-,536
Sig. asintótica(bilateral)	,519	,607	,455	,277	,592

a. Variable de agrupación: Género

No hay diferencias, como podemos observar el valor de sig. Asintótica es, mayor que 0,05 en todos los casos, lo cual significa que no existe diferencia en estas variables entre docentes hombres y mujeres. Tampoco hay diferencias en relación con el nivel de formación (licenciatura o maestría), según se muestra en la tabla 41.

Tabla 41. Estadísticos de prueba[a] (Respuestas de los docentes según su grado de formación académica)

	Dificultad fracciones	Importancia manipulación	Suficiencia act. Textos ofic.	Importancia fracciones	Dificultad por no utilizar materiales
U de Mann-Whitney	75,500	107,500	73,000	105,000	115,500
W de Wilcoxon	90,500	1332,500	88,000	120,000	1340,500
Z	-1,553	-,559	-1,559	-,557	-,227
Sig. asintótica(bilateral)	,120	,576	,119	,578	,820
Significación exacta [2*(sig. unilateral)]	,166[b]	,664[b]	,148[b]	,622[b]	,840[b]

a. Variable de agrupación: Nivel de formación

b. No corregido para empates.

4.7. Conclusiones de la encuesta realizada a los docentes.

Los gráficos 108 y 109 muestran que el número de docentes, tanto para hombres y mujeres corresponden la mayoría a edades de 37 años en adelante. Esto significa que posiblemente los profesionales más jóvenes están laborando en el sector rural hasta adquirir experiencia. También es importante recalcar que en el caso de los hombres el número de docentes es mayor cuando la edad está entre 47 y 52 años, por el contrario, en las mujeres, con el mismo rango se tiene un porcentaje muy pequeños.

En los datos de la figura 112 se buscaba determinar si existía alguna relación entre la edad de los docentes y el grado de dificultad que estos consideran al enseñar fracciones. Al ordenar las edades de menor a mayor (barras azules) se pretendía que su percepción al enseñar fracciones creciera o descendiera en la misma medida (puntos rojos del 1 al 5), sin embargo, como se ve en el grafico esto no sucede, por lo que se puede determinar que no existe una relación directa en estos dos aspectos.

Los datos muestran que la mayor parte de los docentes cuentan solamente con estudios universitarios de tercer nivel con cuatro años (licenciatura), y son muy pocos los que cuenta con estudios de especialidad en matemática es decir con un cuarto nivel (maestría), esto es relevante en Ecuador ya que el ministerio de educación tiene la expectativa de que todos los docentes obtengan un título de cuarto nivel.

La mayoría de los docentes consideran que con un grupo de 30 alumnos se puede lograr aprendizajes óptimos. Aunque el número puede parecer elevado esto es debido a que en Ecuador la mayoría de las instituciones educativas poseen en promedio entre 45 a 50 estudiantes por salón, por lo que para los docentes trabajar con un número reducido de alumnos por salón, proporciona una educación de calidad focalizada para las necesidades de aprendizaje de los estudiantes.

Un gran porcentaje de docentes consideran que el estudio de las fracciones en EGBM es fácil o muy fácil. Sin embargo, los alumnos presentan problemas durante el aprendizaje, esto indica claramente que la percepción del estudiante y del docente no es la misma y esto afecta al momento que el docente dicta su clase.

Los datos de la figura 114 muestran que, un gran número de docentes considera que el uso de materiales realmente es importante para la enseñanza de las fracciones. Si se remonta al contenido de las preguntas señaladas en el grafico se puede observar que el hecho de que la mayoría de las respuestas están de acuerdo con estas afirmaciones en mayor o menor medida, debido a que los docentes atribuyen que las dificultades que presentan los niños para manejar el concepto de fracciones están ligada a la nula utilización de materiales manipulables. Dando como resultado que estos docentes utilizan con gran frecuencia materiales extras durante sus clases, debido a la idea de promover una construcción abstracta de conceptos matemáticos en los estudiantes, con el fin de que puedan ser comprendidas observando algún modelo físico.

Es importante recalcar, que los docentes consideran que los libros suministrados por el Ministerio de educación no son suficientemente claros para explicar a los estudiantes el concepto de fracciones, dando como resultado que estos libros sean usados más como un complemento que como la herramienta principal ya que por sí solos no son suficientes para el desarrollo de la clase.

La mayoría de docentes está totalmente de acuerdo con la idea que la enseñanza de fracciones es importante; este resultado es un tanto alentador por el hecho de que las fracciones son el hincapié para posteriormente comprender la idea de números racionales debido a que el tema de las fracciones es indispensable.

La mayor parte de docentes aplican frecuentemente las TIC para la enseñanza de fracciones, o lo han hecho por lo menos alguna vez, lo que muestra que están familiarizados con las tecnologías de información y su favorable participación dentro del proceso de enseñanza, pues la dinámica de estas herramientas llama mucho más la atención de los alumnos en cualquiera que sea el tema que se esté tratando, más aún en la matemática.

La mayoría de los docentes están parcialmente de acuerdo con la idea de la actualización que ofrece el Ministerio de Educación es adecuada, y que los cursos que ellos han recibido les han ayudado a mejorar la dinámica dentro del aula en los diferentes temas y asignaturas que ellos imparten dentro de la institución educativa. Por otro lado, existen docentes que no están del todo de acuerdo en cuanto a la actualización brindada, algunos de ellos no han podido participar dentro de estas actividades lo que ha repercutido dentro de algunos temas que imparten dentro del aula.

En el Ecuador a los docentes se les ofrecen entre 6 y 8 cursos de actualización docente por año, sin embargo, la mayoría son opcionales y solamente 1 o 2 son obligatorios, esto es evidente con los datos obtenidos ya que los docentes al parecer solo optan por tomar el curso obligatorio de todos los que ofrece el ministerio. Normalmente se podría pensar que los docentes entre más jóvenes sean serían más propensos a tomar más cursos, sin embargo, de los datos obtenidos tal como podemos observar en el grafico 118 es evidente que eso no sucede ya que las capacitaciones o cursos que los docentes toman al parecer no tienen ninguna relación directa con su edad. Del mismo modo los años de servicio no guardan relación con el número de cursos tomados por los docentes, como se puede ver en la figura 119.

5. CAPÍTULO 5

5.1. Propuesta de Intervención.

La propuesta consistió en aplicar uno de los recursos didácticos explicados anteriormente en la enseñanza de fracciones, mediante la utilización de materiales recortados prediseñados (tiras de fracciones equivalentes hechas con papel de colores), hacia los estudiantes de los séptimos años de EGBM de los paralelos “A” y “B”, de un total de 10 Unidades Educativas Urbanas de la ciudad de Latacunga, Provincia de Cotopaxi.

A ambos paralelos se les impartió varias clases acerca de fracciones, con la diferencia que a los estudiantes de los paralelos “B” se les explicó las clases usando el material preparado mientras que a los estudiantes de los paralelos “A” se les explicó las clases sin el material preparado es decir clases netamente teórica.

De cada paralelo fueron seleccionados 30 estudiantes, así que por cada Unidad Educativa conformaron un total de 60 estudiantes, para hacer un total de 600 estudiantes los que fueron evaluados al terminar las respectivas clases, con el propósito de desarrollar las habilidades matemáticas en el tema de fracciones. Los resultados finales fueron comparados para determinar la diferencia entre los resultados obtenidos de los 2 grupos.

5.1.1. Objetivo general.

Aplicar uno de los recursos didácticos en la enseñanza de fracciones mediante la utilización de materiales recortados prediseñados, para desarrollar las habilidades matemáticas las cuales ofrecen recursos imprescindibles para el análisis y comprensión de un problema.

5.1.2. Objetivos específicos.

- Mostrar con los resultados de las evaluaciones a los estudiantes, que el uso de materiales o recursos es importante en el aprendizaje.

- Determinar los errores más comunes que cometen los estudiantes al momento de ser evaluados, tanto para los estudiantes que usan el material, así como los que no los usan.
- Determinar si el uso de estos materiales realmente ayuda a los estudiantes a entender el concepto de fracciones.

5.1.3. Hipótesis general.

La utilización de recursos didácticos por parte de los docentes en el proceso de enseñanza – aprendizaje de fracciones permite mejorar el entendimiento del alumno/a, permitiéndole obtener mejores resultados al momento de ser evaluados.

5.2. Procedimiento

- Fueron seleccionados los séptimos años lectivos (11 años de edad) de EGBM de las 10 instituciones educativas del sector urbano, tomando 2 paralelos diferentes “A y B”, 30 estudiantes por paralelo, para un total de 600 estudiantes a los que se les aplico la evaluación correspondiente. Las instituciones educativas fueron seleccionadas al azar.

- Se elaboró una guía para dictar las clases hacia los alumnos, tanto para los estudiantes que recibirán la clase con el material de apoyo, así como a los que no recibirán la clase con el material.

- Se preparó el material recortado prediseñado (muro de fracciones equivalentes), hechos con cartulina de diferentes colores.

- A los paralelos “B” se les explicaron las clases de fracciones utilizando el material preparado, para posteriormente realizarles un examen y evaluar los resultados, mientras que a los paralelos “A” se les explicaron las clases de fracciones de la manera tradicional basándose solamente en la explicación teórica y al igual que a los anteriores paralelos se les evaluó con un examen.
- Se revisaron los resultados de los exámenes a los que los estudiantes fueron sometidos, y se procedió a comparar los resultados.

Tabla 42. Resumen del procedimiento realizado.

Actividades	Estrategia Metodológica	Fecha	Responsables	Beneficiarios
Elaboración de la guía	Estudio del referente curricular para EGBM	05/12/2018	Ing. Julio Salazar Molina	Autoridades Docentes Estudiantes
Entrega y difusión de la guía.	Estudio y aprobación por el Centro Educativo	06/02/2019 al 25/02/2019	Autoridades del Centro Educativo	Estudiantes
Elaboración de materiales recortados prediseñados	Todos los materiales recortados prediseñados son elaborados por los alumnos	01/03/2019 al 10/03/2019	Ing. Julio Salazar Molina	Estudiantes
Utilización del material recortado prediseñado (muro de fracciones equivalentes)	Aplicación del material didáctico en ejercicios prácticos.	08/04/2019 al 12/04/2019	Ing. Julio Salazar Molina	Estudiantes
Destrezas lógico-matemático	Utilizar los números de manera efectiva y de razonar adecuadamente empleando el pensamiento lógico	08/04/2019 al 12/04/2019	Ing. Julio Salazar Molina	Estudiantes
Determinar errores en la resolución de problemas con fracciones.	Comparación antes y después de la utilización del material didáctico.	06/05/2019 al 10/05/2019	Ing. Julio Salazar Molina	Estudiantes
Evaluación de la guía.	Observar cómo se desarrollan las nociones matemáticas	Junio 2019	Ing. Julio Salazar Molina	Autoridades Estudiantes

5.2.1. Criterios para la evaluación de los estudiantes.

Para que los resultados de la evaluación sean útiles es importante que a ambos grupos se les realice la misma evaluación después de haber concluido las respectivas lecciones en cada paralelo.

No se realizó una evaluación previa, debido a que, los estudiantes podrían o no tener un entendimiento acerca de fracciones por lo que esos resultados no reflejarían el aprendizaje de fracciones dentro del aula de clase. Sin embargo, para asegurarse que los datos fueran lo más concretos posibles fueron seleccionados los paralelos a los cuales el mismo docente impartía la asignatura de matemáticas, esto con el fin que ambos paralelos estuvieran al mismo nivel antes de empezar con la investigación.

Las preguntas (ver anexo G) se plantearon del mismo modo que los docentes preparan sus exámenes normales, en este caso las preguntas no representan un entorno diario es más bien netamente académico.

Para ambos grupos la evaluación tuvo una duración máxima de 30 minutos.

En lo que respecta al conocimiento que los estudiantes debieron adquirir después de la clase se procedió a evaluar los siguientes aspectos.

- Reconocimiento de numerador y denominador por parte del alumno.
- Representar las fracciones de forma gráfica tanto para fracciones propias como impropias.
- Resolución de operaciones con fracciones (suma, resta, multiplicación, división) de forma analítica.
- Resolución de problemas escritos, en los cuales el alumno debe interpretar y organizar la información mostrada para llegar a un resultado.

5.2.2. Criterios sobre los materiales utilizados para el estudio de las fracciones en los paralelos “B”.

- El material utilizado por el docente durante las clases explicativas de fracciones serán las tiras de fracciones equivalentes o también conocidos como muro de fracciones explicadas anteriormente.

5.2.3. Directrices de la clase de fracciones sin el material de apoyo para los paralelos “A”.

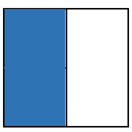
- Para poder comparar resultados, se prepararos varias clases dirigidas hacia otro grupo de estudiantes en la que no se usaron ninguno del material explicado previamente, así que para este grupo la clase fue casi en su totalidad con explicaciones numéricas.

5.2.4. Clase de fracciones realizadas en varias sesiones sin el material de apoyo.

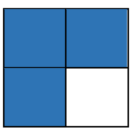
A continuación, se explica los conceptos de las clases de fracciones (de una manera resumida) para este grupo específico de estudiantes.
Esta sección solamente es para los estudiantes que recibirán las clases sin el material de apoyo, es por ese motivo que se explican conceptos muy básicos tanto grafica como numéricamente.

Paso 1: Conceptos.

Que es una fracción: Una fracción representa el número de partes que tomamos de una unidad, la cual está dividida en partes iguales. Se representa por dos números separados por una línea de fracción.



$\frac{1}{2}$



$\frac{3}{4}$

Términos de una fracción: Son el numerador y el denominador. El numerador es el número de partes que hemos tomado y el denominador es el número de partes en la que hemos dividido a la unidad.

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{Numerador}{Denominador}$$

Tipos de fracciones: Propias, impropias y mixtas.

Fracciones Propias: Son aquellas que representan números menores que la unidad y se caracterizan por tener el numerador menor que el denominador.

$$\frac{5}{8} = 0.625 \rightarrow 0.625 < 1 \text{ Fracción Propia}$$

Fracciones Impropias: Son las que representan números mayores que la unidad y se caracterizan por tener el numerador mayor que el denominador

$$\frac{9}{4} = 2.25 \rightarrow 2.25 > 1 \text{ Fracción Impropia}$$

Fracción Mixtas: Son las fracciones que representan un número entero acompañado de una fracción, esta puede ser representada como una fracción impropia multiplicando el valor entero por el denominador y sumándole el numerador.

$$2\frac{3}{5} = \frac{(2 \times 5) + 3}{5} = \frac{13}{5} \text{ Fracción mixta representada como una fracción impropia}$$

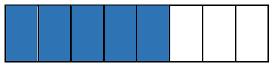
Como se leen las fracciones:

- El numerador se lee con los números cardenales. [1-un], [2-dos], [3-tres], etc.
- El denominador se lee con los números partitivos. [2-medios], [3-tercios], [4-cuartos], etc. A partir del 11, el número se lee terminado en -avos: [11-onceavos], [12-doceavos], etc.
- Para la fracción mixta se lee el valor numérico del entero [1-uno], [2-dos], etc. Acompañado de la lectura de la fracción normal.

Parte 2: Representación gráfica.

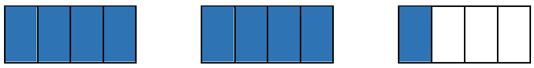
Fracción Propia: Se selecciona una figura geométrica y se la divide en partes iguales según indique el denominador, luego se pintan el número de partes según lo indica el numerador.

$$\frac{5}{8} =$$



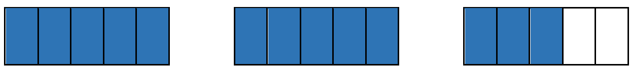
Fracción Impropia: Se selecciona una figura geométrica y se la divide en partes iguales según indique el denominador, luego se pintan las partes según lo indica el numerador, sin embargo, estas no son suficientes por lo que se incrementa una figura adicional, dividida en las mismas partes que la primera y se pintan las partes que faltan.

$$\frac{9}{4} =$$



Fracción Mixta: Se selecciona una figura geométrica y se la divide en partes iguales según lo indique el denominador, se colorean las figuras completas según lo indique el valor de los enteros y la una figura adicional se coloreas solamente lo que indica el numerador. También se puede convertir a una fracción impropia y seguir el método anterior.

$$2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$



Paso 3: Operaciones de fracciones.

Suma y Resta: Cuando el denominador es el mismo se mantiene el denominador igual y se suman o se restan los numeradores, luego se simplifica.

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5-3}{7} = \frac{2}{7}$$

Cuando el denominador es distinto, se calcula el m.c.m. de los denominadores lo que se convierte en el denominador de la respuesta. Dividimos el m.c.m. obtenido entre cada uno de los denominadores y lo que dé lo multiplicamos por el número que haya en el numerador. Finalmente se suman o se restan según se indique y se simplifica.

Multiplicación: Se multiplica los numeradores con los numeradores y los denominadores con los denominadores, finalmente se simplifica.

$$\frac{3}{5}\times\frac{7}{8}=\frac{3\times 7}{5\times 8}=\frac{21}{40}$$

División: Se multiplica el numerador de la primera por el denominador de la segunda, el producto es el nuevo numerador. Después se multiplica el denominador de la primera por el numerador de la segunda, el producto es el nuevo denominador. También se conoce a este proceso como multiplicación en cruz.

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2\times 5}{3\times 4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

5.2.5. Directrices de la clase de fracciones con el material de apoyo para los paralelos "B".

- En esta sección se explica cómo se realizó la clase utilizando las tiras de fracciones equivalentes.
- Además de las tiras se utilizaron cuadros de papel blancos, los cuales se usaron para explicar el concepto de fracciones, la multiplicación y división ya que estas operaciones no se pueden representar con las tiras.
- Al igual que el grupo anterior se explicaron los mismos conceptos, pero con el material antes mencionado.
- La duración y el número de clases fueron los mismos para los dos grupos.
- El material usado sirve simplemente como una ayuda, este no reemplaza el modelo convencional de enseñanza.
- A cada estudiante se le entregó un juego de 4 tiras de fracciones que van desde el 1 hasta el 1/10, y se les entregó un total de 10 cuadros de papel blancos como se ve en la figura 124.

Figura 124. Material entregado a los estudiantes durante la clase.

5.2.6. Clase de fracciones con el material de apoyo.

A continuación, se muestra los conceptos explicados a los estudiantes, a los cuales si se les suministro el material de apoyo previamente descrito.

Igual que en la sección anterior estas explicaciones son las que están dirigidas a los estudiantes que recibirán las clases, por tal motivo se explican conceptos básicos, del mismo modo que se explicó a los estudiantes.

Paso 1: Conceptos.

Que es una fracción: Una fracción representa el número de partes que tomamos de una unidad, la cual está dividida en partes iguales. Se representa por dos números separados por una línea de fracción.

1	
½	½

Al dividir la unidad en 2 se toma 1 parte obteniendo $\frac{1}{2}$

1			
¼	¼	**1/4**	¼

Al dividir la unidad en 4 se toman 3 partes obteniendo $\frac{3}{4}$

Términos de una fracción: Son el numerador y el denominador. El numerador es el número de partes que hemos tomado y el denominador es el número de partes en la que hemos dividido a la unidad.

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{Numerador}{Denominador}$$

Fracciones equivalentes: Las fracciones equivalente son aquellas que representan el mismo valor a pesar de tener un numerador y denominador diferente, esto se produce con las fracciones que no son simplificadas.

1				
1/5	**1/5**	**1/5**	**1/5**	**1/5**

Esta tira representa 3/5

1									
1/10	**1/10**	**1/10**	**1/10**	**1/10**	**1/10**	**1/10**	**1/10**	**1/10**	**1/10**

Esta tira representa 6/10

En las tiras de fracciones se observa que el espacio ocupado por ambas fracciones es el mismo, por lo tanto.

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

Tipos de fracciones: Propias, impropias y mixtas.

Fracciones Propias: Son aquellas fracciones donde el numerador es menor que el denominador, representan números menores que la unidad.

1							
1/8	**1/8**	**1/8**	**1/8**	**1/8**	**1/8**	**1/8**	**1/8**

$\frac{5}{8}$ Fracción Propia

Fracciones Impropias: Son aquellas fracciones donde el numerador es mayor al denominador, representan números mayores que la unidad.

1			
1/4	¼	**1/4**	¼
1/4	¼	**1/4**	¼
1/4	¼	**1/4**	¼

$$\frac{9}{4} \text{ Fracción Impropia}$$

Fracción Mixtas: Son las fracciones que representan un número entero acompañado de una fracción, esta puede ser representada como una fracción impropia.

1				
1/5	**1/5**	**1/5**	**1/5**	**1/5**
1/5	**1/5**	**1/5**	**1/5**	**1/5**
1/5	**1/5**	**1/5**	**1/5**	**1/5**

$$2\frac{3}{5} \text{ Fracción mixta}$$

Como se leen las fracciones.

- El numerador se lee con los números cardenales. [1-un], [2-dos], [3-tres], etc.
- El denominador se lee con los números partitivos. [2-medios], [3-tercios], [4-cuartos], etc. A partir del 11, el número se lee terminado en -avos: [11-onceavos], [12-doceavos], etc.
- Para la fracción mixta se lee el valor numérico del entero [1-uno], [2-dos], etc. Acompañado de la lectura de la fracción.

Parte 2: Representación gráfica.

Fracción Propia: Se toman las partes según se indica el numerador.

1								
1/9	**1/9**	**1/9**	**1/9**	**1/9**	**1/9**	**1/9**	**1/9**	**1/9**

$$\frac{5}{9}$$

Fracción Impropia: Se toman las partes según lo indica el numerador, sin embargo, estas no son suficientes por lo que se incrementan partes adicionales hasta completar la fracción.

1		
1/3	1/3	1/3
1/3	1/3	1/3
1/3	1/3	1/3

$$\frac{7}{3}$$

Fracción Mixta: Se toman las unidades que se indiquen y se toman las partes que representan a la fracción.

1				
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

$$2\frac{3}{5}$$

Paso 3: Operaciones de fracciones.

Suma y Resta: Cuando el denominador es el mismo se mantiene el denominador igual y se suman o se restan los numeradores, luego se simplifica.

Para representar la suma o resta usando las fracciones equivalentes solo hay que aumentar o quitar las partes de las fracciones equivalentes hasta obtener la respuesta.

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{2+4}{5}=\frac{6}{5}$$

1				
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

+

1				
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

=

1				
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5-3}{7}=\frac{2}{7}$$

1						
1/7	1/7	~~1/7~~	~~1/7~~	~~1/7~~	1/7	1/7

-

1						
1/7	1/7	~~1/7~~	~~1/7~~	~~1/7~~	1/7	1/7

=

1						
1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7

Cuando el denominador es distinto, se calcula el m.c.m. de los denominadores lo que se convierte en el denominador de la respuesta. Dividimos el m.c.m. obtenido entre cada uno de los denominadores y lo que nos dé lo multiplicamos por el número que haya en el numerador. Finalmente se suman o se restan según se indique y se simplifica, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

Ahora para representar la suma de fracciones con diferente denominador, del ejemplo anterior, usando el muro de fracciones se debe colocar cada parte de la fracción una junto a la otra y observar con que fracción iguala la longitud, es importante tener la tabla completa.

1					
1/2	½				
1/3	1/3	1/3			
1/4	1/4	1/4	1/4		
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

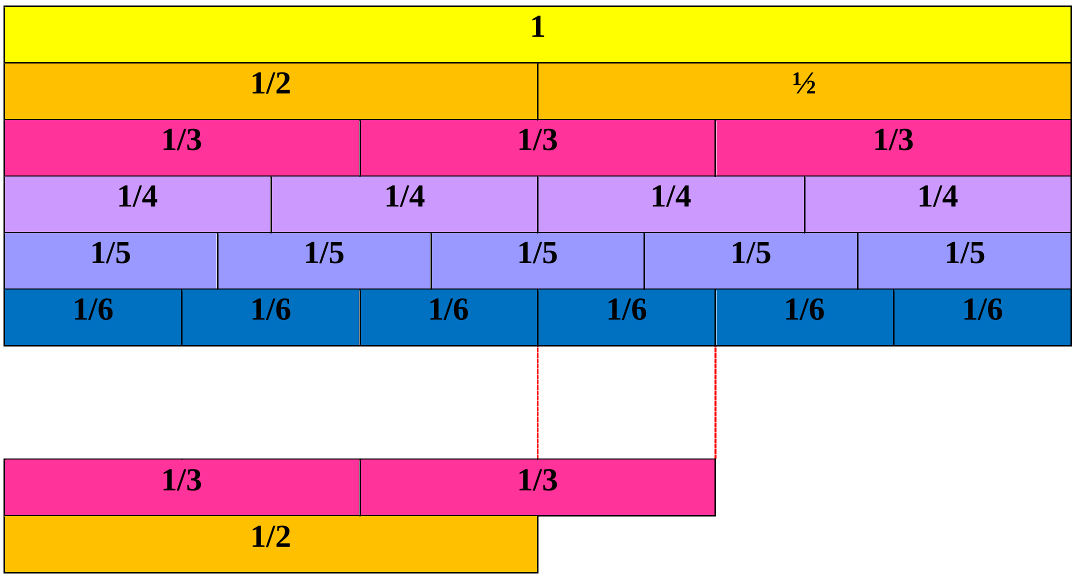
1/2	1/3

Por lo que se puede ver mediante la gráfica que la repuesta es 5/6.

A continuación, se muestra de la misma manera un ejemplo de resta de fracciones con diferente denominador, primero de forma analítica y después con las tiras de fracciones.

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4-3}{6}=\frac{1}{6}$$

Para restar fracciones con diferente denominador se colocan las tiras una sobre la otra y se determina que parte de la tira está sobresaliendo, para este proceso al igual que la suma se debe tener la tabla completa.



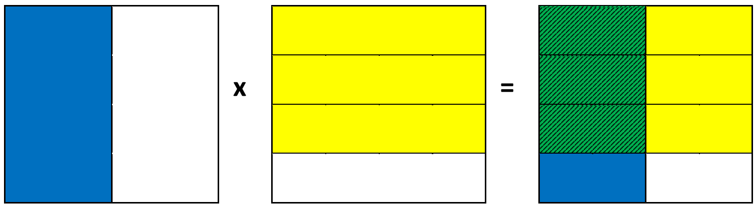
Como se ve en la figura la respuesta es 1/6.

Multiplicación: Se multiplica los numeradores con los numeradores y los denominadores con los denominadores, finalmente se simplifica.

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1\times 3}{2\times 4}=\frac{3}{8}$$

Para representar la multiplicación se representa usando simplemente gráficos ya que con las tiras de fracciones no se puede representar el proceso.

Para multiplicar usando gráficos se debe representar las fracciones de la operación con una figura geométrica, la primera fracción se la divide en secciones verticales y la segunda en secciones horizontales, finalmente la respuesta se obtiene sobreponiendo ambos gráficos para ver en donde se cruzan.



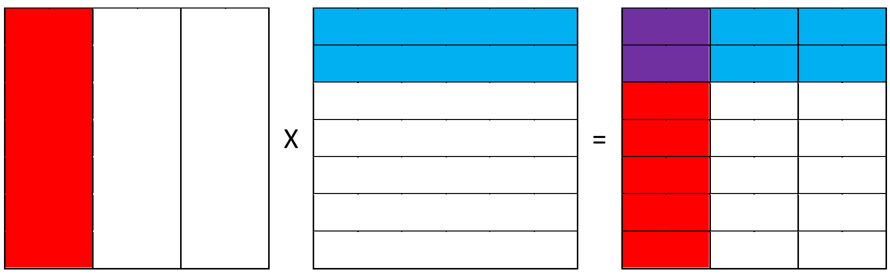
$\frac{1}{2}$ $\times \frac{3}{4}$ $= \frac{3}{8}$

División: Se multiplica el numerador de la primera por el denominador de la segunda, el producto es el nuevo numerador. Después se multiplica el denominador de la primera por el numerador de la segunda, el producto es el nuevo denominador. También se conoce a este proceso como multiplicación en cruz.

$$\frac{1}{3} \div \frac{7}{2} = \frac{1 \times 2}{3 \times 7} = \frac{2}{21}$$

Para representar la división de forma gráfica se invierte la segunda fracción y se procede a multiplicar como en el proceso anterior.

$$\frac{1}{3} \div \frac{7}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{7}$$



$\frac{1}{3}$ $\times \frac{2}{7}$ $= \frac{2}{21}$

5.3. Resultados de los cuestionarios realizados a los estudiantes.

A continuación, se muestran los resultados de los cuestionarios realizados a los 600 estudiantes. Cada pregunta se realizó para poder evaluar un aspecto en específico, con el propósito de determinar cuál es la falla para cada pregunta. Cada aspecto evaluado es explicado a continuación después de cada pregunta

1. Observe y señale que tiene en común las siguientes fracciones.

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{4}{5}$$

El objetivo de la primera pregunta es que los estudiantes identifiquen correctamente que el denominador es el mismo para las 3 fracciones, además de diferenciar correctamente el numerador y el denominador.

Tabla 43. Fracciones que tienen en común.

Alternativas	Sin materiales paralelos A		Con materiales paralelos B	
	Frecuencia	**Porcentaje %**	**Frecuencia**	**Porcentaje %**
El mismo numerador	0	0	0	0
El mismo denominador	300	100	300	100
Diferente numerador y denominador	0	0	0	0
Total	**300**	**100**	**300**	**100**

En la tabla 43 se observa claramente que todos los estudiantes, tanto del paralelo A como del B coinciden en que las fracciones dadas tienen en común el denominador, lo que significa que la primera etapa que es identificar el numerador y el denominador no representan problema para los alumnos independientemente si la clase la reciben con o sin el material.

2. Realizar la siguiente operación.

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = ?$$

El propósito de esta pregunta es que los estudiantes puedan realizar una suma de fracciones propias con el mismo denominador.

Tabla 44. Suma de fracciones, pregunta 2.

Alternativas	Sin materiales paralelos A		Con materiales paralelos B	
	Frecuencia	**Porcentaje %**	**Frecuencia**	**Porcentaje %**
Correcto	238	79	286	95
Incorrecto	62	21	14	5
No responde	0	0	0	0
Total	**300**	**100**	**300**	**100**

En la tabla 44 se aprecia que, en la suma de fracciones, la mayor parte de estudiantes tanto del paralelo A como del B responde correctamente, sin embargo, también es evidente que el porcentaje de estudiantes del paralelo "B" es mayor que los del otro paralelo.

3. **José tenía un terreno rectangular dividido en 8 partes iguales en el que decidió sembrar papa. Indicó a sus hijos que se ocuparan de esta tarea. Al término de la jornada del segundo día llamo a sus hijos para que le informaran como iban los trabajos. El hijo mayor respondió: Padre, el primer día por la tarde llovió, por lo tanto, solo pudimos sembrar en 2/8 del terreno, el segundo día el clima estuvo favorable y pudimos sembrar en 4/8. ¿Al término del segundo día qué parte de todo el terreno está sembrado?**

   El propósito de esta pregunta es que los estudiantes puedan razonar sobre el procedimiento que deben seguir para resolver el problema.

Tabla 45. Suma de fracciones, pregunta 3.

Alternativas	Sin materiales paralelos A		Con materiales paralelos B	
	Frecuencia	**Porcentaje %**	**Frecuencia**	**Porcentaje %**
Correcto	256	85	298	99
Incorrecto	44	15	2	1
No responde	0	0	0	0
Total	**300**	**100**	**300**	**100**

En la tabla 45 se observa que, se mantiene la tendencia de la pregunta anterior ya que en ambos paralelos la mayoría respondió correctamente el problema, sin embargo, en los paralelos B el porcentaje de estudiantes que contestaron correctamente fue mayor llegando al 99%.

4. Realizar la siguiente operación

$$\frac{7}{4} - \frac{2}{3} = ?$$

El propósito de esta pregunta es determinar si los estudiantes pueden resolver un ejercicio de resta de fracciones con diferente denominador entre una fracción impropia y una fracción propia.

Tabla 46. Resta de fracciones, pregunta 4.

Alternativas	**Sin materiales paralelos A**		**Con materiales paralelos B**	
	Frecuencia	**Porcentaje %**	**Frecuencia**	**Porcentaje %**
Correcto	78	26	289	96
Incorrecto	222	74	11	4
No responde	0	0	0	0
Total	**300**	**100**	**300**	**100**

En la tabla 46 se observa, que en el paralelo A, presentó un porcentaje muy alto de estudiantes que respondieron la pregunta de manera incorrecta, en contraste con el paralelo B que en su gran mayoría si respondieron la pregunta de manera correcta. Esto representa que, para operaciones de sustracción de fracciones con diferente denominador, el material concreto juega un papel fundamental para el entendimiento y resolución adecuada de dicha operación.

5. Representar gráficamente la expresión:

$$\frac{4}{6} - \frac{2}{6} =$$

En este problema el propósito es determinar si los estudiantes pueden resolver una resta de fracciones propias con el mismo numerador.

Tabla 47. Resta de fracciones, pregunta 6.

Alternativas	Sin materiales paralelos A		Con materiales paralelos B	
	Frecuencia	**Porcentaje %**	**Frecuencia**	**Porcentaje %**
Correcto	252	84	300	100
Incorrecto	46	15	0	0
No responde	2	1	0	0
Total	**300**	**100**	**300**	**100**

En la tabla 47 se observa que, todos los estudiantes del paralelo B respondieron correctamente la pregunta, aunque es importante recalcar que, si bien el porcentaje no es igual, los estudiantes de los paralelos A también tienen un alto porcentaje que respondieron la pregunta correctamente.

6. Si a un entero le quitamos (3/8) ¿Cuál es su respuesta?

El propósito de esta pregunta es determinar si los estudiantes pueden representar la operación requerida y llegar a una solución.

Tabla 48. Resta de fracciones, pregunta 6.

Alternativas	Sin materiales paralelos A		Con materiales paralelos B	
	Frecuencia	**Porcentaje %**	**Frecuencia**	**Porcentaje %**
Correcto	201	67	300	100
Incorrecto	99	33	0	0
No responde	0	0	0	0
Total	**300**	**100**	**300**	**100**

En la tabla 48 se observa que al igual que la pregunta anterior, todos los estudiantes del paralelo B respondieron correctamente la pregunta.

7. Realizar la siguiente operación en forma analítica y gráficamente.

$$\frac{2}{3}x\frac{3}{4} =$$

El propósito de esta pregunta es determinar si los estudiantes pueden realizar una multiplicación de dos fracciones correctamente.

Nota: La explicación grafica se la realizo solamente al grupo experimental, sin embargo, con el propósito de hacer el mismo examen a ambos grupos se realizó la pregunta también al grupo de control.

Tabla 49. Multiplicación de fracciones, pregunta 7.

Alternativas	**Sin materiales paralelos A**		**Con materiales paralelos B**	
	Frecuencia	**Porcentaje %**	**Frecuencia**	**Porcentaje %**
Correcto	230	77	300	100
Incorrecto	70	23	0	0
No responde	0	0	0	0
Total	**300**	**100**	**300**	**100**

En la tabla 49 se observa, que en el paralelo A, el 77% de los estudiantes respondieron correctamente. Por otro lado, en el paralelo B, el 100% de los estudiantes respondieron correctamente (Para el grupo de control que se consideró si respondieron correctamente independientemente si realizaron el grafico o no).

8. Realizar la siguiente operación.

$$3 \times \frac{2}{3}$$

El propósito de esta pregunta es determinar si los estudiantes pueden realizar una multiplicación entre un entero y una fracción.

Tabla 50. Multiplicación de fracciones, pregunta 8.

Alternativas	**Sin materiales paralelos A**		**Con materiales paralelos B**	
	Frecuencia	**Porcentaje %**	**Frecuencia**	**Porcentaje %**
Correcto	94	31	262	87
Incorrecto	206	69	38	13
No responde	0	0	0	0
Total	**300**	**100**	**300**	**100**

En la tabla 50 se observa, un contraste muy grande entre los estudiantes de los paralelos A y B, ya que los alumnos del paralelo A en su gran mayoría respondieron incorrectamente la pregunta, mientras que los alumnos del paralelo B la mayoría respondieron la pregunta de manera correcta.

9. Aplicando la ley de signos realizar la siguiente operación.

$$\left(-\frac{7}{8}\right)x\,\frac{4}{3} =$$

El propósito de esta pregunta es determinar si los estudiantes pueden realizar una multiplicación de dos fracciones una negativa y otra positiva. Esto no se explica con las tiras de papel ya que no es posible, lo único que se explicó previamente fue la ley de signos para la multiplicación, pero se lo hizo ya que es un factor indispensable en cualquier tema posterior a las fracciones.

Tabla 51. Multiplicación de fracciones, pregunta 9.

Alternativas	**Sin materiales paralelos A**		**Con materiales paralelos B**	
	Frecuencia	**Porcentaje %**	**Frecuencia**	**Porcentaje %**
Correcto	168	56	281	94
Incorrecto	127	42	19	6
No responde	5	2	0	0
Total	**300**	**100**	**300**	**100**

En la tabla 51 se observa, que en los paralelos A, existe un porcentaje casi igual entre los estudiantes que contestaron de manera correcta y los que se equivocaron. Por otro lado, en los paralelos B, más del 90% respondió correctamente.

10. Realizar la siguiente operación.

$$\frac{2}{5} \div \frac{1}{6}$$

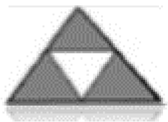
El propósito de esta pregunta es determinar si los estudiantes pueden realizar una división entre 2 fracciones propias.

Tabla 52. División de fracciones, pregunta 10.

Alternativas	Sin materiales paralelos A		Con materiales paralelos B	
	Frecuencia	**Porcentaje %**	**Frecuencia**	**Porcentaje %**
Correcto	221	74	287	96
Incorrecto	67	22	13	4
No responde	12	4	0	0
Total	**300**	**100**	**300**	**100**

En la tabla 52 se observa, que en ambos paralelos A y B, los estudiantes que respondieron correctamente a la pregunta son en su gran mayoría. El número de estudiantes que erraron es reducido, sin embargo, el porcentaje si es menor en los paralelos B comprándolo con los paralelos A.

11. La parte sombreada corresponde a: encierre en un círculo la respuesta correcta.



$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{4}{3}$

El propósito de esta pregunta es determinar si los estudiantes pueden reconocer el significado de una fracción de manera gráfica.

Tabla 53. Representación de fracción, pregunta 11.

Alternativas	Sin materiales paralelos A		Con materiales paralelos B	
	Frecuencia	**Porcentaje %**	**Frecuencia**	**Porcentaje %**
Correcto	100	100	100	100
Incorrecto	0	0	0	0
No responde	0	0	0	0
Total	**300**	**100**	**300**	**100**

En la tabla 53 se puede observar que, ya sea con o sin la utilización del material de apoyo, el 100% de encuestados de ambos paralelos respondieron correctamente la pregunta. Lo que claramente indica que los estudiantes tienen una facilidad para reconocer una fracción propia de forma gráfica.

12. Representar gráficamente la fracción.

$$\frac{9}{4}$$

El propósito de esta pregunta es determinar si los estudiantes pueden representar gráficamente una fracción impropia.

Tabla 54. División de fracciones, pregunta 12.

Alternativas	**Sin materiales paralelos A**		**Con materiales paralelos B**	
	Frecuencia	**Porcentaje %**	**Frecuencia**	**Porcentaje %**
Correcto	179	60	300	100
Incorrecto	81	27	0	0
No responde	40	13	0	0
Total	**300**	**100**	**300**	**100**

En la tabla 54 se observa, que en los paralelos A, un considerable número de estudiantes contestaron erróneamente o no contestaron la pregunta, por otro lado, en los paralelos B el 100% de los alumnos contesto correctamente la pregunta.

5.4. Análisis de los resultados obtenidos después de aplicar el examen a los estudiantes.

Al observar las figuras 125 y 126 se puede concluir que el total de estudiantes que respondieron correctamente a las preguntas es 27% mayor con el grupo que si trabajo con el material de apoyo. Además, que los estudiantes que respondieron incorrectamente se redujeron hasta solamente un 3% y que para este grupo ninguno dejo una respuesta sin contestar.

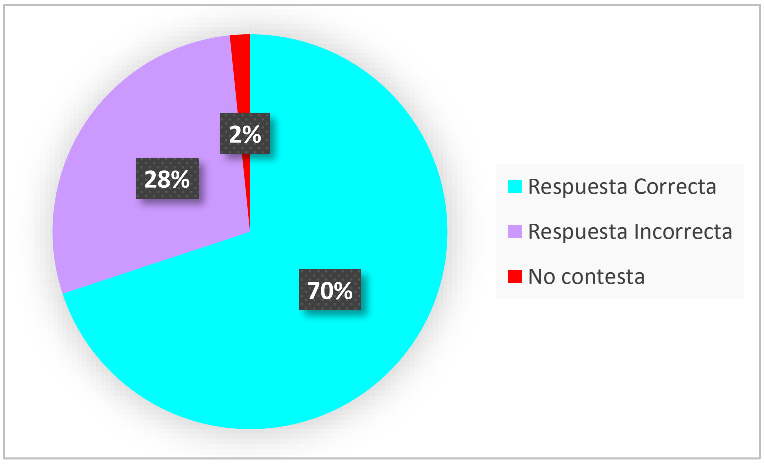


Figura 125. Porcentaje total de las respuestas de los estudiantes que no utilizaron el material de apoyo.

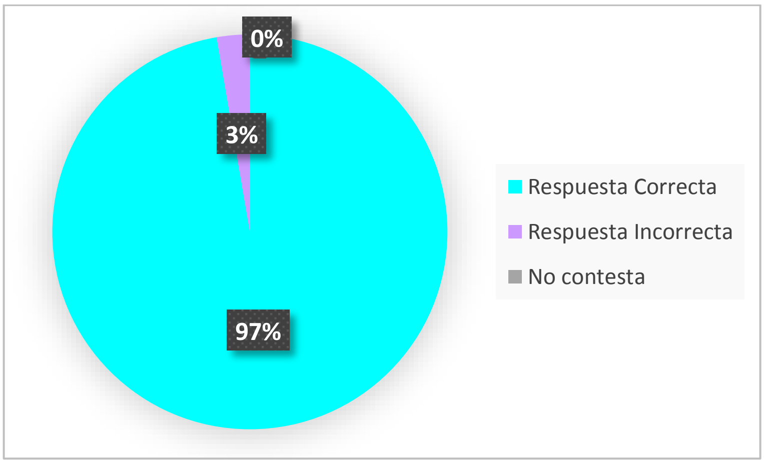


Figura 126. Porcentaje total de las respuestas por parte de los estudiantes que recibieron la clase con el material de apoyo.

Con lo anterior se observa que en total de respuestas correctas para el grupo con el material es mayor que el grupo sin el material, además, con las gráficas 127 y 128 se puede comparar las respuestas de manera individual, y claramente para todas las preguntas el número de respuestas correctas siempre en mayor para el grupo que sí trabajó con el material.

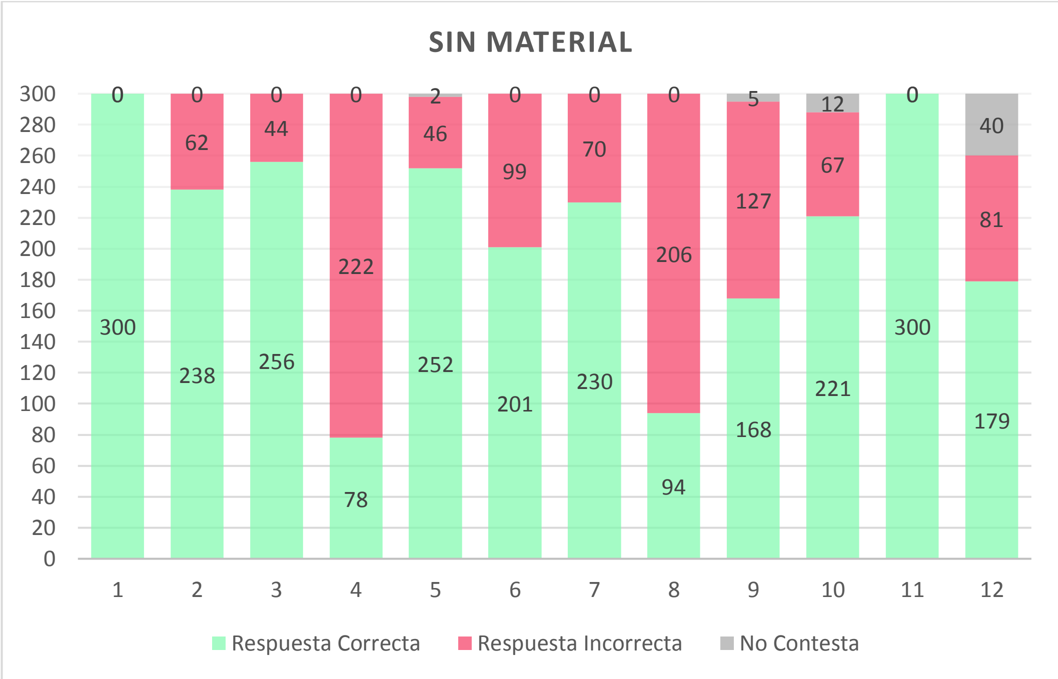


Figura 127. Resumen de las respuestas de los estudiantes por pregunta.

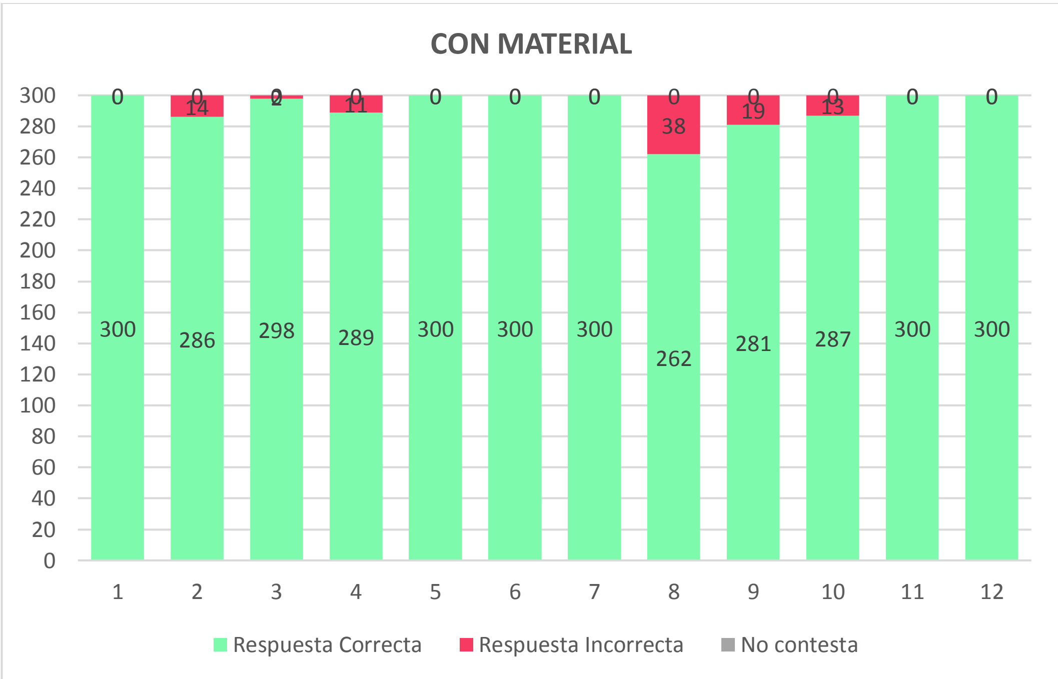


Figura 128. Resumen de las respuestas de los estudiantes por pregunta.

Para realizar el análisis estadístico de los datos obtenidos se procede primero a realizar un análisis descriptivo de los datos obtenidos, tal como se observa en las figuras 129, 130 y 131, donde se observa la media de respuestas correctas, incorrectas o sin contestar, del conjunto de todos los alumnos encuestados.

Como podemos observar en las 3 figuras, la mayoría de los alumnos han contestado correctamente prácticamente a doce de las cuestiones.

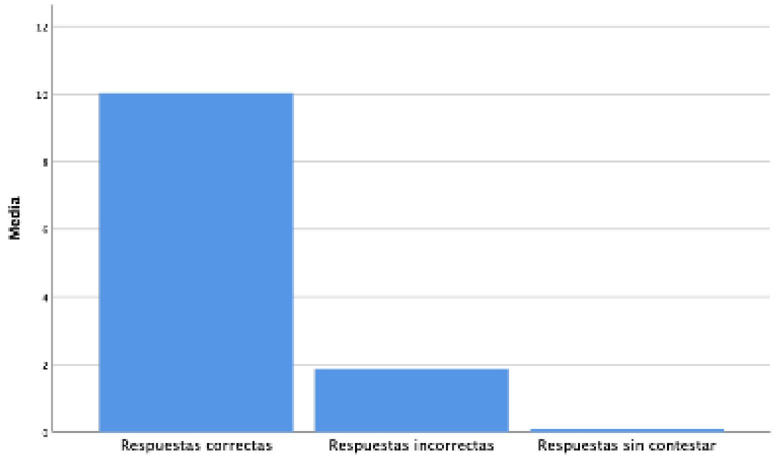


Figura 129. Media de Respuestas correctas, incorrectas y sin contestar.

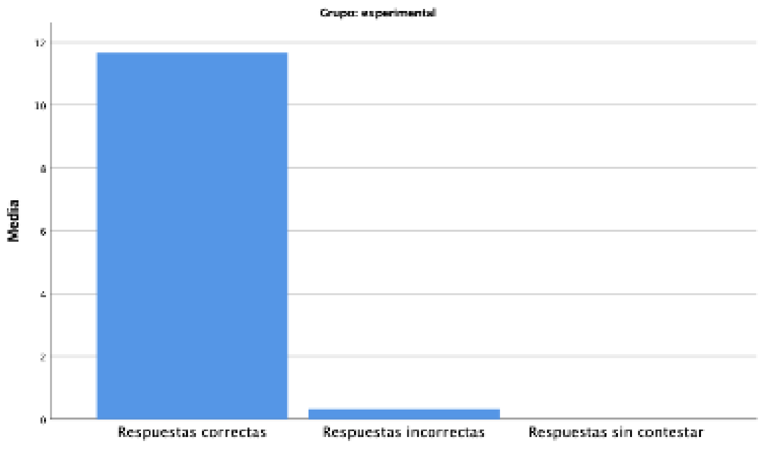


Figura 130. Media de Respuestas correctas, incorrectas y sin contestar del grupo experimental.

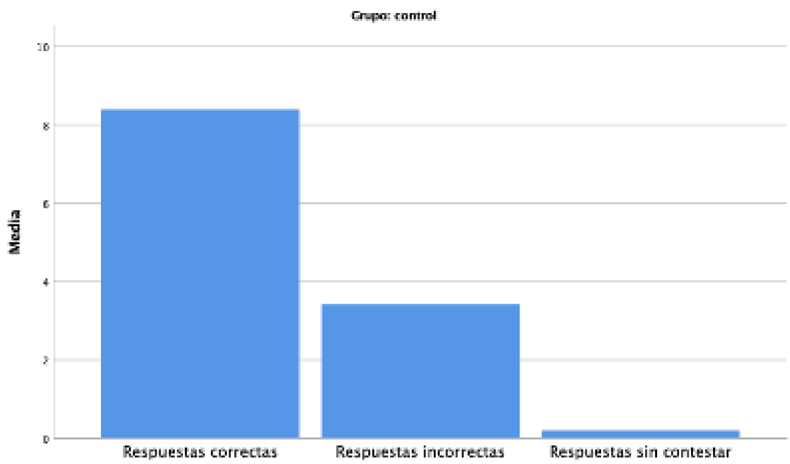


Figura 131. Media de Respuestas correctas, incorrectas y sin contestar del grupo de control.

Sin embargo, en las dos figuras anteriores (figura 130 y 131), se observa cómo en el grupo control el número de respuestas correctas es menor que en el grupo experimental, del mismo modo que con respecto a las preguntas incorrectas ocurre, al contrario.

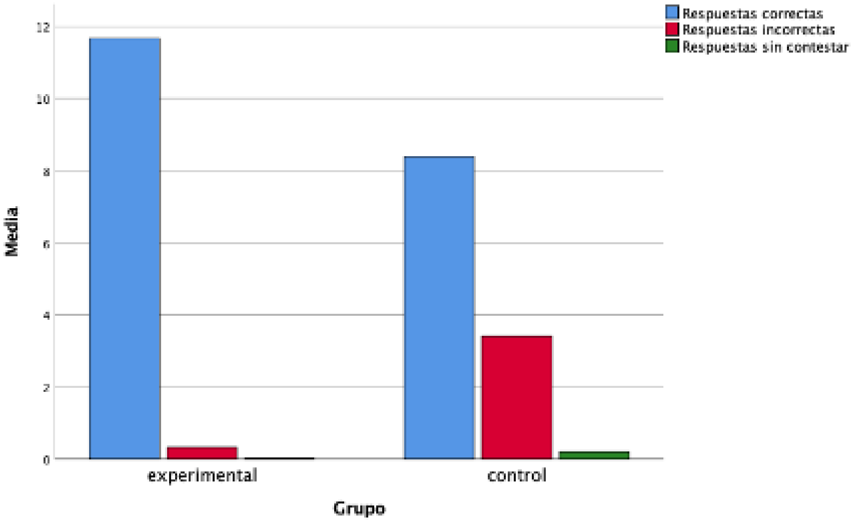


Figura 132. Grafica comparativa entre los resultados del grupo experimental y de control.

La figura 132 es un resumen de los datos, donde nos permite comparar visualmente las respuestas correctas, incorrectas o sin contestar en ambos grupos. Como podemos observar, hay una clara diferencia del grupo experimental frente al grupo control.

La tabla 58 a continuación, se muestra que la media de las respuestas correctas es de 11.68, con una mediana de 12 más alta en el grupo experimental, ya que en el grupo de control solamente se obtiene una media de 8.39 con una mediana de 8.00.

Los datos referidos a respuestas correctas e incorrectas muestran también diferencias a favor del grupo experimental frente al grupo control.

Tabla 55. Estadísticos de las respuestas correctas, incorrectas y sin contestar.

Grupo			Respuestas correctas	Respuestas incorrectas	Respuestas sin contestar
experimental	N	Válido	300	300	300
		Perdidos	0	0	0
	Media		11,68	0,32	0,00
	Mediana		12,00	0,00	0,00
Control	N	Válido	300	300	300
		Perdidos	0	0	0
	Media		8,39	3,41	,20
	Mediana		8,00	3,00	,00

Pasaremos a continuación a realizar pruebas inferenciales que nos permitirán contrastar si estas diferencias observadas son estadísticamente significativas ($p < .05$).

Dado que estamos trabajando con variables medidas a nivel de intervalo, para ello procederemos a realizar las pruebas de Kolmogorov-Smirnov para contrastar la distribución normal de los datos, la prueba de Rachas para comprobar su aleatoriedad y la de Levene para comprobar la igualdad de varianzas entre los dos grupos, experimental y control. Tomaremos los datos referidos a respuestas correctas.

Tabla 56. Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra.

Grupo			Respuestas correctas
experimental	N		300
	Parámetros normales[a,b]	Media	11,68
		Desv. Desviación	0,554
	Máximas diferencias extremas	Absoluto	0,440
		Positivo	0,280
		Negativo	-0,440
	Estadístico de prueba		0,440
	Sig. asintótica(bilateral)		0,000[c]
Control	N		300
	Parámetros normales[a,b]	Media	8,39
		Desv. Desviación	1,478
	Máximas diferencias extremas	Absoluto	0,150
		Positivo	0,114
		Negativo	-0,150
	Estadístico de prueba		0,150
	Sig. asintótica(bilateral)		0,000[c]

a. La distribución de prueba es normal.
b. Se calcula a partir de datos.
c. Corrección de significación de Lilliefors.

Como podemos observar, en ambos grupos el valor de la significación asintótica bilateral es 0.000, lo que nos indica que los datos, en ambos grupos, se apartan de una distribución normal.

A continuación, contrastaremos, mediante la prueba de Rachas la aleatoriedad de los datos.

__Tabla 57. Prueba de rachas para las respuestas de los estudiantes.__

Grupo		Respuestas correctas
experimental	Valor de prueba[a]	12
	Casos < Valor de prueba	84
	Casos >= Valor de prueba	216
	Casos totales	300
	Número de rachas	124
	Z	0,293
	Sig. asintótica(bilateral)	0,770
control	Valor de prueba[a]	8
	Casos < Valor de prueba	78
	Casos >= Valor de prueba	222
	Casos totales	300
	Número de rachas	125
	Z	1,288
	Sig. asintótica(bilateral)	0,198

a. Mediana

En ambos casos (sig. = 0,770 y sig. = 0,198), podemos comprobar que ambos conjuntos de datos no se diferencian de los de una distribución aleatoria, por lo que pueden ser considerados como tales.

Por último, comprobaremos si existe igualdad de varianzas entre ambos conjuntos de datos.

Tabla 58. Prueba de muestras independientes.

		Prueba de Levene de igualdad de varianzas		prueba t para la igualdad de medias						
									95% de intervalo de confianza de la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	Inferior	Superior
Respuestas correctas	Se asumen varianzas iguales	200,079	,000	36,064	598	0,000	3,287	0,091	3,108	3,466
	No se asumen varianzas iguales			36,064	381,253	0,000	3,287	0,091	3,107	3,466

Los resultados obtenidos en la prueba de Levene (sig. = 0.000) nos permiten afirmar que no existe igualdad de varianzas entre ambos grupos.

Una vez comprobado que los conjuntos de datos no siguen una distribución normal y que no existe igualdad de varianzas entre ellos, debemos elegir pruebas no paramétricas para contrastar si existen diferencias estadísticamente significativas entre los datos de ambos grupos. Por tratarse, además de grupos independientes, la prueba escogida será la de U de Mann-Whitney, cuyos resultados mostramos a continuación, en la tabla 59.

Tabla 59. Estadísticos de prueba[a] para las respuestas de los estudiantes.

	Respuestas correctas
U de Mann-Whitney	1712,500
W de Wilcoxon	46862,500
Z	-21,002
Sig. asintótica(bilateral)	0,000

a. Variable de agrupación: Grupo

Hay diferencias estadísticamente significativas (sig. = 0.000) entre los dos grupos por lo que respecta a las preguntas correctas.

Los datos presentados a continuación (tabla 60) nos permiten comprobar que el número de respuestas correctas es mayor, de forma estadísticamente significativa, en el grupo experimental (rango promedio 444,79) que en el grupo control (rango promedio 156,21).

Tabla 60. Rangos promedio de las respuestas correctas proporcionadas por el grupo de control y el grupo experimental.

	Grupo	N	Rango promedio	Suma de rangos
Respuestas correctas	experimental	300	444,79	133437,50
	control	300	156,21	46862,50
	Total	600		

A continuación (tabla 61), presentamos los datos correspondientes a la prueba U de Mann-Whitney tanto para el número de respuestas correctas como para las incorrectas o sin contestar

Tabla 61. Estadísticos de prueba[a] (Respuestas correctas, incorrectas y sin contestar)

	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas	Respuestas sin contestar
U de Mann-Whitney	1712,500	2221,500	36600,000
W de Wilcoxon	46862,500	47371,500	81750,000
Z	-21,002	-20,774	-7,851
Sig. asintótica(bilateral)	0,000	0,000	0,000

a. Variable de agrupación: Grupo

En todos los casos (sig.= 0.000) existen diferencias estadísticamente significativas entre los dos grupos. Los anteriores resultados, junto con los datos presentados a continuación (tabla 62) nos permiten afirmar que, de forma estadísticamente significativa existe un mayor número de respuestas correctas en el grupo experimental (rango promedio = 444,79) que en el grupo control (rango promedio = 156,21), mientras que el número respuestas incorrectas es mayor en el grupo control (rango promedio = 443,10) que en grupo experimental (rango promedio = 157,91). Algo similar ocurre con las respuestas sin contestar, que es mayor en el grupo control (rango promedio = 328,50) que en el grupo experimental (rango promedio = 272, 50).

Tabla 62. Rangos promedio y suma de rangos.

	Grupo	N	Rango promedio	Suma de rangos
Respuestas correctas	experimental	300	444,79	133437,50
	control	300	156,21	46862,50
	Total	600		
Respuestas incorrectas	experimental	300	157,91	47371,50
	control	300	443,10	132928,50
	Total	600		
Respuestas sin contestar	experimental	300	272,50	81750,00
	control	300	328,50	98550,00
	Total	600		

Estos datos, nos permiten afirmar que los resultados obtenidos por los alumnos del grupo experimental, tras la intervención, son mejores que los del grupo control, en los que no hubo tal intervención.

5.5. Errores más comunes entre los resultados de los estudiantes sin el material (grupo de control).

A continuación, se detallan los errores más comunes entre los estudiantes de los paralelos “A”. Dentro de cada pregunta se incluye un gráfico explicando la frecuencia con la que aparecieron dichos errores.

Nota**:** Dentro de cada pregunta hay un pequeño porcentaje (Otros), que hace referencia a errores que no entran en las demás descripciones, al tratarse de errores de escritura por parte del estudiante.

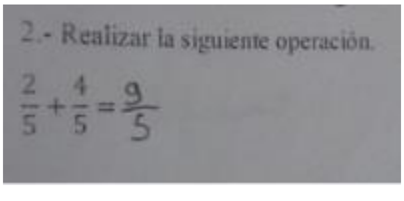
Pregunta 1.

Ningún estudiante tuvo problemas contestando esta pregunta

Pregunta 2.

La figura 133a, ilustra una de las repuestas incorrectas más comunes entre los estudiantes, al parecer, el estudiante suma el denominador de la primera fracción con el numerador de la segunda fracción manteniendo los denominadores.

Otro error bastante común mostrado en la figura 133b, es que los estudiantes al resuelven el problema tratando de obtener el mínimo común múltiplo, pero este número es más grande de lo que debería y aunque la fracción resultan que es correcta esta no es simplificada para obtener la respuesta final.

a) 

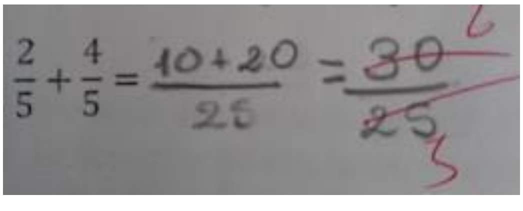
b) 

Figura 133. Resolución incorrecta de la pregunta 2 del cuestionario.

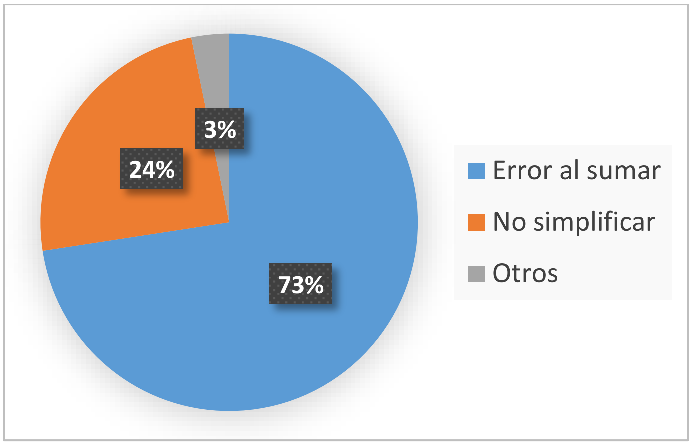


Figura 134. Frecuencia de los errores para la pregunta 2.

Pregunta 3.

En la figura 135a se muestra que algunos estudiantes representan las fracciones de modo independiente de forma correcta, sin embargo, no llegan a una solución ya que no realizan la operación se suma, para determinar la respuesta. Además, en la figura 135b se observa un caso similar en donde la representación gráfica del problema es correcta pero los cálculos usados son incorrectos.

a) 

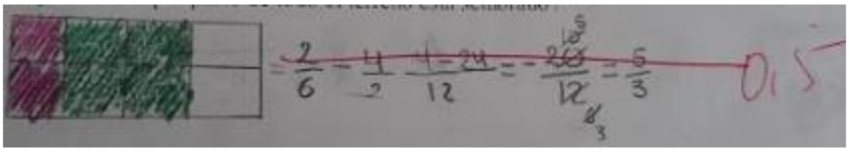
b) 

Figura 135. Resolución incorrecta de la pregunta 3 del cuestionario.

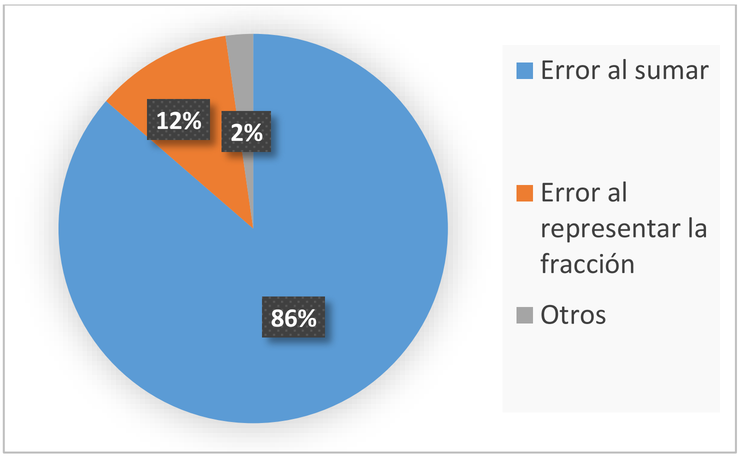


Figura 136. Frecuencia de los errores para la pregunta 3.

Pregunta 4.

De las respuestas incorrectas, se evidenció que varios estudiantes después de haber determinado el mínimo común múltiplo (m.c.m), hacen la operación como si fuera una resta con denominadores iguales en lugar de aplicar el algoritmo de resta con fracciones.

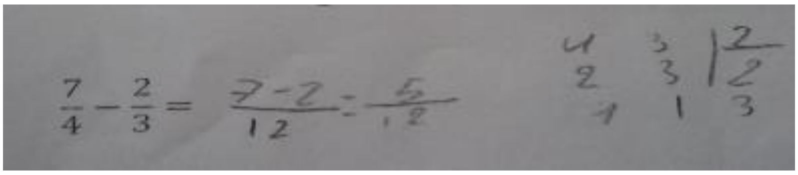


Figura 137. Resolución incorrecta de la pregunta 4 del cuestionario

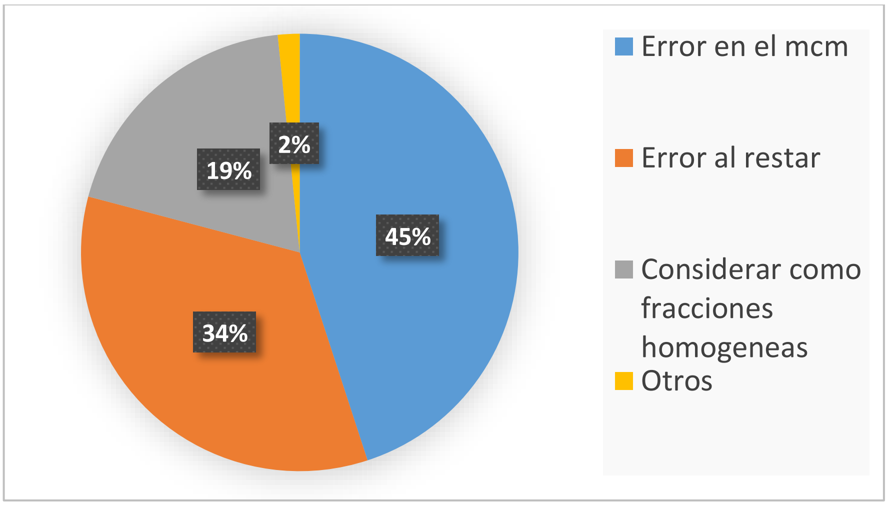


Figura 138. Frecuencia de los errores para la pregunta 4.

Pregunta 5.

De las respuestas incorrectas, se notó que, un gran porcentaje de estudiantes, grafican la fracción correctamente, como se observa en la figura 139a, 139b y 139c, sin embargo, estos no realizan la operación de resta por lo que tampoco representan gráficamente la respuesta correcta.

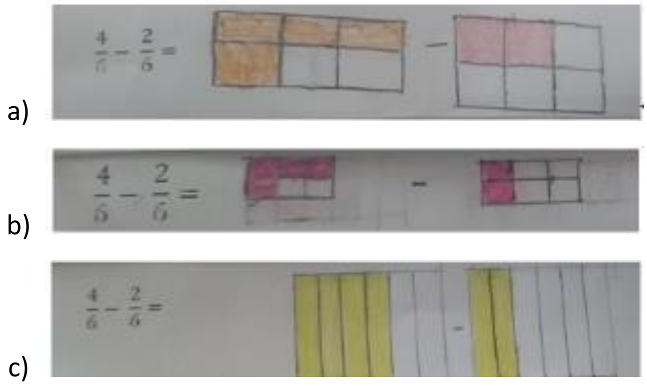


Figura 139. Resoluciones incorrectas de la pregunta 5 del cuestionario.

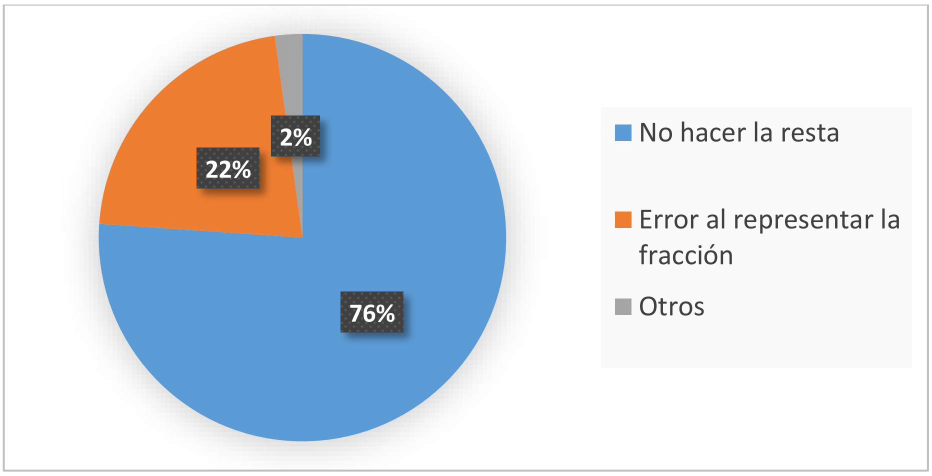


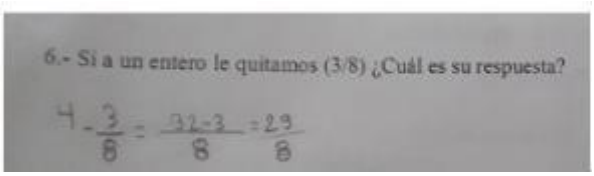
Figura 140. Frecuencia de los errores para la pregunta 5.

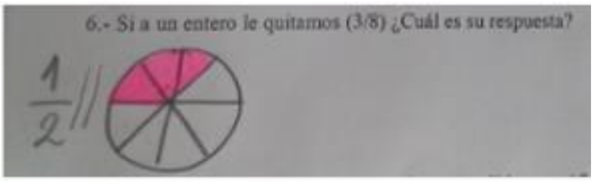
Pregunta 6.

Esta pregunta presenta diferentes tipos de errores, por ejemplo, en la figura 141a, el estudiante no realiza la resta de la unidad, más bien realiza de resta de un valor de 4 dando a entender que no puede interpretar que una unidad es 1.

En la figura 141b, el estudiante realizo un gráfico para determinar la respuesta y aunque el grafico es correcto la fracción que representa la respuesta no lo es, lo que significa que el estudiante entiende el concepto de fracciones gráficamente pero no es capaz de expresar su valor numérico.

También hay algunos casos en que los estudiantes se limitaron únicamente a hacer un gráfico, pero ni siquiera intentaron escribir una respuesta, tal como se puede observar en el grafico 141c.

a) 

b) 

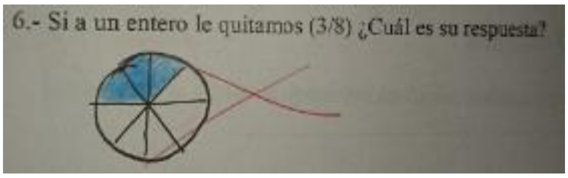
c) 

Figura 141. Resoluciones incorrectas de la pregunta 6 del cuestionario.

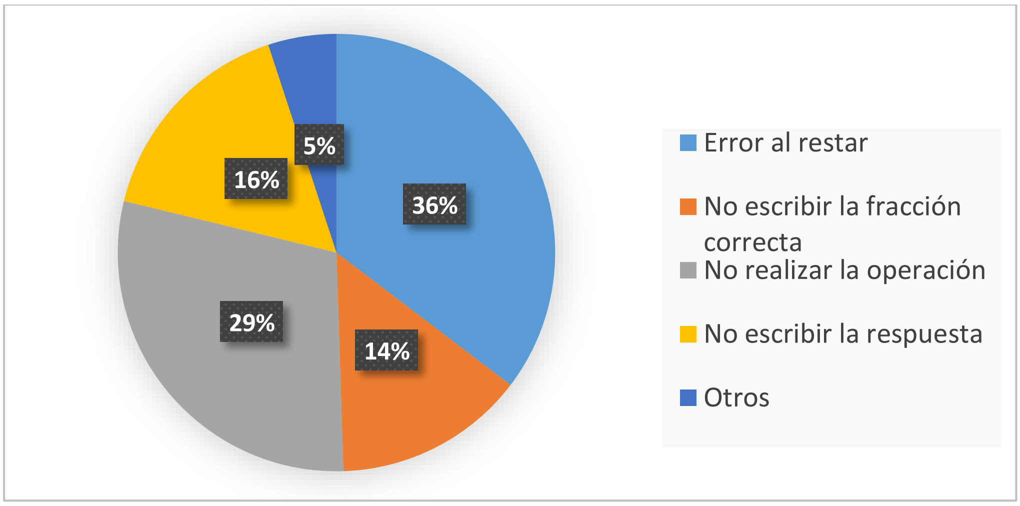
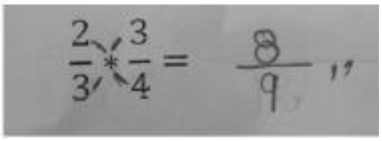


Figura 142. Frecuencia de los errores para la pregunta 6.

Pregunta 7.

Dentro de los errores más frecuentes se evidencia según la figura 143a, que los estudiantes al parecer confunden los algoritmos de división y multiplicación de fracciones, en el ejercicio se puede apreciar que aplican el algoritmo de la división, es decir que multiplican en cruz en lugar de multiplicar numerador con numerador y denominador con denominador.

También hay un pequeño grupo que calcula el mínimo común múltiplo como si estuvieran realizando una suma tal como se ve en la figura 143b.

a) 

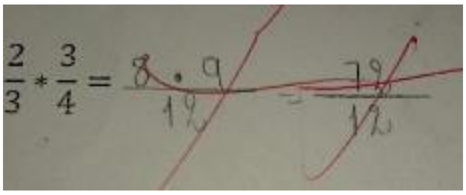
b) 

Figura 143. Resolución incorrecta de la pregunta 7 del cuestionario.

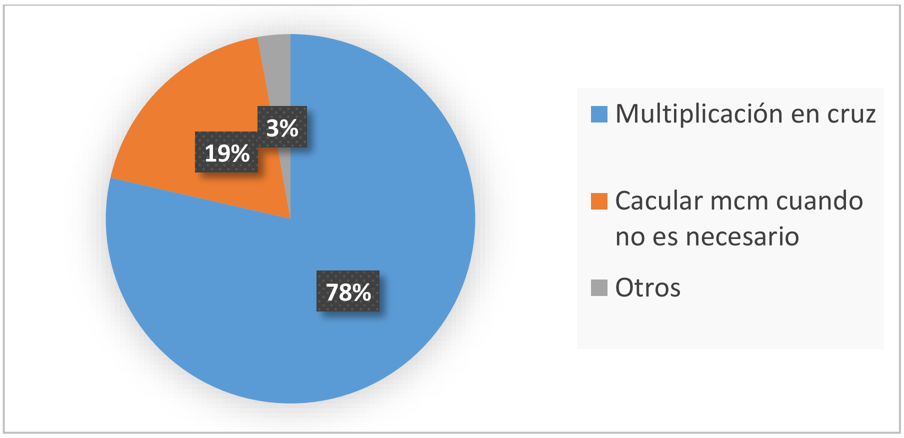


Figura 144. Frecuencia de los errores para la pregunta 7.

Pregunta 8.

En la figura 145 se puede observar que, el error encontrado más frecuente indica que los estudiantes no toman en consideración el signo de la multiplicación por el contrario resuelven el problema como un número mixto.

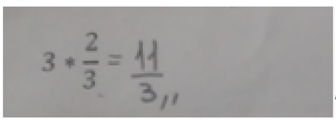


Figura 145. Resolución incorrecta de la pregunta 8 del cuestionario.

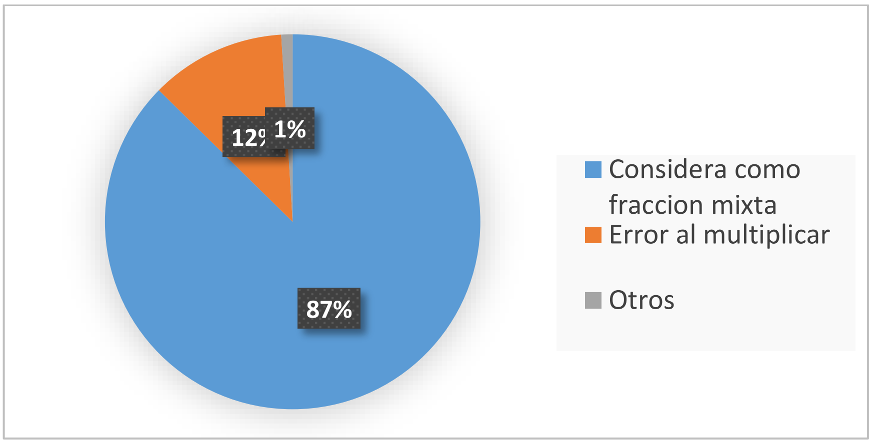


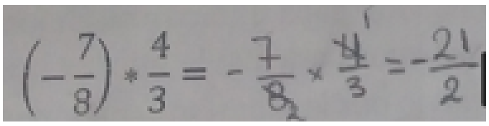
Figura 146. Frecuencia de los errores para la pregunta 8.

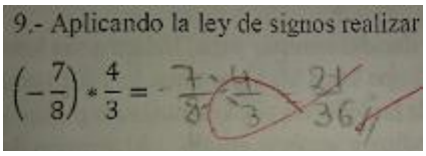
Pregunta 9.

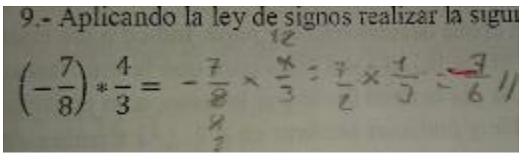
Esta pregunta en particular presentó varios tipos de errores, como se observa en la figura 147a, en donde el estudiante realiza una multiplicación en cruz (proceso usado para la división), es un error muy importante ya que es el mismo error que se comete en la pregunta 7. En la figura 147b se comete no solo el error de multiplicar en cruz, sino que además la multiplicación está mal realizada.

Un error menos común como se observa en la figura 147c es que los estudiantes no consideran el signo al realizar la operación, aunque esto no pertenece al tema de fracciones no se puede considerar que el ejercicio este bien resuelto.

Finalmente hay uno pocos estudiantes que aparentemente no saben cómo proceder con el ejercicio ya que no dejan la pregunta sin contestar, pero no llegan a ninguna conclusión, tal como se observa en la figura 147d.

a) 

b) 

c) 

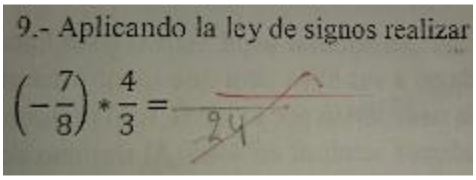
d) 

Figura 147. Resolución incorrecta de la pregunta 9 del cuestionario.

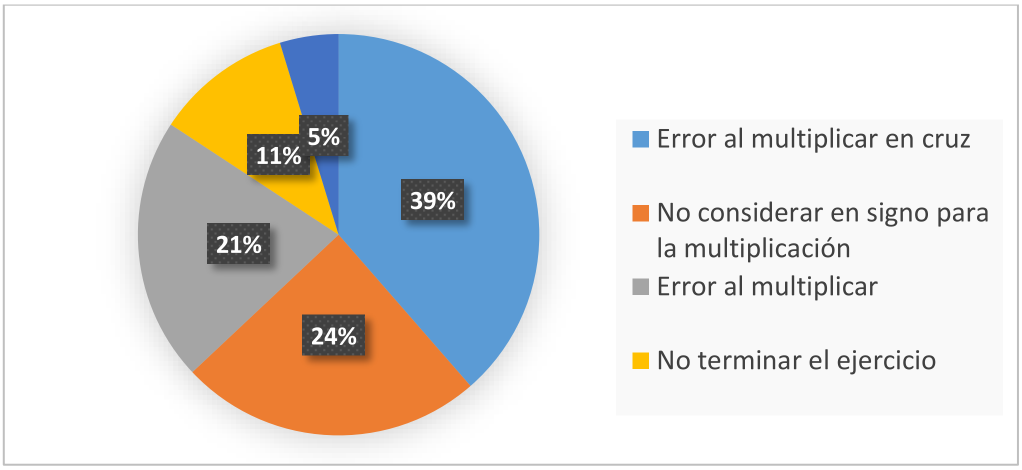
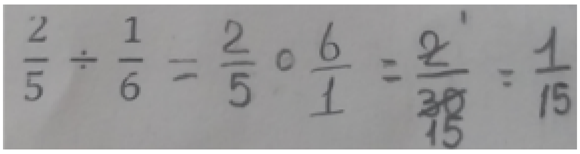


Figura 148. Frecuencia de los errores para la pregunta 9.

Pregunta 10.

La dificultad más frecuente que se evidenció es que los estudiantes aplican correctamente el algoritmo de la división al intercambiar el denominador por el numerador de la segunda fracción, pero luego multiplican en cruz, cuando se debería multiplicar paralelamente tal como se observa en la figura 149a. Además, que hay un pequeño grupo que intercambiaron el numerador y el denominador de ambas fracciones tal como se evidencia en la figura 149b.

a) 

b)

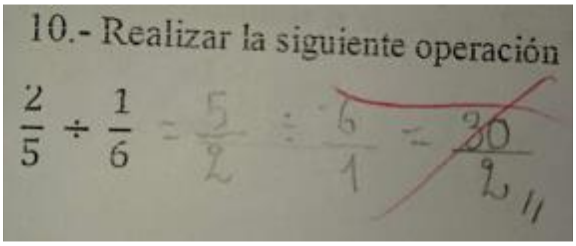


Figura 149. Resolución incorrecta de la pregunta 10 del cuestionario.

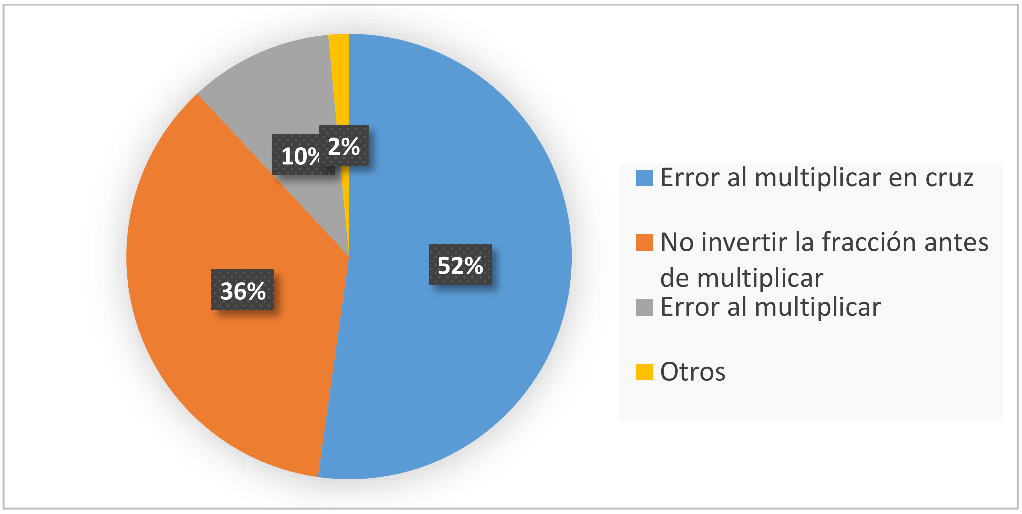


Figura 150. Frecuencia de los errores para la pregunta 10.

Pregunta 11.

El 100% de los estudiantes contesto esta pregunta correctamente.

Pregunta 12.

La figura 151a, 151b y 151c muestra que el porcentaje de estudiantes que fallan en esta pregunta lo hacen porque no pueden graficar una fracción impropia, lo que claramente se contrasta con la pregunta anterior donde el 100% de los alumnos pudieron reconocer una fracción a partir del gráfico, sin embargo, el grafico anterior mostraba una fracción propia.

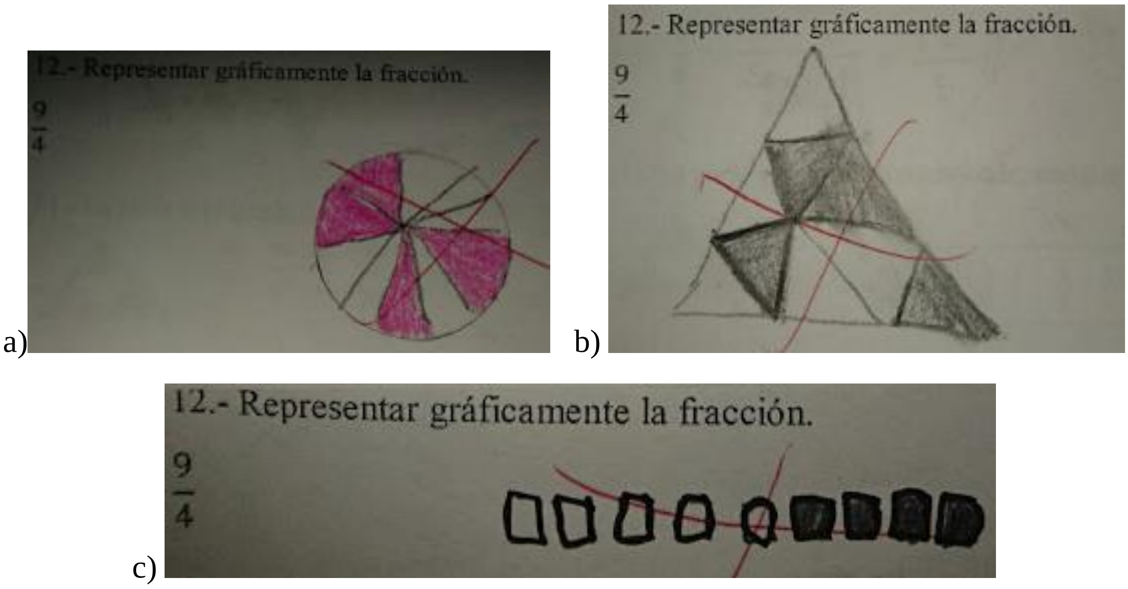


Figura 151. Resolución incorrecta de la pregunta 12 del cuestionario.

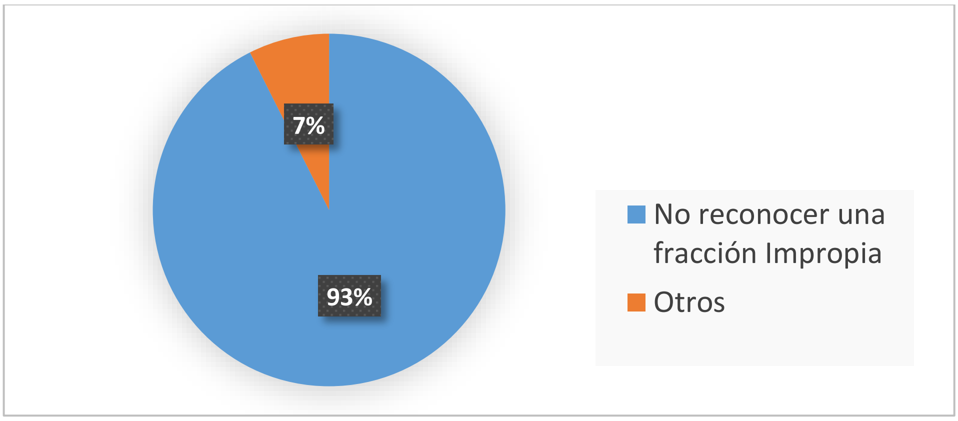


Figura 152. Frecuencia de los errores para la pregunta 12.

5.6. Errores más comunes entre los resultados de los estudiantes con el material (grupo experimental).

A pesar que los resultados fueron mucho mejores en este grupo también es importante recalcar que también hubo errores, a continuación, se detallan los errores más comunes entre los estudiantes de los paralelos “B”. Dentro de cada pregunta se incluye el gráfico explicando la frecuencia con la que aparecieron dichos errores.

Pregunta 1.

Ningún estudiante tuvo problemas contestando esta pregunta.

Pregunta 2.

La figura 153 muestra que, los estudiantes cometen errores básicos ya que si reconocen que el denominador es el mismo pero la operación de suma es errónea.

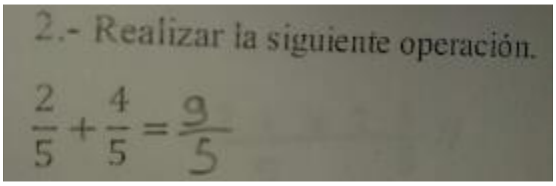


Figura 153. Resolución incorrecta de la pregunta 2 del cuestionario.

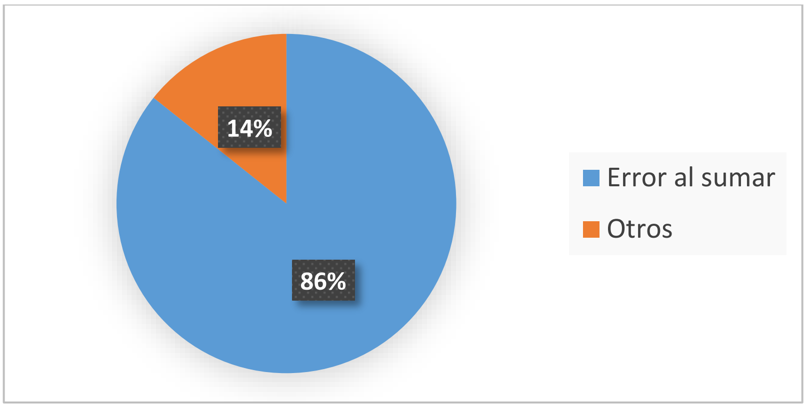


Figura 154. Frecuencia de los errores para la pregunta 2.

Pregunta 3.

La figura 155 muestra que, los estudiantes grafican la respuesta, pero no realizan los cálculos para obtener la respuesta.

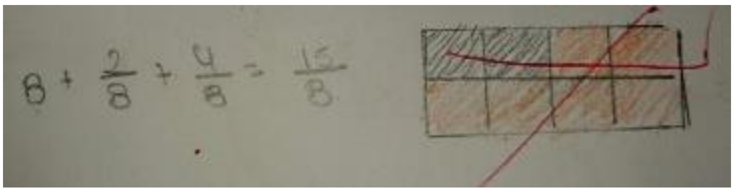


Figura 155. Resolución incorrecta de la pregunta 3 del cuestionario.

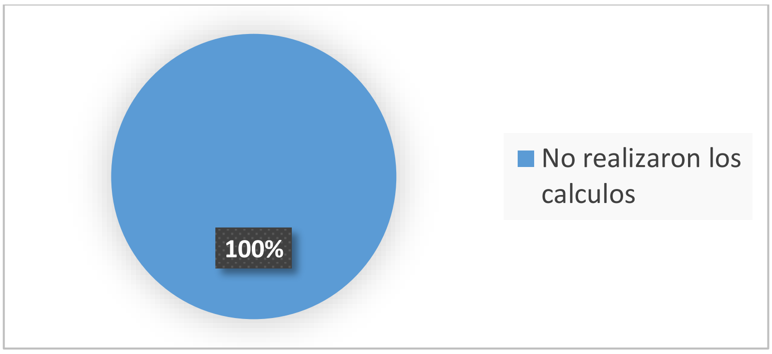


Figura 156. Frecuencia de los errores para la pregunta 3.

Pregunta 4.

La figura 157 muestra que, los estudiantes reconocen el mínimo común múltiplo, pero no realizan la operación matemática correctamente.

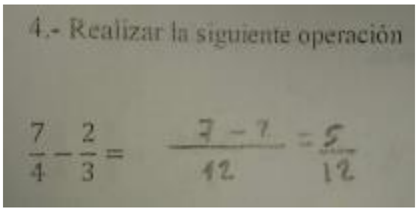


Figura 157. Resolución incorrecta de la pregunta 4 del cuestionario.

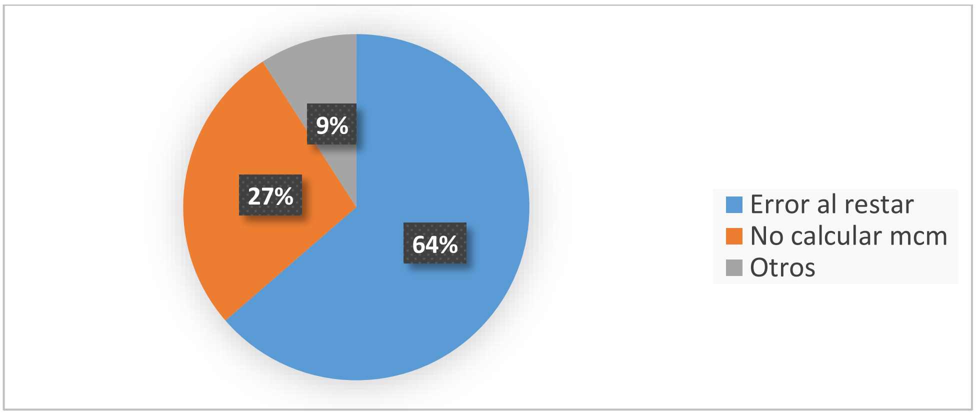


Figura 158. Frecuencia de los errores para la pregunta 4.

Pregunta 5.

Ningún estudiante tuvo problemas contestando esta pregunta.

Pregunta 6.

Ningún estudiante tuvo problemas contestando esta pregunta.

Pregunta 7.

Ningún estudiante tuvo problemas contestando esta pregunta.

Pregunta 8.

La figura 159a muestra que un pequeño grupo de estudiantes interpreto incorrectamente la multiplicación del número entero con la fracción. Además, en la figura 159b se evidencia que otro grupo de estudiantes realiza la multiplicación de manera incorrecta, al comparar el paralelo A que no utilizó materiales, con el B que si empleo se puede apreciar que hay un descenso en los errores de 87% a 66%.

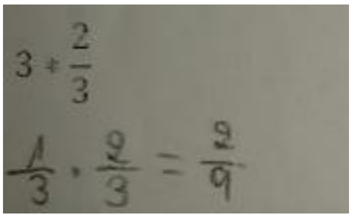
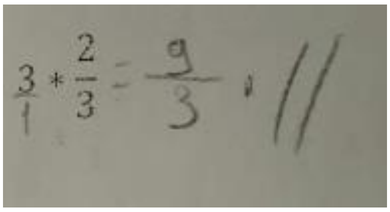
a)  b) 

Figura 159. Resolución incorrecta de la pregunta 8 del cuestionario.

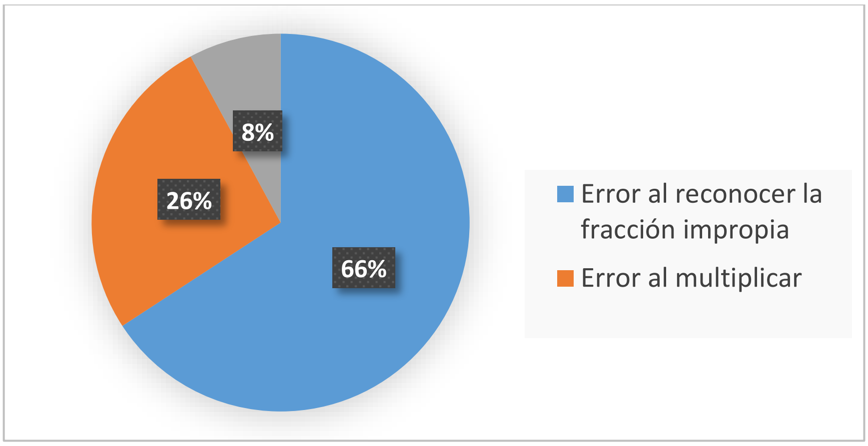


Figura 160. Frecuencia de los errores para la pregunta 8.

Pregunta 9.

La figura 161 muestra que los estudiantes que contestaron mal esta pregunta fueron porque no consideraron el signo negativo para la multiplicación, que es el mismo error que el anterior grupo cometió.

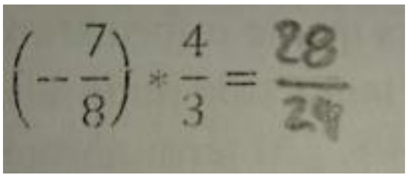


Figura 161. Resolución incorrecta de la pregunta 9 del cuestionario.

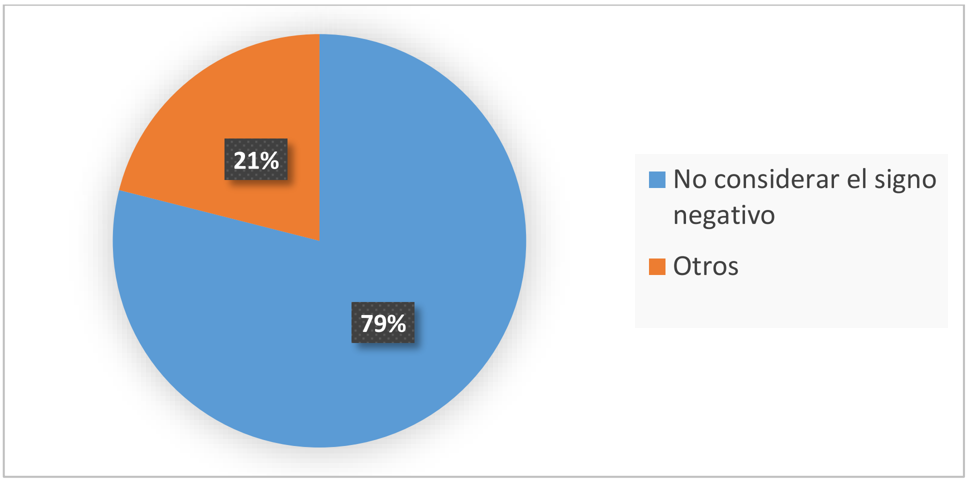
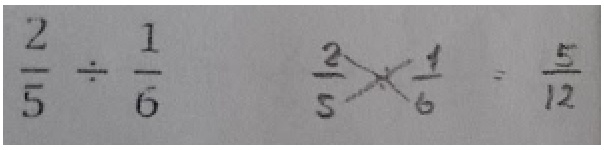


Figura 162. Frecuencia de los errores para la pregunta 9.

Pregunta 10.

La figura 163a y 163b muestran que el error que comenten los estudiantes es que fallan al realizar la multiplicación en cruz o simplemente fallan en la operación de multiplicación.

a)


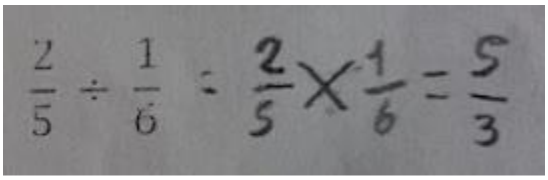
b)


Figura 163. Resolución incorrecta de la pregunta 10 del cuestionario.

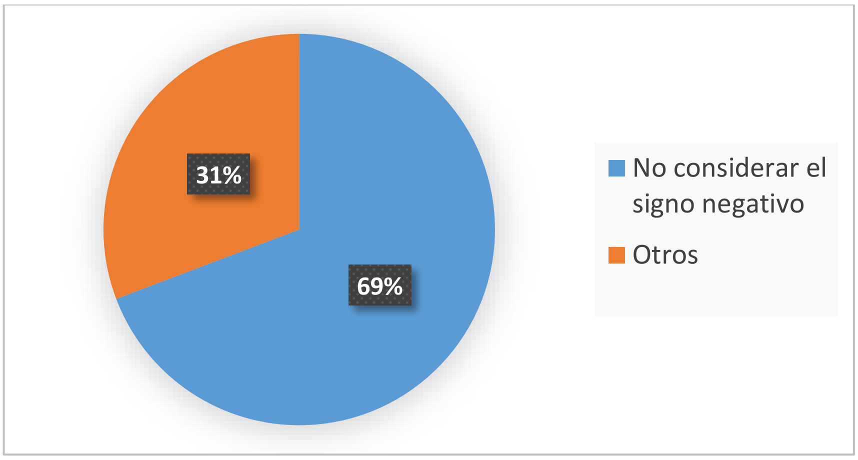


Figura 164. Frecuencia de los errores para la pregunta 10.

Pregunta 11.

Todos los estudiantes respondieron la pregunta de manera correcta.

Pregunta 12.

Ningún estudiante tuvo problemas contestando esta pregunta.

Tabla 63. Resultados de los cuestionarios con el error más común para cada pregunta.

	Estudiantes que recibieron la clase sin el material (Paralelos A)			**Estudiantes que recibieron la clase con el material (Paralelos B)**		
	Respuesta correcta [%]	Respuesta incorrecta [%]	Principal error	Respuesta correcta [%]	Respuesta incorrecta [%]	Principal error
Pregunta 1	100	0	-	100	0	-
Pregunta 2	79	21	Suma de numerador incorrecta	95	5	Suma de numerador incorrecta
Pregunta 3	85	15	Suma incorrecta	99	1	Suma incorrecta
Pregunta 4	26	74	Resta incorrecta del numerador	96	4	Resta incorrecta del numerador
Pregunta 5	84	15	No realizan la resta	100	0	-
Pregunta 6	67	33	No reconocieron el entero	100	0	-
Pregunta 7	77	23	Multiplicaron en cruz	100	0	-
Pregunta 8	31	69	Consideraron como fracción mixta	87	13	Error al multiplicar
Pregunta 9	56	42	Falla en el signo negativo Multiplicaron en cruz Falla en la multiplicación	94	6	Falla en el signo negativo
Pregunta 10	74	22	Falla en la multiplicación en cruz	96	4	Falla en la multiplicación en cruz
Pregunta 11	100	0	-	100	0	-
Pregunta 12	60	27	No pueden graficar una fracción impropia	100	0	-

Después de revisar la tabla 63 se puede determinar que los resultados si fueron mejores en los paralelos B sin embargo el tipo de errores que muestran ambos grupos son básicamente los mismos.

La falla en la multiplicación en cruz y operaciones con signos negativos parece ser un error en común para ambos grupos, lo que muestra que se requiere de un mejor método para explicar la división de fracciones.

5.7. Conclusiones de los resultados obtenidos en la evaluación realizada a ambos grupos de estudiantes.

En lo que se refiere a fracciones con el mismo denominador, se observa claramente en la tabla 43 que todos los estudiantes, tanto del paralelo A como del B coinciden en que las fracciones dadas tienen en común el denominador, lo que significa que la primera etapa que es identificar el numerador y el denominador no representan problema para los alumnos independientemente si la clase la reciben con o sin el material.

En la tabla 44 se aprecia que, en la suma de fracciones, la mayor parte de estudiantes tanto del paralelo A como del B responde correctamente, sin embargo, también es evidente que el porcentaje de estudiantes del paralelo "B" es mayor que los del otro paralelo, este particular se da en virtud que el paralelo B trabajo con material concreto.

Respecto a la resta de fracciones en la tabla 37 se observa, que en el paralelo A, presentó un porcentaje muy alto de estudiantes que respondieron la pregunta de manera incorrecta, en contraste con el paralelo B que en su gran mayoría si respondieron la pregunta de manera correcta. Esto representa que, para operaciones de sustracción de fracciones con diferente denominador, el material concreto juega un papel fundamental para el entendimiento y resolución adecuada de dicha operación, cumpliéndose con uno de los objetivos específicos.

En la multiplicación de fracciones la tabla 49 se observa, que en el paralelo A, el 77% de los estudiantes respondieron correctamente. Por otro lado, en el paralelo B, el 100% de los estudiantes respondieron correctamente (Para el grupo de control que se consideró si respondieron correctamente independientemente si realizaron el grafico o no), de igual manera **e**n la tabla 54 se observa, que en los paralelos A, el 42% responde erróneamente. El propósito de esta pregunta es determinar si los estudiantes pueden realizar una multiplicación de dos fracciones una negativa y otra positiva. Esto no se explica con las tiras de papel ya que no es posible, lo único que se explicó previamente fue la ley de signos para la multiplicación, pero se lo hizo ya que es un factor indispensable en cualquier tema posterior a las fracciones. Por otro lado, en los paralelos B, más del 90% respondió correctamente.

Al tratarse de manera gráfica las fracciones en la tabla 53 se puede observar que, ya sea con o sin la utilización del material de apoyo, el 100% de encuestados de ambos paralelos respondieron correctamente la pregunta. Lo que claramente indica que los estudiantes tienen una facilidad para reconocer una fracción propia de forma gráfica, y sucede todo lo contrario con las fracciones impropias como se puede apreciar en la tabla 55.
La falla en la multiplicación en cruz y operaciones con signos negativos parece ser un error en común para ambos grupos, lo que muestra que se requiere de un mejor método para explicar la división de fracciones, esto da lugar al cumplimiento de uno de los objetivos específicos propuestos.

La figura 133 se muestra que la media de las respuestas correctas es de 11.68, si se considera que la calificación máxima que se podía obtener del examen es 12, se determina que la media es muy alta en el grupo experimental, ya que en el grupo de control solamente se obtiene una media de 8.39, es decir que la afirmación de la hipótesis si se cumple.

6. CONCLUSIONES GENERALES

Con los datos obtenidos por las encuestas a los docentes se puede concluir que estos en su mayoría consideran a las fracciones como un tema de fácil enseñanza y de gran importancia dentro del proceso educativo, sin embargo, para los estudiantes la dificultad de entender el tema de fracciones contrasta con las opiniones de los docentes.

En los textos de 5°, 6°, y 7° ciclo de EGBM se puede apreciar que en el tema de fracciones tiene una carga curricular importante en el programa de estudios, por lo que es necesario implementar estrategias didácticas que orienten la conceptualización y aplicación de las mismas, las clases tradicionales deben cambiar su rumbo metodológico debido a que hace que los estudiantes no le encuentren la verdadera importancia que se debe y por consiguiente presenta un rechazo a cualquier contenido matemático que se presente. He aquí el deber que se debe de tener como docente, innovar cada clase y hacerla más significativa para que de esta manera los estudiantes le encuentren el sentido y la razón creativa de estudiar las fracciones como una interpretación dinámica y creativa.

Un alto porcentaje de docentes recurren a algún tipo de material adicional al momento de dictar sus clases ya que consideran que el material suministrado por el ministerio de educación no es suficiente para cubrir este tema adecuadamente.

Al momento de impartir las clases se pudo evidenciar que los estudiantes mostraban más interés cuando tenían las tiras de fracciones, a diferencia de los estudiantes que recibieron la clase sin este material los cuales se mostraban más indiferentes y seguramente no ponían la debida atención, esto es meramente la percepción de la persona que impartió las clases. Por lo cual se concluye que el tener algo físico como material concreto en las manos de los estudiantes ya es una gran ayuda a que mejoren su concentración durante el tiempo que dure la clase.

Después de comparar los resultados de los exámenes realizados a los 2 grupos de estudiantes se puede concluir que el haber utilizado el material pre cortado (tiras de fracciones equivalentes) si influyo en el proceso de aprendizaje, ya que, los resultados fueron superiores en cada una de las preguntas.

Al momento de comparar cuales fueron los errores más comunes entre los estudiantes se puede concluir que en ambos paralelos se producen errores en los conceptos más básicos como son suma, resta o multiplicación además de errores de signos. Esto significa que los estudiantes olvidan estudiar los fundamentos lo que obviamente dificulta el entendimiento en otros temas que en este caso fueron las fracciones.

Un error bastante común en ambos grupos que si tenía que ver con el tema de fracciones fue el momento de realizar la operación de multiplicación y división. Aparentemente los estudiantes confunden el proceso a seguir ya que al multiplicar en cruz se presenciaron varios fallos, por ejemplo invierten la primera fracción en lugar de la segunda, o se multiplicaba cuando el ejercicio pedía dividir etc. Esto significa que el docente se debe implementar una ayuda extra al momento de explicar esta parte de las fracciones, en este punto se cumple con uno de los objetivos específicos de la propuesta.

Esta investigación es importante porque permitió determinar cuáles son los recursos o materiales más utilizado por el profesor en la enseñanza de las fracciones, así como también los errores que cometen los estudiantes en las operaciones con fracciones, a pesar como se dijo anteriormente en el tema de fracciones tiene una carga curricular importante en el programa de estudios, por eso es de vital importancia que la complejidad del concepto de fracción debe ser comprendida por los profesores para diseñar e implementar una enseñanza adecuada. No basta con que los profesores sean competentes en el empleo de las fracciones y el material concreto a utilizar, sino que se requiere un dominio específico del contenido para su enseñanza. Es decir, el profesor debe ser consciente de la diversidad de significados de las fracciones y el papel que desempeña cada significado para dar sentido a las relaciones y operaciones con fracciones. Por tanto, se requieren profesores con un conocimiento profundo de las fracciones. El bajo conocimiento del contenido puede llevar a una enseñanza de baja calidad, repercutiendo en los aprendizajes de los estudiantes, como menciona Ball, Hill y Bass (2005) que la calidad de la enseñanza de las matemáticas depende del conocimiento de los profesores del contenido y, a su vez, requieren conocimientos específicos, del mismo modo Madeleine Goutard 1964, desde su experiencia con niños que presentaban dificultades en el aprendizaje de las fracciones y sus propias observaciones en la clase, señala que: “Las fracciones no son algo que hay que saber, sino algo que hay que comprender, y no es posible comprenderlas antes de tener una suficiente experiencia con ellas, la clave del éxito en la iniciación al estudio de las fracciones es la variedad, el cambio, y la diversidad de puntos de vista"

Esta investigación será de interés para el Ministerio de Educación del Ecuador y se espera que los resultados de la presente investigación, contribuyan a mejorar y orientar procesos de capacitaciones que permitan lograr actualizaciones y mejoras en la formación de los docentes.

Finalmente, se concluye que el uso de materiales recortados prediseñados y las estrategias didácticas diseñadas en el proceso de investigación favorece significativamente la conceptualización de las fracciones y su aplicación en la resolución de diversos problemas matemáticos, cumpliéndose de esta forma con la hipótesis planteada.

7. BIBLIOGRAFÍA

Adam, P. P. (1958). *El material didáctico matemático actual: presentado en la XIa. Reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática y Exposición Internacional Simultánea*, Madrid, España: Ministerio de Educación Nacional.

Alsina, A. (2002). *De los contenidos a las competencias numéricas en la enseñanza obligatoria*. Uno. Didáctica de las Matemáticas. Recuperado de: https://pdfs.semanticscholar.org/4a6b/eadcbc2f5e4799fd535ff24d8096902e9d6f.pdf

Álvarez, J., & Casado, J. (2002). *Estándares curriculares y de evaluación de las matemáticas*. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Recuperado de https://es.calameo.com/read/004536728d74fba11855f

Álvarez, Á. Á. (1996). *Actividades matemáticas con materiales didácticos: más de 250 problemas con fichas, dominó, palillos, tramas, geoplanos, policubos, tangram, pentominós, libro de espejos, tabla de multiplicar y papiroflexia*. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia, Centro de Publicaciones.

Amat, J. (2016). *Análisis de la homogeneidad de varianza (homocedasticidad)*, Recuperado: https://www.cienciadedatos.net/documentos/9_homogeneidad_de_varianza_homocedasticidad.html

Andonegui, M. (2006). *Fracciones I: concepto y representación*. Serie desarrollo del pensamiento matemático, Caracas, Venezuela: UNESCO. Recuperado de http://scioteca.caf.com/handle/123456789/530.

Arcavi, A., & Friedlander, A. (2007). Curriculum developers and problem solving: the case of Israeli elementary school projects. ZDM, 39(5-6), 355-364.

Ávila, A., & Mancera, E. (1989). La fracción: una expresión difícil de interpretar. Pedagogía. *Revista de la Universidad Pedagógica Nacional*, *6*, 21-26.

Barrios, A. (2010). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones. Comunicación presentada en 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa (7 al 9 de octubre de 2010). Bogotá, Colombia.

Bachelard, G. (1981). La formación del espíritu científico (9a, edición). México: Siglo XXI Editores. Recuperado de: http://www.posgrado.unam.mx/musica/lecturas/LecturaIntroduccionInvestigacionMusical/epistemologia/Bachelard%20Gaston-La-formacion-del-espiritu-cientifico.pdf

Barbavid, E. (1991) Los Materiales Didácticos. Medios y apoyo a la docencia. *Revista Docencia*, México, Trillas, S.A., Barcelona, España.

Batanero, C., & Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado de: http://ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). *Adquisición de conceptos y procesos matemáticos.* Nueva York: Academic Press.

Blatner, A., & Blatner, A. (1997). *The art of play: Helping adults reclaim imagination and spontaneity*, Rev. Brunner/Mazel., Disponible en: https://psycnet.apa.org/record/1997-97417-000

Bordón, J., & Varela, J. (2001). *La enseñanza de las fracciones en el 2do ciclo de la Educación General Básica.* Buenos Aires, Argentina: Unesco. Recuperado en http://www. gpd matematica. org. ar/publicaciones/fraccionesmodulo2. pdf.

Bonilla, E., Block, D., & Waldegg, G. (1993). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La investigación educativa en los ochenta. Perspectiva para los noventa, *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, Distrito Federal, México: Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/140/14000114.pdf

Boyer, C. B. (1987). *Historia de las Matemáticas, 1ra edición*, Madrid, España: Ed. Alianza Universidad Texto.

Cascallana, M.T. (1988). *Iniciación a la matemática*. Materiales y recursos didácticos. Madrid, Aula XXI.

Castro, E. (1994). *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años)*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada, España.

Carrillo, M. F., Henríquez, S. S., Bravo, A. S., Mellado, M. B., & Manzi, E. F. (2008). Propuestas didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en fracciones. *Horizontes educacionales*, *13*(2), 87-98.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis

Coriat, H. L. (1997). *Estimulación Temprana: La construcción de una disciplina en el campo de los problemas del desarrollo infantil*. Escritos de la Infancia, 8, 29. Buenos Aires, Argentina: Fundación para el Estudio de Problemas de la infancia.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*, pp.160, Bolonia, Italia: Edizioni Centro Studi Erickson.

Dietrichson, A. (2019). *Métodos Cuantitativos*. Bookdown (Xie 2018). Recuperado de: https://bookdown.org/dietrichson/metodos-cuantitativos/

Escolano, R., & Gairín, J. (2005). Modelos de medida para la enseñanza de números racionales en educación primaria. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, *1*, 17-35.

Fandiño, M.I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Bologna, Italia.

Fandiño, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Fazio, L., & Siegler, R. (2011). *Enseñanza de las fracciones*. Academia Internacional de Educación. Recuperado de: http://repositorio.minedu.gob.pe/bitstream/handle/MINEDU/5156/Ense%c3%b1anza%20de%20las%20fracciones.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado de: https://digibug.ugr.es/handle/10481/21964

Flores, R., & Martínez, G. (2009). Una construcción de significado de la operatividad de los números. En P. Leston, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, págs. 509. México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Frank, J., & Massey, Jr. (1951) The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit, *Journal of the American Statistical Association*, 46:253, 68-78. Recuperado de: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1951.10500769

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras.* Dordrecht, Reidel: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa

Gairín, J.M. y Muñoz, J. (2005). *El número racional positivo en la práctica educativa: estudio de una propuesta editorial*. IX Simposio SEIEM. Córdoba. Recuperado de: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/cd/grupos/grupopna/gairinmunoz.pdf

Gallardo, J. González, L, & Quispe, Wenceslao. (2008). *Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración: Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11(3), 355-382. Recuperado de:

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S166524362008000300003&lng=es&tlng=en.

García, M. J. (2017). *Blog del IES Doña Jimena de Gijón*. Recuperado de http://www.jimena.com/egipto/apartados/papiros.htm

Gaviria, G. A. (2016*). Estrategia didáctica para trabajar el concepto de fracción como relación Parte-Todo en grado quinto, teniendo en cuenta su origen histórico*. (Doctoral dissertation, Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá DC, Colombia). Recuperado de: https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/57702

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Granada, ReproDigital. Facultad de Ciencias, Recuperado de http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/livros/fundamentos.pdf

González, A. C. L. (2015). *Proceso administrativo*. México DF: Grupo Editorial Patria.

Goutard, M. (1964). *Mathematics and children: a reappraisal of our attitude*. Crowthorne, Reino Unido: Educational Explorers.

Gutiérrez, T. D. P. (2009). *Las matemáticas a lo largo de la historia de la prehistoria a la Antigua Grecia*. Madrid, España: Editorial Visión Libros.

Hincapié, C. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la Institución Educativa San Andrés de Girardota*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de: https://core.ac.uk/reader/11055800

Hurtado, M. E. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el sexto grado.* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. Obtenido de http://www.bdigital.unal.edu.co/8573/1/01186688.2012.pdf

Jiménez, L. R., Gordillo, J. E., & Rubiano, G. N. (2004). *Teoría de números para principiantes.* Bogotá, Colombia: Pro-Offset Editorial Ltda.

Kieren, T. E. (1976). *On the mathematical, cognitive and instructional*. In *Number and measurement. Papers from a research workshop* (Vol. 7418491, p. 101). University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

Kieren, T. E. (1980). *Five faces of mathematical knowledge building. Edmonton: Department of Secondary Education*, University of Alberta. Edmonton, Alberta, Canada.

Kieran, C. (1981). *Concepts associated with the equality symbol. Educational studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326. Edmonton, Alberta, Canada.

Kieren, T. E. (1983). *Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas*. In Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education (pp. 506-508). Alberta, Canada.

Kinzie, M. B., & Berch, D. B. (2012). *Developing number sense in pre-k with five-frames*. Early Childhood Education Journal, 40(4), 213-222. Recuperado de: https://link.springer.com/article/10.1007/s10643-011-0479-4

León, G. (2011). Unidad didáctica: fracciones. Trabajo fin de máster, Universidad de la Granada, Especialidad: Matemáticas. Recuperado de: http://fqm193. ugr. es/media/grupos/FQM193/cms/Gloria_Leon. pdf.

León, P. (1998). *Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 2(1), 5-28, México: Revista Latinoamericana de Investigación en Matematica Educativa Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/28130441_Procedimientos_de_ninos_de_primaria_en_la_solucion_de_problemas_de_reparto

Linares, S. (2003). *Fracciones, decimales y razón: desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional*. In Didáctica de las Matemáticas para Primaria *(pp. 187-220)*. Pearson Educación. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/metricas/.

Sánchez García, M. V., & Llinares Ciscar, S. (1997). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. In *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (Zamora: Universidad de Granada)*. Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (Zamora: Universidad de Granada). Recuperado de: https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/17916/file_1.pdf?sequence=1

López, J. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo*. Manizales: Universidad Nacional de Colombia. Carlos Alfredo Cárdenas Solano. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/5922/1/8410009.2012.pdf

Meza, A., & Barrios, A. (2010). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones*. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1174/1/674_Propuesta_Didctica_Asocolme2010.pdf

Metaute Mesa, M. M. (2017). *Una propuesta de aprendizaje significativo para entender el concepto de fracción como parte del todo, con alumnos de sexto, del sector rural, en Amalfi*. Univeridad Cooperativa de Colombia, Medellín, Colombia. Recuperado de https://repository.ucc.edu.co/bitstream/20.500.12494/7466/3/2018_propuesta_aprendizaje_significativo.pdf

Ministerio de Educación del Ecuador. [MINEDUC]. (2016). *Actualización y fortalecimiento curricular de la educación básica*. Quito, Ecuador.: Recuperado de https://educacion.gob.ec/.

Moreno, A. J., & Flores, P. (2000). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y oposiciones*. Un acercamiento. IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, 211-214. Recuperado de https://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Propuestas/Jaem_Lugo.pdf

Murillo, F. J. y Román, M. (2011b). *¿La Escuela O La Cuna? Evidencias Sobre Su Aportación Al Rendimiento De Los Estudiantes De América Latina. Estudio Multinivel Sobre La Estimación De Los Efectos Escolares Profesorado*. Revista De Currículum Y Formación De Profesorado, Vol. 15, Núm. 3, 2011, Pp. 27-50 Universidad De Granada, España

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Published by: National Council of Teachers of Mathematics Reston, VA. Recuperado de: http://www.toolkitforchange.org/toolkit/documents/551_92_nctm_teaching_standards.pdf?opid=551

Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity (Vol. 9).* New York, USA: Courier Corporation.

Obando, G., Vanegas, M., & Vásquez, N. (2006). *Módulo 1, pensamiento y sistemas numéricos.* Obra Colectiva de los Docentes de la Red de Escuelas de Campana. (2001). *Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática*. Recuperado de: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/fraccionesmodulo2.pdf

Ojose, B., & Sexton, L. (2009). *The effect of manipulative materials on mathematics achievement of first grade students. The mathematics educator 2009,* Vol 12(1), 3-14. University of Redlands, California, USA, Recuperado de: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.1038.5734&rep=rep1&type=pdf

Ordoñez, C. (2012). *La fracción, elemento dialogante en el contexto matemático* (Doctoral dissertation, Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia) Recuperado de: https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/11132

Owens, D. T., & Super, D. B. (1993). Teaching and learning decimal fractions. *Research ideas for the classroom: High school mathematics*, 159-178.

Parra, M. (2004), *La instrucción por medio de problemas dentro de una comunidad de aprendizaje matemático*, tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, México DF.

Perera, P., & Valdemoros, M. E. (2007). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria*. En M. Camacho, P. Flores, & P. Bolea, Investigación en educación matemática XI (págs. 209-218). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1254/1/Perera2008Propuesta_SEIEM_209.pdf

Perera, P. B., & Valdemoros, M. E. (2009). *Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado*. México DF: Educación matemática, Volumen *21*(1), pags 29-61. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n1/v21n1a3.pdf

Piaget, J. (1985). *La toma de conciencia*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szemiska, A. (1960). *La concepción infantil de la geometría.* New York, USA: Harper y Torchbooks.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R. & Harel, G. (1993). *Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. En T. P.* Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research (pp. 327–361). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Robles, C. (2012). *Fracciones decimales y medición*. Recuperado de: https://es.slideshare.net/cristinita55/robles-fracciones-decimales-y-medicin

Ruiz, C. A. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente*: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED. (Tesis de Maestría) Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/40057/1/01186860.2013.pdf

Saíz, I. (1990). Fracciones. Un aprendizaje diferente. *Revista Hacer Escuela, 12(10).*

Salazar, V. P., Jiménez, S. M., & Mora, L. C. (2013). *Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización.* Recuperado de: http://ciaem-redumate.org/memorias-icemacyc/356-520-1-DR-T.pdf

Solé, I. y C. Coll (1999), *Los profesores y la concepción constructivista*, El constructivismo en el aula, Barcelona, Graó, pp. 7-23. Recuperado de: http://aulavirtual.edu.aiovai.org/pluginfile.php/538/mod_resource/content/1/sole1.pdf

Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for he National Council of Teachers of Mathematics, Inc*. All rights reserved, 498-505. Recuperado de: https://pubs.nctm.org/view/journals/jrme/20/5/article-p498.xml

Streefland, L. (1993). *Las fracciones: un enfoque realista*. In rational Numbers: An Integration of Research. Edited by Carpenter, Th. et al. L. Recuperado de: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2020/11/12.-Streefland-Las-fracciones.-Un-enfoque-realista.pdf

Tovar, M. C., & Sarmiento, P. (2011). El diseño curricular, una responsabilidad compartida. *Colombia Médica*, Volumen 42(4), Páginas 508-517. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/283/28321543012.pdf

Valdemoros, M. E. (2009). *Reparto con fracciones: estrategias de resolución*. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/4966/1/OlguinRepartoAlme2009.pdf

Valdez, V. (2007). Los conjuntos numéricos a través de la historia. *Revista argentina de psicopedagogía, (61), 10*. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2779665.pdf

Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6. Brill Sense*.

Vergnaud, G. (1983). *Los niños, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza en la escuela primaria*. México, Editorial Trillas.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2), 3.

Whitehead, S. (1944). Mathematical methods applicable to linear phenomena. *Journal of Scientific Instruments, Volumen 21(5),* Pag 73. Recuperado de: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0950-7671/21/5/301/meta

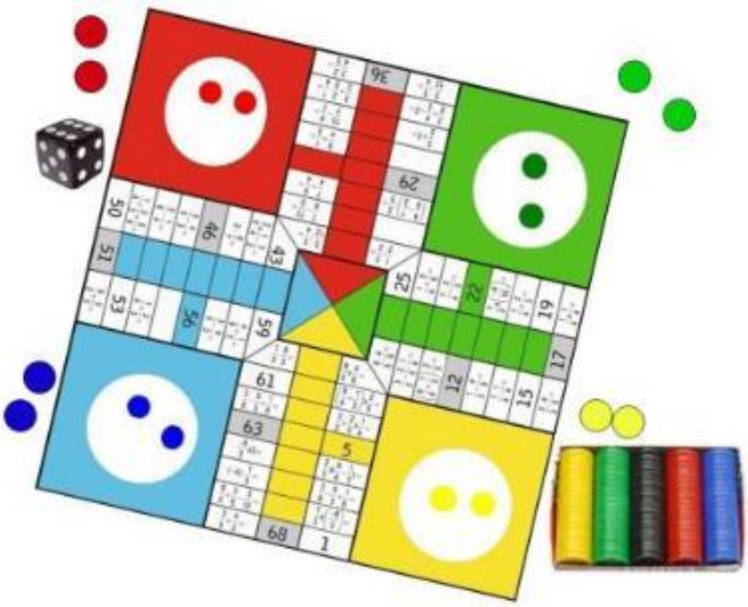
Zarzar, C. B. (2013). *El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes*. Centro de investigación y de estudios avanzados CINVESTAV, 15(1). Universidad Pedagógica Nacional Ajusco, México. Recuperado de: file:///C:/Users/USUARIO/Downloads/Dialnet-ElAprendizajeDeFraccionesEnEducacionPrimaria-4892957.pdf

Zúñiga, Á. R. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. Universidad estatal a distancia, San José, Costa Rica. Disponible en: http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20filosofia%20de%20las%20matematicas.pdf

8. ANEXOS

Anexo A: Foto del dominó de fracciones equivalentes

Anexo B: Foto parques de los fraccionarios



Anexo C: Foto de la carrera fraccionaria

Anexo D: Preguntas de la carrera fraccionaria

¿QUÉ ES UN NÚMERO FRACCIONARIO?	¿QUE PARTES CONFORMAN UN NUMERO FRACCIONARIO?
¿QUÉ REPRESENTA EL NÚMERO DE LA PARTE SUPERIOR?	¿QUÉ REPRESENTA EL NÚMERO DE LA PARTE INFERIOR?
¿CUÁNDO DOS FRACCIONES SON EQUIVALENTES?	¿CUÁNDO DECIMOS QUE TENEMOS UNA FRACCIÓN PROPIA?
¿QUÉ FRACCIONARIO OBTENGO SI RESTO 3/8 A LA UNIDAD?	¿SI QUITO 3/4 A LA FRACCIÓN6/4QUE RESULTADO OBTENGO?
¿SI MULTIPLICAMOS EL FRACCIONARIO 3/2 POR 2/5 QUE RESULTADO OBTENEMOS?	¿CUÁNTAS UNIDADES HAY EN 18/3?
¿QUÉ RESULTADO OBTENGO SI AGREGO LA MITAD A LA FRACCION 5/4?	¿QUE SON FRACCIONES EQUIVALENTES?
¿QUE SIGNIFICA LA RAYA QUE SEPARA AL NUMERADOR DEL DENOMINADOR?	¿AL MULTIPLICAR EL NUMERADOR Y EL DENOMINADOR POR UN MISMO NÚMERO QUE OBTENEMOS?
¿SI ADICIONAMOS A LA FRACCION 8/4 EL NUMERO 7 QUE CANTIDAD OBTENEMOS?	¿CUAL ES EL SIGNIFICADO DE FRACCION?

ESCRIBE LA FRACCION DOS QUINTOS	ESCRIBE LA FRACCION OCHO CUARTOS
ESCRIBE LA FRACCION TRECE MEDIOS	ESCRIBE LA FRACCION TRES OCTAVOS
ESCRIBE LA FRACCION NUEVE SEPTIMOS	ESCRIBE LA FRACCION TRES NOVENOS
ESCRIBE LA FRACCION CUATRO MEDIOS	ESCRIBE LA FRACCION DIEZ QUINCEAVOS
ESCRIBE LA FRACCION CATORCE QUINTOS	ESCRIBE LA FRACCION CINCO DOCEAVOS
ESCRIBE UNA FRACCION EQUIVALENTE A 6/5	ESCRIBE UNA FRACCION EQUIVALENTE A 7/3
ESCRIBE UNA FRACCION EQUIVALENTE A 10/2	ESCRIBE UNA FRACCION EQUIVALENTE A 4/5

Anexo E: Matriz de destrezas con criterios de desempeño

3. Matriz de destrezas con criterios de desempeño del área de Matemática para el subnivel Medio de Educación General Básica

Bloque curricular 1

Álgebra y funciones

BÁSICOS IMPRESCINDIBLES   BÁSICOS DESEABLES

M.3.1.28.	Calcular, aplicando algoritmos y la tecnología, sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números decimales.
M.3.1.29.	Aplicar las reglas del redondeo en la resolución de problemas.
M.3.1.30.	Utilizar el cálculo de productos o cocientes por 10, 100 o 1 000 con números decimales, como estrategia de cálculo mental y solución de problemas.
M.3.1.31.	Resolver y plantear problemas con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números decimales, utilizando varias estrategias, e interpretar la solución dentro del contexto del problema.
M.3.1.32.	Resolver y plantear problemas con operaciones combinadas con números decimales, utilizando varias estrategias, e interpretar la solución dentro del contexto del problema.
M.3.1.33.	Leer y escribir fracciones a partir de un objeto, un conjunto de objetos fraccionables o una unidad de medida.
M.3.1.34.	Representar fracciones en la semirrecta numérica y gráficamente, para expresar y resolver situaciones cotidianas.
M.3.1.35.	Reconocer los números decimales: décimos, centésimos y milésimos, como la expresión decimal de fracciones por medio de la división.
M.3.1.36.	Transformar números decimales a fracciones con denominador 10, 100 y 1 000.
M.3.1.37.	Establecer relaciones de orden entre fracciones, utilizando material concreto, la semirrecta numérica y simbología matemática (=, <, >).
M.3.1.38.	Establecer relaciones de secuencia y orden entre números naturales, fracciones y decimales, utilizando material concreto, la semirrecta numérica y simbología matemática (=, <, >).
M.3.1.39.	Calcular sumas y restas con fracciones obteniendo el denominador común.
M.3.1.40.	Realizar multiplicaciones y divisiones entre fracciones, empleando como estrategia la simplificación.
M.3.1.41.	Realizar cálculos combinados de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con fracciones.
M.3.1.42.	Resolver y plantear problemas de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con fracciones, e interpretar la solución dentro del contexto del problema.

Anexo F: Encuetas para docentes

ENCUESTA PARA DOCENTES DE EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA MEDIA DE LA CIUDAD DE LATACUNGA

Objetivo. Identificar los recursos que los docentes utilizan en la enseñanza de fracciones dentro del aula de clase, para que le permita al estudiante recurrir a su creatividad, imaginación y sentido común, a través de los recursos utilizados por el docente.

La información obtenida será utilizada solo para fines de esta investigación por lo que tiene un carácter confidencial y anónimo.

Se agradece de antemano su amable colaboración

DATOS GENERALES

1.- Género

a) Masculino ☐ b) Femenino ☐

2.- Edad (años)

……………………..

3.- Años de servicio en Educación General Básica Media (EGBM)

....

INDICACIONES: Coloque una **X** en la respuesta que más se acerca a su punto de vista gracias.

4.- Nivel académico (marque el de mayor grado)

C) Licenciatura en…………………………………..	
D) Maestría en……………………………………..	
E) Doctorado en………………………………..	

5.- De acuerdo con su opinión, el número de alumnos óptimos en un grupo para lograr aprendizajes significativos es:

10	20	30	40

6.- Valore del 1 al 5 su grado de dificultad el estudio de las fracciones en EGBM que corresponde 1 muy difícil, 2 difícil, 3 complicado, 4 fácil y 5 muy fácil.

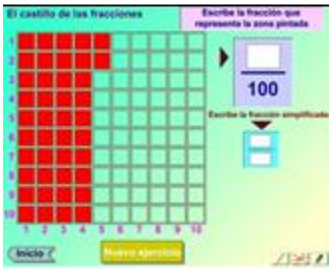
Grado de dificultad	**Valoración**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**

Valore del 1 al 5 y señale sólo un punto de vista en cada planteamiento 1 de acuerdo, 2 parcialmente de acuerdo, 3 totalmente de acuerdo, 4 en desacuerdo y 5 totalmente en desacuerdo.

ITEM	**Valoración**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
7.- En la enseñanza de las fracciones la manipulación de objetos, constituye la base primordial de la construcción de conceptos					
8.- Las actividades presentadas en los textos oficiales en el tema de las fracciones en EGMB son suficientes para generar aprendizajes significativos.					
9.- La enseñanza de fracciones es una de las más importantes habilidades que deben poseen los niños/as					
10.- Las dificultades que presentan los niños/as para manejar el concepto de fracciones obedecen a la no utilización de materiales manipulables,					

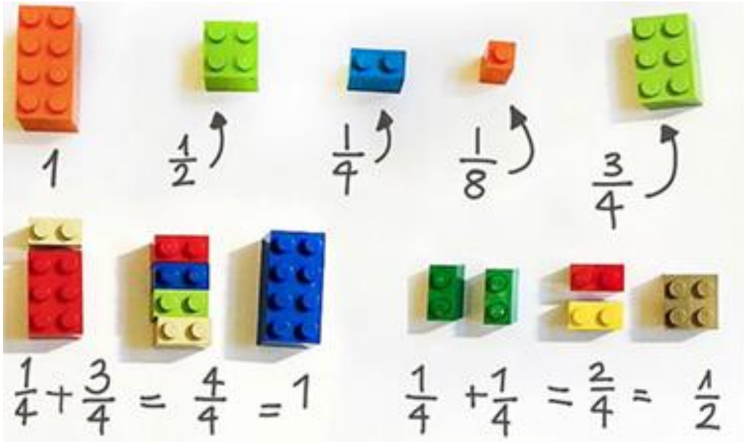
Valore del 1 al 5 y señale sólo un punto de vista en cada planteamiento. ¿**Cuándo usted enseña fracciones recurre a materiales recortados prediseñados?;** siendo 1 siempre, 2 frecuentemente, 3 algunas veces, 4 rara vez y 5 nunca.

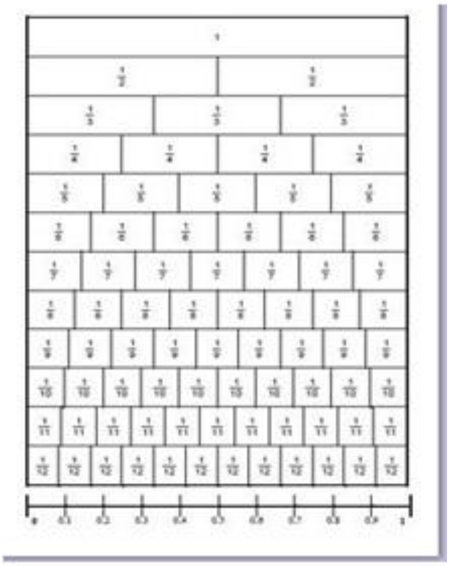
ITEM	Valoración				
	1	2	3	4	5
11.- Materiales recortados prediseñados 					
ITEM	Valoración				
	1	2	3	4	5
12.- Bloques de fracciones 					
ITEM	Valoración				
	1	2	3	4	5
13.- Regletas Cuisenaire  					

ITEM	Valoración				
	1	2	3	4	5
14.- Aplicando las TIC 					

ITEM	Valoración				
	1	2	3	4	5
15.- Fracciones lineales 					

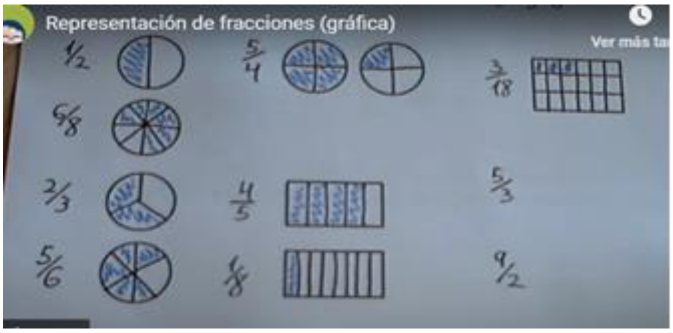
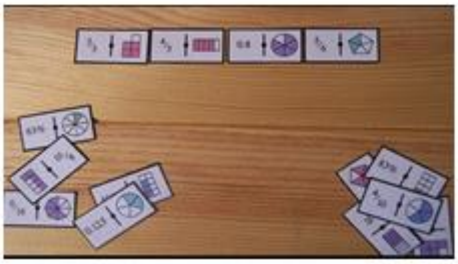
ITEM	Valoración				
	1	2	3	4	5
16.- Solo ejercicios del libro que le proporciona el Ministerio de Educación 					

ITEM	Valoración				
	1	2	3	4	5
17.- Usando piezas de LEGO 					

ITEM	Valoración				
	1	2	3	4	5
18.- Muro de fracciones 					

ITEM	Valoración				
	1	2	3	4	5
19.- Fracciones con la rayuela 					

ITEM	Valoración				
	1	2	3	4	5
20.- Bingo de fracciones 					

ITEM	Valoración				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
21.- Representación gráfica de fracciones 					
ITEM	**Valoración**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
22.- Dominó de fracciones 					
ITEM	**Valoración**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
23.- Fracciones en torres con equivalencias 					

ITEM	Valoración				
	1	2	3	4	5
26.- Set de fracciones circulares 					
ITEM	**Valoración**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
27.- Panel de equivalencias de fracciones 					
ITEM	**Valoración**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
28.- Fracciones de madera 					
29.- Otros; tales como (describa)					

30.- ¿En los dos últimos años cuantos cursos ha tomado sobre actualización docente?

....

31.- ¿Considera que la actualización docente que ofrece el Ministerio de Educación es adecuada para los requerimientos didácticos en EGBM?

Valore del 1 al 5 y señale sólo un punto de vista en cada planteamiento 1 de acuerdo, 2 parcialmente de acuerdo, 3 totalmente de acuerdo, 4 en desacuerdo y 5 totalmente en desacuerdo.

ITEM	Valoración				
Actualización docente que ofrece el Ministerio de Educación es adecuada	1	2	3	4	5

32.- ¿Cuántos cursos ha tomado sobre el tema de fracciones?

…………………

GRACIAS POR SU PARTICIPACIÓN

Anexo G: Cuestionario de matemática: fracciones

Cuestionario de Matemática

Fracciones

Completa los siguientes datos:

Nombre y Apellido………………………………………………………………………

Sexo: Masculino ☐ Femenino ☐

Año…………………………………………Paralelo……

Responda las siguientes preguntas:

1.- Observen que tienen en común las fracciones.

$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{4}{5}$

………………………………………………………………………………………………..

2.- Realizar la siguiente operación.

$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} =$

3.- José tenía un terreno rectangular dividido en 8 partes iguales en el que decidió sembrar papa. Indicó a sus hijos que se ocuparan de esta tarea. Al término de la jornada del segundo día llamo a sus hijos para que le informaran como iban los trabajos. El hijo mayor respondió: Padre, el primer día por la tarde llovió, por lo tanto, solo pudimos sembrar en 2/8 del terreno, el segundo día el clima estuvo favorable y pudimos sembrar en 4/8. ¿Al término del segundo día qué parte de todo el terreno está sembrado?

4.- Realizar la siguiente operación

$\frac{7}{4} - \frac{2}{3} =$

5.- Representar gráficamente la expresión:

$$\frac{4}{6} - \frac{2}{6} =$$

6.- Si a un entero le quitamos (3/8) ¿Cuál es su respuesta?

7.-Realizar la siguiente operación en forma analítica y gráficamente

$$\frac{2}{3} * \frac{3}{4} =$$

8.- Realizar la siguiente operación

$$3 * \frac{2}{3}$$

9.- Aplicando la ley de signos realizar la siguiente operación.

$$\left(-\frac{7}{8}\right) * \frac{4}{3} =$$

10.- Realizar la siguiente operación

$$\frac{2}{5} \div \frac{1}{6}$$

11.- La parte sombreada corresponde, encierre en un círculo la respuesta correcta.

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{3}$

12.- Representar gráficamente la fracción.

$$\frac{9}{4}$$