UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Facultad de Ciencias

Grado en Estadística

Trabajo fin de grado

Procesos de renovación

Beatriz Ortega Pérez

Junio de 2022

Miguel González Velasco e Inés Mª del Puerto García, profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura,

INFORMAN:

Que Dña. Beatriz Ortega Pérez ha realizado bajo su dirección el Trabajo Fin de Grado y consideran que la memoria reúne los requisitos necesarios para su evaluación.

Badajoz, 6 de junio de 2022

Fdo. Miguel González Velasco e Inés Mª del Puerto García

Índice general

Resumen

Un proceso de Poisson es un proceso estocástico que representa el número de eventos o llegadas a un sistema que ocurren en un intervalo de tiempo, en el que los tiempos entre llegadas consecutivas son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución común exponencial.
Los procesos de Poisson surgen naturalmente en una gran variedad de situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, el proceso de Poisson o sus extensiones han sido utilizados para modelizar, entre otros, el número de accidentes de tráfico en un área, la localización de los usuarios de una red inalámbrica, las solicitudes de documentos por individuos en un servidor web o el estallido de guerras. Además, el proceso de Poisson es uno de los modelos más importantes usados en teoría de colas.
Una generalización de estos procesos son los procesos de renovación, en los que los tiempos entre llegadas, si bien independientes, no siguen necesariamente una distribución exponencial.

El objetivo general de este trabajo es generalizar los procesos de Poisson a la situación en la que los tiempos de ocurrencia entre eventos sea cualquier sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, obteniéndose así los procesos de renovación. Para estos procesos los objetivos específicos son desarrollar su teoría probabilística y presentar algunas de sus aplicaciones.

Abstract

A Poisson process is a stochastic process which represents the number of events or arrivals to a system that occur during a time interval, in which the consecutive interarrival times are independent and identically distributed random variables with exponential distribution.
Poisson processes arise naturally in a great variety of situations in everyday life. For example, the Poisson process and its extensions have been used to model, among others, the number of car accidents in an area, the location of users in a wireless network or the outbreak of wars. Furthermore, the Poisson process is one of the most important models used in queueing theory.
A generalization of these processes is given by the renovation processes, in which the interarrival times, even though they are independent, they aren't necessarily exponentially distributed.

The general objective of this assignment is to generalize the Poisson process to the situation where the interarrival times are any sequence of independent and identically distributed random variables, in order to obtain the renovation processes. The specific objectives for these processes are to develop their probabilistic theory and to present some of their applications.

Objetivos

Los objetivos que se pretenden conseguir con esta memoria son:

- Recordar la teoría fundamental de los procesos de Poisson.
- Desarrollar la teoría probabilística de los procesos de renovación como generalización a los procesos de Poisson.
- Aplicar la teoría de procesos de renovación en diferentes situaciones prácticas o reales.

Contenidos

La memoria está estructurada en dos capítulos. El Capítulo 1 está dedicado a la teoría de procesos de Poisson y su generalización, los procesos de renovación, considerados procesos de conteo. Así, comenzamos presentando los procesos de conteo en primer lugar, para a continuación introducir los procesos de Poisson. Estudiamos sus propiedades y resultados más destacados, que nos darán la base de la teoría desarrollada a lo largo del trabajo. Entre ellos destacan la equivalencia entre distintas definiciones dadas para los procesos de Poisson y el análisis de la distribución de los tiempos entre llegadas y los tiempos de espera.

A continuación, en la segunda parte del capítulo, introducimos los procesos de renovación y su teoría probabilística, que estructuraremos en tres apartados. El primero de ellos estará enfocado en la definición de este tipo de procesos y sus resultados fundamentales, haciendo especial mención a la función y ecuación de renovación. En el segundo apartado nos centraremos en el comportamiento asintótico, en particular trataremos resultados referentes al comportamiento límite tanto del proceso de renovación como de la función de renovación. En el tercer y último apartado dedicado a este tipo de procesos, estudiaremos otras variables de interés, denominadas vida restante y vida actual, muy útiles para la modelización de situaciones prácticas.

El Capítulo 2 estará enfocado en distintas aplicaciones de la teoría de procesos de renovación. Dada la gran variedad de aplicaciones de este tipo de procesos, únicamente estudiaremos algunas de las más destacadas, entre las que se encuentran los contadores y sus periodos muertos, el proceso de renovación alterno, la superposición de procesos de renovación, así como el proceso de renovación retardado.

Capítulo 1

Procesos de renovación

1.1. Introducción

Comenzaremos este primer capítulo recogiendo la teoría fundamental de los procesos de Poisson en el apartado 1.2, que utilizaremos como introducción para el tema central de este trabajo, pues su generalización nos conducirá, como veremos en el apartado 1.3, a los procesos de renovación. Estos procesos son considerados procesos de conteo.
Los procesos de renovación serán los que estudiaremos posteriormente en detalle, en la segunda parte del capítulo. En el apartado 1.3, comenzaremos definiendo los procesos de renovación e introduciendo la ecuación de renovación, para ver los principales resultados de ambos, y en el siguiente apartado, analizar su comportamiento asintótico.
En el último apartado trataremos otras variables de interés, el tiempo de vida restante y el tiempo de vida actual de un proceso de renovación, así como sus distribuciones.
La referencia principal que utilizaremos para la elaboración de este capítulo es [4].

Establezcamos primero qué es un proceso de conteo.
Un proceso estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de conteo si $N(t)$ representa el número total de "eventos" que han ocurrido hasta el instante t. Por tanto, un proceso de conteo $N(t)$ debe verificar

(i) $N(t) \geq 0$.

(ii) $N(t)$ toma valores enteros.

(iii) Si $s < t$, entonces $N(s) \leq N(t)$.

(iv) Para $s < t$, $N(t) - N(s)$ equivale al número de eventos ocurridos en el intervalo $(s, t]$.

Se dice que un proceso de conteo tiene incrementos independientes si el número de eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes. Esto quiere decir que el número de eventos que han ocurrido hasta el instante t, es decir, $N(t)$, tiene que ser independiente del número de eventos ocurridos entre los instantes t y $t+s$, $N(t+s) - N(t)$.

Se dice que un proceso de conteo tiene incrementos estacionarios si la distribución del número de eventos que ocurren en cualquier intervalo de tiempo depende únicamente de la longitud del intervalo de tiempo. En términos de las variables del proceso, el proceso tiene incrementos estacionarios si el número de eventos en el intervalo $(t_1 + s, t_2 + s]$, $N(t_2+s)-N(t_1+s)$, tiene la misma distribución de probabilidad que el número de eventos en el intervalo $(t_1, t_2]$, $N(t_2) - N(t_1)$, para todo $t_1 < t_2$, y $s > 0$.

1.2. Procesos de Poisson

Uno de los tipos más importantes de procesos de conteo son los procesos de Poisson, que definimos a continuación.

Definición 1.2.1. El proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ se dice que es un proceso de Poisson de tasa λ, $\lambda > 0$, si

(i) $N(0) = 0$.

(ii) El proceso tiene incrementos independientes.

(iii) El número de eventos en cualquier intervalo de longitud t tiene distribución de Poisson con media $\lambda\, t$. Es decir, para todo $s, t \geq 0$,

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-\lambda\, t}\, \frac{(\lambda\, t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, ...$$

Notemos que se sigue de la condición (iii) que un proceso de Poisson tiene incrementos estacionarios y también que

$$E(N(t)) = \lambda\, t,$$

lo que explica por qué λ se denomina tasa del proceso al ser el número medio de eventos que se producen en un intervalo unitario de tiempo.

Podemos dar una segunda definición de proceso de Poisson, previamente recordemos que una función f se dice $o(h)$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Definición 1.2.2. El proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de tasa λ, $\lambda > 0$, si

(i) $N(0) = 0$.

(ii) El proceso tiene incrementos estacionarios e independientes.

(iii) $P(N(h) = 1) = \lambda\, h + o(h)$.

(iv) $P(N(h) \geq 2) = o(h)$.

Notemos que la condición (iv) es equivalente a excluir la posibilidad de que se produzcan simultáneamente dos o más eventos.

Teorema 1.2.3. *(Véase [6, p.61]). Las definiciones 1.2.1 y 1.2.2 son equivalentes.*

1.2.1. Distribución de los tiempos entre llegadas y tiempos de espera

Consideremos un proceso de Poisson, y denotemos X_1 el instante de tiempo del primer evento. Es más, para $n \geq 1$, denotaremos X_n al tiempo entre el $(n-1)$-ésimo y el n-ésimo evento. La sucesión $\{X_n, n \geq 1\}$ se denomina sucesión de tiempos entre llegadas.

Proposición 1.2.4. *(Ver [6, p.64]). Las variables aleatorias X_n, $n = 1, 2, ...$, son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con distribución exponencial de media $1/\lambda$.*

La suposición de incrementos estacionarios e independientes es equivalente a afirmar que, en cualquier instante de tiempo, el proceso probabilísticamente se reinicia. Es decir, el proceso a partir de cualquier instante es independiente de todo lo que ha ocurrido previamente (por los incrementos independientes), y también tiene la misma distribución que el proceso original (por los incrementos estacionarios). En otras palabras, el proceso no tiene memoria, y, por tanto, esperamos que los tiempos entre llegadas tengan distribución exponencial.

Otra variable de interés es T_n, el instante en el que se produce el n-ésimo evento, también denominado tiempo de espera hasta el n-ésimo evento

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1.$$

Proposición 1.2.5. *(Ver [6, p.65]). La variable aleatoria T_n tiene distribución gamma con parámetros n y λ. Es decir, su función de densidad es la siguiente*

$$f(t) = \lambda \, e^{-\lambda \, t} \, \frac{(\lambda \, t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0.$$

La Proposición 1.2.4 también nos proporciona otra forma de definir un proceso de Poisson. Supongamos que comenzamos con la sucesión $\{X_n, n \geq 1\}$ de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con distribución exponencial de media $1/\lambda$. Ahora definimos un proceso de conteo diciendo que el n-ésimo evento de este proceso ocurre en el instante T_n, donde

$$T_n \equiv X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

El proceso de conteo resultante $\{N(t), t \geq 0\}$, siendo $N(t) = \sup\{n : T_n \leq t\}$, será de Poisson de tasa λ.
En la Figura 1.1 se representa una trayectoria muestral de un proceso de Poisson.

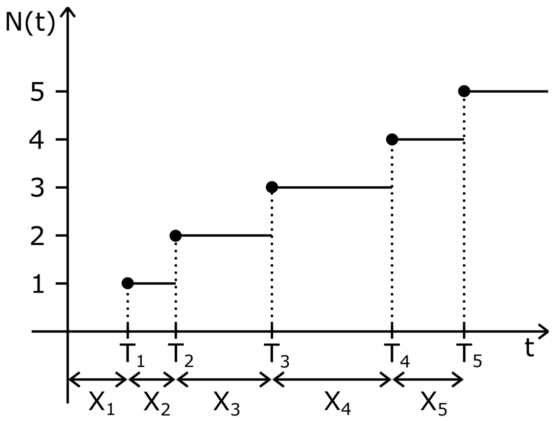

Figura 1.1: Realización típica de un proceso de Poisson $N(t)$.

1.3. Procesos de renovación. Ecuación de renovación

Un proceso de renovación es un proceso de eventos recurrentes con tiempos entre eventos independientes e idénticamente distribuidos. Podemos pensar los procesos de renovación como una generalización de los procesos de Poisson en los que hemos eliminado la condición de que los tiempos entre llegadas estén exponencialmente distribuidos.

Los procesos de renovación proporcionan modelos interesantes para multitud de fenómenos naturales, como la emisión de partículas radiactivas, la frecuencia de los terremotos o los fallos de dispositivos.

Definición 1.3.1. Un proceso de renovación $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso estocástico tal que

$$N(t) = \text{máx}\,\{n : T_n \leq t\}\,,$$

donde $T_0 = 0$, $T_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ para $n \geq 1$, y siendo $\{X_i\}$ una sucesión de variables aleatorias no negativas independientes e idénticamente distribuidas.

A menudo pensamos un proceso de renovación N como la representación del número de ocurrencias de un determinado evento en el intervalo de tiempo $[0, t]$. Teniendo esto en cuenta, hablaremos de T_n como el instante de tiempo en el que se produce la n-ésima llegada u ocurrencia y X_n el n-ésimo tiempo entre llegadas.

La definición vista describe N en términos de una sucesión subyacente X_n. De esta definición se deduce fácilmente que

$$T_n = \inf\{t : N(t) = n\}, \quad X_n = T_n - T_{n-1}. \tag{1.1}$$

Notemos que las distribuciones finito-dimensionales de un proceso de renovación N están especificadas por la distribución de las X_n. Por ejemplo, si las X_n tienen distribución exponencial entonces N es un proceso de Poisson.

Ejemplo 1.3.2. Fallo de las bombillas.
Una habitación está iluminada por una única bombilla. Cuando esta falla, es reemplazada inmediatamente por una copia aparentemente idéntica. Sea X_i el tiempo de vida (aleatorio) de la i-ésima bombilla, y supongamos que la primera bombilla es instalada en el instante de tiempo $t = 0$. Entonces $T_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ es el tiempo hasta el n-ésimo fallo (donde, por convención, fijamos $T_0 = 0$), y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\}$$

es el número de bombillas que han fallado hasta el instante t. Es natural suponer que las X_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Ejemplo 1.3.3. Simulación de un proceso de renovación.
Supongamos que tenemos un proceso de renovación cuyos tiempos entre llegadas siguen una distribución gamma de parámetros a=25, b=5, y simulamos hasta el instante de tiempo $t = 40$. A continuación mostramos el código para simular una trayectoria de tal proceso haciendo uso del lenguaje de programación R, proporcionado en [14].

```
    Simulación proceso de renovación:

renewal <- function(tf, a, b){
      Xi <- c()
      Tn <- c()
      T_aux <- 0
      aux<-0

      repeat{
           Xi[aux+1] <- rgamma(1, a, b)
           T_aux <- sum(Xi)
           if(T_aux >= tf){
                break
           }
           aux <- aux + 1
      }
      for(i in 1:length(Xi)){
           Tn[i] <- sum(Xi[1:i])
      }
      X_inter <- Xi[-length(Xi)]

      La función imprimirá la gráfica de la trayectoria a partir del siguiente
      data frame

      df_renov <- data.frame(x = c(0,cumsum(X_inter)), y = 0:length(X_inter),
                          xend = c(cumsum(X_inter),tf),
                          yend = 0:length(X_inter))
```

```
    graf <- ggplot(df_renov, aes(x = x, y = y, xend = xend, yend = yend))
            + geom_segment(color = "blue")
            + xlab("Tiempo") + ylab("Número de llegadas")

    return(list(Nt = length(Tn[-length(Tn)]), Xi_s = Xi, Tn_s = Tn[-length(Tn)],
                graf))
}

Simulamos hasta el instante de tiempo tf=40:
renewal(tf = 40, a = 25, b = 5)
```

La trayectoria de este proceso de renovación es la mostrada en la Figura 1.2.

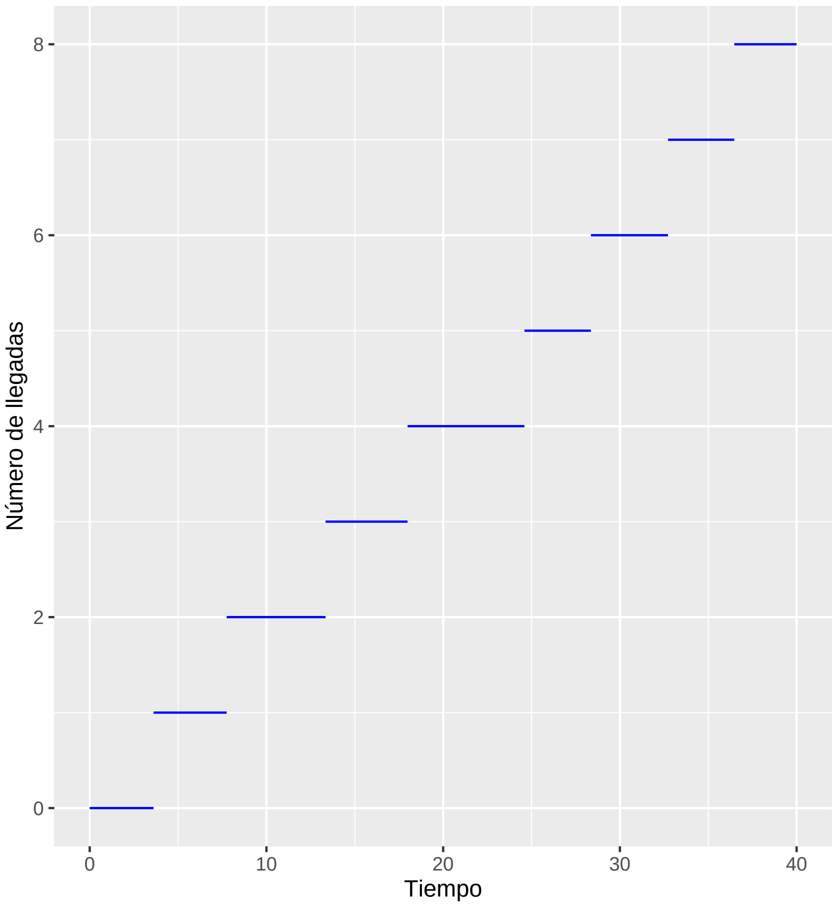

Figura 1.2: Proceso de renovación con tiempos entre llegadas $X_i \sim \Gamma(25, 5)$.

Definición 1.3.4. Sea $T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n$ el límite de los tiempos de llegadas del proceso. Decimos que un proceso es *honest* si $P(T_\infty = \infty) = 1$ para todo t, y *dishonest* en otro caso.

Un proceso N es un proceso *honest* si $N(t) < \infty$ casi seguramente, es decir, $P(N(t) < \infty) = 1$ para todo $t \geq 0$.

Teorema 1.3.5. *$P(N(t) < \infty) = 1$ para todo t si y solo si $E(X_1) > 0$.*

Esto equivale a decir que N es *honest* si y solo si los tiempos entre llegadas no están concentrados en cero. Para la demostración tendremos en cuenta la siguiente observación.

Observación 1.3.6. Se verifica que

$$N(t) \geq n \quad \text{si y solo si} \quad T_n \leq t. \tag{1.2}$$

Ya estamos en condiciones de presentar

Demostración. (Teorema 1.3.5)
$\Rightarrow$)
Como las X_i son no negativas, si $E(X_1) = 0$ entonces $P(X_i = 0) = 1$ para todo i, como vemos a continuación

$$E(X_1) = \sum_k k\,P(X_1 = k) = 0\,P(X_1 = 0) + \sum_{k>0} k\,P(X_1 = k) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 0\,P(X_1 = 0) = 0 \\ k\,P(X_1 = k) = 0 \quad \Rightarrow P(X_1 = k) = 0 \quad \forall k > 0. \end{cases}$$

Además, sabemos que $\sum_k P(X_1 = k) = P(X_1 = 0) + \sum_{k>0} P(X_1 = k) = 1$, por lo que $P(X_1 = 0) = 1$.
Dado que las X_i son variables aleatorias idénticamente distribuidas, tenemos que $E(X_i) = E(X_1)$ para todo i, lo que nos lleva (de forma análoga al caso de X_1) a que $P(X_i = 0) = 1$ para todo i.
Por tanto, teniendo en cuenta (1.2) y que $\{T_n \leq t\}$ es una sucesión decreciente tenemos

$$\begin{aligned} P(N(t) = \infty) &= P\left(\bigcap_n \{N(t) \geq n\}\right) = P\left(\bigcap_n \{T_n \leq t\}\right) = \lim_{n\to\infty} P(T_n \leq t) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(X_1 + ... + X_n \leq t) = 1. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$)
Inversamente, supongamos que $E(X_1) > 0$. Existe un $\varepsilon > 0$ tal que $P(X_1 > \varepsilon) = \delta > 0$. Sea $A_i = \{X_i > \varepsilon\}$, y sea $A = \{X_i > \varepsilon \text{ i.o.}\} = \limsup_{i\to\infty} A_i$. Tenemos que

$$\begin{aligned} P(A^c) &= P\left(\bigcup_m \bigcap_{n\geq m} A_n^c\right) \leq \sum_m P\left(\bigcap_{n\geq m} A_n^c\right) = \sum_m P\left(\bigcap_{n\geq m} \{X_n \leq \varepsilon\}\right) \\ &= \sum_m \left(\prod_{n\geq m} P(X_n \leq \varepsilon)\right) = \sum_m \left(\lim_{n\to\infty} \prod_{k=m}^{n} P(X_k \leq \varepsilon)\right) = \sum_m \lim_{n\to\infty} (1-\delta)^{n-m+1} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, puesto que

$$P(N(t)=\infty) = P\left(\bigcap_n \{T_n \le t\}\right) \le P\left(\bigcup_m \bigcap_{n\ge m} A_n^c\right) = P\left(\bigcup_m \bigcap_{n\ge m} \{X_n \le \varepsilon\}\right)$$
$$= P(A^c) = 0$$

basta ver $\bigcap_n \{T_n \le t\} \subseteq \bigcup_m \bigcap_{n\ge m} \{X_n \le \varepsilon\}$.
En efecto

$$\text{Si } \omega \notin \bigcup_m \bigcap_{n\ge m} \{X_n \le \varepsilon\} \Rightarrow \omega \in \bigcap_m \bigcup_{n\ge m} \{X_n > \varepsilon\}$$
$$\Rightarrow X_n > \varepsilon \text{ para infinitos } n \Rightarrow X_1 + ... + X_n > t \text{ para } n \text{ grande}$$
$$\Rightarrow \omega \notin \bigcap_n \{T_n \le t\}.$$

□

A partir de ahora, supondremos no solo que $P(X_1 = 0) < 1$, sino que también impondremos la condición más fuerte $P(X_1 > 0) = 1$.

Ahora, trataremos de determinar la distribución de $N(t)$ en términos de la distribución de un tiempo entre llegadas típico. Para ello, será útil el siguiente lema, que muestra la relación existente entre la distribución de los tiempos entre llegadas y la distribución de los instantes en los que se producen las llegadas.
Sea F la función de distribución de X_1, y sea F_k la función de distribución de T_k.

Lema 1.3.7. *Se verifica $F_1 = F$ y $F_{k+1}(x) = \int_0^x F_k(x-y)\, dF(y)$* [1] *para $k \ge 1$.*

Demostración. Claramente $F_1 = F$, pues $T_1 = X_1$. Además, $T_{k+1} = T_k + X_{k+1}$, y el Teorema A.0.3 del Apéndice aplicado a variables aleatorias no negativas nos da el resultado, como vemos a continuación.
Observemos que utilizaremos de modo general la notación f_X para la función de densidad de la variable X.
En efecto

$$f_{T_{k+1}}(z) = f_{T_k + X_{k+1}}(z) = \int_0^z f_{T_k}(z-y)\, f_{X_{k+1}}(y)\, dy.$$

Así

$$\begin{aligned}
F_{k+1}(x) &= \int_0^x f_{T_{k+1}}(z)\, dz = \int_0^x \int_0^z f_{T_k}(z-y)\, f_{X_{k+1}}(y)\, dy\, dz \\
&= \int_0^x \int_y^x f_{T_k}(z-y)\, f_{X_{k+1}}(y)\, dz\, dy = \int_0^x f_{X_{k+1}}(y) \left(\int_y^x f_{T_k}(z-y)\, dz\right) dy \\
&= \int_0^x f_{X_{k+1}}(y) \left(\int_0^{x-y} f_{T_k}(s)\, ds\right) dy = \int_0^x f_{X_{k+1}}(y)\, F_k(x-y)\, dy \\
&= \int_0^x F_k(x-y)\, F'_{X_{k+1}}(y)\, dy = \int_0^x F_k(x-y)\, F'(y)\, dy = \int_0^x F_k(x-y)\, dF(y).
\end{aligned}$$

[1]Nota: La definición de integral en este Lema y en lo sucesivo, es la integral de Lebesgue-Stieltjes. Ahora bien, si F es diferenciable, con derivada $F'(x)$, entenderemos $dF(x) = F'(x)\, dx$.

□

Lema 1.3.8. *Se verifica que* $P(N(t)=k) = F_k(t) - F_{k+1}(t)$.

Demostración.

$$\{N(t)=k\} = \{N(t) \geq k\} \setminus \{N(t) \geq k+1\} = \{T_k \leq t\} \setminus \{T_{k+1} \leq t\}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado (1.2). Así,

$$P(N(t)=k) = P(T_k \leq t) - P(T_{k+1} \leq t) = F_k(t) - F_{k+1}(t).$$

□

En la siguiente definición introducimos un concepto clave, la función de renovación, que resulta fundamental en el estudio de los procesos de renovación.

Definición 1.3.9. La función de renovación m está dada por $m(t) = E(N(t))$.

Lema 1.3.10. *Se verifica* $m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$.

Demostración. Definimos las variables indicadoras

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{si } T_k \leq t \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k$ y

$$\begin{aligned} m(t) = E(N(t)) = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} I_k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} E(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (0\, P(I_k=0) + 1\, P(I_k=1)) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} P(I_k=1) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(T_k \leq t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t). \end{aligned}$$

□

Veamos que m es solución de una determinada ecuación integral, denominada ecuación de renovación.

Lema 1.3.11. *La función de renovación* m *verifica la ecuación de renovación,*

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)\, dF(x). \tag{1.3}$$

Demostración. Usando la esperanza condicional obtenemos

$$m(t) = E(N(t)) = E\left(E\left(N(t)|X_1\right)\right).$$

Ahora bien, por una parte,

$$E\left(N(t)|X_1 = x\right) = 0 \quad \text{si } t < x,$$

ya que la primera llegada se produce después del instante t. Por otra parte,

$$E\left(N(t)|X_1 = x\right) = 1 + E(N(t-x)) \quad \text{si } t \geq x,$$

pues el proceso de llegadas, empezando en el instante de la primera llegada, es una copia de N.
Por tanto,

$$\begin{aligned}
m(t) = E(N(t)) = E\left(E\left(N(t)|X_1\right)\right) &= \int_0^\infty E\left(N(t)|X_1 = x\right)\, dF(x) \\
&= \int_0^t E\left(N(t)|X_1 = x\right)\, dF(x) + \int_t^\infty E\left(N(t)|X_1 = x\right)\, dF(x) \\
&= \int_0^t \left[1 + E(N(t-x))\right]\, dF(x) = \int_0^t \left[1 + m(t-x)\right]\, dF(x) \\
&= F(t) - F(0) + \int_0^t m(t-x)\, dF(x) = F(t) + \int_0^t m(t-x)\, dF(x).
\end{aligned}$$

□

Sabemos del Lema 1.3.10 que

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$$

es una solución de la ecuación de renovación (1.3). En realidad, es la única solución de (1.3) que es acotada en intervalos finitos. Esto es una consecuencia del siguiente teorema. Posteriormente hallaremos una forma más general de (1.3), y es apropiado anticipar esto ahora. El caso más general involucra soluciones μ a la ecuación tipo renovación

$$\mu(t) = H(t) + \int_0^t \mu(t-x)\, dF(x), \quad t \geq 0, \tag{1.4}$$

donde H es una función uniformemente acotada.

Teorema 1.3.12. *La función μ dada por*

$$\mu(t) = H(t) + \int_0^t H(t-x)\, dm(x),$$

es una solución de la ecuación tipo renovación (1.4). *Si H es acotada en intervalos finitos entonces μ es acotada en intervalos finitos y es la única solución de* (1.4) *con esta propiedad.*

Antes de demostrar este teorema, vamos a ver un resultado auxiliar (para el que hemos empleado como referencia [5]), y que utilizaremos en la demostración del Teorema 1.3.12.

Proposición 1.3.13. *La función de renovación m verifica*

$$m(t) < \infty \quad \textit{para todo } 0 \leq t < \infty. \tag{1.5}$$

Demostración. Como $P(X_n = 0) < 1$, se sigue por la propiedad de continuidad de las probabilidades, que existe un $\alpha > 0$ tal que $P(X_n \geq \alpha) = \beta > 0$.

Dado un suceso A, I_A es una variable aleatoria tal que

$$I_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Ahora definimos un proceso de renovación a partir de las variables $\left\{\bar{X}_n, n \geq 1\right\}$, definidas como

$$\bar{X}_n = \alpha\, I_{\{X_n \geq \alpha\}} = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n < \alpha \\ \alpha & \text{si } X_n \geq \alpha. \end{cases}$$

Notemos que dado que las X_i son independientes e idénticamente distribuidas, también lo son las $\bar{X}_i$. Además, cada $\bar{X}_i$ toma valores en $\{0, \alpha\}$ con probabilidades $(1 - \beta)$ y β, respectivamente.

Denotemos por $\bar{N}(t)$ el proceso de renovación con tiempos entre llegadas $\bar{X}_n$, $\bar{N}(t) = \sup\left\{n : \bar{X}_1 + ... + \bar{X}_n \leq t\right\} = \sup\left\{n : \bar{T}_n \leq t\right\}$. Entonces tenemos

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\right\}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} I_{\left\{\sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i \leq t\right\}} = \bar{N}(t)$$

pues hemos visto que $\bar{X}_n = \alpha\, I_{\{X_n \geq \alpha\}} \leq X_n$, por tanto, $\sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i \leq \sum_{i=1}^{n} X_i$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} I_{\left\{\sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i \leq t\right\}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} I_{\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\right\}}$.
En consecuencia, se sigue que $E(N(t)) \leq E(\bar{N}(t))$, y veremos que $E(\bar{N}(t))$ es finito.

Para el proceso relacionado, $\bar{N}$, las llegadas solo tienen lugar en los instantes de tiempo $t = k\,\alpha$, $k = 0, 1, 2, ...$, y $\bar{N}(t) = \bar{N}(k\,\alpha)$ para $k\,\alpha \leq t < (k+1)\,\alpha$.
En el intervalo $(k\,\alpha, (k+1)\,\alpha]$ puede haber 1, 2, 3,... llegadas. Supuesto que $\bar{N}(k\,\alpha) = n_1$, es porque

$$\bar{X}_1 + ... + \bar{X}_{n_1} \leq k\,\alpha, \quad \bar{X}_{n_1} = \alpha.$$

Así, habrá una llegada en el intervalo siguiente si $\bar{X}_{n_1+1} = \alpha$, lo que ocurre con probabilidad β; habrá dos llegadas si $\bar{X}_{n_1+1} = 0$ y $\bar{X}_{n_1+2} = \alpha$, que ocurre con probabilidad $(1-\beta)\,\beta$; habrá k llegadas si $\bar{X}_{n_1+1} = \bar{X}_{n_1+2} = ... = \bar{X}_{n_1+k-1} = 0$ y $\bar{X}_{n_1+k} = \alpha$, que ocurre con probabilidad $(1-\beta)^{k-1}\,\beta$, luego sigue una distribución geométrica de parámetro β, cuyo valor esperado es $1/\beta$ (véase la Definición A.0.4 del Apéndice).

Dado $t > 0$, notemos que

$$\begin{aligned} \left[\frac{t}{\alpha}\right]\, \alpha \leq & t \leq \left(\left[\frac{t}{\alpha}\right] + 1\right)\, \alpha \\ \left[\frac{t}{\alpha}\right]\, \alpha \leq & \frac{t}{\alpha}\,\alpha \leq t \end{aligned}$$

donde $[y]$ es la parte entera de y. Así pues

$$[0,t] \subset \left[0, \left(\left[\frac{t}{\alpha}\right]+1\right)\,\alpha\right] = [0,\alpha] \cup (\alpha, 2\,\alpha] \cup (2\,\alpha, 3\,\alpha] \cup ... \cup \left(\left[\frac{t}{\alpha}\right]\,\alpha, \left(\left[\frac{t}{\alpha}\right]+1\right)\alpha\right].$$

Luego el valor esperado del número de llegadas en el intervalo $[0,t]$ será menor o igual que $([\frac{t}{\alpha}]+1)$-veces el valor esperado de llegadas en cada intervalo de la forma $(k\,\alpha, (k+1)\,\alpha]$ con $k = 0, 1, ..., [\frac{t}{\alpha}]$, que es $\frac{1}{\beta}$. Así, obtenemos que $m(t)$ es finito

$$E(N(t)) \leq E(\bar{N}(t)) \leq \frac{\frac{t}{\alpha}+1}{\beta} < \infty$$

para cada t.

$\square$

Ya estamos en condiciones de presentar

Demostración. (Teorema 1.3.12)
Si $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definimos las funciones $h * m$ y $h * F$ por

$$(h*m)(t) = \int_0^t h(t-x)\,dm(x), \quad (h*F)(t) = \int_0^t h(t-x)\,dF(x),$$

cuando estas integrales existen. Se verifica

$$(h*m)*F = h*(m*F),$$

(véase Proposición A.0.2 del Apéndice) por lo que escribiremos $h*m*F$ para esta doble convolución. Notemos también que

$$m = F + m*F \tag{1.6}$$

pues $m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)\,dF(x) = F(t) + (m*F)(t)$ por (1.3) y

$$F_{k+1} = F_k * F = F * F_k \tag{1.7}$$

pues por el Lema 1.3.7 sabemos que $F_{k+1}(x) = \int_0^x F_k(x-y)\,dF(y) = (F_k * F)(x)$.

Usando esta notación, podemos escribir μ como $\mu = H + H*m$ (por el Teorema 1.3.12). Haciendo convolución con F y utilizando (1.6) llegamos a

$$\begin{aligned}\mu * F &= (H + H*m)*F = H*F + (H*m)*F = H*F + H*(m*F)\\ &= H*F + H*(m-F) = H*F + H*m - H*F = H*m = \mu - H\end{aligned}$$

por lo que μ verifica (1.4).

Si H es acotada en intervalos finitos entonces

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le t\le T} |\mu(t)| = \sup_{0\le t\le T}\left|H(t) + \int_0^t H(t-x)\,dm(x)\right| &\le \sup_{0\le t\le T}\left(|H(t)| + \left|\int_0^t H(t-x)\,dm(x)\right|\right) \\
&= \sup_{0\le t\le T}|H(t)| + \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t H(t-x)\,dm(x)\right| = \sup_{0\le t\le T}|H(t)| + \sup_{0\le t\le T}|(H*m)(t)| \\
&= \sup_{0\le t\le T}|H(t)| + \sup_{0\le t\le T}|H(t)|\,m(T) \quad (\bigstar) \\
&= (1+m(T))\sup_{0\le t\le T}|H(t)| < \infty
\end{aligned}$$

donde la igualdad ($\bigstar$) la hemos obtenido teniendo en cuenta que $m(t)$ es no decreciente y $m(0) = 0$, pues

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le t\le T}|(H*m)(t)| = \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t H(t-x)\,dm(x)\right| &\le \sup_{0\le t\le T}\left(\sup_{0<x<t}|H(x)|\int_0^t dm(x)\right) \\
&\le \sup_{0\le t\le T}\left(\sup_{0<x<t}|H(x)|\right)\sup_{0\le t\le T}(m(t)-m(0)) = \sup_{0\le t\le T}|H(t)|\,m(T).
\end{aligned}$$

Por tanto, μ es, en efecto, acotada en intervalos finitos; hemos utilizado aquí la finitud de m (vista en (1.5)). Para demostrar que μ es la única solución de (1.4) de este tipo, supongamos que μ_1 es otra solución acotada y denotemos $\delta(t) = \mu(t) - \mu_1(t)$; δ es una función acotada. Además, $\delta = \delta * F$ por (1.4)

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \mu = H + \mu * F \\ \mu_1 = H + \mu_1 * F \end{cases} \rightarrow \quad H = \mu_1 - \mu_1 * F \\
&\mu = H + \mu * F = (\mu_1 - \mu_1 * F) + \mu * F \\
&\delta = \mu - \mu_1 = \mu * F - \mu_1 * F = (\mu - \mu_1) * F = \delta * F.
\end{aligned}$$

Iterando esta ecuación y utilizando (1.7) y el Lema 1.3.7, por inducción, llegamos a que $\delta = \delta * F_k$

$\delta = (\delta) * F = (\delta * F) * F = \delta * (F * F) = \delta * (F_1 * F) = \delta * F_2.$

Repitiendo el proceso

$\delta = (\delta) * F = (\delta * F_2) * F = \delta * (F_2 * F) = \delta * F_3$

y llegamos a la igualdad deseada, $\delta = \delta * F_k \ \forall k \ge 1$.

Esto implica

$$\begin{aligned}
|\delta(t)| = |(\delta * F_k)(t)| = \left|\int_0^t \delta(t-u)\,dF_k(u)\right| &\le \sup_{0\le u\le t}|\delta(u)|\int_0^t dF_k(u) \\
&\le \sup_{0\le u\le t}|\delta(u)|\,(F_k(t) - F_k(0)) = F_k(t)\sup_{0\le u\le t}|\delta(u)| \quad \forall\, k\ge 1.
\end{aligned}$$

Sea $k\to\infty$, como

$$F_k(t) = P(T_k \le t) = P(N(t)\ge k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

tenemos que

$$|\delta(t)| \leq F_k(t) \sup_{0\leq u\leq t} |\delta(u)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \sup_{0\leq u\leq t} |\delta(u)| = 0.$$

Además, por tratarse de un valor absoluto, $|\delta(u)| \geq 0$, por lo que podemos concluir que $|\delta(t)| = 0$ para todo t.

Hemos llegado a la conclusión de que $|\delta(t)| = |\mu(t) - \mu_1(t)| = 0$, por lo que las soluciones μ y μ_1 son la misma, es decir, μ es la única solución de (1.4) acotada en intervalos finitos.

□

El uso de la transformada de Laplace-Stieltjes es muy útil en teoría de renovación.

Definición 1.3.14. La transformada de Laplace-Stieltjes de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define como

$$g^*(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta x}\, dg(x) \quad \text{donde } \theta \in \mathbb{C}$$

cuando esta integral existe.

Por ejemplo, podemos transformar (1.4) para obtener la fórmula

$$\mu^*(\theta) = \frac{H^*(\theta)}{1 - F^*(\theta)} \quad \text{para } \theta \neq 0 \tag{1.8}$$

una ecuación que relaciona las transformadas de Laplace-Stieltjes de μ, H y F.

En efecto, para obtener (1.8), basta tener en cuenta que por la Proposición A.0.6 del Apéndice sabemos que $(\mu * F)^*(\theta) = \mu^*(\theta)\, F^*(\theta)$, y considerando la definición de μ dada en (1.4) tenemos

$$\mu^*(\theta) = (H(\theta) + (\mu * F)(\theta))^* = H^*(\theta) + (\mu * F)^*(\theta) = H^*(\theta) + \mu^*(\theta)\, F^*(\theta).$$

En particular, fijando $H = F$, tenemos por (1.3) que

$$m^*(\theta) = \frac{F^*(\theta)}{1 - F^*(\theta)}. \tag{1.9}$$

Por tanto, hay una correspondencia uno a uno entre las funciones de renovación m y las funciones de distribución F de los tiempos entre llegadas.

1.4. Teoremas límite

En este apartado estudiaremos el comportamiento asintótico de $N(t)$ y su función de renovación $m(t)$. Estudiaremos cuatro resultados principales, dos para N y dos para m. Para el proceso de renovación N veremos la Ley fuerte de los grandes números y el Teorema del límite central, mientras que en el caso de m, veremos el Teorema elemental de renovación y el Teorema de renovación.

Sea $\mu = E(X_1)$ la media de un típico tiempo entre llegadas. A partir de ahora asumimos que $\mu < \infty$.

1.4.1. Teoremas límite del proceso de renovación

Comenzaremos el apartado viendo los resultados fundamentales de N, en particular, empezaremos con una versión de la Ley fuerte de los grandes números, que nos permitirá obtener una aproximación lineal de N.

Teorema 1.4.1. *Ley fuerte de los grandes números para procesos de renovación. Se verifica que*

$$\frac{1}{t}N(t) \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\mu} \quad \textit{cuando } t \to \infty.$$

Así, el Teorema 1.4.1 muestra que $1/\mu$ es la tasa media límite de llegadas por unidad de tiempo.

Demostración. Notemos que

$$T_{N(t)} \leq t \leq T_{N(t)+1} \quad \text{para todo } t > 0. \tag{1.10}$$

Por tanto, si $N(t) > 0$,

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)} \leq \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1}\,\frac{N(t)+1}{N(t)} \leq \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1}\left(1+\frac{1}{N(t)}\right).$$

Sabemos que X_1,...,X_n son i.i.d. y $T_n = X_1 + ... + X_n$, por lo que por la Ley fuerte de los grandes números, Teorema A.1.1 del Apéndice, tenemos

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$$

es decir,

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \to \mu, \qquad \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1} \to \mu.$$

Así, cuando $t \to \infty$

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1}\left(1+\frac{1}{N(t)}\right)$$

y teniendo en cuenta que cuando $t \to \infty$, $N(t) \xrightarrow{c.s.} \infty$ tenemos que

$$\mu \leq \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{N(t)}\right) \leq \mu \quad \text{casi seguro}$$

por lo que podemos concluir que $\mu = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)}$.

□

En el siguiente resultado, probaremos una versión del Teorema del límite central para mostrar que la distribución de N es asintóticamente normal. Para este resultado hemos recurrido a [13] y [2].

Teorema 1.4.2. *Teorema del límite central para procesos de renovación. Si $\sigma^2 = Var(X_1)$ verifica $0 < \sigma < \infty$, entonces*

$$\frac{N(t) - t/\mu}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} \xrightarrow{D} Z, \quad \textit{con } Z \sim N(0,1) \quad \textit{cuando } t \to \infty.$$

Demostración. Probemos

$$Z(t) = \frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} \xrightarrow{D} Z, \quad \text{con } Z \sim N(0,1).$$

Utilizaremos la relación $P(N(t) < n) = P(T_n > t)$, que nos permitirá usar las propiedades de T_n para deducir el comportamiento límite de N.

Fijemos un $x \in \mathbb{R}$, y sea $n(t) = \left[\frac{t}{\mu} + x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}\right]$, donde $[y]$ recordemos es el mayor entero menor o igual que y. Entonces

$$P(Z(t) < x) = P\left(\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < x\right) = P\left(N(t) < t/\mu + x\,\sigma\sqrt{t/\mu^3}\right) = P(N(t) < n(t))$$
$$= P(T_{n(t)} > t) = P\left(\frac{T_{n(t)} - \mu\, n(t)}{\sigma\sqrt{n(t)}} > \frac{t - \mu\, n(t)}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right).$$

Si denotamos $Z_{n(t)} = \frac{T_{n(t)} - \mu\, n(t)}{\sigma\sqrt{n(t)}}$ y tenemos en cuenta la igualdad

$$\frac{t - \mu\, n(t)}{\sigma\sqrt{n(t)}} = \frac{t - \mu\left(\frac{t}{\mu} + x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}\right)}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu} + x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}}} = \frac{-x\,\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu} + x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}}} = \frac{-x\sqrt{t}\sqrt{1/\mu}}{\sqrt{1/\mu}\sqrt{t + x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu}}}}$$
$$= \frac{-x\sqrt{t}}{\sqrt{t}\sqrt{1 + x\sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu\, t}}}} = \frac{-x}{\sqrt{1 + \frac{x\,\sigma}{\sqrt{\mu\, t}}}}$$

llegamos a la expresión

$$P(Z(t) < x) = P\left(\frac{T_{n(t)} - \mu\, n(t)}{\sigma\sqrt{n(t)}} > \frac{t - \mu\, n(t)}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = P\left(Z_{n(t)} > \frac{-x}{\sqrt{1 + x\,\sigma/\sqrt{\mu\, t}}}\right).$$

Ahora, $\lim_{t\to\infty} Z_{n(t)} = \lim_{n\to\infty} Z_n = Z$ (en distribución), donde Z es una variable tal que $Z \sim N(0,1)$, pues por el Teorema del límite central, Teorema A.1.2 del Apéndice, tenemos que

$$Z_n = \frac{T_n - \mu\, n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z, \quad \text{con } Z \sim N(0,1).$$

Además, $\lim_{t\to\infty}\sqrt{1+x\,\sigma/\sqrt{\mu\,t}}=1$, por lo que

$$P(Z(t)<x)=P\left(Z_{n(t)}>\frac{-x}{\sqrt{1+x\,\sigma/\sqrt{\mu\,t}}}\right)\xrightarrow[t\to\infty]{}P(Z>-x)=P(Z<x)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la simetría de la distribución normal. □

Notemos que este teorema también nos dice que $Var(N(t))\sim\sigma^2\,t/\mu^3$.

1.4.2. Teoremas límite de la función de renovación

A continuación veremos los principales resultados para la función de renovación m. El primero de ellos, el Teorema elemental de renovación, afirma que $m(t)$ es aproximadamente lineal en t.

Teorema 1.4.3. *Teorema elemental de renovación.*
Se verifica que

$$\frac{1}{t}\,m(t)\to\frac{1}{\mu}\quad \textit{cuando } t\to\infty.$$

Es decir, el teorema muestra que $1/\mu$ es el tasa media límite del número esperado de llegadas $m(t)$ por unidad de tiempo.

Como preparación a la prueba del Teorema 1.4.3, recordemos la definición de tiempo de parada y la ecuación de Wald.
Sea M una variable aleatoria tomando valores en el conjunto $\{1,2,...\}$. A la variable aleatoria M la denominamos tiempo de parada respecto a la sucesión X_i de tiempos entre llegadas si, para todo $m\geq 1$, el evento $\{M\leq m\}$ pertenece a la $\sigma-\acute{a}lgebra$ de eventos generados por $X_1,X_2,...,X_m$. Notemos que $M=N(t)+1$ es un tiempo de parada para X_i, ya que

$$\{M\leq m\}=\{N(t)\leq m-1\}=\left\{\sum_{i=1}^{m}X_i>t\right\},$$

que es un evento definido en términos de $X_1,X_2,...,X_m$. Sin embargo, la variable aleatoria $N(t)$ no es un tiempo de parada.

Lema 1.4.4. *Ecuación de Wald.*
Sean $X_1,X_2,...$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, y sea M un tiempo de parada respecto a las X_i verificando $E(M)<\infty$. Entonces

$$E\left(\sum_{i=1}^{M}X_i\right)=E(X_1)\,E(M).$$

Demostración. Notemos que

$$\sum_{i=1}^{M} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \, I_{\{M \geq i\}},$$

por lo que

$$E\left(\sum_{i=1}^{M} X_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i \, I_{\{M \geq i\}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E\left(X_i \, I_{\{M \geq i\}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i)\, E(I_{\{M \geq i\}}),$$

donde en la última igualdad hemos tenido en cuenta la independencia de las variables X_i, pues $\{M \geq i\} = \{M \leq i-1\}^c$, un evento definido en términos de X_1,..., X_{i-1} y, por tanto, independiente de X_i. Por tanto,

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{M} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i)\, \left[0\, P(I_{\{M \geq i\}} = 0) + 1\, P(I_{\{M \geq i\}} = 1)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i)\, P(I_{\{M \geq i\}} = 1) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i)\, P(M \geq i) = E(X_1) \sum_{i=1}^{\infty} P(M \geq i) = E(X_1)\, E(M). \end{aligned}$$

□

Nótese que aplicando la ecuación de Wald a la sucesión de tiempos entre llegadas junto con el tiempo de parada $M = N(t) + 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} E(T_{N(t)+1}) &= E\left(\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^{M} X_i\right) = E(X_1)\, E(M) = \mu\, E(N(t)+1) \\ &= \mu\, (m(t)+1). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Una vez demostrada la ecuación de Wald podemos presentar

Demostración. (Teorema 1.4.3)
Tenemos de (1.10) que $t < T_{N(t)+1}$; tomando esperanzas y utilizando (1.11) obtenemos

$$t = E(t) < E(T_{N(t)+1}) = \mu\, (m(t)+1),$$

de donde

$$\frac{t}{\mu} - 1 < m(t)$$

y por tanto

$$\frac{m(t)}{t} > \frac{1}{t}\,\frac{t}{\mu} - \frac{1}{t} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}.$$

Cuando $t \to \infty$, tenemos

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\, m(t) \geq \frac{1}{\mu}. \tag{1.12}$$

Podríamos intentar proceder como mostramos a continuación para acotar superiormente a $m(t)$. De (1.10) sabemos que $T_{N(t)} \leq t$, por lo que

$$t \geq E(T_{N(t)}) = E(T_{N(t)+1} - X_{N(t)+1}) = \mu\,(m(t)+1) - E(X_{N(t)+1}). \tag{1.13}$$

El problema es que $X_{N(t)+1}$ depende de $N(t)$, por lo que en general $E(X_{N(t)+1}) \neq \mu$. Para superar esto, truncamos las X_i en un $a > 0$ para obtener una nueva sucesión

$$X_j^a = \begin{cases} X_j & si\ X_j < a \\ a & si\ X_j \geq a. \end{cases}$$

Ahora consideramos el proceso de renovación N^a con tiempos entre llegadas $\{X_j^a\}$. Aplicamos (1.13) a N^a, notando que $\mu^a = E(X_j^a) \leq a$, para obtener

$$\begin{aligned} t &\geq E(T_{N^a(t)}) = E(T_{N^a(t)+1} - X^a_{N^a(t)+1}) = \mu^a\ [E(N^a(t))+1] - E(X^a_{N^a(t)+1}) \\ &\geq \mu^a\ [E(N^a(t))+1] - a. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Sin embargo, $X_j^a \leq X_j$ para todo t, por lo que, $N^a(t) \geq N(t)$ para todo t. Así,

$$E(N^a(t)) \geq E(N(t)) = m(t)$$

y (1.14) se convierte en

$$t \geq \mu^a\ [E(N^a(t))+1] - a \geq \mu^a\ [m(t))+1] - a$$

de donde

$$m(t) \leq \frac{t+a}{\mu^a} - 1$$

y finalmente

$$\frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{t}\,\frac{t+a}{\mu^a} - \frac{1}{t} = \frac{1}{\mu^a} + \frac{a}{t\,\mu^a} - \frac{1}{t} = \frac{1}{\mu^a} + \frac{a-\mu^a}{t\,\mu^a}.$$

Cuando $t \to \infty$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} m(t) \leq \frac{1}{\mu^a}.$$

Ahora, haciendo $a \to \infty$ y utilizando el Teorema de la convergencia monótona (véase Teorema A.1.4 del Apéndice) tenemos que $\mu^a \to \mu$ y, por tanto

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} m(t) \leq \frac{1}{\mu}.$$

Combinando esto con (1.12) tenemos

$$\frac{1}{\mu} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\, m(t) \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\, m(t) \leq \frac{1}{\mu}.$$

Es decir,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\, m(t) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\, m(t) = \frac{1}{\mu}$$

y por tanto

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\, m(t) = \frac{1}{\mu}.$$

□

Las propiedades de m son difíciles de encontrar, y necesitaremos una definición previa.

Definición 1.4.5. Diremos que una variable aleatoria X es aritmética con periodo $\lambda > 0$ si X toma valores en el conjunto $\{m\lambda : m = 0, \pm 1, ...\}$ con probabilidad 1, y λ es maximal con esta propiedad.

Si los tiempos entre llegadas de N son aritméticos, con periodo λ, entonces también lo es T_k para todo k. En este caso, $m(t)$ puede ser discontinuo en valores de t múltiplos de λ, y esto afecta a las propiedades de m.

En el siguiente teorema, estudiamos el segundo resultado fundamental de la función de renovación m. Este muestra que el número esperado de llegadas en un intervalo de tiempo es asintóticamente proporcional a la longitud del intervalo, donde la constante de proporcionalidad es $1/\mu$.

Teorema 1.4.6. *Teorema de renovación.*
Si X_1 no es aritmética entonces

$$m(t+h) - m(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{h}{\mu} \quad \textit{para todo } h. \tag{1.15}$$

Si X_1 es aritmético con periodo λ, entonces (1.15) se cumple cuando h es un múltiplo de λ.

Este teorema afirma, además, que el gradiente de m, denotado $\nabla m(t)$, es asintóticamente constante, pues a partir de (1.15) concluimos que

$$\nabla m(t) = \frac{\partial m(t)}{\partial t} = \lim_{h\to 0} \frac{m(t+h) - m(t)}{h} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1/\mu.$$

La demostración del Teorema 1.4.6, dado su extensión y mayor complejidad, no la presentaremos en este trabajo. Puede consultarse en [3, p.360].

En el resto del capítulo supondremos que los tiempos entre llegadas no son aritméticos. Resultados similares se mantienen para el caso aritmético, pero a menudo son más complicados de enunciar.

Entre los teoremas límites para procesos de renovación que tratamos en este trabajo, el más útil es el que vemos a continuación, el Teorema principal de renovación, que es una versión integral del Teorema de renovación, Teorema 1.4.6.

Teorema 1.4.7. *Teorema principal de renovación.*
Si $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *es tal que*

(i) $g(t) \geq 0$ *para todo* t,

(ii) $\int_0^\infty g(t)\,dt < \infty$,

(iii) g *es una función no creciente,*

entonces

$$\int_0^t g(t-x)\,dm(x) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(x)\,dx$$

cuando X_1 *no es aritmética.*

Demostración. Para demostrar este teorema, supondremos en primer lugar que g es una función indicadora, posteriormente, extenderemos el resultado para el caso en el que g es una función escalonada, y, finalmente, veremos el caso general en el que no haremos ninguna suposición de la forma de g.

(i) Funciones indicadoras.
Consideremos la función indicadora $g(t) = I_{[a,b]}(t)$ con $0 \leq a \leq b < \infty$. Aplicando el Teorema de renovación, Teorema 1.4.6, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(t)\,dt &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty I_{[a,b]}(t)\,dt = \frac{1}{\mu}\int_a^b dt = \frac{1}{\mu}(b-a)\\ &= \lim_{t\to\infty}(m(t+(b-a)) - m(t)) = \lim_{t\to\infty}(m(t-a) - m(t-b))\\ &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t g(t-s)\,dm(s)\end{aligned}$$

para cualquier $0 \leq a \leq b < \infty$.

Veamos con más detalle las últimas dos igualdades.

- Veamos en primer lugar

$$m(t+(b-a)) - m(t) = m(t+(b-a)-b) - m(t-b) = m(t-a) - m(t-b).$$

Por un lado, sabemos que

$$\begin{aligned}m(t+(b-a)) - m(t) &= E(N(t+(b-a))) - E(N(t))\\ &= \text{N}^{\text{o}} \text{ esperado de llegadas en } [t, t+(b-a)]\end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned}m(t+(b-a)-b) - m(t-b) &= E(N(t+(b-a)-b)) - E(N(t-b))\\ &= E(N(t-a)) - E(N(t-b))\\ &= \text{N}^{\text{o}} \text{ esperado de llegadas en } [t-b, t-a].\end{aligned}$$

En ambos casos estamos calculando el número esperado de llegadas en un intervalo de longitud $(b-a)$, luego

$$m(t+(b-a)) - m(t) = m(t+(b-a)-b) - m(t-b).$$

- Reescribiendo la función g de la siguiente forma

$$g(t-s) = I_{[a,b]}(t-s) = I_{[a-t,b-t]}(-s) = I_{[-(t-a),-(t-b)]}(-s) = I_{[t-b,t-a]}(s)$$

obtenemos la última igualdad

$$\int_0^t g(t-s)\,dm(s) = \int_0^t I_{[t-b,t-a]}(s)\,dm(s) = \int_{t-b}^{t-a} dm(s) = m(t-a) - m(t-b).$$

(ii) Funciones escalonadas.
Consideremos la función escalonada $g(t) = \sum_i c_i\, I_{[a_i,b_i]}(t)$ con $0 \leq a_i \leq b_i < \infty$ para todo i, donde i pertenece a un conjunto finito de índices. Aplicando el teorema para el caso de funciones indicadoras, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(t)\,dt &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \sum_i c_i\, I_{[a_i,b_i]}(t)\,dt = \frac{1}{\mu}\sum_i c_i \int_0^\infty I_{[a_i,b_i]}(t)\,dt \\
&= \sum_i c_i \frac{1}{\mu}\int_0^\infty I_{[a_i,b_i]}(t)\,dt = \sum_i c_i \lim_{t\to\infty}\int_0^t I_{[a_i,b_i]}(t-s)\,dm(s) \\
&= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \sum_i c_i\, I_{[a_i,b_i]}(t-s)\,dm(s) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t g(t-s)\,dm(s).
\end{aligned}$$

(iii) Caso general.
El caso general, debido a la mayor complejidad de los resultados auxiliares empleados en su demostración, no lo detallaremos en este trabajo, puede verse en [9].

□

Acabamos de probar el Teorema principal de renovación empleando el Teorema de renovación, Teorema 1.4.6, y como vemos en la siguiente proposición, existe otra relación entre ambos teoremas.

Proposición 1.4.8. *El Teorema principal de renovación, Teorema 1.4.7, implica el Teorema de renovación, Teorema 1.4.6.*

Demostración. Si consideramos la función $g(t) = I_{[a,b]}(t)$, con $0 \leq a \leq b < \infty$, tenemos que

$$\int_0^\infty g(t)\,dt = \int_0^\infty I_{[a,b]}(t)\,dt = \int_a^b dt = b - a$$

y también sabemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t g(t-s)\,dm(s) &= \int_0^t I_{[a,b]}(t-s)\,dm(s) = \int_0^\infty I_{[a,b]}(t-s)\,I_{[0,t]}(s)\,dm(s)\\ &= \int_0^\infty I_{[t-b,t-a]}(s)\,dm(s) = \int_{t-b}^{t-a} dm(s) = m(t-a) - m(t-b).\end{aligned}$$

A partir de la última ecuación tenemos que el Teorema principal de renovación implica el Teorema de renovación, pues aplicando el primero de ellos tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} m(t+(b-a)) - m(t) &\overset{(\bigstar)}{=} \lim_{t\to\infty} m(t-a) - m(t-b) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t g(t-s)\,dm(s)\\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(t)\,dt = \frac{1}{\mu}\,(b-a),\end{aligned}$$

para cualquier $b - a \geq 0$.
Notemos que la igualdad ($\bigstar$) no la detallamos aquí, pues la vimos en la demostración del Teorema principal de renovación, Teorema 1.4.7, para funciones indicadoras. □

1.5. Vida restante y vida actual

Supongamos que comenzamos a observar un proceso de renovación N en un instante de tiempo t. Un determinado número de llegadas $N(t)$ han ocurrido hasta entonces, y la siguiente llegada será la numerada $N(t)+1$. Es decir, hemos comenzado nuestra observación en un punto del intervalo aleatorio $I_t = \left[T_{N(t)}, T_{N(t)+1}\right)$, cuyos extremos son tiempos de llegadas.

Veamos a continuación la definición de algunos conceptos que trataremos a lo largo de este apartado.

Definición 1.5.1. (a) El tiempo de vida restante en t es $E(t) = T_{N(t)+1} - t$.

(b) El tiempo de vida actual (o edad) en t es $C(t) = t - T_{N(t)}$.

(c) El tiempo total de vida en t es $D(t) = E(t) + C(t) = X_{N(t)+1}$.

Es decir, $E(t)$ es el tiempo que transcurre hasta la siguiente llegada, $C(t)$ es el tiempo que ha pasado desde la última llegada (por convención la llegada número 0 ocurre en el instante de tiempo 0), y $D(t)$ es la duración del tiempo entre llegadas que contiene a t. Podemos observar la representación de estas variables en la Figura 1.3.

A continuación, vamos a buscar la distribución del tiempo de vida restante, $E(t)$, para un proceso de renovación general, y como consecuencia, determinaremos la distribución del tiempo de vida actual, $C(t)$.

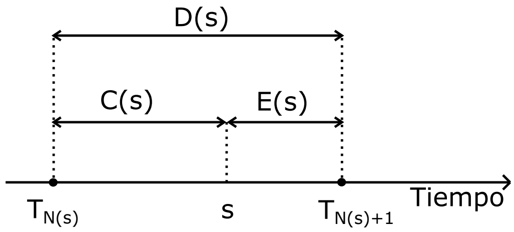

Figura 1.3: Tiempo de vida restante, edad y tiempo total de vida en el instante s.

Teorema 1.5.2. *La función de distribución del tiempo de vida restante, $E(t)$, viene dada por*

$$P(E(t) \leq y) = F(t+y) - \int_0^t (1 - F(t+y-x))\, dm(x).$$

Demostración. Condicionar respecto a X_1 es la manera habitual de obtener

$$P(E(t) > y) = E(P(E(t) > y|X_1)).$$

Sin embargo, podemos ver que

$$P(E(t) > y|X_1 = x) = \begin{cases} P(E(t-x) > y) & \text{si } x \leq t \\ 0 & \text{si } t < x < t+y \\ 1 & \text{si } x > t+y. \end{cases}$$

Esto es debido a que $E(t) > y$ si y solo si no se produce ninguna llegada en $(t, t+y]$, pues considerando (1.10)

$$\begin{aligned} E(t) > y &\Leftrightarrow T_{N(t)+1} - t > y \\ &\Leftrightarrow \text{La } (N(t)+1)\text{-ésima llegada se produce despues de } (t+y) \\ &\Leftrightarrow \text{En } (t, t+y] \text{ no se produce ninguna llegada.} \end{aligned} \tag{1.16}$$

Teniendo en cuenta esta relación obtenemos $P(E(t) > y|X_1 = x)$ para los distintos valores de x.

- Si $t < x < t+y$:
  En este caso, $X_1 = x$ implica que la primera llegada se produce en $(t, t+y)$, por lo que debido a (1.16) nunca se dará $E(t) > y$ y $P(E(t) > y|X_1 = x) = 0$.

- Si $x > t+y$:
  Si suponemos $X_1 = x > t+y$, la primera llegada se produce después del instante $(t+y)$, es decir, no se produce ninguna llegada en $[0, t+y]$, en particular, no se producen llegadas en $(t, t+y]$. Así, considerando (1.16), tenemos que en este caso siempre se verifica $P(E(t) > y)$ y $P(E(t) > y|X_1 = x) = 1$.

- Si $x \leq t$:
  Si se da $X_1 = x \leq t$, la primera llegada se produce antes de t, es decir, en $[0, t)$. En el

instante de la primera llegada comienza un nuevo proceso de llegadas, que denotaremos $N(t-x)$, idéntico al original que comenzaba en el instante 0 (y denotamos como $N(t)$). Por tanto, podemos calcular la probabilidad empleando este nuevo proceso de llegadas, $P(E(t) > y|X_1 = x) = P(E(t-x) > y)$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} P(E(t) > y) = E(P(E(t) > y|X_1)) &= \int_0^\infty P(E(t) > y|X_1 = x)\, dF(x) \\ &= \int_0^t P(E(t-x) > y)\, dF(x) + \int_{t+y}^\infty dF(x). \end{aligned}$$

Así, vemos que $\mu(t) = P(E(t) > y)$ verifica (1.4) con $H(t) = 1 - F(t+y)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \mu(t) = P(E(t) > y) &= \int_0^t P(E(t-x) > y)\, dF(x) + \int_{t+y}^\infty dF(x) \\ &= F(\infty) - F(t+y) + \int_0^t P(E(t-x) > y)\, dF(x) \\ &= 1 - F(t+y) + \int_0^t P(E(t-x) > y)\, dF(x) \end{aligned}$$

y utilizando el Teorema 1.3.12 tenemos que

$$\begin{aligned} P(E(t) > y) = \mu(t) &= H(t) + \int_0^t H(t-x)\, dm(x) \\ &= 1 - F(t+y) + \int_0^t (1 - F(t+y-x))\, dm(x). \end{aligned}$$

□

Corolario 1.5.3. *La distribución del tiempo de vida actual $C(t)$ viene dada por*

$$P(C(t) \geq y) = \begin{cases} 0 & si\, y > t \\ 1 - F(t) + \int_0^{t-y} (1 - F(t-x))\, dm(x) & si\, y \leq t. \end{cases}$$

Demostración. Se verifica que $C(t) > y$ si y solo si no se producen llegadas en $(t-y, t]$, pues teniendo en cuenta (1.10)

$$\begin{aligned} C(t) \geq y \Leftrightarrow t - T_{N(t)} \geq y &\Leftrightarrow T_{N(t)} \leq t - y \\ &\Leftrightarrow \text{La } N(t)\text{-ésima llegada se produce en el instante } (t-y) \text{ o antes} \\ &\Leftrightarrow \text{En } (t-y, t] \text{ no se produce ninguna llegada.} \end{aligned}$$

Además, considerando de nuevo (1.10) tenemos

$$\begin{aligned} E(t-y) > y \Leftrightarrow T_{N(t-y)+1} - (t-y) > y &\Leftrightarrow T_{N(t-y)+1} > t \\ &\Leftrightarrow \text{La } (N(t-y)+1)\text{-ésima llegada se produce después de } t \\ &\Leftrightarrow \text{En } (t-y, t] \text{ no se produce ninguna llegada.} \end{aligned}$$

Por lo que,

$$P(C(t) \geq y) = P(E(t-y) > y).$$

Con esta igualdad y con el Teorema 1.5.2 obtenemos el resultado buscado

$$\begin{aligned} P(C(t) \geq y) &= P(E(t-y) > y) \\ &= 1 - F((t-y)+y) + \int_0^{t-y} [1 - F((t-y)+y-x)]\, dm(x) \\ &= 1 - F(t) + \int_0^{t-y} (1 - F(t-x))\, dm(x). \end{aligned}$$

□

¿Tiene el proceso de renovación N incrementos estacionarios, en el sentido de que la distribución de $N(t+s) - N(t)$ depende solo de s cuando $s \geq 0$? Esto es cierto para el proceso de Poisson, pero en general falla. La razón es simple, el proceso de llegadas después del instante t depende de la edad t del proceso hasta la fecha.

Cuando t es muy grande, sin embargo, es verosímil que el proceso olvide la fecha de su comienzo, de este modo estabilizándose en una existencia estacionaria.
Para mostrar esta estacionariedad asintótica tenemos que demostrar que la distribución de $N(t+s) - N(t)$ converge cuando $t \to \infty$. Esto es equivalente a la afirmación de que la distribución del tiempo de vida restante, $E(t)$, se estabiliza cuando $t \to \infty$.

Veamos en el siguiente resultado que la distribución de $E(t)$ se estabiliza cuando $t \to \infty$, con lo que probaremos la estacionariedad asintótica del proceso de renovación N. Utilizaremos como referencia [12] para demostrar este resultado.

Teorema 1.5.4. *Si X_1 no es aritmética y $\mu = E(X_1) < \infty$ entonces*

$$P(E(t) \leq y) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu} \int_0^y (1 - F(x))\, dx.$$

Demostración. Utilizando el Teorema 1.5.2 sabemos que

$$P(E(t) \leq y) = F(t+y) - \int_0^t (1 - F(t+y-x))\, dm(x).$$

Por ser F una función de distribución tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} F(t+y) = 1$$

y aplicando el Teorema 1.4.7

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t (1 - F(t+y-x))\, dm(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty (1 - F(t+y))\, dt = \frac{1}{\mu} \int_y^\infty (1 - F(x))\, dx.$$

Teniendo esto en cuenta, junto con el Lema A.0.7 del Apéndice, llegamos al resultado buscado

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} P(E(t) \leq y) &= \lim_{t\to\infty} \left(F(t+y) - \int_0^t (1 - F(t+y-x))\, dm(x) \right) \\
&= \lim_{t\to\infty} F(t+y) - \lim_{t\to\infty} \int_0^t (1 - F(t+y-x))\, dm(x) \\
&= 1 - \frac{1}{\mu} \int_y^\infty (1 - F(x))\, dx \\
&= \frac{E(X_1)}{\mu} - \frac{1}{\mu} \int_y^\infty (1 - F(x))\, dx \\
&= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx - \frac{1}{\mu} \int_y^\infty (1 - F(x))\, dx \\
&= \frac{1}{\mu} \int_0^y (1 - F(x))\, dx.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Aplicaciones

En este capítulo, veremos algunas aplicaciones de la teoría de procesos de renovación estudiada en el Capítulo 1. En particular, veremos los contadores y sus periodos muertos, el proceso de renovación alterno, la superposición de procesos de renovación y el proceso de renovación retardado.

Para el estudio de estas aplicaciones, utilizaremos fundamentalmente la referencia [4], aunque también recurriremos a [8], [1] y [7].

2.1. Contadores y sus periodos muertos

Tenemos un contador que registra partículas radiactivas, independientemente de la tasa de su llegada. En la práctica, después de la detección de una partícula estos contadores requieren un cierto intervalo de tiempo para completar el registro. Estos intervalos se denominan "periodos muertos"; durante sus periodos muertos, el contador está bloqueado y no registra las partículas que llegan. Hay dos tipos comunes de contadores:

1) Cada llegada detectada bloquea el contador durante un periodo de tiempo, posiblemente de duración aleatoria, durante el que ignora todas las llegadas.

2) Cada llegada bloquea el contador durante un periodo de tiempo, posiblemente de duración aleatoria, independientemente de si el contador ya está bloqueado o no. El contador registra solo aquellas llegadas que ocurren mientras está desbloqueado.

Consideraremos brevemente los contadores de tipo 1.
Supongamos que las llegadas ocurren como un proceso de renovación N, con función de renovación m y tiempos entre llegadas X_1,X_2,... con función de distribución F.
Sea L_n la duración del periodo muerto inducido por la n-ésima llegada detectada. Es habitual y conveniente suponer que un periodo muerto adicional, de duración L_0, comienza en el instante $t = 0$. Suponemos que L_n es una familia de variables aleatorias independientes con función de distribución común F_L, donde $F_L(0) = 0$.
Sea $\tilde{N}(t)$ el número de llegadas detectadas por el contador tipo 1 hasta el instante

t. Entonces $\tilde{N}$ es un proceso estocástico con tiempos entre llegadas $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$,... donde $\tilde{X}_{n+1} = L_n + E_n$ y E_n es el tiempo de vida restante de N en el final del n-ésimo periodo muerto.
En la Figura 2.1 se muestra una trayectoria de la evolución de las llegadas y detecciones de un contador tipo 1.

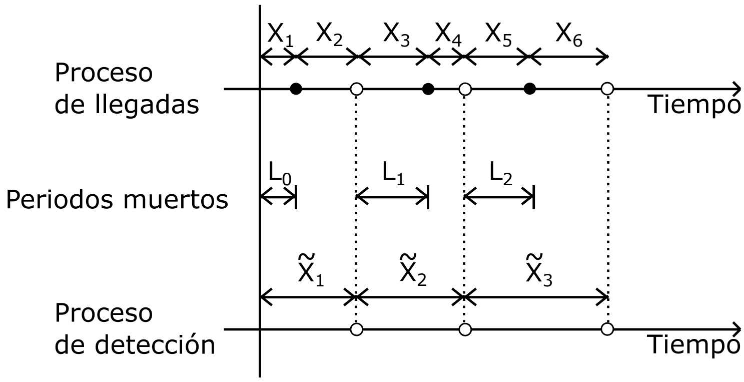

Figura 2.1: Llegadas y detecciones por un contador tipo 1; $\bullet$ indica una llegada no detectada, y $\circ$ una llegada detectada.

El proceso $\tilde{N}$ en general no es un proceso de renovación, pues las $\tilde{X}_i$ no son necesariamente independientes ni idénticamente distribuidas. En el caso especial cuando N es un proceso de Poisson, las E_n son variables exponenciales independientes y $\tilde{N}$ es un proceso de renovación.

A continuación, determinaremos la distribución de probabilidad del tiempo transcurrido hasta la primera detección, $\tilde{X}_1$.

Proposición 2.1.1. *La primera llegada detectada, $\tilde{X}_1$, verifica*

$$P(\tilde{X}_1 \leq x) = \int_0^x (1 - F(x-y))\ F_L(y)\, dm(y).$$

Demostración. Condicionando respecto a L_0 obtenemos

$$P(\tilde{X}_1 \leq x) = E(P(\tilde{X}_1 \leq x | L_0)) = \int_0^x P(L_0 + E_0 \leq x | L_0 = l)\, dF_L(l).$$

Sin embargo, $E_0 = E(L_0)$, el tiempo de vida restante de N en L_0, por lo que

$$\begin{aligned} P(\tilde{X}_1 \leq x) &= \int_0^x P(L_0 + E_0 \leq x | L_0 = l)\, dF_L(l) = \int_0^x P(L_0 + E(L_0) \leq x | L_0 = l)\, dF_L(l) \\ &= \int_0^x P(l + E(l) \leq x)\, dF_L(l) = \int_0^x P(E(l) \leq x - l)\, dF_L(l). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ahora, utilizando el Teorema 1.5.2, (1.3) y la propiedad conmutativa de las convoluciones (véase la Proposición A.0.2 en Apéndice) obtenemos la representación integral

$$\begin{aligned} m(t) &= F(t) + \int_0^t m(t-x)\,dF(x) = F(t) + (m*F)(t) = F(t) + (F*m)(t) \\ &= F(t) + \int_0^t F(t-x)\,dm(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

A partir de (2.2), tenemos

$$P(\tilde{X}_1 \leq x) = \int_0^x \left(\int_l^x (1 - F(x-y))\; dm(y) \right) dF_L(l) = \int_0^x (1 - F(x-y))\; F_L(y)\, dm(y). \tag{2.3}$$

En efecto

(i) Veamos la primera igualdad. Queremos probar

$$P(\tilde{X}_1 \leq x) = \int_0^x P(E(l) \leq x - l)\, dF_L(l) = \int_0^x \int_l^x (1 - F(x-y))\, dm(y)\, dF_L(l)$$

por lo que bastará probar

$$P(E(l) \leq x - l) = \int_l^x (1 - F(x-y))\, dm(y).$$

Utilizando el Teorema 1.5.2 y (2.2) tenemos

$$\begin{aligned} P(E(l) \leq x - l) &= F(l + (x-l)) - \int_0^l [1 - F(l + (x-l) - y)]\, dm(y) \\ &= F(x) - \int_0^l (1 - F(x-y))\, dm(y) \\ &= m(x) - \int_0^x F(x-y)\, dm(y) - \int_0^l dm(y) + \int_0^l F(x-y)\, dm(y) \\ &= m(x) - m(l) - \int_l^x F(x-y)\, dm(y) = \int_l^x m'(y)\, dy - \int_l^x F(x-y)\, dm(y) \\ &= \int_l^x (1 - F(x-y))\, dm(y). \end{aligned}$$

(ii) Veamos la segunda igualdad.

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\int_l^x [1 - F(x-y)]\, dm(y) \right) dF_L(l) &= \int_0^x \left(\int_l^x [1 - F(x-y)]\, m'(y)\, dy \right) F_L'\, dl \\ &= \int_0^x \left(\int_0^y [1 - F(x-y)]\, F_L'(l)\, dl \right) m'(y)\, dy \\ &= \int_0^x (1 - F(x-y)) \left(\int_0^y F_L'(l)\, dl \right) dm(y) \\ &= \int_0^x (1 - F(x-y)) \left(\int_0^y f_L(l)\, dl \right) dm(y) \\ &= \int_0^x (1 - F(x-y))\, F_L(y)\, dm(y). \end{aligned}$$

$\square$

Si N es un proceso de Poisson de parámetro λ, la ecuación (2.1) se convierte en

$$P(\tilde{X}_1 \leq x) = \int_0^x \left(1 - e^{-\lambda\,(x-l)}\right)\, dF_L(l).$$

Ahora $\tilde{N}$ es un proceso de renovación, y la ecuación vista describe la distribución común de los tiempos entre llegadas.

Si el contador está registrando la llegada de partículas radiactivas, entonces podemos buscar una estimación $\hat{\lambda}$ de la tasa de emisión λ desconocida de la fuente basada en nuestro conocimiento de la longitud media $E(L)$ de un periodo muerto y la lectura del contador $\tilde{N}(t)$. Suponemos que las partículas llegan de igual manera que un proceso de Poisson, y sea $\gamma_t = \tilde{N}(t)/t$ la densidad de partículas observadas. Entonces

$$\gamma_t = \frac{\tilde{N}(t)}{t} \simeq \frac{1}{E(\tilde{X}_1)} = \frac{1}{E(L) + \lambda^{-1}} \quad \text{para t grande,}$$

donde hemos tenido en cuenta que $\tilde{N}(t)/t \to 1/E(\tilde{X}_1)$ por el Teorema 1.4.1 y que $E(\tilde{X}_1) = E(L_0 + E_0) = E(L) + \frac{1}{\lambda}$.

Por tanto, $\lambda \simeq \hat{\lambda}$ donde

$$\hat{\lambda} = \frac{\gamma_t}{1 - \gamma_t\, E(L)}.$$

2.2. Proceso de renovación alterno

Una máquina se avería repetidamente. Después de la n-ésima avería el técnico necesita un periodo de tiempo, de longitud Y_n para arreglarla; posteriormente la máquina funciona durante un periodo de longitud Z_n antes de volver a averiarse. Suponemos que Y_m y Z_n son independientes, las Y_m con función de distribución común F_Y y las Z_n con función de distribución común F_Z. Supongamos que la máquina fue instalada en el instante $t = 0$.

Sea $N(t)$ el número de reparaciones completadas hasta el instante de tiempo t. Entonces N es un proceso de renovación con tiempos entre llegadas X_1, X_2,..., dados por $X_n = Z_{n-1} + Y_n$, que verifican la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Los tiempos entre llegadas tienen función de distribución, F_X, satisfaciendo*

$$F_X(x) = \int_0^x F_Y(x-y)\, dF_Z(y).$$

Demostración. Aplicando el Teorema A.0.3 del Apéndice tenemos que la función de densidad de X, f_X, verifica

$$f_X(u) = f_{Y+Z}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u-y)\, f_Z(y)\, dy = \int_0^u f_Y(u-y)\, f_Z(y)\, dy.$$

Por lo que la expresión de la función de distribución es

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x f_X(u)\,du = \int_0^x \int_0^u f_Y(u-y)\,f_Z(y)\,dy\,du = \int_0^x \int_y^x f_Y(u-y)\,f_Z(y)\,du\,dy \\ &= \int_0^x f_Z(y) \left(\int_y^x f_Y(u-y)\,du \right) dy = \int_0^x f_Z(y) \left(\int_0^{x-y} f_Y(s)\,ds \right) dy \\ &= \int_0^x f_Z(y)\,F_Y(x-y)\,dy = \int_0^x F_Y(x-y)\,F_Z'(y)\,dy = \int_0^x F_Y(x-y)\,dF_Z(y). \end{aligned}$$

□

En la Figura 2.2 podemos ver la representación de un proceso de renovación alterno.

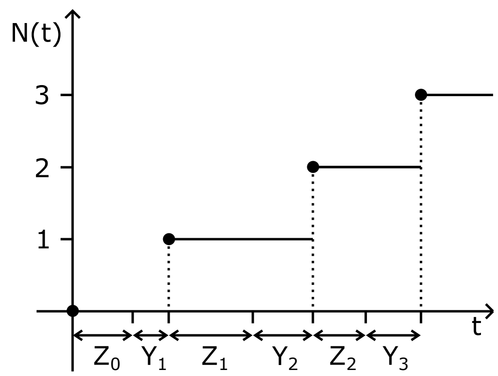

Figura 2.2: Proceso de renovación alterno.

Sea $p(t)$ la probabilidad de que la máquina esté funcionando en el instante t. En el siguiente lema obtenemos el principal resultado de este apartado, una ecuación de renovación para la función p.

Lema 2.2.2. *Se verifica que*

$$p(t) = 1 - F_Z(t) + \int_0^t p(t-x)\,dF(x)$$

y, por tanto,

$$p(t) = 1 - F_Z(t) + \int_0^t (1 - F_Z(t-x))\,dm(x)$$

donde m es la función de renovación de N.

Demostración. La probabilidad de que la máquina esté funcionando en el instante t cumple

$$p(t) = P(\text{funcionando en t})$$
$$= P(\text{funcionando en t}, Z_0 > t) + P(\text{funcionando en t}, Z_0 \leq t)$$
$$= P(Z_0 > t) + P(\text{funcionando en t}, Z_0 \leq t)$$

pues $\{\text{funcionando en t}\} \cap \{Z_0 > t\} = \{Z_0 > t\}$ porque si $Z_0 > t$, entonces la primera avería se produce despues del instante t, es decir, en $[0, t]$ la máquina funciona

$$= P(Z_0 > t) + E(P(\text{funcionando en t}, Z_0 \leq t | X_1))$$
$$= P(Z_0 > t) + \int_{-\infty}^{\infty} P(\text{funcionando en t}, Z_0 \leq t | X_1 = x)\, dF(x)$$
$$= P(Z_0 > t) + \int_{-\infty}^{t} P(\text{funcionando en t}, Z_0 \leq t | X_1 = x)\, dF(x)$$
$$+ \int_{t}^{\infty} P(\text{funcionando en t}, Z_0 \leq t | X_1 = x)\, dF(x)$$
$$= P(Z_0 > t) + \int_{0}^{t} P(\text{funcionando en t}, Z_0 \leq t | X_1 = x)\, dF(x)$$

pues $P(\text{funcionando en t}, Z_0 \leq t | X_1 > t) = 0$

$$= P(Z_0 > t) + \int_{0}^{t} P(\text{funcionando en t} | X_1 = x)\, dF(x)$$

pues el instante x en el que vuelve a funcionar después de la primera avería cumple $x \in [0, t]$, por lo que la primera avería se produjo en $[0, t)$, y no es necesario la intersección con $Z_0 \leq t$ para calcular la probabilidad

$$= P(Z_0 > t) + \int_{0}^{t} p(t - x)\, dF(x)$$

debido a que en el instante en el que se produce la primera llegada, $X_1 = x$, comienza un nuevo proceso de llegadas, $N(t - x)$, idéntico al iniciado en $t = 0$, y $P(\text{funcionando en t} | X_1 = x) = p(t - x)$, pues el instante t del proceso iniciado en 0 es idéntico al $t - x$ del proceso iniciado en x

$$= 1 - F_Z(t) + \int_{0}^{t} p(t - x)\, dF(x)$$

y utilizando el Teorema 1.3.12, con $H(t) = 1 - F_Z(t)$ tenemos

$$= 1 - F_Z(t) + \int_{0}^{t} (1 - F_Z(t - x))\, dm(x).$$

$\square$

Ahora podemos utilizar el Teorema principal de renovación, Teorema 1.4.7, para obtener el comportamiento asintótico de p.

Corolario 2.2.3. *Si X_1 no es aritmética entonces $p(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} (1+\rho)^{-1}$ donde $\rho = E(Y)/E(Z)$ es el ratio de las longitudes medias de un típico periodo de reparación y de un típico periodo de funcionamiento.*

Demostración. Hemos visto en el Lema 2.2.2 que $p(t) = 1-F_Z(t)+\int_0^t (1-F_Z(t-x))\,dm(x)$. Además, si consideramos que por el Teorema 1.4.7

$$\int_0^t (1-F_Z(t-x))\,dm(x) = \int_0^t g(t-x)\,dm(x) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu}\int_0^t g(x)\,dx = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1-F_Z(x))\,dx$$

y por ser función de dsitribución, $F_Z(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$, la expresión de $p(t)$ verifica

$$p(t) = 1-F_Z(t)+\int_0^t (1-F_Z(t-x))\,dm(x) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1-F_Z(x))\,dx.$$

Desarrollando esta última integral tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (1-F_Z(x))\,dx &= \int_0^\infty P(Z>x)\,dx = \int_0^\infty\int_x^\infty f_Z(z)\,dz\,dx = \int_0^\infty\int_0^z f_Z(z)\,dx\,dz \\ &= \int_0^\infty (f_Z(z)\,z)\,dz = E(Z)\end{aligned} \tag{2.4}$$

por lo que la expresión anterior se convierte en

$$p(t) \to \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1-F_Z(x))\,dx = \frac{1}{E(X_1)}E(Z).$$

Dado que

$$\frac{1}{1+\rho} = \frac{1}{1+E(Y)/E(Z)} = \frac{E(Z)}{E(Z)+E(Y)} = \frac{E(Z)}{E(X)}$$

concluimos la demostración. □

Así, la probabilidad límite de que la máquina esté funcionando es simplemente el ratio de la media de un periodo de funcionamiento y la media de un periodo de funcionamiento y avería.
Se sigue, por tanto, que $1-p(t) \to \frac{E(Y)}{E(Z)+E(Y)}$, cuando $t\to\infty$, es decir, la probabilidad límite de que la máquina no esté funcionando es $\frac{E(Y)}{E(Z)+E(Y)}$. En particular, el hecho de que la máquina comience funcionando no afecta al límite.

2.3. Superposición de procesos de renovación

Supongamos que una habitación está iluminada con dos luces, cuyas bombillas fallan independientemente una de otra, y en el momento en el que fallan son sustituidas inmediatamente.

Sean N_1 y N_2 los procesos de renovación que describen los sucesos de fallos de bombillas en la primera y segunda luz respectivamente, y supongamos que éstos son procesos independientes con la misma función de distribución F para los tiempos entre llegadas.

Sea $\tilde{N}$ la superposición de estos dos procesos, es decir, $\tilde{N}(t) = N_1(t) + N_2(t)$ es el número total de fallos hasta el instante t. En general, $\tilde{N}$ no es un proceso de renovación. Supongamos, para simplificar, que los tiempos entre llegadas de N_1 y N_2 no son aritméticos.

Teorema 2.3.1. *$\tilde{N}$ es un proceso de renovación si y solo si N_1 y N_2 son procesos de Poisson independientes.*

Demostración. $\Leftarrow$)
Veamos que $\tilde{N}$ es un proceso de Poisson de tasa $\lambda_1 + \lambda_2$ cuando N_1 y N_2 son procesos de Poisson independientes de tasas λ_1 y λ_2, respectivamente. Para ello, comprobaremos que N tiene incrementos independientes y que el número de eventos en cualquier intervalo de longitud t tiene distribución de Poisson con media $(\lambda_1 + \lambda_2)\, t$.
Dados $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_m$ tenemos que

$$\begin{gathered} N_1(t_1), N_1(t_2) - N_1(t_1), ..., N_1(t_m) - N_1(t_{m-1}), \\ N_2(t_1), N_2(t_2) - N_2(t_1), ..., N_2(t_m) - N_2(t_{m-1}) \end{gathered}$$

son variables aleatorias independientes, pues por hipótesis N_1 y N_2 son procesos de Poisson, por lo que tienen incrementos independientes. Por tanto,

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), ..., N(t_m) - N(t_{m-1})$$

son variables aleatorias independientes, es decir, N tiene incrementos independientes.
Además, por ser N_1 un proceso de Poisson de tasa λ_1

$$N_1(t_j) - N_1(t_{j-1}) \sim Poisson(\lambda_1(t_j - t_{j-1}))$$

y, análogamente, como N_2 un proceso de Poisson de tasa λ_2

$$N_2(t_j) - N_2(t_{j-1}) \sim Poisson(\lambda_2(t_j - t_{j-1})).$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} N(t_j) - N(t_{j-1}) &= (N_1(t_j) - N_1(t_{j-1})) + (N_2(t_j) - N_2(t_{j-1})) \\ &\sim Poisson((\lambda_1 + \lambda_2)(t_j - t_{j-1})), \end{aligned}$$

pues la suma de variables aleatorias X e Y independientes con distribución de Poisson de tasas μ_1 y μ_2, respectivamente, da lugar a una variable aleatoria $X+Y$ con distribución de Poisson de tasa $(\mu_1+\mu_2)$. En efecto, como X e Y son independientes, para la función generatriz de momentos de $X+Y$ se verifica

$$\varphi_{X+Y}(t) = E\left(e^{t\,(X+Y)}\right) = E\left(e^{t\,X}\,e^{t\,Y}\right) = E\left(e^{t\,X}\right)\,E\left(e^{t\,Y}\right) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$$

por lo que por ser X e Y variables con distribución de Poisson de tasas μ_1 y μ_2, respectivamente, la función generatriz de momentos será

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) &= \left(\exp\left\{\mu_1(e^t-1)\right\}\right)\,\left(\exp\left\{\mu_2(e^t-1)\right\}\right)\\ &= \left(\exp\left\{(\mu_1+\mu_2)(e^t-1)\right\}\right).\end{aligned}$$

Luego concluimos que $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de tasa $\lambda_1+\lambda_2$.

$\Rightarrow$)

Supongamos que F es continua y que $\tilde{N}$ es un proceso de Poisson, y escribimos $\{X_n(1)\}$, $\{X_n(2)\}$ y $\left\{\tilde{X}_n\right\}$ para los tiempos entre llegadas de N_1, N_2 y $\tilde{N}$, respectivamente. Claramente $\tilde{X}_1 = \text{mín}\{X_1(1), X_1(2)\}$, por lo que la función de distribución $\tilde{F}$ de $\tilde{X}_1$ verifica

$$\begin{aligned}1-\tilde{F}(y) = P(\tilde{X}_1 > y) &= P(\text{mín}\{X_1(1), X_1(2)\} > y) = P(\{X_1(1) > y\} \cap \{X_1(2) > y\})\\ &= P(X_1(1) > y)\,P(X_1(2) > y) = (1-F(y))\,(1-F(y)) = (1-F(y))^2.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Sean $E_1(t)$, $E_2(t)$ y $\tilde{E}(t)$ los tiempos de vida restantes de N_1, N_2 y $\tilde{N}$ respectivamente, en el tiempo t. Claramente, $\tilde{E}(t) = \text{mín}\,\{E_1(t), E_2(t)\}$, por lo que

$$\begin{aligned}P(\tilde{E}(t) > y) &= P(\text{mín}\,\{E_1(t), E_2(t)\} > y) = P(\{E_1(t) > y\} \cap \{E_2(t) > y\})\\ &= P(E_1(t) > y)\,P(E_2(t) > y) = P(E_1(t) > y)^2.\end{aligned}$$

Veamos que

$$\frac{1}{\tilde{\mu}}\int_y^\infty (1-\tilde{F}(x))\,dx = \frac{1}{\mu^2}\left(\int_y^\infty (1-F(x))\,dx\right)^2 \tag{2.6}$$

donde $\tilde{\mu} = E(\tilde{X}_1)$ y $\mu = E(X_1(1))$.

- Si tenemos en cuenta el Teorema 1.5.4 y la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (1-F_Z(x))\,dx &= \int_0^\infty P(Z > x)\,dx = \int_0^\infty \int_x^\infty f_Z(z)\,dz\,dx = \int_0^\infty \int_0^z f_Z(z)\,dx\,dz\\ &= \int_0^\infty f_Z(z)\,z\,dz = \int_{-\infty}^\infty f_Z(z)\,z\,dz = E(Z),\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} P(\tilde{E}(t) > y) &= 1 - \frac{1}{\tilde{\mu}}\int_0^y (1-\tilde{F}(x))\,dx = \frac{1}{\tilde{\mu}}\,E(\tilde{X}_1) - \frac{1}{\tilde{\mu}}\int_0^y (1-\tilde{F}(x))\,dx\\ &\overset{(\bigstar)}{=} \frac{1}{\tilde{\mu}}\int_0^\infty (1-\tilde{F}(x))\,dx - \frac{1}{\tilde{\mu}}\int_0^y (1-\tilde{F}(x))\,dx = \frac{1}{\tilde{\mu}}\int_y^\infty (1-\tilde{F}(x))\,dx.\end{aligned}$$

Notemos que la igualdad $(\bigstar)$ la hemos obtenido de forma análoga a (2.4).

- Realizando un procedimiento análogo al visto en el punto anterior llegamos a la igualdad
$$\lim_{t\to\infty} P(E_1(t) > y) = \frac{1}{\mu}\int_y^{\infty} (1 - F(x))\, dx.$$

Tomando $t \to \infty$ en la expresión $P(\tilde{E}(t) > y) = P(E_1(t) > y)^2$ y con las consideraciones anteriores, llegamos a la expresión vista

$$\frac{1}{\tilde{\mu}}\int_y^{\infty} (1 - \tilde{F}(x))\, dx = \frac{1}{\mu^2}\left(\int_y^{\infty} (1 - F(x))\, dx\right)^2.$$

A continuación, derivando a ambos lados de la igualdad

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\tilde{\mu}}\int_y^{\infty} (1 - \tilde{F}(x))\, dx\right) = \frac{1}{\tilde{\mu}}\frac{d}{dy}\left(\int_y^{\infty} (1 - \tilde{F}(x))\, dx\right) = \frac{1}{\tilde{\mu}}(1 - \tilde{F}(y))$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\mu^2}\left(\int_y^{\infty} (1 - F(x))\, dx\right)^2\right] &= \frac{1}{\mu^2}\frac{d}{dy}\left[\left(\int_y^{\infty} (1 - F(x))\, dx\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\mu^2}\, 2\left(\int_y^{\infty} (1 - F(x))\, dx\right)\frac{d}{dy}\left(\int_y^{\infty} (1 - F(x))\, dx\right) \\
&= \frac{2}{\mu^2}\left(\int_y^{\infty} (1 - F(x))\, dx\right)(1 - F(y)).
\end{aligned}$$

Como consecuencia de (2.6) obtenemos

$$\frac{1}{\tilde{\mu}}(1 - \tilde{F}(y)) = \frac{2}{\mu^2}(1 - F(y))\int_y^{\infty} (1 - F(x))\, dx$$

y utilizando (2.5) obtenemos

$$\frac{1}{\tilde{\mu}}(1 - F(y))^2 = \frac{1}{\tilde{\mu}}(1 - \tilde{F}(y)) = \frac{2}{\mu^2}(1 - F(y))\int_y^{\infty} (1 - F(x))\, dx.$$

Por tanto,

$$1 - F(y) = \frac{2\,\tilde{\mu}}{\mu^2}\int_y^{\infty} (1 - F(x))\, dx$$

que es una ecuación integral con solución

$$F(y) = 1 - \exp\left(\frac{-2\,\tilde{\mu}}{\mu^2}\, y\right).$$

Así, concluimos la demostración, pues hemos obtenido que la función de distribución F común a N_1 y N_2, es la correspondiente a una distribución exponencial $F(y) = 1 - \exp(-\lambda y)$ con $\lambda = 2\tilde{\mu}/\mu^2$, por lo que N_1 y N_2 son procesos de Poisson. $\square$

2.4. Proceso de renovación retardado

En ocasiones es apropiado permitir que el primer tiempo entre llegadas X_1 tenga una distribución diferente a la distribución común de X_2, X_3, ...
Un proceso de renovación retardado es como un proceso de renovación ordinario, excepto porque el instante de la primera llegada puede tener una distribución diferente al resto de tiempos entre llegadas.

Definición 2.4.1. Sean X_1, X_2,... variables aleatorias positivas e independientes tales que X_2, X_3,... tienen la misma distribución. Sean

$$T_0 = 0\,, \quad T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, \quad N^d(t) = \max\{n : T_n \leq t\}\,.$$

Entonces N^d se denomina proceso de renovación retardado (o modificado).

La teoría de procesos de renovación retardados es muy similar a la de procesos de renovación ordinarios. Proporcionaremos algunas de sus propiedades.

Lema 2.4.2. *La función de renovación retardada, $m^d(t) = E(N^d(t))$, satisface la siguiente ecuación de renovación*

$$m^d(t) = F^d(t) + \int_0^t m(t-x)\, dF^d(x) \tag{2.7}$$

donde F^d es la función de distribución de X_1 y m es la función de renovación de un proceso de renovación ordinario N cuyos tiempos entre llegadas son X_2, X_3,...

Demostración. Se tiene que

$$m^d(t) = E(N^d(t)) = E\left(E\left(N^d(t)|X_1\right)\right).$$

Por una parte,

$$E(N^d(t)|X_1 = x) = 0 \quad \text{si } t < x,$$

pues la primera llegada ocurre después del instante t.

Por otra parte,

$$E(N^d(t)|X_1 = x) = 1 + E(N(t-x)) \quad \text{si } t \geq x$$

pues el proceso de llegadas, empezando en el instante de la primera llegada X_1, es un proceso de renovación ordinario N, donde los tiempos entre llegadas (X_2, X_3,...) tienen igual distribución.

Así, teniendo en cuenta ambos casos obtenemos

$$\begin{aligned}
m^d(t) &= E\left(E\left(N^d(t)|X_1\right)\right) = \int_0^\infty E(N^d(t)|X_1 = x)\, dF^d(x) \\
&= \int_0^t E(N^d(t)|X_1 = x)\, dF^d(x) + \int_t^\infty E(N^d(t)|X_1 = x)\, dF^d(x) \\
&= \int_0^t (1 + E(N(t-x)))\; dF^d(x) = \int_0^t (1 + m(t-x))\; dF^d(x) \\
&= \int_0^t dF^d(x) + \int_0^t m(t-x)\, dF^d(x) = F^d(t) + \int_0^t m(t-x)\, dF^d(x).
\end{aligned}$$

□

Los procesos de renovación retardados verifican un resultado análogo al Lema 1.3.10 estudiado para los procesos de renovación ordinarios, que vemos a continuación.

Lema 2.4.3. *La función de renovación de los procesos de renovación retardados verifican*

$$m^d(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^d(t) \tag{2.8}$$

donde F_k^d es la función de distribución de $T_k = X_1 + ... + X_k$.

Demostración. Definimos las variables indicadoras

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{si } T_k \leq t \\ 0 & \text{si } T_k > t. \end{cases}$$

Entonces $N^d(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}
m^d(t) = E(N^d(t)) = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} I_k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} E(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (0\, P(I_k = 0) + 1\, P(I_k = 1)) \\
= \sum_{k=1}^{\infty} P(I_k = 1) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(T_k \leq t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^d(t).
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.4.4. *La función de renovación m^d verifica*

$$m^d(t) = F^d(t) + \int_0^t m^d(t-x)\, dF(x) \tag{2.9}$$

donde F es la función de distribución común de X_2, X_3,...

Demostración. Partiendo de (2.8) y teniendo en cuenta la propiedad distributiva de las convoluciones (véase la Proposición A.0.2 del Apéndice) llegamos a la igualdad buscada

$$\begin{aligned} m^d(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k^d(t) = F_1^d(t) + \sum_{k=2}^{\infty} F_k^d(t) = F^d(t) + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-1}^d * F)(t) \quad (\bigstar) \\ &= F^d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (F_k^d * F)(t) = F^d(t) + \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k^d \right) * F \right)(t) \\ &= F^d(t) + (m^d * F)(t) = F^d(t) + \int_0^t m^d(t-x)\, dF(x). \end{aligned}$$

Notemos que en la igualdad ($\bigstar$) hemos considerado la relación $F_k^d = F_{k-1}^d * F$, que puede obtenerse de forma análoga al Lema 1.3.7.

$\square$

En un proceso de renovación retardado, como hemos visto, solo ha cambiado la distribución de probabilidad del tiempo de la primera llegada. Por tanto, como cabe esperar, el comportamiento asintótico de este tipo de procesos es igual al comportamiento asintótico del correspondiente proceso de renovación ordinario.

Con nuestro conocimiento de las propiedades de m, podemos ver que m^d verifica los teoremas de renovación. Denotemos $\mu = E(X_2)$.

Teorema 2.4.5. *Se verifica que*

(a) $\frac{1}{t}\, m^d(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu}$.

(b) Si X_2 no es aritmética

$$m^d(t+h) - m^d(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{h}{\mu} \quad \textit{para cualquier } h. \tag{2.10}$$

Si X_2 es aritmético con periodo λ entonces (2.10) *es cierto cuando h es un múltiplo de λ.*

Demostración. (a) La demostración es análoga a la realizada en el Teorema elemental de renovación (Teorema 1.4.3).

(b) Se prueba de forma análoga al Teorema de renovación (Teorema 1.4.6).

$\square$

Por último, estudiemos brevemente el caso particular en que el proceso de renovación retardado es estacionario.

Proposición 2.4.6. *El proceso de renovación retardado estacionario de tasa $\mu = E(X)$ verifica*

$$m^d(t) = E(N^d(t)) = \frac{t}{\mu}, \quad \textit{para } t \geq 0. \tag{2.11}$$

Demostración. En primer lugar, veamos que $m^d(t) = t\, m^d(1)$ para todo $t \geq 0$, después veremos que $m^d(1) = 1/\mu$.

Para cualquier entero $n \geq 1$,

$$N^d(n) = \sum_{i=1}^{n}(N^d(i) - N^d(i-1)).$$

Luego tomando esperanza

$$\begin{aligned} m^d(n) = E(N^d(n)) = E\left(\sum_{i=1}^{n}(N^d(i) - N^d(i-1))\right) &= \sum_{i=1}^{n} E(N^d(i) - N^d(i-1)) \\ = \sum_{i=1}^{n} E(N^d(i)) - E(N^d(i-1)) &= \sum_{i=1}^{n} m^d(i) - m^d(i-1) \\ =^{(\bigstar)} \sum_{i=1}^{n} m^d(i-(i-1)) &= \sum_{i=1}^{n} m^d(1) = n\, m^d(1). \end{aligned}$$

En ($\bigstar$) se ha usado que el proceso tiene incrementos estacionarios.

Con un argumento similar obtenemos $m^d(1) = n\, m^d(1/n)$, por lo que $m^d(1/n) = \frac{1}{n}\, m^d(1)$. Así, continuando con esta idea, vemos que para cualquier número racional $r = n/m$, $m^d(r) = r\, m^d(1)$.

Para cualquier $t > 0$ irracional, elegimos una serie decreciente de racionales $r_k \downarrow t$. Por la continuidad por la derecha y por las propiedades no decrecientes de los procesos de conteos, $N^d(r_k) \downarrow N^d(t)$.
Por tanto, por el Teorema de la convergencia dominada (véase el Teorema A.1.3 del Apéndice), como $N^d(r_k) \downarrow N^d(t)$ y $0 \leq N^d(r_k) \leq N^d(r_1)$, $k \geq 1$, entonces $m^d(r_k) \downarrow m^d(t)$ $(E(N^d(t)) = \lim E(N^d(r_k)))$.
Así, $m^d(t) = t\, m^d(1)$, pues acabamos de ver que $m^d(r_k) \downarrow m^d(t)$ y habíamos visto que por ser r_k racionales tales que $r_k \downarrow t$ se cumple $m^d(r_k) = r_k\, m^d(1) \downarrow t\, m^d(1)$.

Por el Teorema elemental de renovación, Teorema 1.4.3, $\frac{m^d(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$, pero aquí $m^d(t) = t\, m^d(1)$ y concluimos que $m^d(1) = \frac{1}{\mu}$. □

Finalmente, el estudio del caso estacionario nos conduce a un importante resultado sobre la función de distribución F^d, que vemos en este último teorema. Este determina la condición necesaria y suficiente para que un proceso de renovación retardado presente incrementos estacionarios.

Teorema 2.4.7. *El proceso N^d tiene incrementos estacionarios si y solo si*

$$F^d(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y (1 - F(x))\, dx. \tag{2.12}$$

Si F^d viene dado por (2.12), entonces N^d se denomina proceso de renovación estacionario (o en equilibrio). Deberíamos reconocer (2.12) como la distribución asintótica del Teorema 1.5.4 del tiempo de vida restante del proceso de renovación ordinario N. Veremos que en este caso $m^d(t) = t/\mu$ para todo $t \geq 0$.

Demostración. $\Rightarrow$)
Supongamos que N^d tiene incrementos estacionarios, entonces por la Proposición 2.4.6 sabemos que $m^d(t) = t/\mu$. Partiendo de la expresión (2.9) tenemos, despejando $F^d(t)$

$$\begin{aligned}
F^d(t) &= \frac{1}{\mu}\,t - \int_0^t \frac{1}{\mu}\,(t-x)\,dF(x) = \frac{1}{\mu}\,t - \frac{1}{\mu}\,t\int_0^t F'(x)\,dx + \frac{1}{\mu}\int_0^t x\,F'(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\mu}\,t - \frac{1}{\mu}\,t\int_0^t f(x)\,dx + \frac{1}{\mu}\int_0^t x\,f(x)\,dx = \frac{1}{\mu}\int_0^t dx - \frac{1}{\mu}\,t\,F(t) + \frac{1}{\mu}\int_0^t x\,f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^t dx - \frac{1}{\mu}\,F(t)\int_0^t dx + \frac{1}{\mu}\int_0^t x\,f(x)\,dx,
\end{aligned}$$

y lo que buscamos es

$$\frac{1}{\mu}\int_0^t (1-F(x))\,dx = \int_0^t \frac{1}{\mu}\,dx - \int_0^t \frac{1}{\mu}\,F(x)\,dx.$$

Así, lo que tenemos que probar es

$$-\frac{1}{\mu}\,F(t)\int_0^t dx + \frac{1}{\mu}\int_0^t x\,f(x)\,dx = -\int_0^t \frac{1}{\mu}\,F(x)\,dx$$

es decir,

$$\int_0^t (F(t) - x\,f(x))\,dx = \int_0^t F(x)\,dx.$$

Veamos esta igualdad

$$\int_0^t (F(t) - x\,f(x))\,dx = \int_0^t F(t)\,dx - \int_0^t x\,f(x)\,dx = t\,F(t) - \int_0^t x\,f(x)\,dx$$

e integrando por partes obtenemos

$$= t\,F(t) - t\,F(t) + \int_0^t F(x)\,dx = \int_0^t F(x)\,dx.$$

Por tanto, podemos concluir que $F^d(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t (1-F(x))\,dx$.

$\Leftarrow$)
Supongamos que F^d viene dado por (2.12)

$$F^d(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y (1-F(x))\,dx.$$

Notemos que esta es una distribución continua con función de densidad $f^d(t) = \frac{1}{\mu}(1 - F(t))$. A partir de la ecuación de renovación (2.7)

$$m^d(t) = F^d(t) + \int_0^t m(t-x)\, dF^d(x) = F^d(t) + (m * F^d)(t)$$

y recordando las propiedades de las convoluciones (véase la Proposición A.0.2 del Apéndice), el Lema 1.3.10 y el Lema 1.3.7, se sigue que $(m^d)'$ verifica

$$\begin{aligned}
(m^d)' &= (F^d + m * F^d)' = (F^d)' + (m * F^d)' = (F^d)' + m * (F^d)' = (F^d)' + (F^d)' * m \\
&= \frac{1}{\mu}(1-F) + \frac{1}{\mu}(1-F) * \sum_{n=1}^{\infty} F_n = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} F + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu}(1-F) * F_n \right) \\
&= \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} F + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu} * F_n - \frac{1}{\mu} F * F_n \right) = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} F + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu} F_n - \frac{1}{\mu} F_{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} F + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} F_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} F_{n+1} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} F + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} F_n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\mu} F_n \\
&= \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} F + \frac{1}{\mu} F_1 = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} F + \frac{1}{\mu} F = \frac{1}{\mu}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$m^d(t) = t/\mu. \tag{2.13}$$

Ahora, N^d tiene incrementos estacionarios si y solo si la distribución de $E^d(t)$, el tiempo de vida restante de N^d en t, no depende de t (en este caso solo utilizaremos la implicación hacia la izquierda). Pero

$$\begin{aligned}
P(E^d(t) > y) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(E^d(t) > y, N^d(t) = k) \\
&= P(E^d(t) > y, N^d(t) = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(E^d(t) > y, N^d(t) = k) \\
&= P(E^d(t) > y, N^d(t) = 0) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(E^d(t) > y, N^d(t) = k | T_k = x)\, dF_k^d(x) \\
&= 1 - F^d(t+y) + \int_0^t (1 - F(t+y-x))\, d\left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k^d(x) \right)
\end{aligned}$$

y utilizando (2.8) obtenemos

$$= 1 - F^d(t+y) + \int_0^t (1 - F(t+y-x))\, dm^d(x).$$

Veamos con más detalle las igualdades antepenúltima y penúltima.

- Vemos que $P(E^d(t) > y, N^d(t) = k) = \int_0^t P(E^d(t) > y, N^d(t) = k | T_k = x)\, dF_k^d(x)$.

$$\begin{aligned}
P(E^d(t) > y, N^d(t) = k) &= E(P(E^d(t) > y, N^d(t) = k | T_k)) \\
&\text{Considerando que la } k\text{-ésima llegada no se puede producir} \\
&\text{en un instante negativo :} \\
&= \int_0^\infty P(E^d(t) > y, N^d(t) = k | T_k = x)\, dF_k^d(x) \\
&\text{Además, teniendo en cuenta que } N^d(t) = \max\{n : T_n \leq t\} \\
&\text{los valores de } T_n \text{ buscados (denotado como } x\text{) son } [0,t] : \\
&= \int_0^t P(E^d(t) > y, N^d(t) = k | T_k = x)\, dF_k^d(x).
\end{aligned}$$

- En el caso de la penúltima igualdad tenemos que analizar dos puntos.

  (i) Veamos que $P(E^d(t) > y, N^d(t) = 0) = 1 - F^d(t+y)$.

  Por un lado,

$$\begin{aligned}
T_{N(t)+1} > t + y &\Leftrightarrow \text{La } (N(t)+1)\text{-ésima llegada se produce después de } (t+y) \\
&\Leftrightarrow \text{En } (t, t+y] \text{ no se produce ninguna llegada.}
\end{aligned}$$

  Y por otro lado

$$N^d(t) = 0 \Leftrightarrow \text{En } [0,t] \text{ no se produce ninguna llegada.}$$

  Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left\{T_{N(t)+1} > t+y\right\} \bigcap \left\{N^d(t) = 0\right\} &= \text{No se produce ninguna llegada en } [0, t+y] \\
&= \text{La } 1^{\text{a}} \text{ llegada se produce después de } (t+y) \\
&= \{X_1 > t+y\}.
\end{aligned}$$

  Teniendo esto en cuenta, obtenemos

$$\begin{aligned}
P(E^d(t) > y, N^d(t) = 0) &= P(T_{N(t)+1} - t > y, N^d(t) = 0) \\
&= P(T_{N(t)+1} > t+y, N^d(t) = 0) = P(X_1 > t+y) \\
&= 1 - F^d(t+y).
\end{aligned}$$

  (ii) Veamos la igualdad

$$\sum_{k=1}^\infty \int_0^t P(E^d(t) > y, N^d(t) = k | T_k = x)\, dF_k^d(x) = \int_0^t (1 - F(t+y-x))\, d\left(\sum_{k=1}^\infty F_k^d(x)\right).$$

  Notemos que

$$\begin{aligned}
&E^d(t) > y \Leftrightarrow T_{N(t)+1} > t+y \Leftrightarrow \text{En } (t, t+y] \text{ no se produce ninguna llegada.} \\
&N^d(t) = k \Leftrightarrow \text{En } [0,t] \text{ se producen } k \text{ llegadas.}
\end{aligned}$$

Así, tenemos

$$\left\{E^d(t) > y\right\} \bigcap \left\{N^d(t) = k\right\} = \text{La } (k+1)\text{-ésima llegada se produce después de } (t+y)$$
$$= \{T_{k+1} > t + y\}\,.$$

Considerando esta última expresión obtenemos la igualdad buscada

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(E^d(t) > y, N^d(t) = k | T_k = x)\, dF_k^d(x) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(T_{k+1} > t + y | T_k = x)\, dF_k^d(x) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(T_{k+1} - T_k > (t+y) - x)\, dF_k^d(x) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(X_{k+1} > t + y - x)\, dF_k^d(x) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (1 - F(t + y - x))\, dF_k^d(x) \\
&\qquad = \int_0^t (1 - F(t + y - x))\, d\left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k^d(x)\right).
\end{aligned}$$

De esta forma, queda probado que $P(E^d(t) > y) = 1 - F^d(t+y) + \int_0^t (1 - F(t+y-x))\, dm^d(x)$.

Ahora, sustituyendo (2.12) y (2.13) en esta ecuación obtenemos el resultado, pues sabíamos que N^d tiene incrementos estacionarios si y solo si la distribución de $E^d(t)$ no depende de t y se verifica esto último

$$\begin{aligned}
P(E^d(t) > y) &= 1 - F^d(t + y) + \int_0^t (1 - F(t + y - x))\, dm^d(x) \\
&= 1 - F^d(t + y) + \int_0^t (1 - F(t + y - x))\, d\left(\frac{x}{\mu}\right) \\
&= 1 - F^d(t + y) + \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F(t + y - x))\, dx \\
&= 1 - \frac{1}{\mu} \int_0^{t+y} (1 - F(x))\, dx + \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F(t + y - x))\, dx \\
&= \frac{1}{\mu} \int_{t+y}^{\infty} (1 - F(x))\, dx + \frac{1}{\mu} \int_y^{t+y} (1 - F(x))\, dx \quad (\bigstar) \\
&= \frac{1}{\mu} \int_y^{\infty} (1 - F(x))
\end{aligned}$$

donde en la igualdad ($\bigstar$) hemos tenido en cuenta los dos puntos siguientes.

- Veamos que

$$1-\frac{1}{\mu}\int_0^{t+y}(1-F(x))\,dx = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}(1-F(x))\,dx-\frac{1}{\mu}\int_0^{t+y}(1-F(x))\,dx = \frac{1}{\mu}\int_{t+y}^{\infty}(1-F(x))\,dx.$$

Para demostrar esto basta probar que $1 = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}(1-F(x))\,dx$, es decir, $\mu = \int_0^{\infty}(1-F(x))\,dx$. Sea $k \geq 2$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}(1-F(x))\,dx &= \int_0^{\infty}P(X_k > x)\,dx = \int_0^{\infty}\int_x^{\infty}f(u)\,du\,dx = \int_0^{\infty}\int_0^{u}f(u)\,dx\,du \\ &= \int_0^{\infty}f(u)\int_0^{u}dx\,du = \int_0^{\infty}u\,f(u)\,du = E(X_k) = \mu.\end{aligned}$$

- Haciendo el cambio de variable $x = t+y-x$ tenemos la igualdad

$$\frac{1}{\mu}\int_0^{t}(1-F(t+y-x))\,dx = \frac{1}{\mu}\int_{t+y}^{y}(1-F(x))\,(-dx) = \frac{1}{\mu}\int_y^{t+y}(1-F(x))\,dx.$$

$\square$

Apéndice A

Resultados auxiliares

En este apéndice recogemos las definiciones y principales resultados auxiliares necesarios en el desarrollo de la teoría de procesos de renovación tratada en esta memoria.

Definición A.0.1. (Ver [4]). Dadas $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define la convolución de g y h, denotada $g * h$, como

$$(g * h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x - y)\, dh(y).$$

Proposición A.0.2. *(Ver [8]). Propiedades de las convoluciones.*

(i) *Conmutativa:* $f * g = g * f$.

(ii) *Asociativa:* $f * (g * h) = (f * g) * h$.

(iii) *Distributiva:* $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.

(iv) *Regla de derivación:* $D(f * g) = Df * g = f * Dg$, *donde* Df *denota la derivada de* f.

Teorema A.0.3. *(Ver [4]). Si* X *e* Y *son variables aleatorias con función de densidad conjunta* f *entonces* $X + Y$ *tiene función de densidad*

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)\, dx.$$

Proposición A.0.4. *(Ver [8]). Una variable* X *tiene distribución geométrica con parámetro* p*, denotado* $X \sim Ge(p)$*, si*

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}\, p \quad \textit{para } x = 1, 2, ...$$

Si $X \sim Ge(p)$*, entonces* $E(X) = 1/p$.

Definición A.0.5. (Ver [4]). La transformada de Laplace-Stieltjes de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define como

$$g^*(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta\, x}\, dg(x) \quad \text{donde } \theta \in \mathbb{C}$$

cuando esta integral existe.

Proposición A.0.6. *Convolución. (Ver [4]).*
Si $k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)\, dh(y)$*, entonces* $k^*(\theta) = g^*(\theta)\, h^*(\theta)$.

Lema A.0.7. *(Ver [4]). Sea* X *una variable aleatoria no negativa con función de distribución* F*, entonces*

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\, dx.$$

A.1. Teoremas límite

Teorema A.1.1. *Ley fuerte de los grandes números. (Ver [11]).*
Sean X_1,...,X_n *variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con* $E(X_i) = \mu < \infty$ *para todo* i*, y definimos* $S_n = X_1 + ... + X_n$*. Se verifica*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu.$$

Teorema A.1.2. *Teorema del límite central. (Ver [11]).*
Sean X_1,...,X_n *variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con* $E(X_i) = \mu < \infty$ *y* $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$*. Entonces se verifica que* $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}}$ *converge en distribución a una variable* Z*, con distribución* $N(0,1)$ *y lo denotamos*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z, \quad \text{con } Z \sim N(0,1).$$

Teorema A.1.3. *Teorema de la convergencia dominada. (Ver [10]).*
Sea $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones integrables, la cual converge puntualmente a una función medible* f*. Si existe una función* g *integrable cumpliendo que* $|f_n| \leq g$ *para todo* n*, entonces la función* f *es integrable con* $\int f = \lim \int f_n$.

Teorema A.1.4. *Teorema de la convergencia monótona. (Ver [10]).*
Sea $\{f_n\}$ *una sucesión monótona (creciente o decreciente) de funciones medibles. Si alguna de las funciones de esta sucesión es integrable, entonces las dos expresiones,* $\lim \int f_n$ *y* $\int \lim f_n$*, existen y*

$$\lim \int f_n = \int \lim f_n.$$

Bibliografía

[1] K. Sigman. Columbia University. Apuntes teoría de renovación. http://www.columbia.edu/~ks20/stochastic-I/stochastic-I-RT-II.pdf, 2009.

[2] W. A. Rolke. Department of Mathematical Sciences University of Puerto Rico. Apuntes teoría de renovación. https://academic.uprm.edu/wrolke/esma6789/renew.html.

[3] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications, Vol. 2, Second edition.* Wiley, New York, 1971.

[4] G. Grimmett and D. Stirzaker. *Probability and Random Processes, Third edition.* Oxford University Press, 2001.

[5] P. Parag. Indian Institute of Science, Department of Electrical Communication Engineering. Apuntes procesos de renovación. https://ece.iisc.ac.in/~parimal/2020/spqt/lecture-07.pdf, 2020.

[6] S.M. Ross. *Stochastic Processes.* Wiley por John Wiley and Sons, Inc., 1996.

[7] R. Serfozo. *Basics of Applied Stochastic Processes.* Probability and Its Applications. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[8] K. Siegrist. UAB Huntsville Regional Medical campus. Apuntes procesos de renovación. https://www.randomservices.org/random/renewal/index.html.

[9] B. D'Auria. Universidad Carlos III de Madrid. Apuntes teorema principal de renovación. http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/bdauria/0910/Stoc_Proc_PhD/Notes/2010-03-11Th_Comments.pdf, March 11, 2010.

[10] F. Montalvo Durán. Universidad de Extremadura. Apuntes análisis de varias variables. http://matematicas.unex.es/~montalvo/Analisis_Varias_Variables/apuntes/cap24.pdf, 2003.

[11] M. González Velasco and J. Martín Jiménez. Universidad de Extremadura. Apuntes de probabilidad. http://matematicas.unex.es/~mvelasco/probabilidad_y_procesos_estocasticos/Teoria.pdf, 2011.

[12] National Chung Hsing University. Apuntes procesos de renovación. http://www.ioe.nchu.edu.tw/Pic/CourseItem/4342_ross%20ch.3%20renewal%20process%20%20II.pdf.

[13] S. Syed. University of Waterloo. Apuntes procesos de renovación. https://www.stat.ubc.ca/~saif.syed/papers/AMATH_777_paper.pdf, April 25, 2014.

[14] D. Zamarripa. Código. https://rpubs.com/Diego_Zamarripa/721642, 2021.