UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

TESIS DOCTORAL

Estudio de la Estructura Cognitiva de los alumnos de 9.º y 12.º cursos sobre el concepto de Probabilidad: la contribución de las Teorías de los Conceptos Nucleares y de los Conceptos Threshold

CESÁRIO PAULO LAMEIRAS DE ALMEIDA

DEPARTAMENTO DE

DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES Y DE LAS MATEMÁTICAS

2014

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

TESIS DOCTORAL

Estudio de la Estructura Cognitiva de los alumnos de 9.º y 12.º cursos sobre el concepto de Probabilidad: la contribución de las Teorías de los Conceptos Nucleares y de los Conceptos Threshold

Estudo da Estrutura Cognitiva dos alunos dos 9.º e 12.º anos de escolaridade sobre o conceito de Probabilidade: o contributo das Teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold

CESÁRIO PAULO LAMEIRAS DE ALMEIDA

DEPARTAMENTO DE
DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES Y DE LAS MATEMÁTICAS

Conformidad de los Directores

Fdo. Dr. D. Ricardo Luengo González **Fdo. Dr. D. Luis M. Casas García**

2014

AGRADECIMENTOS

Os meus primeiros agradecimentos vão dirigidos, indubitavelmente, para os meus Diretores de Tese os Professores Doutores Luís Casas e Ricardo Luengo, pela amizade e disponibilidade manifestadas, pelas críticas pertinentes e, essencialmente, pelas aprendizagens que me proporcionaram ao longo da realização desta investigação.

À minha família, e em particular à minha mulher Guida e aos meus filhos André e Afonso, os quais sempre me apoiaram incondicionalmente e que sempre desculparam o tempo que lhes tirei para estarmos em família.

Ao Professor Doutor Luís Murta pela amizade, pelo incentivo e constante motivação que ao longo deste trabalho sempre demonstrou.

Aos meus colegas do Grupo de Investigação CIBERDIDACT, da Universidad de Extremadura, e em especial ao investigador Vitor Godinho, sem o qual esta pesquisa não passaria de uma intenção.

Aos alunos, professores e Diretores dos estabelecimentos de ensino que amavelmente colaboraram e participaram nesta pesquisa.

A todos os meus Professores…o meu enorme agradecimento.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS

ÍNDICE GERAL..... i

ÍNDICE DE FIGURAS..... vii

ÍNDICE DE TABELAS..... xiii

GLOSSÁRIO..... xix

RESUMO..... xxi

RESUMEN..... xxiii

ABSTRACT..... xxv

RESUMEN AMPLIADO EN CASTELLANO..... xxvii

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO E OBJETIVOS DE INVESTIGAÇÃO..... 1

1.1. INTRODUÇÃO..... 3

1.2. OS ANTECEDENTES E A PERTINÊNCIA DA TEMÁTICA DO ESTUDO..... 8

1.3. OBJETIVOS E PERGUNTAS DE INVESTIGAÇÃO..... 12

1.4. DESCRIÇÃO SUMÁRIA DA INVESTIGAÇÃO..... 15

CAPÍTULO 2 – MARCO TEÓRICO..... 19

2.1. A TEORIA DOS CONCEITOS NUCLEARES..... 21

2.1.1. A Organização Geográfica do Conhecimento..... 22

2.1.2. Os Conceitos Nucleares..... 24

2.1.3. Os Caminhos de Custo Mínimo..... 25

2.1.4. As Redes Associativas *Pathfinder*..... 26

2.1.4.1. Os fundamentos básicos das Redes Associativas *Pathfinder*: O algoritmo *Pathfinder*..... 28

2.1.4.2. Exemplo de aplicação do algoritmo *Pathfinder*..... 34

2.1.4.3. Indicadores quantitativos das redes PFNET..... 36

2.1.4.4. Exemplo do cálculo dos indicadores quantitativos de uma PFNET..... 41

2.1.4.5. A Rede Média PFNET..... 42

2.2. TRABALHOS DE DIVULGAÇÃO E DE APLICAÇÃO DAS REDES ASSOCIATIVAS *PATHFINDER* E DA TEORIA DOS CONCEITOS NUCLEARES..... 43

2.2.1. Trabalhos de investigação, divulgação e aplicação da metodologia das Redes Associativas *Pathfinder* 43

2.2.2. Trabalhos de investigação, divulgação e aplicação da Teoria dos Conceitos Nucleares .. 53

2.2.3. Síntese e conclusões 60

2.3. DIFERENTES FORMAS DE CONHECIMENTO. O CONHECIMENTO PROBLEMÁTICO E OS CONCEITOS *THRESHOLD* 61

2.3.1. O Conhecimento Declarativo, o Conhecimento Procedimental e o Conhecimento Estrutural 61

2.3.2. Diferentes formas do Conhecimento Problemático 63

2.3.3. Os Conceitos *Threshold* 67

2.3.3.1. As investigações iniciais sobre os Conceitos *Threshold* 69

2.3.3.2. Estudos sobre os Conceitos *Threshold* na Matemática 73

2.3.3.3. Outras áreas de estudo sobre Conceitos *Threshold* 76

2.3.4. Síntese e conclusões 81

CAPÍTULO 3 – O CONCEITO DE PROBABILIDADE 83

3.1. INTRODUÇÃO 85

3.2. O CURRICULO DA MATEMÁTICA EM PORTUGAL NO PÓS II GUERRA MUNDIAL 91

3.2.1. O Ensino da Matemática em Portugal nos anos 50 93

3.2.2. Os anos 60 e o movimento da "Matemática Moderna" em Portugal 95

3.2.3. O Ensino da Matemática em Portugal nos anos 90 98

3.2.4. Os atuais Programas de Matemática em Portugal 100

3.2.5. Breve referência à formação de professores dos 1.º e 2.º ciclos em Portugal 112

3.3. AS DIFERENTES CONCEÇÕES DE PROBABILIDADE 114

3.3.1. Conceito Clássico (ou de Laplace) de Probabilidade 115

3.3.2. Conceito Geométrico de Probabilidade 119

3.3.3. Conceito Frequencista de Probabilidade 122

3.3.4. Conceito Subjetivo de Probabilidade 128

3.3.5. Conceito Axiomático (ou formal) de Probabilidade 134

3.4. OS DIFERENTES CONCEITOS E O ENSINO-APRENDIZAGEM DAS PROBABILIDADES 137

3.5. OS ELEMENTOS DO SIGNIFICADO DE PROBABILIDADE E DA LITERACIA PROBABILÍSTICA 139

3.6. INVESTIGAÇÕES SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE 144

3.6.1. O período Piagetiano 145

3.6.2. O período pós-Piagetiano..... 146

3.6.3. O período contemporâneo..... 148

3.6.3.1. Trabalhos sobre o currículo das Probabilidades..... 150

3.6.3.2. Os recursos didáticos e a Probabilidade..... 155

3.6.3.3. As Probabilidades na formação de professores..... 161

3.6.3.4. Aprendizagem dos alunos sobre as Probabilidades..... 168

3.6.4. Síntese e conclusões..... 175

CAPÍTULO 4 - ASPETOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO..... 177

4.1. JUSTIFICAÇÃO DA METODOLOGIA..... 179

4.2. A AMOSTRA..... 182

4.2.1. O 1.º Momento de recolha de dados..... 182

4.2.2. O 2.º Momento de recolha de dados..... 183

4.3. AS DIFERENTES FASES DA INVESTIGAÇÃO..... 184

4.3.1. Definição dos termos, conceitos, noções e exemplos utilizados na elaboração das Redes Associativas *Pathfinder*..... 185

4.3.1.1. O questionário aos docentes para identificar os termos/conceitos/noções/exemplos..... 186

4.3.1.2. Categorização dos termos/conceitos/noções/exemplos com base nos artigos de referência sobre os elementos do significado e a literacia probabilística..... 188

4.3.1.3. As referências aos termos/conceitos/noções/exemplos, nos manuais escolares..... 192

4.3.1.4. As referências nos programas de Matemática do 9.º ano e do 12.º ano de escolaridade, em vigor em 2012/13, dos termos/conceitos/noções/exemplos selecionados..... 197

4.3.2. Inquirição, nos 1.º e 2.º Momentos, dos estudantes do 9.º e do 12.º ano de escolaridade..... 199

4.3.2.1. O programa *GOLUCA*..... 200

4.3.2.2. As técnicas estatísticas utilizadas para analisar os indicadores quantitativos das Redes Associativas *Pathfinder*..... 205

4.3.2.3. Questionário para deteção dos potenciais Conceitos *Threshold*..... 206

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DOS RESULTADOS..... 209

5.1. ANÁLISE DOS DADOS DO 1.º MOMENTO DE RECOLHA DE DADOS..... 213

5.1.1. A tipologia dos conceitos das redes PFNET, no 1.º Momento de recolha da dados..... 215

5.1.2. O Teste do Qui-quadrado para a tipologia dos termos/conceitos/noções/exemplos, no 1.º Momento de recolha de dados..... 221

5.1.3. Árvores de Decisão para o 1.º Momento de recolha da dados..... 224

5.1.4. Análise dos indicadores quantitativos das redes PFNET, no 1.º Momento da recolha de dados..... 228

5.1.4.1. A influência do Género nos indicadores quantitativos das PFNET, no 1.º Momento da recolha de dados..... 228

5.1.4.2. A influência do Ano de Escolaridade nos indicadores quantitativos das PFNET, no 1.º Momento da recolha de dados..... 231

5.1.4.3. O Índice de Complexidade das redes PFNET (ICR), no 1.º Momento de recolha de dados..... 233

5.1.4.3.1. O Índice de Complexidade das redes PFNET de acordo com o Género, no 1.º Momento de recolha de dados..... 234

5.1.4.3.2. O Índice de Complexidade das redes PFNET de acordo com o Ano de Escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... 235

5.1.5. As Redes Médias *Pathfinder* do 9.º e 12.º anos, no 1.º Momento da recolha de dados. 237

5.1.5.1. A Rede Média Associativa PFNET relativa ao 9.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... 237

5.1.5.2. A Rede Média Associativa PFNET relativa ao 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento da recolha de dados..... 239

5.1.5.3. Índice de Similaridade entre as Redes Médias PFNET do 9.º e 12.º anos, no 1.º Momento da recolha de dados..... 242

5.1.5.4. Análise de *Clusters* às Redes Médias PFNET do 9.º e 12.º anos, no 1.º Momento da recolha de dados..... 243

5.2. ANÁLISE DOS DADOS DO 2.º MOMENTO DE RECOLHA DE DADOS..... 250

5.2.1. A tipologia dos conceitos das redes PFNET, no 2.º Momento de recolha de dados..... 251

5.2.2. O Teste do Qui-quadrado para a tipologia dos termos/conceitos/noções/exemplos, no 2.º Momento de recolha de dados..... 254

5.2.3. Árvores de Decisão para o 2.º Momento de recolha da dados..... 257

5.2.4. Análise dos indicadores quantitativos das PFNET, no 2.º Momento da recolha de dados..... 259

5.2.4.1. A influência do Género nos indicadores quantitativos das PFNET, no 2.º Momento da recolha de dados..... 259

5.2.4.2. A influência do Ano de Escolaridade nos indicadores quantitativos das redes PFNET, no 2.º Momento da recolha de dados..... 262

5.2.4.3. O Índice de Complexidade das redes PFNET (ICR), no 2.º Momento de recolha de dados..... 264

5.2.4.3.1. O Índice de Complexidade das redes PFNET de acordo com o Género, no 2.º Momento da recolha de dados..... 264

5.2.4.3.2. O Índice de Complexidade das redes de acordo com o Ano de Escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados..... 266

5.2.5. As Redes Médias *Pathfinder* do 9.º e 12.º anos, do 2.º Momento da recolha de dados..... 267

5.2.5.1 A Rede Média Associativa PFNET relativa ao 9.º ano de escolaridade no 2.º Momento da recolha de dados..... 267

5.2.5.2. A Rede Média Associativa PFNET relativa ao 12.º ano de escolaridade, no 2.º Momento da recolha de dados..... 269

5.2.5.3. Índice de Similaridade entre as Redes Médias PFNET do 9.º e 12.º anos, no 2.º Momento da recolha de dados..... 272

5.2.5.4. Análise de Clusters às Redes Médias PFNET do 9.º e 12.º anos, no 2.º Momento da recolha de dados..... 273

5.3. ANÁLISE COMPARATIVA DAS REDES E DAS REDES MÉDIAS PFNET NOS DOIS MOMENTOS DE RECOLHA DE DADOS..... 278

5.3.1. Frequência dos conceitos nas redes PFNET nos dois Momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade..... 278

5.3.2. Comparação dos resultados dos indicadores quantitativos, em função do Género e do Ano de Escolaridade, nos 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados..... 280

5.3.2.1. Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET dos rapazes, do 1.º Momento com o 2.º Momento de recolha de dados..... 281

5.3.2.2. Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET das raparigas, do 1.º Momento com o 2.º Momento de recolha de dados..... 283

5.3.2.3 Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET para o 9.º ano de escolaridade, do 1.º Momento com o 2.º momento de recolha de dados..... 285

5.3.2.4. Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET para o 12.º ano de escolaridade, do 1.º Momento com o 2.º momento de recolha de dados..... 287

5.3.2.5. Comparação do Índice de Complexidade das redes PFNET dos 9.º e 12.º anos de escolaridade, do 1.º Momento com o 2.º momento da recolha de dados..... 288

5.3.3. Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET do 9.ºano (1.º Momento) com o 12.º ano de escolaridade (2.º Momento)..... 289

5.3.4. Comparação do Índice de Complexidade das redes do 9.º ano (1.º Momento) com o do 12.º ano (2.º Momento)..... 291

5.3.5. Tipologia dos conceitos nas Redes Médias PFNET, nos 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade..... 292

5.4. QUESTIONÁRIO PARA A DETEÇÃO DE POTENCIAIS CONCEITOS..... 297

5.4.1. Os conceitos das PFNET menos complicados/fáceis e mais complicados/difíceis de entender..... 298

5.4.2. Análise dos itens e da escala do questionário dos potenciais Conceitos *Threshold*..... 300

5.4.3. Análise das dimensões da escala do questionário dos potenciais Conceitos *Threshold*.. 303

5.4.4. Relação entre os potenciais Conceitos *Threshold* e as diferentes tipologias dos conceitos das redes PFNET..... 305

CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES, CONTRIBUTOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA, LIMITAÇÕES E PERSPETIVAS FUTURAS DE INVESTIGAÇÃO..... 319

6.1.CONCLUSÕES..... 321

6.2 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS FACE AO MARCO TEÓRCO ADOTADO..... 327

6.3. CONTRIBUTOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA..... 330

6.4. LIMITAÇÕES E PERSPETIVAS FUTURAS DE INVESTIGAÇÃO..... 331

BIBLIOGRAFIA..... 335

ANEXOS..... 361

ANEXO I - PEDIDO DE CONSENTIMENTO INFORMADO AOS PAIS E ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO..... 363

ANEXO II - QUESTIONÁRIO PARA A DETEÇÃO DOS CONCEITOS THRESHOLD..... 364

ANEXO III - QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES PARA A IDENTIFICAÇÃO DOS TERMOS/NOÇÕES/EXEMPLOS UTILIZADOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA NOÇÃO DE PROBABILIDADE..... 365

ANEXO IV - CONCEITOS/TERMOS/NOÇÕES/EXEMPLOS REFERIDOS PELOS PROFESSORES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM..... 366

ANEXO V - ÍNDICES DOS MANUAIS ESCOLARES ANALISADOS..... 369

ANEXO VI – ALGUNS QUESTIONÁRIO RESPONDIDOS PELOS PROFESSORES PARA IDENTICAÇÃO DOS TERMOS/NOÇÕES/EXEMPLOS 371

ANEXO VII – EXEMPLOS DE REDES PFNET OBTIDAS, NO 1.º E NO 2.º MOMENTO..... 375

ANEXO VIII - ALGUNS QUESTIONÁRIOS RESPONDIDOS PELOS ALUNOS PARA A DETEÇÃO DOS CONCEITOS THRESHOLD..... 379

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Objetivos e perguntas da Investigação **14**

Figura 2 – As diferentes fases da Investigação realizada **17**

Figura 3 – Mapa da cidade de Lisboa **23**

Figura 4 – Exemplo de um Mapa Conceptual **27**

Figura 5 – Exemplo de uma Rede Associativa Pathfinder (Casas, 2002) **28**

Figura 6 – Desigualdade Triangular no plano **30**

Figura 7 – Rede original associada à matriz W de Pesos **34**

Figura 8 – Rede PFNET(∞,2) **36**

Figura 9 – Diferentes tipos de redes PFNET e respetivos Índices de Complexidade **38**

Figura 10 – Medidas de Centralidade para diversos tipos de PFNET (Clariana, 2011 e 2013) **41**

Figura 11 – Rede *Pathfinder* dos professores sobre Fisiologia do pulmão (McGaghie, 1996) **45**

Figura 12 – Rede PFNET sobre conceitos de Contabilidade (Curtis e Davis, 2003) **46**

Figura 13 – Rede PNET de um programador (a) e de um utilizador (b) (Kudikyala e Vaughn, 2005) **47**

Figura 14 - Rede Associativa Pathfinder de todas as dimensões (Jiménez *et al.*, 2010) **48**

Figura 15 – Rede PFNET colaborativa (Serrano *et al.*,2010) **49**

Figura 16 - Rede Associativa Pathfinder do exame de 2009/10 (Almeida, 2011) **50**

Figura 17 – Rede de referência (Wouters, Spek e Oostendorp, 2011) **51**

Figura 18 – Rede de referência em relação ao conceito de movimento (Sarwar, 2012) **52**

Figura 19 – Procedimento MDS (a) e a rede PFNET (b) sobre o tópico de Biologia "Compartimentos intracelulares e o transporte de proteínas (Großschedl e Harms, 2013) **52**

Figura 20 – Elementos Básicos da Teoria dos Conceitos Nucleares (Luengo *et al.*, 2011) **56**

Figura 21 - Rede Associativa Média Pathfinder relativa ao conceito de Probabilidade (Almeida *et al.*, 2013) **58**

Figura 22 – Interface de recolha de dados do *Goluca* e uma rede PFNET obtida (Casas et al, 2013) **58**

Figura 23 – Rede PFNET de referência (Catarreira, 2013) **59**

Figura 24 – Características dos Conceitos *Threshold* **68**

Figura 25 – Rede de conceitos *Threshold* em Economia desenvolvida no âmbito do projeto ETC (Davies e Mangan , 2005) **78**

Figura 26 – Conceitos e temas difíceis, identificados pelos professores de Biologia (Taylor, 2008) **81**

Figura 27 – Possível resolução geométrica do Problema das Apostas..... **87**

Figura 28 – Extrato do "*Liber de Ludo Aleae*" de Gerolamo Cardano..... **88**

Figura 29 – Capa do tratado " *Ars Conjectandi" de* Jacob Bernoulli..... **89**

Figura 30 – Extrato de "*An essay Towards Solving a problem in the Doctrine of Chances"* de Thomas Bayes..... **90**

Figura 31 – Capa do livro *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace..... **90**

Figura 32 – Capa do livro *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* de Kolmogorov **91**

Figura 33 – Capa do livro "Programas do Ensino Primário" **94**

Figura 34 – Índice, relativo ao tema Estatística e Probabilidade, do Compêndio de Matemática do 6.º ano Liceal de José Sebastião e Silva..... **97**

Figura 35 - Organização do Sistema Educativo Português..... **101**

Figura 36 – Domínios de conteúdos pelos ciclos de formação do Ensino Básico..... **109**

Figura 37 – Evolução das Orientações Curriculares da Matemática, em Portugal no pós II Guerra Mundial..... **111**

Figura 38 - Diagrama de Árvore..... **118**

Figura 39 – Simulação em Excel do "Jogo do Rapa" **126**

Figura 40 – Interpretação geométrica da $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$..... **130**

Figura 41 - Proposta didática Probabilidade em contexto de sala de aula (Batanero, Henry e Parzysz, 2005) **138**

Figura 42 – Os diferentes significados matemáticos (Probabilidade) **140**

Figura 43 - Elementos do significado de Probabilidade (Batanero, 2005) e da Literacia Probabilística (Gal, 2005) **144**

Figura 44 – A revisão bibliográfica no contexto dos elementos do triângulo pedagógico (baseado em Houssaye, 2000) **149**

Figura 45 – Conteúdos e sequência para a Unidade Probabilidade (Fuentes e Aranzabal, 2009) **152**

Figura 46 - O desempenho médio na tarefa de resolver o Teste de Conhecimentos, no que diz respeito aos objetivos (HodnikČadež e Škrbec, 2011) **153**

Figura 47 – Os diferentes domínios no processo de modelação (Coutinho, 2005) **159**

Figura 48 – Aplicação do Teorema de Bayes com o GeoGebra (Mercado, 2013) **159**

Figura 49 – Tarefa proposta (Batanero *et al*., 2012) **166**

Figura 50 – Configuração de objetos e processos matemáticos (Díaz Godino, 2013) **168**

Figura 51 – Organização do cálculo da Probabilidade final (Batanero e Díaz, 2007) **172**

Figura 52 – Problema de *Monty Hall* (Batanero *et al*., 2009) **173**

Figura 53 - Rede Associativa Média Pathfinder (Almeida *et al.,* 2013) **174**

Figura 54 – Organização, em termos temporais, do 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados nos 9.º e 12.º anos..... 181

Figura 55 - Questionário aplicado aos professores para a identificação dos conceitos/termos/noções/exemplos utilizados no processo de ensino e aprendizagem da noção de Probabilidade (resposta de um professor)..... 187

Figura 56 – Os conceitos/termos/noções/exemplos selecionados e todas as suas possíveis relações..... 191

Figura 57 – Hierarquia dos conceitos/termos/noções/exemplos associados à Probabilidade..... 192

Figura 58 - Sequência formativa dos conteúdos sobre a noção de Probabilidade apresentada na generalidade dos livros de texto do 9.º ano de escolaridade do Ensino Básico..... 196

Figura 59 – Definição de termos e grupos com o *Goluca*..... 201

Figura 60 – Interface do *Goluca* para a recolha de dados..... 202

Figura 61 – Construção da rede PFNET no *Goluca*..... 203

Figura 62 – A rede PFNET (∞,10) de um aluno do 9.º ano de escolaridade..... 203

Figura 63 – Construção da rede média PFNET no *Goluca*..... 204

Figura 64 – Determinação dos indicadores quantitativos das redes PFNET..... 204

Figura 65 – Indicadores quantitativos das redes PFNET's, fornecidas pelo Goluca (Nós nucleares, Densidade, Factor dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares Factor do grau dos nós nucleares e Índice de complexidade da rede)..... 205

Figura 66 – Procedimentos utilizados na análise de dados..... 212

Figura 67 – Distribuição dos estudantes pelas Escolas e Género, no 1.º Momento de recolha de dados..... 214

Figura 68 – Distribuição dos alunos por Escola e Ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... 215

Figura 69 - Rede circular (aluno do 9.º ano, 1.º Momento – Feminino)..... 216

Figura 70 - Rede linear (aluno do 9.º ano, 1.º Momento – Masculino)..... 216

Figura 71 - Rede com um só Conceito Nuclear (aluno do 12.º ano, 1.º Momento – Masculino)..... 217

Figura 72 - Rede com vários Conceitos Nucleares (aluno do 12.º ano, 1.º Momento – Feminino)..... 217

Figura 73 – Percentagem dos diferentes conceitos como Conceito Nuclear no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... 219

Figura 74 – Percentagem dos diferentes conceitos como nó extremidade no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... 220

Figura 75 – Percentagem dos diferentes conceitos como nós polar no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... 220

Figura 76 – Árvore de decisão (retirada de www.fep.up.pt/docentes/pcosme)..... 224

Figura 77 – Árvore de decisão, para o Ano de escolaridade em função da tipologia dos vários termos, no 1.º Momento de recolha de dados..... 226

Figura 78 – Histograma do ICR de acordo com o Género, no 1.º Momento de recolha de dados..... 234

Figura 79 – Histograma do ICR de acordo com o Ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... **236**

Figura 80 – Rede Média PFNET dos estudantes do 9.º ano (N=250), no 1.º Momento de recolha de dados..... **237**

Figura 81 – Rede Média PFNET dos estudantes do 12.º ano (N=94), no 1.º Momento de recolha de dados..... **240**

Figura 82 – ICR e Centralidade de grau da Rede Média PFNET dos 9.º e 12.º anos, no 1.º Momento de recolha de dados..... **241**

Figura 83 - As ligações comuns das Redes Médias PFNET dos 9.º e 12.º anos, no 1.º Momento da recolha de dados..... **243**

Figura 84 – *Dendograma* da análise de Clusters do 9.ºano, para o 1.º Momento de recolha de dados..... **246**

Figura 85 – *Clusters* com base na matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 9.º ano, no 1.º Momento da recolha de dados..... **247**

Figura 86 – *Dendograma* da análise de Clusters do 12.ºano, para o 1.º Momento de recolha de dados..... **248**

Figura 87 – *Clusters* com base na matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 12.º ano, no 1.º Momento da recolha de dados..... **249**

Figura 88 – Distribuição dos estudantes por Ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados..... **251**

Figura 89 – Percentagem dos diferentes conceitos como Conceitos nucleares no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados..... **253**

Figura 90 – Percentagem dos diferentes conceitos como nós extremidade no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados..... **253**

Figura 91 – Percentagem dos diferentes conceitos como nós polares no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade no 2.º Momento de recolha de dados..... **254**

Figura 92 – Árvore de decisão do Ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados..... **257**

Figura 93 – Histograma do ICR de acordo com o Género, no 2.º Momento de recolha de dados... **265**

Figura 94 – Histograma do ICR de acordo com o Ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados..... **266**

Figura 95 – Rede Média PFNET dos estudantes do 9.º ano (N=226), no 2.º Momento da recolha dados..... **268**

Figura 96 – Rede Média PFNET dos estudantes do 12.º ano (N=99), no 2.º Momento de recolha de dados..... **270**

Figura 97 – ICR e Centralidade de grau da Rede Média dos 9.º e 12.º anos, no 2.º Momento da recolha de dados..... **271**

Figura 98 - As ligações comuns das Redes Médias PFNET dos 9.º e 12.º anos, no 2.º Momento da recolha de dados..... **272**

Figura 99 – *Dendograma* da análise de Clusters do 9.ºano, 2.º Momento de recolha de dados..... **274**

Figura 100 – Clusters com base na matriz de distâncias da rede Média PFNET do 9.º ano, no 2.º Momento da recolha de dados..... **275**

Figura 101 – *Dendograma* da análise de Clusters do 12.ºano, 2.º Momento de recolha de dados..... **276**

Figura 102 – *Clusters* com base na matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 12.º ano, no 2.º Momento da recolha de dados..... **277**

Figura 103 - Esquema geral das comparações a realizar do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados..... **278**

Figura 104 – As Redes Médias do 9.º ano nos dois Momentos de recolha de dados..... **294**

Figura 105 – As Redes Médias do 12.º ano nos dois Momentos de recolha de dados..... **295**

Figura 106 – Ligações comuns nos dois Momentos da recolha de dados e nos dois anos de escolaridade..... **296**

Figura 107 – Valores do ICR e da Centralidade das Redes Médias PFNET, para o 9.º ano (1.º e 2.º Momentos) e para o 12.º ano (1.º e 2.º Momentos)..... **296**

Figura 108 – Resposta de um aluno do 9.º ano (Feminino) ao questionário..... **297**

Figura 109 – As médias dos itens do questionário $\pm$ 1 desvio padrão..... **301**

Figura 110 – Os valores da dimensão transformadora em função do Género e do Ano de escolaridade..... **304**

Figura 111 – Os valores da dimensão Integradora em função do Género e do Ano de escolaridade..... **304**

Figura 112 – Os valores da dimensão Irreversível em função do Género e do Ano de escolaridade..... **304**

Figura 113 – Os valores da dimensão Nível de Entendimento em função do Género e do Ano de escolaridade..... **304**

Figura 114 – Diagrama de dispersão entre CT_9 e NE_9..... **306**

Figura 115 – Diagrama de dispersão entre CT_{12} e NE_{12}..... **306**

Figura 116 – Diagrama de dispersão entre CT_{Total} e NE_{Total}..... **307**

Figura 117 – Diagrama de dispersão entre CT_9 e NP_9..... **307**

Figura 118 – Diagrama de dispersão entre CT_{12} e NP_{12}..... **307**

Figura 119 – Diagrama de dispersão entre CT_{Total} e NP_{Total}..... **307**

Figura 120 – Diagrama de dispersão entre CT_9 e CN_9..... **308**

Figura 121 – Diagrama de dispersão entre CT_{12} e CN_{12}..... **308**

Figura 122 – Diagrama de dispersão entre CT_{Total} e CN_{Total}..... **308**

Figura 123 – Diagrama de dispersão entre CT_9 e NML_9..... **310**

Figura 124 – Diagrama de dispersão entre CT_{12} e NML_{12}..... **310**

Figura 125 – Diagrama de dispersão entre CT_{Total} e NML_{Total}..... **311**

Figura 126 – Diagrama de dispersão entre CF_9 e NE_9..... **312**

Figura 127– Diagrama de dispersão entre CF_{12} e NE_{12}..... **312**

Figura 128 – Diagrama de dispersão entre CF_{Total} e NE_{Total}..... **313**

Figura 129 – Diagrama de dispersão entre CF_9 e NE_9..... **313**

Figura 130 – Diagrama de dispersão entre CF_{12} e NE_{12}..... **313**

Figura 131 – Diagrama de dispersão entre CF_{Total} e NP_{Total}..... **313**

Figura 132 – Diagrama de dispersão entre CF_9 e CN_9..... **314**

Figura 133 – Diagrama de dispersão entre CF_{12} e CN_{12}..... **314**

Figura 134 – Diagrama de dispersão entre CF_{Total} e CN_{Total}..... **314**

Figura 135 – Diagrama de dispersão entre CF_9 e NML_9..... **316**

Figura 136 – Diagrama de dispersão entre CF_{12} e NML_{12}..... **316**

Figura 137 – Diagrama de dispersão entre CF_{Total} e NML_{Total}..... **316**

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Organização geográfica do conhecimento e Organização hierárquica do conhecimento.. **24**

Tabela 2- Conceitos Nucleares e conceitos inclusivos..... **25**

Tabela 3 - Caminhos de Custo Mínimo e Complexidade Crescente das Estruturas Cognitivas..... **26**

Tabela 4- Redes Associativas Pathfinder e os Mapas Conceptuais..... **28**

Tabela 5 – Centralidade da rede da Figura 8..... **42**

Tabela 6 - Trabalhos de investigação, divulgação e aplicação das Redes Pathfinder..... **43**

Tabela 7 - Trabalhos de investigação, divulgação e aplicação da Teoria dos Conceitos Nucleares..... **53**

Tabela 8 – Definição e exemplos dos três tipos de mudança conceptual (Davies e Mangan, 2005).. **71**

Tabela 9 - Trabalhos de investigação e divulgação dos conceitos *Threshold* aplicados à Matemática..... **74**

Tabela 10 - Trabalhos de investigação e divulgação, em diferentes áreas, dos conceitos *Threshold*..... **77**

Tabela 11 - Organização dos Conteúdos de Probabilidades na disciplina de Matemática A 12.º ano dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas..... **102**

Tabela 12 - Organização dos Conteúdos de Probabilidades na disciplina de Matemática B 12.º ano dos Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais Cursos Tecnológicos de Construção Civil e Edificações, de Eletrotecnia e Eletrónica, de Informática, de Administração, de Marketing e de Desporto..... **103**

Tabela 13 - Organização dos Conteúdos de Probabilidades na disciplina de MACS 11.º ano do Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas 12.º ano do Curso Tecnológico de Ordenamento do Território..... **105**

Tabela 14 - Organização dos Conteúdos de Probabilidades no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007)..... **106**

Tabela 15 - Organização dos Conteúdos de Probabilidades no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (PMCM-EB, Bivar *et al.*,2013)..... **110**

Tabela 16 - As unidades curriculares de Probabilidades, na formação em Educação Básica, das Escolas Superiores de Educação em Portugal..... **113**

Tabela 17 – Simulação do "Jogo do Rapa", com recurso ao Excel..... **125**

Tabela 18 - Resumo das características das Etapas de Desenvolvimento de Fischbein (adaptado de Jones e Thornton, 2005)..... **147**

Tabela 19- Trabalhos de investigação, sobre o currículo das Probabilidades..... **150**

Tabela 20 - Trabalhos de investigação, sobre recursos didáticos para as Probabilidades..... **156**

Tabela 21- Trabalhos de investigação sobre Professores e Formação de Professores, em Probabilidade..... **161**

Tabela 22- Trabalhos de investigação, sobre a aprendizagem das Probabilidades..... **169**

Tabela 23 – Dimensão da população e da amostra do estudo no 1.º Momento de recolha de dados (Dados fornecidos pela Direção Regional de Estabelecimentos Escolares)..... **183**

Tabela 24 – Dimensão da população e da amostra do estudo no 2.º Momento de recolha de dados (Dados fornecidos pela Direção Regional de Estabelecimentos Escolares)..... **184**

Tabela 25 - Os diferentes elementos do significado e da literacia da probabilidade e as referências dadas pelos professores (N=22 professores/207 referências)..... **189**

Tabela 26 - Manuais do 9.ºano de escolaridade analisados e respetivos índices..... **193**

Tabela 27 – Matriz de proximidade de um aluno do 9.º ano sobre o conceito de Probabilidade, obtida com o software Goluca..... **202**

Tabela 28 - Escala de Likert para análise de potenciais conceitos *Threshold* e respetivas dimensões e itens..... **207**

Tabela 29 – Distribuição dos estudantes de acordo com o Género e o Ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... **213**

Tabela 30 – Frequências dos diferentes conceitos/termos/exemplos das PFNET no 9.º e 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... **218**

Tabela 31 – Valores do $\chi 2$ e Sig. do teste do qui-quadrado, no 1.º Momento de recolha de dados..... **222**

Tabela 32 - Distribuição dos conceitos/noções/termos/exemplos como nó extremidade, nó polar e Conceito Nuclear, nos 9.º e 12.º anos e no 1.º Momento de recolha de dados..... **223**

Tabela 33 – Tabela de classificação e tabela de risco da Árvore de Decisão para o Ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... **228**

Tabela 34 – Indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Género, no 1.º Momento de recolha de dados..... **229**

Tabela 35 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Género dos inquiridos, no 1.º Momento de recolha de dados..... **230**

Tabela 36 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis das PFNET de acordo com o Género, no 1.º Momento de recolha de dados..... **230**

Tabela 37 - Teste de sequências para a coerência, no 1.º Momento de recolha de dados..... **231**

Tabela 38 – Indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Ano de escolaridade, no 1.º Momento da recolha de dados..... **232**

Tabela 39 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Ano de escolaridade dos inquiridos, no 1.º Momento de recolha de dados..... **232**

Tabela 40 – Teste de *Mann-Whitney* para as diferentes variáveis das PFNET de acordo com o Ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... **233**

Tabela 41 – ICR das redes dos estudantes de acordo com o Género, no 1.º Momento de recolha de dados..... **234**

Tabela 42 – Teste de *Mann-Whitney* para o ICR de acordo com o Género, no 1.º Momento de recolha de dados..... **235**

Tabela 43 – ICR das redes dos estudantes de acordo com o Ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... **235**

Tabela 44 – Teste de *Mann-Whitney* para o ICR de acordo com oAano escolar, no 1.º Momento de recolha de dados..... **236**

Tabela 45 – Indicadores quantitativos da Rede Média PFNET dos alunos do 9.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... **238**

Tabela 46 – Centralidade da Rede Média PFNET dos alunos do 9.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... **239**

Tabela 47 – Indicadores quantitativos da Rede Média PFNET dos alunos do 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... **240**

Tabela 48 – Centralidade da Rede Média PFNET dos alunos do 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados..... **241**

Tabela 49 – Matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 9.º ano, no 1.º Momento de recolha de dados..... **245**

Tabela 50 – Matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 12.º ano, no 1.º Momento de recolha de dados..... **245**

Tabela 51 – Distribuição dos estudantes por Género e Escola no 2.º Momento da recolha de dados..... **250**

Tabela 52 – Frequências dos diferentes conceitos/termos/exemplos das PFNET no 9.º e 12.º ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados..... **252**

Tabela 53 – Valores do $\chi 2$ e Sig. do teste do qui-quadrado, no 2.º Momento de recolha de dados..... **255**

Tabela 54 - Distribuição das respostas dos conceitos/noções/termos/exemplos como nó extremidade, nó polar e Conceito Nuclear, nos 9.º e 12.º anos, no 2.º Momento de recolha de dados..... **256**

Tabela 55 – Tabela de classificação e tabela de risco da Árvore de Decisão, no 2.º Momento de recolha de dados..... **259**

Tabela 56 – Indicadores quantitativos das redes de acordo com o Género, no 2.º Momento de recolha de dados..... **260**

Tabela 57 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Género dos inquiridos, no 2.º Momento de recolha de dados..... **260**

Tabela 58 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis de acordo com o Género, no 2.º Momento de recolha de dados..... **261**

Tabela 59 - Teste de sequências para a coerência de acordo com o Género, no 2.º Momento de recolha de dados..... **261**

Tabela 60 – Indicadores quantitativos das redes de acordo com o Ano de escolaridade, no 2.º Momento da recolha de dados..... **262**

Tabela 61 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Ano de escolaridade dos inquiridos, no 2.º Momento de recolha de dados..... **263**

Tabela 62 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis de acordo com o Ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados..... **263**

Tabela 63 – ICR das redes dos estudantes de acordo com o Género, no 2.º Momento de recolha de dados..... **264**

Tabela 64 – Teste de *Mann-Whitney* para o ICR de acordo com o Género, no 2.º Momento da recolha de dados..... **265**

Tabela 65 – ICR das redes dos estudantes de acordo com o Ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados..... **266**

Tabela 66 – Teste de *Mann-Whitney* para o ICR de acordo com o Ano de escolaridade no 2.º Momento de recolha de dados..... **267**

Tabela 67 – Indicadores quantitativos da rede Média PFNET dos alunos do 9.º ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados..... **269**

Tabela 68 – Centralidade da Rede Média PFNET dos alunos do 9.º ano de escolaridade, no 2.º Momento da recolha de dados..... **269**

Tabela 69 – Indicadores quantitativos da Rede Média PFNET dos alunos do 12.º ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados..... **270**

Tabela 70 – Centralidade da Rede Média PFNET dos alunos do 12.º ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados..... **271**

Tabela 71 – Matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 9.º ano, no 2.º Momento de recolha de dados..... **273**

Tabela 72 – Matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 12.º ano, no 2.º Momento de recolha de dados..... **273**

Tabela 73 – Resultados do teste do qui-quadrado para a tipologia dos conceitos nas redes PFNET, nos dois Momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade..... **279**

Tabela 74 – Sistematização dos resultados dos indicadores quantitativos, relativos ao Género e Ano de escolaridade, em ambos os Momentos de recolha de dados..... **280**

Tabela 75 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET dos rapazes, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados..... **281**

Tabela 76 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis das redes PFNET dos rapazes, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados..... **282**

Tabela 77 - Teste de sequências para a coerência dos rapazes, nos 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados..... **282**

Tabela 78 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET das raparigas, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados..... **283**

Tabela 79 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis das redes PFNET das raparigas, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados..... **284**

Tabela 80 - Teste de sequências para a coerência das raparigas, nos 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados..... **284**

Tabela 81 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET do 9.º ano de escolaridade, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados..... **285**

Tabela 82 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis das PFNET do 9.º ano de escolaridade, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados..... **286**

Tabela 83 - Teste de sequências para a coerência dos estudantes do 9.º ano, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados..... **286**

Tabela 84 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET do 12.º ano de escolaridade, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados..... **287**

Tabela 85 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis das PFNET do 12.º ano de escolaridade do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados..... **288**

Tabela 86 – Teste de *Mann-Whitney* para o ICR do 9.º ano de escolaridade do 1.º para o 2.º Momento da recolha de dados..... **289**

Tabela 87 – Teste de *Mann-Whitney* para o ICR do 12.º ano de escolaridade do 1.º para o 2.º Momento da recolha de dados..... **289**

Tabela 88 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET do 9.º ano (1.º Momento) para o 12.º ano (2.º Momento)..... **290**

Tabela 89 – Teste de *Mann-Whitney* para os vários indicadores das PFNET para o 9.º ano (1.º Momento) e o 12.º ano (2.º Momento)..... **290**

Tabela 90 - Teste de sequências para a coerência dos estudantes do 9.º ano (1.ºMomento) para o 12.ºano (2.º Momento) de recolha de dados..... **291**

Tabela 91 – Teste de *Mann-Whitney* do ICR para o 9.º ano (1.º Momento) e o 12.º ano (2.º Momento)..... **292**

Tabela 92 – Tipologia dos conceitos nas Redes Médias nos dois Momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade..... **292**

Tabela 93 – Conceito menos complicado/mais fácil de entender referido pelos estudantes..... **298**

Tabela 94 – Conceito mais complicado/mais difícil de entender referido pelos estudantes..... **299**

Tabela 95 – Média e desvio padrão dos 13 itens do questionário..... **300**

Tabela 96 - Estatísticas de confiabilidade, média e desvio padrão da escala..... **302**

Tabela 97 – Medidas descritivas da Escala em função do género e do ano de escolaridade..... **302**

Tabela 98 – Teste de *Kolmogorov/Smirnov* e de *Mann/Whitney* para a escala e em relação ao Ano de escolaridade e ao Género..... **302**

Tabela 99 – Medidas descritivas das dimensões dos questionário para detetar os CT..... **303**

Tabela 100 – Teste de Normalidade (K/S) e de *Mann-Whitney* para as dimensões da escala para o Conceitos *Threshold*..... **305**

Tabela 101 – Frequências dos vários conceitos das PFNET como NE, NP e CN e como potencial CT..... **306**

Tabela 102 – Coeficientes de correlação de *Spearman* (ρ) entre os potenciais conceitos *Threshold* (CT) e as diferentes tipologias dos conceitos nas PFNET (NE, NP e CN)..... **309**

Tabela 103 – Frequência como CT e o número médio de ligações por rede PFNET..... **310**

Tabela 104 – Correlações de *Spearman* (ρ) entre frequência dos vários termos como CT e o número médio de ligações (NML) por rede PFNET..... **311**

Tabela 105 – Frequências dos vários conceitos das PFNET como mais fáceis de entender (CF) e como NE, NP e CN nas PFNET..... **312**

Tabela 106 – Coeficientes de correlação de *Spearman* (ρ) entre os conceitos mais fáceis (CF), e as diferentes tipologias dos conceitos nas PFNET (NE, NP e CN)..... **314**

Tabela 107 – Frequência dos vários termos como conceito fácil (CF) e o número médio de ligações por rede PFNET..... **315**

Tabela 108 – Correlações de *Spearman* (ρ) entre frequência como conceito fácil (CF) e o número médio de ligações (NML) do conceito por rede PFNET..... **316**

GLOSSÁRIO

SIGLA	SIGNIFICADO
α	Alpha de *Cronbach*
APM	Associação de Professores de Matemática
CN	Conceito(s) Nuclear(es)
CF	Conceitos Fáceis
$C_G(N_i)$	Centralidade de Grau do Nó N_i
$C_G(R)$	Centralidade de Gau da Rede R
CHAID	*Chi-Squared Automatic Interaction Detector*
CT	Conceito *Threshold*
D	Densidade da Rede
DEB	Departamento de Educação Básica
DES	Departamento do Ensino Secundário
DGIDC	Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular
DREE	Direção Regional de Estabelecimentos Escolares
EUA	Estados Unidos da América
FN	Fator do Grau dos Nós Nucleares
ICR	Índice de Complexidade da Rede
IIE	Instituto de Inovação Educacional
MACS	Matemática Aplicada às Ciências Sociais
MDS	*Multidimensional Scaling*
ME	Ministério da Educação
MEC	Ministério da Educação e Ciência
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
N	Factor dos Nós Nucleares
NE	Nó(s) extremidade
NML	Número médio de ligações
NN	Nó Nuclear

NP	Nó(s) polar(es)
OCDE	Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económico
ORE	Observatório dos Recursos Educativos
PFNET	Pathfinder Associative Networks – Redes Associativas Pathfinder
PISA	Programme for International Student Assessment
S	Similaridade de Redes
Sig.	Significância do teste
SPIEM	Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática
SPSS	Statistical Package for Social Sciences
ρ	Coeficiente de Correlação de *Spearman*
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
TCN	Teoria dos Conceitos Nucleares

RESUMO

Com base na Teoria dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos *Threshold*, pretendeu-se neste trabalho compreender a estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º (14-15 anos) e 12.º (17-18 anos) anos de escolaridade portugueses, em torno da noção de Probabilidade.

O objeto matemático deste estudo – Probabilidade - constitui, presentemente, um conteúdo e uma componente chave nos processos de ensino em vários países e a sua relevância é reconhecida nas respetivas diretivas curriculares, assim como nos resultados das investigações didáticas.

O marco teórico adotado - Teoria dos Conceitos Nucleares - postula que à medida que os alunos progridem na escolaridade, o seu conhecimento é estruturado de uma forma cada vez mais simples e em torno de um conjunto limitado de conceitos importantes – os Conceitos Nucleares. Por outro lado, os Conceitos *Threshold* constituem ideias, ou noções, que inicialmente para os estudantes são conceções complicadas e até mesmo problemáticas, mas que, quando compreendidas, elas são transformadoras, integradoras e contribuem para aprendizagens significativas. Pretende-se também investigar a possível relação entre estas duas teorias.

Em termos metodológicos e com base na inquirição de professores em exercício, na consulta de manuais escolares, na análise de artigos científicos de referência e dos programas dos Ensinos Básico e Secundário, definimos os termos/conceitos/noções/exemplos a empregar, posteriormente, na recolha de dados. De seguida, e num 1.º momento, foram inquiridos 344 alunos e, num 2.º momento, 325.

Com recurso a representações gráficas, nas quais os conceitos aparecem como nós e as suas relações como segmentos de reta – Redes Associativas *Pathfinder* (PFNET) - utilizamos o *software Goluca* para recolher e tratar os dados dos estudantes. As PFNET assim obtidas permitiram-nos identificar os conceitos que assumem uma maior relevância na estrutura cognitiva dos alunos – os Conceitos Nucleares – e aquelas noções que ainda não estão devidamente incorporadas nela – os nós extremidade – e a sua respetiva organização. Efetuou-se ainda uma análise comparativa dos vários indicadores quantitativos destas representações em função do Género e do Ano de Escolaridade. Em paralelo, e no 2.º momento de recolha de dados, aplicou-se um questionário para detetar os potenciais conceitos *Threshold*.

As conclusões obtidas apontam para uma estabilização temporal da estrutura cognitiva dos estudantes, para o não aumento da complexidade das PFNET do 9.º ano para o 12.º ano e não se verificou diferenças estatisticamente significativas na maioria dos indicadores quantitativos entre sujeitos do género feminino e masculino. Finalmente, conseguiu-se mostrar uma relação, estatisticamente significativa, entre os Conceitos *Threshold*, os Conceitos Nucleares e os nós extremidade das PFNET.

Ao possibilitar a identificação dos conceitos mais significativos e as relações mais relevantes da estrutura cognitiva dos alunos, estamos convictos que as Teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos *Threshold* constituem uma outra ferramenta didática para organizar a prática pedagógica e um referencial pedagógico rico e fecundo, que deve ser levado em consideração no processo de Ensino e Aprendizagem da Probabilidade.

Palavras-chave: Probabilidade, Teoria dos Conceitos Nucleares, Conceitos *Threshold*, Representação do Conhecimento, Redes Associativas *Pathfinder*.

RESUMEN

Con base en las Teorías de los Conceptos Nucleares y de los Conceptos Threshold, se pretende, con este trabajo, investigar sobre la estructura cognitiva, referida a la noción de Probabilidad, de alumnos de 9º (14-15 años) y 12º (17-18 años) curso de escolaridad, en Portugal.

El objeto matemático de este estudio – la Probabilidad – se constituye hoy como un contenido y un componente clave en los procesos de enseñanza en diferentes países, y su importancia es reconocida en las correspondientes directivas curriculares, así como en los resultados de la investigación en Didáctica.

El marco teórico adoptado - Teoría de los Conceptos Nucleares – señala que, mientras los alumnos progresan en el nivel de enseñanza, su conocimiento se estructura de una forma cada vez más simple y en torno a un conjunto limitado de conceptos importantes – los Conceptos Nucleares. Por otra parte, los Conceptos Threshold se constituyen como ideas, o nociones que inicialmente son para los estudiantes concepciones complejas, o incluso problemáticas, pero que después de comprendidas, son transformadoras e integradoras y contribuyen a obtener aprendizajes significativos. Se trata de investigar sobre la posible relación entre ambas teorías.

En cuanto a la metodología empleada, en primer lugar se realizó una encuesta a profesores en ejercicio y se procedió al análisis de libros de texto y artículos científicos de referencia, así como de los programas curriculares de Enseñanza Básica y Secundaria. En base a los resultados obtenidos, fueron definidos los términos/conceptos/nociones/ejemplos a utilizar posteriormente en la recogida de datos. A continuación y en un primer momento, fueron encuestados 344 alumnos y en un segundo momento 325.

Para recoger y analizar los datos de los estudiantes fue utilizado el software Goluca, que permite obtener representaciones gráficas, las Redes Asociativas Pathfinder (PFNET), en las cuales los conceptos aparecen como nodos, y sus conexiones como segmentos de recta. Las PFNET así obtenidas permitieron identificar los conceptos – Conceptos Nucleares – que asumen un mayor relieve en la estructura cognitiva de los estudiantes y aquellas nociones que aún no están totalmente incorporadas en ella – los nodos extremidad –, así como su correspondiente organización.

Se llevó a cabo, igualmente, un análisis comparativo de los diferentes indicadores cuantitativos de las representaciones, considerando las variables género y curso de escolaridad. En paralelo y en un 2º momento de recogida de datos, fue aplicado un cuestionario para detectar los posibles conceptos Threshold.

Las conclusiones obtenidas apuntan a una estabilización temporal de la estructura cognitiva de los estudiantes, sin que se observe un aumento en la complejidad de las PFNET de 9º a 12º curso. Tampoco se han verificado diferencias estadísticamente significativas en la mayoría de los indicadores cuantitativos entre individuos del género femenino y masculino. Por último se ha observado una relación estadísticamente significativa entre los Conceptos Threshold, los Conceptos Nucleares y los nodos extremidad de las PFNET.

Al permitir la identificación de los conceptos más significativos y de las relaciones más relevantes de la estructura cognitiva de los alumnos, creemos que las Teorías de los Conceptos Nucleares y de los Conceptos Threshold constituyen una destacada herramienta didáctica para la organización de la práctica docente y un referente pedagógico importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad.

Palabras-clave: Probabilidad, Teoría de los Conceptos Nucleares, Conceptos Threshold, Representación del Conocimiento, Redes Asociativas Pathfinder

ABSTRACT

Based on the Theories of Nuclear Concepts and Threshold Concepts, this thesis aims at understanding the cognitive structure of Portuguese students in years 9 (14-15 year-olds) and 12 (17-18 year-olds), concerning the notion of Probability.

The mathematical object of this study – Probability – is part of the contents and a key element in the teaching processes of several countries, and is regarded as highly relevant in their curriculum policies as well as in the results of educational research.

The adopted framework – the Theory of Nuclear Concepts – assumes that, as students progress through school, the structure of their knowledge becomes increasingly simpler, organized around a limited set of important notions – the Nuclear Concepts. On the other hand, the Threshold Concepts are ideas or notions that students initially consider complex or even problematic, but, when understood, become integrative and lead to change and significant learning. We intend also to investigate the possible relationship between these two theories.

Methodologically, the inquiry of practising teachers, the examination of textbooks and the analysis of scientific articles as well as of Elementary and Secondary Education curricula were the basis for the definition of the terms /concepts / notions / examples to be applied, later on, in data collection. Then, in a first moment, 344 students were inquired and, in a second moment, 325.

The software Goluca was used to collect the students' data, by resorting to graphical representations, in which the concepts appear as nodes and their relationships as line segments – Pathfinder Associative Networks (PFNETs). The PFNETs thus obtained led to the identification of the most relevant concepts in the students' conceptual framework – the Nuclear Concepts – as well as those notions which are not perfectly incorporated in the students' cognitive structure – the end-nodes – and also their respective organization. In addition, a comparative analysis of the various quantitative indicators of these representations according to Gender and Year Group was carried out. In the second moment of data collection a questionnaire was also applied, aiming to detect potential Threshold concepts.

The findings reveal that the students' cognitive structure stabilizes over time and that the complexity of the PFNETs does not increase from year 9 to year 12. Female and male subjects do not show statistically relevant differences in most of the quantitative indicators.

Finally, it was possible to demonstrate a statistically significant relationship between the Threshold Concepts, the Nuclear Concepts and the end-nodes of the PFNETs.

It is our belief that, by making it possible to identify the most relevant concepts and the most important relationships in the students' cognitive structure, the Nuclear Concepts and Threshold Concepts Theories are useful tools to organize the teaching practice and a valuable and effective pedagogical framework, which should be taken into account in the teaching and learning processes of Probability.

Keywords: Probability, Theory of Nuclear Concepts, Threshold Concepts, Knowledge Representation, Pathfinder Associative Networks.

RESUMEN AMPLIADO EN CASTELLANO

1. INTRODUCCIÓN

El conocimiento y la comprensión de la organización de lo conceptos asociados a un contenido dado siempre han desempeñado un papel relevante en la Didáctica de las Matemáticas, y, en las últimas décadas, ha sido asumido como un tema de investigación importante entre los investigadores en educación. A pesar de los avances significativos registrados en los último tiempos, la forma en que la mente humana funciona y se organiza constituye aún un enigma. Aún así, un hecho ampliamente aceptado es que la información se almacena en la memoria de un individuo ajustándose a una cierta disposición de las ideas o, en el contexto del aprendizaje de ciertos temas específicos de Matemática, a una organización de conceptos, nociones y ejemplos.

En diferentes países, las nuevas propuestas curriculares han asumido la inclusión y el reconocimiento de la importancia del tema matemático Probabilidad desde los primeros cursos de escolaridad.

Esta temática constituye un tópico matemático extremadamente interesante, práctico y de interés, sustentado por el diferente abordaje epistemológico que su aprendizaje presupone. Como refiere Azcárate (1996) supone la ruptura de la primacía concedida a la lógica del sí /no, verdadero / falso, del modelo determinístico, introduciendo en los estudiantes una forma diferente de pensar, al admitir la existencia, más allá de estas dos últimas posibilidades, de todo un intervalo en el cual prevalece la incertidumbre y el azar.

Para su abordaje didáctico-pedagógico, Batanero (2005) enumera los elementos del significado de Probabilidad que han de ser considerados relevantes: *el campo de problemas en el cual emerge el objeto matemático, los elementos lingüísticos, los procedimientos y algoritmos, las definiciones y propiedades de los objetos y sus relaciones con otros objetos matemáticos y los argumentos y demostraciones de las propiedades*. De forma paralela Gal (2005) reflexiona sobre lo que debe ser entendido por alfabetización probabilística y apunta que esta denominación sugiere, además de creencias, actitudes, hábitos mentales y una perspectiva crítica, un conjunto amplio de conocimientos factuales y ciertas aptitudes formales e informales. En esta lógica sugiere cinco aspectos importantes que deben tomarse en

consideración en su enseñanza: *las grandes ideas, descubrir probabilidades, el lenguaje, el contexto y las cuestiones críticas.*

Con este trabajo, y tras la selección de los términos/conceptos/ejemplos, verificaremos que, a lo largo del proceso de aprendizaje de la noción de Probabilidad, existen conceptos que por su relevancia, ya que establecen múltiples relaciones con otros, pueden ser clasificados como conceptos clave en el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Conceptos Nucleares en la perspectiva de Casas y Luengo (2002, 2003, 2004)). Además, podremos comprobar que los alumnos, a lo largo de su escolarización, mantienen un reducido número de estos conceptos como importantes en sus representaciones de la estructura cognitiva sobre la Probabilidad. Además, comprobaremos cómo algunas relaciones que establecen con otros términos se conservan y mantienen en el tiempo, sin que se verifique un aumento de la complejidad de dichas relaciones. Constataremos también que estas ideas fundamentales son también los conceptos más fáciles de entender para los alumnos y, por esta razón, en general, no pueden ser considerados potencialmente como conceptos umbral para otros aprendizajes (Conceptos Threshold en la terminología de Meyer y Land (2003, 2005)). Probaremos, por último, la existencia de una asociación significativa entre dichos conceptos y aquellos que no aparecen como bien establecidos en la estructura cognitiva.

2. MARCO TEÓRICO.

2.1. EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD Y SU DIDÁCTICA

El objeto matemático de este estudio, la Probabilidad, constituye, en el momento actual, un contenido y una componente esencia en los itinerarios formativos de los jóvenes y su relevancia se ve reconocida en las respectivas directivas curriculares, asó como en los resultados de las investigaciones didácticas.

El término Probabilidad es utilizado frecuentemente, y de un modo más o menos intuitivo, en las más variadas situaciones del día a día, las cuales presentan “una característica común, que es el hecho de que no se consiguen prever con exactitud y de antemano cuál es el resultado de la situación de incertidumbre” (Graça Martins y Ponte, 2010).

En el transcurso del desarrollo formal de la noción de probabilidad se le han ido otorgando diferentes significados, justificados por la necesidad de resolución de situaciones prácticas en diferentes periodos de la historia y del progreso de otros campos de las Matemáticas, en los cuales la Probabilidad encontró los elementos imprescindibles para una formalización axiomática necesaria para la construcción de un modelo matemático.

Históricamente, la visión más clásica o Laplaciana, dominó durante un largo periodo de tiempo la enseñanza de la Teoría de la Probabilidad. Posteriormente, con la implementación e la Matemática Moderna, se vino a introducir una concepción más formal y axiomática de esta área de la Matemática. Posteriormente con el creciente interés y toma de conciencia de la aplicabilidad de este concepto a numerosas y diferentes áreas del saber, se asistió a una inclusión de la noción de Probabilidad como límite de la frecuencia relativa de un acontecimiento en un sucesión de experiencias. Sin embargo, existen experiencias aleatorias que, por sus características, nunca o difícilmente, ser repetirán. En estas situaciones es conveniente interpretar la Probabilidad como manifestación del grado de convicción que cada individuo atribuye a la ocurrencia de los acontecimientos, con base en la experiencia e información anteriores.

Los diferentes conceptos de Probabilidad referidos evidencian la naturaleza compleja e este concepto matemático, y Batanero, Henry y Parzysz (2005) sugieren que el abordaje pedagógico de esta noción no se puede limitar a una única perspectiva, de modo que para que los alumnos alcancen un nivel adecuado de comprensión de la Probabilidad, es necesario que sean capaces de relacionar los abordajes clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático.

La investigación didáctica de las dos últimas décadas en torno a la Teoría de la Probabilidad ha sido bastante extensa y rica. Al nivel del currículo, las investigaciones apuntan que, a pesar de verificarse explícitamente el cumplimiento, en los textos, de algunas de las recomendaciones apuntadas por la didáctica de la Probabilidad, aún subsisten evidencias que apuntan a la necesidad de una revisión, en los programas, de las temáticas de Estadística y Probabilidad (Batanero, 2004, 2005; Gal, 2005; Caldeira, 2009; Millán, 2013).

La importancia de los recursos materiales en el proceso de Enseñanza – Aprendizaje de la Probabilidad ha merecido también la atención de la comunidad científica. La investigación realizada ha demostrado que la utilización de programas informáticos específicos ha facilitado la adquisición de diferentes conceptos probabilísticos y un mejor desempeño en los estudiantes, de forma complementaria a la evidencia de la utilidad del trabajo colaborativo

para mejorar sus conocimientos (Keele y Steinhorst, 2001; Coutinho, 2005; Azcárate y Serradó, 2006; Mercado, 2013; Alexander y Bueno, 2013).

La importancia del papel del profesor en el contexto educativo probabilístico también ha sido objeto de estudio. Así, las concepciones y visiones de los profesores sobre Probabilidad se han mostrado como diversas, insuficientes y a veces erróneas, por lo que urge organizar cursos dentro de un marco conceptual, como parte de programas oficiales de formación de profesores (Azcárate, 1996; Batanero, Díaz Godino y Roa, 2004; Pratt, 2005; Batanero, 2009; Batanero *et al*., 2009; Mannan, 2012; Anasagasti y Berciano, 2013; Díaz Godino, 2013).

Los estudios sobre el aprendizaje de la Probabilidad por parte de los alumnos también se han multiplicado. Las concepciones, los significados, las metodologías, las diferentes representaciones, los conceptos y su organización, las dificultades de aprendizaje, los procedimientos y el lenguaje han sido objeto de investigación entre alumnos. Las conclusiones apuntan a la existencia de conflictos y a la dificultad que esta temática induce en los estudiantes (Coutinho, 1994; Batanero *et al*., 1998; Gómez, 2000; Batanero y Díaz, 2007; Lopes, 2011, 2013; Almeida *et al*., 2013).

2.2. LAS TEORÍAS DE LOS CONCEPTOS NUCLEARES Y DE LOS CONCEPTOS THRESHOLD

La Teoría de los Conceptos Nucleares (TCN), desarrollada por Casas y Luengo, afirma que, a medida que los alumnos progresan en la escolaridad, su conocimiento sobre un tema se estructura de forma cada vez más simple, en torno a un conjunto de conceptos relevantes, Conceptos Nucleares (CN), que no son necesariamente, los más generales ni los más abstractos. (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2003, 2004 e 2005).

Los principales elementos distintivos de la TCN son la “organización geográfica del conocimiento”, y las nociones de “Concepto Nuclear” y “sendero de mínimo coste” (Casas, 2002; Antunes, 2010; Carvalho, 2011; Luengo *et al*., 2011; Catarreira, 2013; Luengo, 2013).

Esta teoría emplea, como soporte metodológico, las Redes Asociativas Pathfinder (PFNET) (Schvaneveldt, 1985,1988), basadas en la Teoría de Grafos, con las que comparten características comunes y están formadas por nodos que establecen entre ellos distintas relaciones, expresadas mediante aristas, que describen la mayor o menor proximidad entre los conceptos.

Con aplicaciones en áreas tan diversas como las Matemáticas, la Contabilidad, la Informática, la Ingeniería Telemática, la Evaluación de Aprendizajes, el Análisis del Conocimiento, o la Física, entre otros (Curtis e Davis, 2003; Kudikyala y Vaughn, 2005; Arias, 2008; Clariana *et al*., 2009; Sarwar, 2012; Almeida, 2011; Carvalho, 2011; Großschedl y Harms, 2013), las PFNET tienen como principal ventaja el modo en que se presentan los resultados finales. Estos surgen en forma de una representación organizada en el plano (las redes) que permiten, con cierta comodidad, identificar los conceptos más o menos importantes, o valorados, además de la presentación de un conjunto de índices (coherencia, similaridad y complejidad) y otros indicadores cuantitativos que permiten análisis comparativos más profundos entre redes (Casas e Luengo, 2005; Antunes, 2010; Carvalho, 2011; Almeida, 2011; Almeida, Casas y Luengo, 2013; Catarreira, 2013).

Por otra parte, Meyer y Land (2003) desarrollaron e introdujeron la noción de Conceptos Threshold (CT), que constituyen nociones o ideas que, inicialmente, son complicadas y problemáticas para los estudiantes, pero que, cuando son comprendidas, transformadas e integradas, pueden constituir uno de los fundamentos esenciales del aprendizaje, pues funcionan como “umbrales” o “puertas” para el conocimiento (Meyer y Land, 2003, 2005; Davies, 2003).

Los mismos autores refieren que esta tipología de Conceptos Threshold cumple, probablemente, las siguientes características: Transformador, en el sentido de que una vez comprendidos, su efecto potencial en el aprendizaje de los alumnos provoca un cambio significativo de la percepción de un tema o, al menos, de parte de él; Irreversibilidad en el sentido de que es improbable el cambio de la perspectiva provocada por la comprensión de un Concepto Threshold, y en caso de que sea olvidada es a costa de un considerable esfuerzo; Integrador, pues el concepto muestra las posibles conexiones con otros temas, las cuales, en la fase inicial, se mantenían indetectables e incomprensibles; Limitador, pues aunque no necesariamente siempre, estos conceptos pueden definir las fronteras de un asunto o área de conocimiento, y, por último Problemático, entendida esta característica en la dimensión de comprensión del concepto, la cual puede asumir diferentes formas, tal como se define en Perkins (1999).

Así, adoptando como marco teórico la Teoría de los Conceptos Nucleares, y las Redes Asociativas Pathfinder, se obtuvo la representación de la estructura cognitiva y se identificaron los Conceptos Nucleares, Nodos Polares (NP) y Nodos Extremidad (NE), de los alumnos en relación a la noción de Probabilidad, y, a partir de estos elementos, y otros, fueron reconocidos potenciales Conceptos Threshold, enfocándolo a la comprensión de la forma en

que un grupo de estudiantes de 9º y 12ª curso de escolaridad organizan sus ideas en torno al concepto de Probabilidad.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo general de la investigación lo constituye la "Comprensión de la estructura cognitiva de los alumnos de 9º (14-15 años) y 12º (17-18 años) cursos de escolaridad acerca del concepto de Probabilidad, con base en el marco teórico de las Teorías de los Conceptos Nucleares y de los Conceptos Threshold".

Para la consecución de esta finalidad, se utilizó una metodología por cuestionario para recoger los datos, aunque con características diferentes de las habituales, ya que, en algunos momentos fue sustituido el cuestionario en soporte papel por un instrumento informático, Goluca (Godinho, 2007; Casas *et al*., 2011)), que permitió formular las preguntas, recoger los datos y presentar algunos resultados, ya que otros fueron tratados con software específico de análisis de datos (SPSS 20 Y EXCEL 2007).

El programa informático Goluca, desarrollado por Casas, Luengo y Godinho sistematiza en un mismo software, tres procedimientos esenciales de la técnica de redes PFNET: 1) Permite establecer la relación entre los términos (A); 2) Representa la estructura cognitiva (B), y; 3) Permite el análisis da representación de la estructura (C).

(A) (B) (C)

Figura I – (A) Establecimiento de la relación entre los términos, (B) Representación de las redes PFNET y (C) Análisis de las PFNET

Para identificar los potenciales Conceptos Threshold se utilizó un cuestionario en papel, adaptado de Holloway, Alpay y Bull (2009), con el objetivo complementario de establecer relaciones entre éstos y las diferentes tipologías de conceptos de las redes PFNET (Nodos Extremidad, Nodos Polares y Conceptos Nucleares). Este instrumento de recogida de

datos, además del género y del curso de escolaridad, preguntaba a los alumnos acerca del concepto/idea/ejemplo que consideraban más o menos difícil de comprender en el momento del aprendizaje del concepto de Probabilidad. Además de esta información, y a través de una escala Likert, el cuestionario incluía un conjunto de afirmaciones para analizar las distintas dimensiones caracterizadoras de los Conceptos Threshold: transformador, irreversible, integrador y limitador (Meyer y Land, 2003).

Se optó por un diseño de investigación descriptivo, de tipo transversal, hecho sustentado por haber investigado a varios grupos de alumnos en un corte en el tiempo.

En esta lógica, el diseño de la presente investigación obligó al establecimiento de tres fases secuenciadas y funcionalmente dependientes:

- 1ª FASE - Definición de los términos, conceptos, nociones y ejemplos que serían utilizados en la elaboración de las Redes Asociativas Pathfinder. La selección de estos elementos constituyó una etapa fundamental en nuestro estudio. A tal efecto, fueron consultados veintidós profesores, se analizaron seis manuales escolares de 9º curso de escolaridad y el programa de Matemáticas de Enseñanza Básica y Secundaria y fueron tomados en consideración artículos que clarificasen los elementos del significado (Batanero, 2005) y de la alfabetización (Gal, 2005) probabilística, con la intención de corroborar la relevancia de los términos identificados.
- 2ª FASE - Investigación, en un primer momento, con estudiantes de 9º y 12º curso de escolaridad. Las respuestas dadas por los alumnos fueron efectuadas en ordenador e, por esta razón, las mismas se tomaron en aulas de informática, utilizando el programa Goluca, en los meses de enero y febrero de 2013. Se optó por estas fechas ya que este tema fue impartido en el primer trimestre del año lectivo 2012/13 (septiembre a noviembre de 2012), tanto en el 9º curso como en el 12º.
- 3ª FASE - Investigación, en un segundo momento, con estudiantes de 9º y 12º curso de escolaridad y cumplimentación del cuestionario para la detección de potenciales Conceptos Threshold. Esta fase tuvo como objetivo el análisis de la sedimentación de las estructuras cognitivas de los alumnos, obtenidas en la fase anterior, y transcurrió en los meses de mayo y junio de 2013. También en esta fase nos ocupamos de la posible detección, mediante un cuestionario en papel, de los potenciales Threshold.

Los términos seleccionados, once en total, sustentados en las respuestas de los veintidós profesores consultados, en los seis manuales escolares, en los programas de Matemáticas de 9º y 12ª curso de escolaridad y en los elementos del significado (Batanero,

2005) y de la alfabetización en Probabilidad (Gal, 2005), fueron, en orden a su mayor o menor generalidad, los siguientes (Figura II): *Probabilidad.* Conceptos generales*: azar, experiencia aleatoria, acontecimientos.* Conceptos matemáticos: *valor numérico, cociente, técnicas de recuento de casos, casos posibles y favorables, Ley de los grandes números, Ley (o regla) de Laplace*. Ejemplos: *Lanzamiento de monedas / dados.*

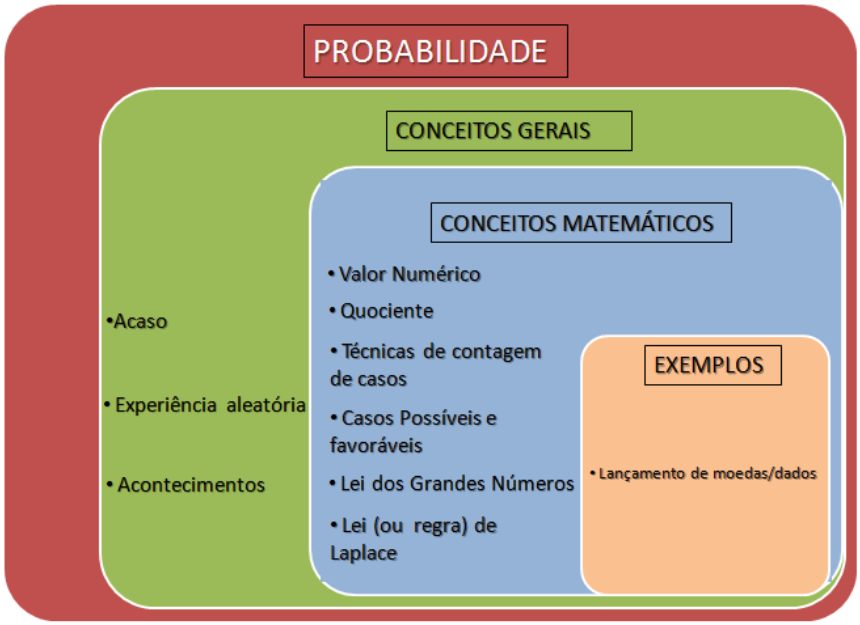


Figura II - Jerarquía de conceptos/términos/nociones/ejemplos asociados a Probabilidad. Definidos los términos / conceptos / ejemplos a utilizar para la construcción de las redes

Definidos los conceptos/términos/nociones/ejemplos de las PFNET, se decidió efectuar la recogida de datos, con los mismos estudiantes, en dos momentos distintos: 1ª Momento y 2ª Momento (Figura III).

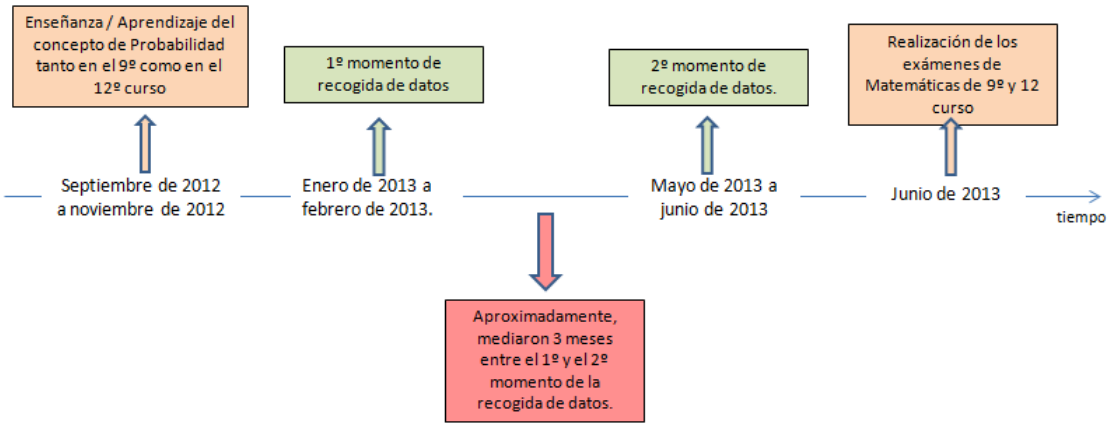


Figura III - Organización, en el tiempo, del primero y segundo momentos de recogida de datos en el 9. º y 12.º cursos

El 1º momento de recogida de datos se planificó para ser efectuado tras la impartición en clase de la temática de las probabilidades, y en él se pretendía obtener las primeras representaciones de las estructura cognitiva de los estudiantes sobre este concepto, dadas a través de las Redes Asociativas Pathfinder.

El 2º momento de obtención de información tuvo como objetivo investigar la consolidación y evolución de las representaciones de la estructura cognitiva en torno a la Probabilidad, analizar la sedimentación de este conocimiento y la estabilidad temporal de las concepciones cognitivas de estos estudiantes.

La distribución de los alumnos consultados en los dos momentos de la recogida de datos fue, según curso de escolaridad y género, la que consta en la Tabla I.

Tabla I. Distribución de los alumnos de la muestra, en el 1º y 2º momentos, según curso de escolaridad y género

	1º MOMENTO			2º MOMENTO		
Género/Curso	9.º curso	12.º curso	Total	9.º curso	12.º curso	Total
Masculino	116	43	159	105	46	151
Femenino	134	51	185	121	53	174
Total	250	94	344	226	99	325

Para establecer las relaciones entre los términos, se procedió a la consulta de los estudiantes para cuantificar las relaciones entre los términos previamente definidos. Se pidió a los sujetos que, según su opinión, indicasen la mayor o menor proximidad entre los pares de conceptos que, sucesivamente, van apareciendo en la pantalla del programa Goluca, en un total de $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{11\times10}{2} = 55$. Cuanto mayor o menor fuese el peso atribuído, mayor o menor sería la proximidade entre los conceptos / términos.

Mediante este procedimiento se genera una matriz (Tabla II) que refleja numéricamente la relación establecida entre los términos considerados y que constituye la base cuantitativa para la representación de la estructura cognitiva del alumno (Figura IV).

Tabla II.- Matriz de proximidad de un alumno de 9º curso sobre el concepto de Probabilidad, obtenida con el software Goluca

	TRC	EA	CPCF	Pro	Coc	LMD	Acon	VN	LL	Az
Técnicas de recuento de casos (TRC)										
Experiencia Aleatoria (EA)	0,216									
Casos posibles y casos favorables (CPCF)	0,506	0,848								
Probabilidad (Pro)	0,558	0,913	0,923							
Cociente (Coc)	0,535	0,126	0,535	0,535						
Lanzamiento de monedas/dados (LMD)	0,545	0,565	0,952	0,935	0,148					
Acontecimento (Acon)	0,181	0,906	0,939	0,881	0,252	0,510				
Valor numérico (VN)	0,532	0,548	0,497	0,116	0,835	0,500	0,177			
Ley (o regla) de Laplace (LL)	0,194	0,929	0,526	0,558	0,506	0,187	0,197	0,168		
Azar (Az)	0,926	0,568	0,868	0,490	0,168	0,935	0,542	0,126	0,116	
Ley de los Grandes Números (LGN)	0,219	0,129	0,165	0,506	0,503	0,184	0,148	0,487	0,145	0,226

A partir de esta matriz se construye la respectiva Red Asociativa Pathfinder (Figura IV).

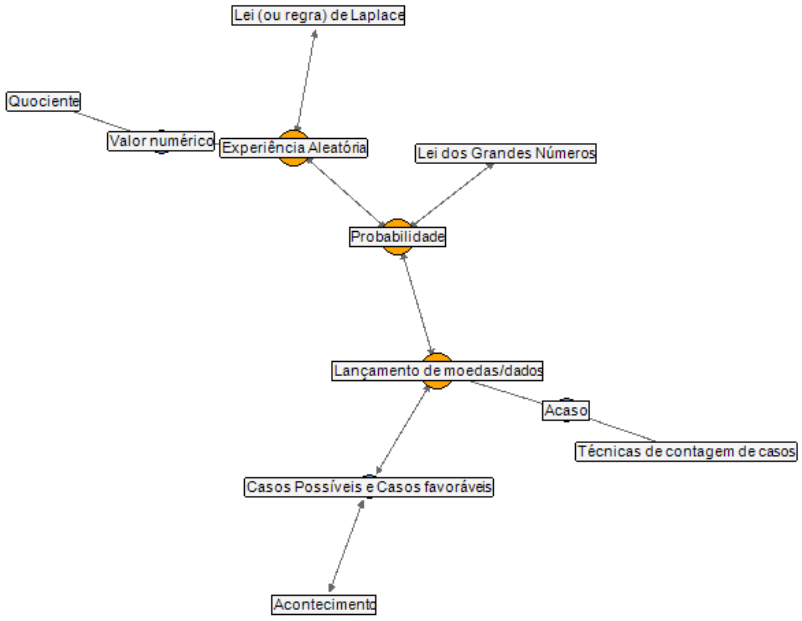


Figura IV - Red PFNET (∞,10) de un alumno de 9º curso de escolaridad

Las redes PFNET así obtenidas ofrecen amplia información visual (Conceptos Nucleares, Nodos Extremidad, Nodos Polares, relaciones entre conceptos, grupos de conceptos homogéneos, distancias, …) y además de ello se complementan con indicadores cuantitativos como la Coherencia, la Similaridad entre redes, el Índice de Complejidad de la red, el Índice de Centralidad de la red, entre otros, así como información proporcionada por las propias matrices numéricas.

El número de enlaces de un nodo constituye el grado del concepto representado en él. Consideramos como "Concepto Nuclear" al concepto que presenta tres o más enlaces, y por el hecho de presentar más enlaces adquiere mayor relevancia en la representación de la estructura cognitiva correspondiente al aprendizaje de un determinado contenido,.

Consideramos como "Nodo Extremidad" al concepto que, en la Red Asociativa Pathfinder, presenta un solo enlace y, en consecuencia, consideramos que aún no está debidamente incorporado en la estructura cognitiva de los alumnos. Definiremos por último, como "Nodo Polar" a aquel que presenta exactamente dos enlaces (Casas, 2002; Casas y Luengo, 2003, 2004, 2005).

La Coherencia de una red (Schvaneveldt, 1988) permite evaluar el conocimiento del tema tratado y presenta un valor que varía en el intervalo [-1,1] (Casas e Luengo, 2004; Antunes, 2012; Catarreira, 2013).

El Índice de Similaridad de dos redes se calcula a partir del análisis de los enlaces totales existentes en las dos redes y de los enlaces comunes, y varía en el intervalo [0,1] (Casas, 2002).

El índice de Complejidad de la Red (ICR), elaborado por Casas (2002), es un indicador numérico que permite evaluar cuantitativamente la complejidad de las distintas redes PFNET y proporciona también un valor que varía entre 0 y 1. Cuanto mayor sea su valor, mayor es la complejidad de la red. Este índice depende del producto de tres factores: densidad de la red (D), factor de los Nodos Nucleares (N) y factor del grado de los Nodos Nucleares (FN).

El Grado de Centralidad de una red constituye una medida de la tipología de la estructura cognitiva y varía también entre 0 y 1 (Clariana, 2011, 2013).

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

La Tabla III sistematiza los resultados obtenidos relativos a los diferentes indicadores cuantitativos de las redes PFNET, en el 1º y 2º momentos de recogida de datos.

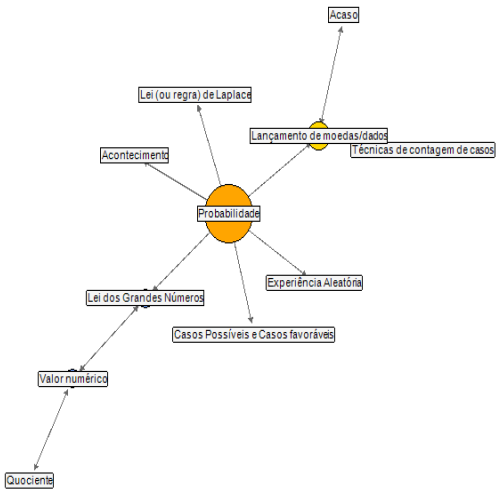
Tabla III.- Sistematización de los resultados de indicadores cuantitativos relativos al Género y Curso de Escolaridad, en los dos momentos de recogida de datos.

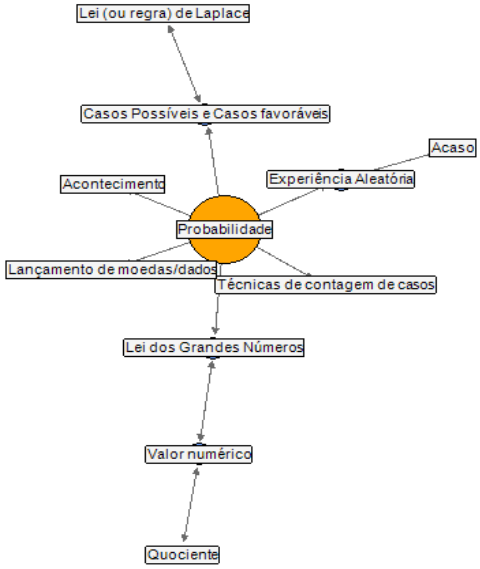
Indicador cuantitativo de la red PFNET	1º Momento de recogida de datos		2º Momento de recogida de datos	
	Género (alumnos vs alumnas)	Curso de escolaridad (9º curso vs 12º curso)	Género (alumnos vs alumnas)	Curso de escolaridad (9º curso vs 12º curso)
Número de Nodos Extremidad	Estadísticamente iguales	Estadísticamente diferentes	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales
Número de Nodos Polares	Estadísticamente iguales	Estadísticamente diferentes	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales
Número de Nodos Nucleares	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales
Densidad de la red	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales
Factor Nodos Nucleares	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales
Grado Nodos Nucleares	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales
Factor grado Nodos Nucleares	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales
Coherencia	Estadísticamente iguales	Estadísticamente diferentes	Estadísticamente iguales	Estadísticamente diferentes
Índice de complejidad de red	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales	Estadísticamente iguales

En cuanto a las diferentes medidas cuantitativas, en el 1º y 2º momentos de recogida de datos, la variable género no fue discriminatoria, es decir, los diferentes indicadores presentaron valores estadísticamente iguales.

En relación con el curso de escolaridad, solamente la variable Coherencia de la red mantiene valores estadísticamente diferentes en los dos momentos de recogida de datos, con valores más altos al final del último curso de Enseñanza Secundaria.

Las redes medias PFNET para los dos cursos de escolaridad y en los dos momentos, se presentan en las dos figuras siguientes:



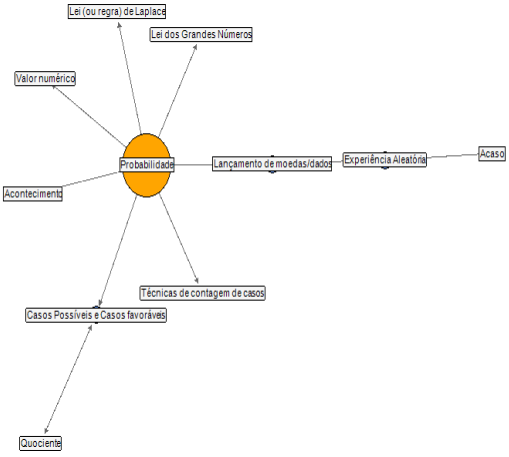


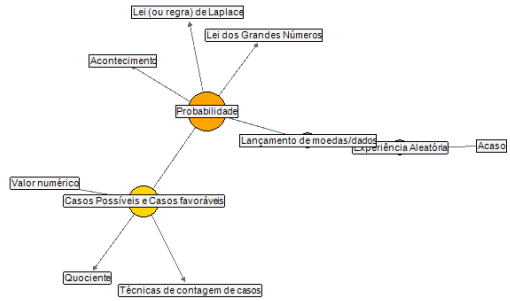
Red Media 9º curso M1
ICR =2,716
Centralidad de la red = 0,513

Red Media 9º curso M2
ICR =0,91
Centralidad de la red =0,511

Similaridad=0,538

Figura V – Redes medias de 9º curso en los dos momentos de recogida de datos





Red Media 12º curso M1
ICR =1,06
Centralidad de la red =0,637

Red Media 12º curso M2
ICR =2,72
Centralidad de la red =0,389

Similaridad=0,667

Figura VI – Redes medias de 12º curso en los dos momentos de recogida de datos

En relación a la tipología de los conceptos, la Tabla IV muestra los conceptos presentes en estas redes medias.

Tabla IV – Tipologia de conceptos en las redes medias en los dos momentos de recogida de datos y para los dos cursos de escolaridad

	9º curso M1	9º curso M2	12º curso M1	12º curso M2
Azar	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad
Acontecimento	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad
Casos posibles y favorables	Nodo Extremidad	Nodo Polar	Nodo Polar	Conceito Nuclear
Experiencia Aleatoria	Nodo Extremidad	Nodo Polar	Nodo Polar	Nodo Polar
Lanzamiento de dados/monedas	Concepto Nuclear	Nodo Extremidad	Nodo Polar	Nodo Polar
Ley (o regla) de Laplace	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad
Ley de los Grandes Números	Nodo Polar	Nodo Polar	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad
Probabilidad	Concepto Nuclear	Conceito Nuclear	Concepto Nuclear	Concepto Nuclear
Cociente	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad
Técnicas de recuento de casos	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad
Valor Numérico	Nodo Polar	Nodo polar	Nodo Extremidad	Nodo Extremidad

Parece evidente que el curso de escolaridad más constante a nivel de tipología de los términos / ideas / ejemplos es el 12º, ya que de los once conceptos considerados, solamente uno cambia su tipología del 1º al 2º momento (Casos posibles y favorables), lo que muestra una mayor consolidación en la estructura cognitiva de los estudiantes.

En relación a los estudiantes más jóvenes, ocho de los conceptos conservan su tipología y tres varían (“Experiencia aleatoria”, “Casos posibles y favorables” y “Lanzamiento de monedas / dados”).

Una lectura más transversal, comparando la tipología de los conceptos desde el 1º momento de recogida de datos en 9º curso con el 2º momento de recogida de datos en el 12º curso nos muestra que:

- Los conceptos “Azar”, “Acontecimiento”, “Ley (o regla) de Laplace”, “Cociente” y “Técnicas de recuento de casos” se mantienen en estos cursos como Nodo Extremidad, o sea, no se encuentran debidamente consolidados en el estructura cognitiva.
- La noción de “Probabilidad” es el único concepto que se mantiene, en estos cursos y momentos, como Concepto Nuclear, es decir, tiene relevancia en la estructura cognitiva.
- El concepto “Experiencia aleatoria”, que inicialmente es un Nodo Extremidad, pasa a ser Nodo Polar.
- Tanto el concepto “Valor numérico” como el de “Ley de los Grandes Números” disminuyen su importancia cognitiva al pasar de Nodo Polar a Nodo Extremidad.

- La importancia del ejemplo "Lanzamiento de dados / monedas" disminuye, al pasar de Concepto Nuclear (9º curso, 1º momento) a Nodo Extremidad (12º curso, 2º momento).
- Por el contrario, la significación cognitiva de "Casos posibles y casos favorables" se amplía, al pasar de Nodo Extremidad, en el 9º curso (1º momento), a Concepto Nuclear en el 12º curso (2º momento).

Globalmente, estos resultados nos permiten constatar que existen conceptos que se mantienen a lo largo del tiempo poco consolidados en la estructura cognitiva de los estudiantes, que se refieren a la especificidad de esta temática matemática ("Azar" y "Acontecimiento") y a cuestiones ligadas a los procedimientos y algoritmos probabilísticos ("Ley (o regla) de Laplace", "Técnicas de recuento de casos" y "Cociente") Hubo un aumento, del 9º al 12 curso, de la importancia cognitiva de los "Casos posibles y casos favorables" aspecto que nos paree asociado a la utilización / dificultad del cálculo combinatorio para determinar tales cantidades.

La comparación del Índice de Complejidad de las redes del 9º curso (1º momento) con las del 12º curso (2º momento) presenta, en el test de Mann-Whitney, el valor de Sig. = 0,780 (>0,05) que es indicador de que en términos de complejidad de las redes no hay diferencias estadísticamente significativas entre el 9º curso (1º momento) y el 12º curso (2º momento).

En relación con el concepto más complicado / difícil de entender, obtuvimos:

Tabla V – Concepto más complicado/más difícil de entender según refieren los estudiantes

Conceptos	9º curso Masculino	9º curso Femenino	9º curso Total	12º curso Masculino	12º curso Femenino	12º curso Total	Total
Azar	2	5	7	4	4	8	15
Acontecimento	2	4	6	0	0	0	6
Casos posibles y casos favorables	1	7	8	2	2	4	12
Experiencia aleatoria	1	3	4	3	2	5	9
Lanzamiento de monedas/dados	0	2	2	0	0	0	2
Ley (o regla) de Laplace	37	32	69	1	2	3	72
Ley de los Grandes Números	35	25	60	13	20	33	93
Probabilidad	3	0	3	2	3	5	8
Cociente	11	26	37	2	2	4	41
Técnicas de recuento de casos	8	7	15	15	15	30	45
Valor numérico	6	9	15	3	4	7	22
Total	106	120	226	45	54	99	325

El concepto más complicado / difícil de entender en el 9º curso de escolaridad fue el de "Ley (o regla) de Laplace" (69) y el de "Ley de los Grandes Números" (60), verificándose también que este último concepto (33) juntamente con el de "Técnicas de recuento de casos" (30) fueron los más complicados de entender por los estudiantes de 12º curso. El menos referido como complicado / difícil fue el "Lanzamiento de monedas / dados", en ambos cursos de escolaridad.

De ello resulta que el concepto que parece perpetuarse en el tiempo (tanto en 9º como en 12 curso) como el más difícil de entender es el de "Ley de los Grandes Números", que surge, en este contexto, como problemático / difícil y, consecuentemente, de acuerdo con Meyer y Land (2003), como candidato a Concepto Threshold.

Paralelamente, y para medir la relación existente entre las frecuencias con que surgen como potenciales Conceptos Threshold (CT) y las diferentes tipologías de los conceptos en las redes (PFNET) (Nodos Extremidad, NE, Nodos Polares, NP, Conceptos Nucleares, CN), se calculó el coeficiente de correlación de Spearman. Este coeficiente fue determinado entre las variables: frecuencia como CT y frecuencia como NE (en el 9º curso, en el 12º curso y en relación al total de alumnos), frecuencia como CT y frecuencia como NP (en el 9º curso, en el 12º curso y en relación al total de alumnos) y la frecuencia como CT y frecuencia como CN (en el 9º curso, en el 12º curso y en relación al total de alumnos).

Los valores de estos coeficientes fueron:

Tabla VI – Coeficientes de correlación de *Spearman* (ρ) entre los potenciales Conceptos *Threshold* (CT) y las diferentes tipologías de conceptos en las PFNET (NE, NP e CN)

$\rho(CT_9 \text{ y } NE_9)= 0, 743^{**}$	$\rho(CT_{12} \text{ y } NE_{12})= 0,389$	$\rho(CT_{Total} \text{ y } NE_{Total})= 0,636^{*}$
$\rho(CT_9 \text{ y } NP_9)= - 0,251$	$\rho(CT_{12} \text{ y } NP_{12})= - 0,216$	$\rho(CT_{total} \text{ y } NP_{Total})= - 0,273$
$\rho(CT_9 \text{ y } CN_9)= - 0,797^{**}$	$\rho(CT_{12} \text{ y } CN_{12})= - 0,537$	$\rho(CT_{total} \text{ y } CN_{Total})= - 0,682^{*}$

*La correlación es significativa al nivel 0,05 (2 colas).

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (2 colas).

La lectura de estos valores permitió obtener algunas conclusiones. La primera fue la existencia de una correlación positiva y significativa entre la frecuencia con que son referidos los potenciales Conceptos Threshold y los Nodos Extremidad, tanto en el 9º curso (0,743) como para el total de alumnos (0,636), resultando que cuantos más alumnos refieren un concepto como CT también lo refieren como Nodo Extremidad. En el 12º curso, a pesar de ser positiva, fue baja y no significativa.

En segundo lugar, valores de correlaciones bajas negativas entre la frecuencia con que son referidos los Conceptos Threshold y los Nodos Polares tanto en el 9º curso (-0,251) como en el 12º (-0,216) y en el total (-0,273), aunque estos valores no son significativos.

El último aspecto a considerar se deriva del hecho de que hay correlaciones negativas y significativas entre la frecuencia con que fueron referidos los potenciales Conceptos Threshold y los Conceptos Nucleares, tanto en el 9º curso (-0,797), como para la totalidad de los alumnos (-0,682), resultando que mientras más alumnos refieren un concepto como CT, menos alumnos lo refieren como Concepto Nuclear. En el 12º curso (-0,537), y a pesar de que el coeficiente indica una correlación moderada negativa, ésta no fue significativa.

5. CONCLUSIONES

A lo largo de nuestro trabajo empírico, y en los dos momentos de recogida de datos, se obtuvieron un total de 669 (1º momento: 334 y 2º momento: 325) representaciones de las estructuras cognitivas de estudiantes, mediante las Redes Asociativas Pathfinder, en torno al concepto de Probabilidad.

A partir de las redes medias PFNET de los dos momentos de recogida de datos, podemos observar que en el grupo de estudiantes más jóvenes, emerge un Concepto Nuclear "Probabilidad" en torno al cual orbitan los términos "Acontecimiento", "Lanzamiento de monedas / dados", " Experiencia aleatoria", "Ley de los Grandes Números" y "Casos posibles y favorables", todos ellos asociados al lenguaje específico de esta temática matemática. El ejemplo "Lanzamiento de monedas / dados" pierde importancia al pasar de Concepto Nuclear, en el 1º momento, a Nodo Extremidad en el 2º momento de recogida de datos. Se constata la existencia de una "rama" formada por la "Ley de los Grandes Números", "Valor numérico" y "Cociente" y diametralmente opuestos como Nodos Extremidad en esta disposición, "Azar" y "Cociente", siendo estos últimos conceptos los menos consolidados en la estructura cognitiva de los alumnos en torno al concepto de Probabilidad. Es llamativa en el 9º curso la débil ligazón existente entre la Probabilidad y su vertiente mensurable dada por los términos "Cociente" y "Valor numérico".

También los términos "Azar" y "Cociente" aparecen, en las redes medias PFNET de los estudiantes de 12º curso de escolaridad y en los dos momentos de recogida de datos, muy apartados. Son redes muy centradas en el Concepto Nuclear "Probabilidad", a pesar de que, en el 2º momento de recogida de datos, el término "Casos posibles y casos favorables" aumenta

su relevancia en estas representaciones de las estructuras cognitivas, y por esta razón pasa a Concepto Nuclear, aspecto, que, en nuestra opinión, se relaciona con el reconocimiento de la importancia que los alumnos atribuyen a la utilización del Cálculo Combinatorio para determinar esta cantidades. Para este nivel de enseñanza es recurrente la existencia de una "rama" formada ahora por las nociones "Lanzamiento de monedas / dados", "Experiencia aleatoria" y "Azar", aspecto que nos parece natural ya que tenemos un ejemplo de una experiencia aleatoria y que, por esta razón está envuelta en la incertidumbre. La imprevisibilidad asociada a este tema matemático se expresa a través del hecho de que los términos "Azar" y "Experiencia aleatoria" no surgen muy próximos a "Probabilidad".

A pesar del incremento del grado de dificultad de los contenidos probabilísticos del 9º curso al 12º curso, no hay diferencias estadísticamente significativas en el Índice de Complejidad de Redes, en los dos años de escolaridad y en los dos momentos, lo que demuestra numéricamente la inexistencia de un aumento de la complejidad de las PFNET. Este hecho evidencia que en el año escolar en que los alumnos profundizan la temática de las probabilidades, la respectiva estructura cognitiva no se vuelve más compleja, privilegiando relaciones ya existentes / consolidadas en cursos escolares anteriores.

El concepto más complicado / difícil de entender tanto en el 9º curso como en el 12º fue la "Ley de los Grandes Números". De ello resulta que este concepto parece perpetuarse en el tiempo como el más difícil de entender en ambos años de escolaridad. Por el hecho de ser una noción problemática y difícil de entender, constituye un candidato a ser un potencial Concepto Threshold. Aún así, el cuestionario utilizado no evidenció que esta noción verificase también las otras características asociadas a este tipo de concepto: transformador, integrador, irreversible y limitador.

La existencia de una correlación positiva y significativa entre la frecuencia con que son referidos los potenciales Conceptos Threshold y los Nodos Extremidad, tanto en el 9º curso como para el total de alumnos, resultando que cuantos más alumnos refieren un Concepto Threshold también lo refieren como Nodo Extremidad. En el 12º curso esta correlación, a pesar de ser positiva, es baja. Nuestra opinión es que, el hecho de que los Nodos Extremidad aún no estén debidamente consolidados en la estructura cognitiva no impide que, por la importancia de algunos de ellos ("Ley de los Grandes Números") haya que insistir más profundamente en su proceso de Enseñanza / Aprendizaje.

En este trabajo conseguimos detectar como potencial Concepto Threshold la "Ley de los Grandes Números" y además demostrar la relación entre los Nodos Extremidad de las

PFNET y los conceptos más difíciles / complicados de entender (potenciales Conceptos Threshold).

Consideramos que para que los estudiantes alcancen un nivel adecuado de comprensión sobre la Probabilidad, deben ser capaces de establecer conexiones que relacionen sus diferentes significados. En esta lógica, opinamos que la "Ley de los Grandes Números" por su potencialidad en establecer puentes entre las diferentes concepciones de Probabilidad (Laplaciana, Frecuencial y Subjetiva), debe ser una noción abordada con más profundidad en el 9º curso de escolaridad y reforzada su enseñanza y aprendizaje en el curso final de la enseñanza secundaria (12º curso).

Aunque no conocemos estudios de aplicación específica de estas teorías a la temática de la Probabilidad, algunas de nuestras conclusiones son patentes también en investigaciones aplicadas a otros aspectos matemáticos. Podemos encontrar en Casas (2002) y Catarreira (2013) la constatación de la existencia de un número reducido de Conceptos Nucleares presentes en la estructura cognitiva, alrededor de los cuales los alumnos centran sus conocimientos. En las investigaciones de estos mismos autores se verificó que no había aumento del Índice de Complejidad de las PFNET, y se constató la existencia de enlaces que se mantienen en el tiempo así como la relevancia de la metodología de las redes PFNET en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje.

Por otro lado la identificación del potencial Concepto Threshold "Ley de los Grandes Números" viene a demostrar la importancia que este concepto asume como uno de los modos de descubrir las probabilidades (Gal, 2005) a través de procedimientos y algoritmos (Batanero, 2005), y como elemento para " (…) hacer inferencias que conecten los enfoques subjetivo, clásico y frecuencial" (Sánchez y Valdés, 2013).

Al posibilitar la identificación de los conceptos más significativos y las relaciones más relevantes en la estructura cognitiva de los alumnos, estamos convencidos de que las teorías de los Conceptos Nucleares y de los Conceptos Threshold constituyen una herramienta didáctica para organizar la práctica pedagógica y un referente pedagógico rico y fecundo que debe ser tomado en consideración en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Probabilidad.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E OBJETIVOS DE INVESTIGAÇÃO

1.1. INTRODUÇÃO

1.2. OS ANTECEDENTES E A PERTINÊNCIA DA TEMÁTICA DO ESTUDO

1.3. OBJETIVOS E PERGUNTAS DE INVESTIGAÇÃO

1.4. DESCRIÇÃO SUMÁRIA DA INVESTIGAÇÃO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E OBJETIVOS DE INVESTIGAÇÃO

"Uma investigação é, por definição, algo que se procura. É um caminhar para um melhor conhecimento e deve ser aceite como tal, com todas as hesitações, os desvios e as incertezas que isso implica"

Quivy e Campenhoudt

1.1. INTRODUÇÃO

A procura e a compreensão da organização dos conceitos associados a um dado conteúdo sempre desempenharam um papel relevante na Didática da Matemática e, nas últimas décadas, têm-se assumido como uma matéria de pesquisa importante entre investigadores educacionais. Apesar dos significativos avanços registados nas últimas décadas, a forma como a mente humana funciona e se organiza constitui, ainda, um enigma.

Todavia, um dado amplamente aceite é o de que a informação é armazenada na memória de um individuo ajustando-se a uma certa disposição das ideias, ou, no contexto da aprendizagem de certos assuntos específicos, a uma organização cognitiva de conceitos/noções/exemplos daquela área particular de conhecimento, como reconhece Catarreira (2013) quando afirma que "*a representação do conhecimento assume um papel de destaque ao longo de todo o processo de ensino aprendizagem, pois permite compreender as transformações que têm lugar na estrutura cognitiva do aluno."*

Nesta perspetiva, Casas (2002) refere que "*Resulta claro que la adquisición del conocimiento tiene que ver con los procesos que se suceden durante el aprendizaje por parte*

del alumno. Todas las teorías educativas, y consecuentemente, todas las aportaciones de la Didáctica están encaminadas a tratar cómo se produce la integración de los conocimientos, que son elementos externos, con la estructura cognitiva interna de los alumnos", ou, como explicita Luengo (2013), "*La reflexión sobre las formas en que el conocimiento es adquirido y almacenado en la estructura cognitiva del alumno, y cómo puede ser representado, tiene implicaciones en la enseñanza y la investigación educativa.".*

Ainda a este propósito, Carvalho (2011), afirma "*Conhecer como o conhecimento é adquirido, como é armazenado na estrutura cognitiva dos alunos e como pode ser representado, pode ter implicações na investigação educativa e, consequentemente, no processo de ensino e aprendizagem.*"

Ausubel *et al*. (1978), afirmam que a aprendizagem significativa no processo de ensino necessita de fazer algum sentido para o aluno e, neste sistema, a informação deverá interagir e ancorar-se nos conceitos salientes já existentes na estrutura do aluno, de tal modo que uma nova informação deve relacionar-se, de maneira substantiva e não-arbitrária, com os aspetos relevantes e presentes na estrutura conceptual do indivíduo.

Assim, "*A aprendizagem é muito mais significativa à medida que o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquire significado para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio"* (Pelizzari *et al.*, 2002). Por outras palavras, "*a aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se, de maneira substantiva (não-literal) e não-arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo*" (Moreira, 1999)

Nesta organização cognitiva a relação entre os conceitos, outorgada pelos sujeitos, depende da importância e da semelhança, ou proximidade, entre eles, "mensurável" através das relações de dependência e das propriedades que têm em comum. Quanto maior for o número de propriedades em comum perspetivadas, por um individuo, maior será a relação, e consequentemente, a proximidade entre os conceitos.

Neste sentido admitimos que a estrutura cognitiva dos alunos em torno de uma determinada temática pode-se organizar na forma de uma rede, cuja representação está condicionada pelas relações estabelecidas entre conceitos.

Através do conhecimento da organização cognitiva dos alunos sobre um determinado conteúdo, podemos identificar os conceitos que mais se destacam, assim como aqueles que ainda não estão devidamente incorporados na sua estrutura cognitiva. Estes conceitos permitem obter informação sobre os conhecimentos dos alunos e podem servir como plataforma de diagnóstico para adequar e preparar novas e diferentes estratégias, com vista à melhoria dos processos formativos (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2003, 2004 e 2005; Luengo, 2003).

A Teoria dos Conceitos Nucleares (TCN), desenvolvida por Casas e Luengo (2002), afirma que à medida que os alunos progridem na escolaridade, o seu conhecimento é estruturado de uma forma cada vez mais simples e em torno de um conjunto limitado de conceitos relevantes - Conceitos Nucleares - que, no entanto, não são necessariamente os mais gerais nem os mais abstratos. Resulta daqui que os Conceitos Nucleares, numa perspetiva de dimensão cognitiva, podem adotar um papel que é ligeiramente discordante do que é preconizado por Ausubel, quando declara "*… que na aprendizagem significativa para que a nova informação seja assimilada, a estrutura conceptual deve possuir ideias-âncora, isto é, conceitos relevantes e disponíveis para enquadrar e apoiar novas aprendizagens.*" (Vasconcelos *et al.*, 2000).

Nesta lógica, os Conceitos Nucleares podem não ser ideias de nível superior, que servem como suporte para outras mais simples, mas podem ser noções mais elementares e, inclusive, exemplos utilizados, recorrentemente, no decorrer da prática pedagógica.

Em suma, a Teoria dos Conceitos Nucleares constitui um marco teórico recente e que vem facultar uma perspetiva inovadora sobre o processo de aprendizagem do aluno e "*(…) ofrece un punto de vista para aproximarse a comprensión de cómo se adquiere y organiza el conocimiento y cómo se puede caracterizar la estructura cognitiva. Se trata de una nueva perspectiva para explicar cómo los procesos de aprendizaje se producen en la mente humana* " (Luengo,2013).

Os principais elementos caracterizadores da TCN são a "*Organização geográfica do conhecimento*" e as noções de "*Conceito Nuclear*" e de "*Caminho de custo mínimo*" (Casas, 2002; Antunes, 2010; Carvalho, 2011; Luengo *et al.*, 2011; Catarreira, 2013; Luengo, 2013). Tem como suporte a metodologia das Redes Associativas Pathfinder (PFNET) (Schvaneveldt, 1985,1988), baseada na Teoria dos Grafos, as quais apoiam-se num conjunto de características comuns e são compostas por nós que estabelecem entre si distintas relações, expressas

através de arestas, que descrevem a maior ou menor proximidade entre os conceitos (Antunes, 2010).

Estamos convictos que a Teoria dos Conceitos Nucleares, sustentada na metodologia das Redes Associativas Pathfinder, permite obter uma clarificação da representação da organização do conhecimento e a identificação dos conceitos mais relevantes na estrutura conceptual evidenciada pelos estudantes.

As redes obtidas através desta metodologia podem ser incluídas entre os métodos de representação do conhecimento que fazem uso da pontuação entre a similaridade de conceitos (Luengo *et al.*, 2011; Carvalho *et al.*, 2012; Casas *et al.*, 2013; Luengo, 2013).

Por sua vez Meyer e Land, em 2003, desenvolveram e introduziram a noção de Conceito *Threshold*. Segundo estes investigadores, estes conceitos constituem noções, ou ideias, que inicialmente para os estudantes são complicadas e problemáticas, mas que, no entanto, quando compreendidas, transformadas e integradas podem constituir um dos fundamentos essenciais à aprendizagem, pois funcionam como "portais", ou "janelas", para o conhecimento (Meyer e Land, 2003, 2005). Davies (2003) afirma mesmo que "*This concept provides a promising way of interpreting the learning demand presented by subjects*".

Como atrás já referimos, um dos aspetos de enorme importância na Didática, em geral, e da Didática da Matemática, em particular, prende-se com o estudo dos processos mentais relacionados com a aprendizagem dos estudantes. Este estudo, enquadrado dentro da Didática da Matemática, procura efetuar uma investigação na qual a Teoria dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos *Threshold* possam complementar-se ao nível da interpretação e da análise da organização conceptual dos alunos sobre a noção de Probabilidade e, assim, obter informação sobre a organização do conhecimento dos alunos, o que pode servir como base de diagnóstico para adequar e planificar novas e diferentes estratégias, com vista à melhoria dos processos formativos.

Utilizando estes dois referenciais teóricos, e as Redes Associativas Pathfinder, representaremos a estrutura cognitiva e identificaremos os Conceitos Nucleares de alunos, com idades entre os 14-18 anos, em relação à noção de Probabilidade e a partir destes, e outros, elementos reconhecer potenciais Conceitos *Threshold*, com vista à compreensão do modo como os estudantes organizam as suas ideias em torno da Probabilidade.

Neste estudo, utilizou-se uma metodologia por questionário para recolher os dados, apesar de esta apresentar características diferentes das habituais, já que se substituiu, em alguns momentos, o questionário em suporte papel por um instrumento informático - *Goluca*

(Godinho, 2007; Casas *et al.*, 2011) - que nos permitiu formular as questões, recolher os dados e apresentar alguns resultados, já que outros foram tratados com *software* específico de análise de dados (SPSS 20 e Excel 2007). Optou-se por um desenho de investigação com características descritivas e transversais, facto sustentado pela inquirição de diferentes grupos de estudantes condicionada por um corte no tempo.

Este trabalho encontra-se estruturado em seis Capítulos, os quais vão acompanhados, no final, pela Bibliografia, com as referências da literatura consultada, e os Anexos, que compilam um conjunto de documentos e informação utilizada no decorrer desta investigação.

O presente Capítulo tem como objetivo apresentar uma introdução à temática da investigação, os seus antecedentes e pertinência, complementado com a definição das hipóteses e perguntas de investigação. Também aqui iremos descrever, sucintamente, as principais fases de pesquisa que nortearam a nossa pesquisa.

No Capítulo 2 serão descritas as principais ideias teóricas que suportam o nosso trabalho de investigação e, por este facto, constituem o nosso marco teórico de referência. Aqui falaremos em pormenor da Teoria dos Conceitos Nucleares, das Redes Associativas Pathfinder, dos Conceitos *Threshold* e apresentaremos a revisão bibliográfica efetuada.

O Capítulo seguinte (Capitulo 3) é dedicado ao tema que constitui o objeto matemático de estudo - conceito de Probabilidade. Faremos um enquadramento histórico da evolução deste conceito no Currículo da Matemática em Portugal no pós II Guerra Mundial, abordaremos os seus diferentes significados e respetivos elementos caracterizadores e finalizaremos com a apresentação de investigações publicadas, organizadas de acordo com o Currículo, os Recurso, a Formação de Professores e a Aprendizagem das Probabilidades.

No Capítulo 4 centraremos o nosso discurso nas opções metodológicas definidas para o desenho de investigação, justificando as escolhas e os procedimentos levados em consideração na recolha, compilação e tratamento dos dados.

No Capítulo 5 serão expostos os resultados do trabalho empírico realizado, apoiados pelas diferentes metodologias adotadas, das quais destacamos as Redes Associativas *Pathfinder* e as técnicas de Estatística Descritiva e Inferencial, articuladas com métodos Classificativos e de Regressão.

No Capítulo 6 serão apresentadas as conclusões, as limitações à investigação e sugestões para futuros trabalhos de pesquisa.

1.2. OS ANTECEDENTES E A PERTINÊNCIA DA TEMÁTICA DO ESTUDO

Num artigo publicado em 1999 na revista *Campo Abierto*, Luís Casas e Ricardo Luengo (Casas e Luengo, 1999) apresentam "(…) *un método útil, por su versatilidad y facilidad de uso, para el conocimiento y la representación de las estructuras conceptuales de los alumnos: las Redes Asociativas Pathfinder (…)*". Nas palavras destes investigadores, esta metodología *"(…) tiene ventajas sobre otros utilizados actualmente, tales como los mapas conceptuales, pues es totalmente empírico y muy rápido de realizar*", o que vem evidenciar as potencialidades de representação e de análise reveladas por esta técnica (Schvaneveldt, Durso e Goldsmith, 1988). Ainda neste artigo é apresentada, como exemplo, uma aplicação à resolução de problemas aritméticos, sugerindo-se no final, outras possíveis aplicações na área das Ciências Sociais.

Na sua tese de doutoramento, Casas (2002) descreve um estudo da evolução da estrutura cognitiva do conceito de Ângulo utilizando as representações gráficas provenientes das Redes Associativas Pathfinder, recorrendo a uma amostra de 458 alunos, com idades entre os 9 e os 18 anos. Baseando-se no marco teórico da Ciência Cognitiva e das suas implicações na Didática da Matemática, os resultados empíricos obtidos originaram uma proposta para uma nova teoria – a Teoria dos Conceitos Nucleares. As conclusões obtidas experimentalmente, e confirmados através de técnicas estatísticas paramétricas e não paramétricas, mostraram que à medida que progridem na escolaridade, os alunos organizam o seu conhecimento de uma forma cada vez mais simples em torno de um conjunto limitado de conceitos relevantes – Conceitos Nucleares, mas que não são, necessariamente, os mais gerais, nem os mais abstratos. De entre as implicações didáticas, destaca-se a possibilidade de organizar o ensino em torno destes conceitos importantes, adequando estratégias e materiais pedagógicos

Nos anos seguintes, estes autores publicam artigos onde sistematizam a Teoria dos Conceitos Nucleares e nos quais se realça o desenvolvimento das técnicas de representação do conhecimento, das quais assume um papel de destaque a metodologia das Redes Associativas Pathfinder. Estas redes permitem não só conjeturar acerca dos processos internos de aquisição e organização do conhecimento, mas também obter representações visuais do seu estado e evolução (Casas e Luengo, 2003, 2005, 2012; Antunes, 2010; Carvalho, 2011; Casas *et al.*, 2012; Almeida *et al.*, 2013; Catarreira, 2013; Luengo, 2013).

Por outro lado, a ideia dos Conceitos *Threshold*, emergiu no âmbito de um projeto desenvolvido no Reino Unido, o qual visava melhorar os ambientes de ensino e aprendizagem em cursos do Ensino Superior. Em 2003, surge o relatório, produzido por Meyer e Land, no âmbito do projeto *Enhancing Teaching-Learning Environments in Undergraduate Courses* (ETL Project), no qual apresentam as características dos Conceitos *Threshold* e, à luz do trabalho de Perkins (1999), tentam estabelecer correspondências entre a noção de Conceito *Threshold* e de Conhecimento Problemático.

Em consequência, Meyer e Land (2003) desenvolveram e introduziram a noção de Conceito *Threshold*. De acordo com a definição apresentada por estes investigadores, os Conceitos *Threshold* constituem conceitos, ideias ou noções, que inicialmente para os estudantes são conceções complicadas e até mesmo problemáticas, mas que, no entanto, quando compreendidas, elas são transformadoras, integradoras e contribuem para aprendizagens significativas.

Estes conceitos funcionam como "portas de entrada", ou "janelas", para a visualização, para o entendimento e para a compreensão de um determinado tema e sem o seu entendimento o aluno apresenta dificuldades em progredir na aprendizagem. A definição original de Conceito *Threshold* como algo semelhante a "um portal", que é transformador, provavelmente irreversível, integrador, muitas vezes problemático e, provavelmente, limitado, tem vindo a ser refinada ao longo do processo de identificação destes conceitos. No entanto outros autores (Davies e Mangan, 2005) usaram, elaboraram e diferenciaram diferentes tipos de Conceitos *Threshold: basic, disciplinary e modelling*. Todavia, a definição central sobre estas entidades mantém-se e, inclusive, tem vindo a ser reforçada (Davies e Mangan, 2006a, 2006b, 2007; Meyer e Land, 2006).

Apesar de não termos conhecimento de nenhum trabalho de investigação que relacione diretamente estas duas vertentes – Teoria dos Conceitos Nucleares e Conceitos *Threshold* - em estudos associados a conceitos matemáticos, parece-nos uma vertente de estudo pertinente e que poderá ser extremamente profícua para a Didática da Matemática, em geral, e para o Ensino e Aprendizagem da Probabilidade, em particular.

Em relação ao tema matemático Probabilidade, tem-se verificado nas últimas décadas a inclusão e o reconhecimento da importância, desde os primeiros anos de escolaridade, de ideias associadas a esta noção nos currículos dos diferentes ciclos de educação dos estudantes e em diferentes países.

A temática da Probabilidade constitui um tópico matemático extremamente interessante e peculiar, em função da diferente abordagem epistemológica que a sua aprendizagem pressupõe.

Este conteúdo vem quebrar com alguma primazia dada à lógica do sim/não, verdade/falso, do modelo determinístico, introduzindo nos estudantes uma forma diferente de pensar, ao admitir a existência, para além destas duas últimas possibilidades, de todo um intervalo no qual prevalece a incerteza e o acaso. Nas palavras de Azcárate (1996) "*La visión del mundo y de las matemáticas es eminentemente determinista, lo cual ha provocado que la mayoría de los niños y adultos carezcan de una rede conceptual apropiada para comprender el mundo de la incertidumbre y su posible tratamiento matemático. Por ello, su inclusión no sólo supone un cambio curricular, implica necesariamente una modificación de lo lógica determinista dominante. Por tanto, desde el punto de vista educativo, la introducción en el contexto escolar de una posible interpretación probabilística de la realidad conlleva en cambio sustancial en la perspectiva formativa del individuo*".

Batanero (2005) enumera os elementos do significado de probabilidade considerados relevantes na abordagem didático-pedagógica das Probabilidades - *o campo de problemas no qual emerge o objeto matemático, os elementos linguísticos, os procedimentos e algoritmos, as definições e propriedades dos objetos e as suas relações com outros objetos matemáticos e os argumentos e demonstrações das propriedades*.

Em paralelo Gal (2005) reflete sobre o que deve ser entendido por literacia probabilística e alega que esta designação sugere, para além de crenças, atitudes, hábitos mentais e uma perspetiva crítica, um conjunto amplo de conhecimentos factuais e certas aptidões formais e informais. Nesta lógica sugere cinco aspetos importantes que se devem ter em consideração no seu ensino e relacionados com o conhecimento da Probabilidade: *as grandes ideias (variabilidade, aleatoriedade, independência, previsibilidade e incerteza), descobrir probabilidades (modos de encontrar ou estimar a probabilidade de acontecimentos), linguagem (os termos e métodos utilizados para comunicar sobre a Probabilidade), o contexto (compreender o papel e as implicações das questões e mensagens probabilísticas em vários contextos e no discurso pessoal e público) e as questões críticas (questões para refletir quando se lida com probabilidades).*

Nesta ótica, e tomando em consideração estes e outros referenciais (opinião de professores, manuais escolares e os programas de Matemática em vigor), iremos estudar a estrutura cognitiva, dada pelos estudantes, de conceitos, termos e/ou exemplos, utilizados no

processo de ensino e aprendizagem, em torno da noção de Probabilidade, em alunos do 9.º ano (14-15 anos) e nos estudantes do 12.º ano de escolaridade (17-18 anos).

A pertinência da temática do presente trabalho é ainda justificada pelo crescente interesse manifestado pela comunidade de investigadores nesta área. A título de exemplo referimos que recentemente, nos dias 5 e 6 de abril de 2013, realizaram-se as "*I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*", organizadas pelo Grupo de Investigación *en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM) y el Grupo de *Educación Estadística de la Universidad de Granada*,.

Oficialmente inseridas no *International Year of Statistics*, este evento contou com a presença alargada de participantes. A participação neste congresso poderia revestir a modalidade de assistente virtual ou dinamizador de conferências, comunicações e/ou *posters*.

Neste encontro, foram apresentadas seis conferências, dinamizadas por especialistas de renome internacional nesta área, das quais três tinham explicitamente a ver com diferentes ideias e noções sobre o Conceito de Probabilidade: "*Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores*" (Díaz Godino, 2013), "*La cuantificación del azar: Una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad*" (Sánchez e Valdez, 2013) e "*Intuições de alunos do 9º ano em independência e probabilidade condicionada*" (Fernandes e Correia, 2013).

No formato de *posters* houve dez posters, 40% dos quais sobre questões relacionadas, diretamente, com a Probabilidade. No que diz respeito às comunicações, foram aceites, pela comissão científica deste evento, sessenta e cinco comunicações, das quais 31% eram relacionadas, explicitamente, com a Probabilidade e as restantes com a Estatística e a Combinatória.

Em síntese, este estudo enquadrado num marco teórico relativamente recente - Teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos *Threshold* - assume, na nossa perspetiva, pertinência ao conjugar estas duas visões para estudar um conceito matemático – Probabilidade – sobre o qual os jovens manifestam frequentemente dificuldades na sua aprendizagem e que constitui um conteúdo relevante, e comum, a diferentes percursos formativos.

1.3. OBJETIVOS E PERGUNTAS DE INVESTIGAÇÃO

Em função do exposto anteriormente, no presente estudo definimos o nosso objetivo geral como sendo:

> "*Compreender a estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º (14-15 anos) e 12.º (17-18 anos) anos de escolaridade sobre a noção de Probabilidade, com base no marco teórico da Teoria dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold.*"

No entanto, consideraremos ainda, para a clarificação deste objetivo geral, a definição dos seguintes objetivos específicos (*Obj.Esp.)*:

- ***Obj.Esp.$_1$*** – Obter as representações das estruturas cognitivas dos alunos, dadas através das Redes Associativas *Pathfinder*, dos estudantes dos 9.º e 12.º anos de escolaridade e em relação à noção de Probabilidade;

- ***Obj.Esp.$_2$*** - Conhecer a forma como os alunos, destes níveis de ensino, organizam conceptualmente, os conceitos relacionados com a Probabilidade;

- ***Obj.Esp.$_3$*** - Através das Redes Associativas *Pathfinder*, identificar os Conceitos Nucleares, os nós extremidade e nós polares mais frequentes na organização conceptual dos estudantes dos 9.º e 12.º anos de escolaridade, no que concerne à noção de Probabilidade;

- ***Obj.Esp.$_4$*** - Averiguar se existem diferenças nos vários indicadores quantitativos das Redes Associativas *Pathfinder*, entre os alunos do género feminino e masculino, e dos diferentes anos de escolaridade em relação ao conceito de Probabilidade;

- ***Obj.Esp.$_5$*** – Analisar a evolução da organização conceptual do conceito de Probabilidade à medida que os alunos avançam na escolaridade;

- ***Obj.Esp.$_6$*** – Identificar potenciais Conceitos *Threshold* presentes na organização conceptual dos estudantes dos 9.º e 12.º anos de escolaridade, em relação ao conceito de Probabilidade.

- ***Obj.Esp.*$_7$** – Relacionar os potenciais Conceitos *Threshold* com as diferentes tipologias dos conceitos presentes nas Redes Associativas *Pathfinder*, à luz da Teoria dos Conceitos Nucleares.

Nesta lógica, definimos as seguintes perguntas de investigação (*Perg.)* as quais estão intimamente relacionados com os objetivos previamente referidos e que nos ajudarão à obtenção, *a posteriori*, de conclusões mais claras e precisas:

- ***Perg.*$_1$** – Como se encontram organizadas as representações das estruturas cognitivas dos alunos relacionadas com a Probabilidade, dadas através das Redes Associativas *Pathfinder*, dos estudantes dos 9.º e 12.º anos de escolaridade?

- ***Perg.*$_2$** – Quais são os Conceitos Nucleares, nós extremidade e nós polares mais frequentes na organização conceptual, dada através das Redes Associativas *Pathfinder*, dos estudantes dos 9.º e 12.º anos, em relação à noção de Probabilidade?

- ***Perg.*$_3$** - São estes conceitos sempre os mesmos ou mudam de acordo com o nível de aprendizagem?

- ***Perg.*$_4$** – Será que existem diferenças nos vários indicadores quantitativos das Redes Associativas *Pathfinder* relativas à noção de Probabilidade, entre os alunos do género feminino e masculino?

- ***Perg.*$_5$** – Será que existem diferenças nos vários indicadores quantitativos das Redes Associativas *Pathfinder* relativas à noção de Probabilidade, nos diferentes anos de escolaridade?

- ***Perg.*$_6$** – Quais são os potenciais Conceitos *Threshold* presentes na organização conceptual dos estudantes dos 9.º e 12.º anos, em relação à noção de Probabilidade?

- ***Perg.*$_7$** – Será que existe alguma relação entre os potenciais Conceitos *Threshold* e as diferentes tipologias dos conceitos presentes nas Redes Associativas *Pathfinder*, à luz da Teoria dos Conceitos Nucleares?

As perguntas de investigação, formuladas deste modo, serão respondidas nos apartados subsequentes deste trabalho e, de um modo mais específico, nos Capítulos 5 e 6 dedicados à análise de resultados e às conclusões.

No esquema seguinte apresentam-se o objetivo geral, os objetivos específicos e as correspondentes perguntas de investigação.

OBJETIVO GERAL	
Compreender a estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º (14-15 anos) e 12.º (17-18 anos) anos de escolaridade sobre a noção de Probabilidade, com base no marco teórico da Teoria dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos *Threshold*.	
Objetivos Específicos	**Perguntas de investigação**
Obter as representações das estruturas cognitivas dos alunos, dadas através das Redes Associativas *Pathfinder*, dos estudantes dos 9.º e 12.º anos de escolaridade e em relação à noção de Probabilidade. Conhecer a forma como os alunos, destes níveis de ensino, organizam conceptualmente, os conceitos relacionados com a Probabilidade.	Como se encontram organizadas as representações das estruturas cognitivas dos alunos relacionadas com a Probabilidade, dadas através das Redes Associativas *Pathfinder*, dos estudantes dos 9.º e 12.º anos de escolaridade?
Através das Redes Associativas *Pathfinder*, identificar os Conceitos Nucleares, os nós extremidade e nós polares mais frequentes na organização conceptual dos estudantes dos 9.º e 12.º anos de escolaridade, no que concerne à noção de Probabilidade.	Quais são os Conceitos Nucleares, nós extremidade e nós polares mais frequentes na organização conceptual, dada através das Redes Associativas *Pathfinder*, dos estudantes dos 9.º e 12.º anos, em relação à noção de Probabilidade?
Averiguar se existem diferenças nos vários indicadores quantitativos das Redes Associativas *Pathfinder*, entre os alunos do género feminino e masculino, e dos diferentes anos de escolaridade em relação ao conceito de Probabilidade.	Será que existem diferenças nos vários indicadores quantitativos das Redes Associativas *Pathfinder* relativas à noção de Probabilidade, entre os alunos do género feminino e masculino? Será que existem diferenças nos vários indicadores quantitativos das Redes Associativas *Pathfinder* relativas à noção de Probabilidade, nos diferentes anos de escolaridade?
Analisar a evolução da organização conceptual do conceito de Probabilidade à medida que os alunos avançam na escolaridade.	São estes conceitos sempre os mesmos ou mudam de acordo com o nível de aprendizagem?
Identificar os potenciais Conceitos *Threshold* presentes na organização conceptual dos estudantes dos 9.º e 12.º anos de escolaridade, em relação ao conceito de Probabilidade.	Quais são os potenciais Conceitos *Threshold* presentes na organização conceptual dos estudantes dos 9.º e 12.º anos, em relação à noção de Probabilidade?
Relacionar os potenciais Conceitos *Threshold* com as diferentes tipologias dos conceitos presentes nas Redes Associativas *Pathfinder*, à luz da Teoria dos Conceitos Nucleares.	Será que existe alguma relação entre os potenciais Conceitos *Threshold* e as diferentes tipologias dos conceitos presentes nas Redes Associativas *Pathfinder*, à luz da Teoria dos Conceitos Nucleares?

Figura 1 – Objetivos e perguntas da Investigação

1.4. DESCRIÇÃO SUMÁRIA DA INVESTIGAÇÃO

Este estudo insere-se no âmbito da Didática da Matemática, incide sobre o conceito matemático de Probabilidade e enquadra-se na categoria de estudos descritivos, assumindo aspetos de uma investigação transversal, com propósitos comparativos.

A investigação realizada foi desenhada de acordo com cinco fases, algumas estendidas no tempo, sequenciais e funcionalmente dependentes. Estas fases podem ser apresentadas, sucintamente, do seguinte modo:

- ***1.ª FASE – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA***

Análise documental de trabalhos sobre a Teoria dos Conceitos Nucleares, as Redes Associativas *Pathfinder*, os Conceitos *Threshold* e, ainda, sobre Didática da Probabilidade, ao nível das orientações curriculares, dos recursos didáticos, formação de professores e aprendizagem dos alunos, sobre a temática do Ensino e Aprendizagem da noção de Probabilidade;

- ***2.ª FASE – IDENTIFICAÇÃO DOS TERMOS, CONCEITOS, NOÇÕES E EXEMPLOS ASSOCIADOS AO CONCEITO DE PROBABILIDADE***

Definição dos termos a serem utilizados na elaboração das Redes Associativas *Pathfinder*. A seleção destes elementos constituiu uma etapa fundamental do nosso estudo, já que constituirão a base da análise a realizar. Para tal inquiriram-se professores, analisaram-se manuais escolares do 9.º ano de escolaridade e os programas de Matemática do Ensino Básico e do Ensino Secundário e, ainda, efetuou-se uma categorização/enquadramento na qual se levou em consideração artigos que clarificam os elementos do significado (Batanero, 2005) e da literacia (Gal, 2005) probabilística.

- ***3.ª FASE – INQUIRIÇÃO, NUM PRIMEIRO MOMENTO (1.º momento), DOS ESTUDANTES DOS 9.º (14-15 anos) E DO 12.º (17-18 anos) ANOS DE ESCOLARIDADE.***

Pretendeu-se obter as primeiras representações da estrutura cognitiva dos estudantes sobre o conceito de Probabilidade, dadas através das Redes Associativas *Pathfinder*. As respostas dadas pelos alunos foram efetuadas em computador, com recurso ao *software Goluca* e, por esta razão, as mesmas ocorreram em salas de aula de informática, nas últimas três semanas do mês de janeiro e primeira de fevereiro de 2013 (1.º Momento). Optou-se por estas datas, já que este tema foi lecionado no 1.º período do ano letivo de 2012/13, em ambos os anos de escolaridade.

- ***4.ª FASE - INQUIRIÇÃO, NUM SEGUNDO MOMENTO (2.º momento), DOS ESTUDANTES DO 9.º E DO 12.º ANO DE ESCOLARIDADE E PASSAGEM DO QUESTIONÁRIO PARA A DETEÇÃO DOS POTENCIAIS CONCEITOS THRESHOLD.***

Esta fase teve como objetivo averiguar da consolidação das representações da estrutura cognitiva e da estabilidade temporal das conceções cognitivas dos estudantes em relação à noção de Probabilidade, ou seja, analisar a maturação e a sedimentação deste conhecimento, ao compará-las com as obtidas no momento de recolha de dados anterior. Estabeleceu-se, propositadamente um período de, aproximadamente, três meses, sendo que esta recolha de dados coincidiu com o final do ano letivo 2012/13 - maio e junho (2.º Momento). A metodologia de recolha de dados nesta fase coincidiu com os pressupostos que estiveram subjacentes ao 1.º Momento. Para além da utilização do *Goluca*, utilizou-se um questionário, em suporte de papel, para detetar potenciais Conceitos *Threshold* e adaptado de Holloway, Alpay e Bull (2009), com o objetivo de relacionar estes com as diferentes tipologias dos conceitos das redes PFNET.

- ***5.º FASE – ANÁLISE DE RESULTADOS E CONCLUSÕES.***

Nesta etapa centramos a nossa investigação na análise dos dados obtidos, aplicando diferentes técnicas e procedimentos com o objetivo de dar resposta às perguntas de investigação.

Na Figura 2, apresenta-se uma descrição sumária de cada uma das Fases referidas anteriormente e contextualizadas no tempo:

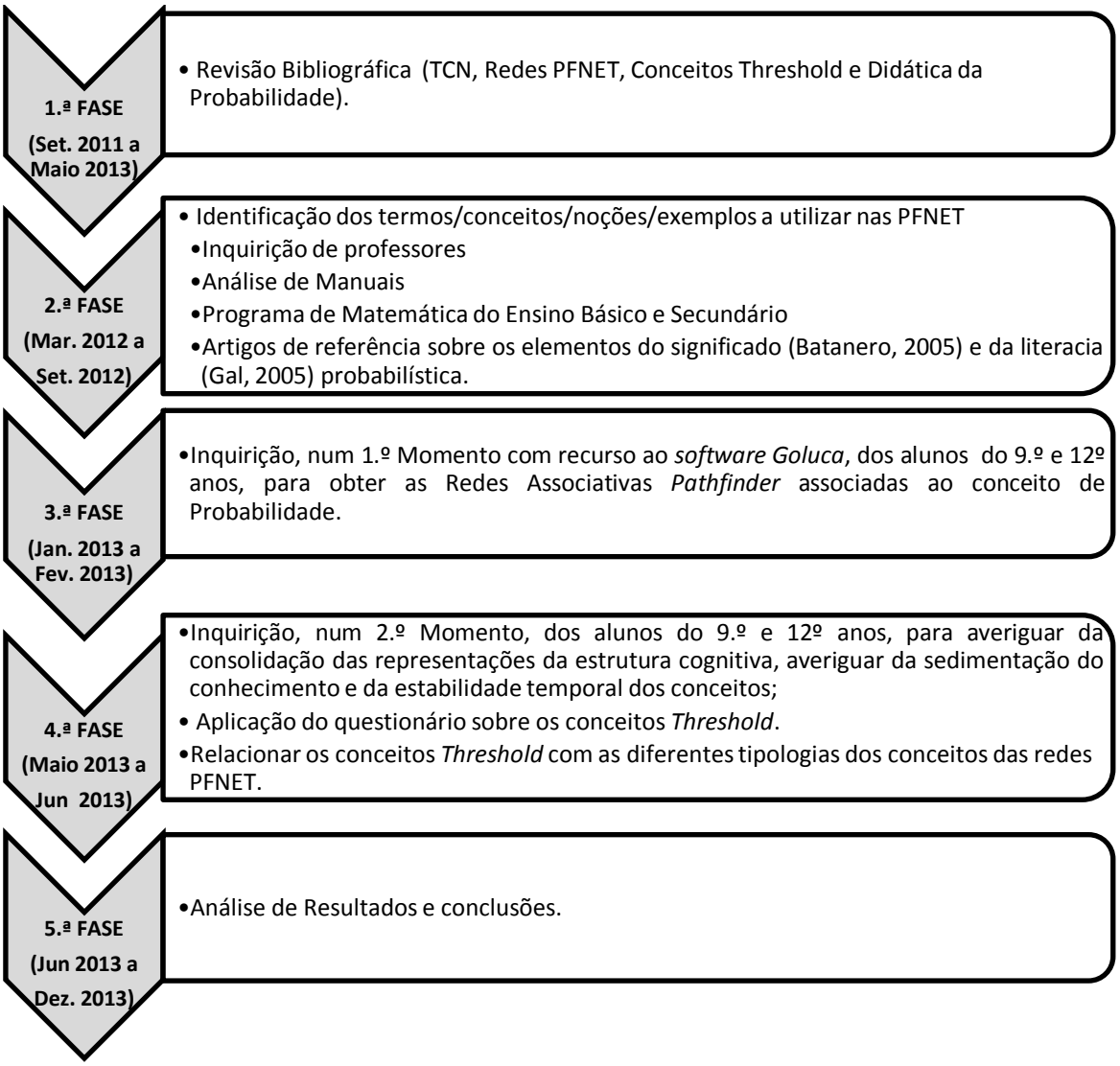


Figura 2 – As diferentes fases da Investigação realizada

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. A TEORIA DOS CONCEITOS NUCLEARES

2.1.1. A Organização Geográfica do Conhecimento

2.1.2. Os Conceitos Nucleares

2.1.3. Os Caminhos de Custo Mínimo

2.1.4. As Redes Associativas *Pathfinder*

2.1.4.1. Os fundamentos básicos das Redes Associativas *Pathfinder:* O algoritmo *Pathfinder*

2.1.4.2. Exemplo de aplicação do algoritmo *Pathfinder*

2.1.4.3. Indicadores quantitativos das redes PFNET

2.1.4.4. Exemplo do cálculo dos indicadores quantitativos de uma PFNET

2.1.4.5. A Rede Média PFNET

2.2. TRABALHOS DE DIVULGAÇÃO E DE APLICAÇÃO DAS REDES ASSOCIATIVAS *PATHFINDER* E DA TEORIA DOS CONCEITOS NUCLEARES

2.2.1. Trabalhos de investigação, divulgação e aplicação da metodologia das Redes Associativas *Pathfinder*

2.2.2. Trabalhos de investigação, divulgação e aplicação da Teoria dos Conceitos Nucleares

2.2.3. Síntese e conclusões

2.3. DIFERENTES FORMAS DE CONHECIMENTO. O CONHECIMENTO PROBLEMÁTICO E OS CONCEITOS *THRESHOLD*

2.3.1. O Conhecimento Declarativo, o Conhecimento Procedimental e o Conhecimento Estrutural

2.3.2. Diferentes formas do Conhecimento Problemático

2.3.3. Os Conceitos *Threshold*

2.3.3.1. As investigações iniciais sobre os Conceitos *Threshold*

2.3.3.2. Estudos sobre os Conceitos *Threshold* na Matemática

2.3.3.3. Outras áreas de estudo sobre Conceitos *Threshold*

2.3.4. Síntese e conclusões

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

"A principal meta da Educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas, não somente repetir o que outras gerações já fizeram. Homens que sejam criadores, inventores, descobridores. A segunda meta é formar mentes que estejam em condições de criticar, verificar e não aceitar tudo o que a elas se propõe."

Jean Piaget

Neste Capítulo, iremos descrever as principais ideias que suportam e apoiam o nosso trabalho de investigação e, por este facto, constituem o nosso marco teórico de referência.

2.1. A TEORIA DOS CONCEITOS NUCLEARES

A Teoria dos Conceitos Nucleares (TCN) foi proposta em 2002, por Casas e Luengo, e surge como corolário de um conjunto de trabalhos desenvolvidos, em anos anteriores, por estes investigadores. Como referem estes autores, não pretende ser uma proposta isolada mas sim um contributo de integração com outras teorias, em particular as de Piaget e Ausubel, apresentando, no entanto, modificações que permitem explicar e analisar factos de forma diferente (Casas, 2002).

Como outra qualquer teoria recorre, para além de um conjunto de termos específicos com os quais pretende explicar parte da realidade de contextos educativos, a métodos e técnicas específicas qua a caracterizam.

Os elementos distintivos da Teoria dos Conceitos Nucleares são:

1- A Organização geográfica do conhecimento;

2 – Os Conceitos Nucleares;

3 – Os Caminhos de Custo Mínimo;

4 – As Redes Associativas *Pathfinder*.

Comentemos com um pouco mais de detalhe estes elementos distintivos e fundamentais da Teoria dos Conceitos Nucleares.

2.1.1. A Organização Geográfica do Conhecimento

Entre os seus pressupostos, a TCN salienta que a aquisição do conhecimento e o seu respetivo armazenamento na estrutura cognitiva segue um processo análogo ao da aquisição do conhecimento do ambiente físico que rodeia um sujeito.

Esta aquisição processa-se de acordo com três etapas: 1) conhecimento de marcos de referência; 2) conhecimentos de caminhos, e finalmente; 3) conhecimento do conjunto (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2003, 2004, 2005).

A primeira destas etapas prende-se com a identificação de algumas referências pontuais que pode ser, entre outros, um monumento ou uma casa. De seguida é necessário navegar de um marco de referência a outro, pelo que é necessário o conhecimento de um caminho que os una. No entanto, esta etapa não fornece informação suficiente da organização geral, pelo que se torna necessário ter uma visão mais ampla e completa de todos os marcos de referência, assim como das rotas consideradas e das suas possíveis relações. Neste momento a circulação no "mapa" pode efetuar-se de modos diferente, escolhendo o caminho que é mais conveniente e económico, ou como refere Casas (2002) *"Cuando conocemos un territorio nuevo, aprendemos el país, luego la región y luego el pueblo donde estamos, correspondiendo país, región y pueblo, a conceptos sucesivamente más inclusivos, tal como preconizan Ausubel y Novak. De forma diferente, (…), se aprenden unas marcas en el territorio, unas referencias geográficas, que no tienen que ser las más generales, sino que quizá sean una*

ciudad o un edificio concretos, y luego vamos ampliando nuestro conocimiento del territorio añadiendo nuevos hitos".

Para uma melhor compreensão desta metáfora geográfica basta ter em atenção os mapas que frequentemente são utilizados por turistas, quando visitam, pela primeira vez, uma cidade. Nestas representações, do ambiente físico da cidade, podemos encontrar ilustrações claras, e por vezes até desproporcionadas, de pontos de referência importantes e de alguns caminhos que os unem. Provavelmente ao fim de alguns dias de visita, o turista assimila e organiza, ao seu modo, estes elementos particulares e começa a ter uma visão mais global do que está a visitar.

O mapa da Figura 3 pretende ilustrar esta metáfora:

Figura 3 – Mapa da cidade de Lisboa

Nesta representação podemos identificar referenciais importantes como, entre outros, as Pontes 25 de Abril e Vasco da Gama e o aeroporto de Lisboa e as principais vias de ligação entre eles, relevando para segundo plano potenciais vias secundárias. Somente quando se domina a posição destes elementos parciais é que se consegue ter uma visão mais ampla do todo.

Por sua vez, Ausubel acredita que o ser humano estrutura os seus conhecimentos sobre determinado tema de maneira hierárquica, onde o conceito mais geral e inclusivo tem posição de destaque na maneira como esse conteúdo se posiciona na estrutura cognitiva, e

relacionados com esse conceito mais geral estarão os conceitos auxiliares e menos inclusivos (Valadares, 2006).

Dito de uma outra maneira, o conhecimento está construído de tal forma que se podem reter novas ideias e informações, de forma mais eficaz, quando já estão disponíveis noções ou conceitos tipicamente mais inclusivos, mais gerais e abstratos.

Em suma, e contrariamente à Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), a TCN advoga que a aquisição do conhecimento não tem necessariamente que obedecer a uma estrutura hierárquica, no sentido dos conceitos mais gerais e/ou globais para os mais específicos e limitados, mas sim pode satisfazer a uma organização não hierárquica dos conceitos.

A Tabela 1 pretende mostrar, sucintamente, estes elementos diferenciadores da organização geográfica e da organização hierárquica do conhecimento.

Tabela 1- Organização geográfica do conhecimento e Organização hierárquica do conhecimento

ORGANIZAÇÃO GEOGRÁFICA DO CONHECIMENTO (TCN)	ORGANIZAÇÃO HIERÁRQUICA DO CONHECIMENTO (TAS)
Processo não hierárquico, análogo ao da aquisição do conhecimento do ambiente físico: 1- conhecimento de marcos de referência; 2 - conhecimento do caminho; 3 - conhecimento do conjunto.	Processo hierárquico; 1 - conceitos mais gerais e inclusivos têm posição de destaque na estrutura cognitiva; 2 – o conhecimento surge, à custa dos conceitos mais gerais; 3 - os conceitos auxiliares e menos inclusivo surgem em consequência dos mais gerais.

2.1.2. Os Conceitos Nucleares

Apesar da existência de aspetos comuns a estas duas visões sobre a organização do conhecimento, a análise experimental tem demonstrado que os conceitos mais importantes na estrutura cognitiva não são só os mais abstratos, gerais, ou inclusivos, (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2004, 2005; Antunes, 2010; Catarreira, 2013; Almeida, Casas e Luengo, 2013), como sugerem Ausubel e Novak ao proporem a existência de ideias de nível superior que servem de ancoragem para outras mais simples. É ainda apontado, por estes últimos autores, que as

ideias e os conceitos mais gerais e abrangentes devem ser apresentados inicialmente e, progressivamente, diferenciados através da introdução dos detalhes específicos considerados necessários.

A TCN afirma que não tem que haver conceitos mais importantes, ou de nível superior, mas sim que existem conceitos que servem de base à estrutura cognitiva dos alunos – os Conceitos Nucleares. Estes podem ser, inclusivamente, meros exemplos utilizados no decorrer do processo de Ensino e Aprendizagem e que, pela sua especificidade, são os menos abstratos e gerais. Face a isto, torna-se mais interessante identificar qual, ou quais, são estas referências conceptuais – Conceitos Nucleares - na estrutura cognitiva dos alunos.

Na Tabela 2 mostramos os aspetos caracterizadores, da TCN e TAS.

Tabela 2- Conceitos Nucleares e conceitos inclusivos

CONCEITOS NUCLEARES (TCN)	**CONCEITOS INCLUSIVOS (TAS)**
Conceitos relevantes na estrutura cognitiva do aluno.	Conceitos mais gerais e abstratos e que devem ser apresentados inicialmente.
Não têm que ser os mais gerais e/ou mais abstrato.	Servem de ancoragem a ideias e conceitos mais simples.

2.1.3. Os Caminhos de Custo Mínimo

Como atrás referimos, no paradigma da Teoria da Aprendizagem Significativa e como consequência de novas aprendizagens, o conhecimento estrutura-se de acordo com uma lógica hierárquica, isto é, uma organização cada vez mais complexa à medida que aumenta a quantidade de conceitos e respetivas relações.

Todavia, a TCN tem vindo, experimentalmente, a comprovar o contrário, isto é, à medida que os estudantes avançam na sua aprendizagem surgem representações mais simples, dadas através das Redes Associativas *Pathfinder*, das relações entre os conceitos (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005; Antunes, 2010; Casas *et al.*, 2012; Almeida, Casas e Luengo, 2013).

Com efeito, Casas (2002) considera que, numa situação concreta na qual sejam exigidos requisitos que assumem particular relevância para novas aprendizagens, em vez de o

aluno estabelecer relações entre todos os conceitos presentes, de acordo com uma estrutura complexa, recorre a relações mais simples que, no entanto, para ele, são as mais significativas.

Esta relação mais efetiva para o sujeito de conceitos, noções, exemplos ou processos relativos a um contexto educativo, constitui o Caminho de Custo Mínimo.

A Tabela 3 procura distinguir estas duas perspetivas.

Tabela 3 - Caminhos de Custo Mínimo e Complexidade Crescente das Estruturas Cognitivas

CAMINHOS DE CUSTO MÍNIMO (TCN)	COMPLEXIDADE CRESCENTE DAS ESTRUTURAS COGNITIVAS (TAS)
Novas aprendizagens permitem obter representações mais simples, dadas através das Redes Associativas *Pathfinder*. Os caminhos têm como base o máximo benefício com um custo mínimo.	Novas aprendizagens, produzem organizações cognitivas mais complexas.

2.1.4. As Redes Associativas *Pathfinder*

Foi na década de 1970 que Novak, desenvolveu os mapas conceptuais. Estes instrumentos didáticos são representações gráficas no plano, semelhantes a diagramas, que fornecem informação sobre as relações entre conceitos e que estão ligados por palavras e/ou proposições e têm por objetivo representar relações significativas entre conceitos, na forma de afirmações. Representam uma estrutura que parte de conceitos mais inclusivos terminando com conceitos mais restritos. Estes mapas fornecem informação, a professores e a alunos, relativa à organização hierárquica dos conteúdos.

A utilização dos mapas conceptuais pressupõe que o indivíduo construa o seu conhecimento, e respetivos significados, a partir da elaboração destas representações, as quais devem servir como instrumentos para facilitar a aprendizagem de conteúdos, sistematizados em aprendizagens significativas. O Grupo Orion da Universidade da Extremadura, num texto da autoria de Suero, Pérez, Pardo, Pedro e Martinez (2011), afirma mesmo que "*Son nuestra herramienta didáctica preferida para combatir las preconcepciones y ayudar a nuestros alumnos a realizar aprendizajes significativos*".

Com o objetivo de ilustrar um mapa conceptual, apresentamos um exemplo sobre números inteiros positivos e números primos (Figura 4)

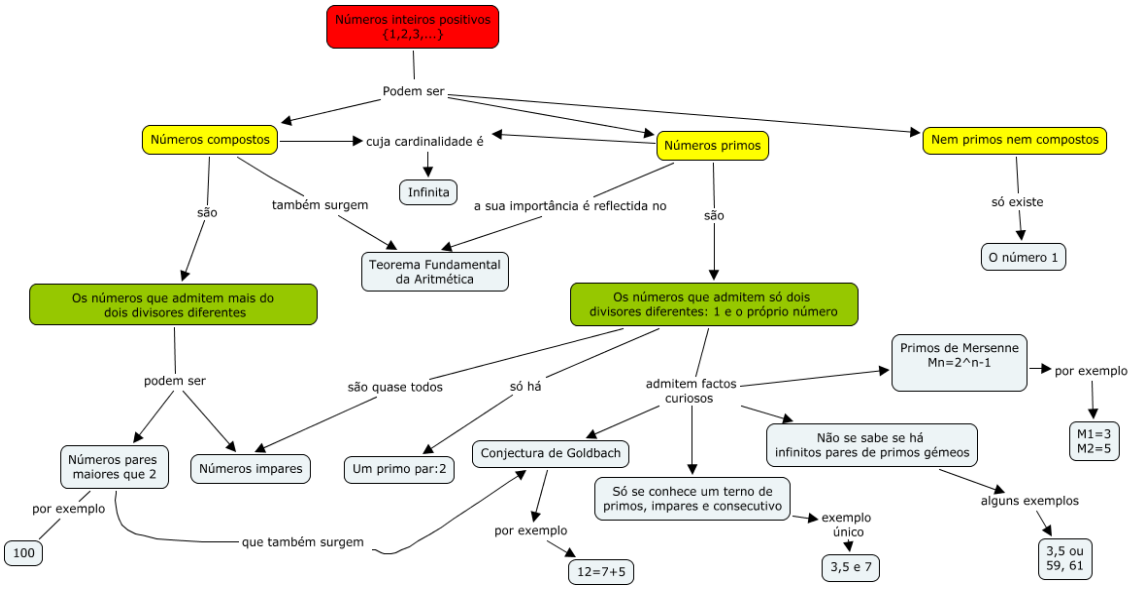


Figura 4 – Exemplo de um Mapa Conceptual

Apesar de reconhecermos as enormes vantagens pedagógicas que estas ferramentas apresentam, destacamos uma limitação: é que para elaborar mapas conceptuais é necessário saber fazer mapas conceptuais, ou seja, a maior facilidade em construir um mapa conceptual está condicionada não só pelo conhecimento de uma temática, mas também pelo bom domínio da técnica de construção do próprio mapa.

As Redes Associativas *Pathfinder* (PFNET) apresentam muitas das vantagens dos mapas conceptuais e os seus campos de utilização têm sido amplos. Estas representações permitem destacar qual, ou quais, são, dentro da estrutura cognitiva do estudante, os conceitos importantes e que relações estabelecem, facultando uma visão detalhada da organização conceptual, com uma interferência mínima por parte do investigador. Acresce a estas vantagens a possibilidade de obtenção de um conjunto de indicadores quantitativos, e respetivas interpretações, associados às redes produzidas pelos alunos, sobre os quais falaremos com mais detalhe à frente.

O exemplo de uma PFNET que mostramos de seguida (Figura 5) relaciona conceitos relativos à água e aos seres vivos.

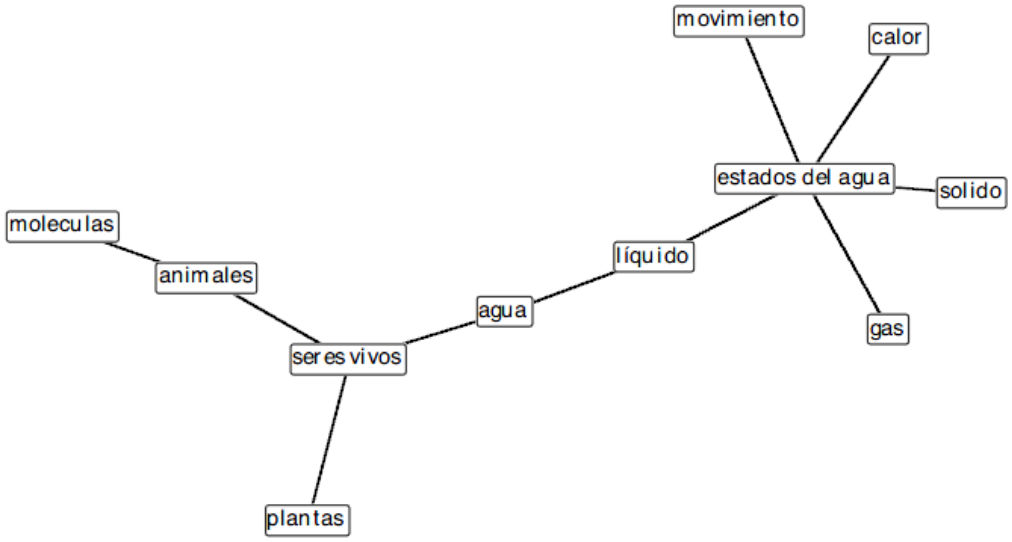


Figura 5 – Exemplo de uma Rede Associativa *Pathfinder* (Casas, 2002)

A Tabela 4 sistematiza algumas das vantagens e das limitações das Redes Associativas *Pathfinder* e dos Mapas Conceptuais.

Tabela 4 - Redes Associativas *Pathfinder* e os Mapas Conceptuais

AS REDES ASSOCIATIVAS *PATHFINDER* (TCN)	MAPAS CONCEPTUAIS (TAS)
Podem ser utilizadas em diversas áreas do saber.	Podem ser utilizadas em diversas áreas do saber.
Identificam os Conceitos Nucleares.	Colocam em destaque os conceitos mais inclusivos.
Identificam as relações entre conceitos.	Estabelecem relações entre os conceitos inclusivos e os mais restritos.
Representação gráfica da estrutura cognitiva.	Extremamente úteis para a avaliação.
Mínima interferência do investigador sobre o sujeito que responde.	Para fazer um "bom" Mapa Conceptual é necessário saber fazer Mapas Conceptuais.
Obtenção de um conjunto de indicadores quantitativos associados às Redes *Pathfinder*	

2.1.4.1. Os fundamentos básicos das Redes Associativas *Pathfinder: O algoritmo Pathfinder*

As Redes Associativas *Pathfinder* (PFNET), em consequência das vantagens que apresentam enquanto ferramenta interpretativa para o estudo e a representação da estrutura

cognitiva de diversos grupos de indivíduos e sobre diferentes temáticas, em particular da Matemática, constituem uma excelente metodologia gráfica e quantitativa, cuja aplicação é, relativamente, recente no âmbito de estudos educacionais (Schvaneveldt *et al.,*1988; Clariana *et al.*, 2013).

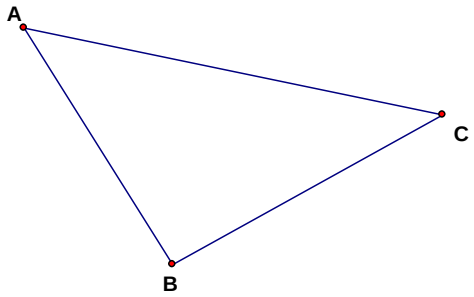
A sua utilização assenta em dois fatores que, na nossa ótica, têm promovido a sua implementação enquanto instrumento de apoio à investigação na área da Educação.

O primeiro fator prende-se com a facilidade com que se obtêm grandes quantidades de dados, permitindo deste modo trabalhar com amostras de grandes dimensões, facilitando a edificação de uma estrutura sólida de pesquisa para potenciais análises inferenciais. O segundo fator refere-se ao modo como os resultados finais são apresentados. Estes surgem na forma de uma representação organizada no plano – as redes – que permitem, com relativa comodidade, identificar os conceitos mais/menos importantes, ou valorizados, para além da apresentação de um conjunto de índices (coerência, similaridade e de complexidade) e outros indicadores quantitativos (Densidade, Fator dos nós nucleares, Fator do graus dos nós nucleares), que suportam análises comparativas, e mais refinadas, entre redes (Casas e Luengo, 2005; Antunes, 2010; Carvalho, 2011; Almeida, 2011; Almeida, Casas e Luengo, 2013; Catarreira, 2013).

A técnica, inicialmente proposta por Schvaneveldt, Dearholt e Durso (1985, 1988), assenta no pressuposto da análise de semelhanças (ou dissemelhanças) entre pares de entidades ou conceitos, utilizando para tal uma métrica-r de Minkowski, a qual é utilizada para calcular distâncias e, com base nestas, construir uma disposição geométrica organizacional – as Redes Associativas *Pathfinder* (PFNET).

A desigualdade triangular, que ocupa um lugar central na construção destas redes, é utilizada para simplificar a rede original, na medida em que é aplicada para identificar os caminhos com o menor peso, eliminando aqueles que são redundantes, tornando esta estrutura mais elementar e, consequentemente, mais simples e "económica".

No espaço Euclidiano, a desigualdade triangular é facilmente interpretada e ilustrada (Figura 6). Dados três pontos, digamos A, B e C, a distância de A a B é inferior, ou igual, à soma das distâncias de A a C e de C a B, ou seja, $\overline{\mathrm{AB}} \leq \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CB}}$.



$$\overline{\mathrm{AB}} \leq \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CB}}$$

Figura 6 – Desigualdade Triangular no plano

A ideia fundamental subjacente às Redes Associativas *Pathfinder* é descartar os caminhos supérfluos e reter os caminhos mais significativos da rede. Por esta razão as redes PFNET podem ser usadas para revelar aspetos importantes da estrutura inerente ao conjunto de pares de conceitos/termos/ideias/exemplos/noções expressas através de valores de proximidade (ou afastamento). Os métodos utilizados seguidamente transformam os dados, que expressam a inter-relação entre os conceitos, em distâncias entre pontos num espaço de dimensões mínimas, de tal modo que se obtém uma representação no plano desses dados (Schvaneveldt, Dearholt e Durso, 1988; Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005; Antunes, 2010).

Assim, as redes PFNET são representações gráficas, no plano, nas quais os conceitos/termos/exemplos aparecem como pontos no plano – nós - e as suas relações como segmentos de recta – arestas ou ligações - que os unem, de maior ou menor comprimento dependendo do maior ou menor peso da sua proximidade (ou afastamento). O procedimento básico para encontrar qual o caminho que se incorpora nas várias fases do processo iterativo, é que este só é considerado se não existe um caminho indireto, através de outros nós, cuja soma de pesos seja menor que o caminho direto referido (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005; Antunes, 2010).

Apesar de não ser objetivo do presente trabalho uma descrição fundamentada da metodologia iterativa de cálculo e construção das redes PFNET, com base no Algoritmo *Pathfinder*, parece-nos importante apresentar, sucintamente, o procedimento que lhe está inerente. Para tal seguiremos, em parte Schvaneveldt, Dearholt e Durso (1988) e Zhang (2008).

Assim considere-se uma matriz, que designaremos por W associada a um conjunto de n nós, digamos N={N_1, N_2, …,N_n}, tal que

$$W = \begin{array}{c} \\ N_1 \\ N_2 \\ \cdots \\ N_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} N_1 & \cdots & N_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & \cdots & w_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

e os $w_{ij} \geq 0$ representam os pesos atribuídas à relação entre os conceitos N_i e N_j, i,j=1,…n, e que podem traduzir semelhanças (ou dissemelhanças) entre estes.

Como atrás referimos, a rede PFNET é uma rede simplificada. Ela terá sempre os mesmos nós iniciais mas possui menos arestas qua a rede original. Por esta razão a PFNET poderá ser definida à custa de uma matriz PF onde p_{ij} é o peso de cada aresta.

$$PF = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Um caminho numa rede é composto por várias arestas. Por exemplo o caminho P={N_{ab}, N_{bc}, N_{cd}} é composto pelas arestas N_{ab}, N_{bc} e N_{cd}

O peso de um caminho que liga dois conceitos (nós) nas redes PFNET, e cujas arestas apresentam os pesos w_1, w_2, …, w_k é determinado pela métrica r-*Minkowski*, expressa através da relação:

$$W(P)=\sqrt[r]{\left(\sum_{i=1}^{k} w_i^r\right)},\ r \geq 1 \text{e}\ w_i \geq 0$$

O parâmetro “r” tem uma influência significativa no peso de uma aresta. Se r é igual a 1 , o peso da aresta que liga dois conceitos é a soma do peso de todas as arestas ao longo desse caminho; quando r é igual a 2 , o peso da aresta coincide com o valor da distância Euclidiana; quando r é igual a ∞, prova-se que, o peso da aresta é igual ao máximo dos pesos das arestas envolvidas.

Em síntese, podemos escrever:

- Se r=1 então W(P)= $\left(\sum_{i=1}^{k} w_i^1\right) = w_1 + w_2 + \cdots + w_k$;

- Se r=2 então W(P)= $\sqrt[2]{\left(\sum_{i=1}^{k} w_i^2\right)} = \sqrt{(w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_k^2)}$

- Se r=∞ então $\lim_{r\to\infty} \mathrm{W(P)} = \lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{\left(\sum_{i=1}^{k} w_i^r\right)}$= Máx($w_1$, w_2, …, w_k).

Este último resultado, para r=∞, torna-se bastante útil do ponto de vista prática, na medida em que estabelece que para calcular o peso de uma aresta basta considerar o maior valor dos pesos do caminho. Atendendo a esta perspetiva adotaremos, no presente trabalho para a construção das PFNET, r = infinito (∞).

Um outro parâmetro relevante para a aplicação do algoritmo *Pathfinder*, e que designaremos por "q", tem como função limitar o número de ligações que estão representadas na rede. Demonstra-se que, se o valor de q diminui isso implica o aumento da complexidade da rede e, caso contrário, se o valor de q aumenta a complexidade da rede diminui. Como se pretende construir redes nas quais surjam apenas as ligações mais importante, adotaremos q = n-1, para uma rede com n nós.

De acordo com estes parâmetros, designaremos estas redes por PFNET(r,q), e, face a isto, adotaremos no nosso estudo as redes PFNET(r= ∞, q=n-1).

Definamos ainda um outro importante conceito: *a matriz dos comprimentos de percurso - i mínimos* (W^{i+1}), e que contém os pesos mais económicos para um certo caminho. Por definição temos que

- $W^{i+1}=W^1 \otimes W^i$

de tal modo que cada elemento da matriz W^{i+1} pode ser obtido, através da seguinte relação;

- $w_{jk}^{i+1} = MIN\left\{\left(\left((w_{j1})^r + (w_{1k})^r\right)\right)^{\frac{1}{r}}, \ldots, \left(\left((w_{jn})^r + (w_{nk})^r\right)\right)^{\frac{1}{r}}\right\}$

Note-se que, os elementos desta matriz (w_{jk}^{i}) podem ser interpretados como os menores pesos dos caminhos de comprimento i.

Esta última matriz é importante para determinar a matriz que designaremos por D^{i} e que representa a *matriz dos comprimentos de percurso - i mínima completa*, tal que:

$$D^{i} = \begin{bmatrix} d_{11}^{i} & \dots & d_{1n}^{i} \\ d_{21}^{i} & \dots & d_{2n}^{i} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}^{i} & \dots & d_{nn}^{i} \end{bmatrix} \text{ e } d_{lk}^{i} = MIN(w_{lK}^{1}, w_{lK}^{2}, \dots, w_{lK}^{i})$$

Os d_{lK}^{i} representam o peso de um caminho que obedece a duas condições: ele vem de um grupo de caminhos cujo comprimento é igual a 1, 2, 3, …, i, respetivamente, e corresponde ao menor peso de todos os pesos destes caminhos de diferentes comprimentos. A matriz D^{i} é, à semelhança de W^{i}, uma matriz quadrada. Todavia D^{i} é diferente de W^{i}, já que os elementos d_{lK}^{i} , de D^{i} , são gerados a partir dos elementos w_{lK}^{i} , de W^{i}.

Apesar da complexidade do algoritmo *Pathfinder*, que acabamos de apresentar para sustentar teoricamente a técnica das PFNET, parece-nos importante referir que o instrumento informático que iremos utilizar nos diferentes momentos da recolha de dados – *Goluca* - já possui incorporado, ao nível da sua programação, este procedimento, pelo que a representação das Redes e os necessários cálculos são completamente automatizados.

Em resumo, "*O algoritmo Pathfinder mediante um procedimento iterativo (….) permite seleccionar quais são as ligações que vão formar parte da rede, em função dos parâmetros "r" e "q"* (Casas, 2002), apresenta a capacidade para criar estruturas mais simples e de fácil interpretação quando comparadas com outros algoritmos, como, por exemplo, o escalonamento multidimensional (Chen, 2004) e constitui um método já consolidado de comparar e representar a estrutura cognitiva de indivíduos e grupos (Clariana e Wallace, 2006).

2.1.4.2. Exemplo de aplicação do algoritmo *Pathfinder*

Para ilustrar o procedimento iterativo apresentado na secção anterior apresentaremos de seguida, a título de exemplo, uma aplicação do processo do Algoritmo *Pathfinder* no caso de r=∞ e q=2 para a construção da rede PFNET(∞,2). Para tal consideremos a matriz de pesos W (simétrica), associada aos nós N_1, N_2, N_3, N_4, e N_5, dada por:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

A rede original associada a esta matriz encontra-se representada na Figura 7.

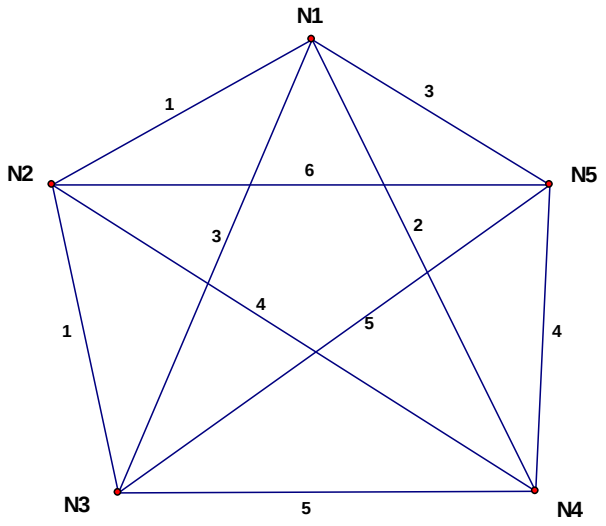


Figura 7 – Rede original associada à matriz W de Pesos

Numa primeira etapa o algoritmo necessita de calcular a matriz W^2 - comprimento de percurso - 2 mínimo. A título de exemplo, e de acordo com o que vimos anteriormente, determinemos w_{12}^2, w_{13}^2, w_{14}^2 e w_{15}^2 como se segue:

$$w_{12}^2 = MIN\{MAX(w_{13}, w_{32}), MAX(w_{14}, w_{42}), MAX(w_{15}, w_{52})\} = MIN\{3,4,6\} = 3$$

$$w_{13}^2 = MIN\{MAX(w_{12}, w_{23}), MAX(w_{14}, w_{43}), MAX(w_{15}, w_{53})\} = MIN\{1,5,5\} = 1$$

$$w_{14}^2 = MIN\{MAX(w_{12}, w_{24}), MAX(w_{13}, w_{34}), MAX(w_{15}, w_{54})\} = MIN\{4,5,4\} = 4$$

$$w_{15}^2 = MIN\{MAX(w_{12}, w_{25}), MAX(w_{13}, w_{35}), MAX(w_{14}, w_{45})\} = MIN\{6,5,4\} = 4$$

(…)

De um modo semelhante, podemos calcular os outros valores de w_{ij}^2, o que nos permite escrever a matriz W^2,

$$W^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A próxima fase é calcular a matriz D^2 comprimento de percurso - 2 mínimo completa, baseada em W e W^2. Para tal temos que comparar os valores w_{ij}, da matriz W, e w_{ij}^2, da matriz W^2, para encontrar o caminho de menor peso, e atribuiremos esse valor a d_{ij}^2. De acordo com este requisito a matriz D^2 virá dada por:

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A etapa final é comparar as matrizes D^2 e W e identificar os valores que satisfazem a condição $d_{ij}^2 = w_{ij}$, caso contrário teremos $d_{ij}^2 = 0$. Colocaremos esses valores numa nova matriz que designaremos por PF. Assim teremos,

$$PF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A rede PFNET(∞,2) final apresenta-se na Figura 8.

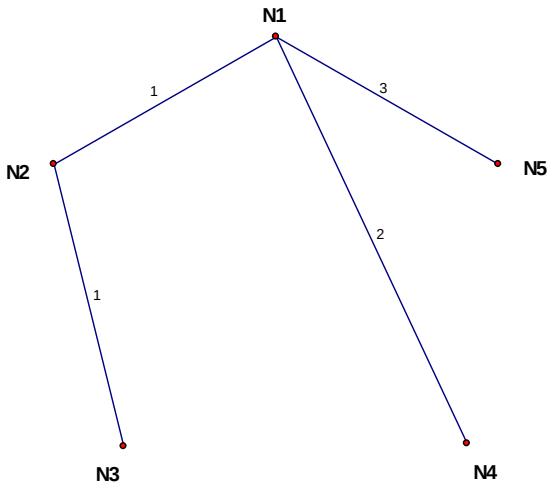


Figura 8 – Rede PFNET(∞,2)

Esta última rede, faz realçar os nós com mais ligações (N_1 com 3 ligações) e com somente uma ligação (N_3, N_4 e N_5). Encontramos, ainda, nós com duas ligações (N_2).

2.1.4.3. Indicadores quantitativos das redes PFNET

Como já foi referido, uma das vantagens da metodologia associada às redes *Pathfinder* é o cálculo e apresentação de índices - de **Similaridade**, de **Complexidade** e de **Coerência** das redes– o que permite análises mais refinadas, inclusive do ponto de vista da aplicação de técnicas da Estatística Inferencial.

Com base na estrutura da rede, definiremos "**Nó Nuclear**" como o conceito que apresenta três ou mais ligações e por esta razão assume uma relevância na representação da estrutura cognitiva na aprendizagem de um determinado conteúdo. O número destas ligações constitui o grau do nó nuclear.

Analogamente, interpretaremos "**nó extremidade**" como o conceito que, na rede Associativa *Pathfinder*, apresenta uma só ligação e, em consequência, ainda não está devidamente incorporado na estrutura cognitiva do aluno.

Definiremos, ainda, "**nó polar**" como aquele que apresenta exatamente duas ligações.

Para comparar duas redes utilizaremos o **Índice de Similaridade**. Este é calculado a partir da análise das ligações totais existentes nas duas redes e das ligações comuns. É obtido através da seguinte relação:

$$\text{Similaridade} = \text{S} = \frac{\text{Número de ligações em comum}}{\text{Total de ligações das duas redes} - \text{Número de ligações em comum}}$$

O valor assim obtido expressa a razão entre as ligações comuns e as ligações não comuns. É fácil de constatar que o valor da Similaridade assume valores no intervalo [0,1]. Será 0 quando as redes não tiverem ligações em comum e assumirá o valor 1 se as redes tiverem todas as ligações em comum. Por outras palavras, se S=0 então o número de ligações em comum, digamos x, também assume o valor 0 ($\text{S} = \frac{0}{2\text{n}-0} = 0$). Analogamente, se S=1 é porque todas as ligações existentes são comuns, o que é facilmente verificável, já que, designando por x o número de ligações comuns entre duas redes, isto é, as redes são idênticas estruturalmente, então, como consequência, $\text{S} = \frac{\text{x}}{2\text{x}-\text{x}} = 1$.

A similaridade entre redes permite comparar redes de alunos ou redes obtidas em distintas circunstâncias (Lambert, 2004; Casas e Luengo, 2004; Clariana *et al.*, 2013).

Um outro coeficiente, do qual faremos um comentário, é o **Índice de Complexidade da Rede** (ICR). Trata-se de um indicador numérico, elaborado por Casas (2002), e fornece, também, um valor que varia entre 0 e 1. Quanto maior é o seu valor, maior é a complexidade da rede. Permite avaliar quantitativamente a complexidade das distintas Redes Associativas *Pathfinder* (Casas, 2002).

Pode ser calculado através da seguinte relação, que envolve, por definição, três fatores (D, N e FN):

$$\text{Índice de complexidade da rede} = \text{ICR} = \text{D} \times \text{N} \times \text{FN}$$

onde,

$$\text{Densidade da rede} = \text{D} = \frac{\text{Número de ligações da rede}}{\text{Número total possível de ligações}},$$

a Densidade da rede (D) é entendida como o quociente entre o número de ligações presentes face ao número total de ligações possíveis de estabelecer. Por sua vez,

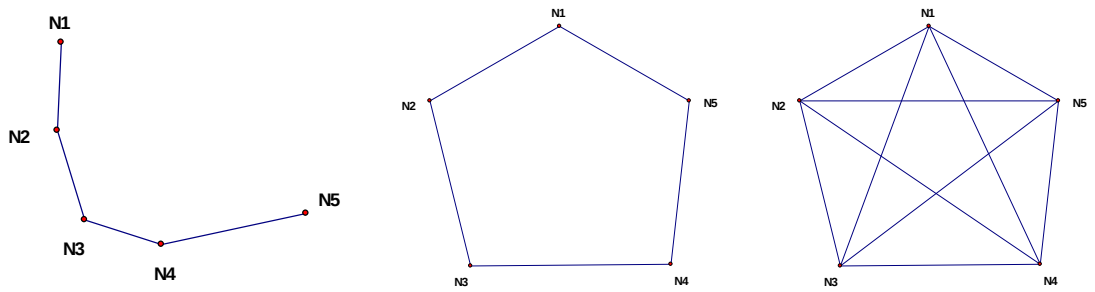
$$\text{Fator dos nós nucleares} = \text{N} = \frac{\text{Número de nós nucleares}}{\text{Nós totais}},$$

o fator dos nós nucleares (N) é a razão entre o número de nós nucleares e o número total de nós na rede, e, por último, o fator do grau dos nós nucleares (FN) é o quociente entre a soma do grau dos nós nucleares e a soma de grau se todos os nós existentes fossem nucleares,

$$\text{Fator do grau dos nós nucleares} = \text{FN} = \frac{\text{Soma do grau dos nós nucleares}}{\text{Soma do grau se todos os nós fossem nucleares}}.$$

Note-se que os três fatores do ICR (N, D e FN) também são valores compreendidos entre 0 e 1. Para facilitar a comparação dos ICR optámos por multiplicar o valor obtido por mil.

Consideremos três casos particulares (Figura 9): Como é fácil de constatar se a rede fosse linear (A), ou circular (B) o ICR=0, já que não há nós nucleares (N=0); Se pelo contrário todos os nós fossem nucleares (C) então ICR=1 (=1000) em virtude de D=1 ($=\frac{10}{10}$), N=1($=\frac{5}{5}$)e FN= 1($=\frac{20}{20}$) .



(A) ICR=0 (B) ICR=0 (C) ICR=1 (=1000)

Figura 9 – Diferentes tipos de redes PFNET e respetivos Índices de Complexidade

Faremos também aqui uma referência sobre o **Índice de Coerência**, dada a sua relevância em alguns trabalhos de investigação entretanto publicados (veja-se, por exemplo, Catarreira, 2013),

O Índice de Coerência foi, pela primeira vez, sugerido por Schvaneveldt e pela sua equipa de colaboradores. A sua determinação é feita atendendo ao seguinte raciocínio: dados os conceitos A e B, calcula-se a correlação existente entre os valores de similaridade de A com todos os restantes conceitos, exceto B, e faz-se o mesmo para o conceito B. Efetuado este procedimento para todos os conceitos, a coerência é calculada como uma nova correlação

entre as correlações assim obtidas e os valores atribuídos diretamente pelo sujeito inquirido (Casas e Luengo, 2004).

Esta medida é baseada numa espécie de transitividade, isto é, se dois conceitos têm relações semelhantes com outros conceitos, então os dois conceitos considerados devem ser semelhantes entre si. Assim, a coerência pode ser entendida como uma medida de semelhança avaliada de um modo indireto, já que depende das relações estabelecidas, explicitamente, entre os conceitos e todos os outros.

Antunes (2010) refere que este "*baseia-se no facto de admitirmos que a relação entre um par de conceitos se pode determinar a partir da consistência entre estes*".

Casas (2002) acrescenta que "*corresponde a menudo con el grado de experiencia (o grado de aprendizaje), e indica también si la utilización del programa se ha hecho de una manera atenta o bien se ha hecho al azar."* Este índice apresenta um valor que varia entre -1 e 1 e que permite avaliar o conhecimento do tema tratado (Casas e Luengo, 2004; Antunes, 2010), ou, como refere Catarreira (2013), " *esta medida permite avaliar o grau de aprendizagem do aluno e, simultaneamente, indica se o mesmo atribuiu valores de similaridade entre os conceitos de forma atenta ou de forma irrefletida*".

O manual do *software* KNOT (KNOT Software,1989) propõe que valores elevados de coerência refletem dados mais consistentes, em contrapartida, valores baixos denotam a presença de algum tipo de erro, nomeadamente:

- Na atribuição dos valores de proximidade pelo inquirido;
- Matriz de proximidade (similaridade) com valores estranhos;
- Falta de pelo menos em valor na Matriz;
- Erro na construção da Matriz;
- Ordem trocada dos valores da Matriz.

Um outro indicador que iremos utilizar é a Centralidade de Grau da Rede. Clariana *et al*. (2013), na sequência de um trabalho anterior de 2011, demonstra que a centralidade de um grafo constitui uma medida interessante para mensurar a tipologia da estrutura cognitiva presente nestas representações e, em particular, permite aos investigadores inferir sobre a evolução das representações iniciais e finais. Admitindo que a estrutura do conhecimento se refere ao modo como os diferentes elementos da informação se organizam na memória e que

estes elementos podem ser diversificados (seleção dos conceitos, hierarquização dos conceitos, ligação entre conceitos), então devem existir medidas que meçam estas variadas atividades cognitivas. Para tal leva em consideração uma ideia, com aplicações na Teoria dos Grafos, que é a de Centralidade.

Na análise de redes, a centralidade de um nó indica a importância relativa desse nó na rede. Nesta lógica uma das mais simples e utilizadas medidas de centralidade de um nó na rede é obtida através do número de ligações ao nó, como anteriormente vimos. Apesar da sua simplicidade parece-nos importante referir um cuidado a ter com esta medida. Para tal consideremos o seguinte exemplo: suponhamos uma rede G com um total de nós (N) igual a oito, na qual existe um nó, digamos N_i, com seis ligações, por outro lado, suponhamos uma outra rede H com 25 nós e na qual existe também um nó, digamos N_j, com seis ligações. Ambos os nós, N_i e N_j têm, nas respetivas redes, o mesmo peso absoluto (6), contudo N_i poderá ter um peso relativo maior do que N_j, já que integra uma rede com menos nós, logo a sua importância será maior. Assim Clariana (2011, 2013), apresenta a seguinte relação para medir a centralidade de grau de um nó:

Centralidade de grau do Nó (N_i)= $C_G(N_i) = \frac{Grau(N_i)}{N-1}$

A Centralidade de grau de um nó, pode ser aplicada para estender esta ideia, à centralidade de grau de toda uma rede. Assim

Centralidade de grau da rede R= $C_G(R) = \frac{\sum_{i=1}^{|N|}((MáxC_G(N_i)) - C_G(N_i))}{N-2}$,

onde $MáxC_G(N_i)$ representa o vértice com maior centralidade de grau.

A centralidade de grau da rede é uma medida relativamente fácil de calcular e que permite tirar conclusões sobre a estrutura topológica desta representação. Esta medida varia entre 0 e 1. De acordo com Clariana (2011) se $C_G(R)$ apresentar o valor de 0,1, estamos perante uma rede linear, se tivermos 0,4 estamos perante uma estrutura hierárquica, se obtivermos 0,6 uma rede e se a centralidade for igual a 1 então temos uma estrela. A figura seguinte, extraída de Clariana (2013), apresenta exemplos desta interpretação.

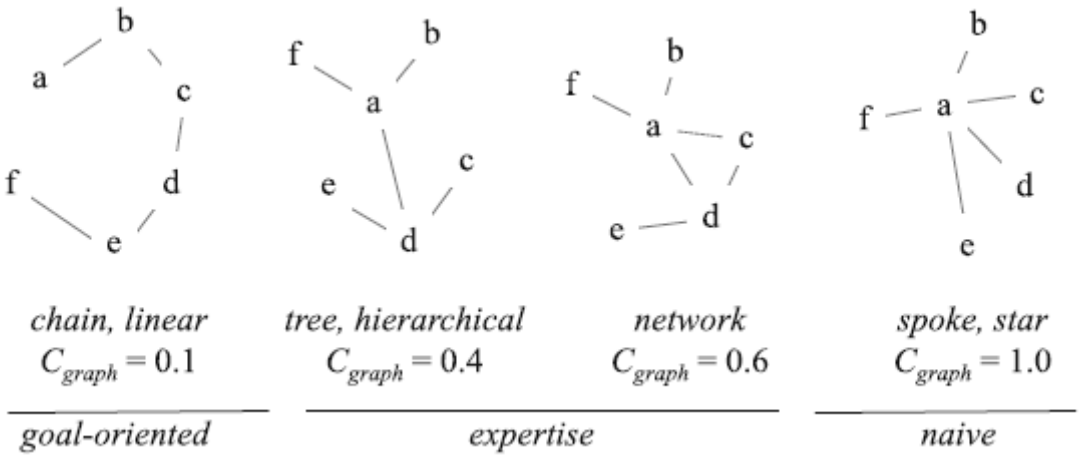


Figura 10 – Medidas de Centralidade para diversos tipos de PFNET (Clariana, 2011 e 2013)

2.1.4.4. Exemplo do cálculo dos indicadores quantitativos de uma PFNET

Para exemplificar o cálculo destes indicadores, utilizaremos a rede *Pathfinder* apresentada na Figura 8.

Assim,

- $D=\frac{\text{Número de ligações da rede}}{\text{Número total possível de ligações}}=\frac{4}{C_2^5}=\frac{4}{10}=0{,}4$

- $N=\frac{\text{Número de nós nucleares}}{\text{Nós totais}}=\frac{1}{5}=0{,}20$

- $FN=\frac{\text{Soma do grau dos nós nucleares}}{\text{soma dos graus se todos os nós fossem nucleares}}=\frac{3}{A_2^5}=\frac{3}{20}=0{,}15$

logo ICR=0,40x0,20x0,15=0,012 ou, de acordo com o convencionado anteriormente,

ICR=12 (=0,012x1000).

valor que é indicador de uma complexidade baixa.

Em relação à centralidade da rede, teremos:

Tabela 5 – Centralidade da rede PFNET da Figura 8

Nós	$\mathrm{Grau}(N_i)$	$C_G(N_i)$	$\frac{(\mathrm{Máx}C_G(N_i)) - C_G(N_i))}{N-2}$
N1	3	0,75	0
N2	2	0,5	0,083
N3	1	0,25	0,167
N4	1	0,25	0,167
N5	1	0,25	0,167
			$C_G(R) =$O,584

Este último valor (0,584) está próximo de 0,6 o que, de acordo com Clariana (2011), permite-nos categorizar a PFNET utilizada neste exemplo como uma rede (*network*).

2.1.4.5. A Rede Média PFNET

A Rede Média PFNET é obtida a partir dos valores dos pesos entre os conceitos de duas ou mais matrizes de similaridade. Como a própria designação indica, uma Rede Média é obtida a partir de uma matriz com as médias dos valores de proximidade entre cada par de conceitos. A matriz resultante tem as mesmas características de uma matriz de similaridade, podendo ser calculada a respetiva Rede Associativa *Pathfinder* (Catarreira, 2013). O *software Goluca*, que utilizaremos na parte empírica deste trabalho, permite, com bastante facilidade, obter esta rede.

A obtenção da Rede Média PFNET é extremamente útil para comparar dois grupos diferentes de indivíduos ou o mesmo grupo em diferentes momentos de investigação (Clariana, 2009) e "*podemos decir que las redes medias pueden servirnos identificar de una forma visual muy aproximada, cuales son los nodos principales en las redes de cada grupo*" (Casas, 2002).

Apesar da riqueza de informação que proporcionam, referimos, todavia, que as Redes Médias PFNET, não conservam algumas propriedades das redes originais, como por exemplo a coerência, nem a média do número de nós nucleares. Elas mantêm, no entanto, as suas estruturas topológicas, isto é, os nós e as relações mais importantes.

Clariana (2010), em relação a estas redes, afirma "*Our experience is that group average PFNETs are more robust than individual PFNETs. Averaging seems to remove idiosyncratic and error responses contained in individual PFNETs*", o que vem corroborar da importância destas estruturas na análise da organização conceptual.

2.2. TRABALHOS DE DIVULGAÇÃO E DE APLICAÇÃO DAS REDES ASSOCIATIVAS *PATHFINDER* E DA TEORIA DOS CONCEITOS NUCLEARES

2.2.1. Trabalhos de investigação, divulgação e aplicação da metodologia das Redes Associativas *Pathfinder*

A metodologia das redes associativas *Pathfinder* tem assistido nas últimas décadas a um alargamento do seu campo de intervenção e aplicabilidade. Se os primeiros trabalhos que surgiram prendiam-se essencialmente com a fundamentação mais teórica, os trabalhos subsequentes incidiram mais sobre a relevância e a aplicabilidade desta técnica a várias áreas do saber. Assim encontramos trabalhos em várias áreas, como por exemplo a Matemática, a Medicina, a Enfermagem, a Fisiologia, a Gestão Hospitalar, a Contabilidade, as Finanças, a Informática, a Física, a Biologia e a Avaliação no Ensino.

Na Tabela 6 seguinte apresentamos alguns trabalhos de investigação, divulgação e aplicação da metodologia das redes PFNET.

Tabela 6 - Trabalhos de investigação, divulgação e aplicação das Redes *Pathfinder*

Autores	Data	Temática Geral
Schvaneveldt, Dearholt e Durso	1988	Fundamentos teóricos das Redes Associativas *Pathfinder.*
KNOT Software	1989	Desenvolvimento do software KNOT para análise das PFNET.
McGaghie	1996	Estrutura cognitiva, dada através das Redes Associativas *Pathfinder*, de 13 conceitos associados à fisiologia do pulmão.
Casas e Luengo	1999	Aplicação das PFNET à resolução de problemas aritméticos.
Curtis e Davis	2003	Aplicação das redes associativas *Pathfinder* à Educação em Contabilidade.
Kudikyala e Vaughn	2005	Entender os requisitos de *software* utilizando as redes *Pathfinder*.
Godinho	2007	Desenvolvimento de um *software* de recolha, análise e representação de Redes Associativas *Pathfinder – Goluca.*
Arias	2008	Analisar a qualidade e a validade de cursos virtuais, no âmbito da Engenharia Telemática.
Clariana, Wallace e Godshalk	2009	Obtenção e medição da estrutura do conhecimento de um grupo a partir de ensaios.
Jiménez, Casas e Luengo	2010	Conhecer a perceção de um grupo de enfermeiros, sobre o seu processo de aprendizagem profissional.
Trumpower, Sharara e Goldsmith	2010	Análise da especificidade da informação fornecida pela avaliação estrutural de conhecimento (SAK).
Serrano *et al.*	2010	Aplicação das Redes *Pathfinder* a sistemas complexos com múltiplos sujeitos.

Autores	Data	Temática Geral
Almeida	2011	Conhecer a estrutura organizacional dos exames do 9.º ano da 1.ª chamada de Matemática em Portugal.
Wouters, van der Spek e Oostendorp	2011	Estudo de caso sobre a medição da aprendizagem em jogos educativos.
Sarwar	2012	Avaliar a estrutura do conhecimento de estudantes de Física e dos seus respetivos professores.
Großschedl e Harms	2013	Avaliação do conhecimento conceitual com utilização de julgamentos de similaridade.

Apresentemos, com um pouco mais de detalhe, estes trabalhos.

Em 1988, Schvaneveldt, Dearholt e Durso, publicam um artigo no qual estabelecem os fundamentos teóricos das Redes Associativas *Pathfinder* e a sua respetiva definição. O artigo realça a importância destas representações para revelar aspetos da estrutura cognitiva inerente a uma determinada temática. Já nesta época, estes autores reconhecem a importância desta técnica aplicada a diversas áreas: modelação cognitiva, representação do conhecimento e ao *design* de interfaces computacionais.

Face à necessidade de trabalhar com dimensões elevadas de dados para elaborar as PFNET, Schvaneveldt *et al*. (1989) desenvolvem o *package* informático KNOT *(Knowledge Network Organizing Tool*) na Universidade do Novo México, cujas primeiras versões foram programadas para funcionarem em Macintosh.

Para conhecer a estrutura cognitiva de 13 conceitos associados à fisiologia do pulmão, McGaghie (1996) desenvolveu um estudo, no âmbito da representação do conhecimento, com 112 estudantes do 1.º ano de Medicina e 32 membros do respetivo corpo docente (internos, anestesistas e fisiologistas). O objetivo desta investigação foi avaliar o grau de concordância, dado através da estrutura das redes, de professores e alunos e ainda comparar a similaridade dos conceitos dos alunos com os seus formadores. Os dados mostraram que o modo como os docentes organizam conceptualmente os conceitos não foi consistente. Os indicadores de similaridade nos três grupos de docentes foram modestos e a comparação entre grupos foi mais fraca do que intra grupos. Os dados mostraram ainda que as Redes *Pathfinder* dos estudantes, no decorrer do tempo, começaram a aproximar-se das estruturas das Redes dos conceitos produzidas pelos professores. A Figura 11, retirada do original, mostra a rede PFNET associada aos professores.

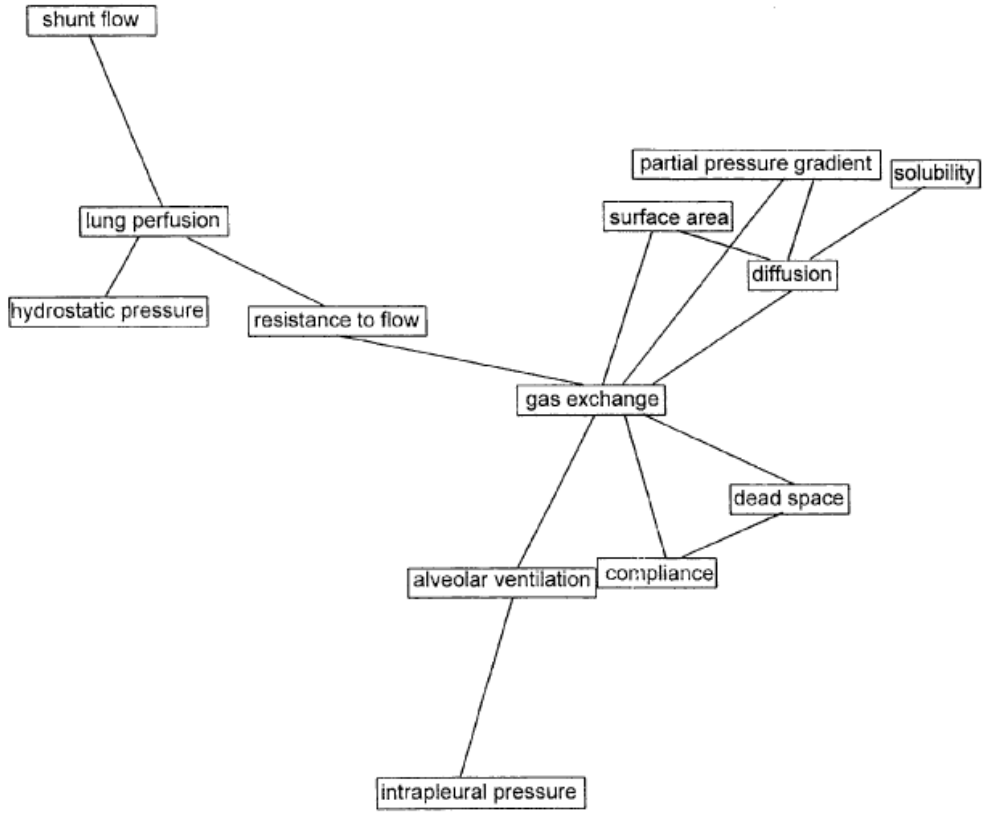


Figura 11 – Rede *Pathfinder* dos professores sobre Fisiologia do pulmão (McGaghie, 1996)

Num artigo publicado em 1999 na revista *Campo Abierto*, Casas e Luengo (1999) apresentam "(…) *un método útil, por su versatilidad y facilidad de uso, para el conocimiento y la representación de las estructuras conceptuales de los alumnos: las Redes Asociativas Pathfinder, elaboradas mediante el programa KNOT*". Nas palavras destes investigadores, esta metodología *"(…) tiene ventajas sobre otros utilizados actualmente, tales como los mapas conceptuales, pues es totalmente empírico y muy rápido de realizar*". Ainda neste artigo é apresentado, como exemplo, uma aplicação à resolução de problemas aritméticos, sugerindo-se no final, outras possíveis aplicações na área das Ciências Sociais.

Curtis e Davis (2003), aplicam a metodologia das Redes Associativas *Pathfinder* à Educação em Contabilidade. Neste trabalho, e do ponto de vista empírico, são apresentados resultados relativos a dois estudos, um com 52 e outro com 36 alunos, para avaliar da aplicabilidade desta metodologia à Educação na área da Contabilidade. Os resultados mostraram que os indicadores obtidos, através das redes PFNET, da avaliação estrutural, melhoraram em consequência da instrução em contabilidade. Para além disto, as diferenças antes da formação em conhecimentos de Contabilidade influenciou a qualidade da pós formação, em termos da estrutura do conhecimento. Ainda mais importante, os dados

produzidos pelas PFNET conseguiram melhorar as previsões dos resultados relacionados com o desempenho para a prática profissional. A Figura 12, representa uma PFNET e é retirado do original.

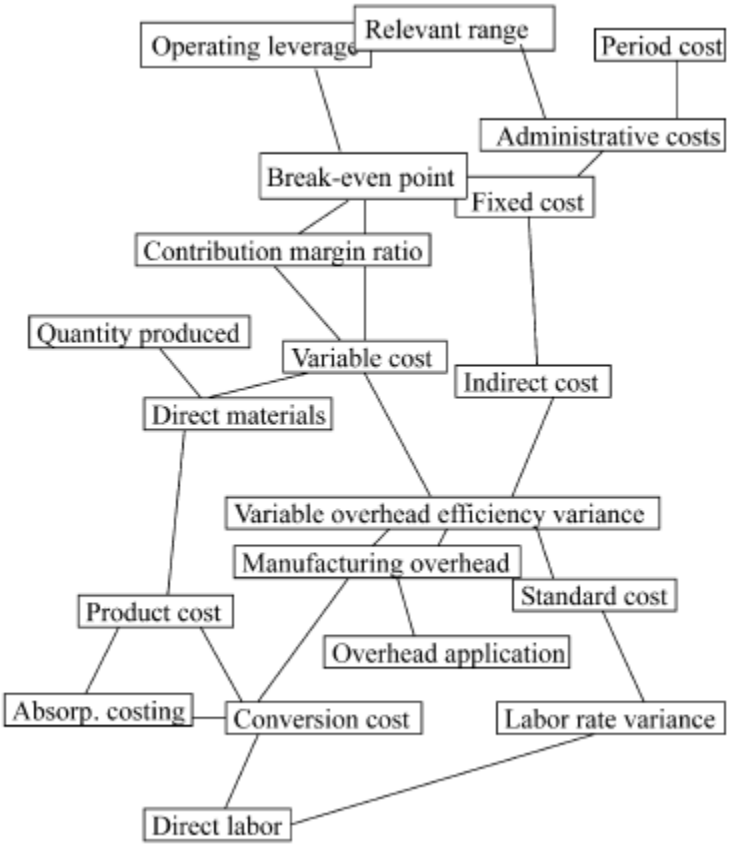


Figura 12 – Rede PFNET sobre conceitos de Contabilidade (Curtis e Davis, 2003)

Kudikyala e Vaughn (2005) partindo da premissa que é importante evitar conflitos de interesse entre utilizadores e programadores, os quais implicam necessariamente custos e atrasos no processo de desenvolvimento de *software*, propõem a utilização da metodologia das redes PFNET para representar modelos mentais destes dois grupos de sujeitos. Assim, foram geradas as redes para cada um dos grupos (utilizadores e programadores) e foi efetuada uma comparação de semelhanças/dissemelhança destas estruturas gráficas. Concluiu-se que, a pesquisa realizada gerou alguns resultados encorajadores em relação à utilização das redes PFNET para representar e avaliar modelos mentais dos seus intervenientes e que descrevem os requisitos do *software*. A Figura 13 – mostra duas dessas redes:

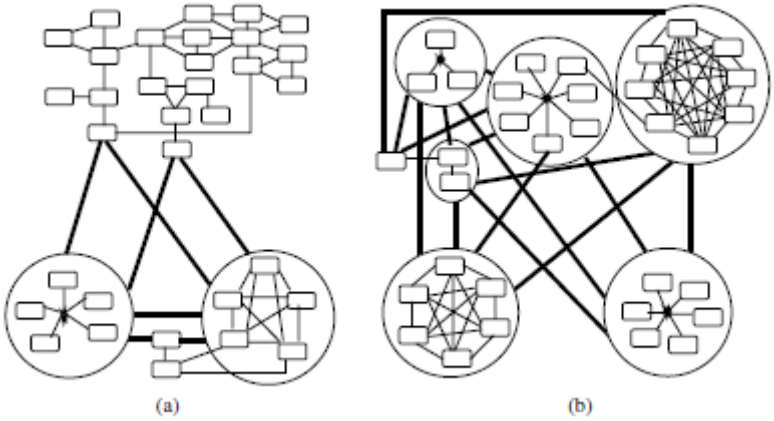


Figura 13 – Rede PNET de um programador (a) e de um utilizador (b)

(Kudikyala e Vaughn, 2005)

Godinho (2007) no seu trabalho de DEA, apresenta o desenvolvimento de um *software* de recolha, análise e representação de Redes Associativas *Pathfinder*, denominado Micro-Goluca, cujo objetivo é o de ampliar as potencialidades de outros que existem com os mesmos propósitos, nomeadamente a versão KNOT (*Knowledge Network Organizing Tool*, produzido pela Interlink e desenvolvido por Schavaneveldt da Universidad de Nuevo México e que constituiu o primeiro programa informático que se utilizou para gerar estas redes) e a versão *PATHFINDER* para ambiente Windows. Este programa foi aplicado no contexto de uma análise às modificações operadas nas crenças matemáticas dos alunos depois da visualização de um vídeo didático.

Em Arias (2008), podemos também encontrar uma aplicação desta técnica. Neste trabalho de investigação, conducente à obtenção do título de Doutor, pretendeu-se encontrar uma metodologia de trabalho que permitisse determinar a qualidade e a validade de cursos virtuais, dada a importância assumida por este modelo de ensino na última década. Assim, foi feita uma análise comparativa dos resultados educativos de um ensino presencial frente a um ensino virtual, no âmbito da Engenharia Telemática. De entre as técnicas utilizadas evidenciaram-se as Redes Associativas *Pathfinder*, através da análise da semelhança entre redes, nomeadamente, a "Rede da Ciência". Este último conceito consiste numa rede que pretende refletir o conhecimento científico de peritos e especialistas num determinado domínio e pode ser representada graficamente através dos conceitos e das principais relações que se estabelecem numa determinada área do conhecimento.

Clariana, Wallace e Godshalk (2009), tendo como base uma investigação descritiva, estudam o efeito dos pronomes (*their, it, and they*) numa análise baseada em editores de

texto computacionais. Utilizando os ensaios produzidos por um conjunto de estudantes que participaram num curso de Finanças, traçaram as representações do conhecimento individuais e do grupo, com recurso às redes PFNET.

Em 2010, Jiménez, Casas e Luengo apresentam uma investigação qualitativa, cujo propósito era o de conhecer a perceção de um grupo de enfermeiros, homens e mulheres, sobre o seu processo de aprendizagem profissional, na qual se utilizou uma metodologia de análise de textos combinada com uma análise de contingência e com as Redes Associativas *Pathfinder*. O enfoque de análise de textos foi feito, com especial ênfase, nos sujeitos e na sua experiência subjetiva, mediante a análise de conteúdo das descrições que fizeram das suas vivências, através da linguagem utilizada e de textos. Os resultados mostraram que o fator mais importante é a relação pessoal e a ajuda de outros companheiros, mesmo durante o processo de formação inicial. A Figura 14 é retirada do original e representa a PFNET de todas as dimensões consideradas.

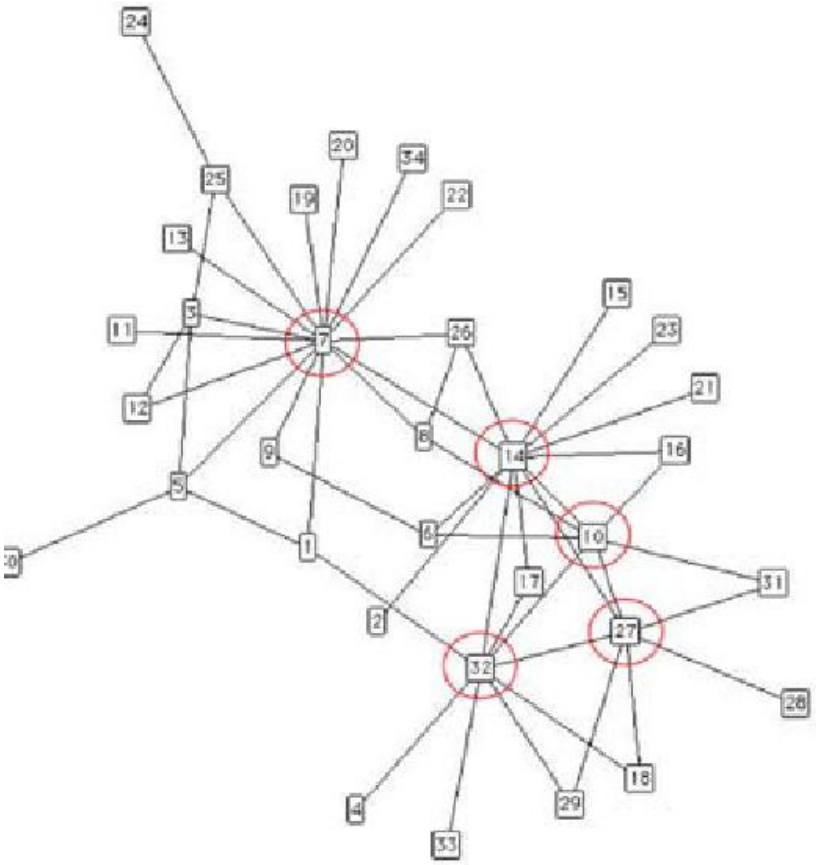


Figura 14 - Rede Associativa *Pathfinder* de todas as dimensões (Jiménez *et al.*, 2010)

Trumpower, Sharara e Goldsmith (2010) realizam um estudo para analisar a especificidade da informação fornecida pela avaliação estrutural de conhecimento. SAK (*Structural Assessment of Knowledge*) é uma técnica que utiliza o algoritmo *Pathfinder*, e que permite realizar inferências sobre o conhecimento dos indivíduos, baseadas na análise de semelhança entre as suas PFNET e uma PFNET de referência. Neste estudo participaram trinta e cinco estudantes, os quais aprenderam uma linguagem de programação de computadores e foram, então, testados relativamente aos seus conhecimentos sobre essa linguagem, através de uma serie de tarefas de resolução de problemas.

Serrano *et al.* (2010), mostram uma aplicação das Redes *Pathfinder* à análise de sistemas com múltiplos sujeitos. Assumindo que as PFNET permitem reduzir a complexidade dos dados e obter representações simples que mostram apenas as interações mais globais e importantes do sistema, procuram, à custa desta técnica, compreender o comportamento social do sistema, descobrir comportamentos emergentes e depurar possíveis comportamentos indesejáveis. A Figura 15, retirada do original, mostra uma rede PFNET colaborativa:

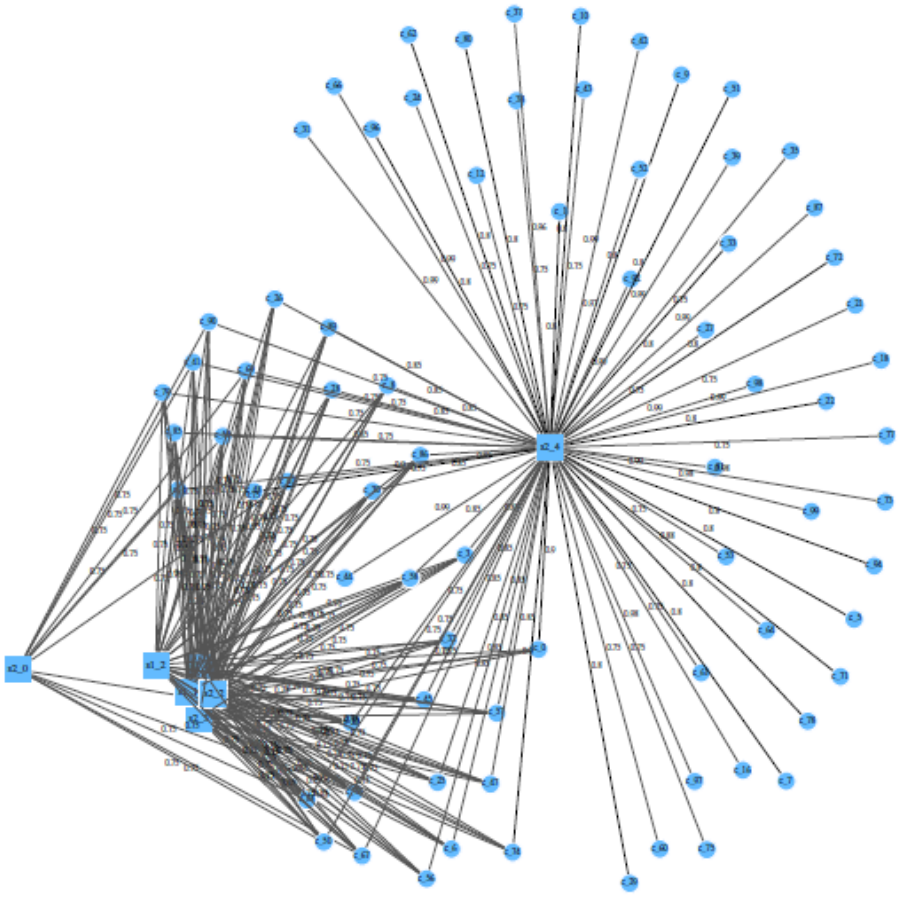


Figura 15 – Rede PFNET colaborativa (Serrano *et al.*,2010)

Almeida (2011), apresentou um estudo, no âmbito do seu trabalho final de Master, cujo objetivo era conhecer a estrutura organizacional dos exames da 1.ª chamada de Matemática do 9.º ano de escolaridade do ensino básico, realizados no período de 2004-2010, em Portugal. A metodologia de análise adotada envolveu a aplicação da técnica das Redes Associativas *Pathfinder*, conjugada com uma vertente mais qualitativa, como foi a análise de conteúdo categorial, a qual permitiu obter uma representação da estrutura destes instrumentos de avaliação. As categorias utilizadas para estudar os itens de avaliação das diferentes provas foram: a Temática (Estatística e Probabilidades, Números e Cálculo, Álgebra e Funções, Geometria), a Competência Matemática (Comunicação Matemática, Conceitos e Procedimentos, Raciocínio e Resolução de Problemas) e Tipologia do item (Resposta curta, Escolha múltipla, Resposta aberta, Construção). Os resultados obtidos demonstraram que a metodologia das Redes Associativas *Pathfinder* pode constituir uma técnica a ser considerada como auxiliar no processo de avaliação das aprendizagens da Matemática e, em particular, na construção e análise de testes escritos.

A Figura seguinte reproduz, do original, a rede PFNET relativa ao exame de 2009/2010.

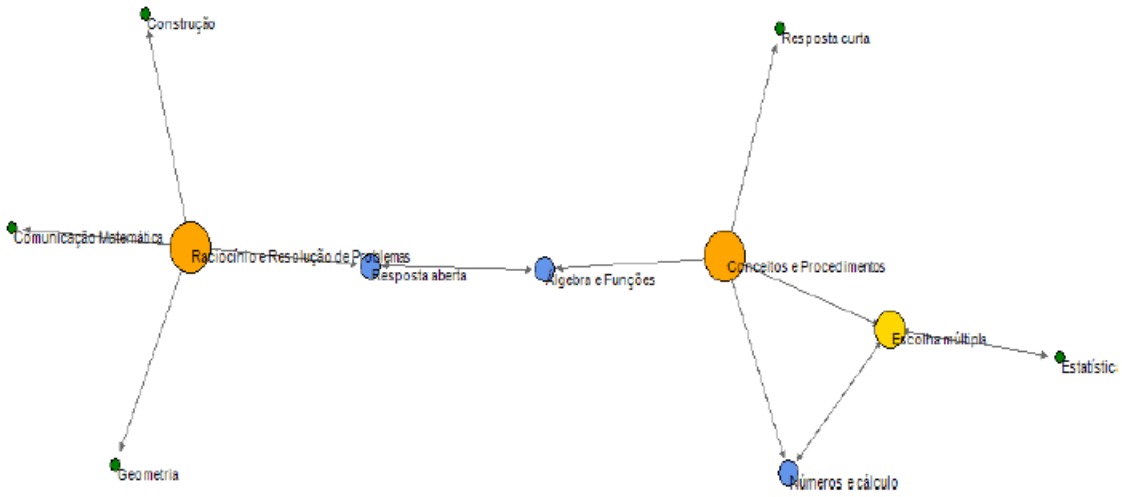


Figura 16 - Rede Associativa *Pathfinder* do exame de 2009/10 (Almeida, 2011)

Frequentemente, a eficácia dos "jogos educativos" aplicados a determinados contextos – no presente caso à triagem de doentes - é medida através de uma avaliação verbal. Wouters, Spek e Oostendorp (2011) propõem, como alternativa, a utilização das Redes *Pathfinder* para efetuar uma avaliação estrutural, a qual definem como a medição da organização do conhecimento dos alunos comparada com uma estrutura de referência. Esta

avaliação compreende três etapas: levantamento do conhecimento, representação do conhecimento e avaliação do conhecimento. No estudo de caso participaram dezanove voluntários de medicina, nove deles eram principiantes e dez com experiência. Os resultados evidenciaram que, tanto os participantes principiantes como os experientes, melhoraram o seu conhecimento após a realização do ”jogo educativo”.

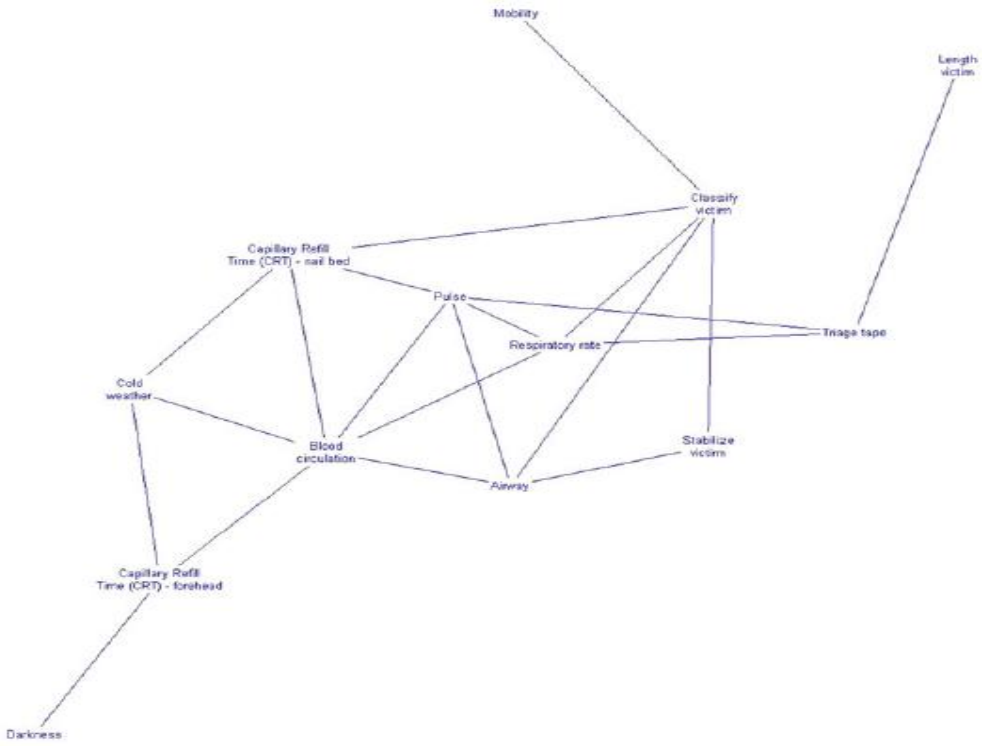


Figura 17 – Rede de referência (Wouters, Spek e Oostendorp, 2011)

Sarwar (2012), avaliou a estrutura do conhecimento de onze estudantes de Física e dos seus respetivos professores, utilizando para tal as Redes *Pathfinder*. O conhecimento dos docentes foi ponderado, obtendo-se uma média, que permitiu criar uma rede *Pathfinder* de referência. Após este procedimento, a rede *Pathfinder* de cada estudante foi comparada com a rede de *Pathfinder* de referência dos professores, a fim de se identificar conceções erradas. Estas conceções serviram de base para a elaboração de um programa de instrução para ultrapassar potenciais conceções erróneas.

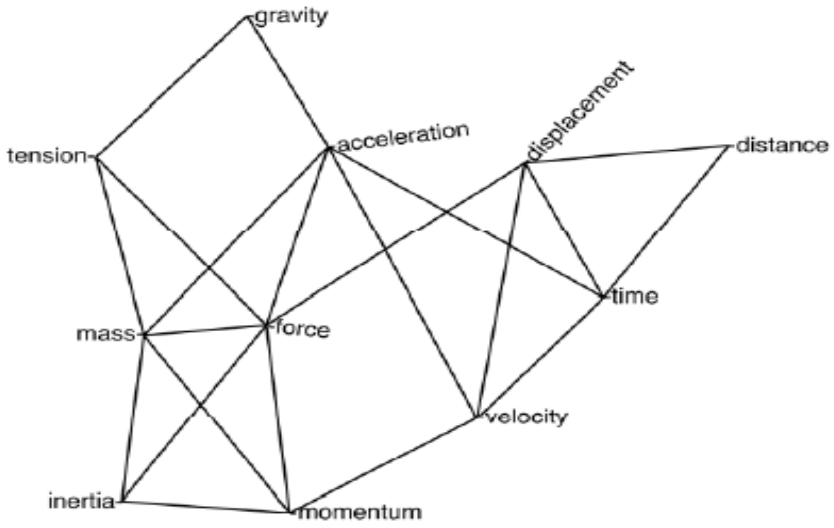


Figura 18 – Rede de referência em relação ao conceito de movimento (Sarwar, 2012)

Num estudo mais recente, Großschedl e Harms (2013) analisaram a validade de um teste de julgamentos de similaridade (SJT) para avaliar o conhecimento conceptual na área da Biologia. Com base num julgamento semântico sobre um conjunto de conceitos, 89 alunos finalistas do ensino secundário são inquiridos. As pontuações resultantes são calculadas usando correlações, bem como a utilização de abordagens MDS (*Multidimensional Scaling*) e as Redes *Pathfinder*. Os resultados obtidos apoiam a validade do teste STJ.

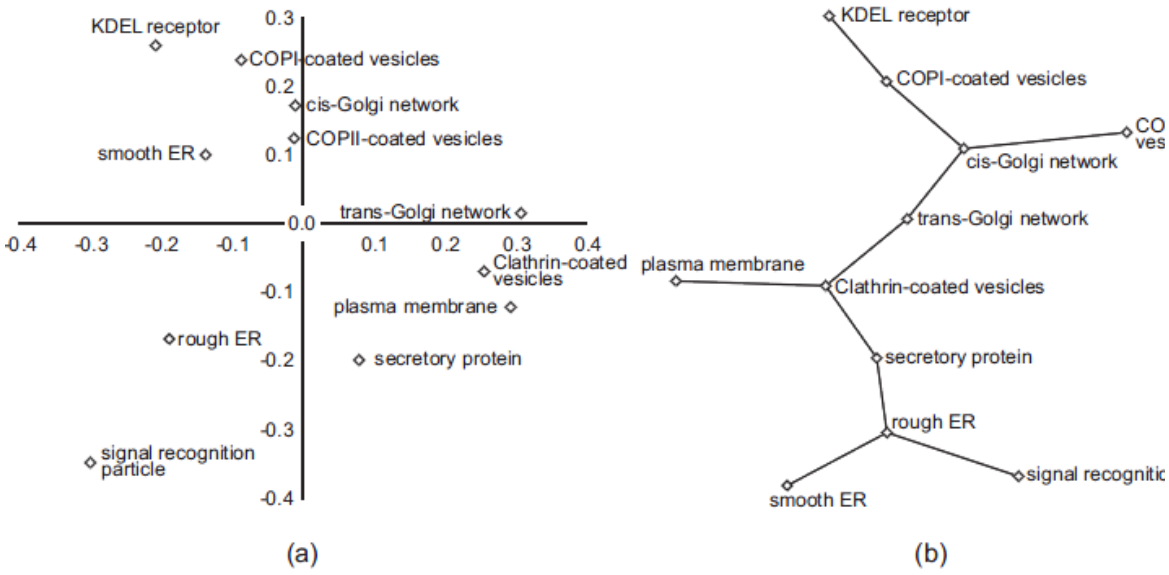


Figura 19 – Procedimento MDS (a) e a rede PFNET (b) sobre o tópico de Biologia "Compartimentos intracelulares e o transporte de proteínas (Großschedl e Harms, 2013)

2.2.2. Trabalhos de investigação, divulgação e aplicação da Teoria dos Conceitos Nucleares

Neste apartado apresentamos, mais em pormenor, a revisão bibliográfica realizada sobre os trabalhos que incidem sobre a Teoria dos Conceitos Nucleares**.** A Tabela 7 apresenta os trabalhos revistos.

Tabela 7 - Trabalhos de investigação, divulgação e aplicação da Teoria dos Conceitos Nucleares

Autores	Data	Temática Geral
Casas	2002	Aplicação à Geometria e apresentação da Teoria dos Conceitos Nucleares.
Casas e Luengo	2003	O contributo das redes PFNET e da TCN pra a Didática da Matemática.
Casas e Luengo	2004	Representação do conhecimento e a Teoria dos Conceitos Nucleares.
Casas e Luengo	2005	Os conceitos Nucleares na construção do conceito de ângulo.
Aguirre	2008	Investigação em torno do ensino/aprendizagem da função quadrática.
Antunes	2010	Estudo sobre a estrutura cognitiva de uma amostra de alunos em torno da Trigonometria.
Carvalho	2011	Compreender a estrutura cognitiva do conhecimento conceptual das operações aritméticas.
Casas, Luengo e Godinho	2011	Estudo sobre as competências relativas ao cálculo mental de professores, com recurso ao *Goluca*.
Luengo *et al.*	2011	Possibilidades da Teoria dos Conceitos Nucleares na investigação em Educação.
Corcho, Casas e Luengo	2012	Comparar a estrutura cognitiva de estudantes dada através das redes PFNET e dos Mapas Conceptuais.
Carvalho, Casas e Luengo	2012	Comparar as técnicas de construção de Mapas Conceptuais e a técnica das Redes PFNET.
Casas, Boza, Godinho e Catarreira	2012	Destacar os conceitos mais relevantes, dados através das PFNET, sobre os Meios de Comunicação.
Almeida, Casas e Luengo	2013	Organização conceptual de alunos dos 9.º e 12.º anos sobre o conceito de Probabilidade.
Casas *et al*.	2013	Representação do conhecimento na Educação de Infância.
Catarreira	2013	A Teoria dos Conceitos Nucleares e o Ensino da Geometria.
Luengo	2013	Aplicação da Teoria dos Conceitos Nucleares à Investigação Educacional e à Didática da Matemática.

Casas (2002) apresentou um estudo da evolução da estrutura cognitiva do conceito de Ângulo utilizando, para tal, as representações gráficas provenientes das Redes Associativas *Pathfinder*, para as quais emprega uma amostra de 458 alunos, com idades entre os 9 e os 18 anos. Baseando-se no marco teórico da Ciência Cognitiva e das suas implicações na Didática da Matemática, os resultados empíricos obtidos permitiram a apresentação de uma proposta para uma nova teoria – a Teoria dos Conceitos Nucleares. As conclusões obtidas experimentalmente, e confirmados através de técnicas estatísticas paramétricas e não paramétricas, mostraram que à medida que progridem na escolaridade, os alunos organizam o seu conhecimento de uma forma cada vez mais simples em torno de um conjunto limitado de conceitos relevantes, mas que não são, necessariamente, os mais gerais, nem os mais abstratos. De entre as implicações didáticas, destacam-se a possibilidade de organizar o ensino em torno destes conceitos mais importantes, adequando estratégias e materiais pedagógicos e as potencialidades de representação e de análise reveladas pela metodologia das Redes Associativas *Pathfinder*.

Nos anos seguintes, estes autores publicaram vários artigos onde sistematizam a Teoria dos Conceitos Nucleares e nos quais se realça o desenvolvimento das técnicas de representação do conhecimento, das quais assume um papel de destaque as Redes Associativas *Pathfinder*. Estas permitiram não só conjeturar acerca dos processos internos de aquisição e organização do conhecimento, mas também obter representações visuais do seu estado e evolução. (Casas e Luengo, 2003, 2004, 2005).

No seu trabalho de final de Master Aguirre (2008), descreve uma investigação em torno do ensino/aprendizagem da função quadrática utilizando um simulador geométrico. É utilizado um marco teórico baseado na Teoria dos Conceitos Nucleares e onde é adaptada uma unidade didática. Esta unidade foi lecionada a um conjunto de estudantes da disciplina de Informática do segundo quadrimestre do ano letivo de 2007/08. Mediante uma metodologia comparativa do antes e depois da formação, são construídas e estudadas as redes cognitivas *Pathfinder* e, através do cálculo dos índices de coerência, similaridade e complexidade, consegue-se obter conclusões interessantes. Os resultados obtidos nesta investigação vêm, por um lado, mostrar que as aprendizagens dos alunos melhoraram desde a fase inicial para a final e, por outro, comprovar a Teoria dos Conceitos Nucleares, de Casas e Luengo, já que as redes cognitivas dos estudantes mostraram ser mais simples à medida que aumenta o seu

nível de escolaridade, contrariamente ao referido por Piaget, no que concerne à estrutura cognitiva dos estudantes.

Utilizando diferentes métodos de análise de dados, Antunes (2010) estudou a estrutura cognitiva de uma amostra de 399 alunos, de sete escolas do distrito de Beja – Portugal, referente aos conceitos associados ao tema matemático da Trigonometria, com o objetivo de identificar e comparar os conceitos mais importantes e a sua relação e evolução ao longo de um período de anos escolares. Este trabalho pretendeu também ampliar as possibilidades de metodologias tradicionalmente utilizadas com a Teoria dos Conceitos Nucleares. Para a representação e posterior análise recorreu-se às Redes Associativas *Pathfinder*, ao *Card Sorting* e ao Escalonamento Multidimensional. Os dados e as diferentes técnicas permitiram identificar os conceitos que se destacam na estrutura cognitiva dos alunos, os quais permitiram obter informação sobre os conhecimentos prévios dos estudantes, que podem servir como avaliação diagnóstica para adequar e preparar estratégias de ensino.

Carvalho (2011), na sua tese de Doutoramento, analisou as possibilidades educativas de um ambiente de formação baseado na Web - PMatE - com aplicações ao ensino e aprendizagem da resolução de exercícios e problemas que envolvem as quatro operações aritméticas e vocacionado para alunos do 4.º ano de escolaridade do 1.º ciclo do Ensino Básico. Entre outros aspetos, o PMatE foi objeto de uma avaliação em contexto envolvendo tanto docentes como estudantes, em situações de utilização deste recurso. Esta avaliação compreendeu o estudo da estrutura cognitiva, nestes dois grupos, do conhecimento conceptual das operações aritméticas, sendo que para tal foi utilizada a técnica das Redes Associativas *Pathfinder* que serviu de suporte à análise e representação das redes cognitivas, complementada com a Teoria dos Conceitos Nucleares, e que constitui o referente teórico deste trabalho. As conclusões evidenciaram as potencialidades do PMatE, e em particular as suas virtudes enquanto instrumento de diagnóstico e avaliação do conhecimento dos alunos.

Com vista à investigação das competências dos professores no que concerne ao cálculo mental, Casas, Luengo e Godinho (2011) com recurso a uma amostra de catorze professores do Ensino Primário e utilizando o *software Goluca*, obtêm as representações da estrutura cognitiva, dadas através das redes PFNET, das estratégias utilizadas no cálculo mental. Os resultados obtidos permitiram-lhes identificar as principais estratégias utilizados pelos docentes e, inclusivamente, os professores que têm uma estrutura cognitiva mais consistente.

Luengo *et al*.(2011), apresentam, na International Conference "*The future of Education*", uma sinopse sobre as possibilidades da Teoria dos Conceitos Nucleares para a investigação em Educação. Enquanto estrutura teórica, a TCN tem visto aplicações em diversas áreas científicas (Enfermagem, Engenharia Informática, entre outras) e sustentado várias investigações em temáticas da Matemática (Geometria, Trignometria, Aritmética). Os autores concluem que a TCN, desde o seu início, teve contribuições e melhorias tanto em termos de enquadramento teórico como ao nível técnico, deixando, no entanto, muitos perguntas em aberto, as quais podem ser objeto de futuras pesquisas.

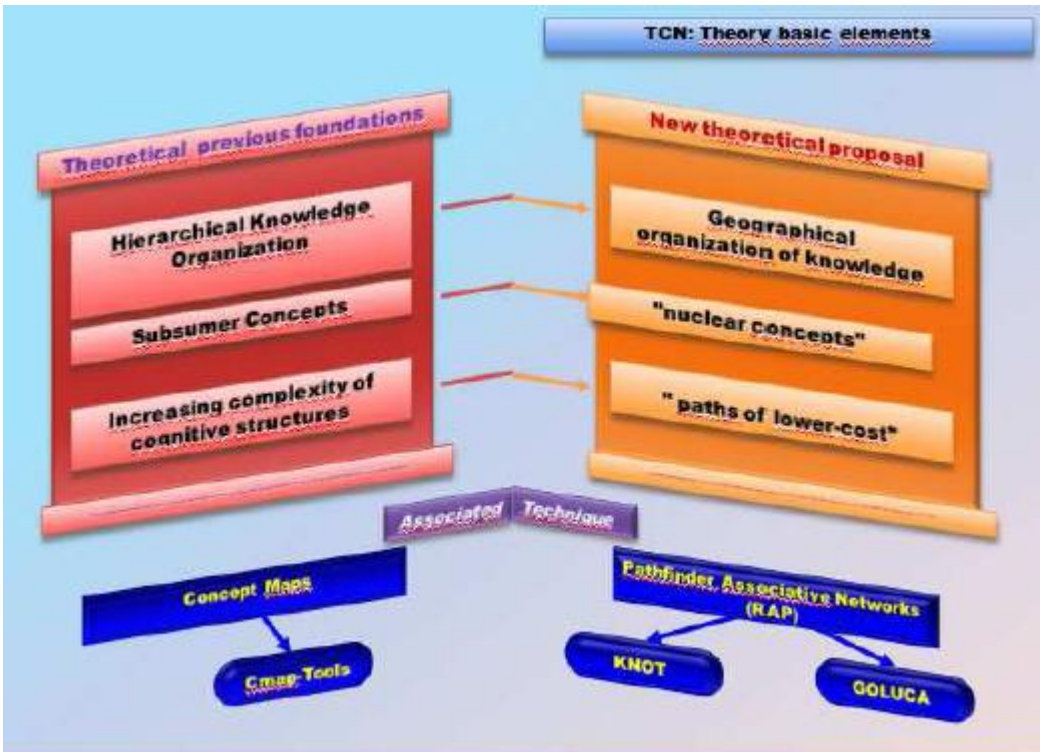


Figura 20 – Elementos Básicos da Teoria dos Conceitos Nucleares (Luengo *et al.*, 2011)

Na 5.ª Conferência Internacional sobre Mapas Conceptuais, Corcho, Casas e Luengo (2012) apresentam um artigo no qual comparam a diferença entre a estrutura cognitiva de estudantes representada através da técnica das Redes Associativas *Pathfinder* (utilizando o *software Goluca*), de um conjunto de conceitos associados à ideia de triângulo e a representação, através de um Mapa Conceptual, desses mesmos conceitos, realizada pelo professor. Concluiu-se que o conhecimento não se vai organizando de forma hierárquica (de conceitos mais latos ou inclusivos a conceitos mais simples) e que, talvez, esta organização ocorra no final do processo de aprendizagem, quando se tem uma visão mais global.

No mesmo Colóquio internacional, Carvalho, Casas e Luengo (2012) divulgam um trabalho onde se analisa as principais possibilidades, limitações e implicações para a investigação, e para o estudo do processo de Ensino e Aprendizagem, das teorias de Ausubel, Novak e Gowin e da Teoria dos Conceitos Nucleares, de Casas e Luengo, assim como as principais técnicas de organização e representação do conhecimento conceitual inerentes a estas teorias. Neste contexto, são comparadas as técnicas de construção de Mapas Conceptuais e a técnica das Redes Associativas *Pathfinder*, considerada como um dos modos mais fiáveis e inovadores da representação da estrutura cognitiva.

Ainda neste congresso, Casas, Boza, Godinho e Catarreira (2012), divulgam os resultados de uma experiência levada a cabo na Educação Pré-escolar com as Redes Associativas *Pathfinder*, como técnica alternativa aos Mapas Conceptuais. Tendo como base 23 alunos deste nível de ensino, os autores obtiveram representações gráficas da estrutura cognitiva na área do conhecimento dos "Meios de comunicação", utilizando imagens, em vez dos conceitos escritos. Deste modo foi possível destacar os conceitos mais relevantes e avaliar de que forma a coerência e a complexidade das redes PFNET evoluíram antes e depois da instrução, tudo de uma forma automatizada utilizando o *software Goluca.*

Nas "I *Jornadas Virtuais de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*", Almeida, Casas e Luengo (2013), com base na TCN apresentam uma comunicação, na qual são descritos alguns resultados preliminares sobre a organização cognitiva dos alunos em relação ao conceito de Probabilidade. Inicialmente procedeu-se à identificação dos termos, conceitos e exemplos associados ao processo de ensino/aprendizagem da noção de Probabilidade. De seguida, com recurso às Redes Associativas *Pathfinder,* e utilizando o *software Goluca,* recolheram e trataram os dados de alunos a frequentarem, no ano letivo 2012/2013, o 9.ºano de escolaridade em Portugal. As PFNET assim obtidas permitiram-lhes identificar os conceitos que assumem uma maior relevância na estrutura conceptual dos alunos – os Conceitos Nucleares -, aquelas noções que ainda não estão devidamente incorporadas na estrutura cognitiva dos estudantes – os Nós Extremidade -, a sua respetiva organização e efetuou-se uma análise comparativa dos indicadores quantitativos destas representações entre discentes de género feminino e masculino.

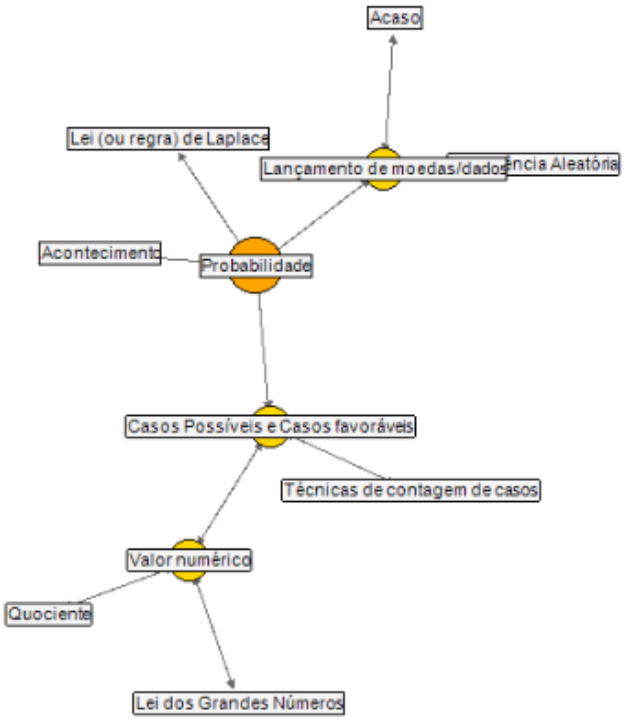


Figura 21 - Rede Associativa Média *Pathfinder* relativa ao conceito de Probabilidade

(Almeida *et al.*, 2013)

Com um grupo de 23 alunos de Educação de Infância, Casas *et al.* (2013), conseguiram representar a estrutura cognitiva, antes e depois da instrução no campo de conhecimento dos Meios de Comunicação. Para tal aplicam a técnica das Redes Associativas *Pathfinder*, utilizando a ferramenta experimental informática *Goluca*. A figura seguinte, que reproduzimos do original, mostra a recolha de dados solicitada aos jovens, na qual a semântica é substituída por imagens associadas à temática em estudo.

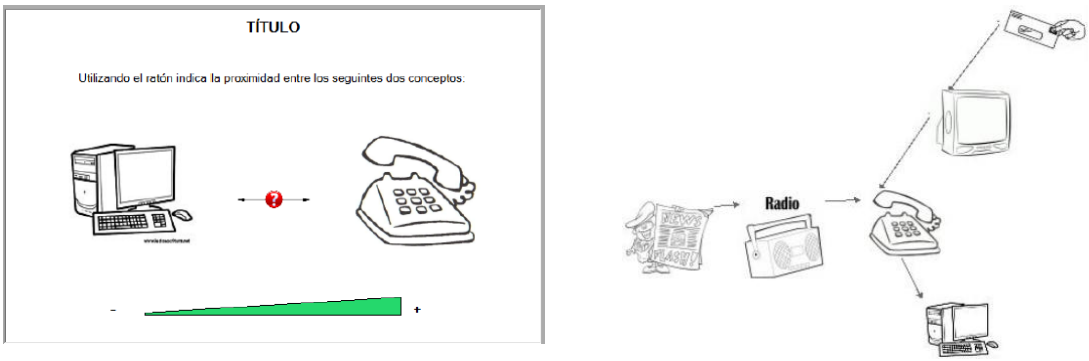


Figura 22 – Interface de recolha de dados do *Goluca* e uma rede PFNET obtida

(Casas *et al.*, 2013)

Consideraram estes autores que pela sua facilidade, a utilização deste *software* permitiu o conhecimento da estrutura cognitiva de alunos bastante jovens, ou com capacidades cognitivas limitadas, e que pode constituir um excelente auxiliar na investigação com este grupo de estudantes.

Já mais recentemente, Catarreira (2013) apresentou a sua tese de doutoramento e na qual faz uma aplicação da Teoria dos Conceitos Nucleares à Geometria. Especificamente, foi elaborada, com base neste marco teórico, uma Unidade Didática para a Geometria. Com recurso a técnicas qualitativas e quantitativas, determinou-se uma rede de referência (Figura 23) que refletisse a estrutura cognitiva dos alunos participantes e, com base nos conceitos que nessa rede se destacaram, elaborou-se uma Unidade Didática. Seguidamente efetuou-se a sua aplicação em diferentes escolas e, seguidamente, compararam-se os resultados dos grupos experimental e controlo. A avaliação do processo de aprendizagem esteve direcionada não só para os resultados escolares, mas também englobou a análise das modificações na estrutura cognitiva dos alunos. Os resultados obtidos nesta investigação confirmam os pressupostos, definidos em anteriores investigações, da Teoria dos Conceitos Nucleares.

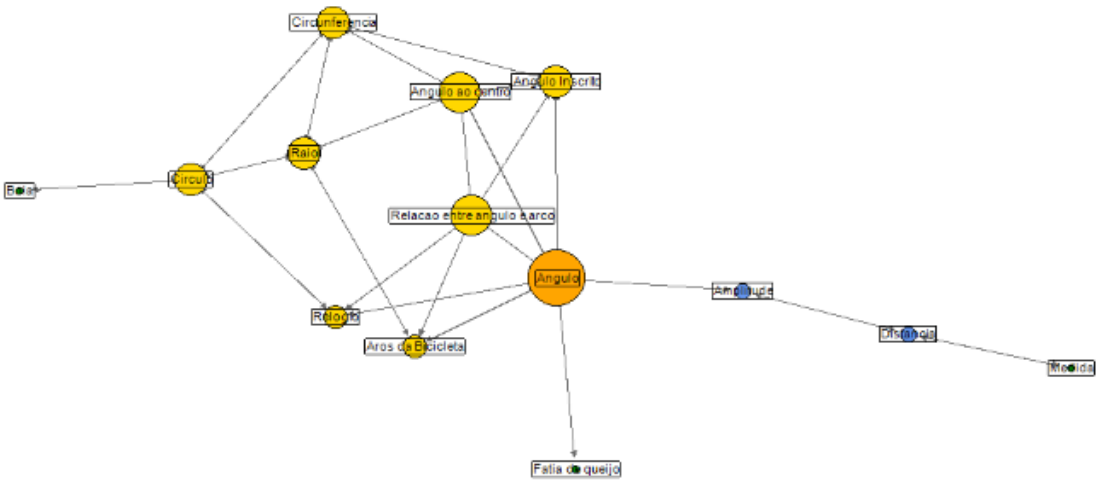


Figura 23 – Rede PFNET de referência (Catarreira, 2013)

Na revista *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* Luengo (2013), como investigador convidado, apresentou um texto onde expõe as implicações da Teoria dos Conceitos Nucleares para a Investigação Educacional e para a Didática da Matemática e no qual conclui que "*la TCN sus técnicas asociadas tienen ya un largo recorrido y una base sólida*". No final do artigo são sugeridas linhas para futuras investigações: 1) Contributos para o marco da Teoria dos Conceitos Nucleares (cujos objetivos são comprovar, completar e consolidar o

que já se sabe sobre a TCN); 2) Melhorar a técnica do *Goluca* (obtenção das redes, dotar o programa de novas funcionalidades, analisar, comparar e triangular os resultados com outras técnicas); 3) Aplicar a TCN a diversos temas da Matemática e a outras áreas do conhecimento (procurar novas estratégias e aplicações da TCN ao Ensino); e 4) Melhorar os processos de Ensino e Aprendizagem, de modo que os resultados encontrados, de acordo com a TCN, influenciem a melhoria da Prática.

2.2.3. Síntese e conclusões

Nestas últimas secções, apresentamos parte dos fundamentos teóricos que sustentam a presente investigação: a Teoria dos Conceitos Nucleares e a Metodologia das Redes Associativas *Pathfinder*.

Constituindo as Redes Associativas *Pathfinder* a metodologia, por excelência, da Teoria dos Conceitos Nucleares, a nossa primeira abordagem, na contextualização teórica, prendeu-se com a procura de textos que utilizam esta técnica como aplicação em diversas áreas de investigação (Matemática, Física, Biologia, Contabilidade, Informática, entre outras). Para além das referências sobre os fundamentos desta metodologia, é notória a sua aplicação em variados contextos educativos e, inclusive, face à sua importância, assiste-se ao desenvolvimento de *software* específico de recolha e tratamento de dados, à luz desta técnica (por exemplo, o programa *Goluca* que analisaremos com mais detalhe no Capítulo 4).

A Teoria dos Conceitos Nucleares, enquanto nova proposta didática, tem visto a sua aplicação alargada e tem apontado conclusões experimentais, corroboradas por técnicas estatísticas, que evidenciam que à medida que progridem na escolaridade, os estudantes organizam o seu conhecimento de uma forma cada vez mais simples em torno de um conjunto limitado de conceitos relevantes/nucleares, e que não são, necessariamente, os mais gerais, nem os mais abstratos. Os trabalhos revistos, muitos deles teses de doutoramento, destacam a relevância da identificação destes conceitos, e das suas relações, para adequar e preparar estratégias de ensino e materiais pedagógicos.

2.3. DIFERENTES FORMAS DE CONHECIMENTO. O CONHECIMENTO PROBLEMÁTICO E OS CONCEITOS *THRESHOLD*

2.3.1. O Conhecimento Declarativo, o Conhecimento Procedimental e o Conhecimento Estrutural

Do ponto de vista cognitivo, o conhecimento pode ser entendido como um sistema de informações abrangendo espetos específicos e gerais de uma determinada ideia, teoria científica, notícia ou prática de vida. Essas informações são processadas pelo individuo, isto é, são recolhidas, codificadas, organizadas e armazenadas em consequência de uma experiência (Antunes e Dantas, 2010). A memória é o nome que é dado ao sistema de armazenamento de conhecimentos e que, por esta razão, possui funções de codificação e recuperação da informação (Stenberg, 2000).

As investigações mais recentes sobre a aquisição do conhecimento sugerem a existência de três tipos de conhecimento: o conhecimento declarativo, o conhecimento procedimental e o conhecimento estrutural (Casas, 2002; Antunes, 2010, Carvalho, 2011; Catarreira, 2013).

O **conhecimento declarativo** é constituído pelo saber ou pela consciência de um objeto, evento ou ideia e está relacionado com factos e relações do mundo, o que implica ser constituído por proposições verdadeiras, cujo conteúdo total pode ser expresso verbalmente. Pode-se dizer que este tipo de conhecimento constitui o "*saber que fazer*".

Uma parte substantiva do conhecimento quotidiano das pessoas é declarativo, pois representa simplesmente afirmações ou factos sobre o mundo real.

Rich (1988, cit. por Câmara, 2001) elenca as principais vantagens de uma representação declarativa:

"- cada facto só precisa de ser armazenado uma vez, independentemente das diferentes maneiras em que poderá ser utilizado;

- a facilidade em acrescentar novos factos ao sistema, sem mudar outros factos e pequenos procedimentos."

Por sua vez, o **conhecimento procedimental** refere-se à habilidade ou competência para a realização de um certo ato ou ação, como, por exemplo, ler, escrever e contar, andar, nadar, dançar, usar um computador, analisar um gráfico ou interpretar uma matriz de resultados. Basicamente, este tipo de conhecimento refere-se ao modo como as pessoas utilizam o conhecimento declarativo, ou seja, "*O conhecimento declarativo fornece a base conceptual para o conhecimento procedimental*" (Carvalho, 2011), isto é, o "*saber como fazer*" (Casas, 2002)

Ainda segundo Rich (1988, cit. por Câmara, 2001), de entre as vantagens da utilização da representação procedimental incluem-se:

"- a facilidade em representar o conhecimento de como fazer as coisas;

- a facilidade em representar o conhecimento que não se enquadra dentro de muitos esquemas declarativos simples, como por exemplo, o raciocínio por omissão e o raciocínio probabilístico;

- a facilidade em representar o conhecimento heurístico de como fazer eficientemente as coisas."

Finalmente, o **conhecimento estrutural** trata-se de um conhecimento de transição do conhecimento declarativo para o procedimental e que facilita a aplicação do primeiro (Catarreira, 2013). Este descreve a estruturação do conhecimento, ou seja, o modelo mental que o perito tem na resolução de um determinado tipo de problema e o modo como os conceitos estão relacionados dentro de um domínio. De acordo com Carvalho (2011) *"No conhecimento estrutural, a compreensão destas relações permite aos alunos estabelecer ligações que necessitam de usar para formar esquemas (estruturas) mais complexas".*

Neste contexto, é de grande importância a ideia de estrutura cognitiva que, de acordo com Casas (2002), "Por tal *se entiende el patrón de relaciones entre los conceptos en la memoria. Más exactamente definido, sería el constructo hipotético que se refiere en la organización de las relaciones entre conceptos en la memoria semántica o a largo plazo*". Ainda de acordo com este investigador, a estrutura cognitiva não é rígida mas, bem pelo contrário, evolui individualmente com a aquisição de novos atributos subjetivos e objetivos

Um estudo de Kempa (1991) evidencia a relação direta entre as dificuldades de resolução de problemas e a estrutura cognitiva. Estas dificuldades estão muitas vezes relacionadas com um ou mais dos seguintes fatores:

1. Ausência de elementos do conhecimento com origem na estrutura da memória do aluno;
2. Presença nessa estrutura de conexões e relações erradas, ou incorretas, entre elementos do conhecimento;
3. Ausência de conexões essenciais entre elementos do conhecimento, e;
4. Presença de elementos do conhecimento falsos ou irrelevantes.

A aprendizagem, sobre este ponto de vista, pode-se conceber como uma reorganização da estrutura cognitiva, ao edificar novos sistemas organizacionais com base nos existentes.

2.3.2. Diferentes formas do Conhecimento Problemático

A Matemática é difícil!!! Quantas vezes esta expressão é proferida pelos estudantes corroborada, não menos vezes, pela comunidade educativa e pelos mais variados órgãos de comunicação. A verdade é que estas diferentes vozes interferem e condicionam o processo de Ensino e de Aprendizagem da Matemática e servem, muitas vezes, de justificação para os elevados índices de insucesso escolar que ainda proliferam nesta disciplina.

É considerada uma disciplina com resultados precisos e procedimentos infalíveis, que possui como elementos fundamentais as operações aritméticas, os procedimentos algébricos, as definições e os teoremas. Nesta perspetiva, estamos conscientes que o formalismo da linguagem Matemática, estruturado na lógica dedutiva, impossibilita frequentemente outras interpretações, pois exige uma linguagem ideal que, com regularidade, confronta-se com as ambiguidades da linguagem corrente.

Todavia, o mundo em que vivemos, embora por vezes de um modo não explicito, depende em muito da Matemática. A Matemática encontra-se presente nas mais variadas situações do quotidiano e a sua aplicabilidade já é discutida, inclusive, noutras outras Ciências, como afirma D'Ambrósio (1996) "*a tendência de todas as ciências é cada vez mais de se*

matematizarem em função do desenvolvimento de modelos matemáticos que desenvolvem fenômenos naturais de maneiras adequadas."

Num contexto probabilístico, as noções básicas deste conhecimento são, por vezes, conceitos de difícil compreensão e problemáticos pois, em geral, a sua natureza entra em contradição com a lógica determinística e causal que ainda, na nossa opinião, subsiste no sistema educativo. Como assinala Batanero (2006), a probabilidade não é uma propriedade física palpável e visível nos eventos que nos rodeiam (como por exemplo: o calor, o peso, a área ou a temperatura), senão converte-se numa perceção, num grau de aceitação da verosimilhança que o sujeito atribui à probabilidade da ocorrência de um acontecimento e por esta razão "*las decisiones y juicios de probabilidad en la vida cotidiana nos dejamos llevar por la intuición que con frecuencia nos engaña y cometemos falacias que no se suelen corregir simplemente con un aprendizaje formal de la probabilidade*" (Shaughnessy, 1986 citado por Batanero, 2006).

Por outro lado, os problemas de probabilidade apesar de não requerer cálculos complicados (excetuando aqui, talvez, os problemas que envolvem Cálculo Combinatório), exigem muita atenção na sua resolução logo ao nível da sua compreensão, já que são menos rotineiros e, frequentemente, os estudantes acham os problemas muito diferentes entre si.

Genericamente, Perkins (1999) definiu conhecimento problemático como aquele que parece contraintuitivo, diferente ("*alien*" no original), que pode ser proveniente de outra cultura ou discurso ou, ainda, incoerente.

Em virtude deste tipo de conhecimento constituir um obstáculo à aprendizagem, Perkins apresenta uma categorização em:

i) Conhecimento Ritual;

ii) Conhecimento Inerte;

iii) Conhecimento conceptualmente difícil, e;

iv) Conhecimento Estrangeiro.

Clarifiquemos melhor cada um destes tipos de conhecimento problemático.

i) Conhecimento Ritual (*Ritual Knowledge*)

O Conhecimento Ritual, sugere Perkins (1999), e reforçado por Meyer e Land (2003), tem "*caraterísticas de uma rotina sem sentido*", e constitui uma parte integrante de um ritual, de uma prática que pode ser individual ou social. O modo como por vezes as respostas são formatadas quando se é questionado sobre determinados assuntos definem, frequentemente, rotinas que se executam para obter um resultado particular, sem entender-se bem o porquê de estas terem sido dadas.

Ao nível matemático existem vários exemplos onde este conhecimento está patente, seja através da execução de algumas práticas rotineiras ou da memorização de fórmulas e procedimentos que, em muitas situações, não são devidamente compreendidas, mas que no entanto são frequentemente realizadas.

Num estudo realizado em 2009 com duas turmas da 5ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual do município de Criciúma - Brasil, Michels (2009) constatou que, apesar dos esforços envidados, os alunos não conseguiram desvincular-se das técnicas operatórias e dos procedimentos de memorização habitualmente associados ao processo de ensino da tabuada.

Analogamente, Dooren, De Bock, Hessels, Janssens e Verschaffel (2005) investigaram a aplicação errada do raciocínio proporcional, em função da idade e da experiência educacional dos alunos. Aplicaram um teste a 1062 alunos do 2.º ao 8.º ano, o qual consistia em alguns problemas aritméticos de natureza proporcional e não proporcional do tipo "*valor omisso*". Verificaram que, os alunos tendem a aplicar "*métodos proporcionais*" em situações em que esses métodos, claramente, não se aplicam.

ii) Conhecimento inerte (*Inert Knowledge*)

De acordo com a definição de Perkins (1999) este tipo de conhecimento encontra-se no "*sótão da mente*" e só é utilizado quando é especificamente chamado, seja através do aparecimento de uma situação problemática ou de uma questão a ser resolvida, mas caso contrário mantém-se quieto/imóvel. Este aspeto vem reforçar a ideia de que a capacidade para ativar conhecimentos matemáticos em situações fora da Matemática não decorre

automaticamente da aquisição de conceitos puramente matemáticos, mas requer um certo grau de prática e preparação.

A Matemática parece ser um campo fértil neste tipo de conhecimento, já que os alunos, e não só, têm bastante dificuldade em efetuar conexões e ligações entre conteúdos que apreendem de um modo mais formal e as várias situações que, quase diariamente, ocorrem em termos sociais e/ou pessoais.

É unanimemente reconhecida a importância da Matemática na formação dos futuros Engenheiros. Por esta razão, nas estruturas curriculares destas licenciaturas são várias as temáticas desta ciência que são estudadas, desde a Análise Matemática, à Algebra Linear e Geometria Analítica e, inclusive, as Probabilidades e Estatística. Como consequência, e no final dos seus cursos, os futuros Engenheiros encontram-se munidos de um conjunto de competências matemáticas que, teoricamente, lhes permite enfrentar vários problemas que encontrarão no exercício efetivo da sua profissão. Todavia, e apesar do conhecimento estar adquirido, ele frequentemente não é despoletado para resolver um problema concreto, já que a experiência mostra que as dificuldades com que um engenheiro se confronta logo após o término do seu curso, não são, muito provavelmente, as mesmos que enfrentará passados 10 anos (Fernandes, s.d.).

iii) Conhecimento conceptualmente difícil (*Conceptually Difficult Knowledge*)

Perkins (1999) admite que "*Before students reach the university level, they meat conceptually difficult knowledge most commonly in mathematics and science, althout it can occur in any discipline*". Alguns conceitos matemáticos constituem, efetivamente, desafios cognitivos delicados e conceptualmente difíceis para os estudantes e, com regularidade, a consequência que decorre do seu incorreto entendimento constitui uma amálgama de mal-entendidos, cuja superação vem dada pelo recurso frequente ao conhecimento ritual.

Díaz (2009a) refere que a investigação em torno da Probabilidade Condicionada não é um tema simples e apresenta diversos fatores que conduzem a ideias erróneas *e "el alumno puede llegar a la clase con intuiciones incorrectas en el campo de la probabilidad*" acontecendo mesmo atribuir valores numéricos incorretos e que contrariam a lógica do cálculo de Probabilidades.

iv) Conhecimento estrangeiro (*Alien Knowledge*)

Este tipo de conhecimento é caracterizado por surgir "*numa ótica diferente e que entra em conflito com a perspetiva pessoal*". Como exemplo Perkins (1999) aponta a interpretação dada pelos estudantes em função de valores atuais de situações que ocorreram no passado. Outros exemplos apontados referem-se às representações efetuadas pelos sujeitos em função de sistemas de valores étnicos, religiosos ou políticos.

Como exemplo podemos apontar o sistema de numeração indo-árabe que constitui, na nossa opinião, um dos modelos deste tipo de conhecimento. Apesar de atualmente estar enraizado na Matemática, em 1299, os banqueiros de Florença estavam proibidos de usar numerais árabes e eram obrigados a usar os numerais romanos (Struik, 1989) e, nas décadas subsequentes, ultrapassou vários obstáculos de natureza sociológica e religiosa até encontrar a sua aceitação, quase universal.

2.3.3. Os Conceitos *Threshold*

A investigação sobre os conceitos relacionados com um tema e que desempenham um papel essencial, tanto pela positiva como pela negativa, no delineamento de um processo de ensino, tem constituído uma preocupação da comunidade educativa e sido objeto de estudo.

Em face dos baixos níveis de Literacia Matemática demonstrada pelos jovens no final da sua educação formal, a pesquisa sobre a identificação dos conceitos que ajudem na elaboração de desenhos curriculares, que facilitem os estudantes a trilhar caminhos em direção a uma efetiva formação de cidadania construtiva, preocupada e reflexiva (PISA, 2004), tem vindo a assumir algum destaque ao nível da investigação.

Meyer e Land (2003) desenvolveram e introduziram a noção de Conceito *Threshold*. De acordo com a definição apresentada por estes investigadores, os Conceitos *Threshold* constituem conceitos, noções ou ideias que, inicialmente, para os estudantes são conceções complicadas e até mesmo problemáticas, mas que, no entanto, quando compreendidas elas são transformadoras, integradoras e contribuem para aprendizagens significativas.

Estes conceitos funcionam como "portas de entrada", ou "janelas", para a visualização, para o entendimento e para a compreensão de um determinado tema, e sem os quais o aluno

não pode progredir. Davies (2003) afirma mesmo que "*This concept provides a promising way of interpreting the learning demand presented by subjects*" e podem constituir, inclusive, uma excelente ferramenta de trabalho para analisar o desenvolvimento da aprendizagem.

Ao longo das suas investigações, Meyer e Land (2003) constataram que os Conceitos *Threshold* verificam, provavelmente, as seguintes características:

- ***Transformadora*** - no sentido em que, uma vez compreendidos, o seu efeito potencial na aprendizagem dos alunos, provoca uma mudança significativa da perceção de um assunto ou, pelo menos, de parte dele;
- ***Irreversibilidade*** - é improvável a mudança de perspetiva provocada pela compreensão de um Conceito *Threshold*, e caso ela seja esquecida é à custa de um considerável esforço;
- ***Integradora -*** o conceito expõe as possíveis conexões com outros temas, as quais, numa fase inicial, se mantinham indetetáveis e incompreensíveis;
- ***Limitadora*** - embora não necessariamente sempre, estes conceitos podem definir as fronteiras de um assunto ou área de conhecimento;
- ***Problemáticos*** – esta característica entendida na dimensão da dificuldade de compreensão do conceito, a qual pode assumir diferentes formas, como definido por Perkins (1999).

O esquema seguinte (Figura 24) pretende ilustrar estas características dos Conceitos *Threshold*.

Características dos Conceitos *Threshold*				
Transformadora *M*udança significativa na perceção de um assunto ou, pelo menos, de parte dele.	***Irreversibilidade*** *I*mprovável a mudança de perspetiva provocada pela compreensão de um conceito.	***Integradora*** O conceito expõe as possíveis conexões com outros temas.	***Limitadora*** *E*stes conceitos podem definir as fronteiras de um assunto ou área de conhecimento.	***Problemáticos*** *N*a dimensão da dificuladade de compreensão do conceito.

Figura 24 – Características dos Conceitos *Threshold*

Dada a dificuldade e a problemática que os Conceitos *Threshold* assumem para a aprendizagem dos estudantes dentro das sequências de ensino, e das estruturas curriculares, o seu estudo parece-nos assumir relevância pedagógica acrescida.

De que modo o conhecimento sobre os Conceitos *Threshold* permite uma efetiva melhoria das aprendizagens dos estudantes? Uma das premissas que poderá auxiliar à obtenção de respostas a esta questão, prende-se com a identificação desses conceitos. Nesta lógica, parece-nos claro que o reconhecimento destes é fundamental para a preparação de estratégias, para a elaboração de planificações de atividades pedagógicas, para a conceção de ambientes de aprendizagem que fomentem diferentes modos de pensar e trabalhar dentro das disciplinas.

2.3.3.1. As investigações iniciais sobre os Conceitos *Threshold*

A revisão bibliográfica que a seguir apresentamos tem como intenção descrever as publicações e os estudos que, no nosso entender, têm contribuído para o desenvolvimento e divulgação dos Conceitos *Threshold*. Em particular faremos referências àqueles artigos que, tanto do ponto de vista histórico como na perspetiva do conteúdo, parecem-nos ser referência sobre esta temática.

Nesta revisão, também tivemos a preocupação de que os textos aqui mencionados ajudem no cumprimento dos seguintes objetivos:

- situem os Conceitos *Threshold* dentro de um quadro conceptual;
- coloquem a enfase na definição, identificação e na discussão dos Conceitos *Threshold* e, deste modo, permitam ajudar, apoiar e a reforçar o ensino e a aprendizagem de uma disciplina.

Numa fase inicial desta pesquisa, os primeiros documentos encontrados resumiram-se a textos de conferências e relatórios de pesquisa. Todavia, os artigos mais recentes consultados surgem já publicados em revistas de referência.

A ideia dos Conceitos *Threshold*, emergiu no âmbito de um projeto desenvolvido no Reino Unido, o qual visava melhorar os ambientes de ensino e aprendizagem em cursos do Ensino Superior. Em 2003, surge o relatório produzido por Jan Meyer e Ray Land no âmbito do projeto *Enhancing Teaching-Learning Environments in Undergraduate Courses* (ETL Project), no qual apresentam as características dos Conceitos *Threshold* e, à luz do trabalho de Perkins (1999), tentam estabelecer correspondências entre a noção de Conceito *Threshold* e de Conhecimento Problemático.

Baseando-se em observações e entrevistas realizadas no decorrer do projeto a professores que lecionavam em cinco diferentes contextos disciplinares do Ensino Superior, estes investigadores definiram as características inerentes a este tipo de conceitos e já referidas atrás - *integração*, *limitação*, *irreversibilidade*, *transformação* e *problemática*. As conclusões obtidas apontam para a existência de Conceitos *Threshold* em diferentes áreas do saber, os quais constituem fatores importantes, mas problemáticos, no desenho de ambientes de aprendizagem eficazes e, acrescentam ainda, que estes conceitos, onde quer que surjam, constituem um óbvio, e talvez negligenciado, foco de avaliação das estratégias de ensino e aprendizagem.

Na sequência deste estudo, os mesmos autores, em 2005, colocam a reflexão em torno dos Conceitos *Threshold* num outro patamar. Assim, procuraram examinar a extensão, dentro de disciplinas específicas, do entendimento pessoal dos discursos epistemológicos, no qual estes conceitos podem ser localizados; desenvolver formas mais amplas da noção limitadora dos Conceitos *Threshold*; e propõem um quadro conceptual dentro do qual os professores podem avançar na sua própria prática reflexiva. Como resultado deste trabalho, esboçam um desenho no qual acrescentam elementos interpretativos, explicativos e de ação, que permitem elucidar aspetos problemáticos do conhecimento disciplinar dentro das transições dos limites conceptuais, o que, na sua opinião, permite ajudar os professores na identificação de formas adequadas para modificar ou reformular currículos (Meyer e Land, 2005).

Davies (2003), numa conferência levada a cabo em *Padova – Itália*, coloca a tónica do seu discurso no modo como reconhecer os Conceitos *Threshold* e defende que, nesta identificação, deve ser adotada uma abordagem indutiva. O exemplo utilizado nesta comunicação centra-se na identificação destes conceitos na área das Ciências Económicas, em particular com as noções de Reciclagem e Comércio. É feito um estudo empírico através de uma comparação do raciocínio utilizado por Economistas e Sociólogos sobre esta matéria. Socorrendo-se de duas turmas de jovens com idades entre os 14-15 anos de duas escolas

diferentes, é solicitada aos estudantes uma opinião fundamentada sobre um conjunto de afirmações. Nas conclusões apresentadas são referidas algumas implicações para a elaboração de desenhos curriculares.

Em 2005, Davies e Mangan, apresentam uma comunicação na *European Association in Learning and Instruction Conference*, na qual expõem novas abordagens para o reconhecimento dos Conceitos *Threshold*. Estes investigadores, reconhecendo a importância dos Conceitos *Threshold* nos processos formativos, sugerem três modos diferentes de proceder-se a mudanças conceptuais – *basic, discipline e modelling* – e, à custa destas, estabelecem uma caracterização dos Conceitos *Threshold* (Tabela 8).

Tabela 8 – Definição e exemplos dos três tipos de mudança conceptual

(Davies e Mangan, 2005)

Type of conceptual change	*Type of transformation and integration*	*Example in economics*
Basic	Understanding of everyday experience transformed through integration of personal experience with ideas from discipline.	Distinctions between price/cost; income/wealth (stocks/flows); nominal/real values; investment/saving. Opportunity cost. Elasticity
Discipline	Understanding of other subject discipline ideas transformed through acquisition of theoretical perspective	Partial equilibrium. Interactions between markets. Comparative advantage.
Modelling	Ability to construct discipline specific narratives and arguments transformed through acquisition of organising idea	Ceteris paribus, time (short-term, long-term, expectations)

Após um estudo realizado junto de alunos e professores do ensino superior, estes autores encontram três tipos diferentes de Conceitos *Threshold*: *basic*, *discipline* e *modelling*. Consideram que, a questão-chave com os Conceitos "*Threshold Basic*" é a relação entre compreensão diária dos alunos sobre um assunto e as imposições e ideias sugeridas pelo formalismo de uma disciplina. Os Conceitos "*Threshold* discipline" são caracterizados por uma compreensão integrada, numa "rede" de outros conceitos, que só fazem sentido aplicados a um problema particular. Finalmente, os Conceitos "*Threshold modelling*" que estão profundamente enraizados nas noções associadas à disciplina e que normalmente

são tomados como verdades inquestionáveis e, inclusive, ditam o sentido da pesquisa. Estes investigadores também referem que esta distinção oferece um modo mais refinado sobre as implicações para o ensino, o que permite a visualização destes conceitos como entidades diferenciadas e não equivalentes.

Numa conferência realizada em 2006, em Glasgow, os mesmos investigadores voltam a reforçar esta ideia, acrescentando agora uma ligação dos Conceitos *Threshold* à Teoria da Variação (teoria aplicado ao processo de ensino e aprendizagem e que se centra na forma como um fenómeno se torna visível num contexto de ensino) e usam estas duas ideias para desenvolver uma estrutura coerente da compreensão e as implicações para a aprendizagem de um assunto. Sugerem (Davies e Mangan, 2006b) que os estágios iniciais de aprendizagem dos estudantes envolvem essencialmente a aquisição de "*Building Blocks*" os quais, nesta fase, não são devidamente consolidados porque ainda não foram compreendidos os Conceitos *Threshold*. Quando estes últimos conceitos são entendidos, os alunos passam a reinterpretar e a transformar as suas aprendizagens anteriores, o que pode ter profundas implicações no seu progresso formativo.

Nessa mesma altura é dinamizada uma conferência, na Universidade de *Strathclyde - Escócia*, na qual se reúne um vasto leque de investigadores para apresentar os seus estudos sobre os Conceitos *Threshold,* dentro das suas áreas de intervenção. Esta conferência veio mostrar que este campo de investigação está claramente a crescer e a gerar perspetivas curiosas e questões de pesquisa interessantes.

No final de 2006, Meyer e Land (2006), editam um livro, intitulado "*Overcoming Barriers to Student Understanding: Threshold concepts and troublesome knowledge",* com a contribuição de vários investigadores. Nele aborda-se a exploração dos Conceitos *Threshold* como "redes" de conceitos e o seu papel na integração de novas ideias em sistemas de crenças individuais. Refletem, ainda, sobre algumas das repercussões dos resultados da investigação sobre os Conceitos *Threshold* para a prática pedagógica no ensino superior.

Glynis Cousin (2006), também se associa a esta reflexão sobre os Conceitos *Threshold* e elabora um artigo no qual faz uma descrição das características e procura evidenciar a importância destes como contributo para a elaboração de desenhos curriculares. Aqui enuncia quatro princípios a ter em conta nos desenhos curriculares: *Joias do Currículo* (já que identificam áreas-chave que necessitam de ser dominadas); *Ouvir para compreender* (os professores precisam de ouvir os equívocos e as incertezas dos alunos de modo a envolver-se, com eles, na sua resolução); *Criar um ambiente de envolvimento para a tolerância à*

"confusão" (os professores devem demonstrar alguma tolerância no momento em que os alunos patenteiam mais dificuldades); e*, Promover um processo Recursivo* (a necessidade de realizar, recursivamente, um retorno às aprendizagens para consolidá-las).

Davies e Mangan (2007) publicaram um artigo no qual descrevem a ideia de como estes conceitos podem ser usados para descrever o progresso da aprendizagem na área da Economia. Assim, com base numa amostra de alunos e professores do ensino superior, examinam a relação entre os Conceitos *Threshold*, os conceitos chave e a mudança conceptual. Sugerem que uma distinção entre os conceitos *basic, discipline e procedural* (ou *modelling*)*,* pode ser útil na determinação de um quadro para a identificação dos Conceitos *Threshold*.

Já em 2010, Cousin argumenta que a pesquisa pedagógica organizada em torno dos Conceitos *Threshold* oferece uma maneira nova de pensar sobre o trabalho colaborativo ao nível da investigação, de tal modo que incentiva parcerias com educadores, estudantes e especialistas das disciplinas e coloca o foco de aprendizagem nas dificuldades inventariadas.

Em síntese, a definição original de Conceito *Threshold* como algo semelhante a "um portal" e que é transformador, provavelmente irreversível, integrador, muitas vezes problemático e, provavelmente, limitado (Meyer e Land, 2003), foi sendo refinada ao longo do processo de identificação destes conceitos. No entanto Davies e Mangan (2005) usaram, elaboraram e diferenciaram diferentes tipos de Conceitos *Threshold: basic, disciplinary e modelling*. Todavia, a definição central sobre estas entidades mantém-se e, inclusive, tem vindo a ser reforçada (Davies, 2006; Meyer e Land, 2006). Nas suas mais variadas vertentes, estas investigações vêm mostrar a relevância do conhecimento dos Conceitos *Threshold* em várias áreas educativas e a sua importância, enquanto ideia emergente, nos processos de Ensino e Aprendizagem.

2.3.3.2. Estudos sobre os Conceitos *Threshold* na Matemática

Em virtude do presente estudo se situar na área da Matemática, e em particular da sua Didática, parece-nos importante referir alguns estudos que analisam os Conceitos *Threshold* dentro desta área científica.

A tabela seguinte sintetiza os trabalhos revistos nesta secção:

Tabela 9 - Trabalhos de investigação e divulgação dos Conceitos *Threshold* aplicados à Matemática

Autores	Data	Temática Geral
Dunne *et al*.	2003	Os Conceitos *Threshold* na Estatística.
Bulmer, O'Brien e Price	2007	Aplicação dos Conceitos *Threshold*, à Estatística, para o desenho das Práticas Pedagógicas.
Easdown	2007	A demonstração de um teorema matemático, como Conceito *Threshold*.
Scheja e Pettersson	2010	Explorar a compreensão dos alunos em relação aos conceitos matemáticos de limite e integral.
Masouros e Alpay	2010	Identificação e o desenvolvimento de recursos vocacionados para temas problemáticos da Matemática.
Humphrey e Simpson	2012	A escrita de dados qualitativos, em estudos de doutorado, como um Conceito *Threshold*.

Apresentemos, com um pouco mais de detalhe estes trabalhos de investigação.

Com base numa amostra de 465 alunos a frequentarem o ensino superior, Dunne *et al.* (2003), analisam a possível existência de Conceitos *Threshold* na unidade curricular de Estatística. Para tal elaboram um questionário para os estudantes responderem através da Internet. Apesar de assumirem que Amostra Aleatória e o Teorema do Limite Central constituem conceitos problemáticos, outras ideias parecem emergir com estas características, de entre os quais destacam-se os conceitos de Probabilidade, do qui-quadrado e do teste-t.

Bulmer, O'Brien e Price (2007), desenvolveram um trabalho que coloca a enfase na perspetiva do aluno sobre o que estes pensam ser significativo e problemático e quais os aspetos que consideram ser potencialmente pertinentes para o desenho da prática pedagógica. Nesta lógica levam a cabo um estudo, tendo como base 555 estudantes de Biologia, a maior parte no seu primeiro ano de formação que frequentam um curso de Introdução à Estatística. Os estudantes, no final do semestre, foram convidados a responder a um questionário, *online*, sobre a disciplina. De igual modo, os professores também foram envolvidos neste estudo, com o intuito de "cruzar" as suas opiniões com as dos alunos. As respostas dadas foram objeto de análise de conteúdo e os resultados foram sistematizados. Como consequência deste trabalho emergiram três grandes conclusões: primeiro, a necessidade de utilizar os resultados obtidos para futuras versões do curso de Introdução à Estatística, ancoradas numa base empírica que suporte melhores aprendizagens para os estudantes; em segundo, corresponsabilizar os alunos na reflexão sobre a sua própria

aprendizagem, sinalizando áreas com necessidade de consolidação ou com urgência de uma revisão; e, terceiro, este trabalho poderá constituir uma base para um adicional desenvolvimento profissional do pessoal docente.

Easdown (2007), parte do pressuposto que uma das competências mais complicadas na aprendizagem da Matemática é o da demonstração/prova de uma proposição e/ou teorema, visto ser problemática e que a habilidade para compreender e elaborar demonstrações é transformadora e irreversível e, por outro lado, apela frequentemente a várias noções da Matemática - integração. Nesta lógica o artigo desenvolve-se em duas partes: a primeira, é um estudo de caso envolvendo um teorema profundo de Álgebra Linear no qual são apresentadas duas demonstrações diferentes, a primeira das quais é falaciosa mas convincente; a segunda parte, descreve um outro estudo de caso no qual se apresenta um modelo de prova que constitui uma plataforma útil para o desenvolvimento e elaboração de uma demonstração.

Por sua vez, Scheja e Pettersson (2010), admitindo como pressuposto que os Conceitos *Threshold* têm a capacidade de transformar o conhecimento dos alunos, desenham uma investigação que pretende explorar a compreensão dos alunos em relação aos conceitos matemáticos de Limite e Integral e procuram esclarecer em que sentido o desenvolvimento de uma compreensão destes conceitos implica uma transformação do entendimento em relação ao modo de pensar, em Matemática. Baseando-se em dados recolhidos em entrevistas a alunos, que frequentavam um curso básico de *Cálculo* numa universidade sueca, os resultados alcançados ofereceram uma caracterização inicial do entendimento dos alunos sobre estas noções. As conclusões apontaram para o facto de que os estudantes descreverem os conceitos como ferramentas e simples operações a serem utilizadas algoritmicamente, seguindo os procedimentos para lidar com problemas típicos do Cálculo Infinitesimal. Por outro lado, as narrações dos alunos ao longo das entrevistas mostraram que estes assumiram um tom mais reflexivo, abordando temas que anteriormente não eram considerados.

Masouros e Alpay (2010), no âmbito do desenvolvimento de um recurso informático dedicado à aprendizagem da Matemática, conduziram um estudo com alunos antes de entrarem no ensino superior e com alunos a frequentarem já o ensino superior. Entre os objetivos estipulados, conta-se a identificação e o desenvolvimento de recursos vocacionados para temas problemáticos da Matemática, os quais podem englobar ideias de Conceitos *Threshold*, já que "*Special effort should be given to troublesome topics in mathematics which inevitably lead to a transformation in understanding once overcome*" (Masouros e Alpay, 2010).

Já mais recentemente, Humphrey e Simpson (2012), assumindo que a capacidade de escrita é uma competência essencial para os estudantes de doutoramento, descrevem extensivamente o *feedback* dado por estudantes deste ciclo de estudos numa série de *workshops* que envolviam a escrita sobre dados qualitativos. Constatou-se que esta competência pode ser caracterizada como um Conceito *Threshold* e, consequentemente, os temas decorrentes das reflexões produzidos nos *workshops* devem ser discutidos para consolidar o domínio efetivo deste tipo de escrita. Neste artigo concluiu-se que o trabalho interdisciplinar pode ser fundamental para ajudar os doutorandos a compreender o papel da escrita de dados qualitativos no seu processo de formação.

2.3.3.3. Outras áreas de estudo sobre Conceitos *Threshold*

Historicamente, as aprendizagens em torno da temática da Economia foram aquelas que Meyer e Land privilegiaram nas primeiras etapas do desenvolvimento dos Conceitos *Threshold*. Porém, as áreas de aplicação desta noção têm visto o seu campo de intervenção alargado.

Assim, e relativamente às áreas sobre as quais os Conceitos *Threshold* têm sido utilizados, identificamos publicações que incidem sobre Economia, as Ciências Computacionais, a Engenharia, a Educação no âmbito da Justiça Criminal, a Bioquímica, a Biologia, a Física e, como já referimos anteriormente, a Matemática.

Na tabela seguinte sistematizamos os diferentes estudos encontrados, na nossa revisão bibliográfica, e nas várias áreas científicas atrás enunciadas:

Tabela 10 - Trabalhos de investigação e divulgação, em diferentes áreas, dos Conceitos Threshold

Área	Autores	Data	Temática Geral
Economia	Davies	2003	Análise das dificuldades na operacionalização do Conceito *Threshold*.
	Davies e Mangan	2005	Diferentes abordagens para o reconhecimento dos Conceitos *Threshold*.
	Lucas e Mladenovic	2007	O potencial dos Conceitos *Threshold*.
	Ward e Meyer	2010	A meta-aprendizagem e os Conceitos *Threshold.*
	Shanahan, Foster e Meyer	s.d.	Estudo piloto, envolvendo Conceitos Threshold, sobre Custos de Oportunidade.
Ciências Computacionais	Boustedt, *et al.*	2007	A utilidade dos Conceitos *Threshold* nas Ciências Computacionais.
	McCartney, *et al.*	2009	A relevância dos Conceitos *Threshold* nas Ciências Computacionais.
	Rountree e Rountree	2009	Algumas questões sobre os Conceitos *Threshold* em Ciências da Computação.
Engenharia	Yorke-Barber *et al.*	2008	Aplicação dos Conceitos *Threshold* à procura de informação de alunos finalistas de Engenharia.
	Holloway, Alpay e Bull	2009	Apresentação de uma metodologia quantitativa para identificar Conceitos *Threshold* em Engenharia.
	Male e Baillie	2011	Uma metodologia para detetar Conceitos *Threshold* nos curricula.
Educação no âmbito da Justiça Criminal	Wimshurst	2011	Estudo exploratório sobre os Conceitos *Threshold.*
Bioquímica	Loertscher	2011	A utilização dos Conceitos *Threshold* para o desenho de novos currículos.
Biologia	Taylor	2008	Identificação de Conceitos *Threshold* em Biologia.
Física	Park e Light	2009	Identificação da Estrutura Atómica como Conceito *Threshold*.

Davies (2003), analisa algumas dificuldades enfrentadas na operacionalização da ideia de Conceito *Threshold* em Economia, em particular com as noções de Reciclagem e Comércio e, ao fazê-lo, começa a identificar condutas através das quais estas dificuldades podem ser ultrapassadas. Neste trabalho o autor, oferece ainda uma explicação teórica dos problemas que os alunos enfrentam no desenvolvimento da compreensão de um assunto, o que pode proporcionar uma base para o desenvolvimento de ferramentas de diagnóstico do currículo.

Davies e Mangan (2005), com base na reflexão de um grupo de seis professores de Economia, dedicaram algum tempo a encontrar formas para identificar os Conceitos

Threshold. Uma das conclusões importantes encontrada por estes investigadores foi que seria útil pensar numa rede de Conceitos *Threshold*, na Economia, em detrimento de uma análise mais individualizada do conceito. A figura seguinte mostra a rede destas ideias e que reproduzimos do original dos autores.

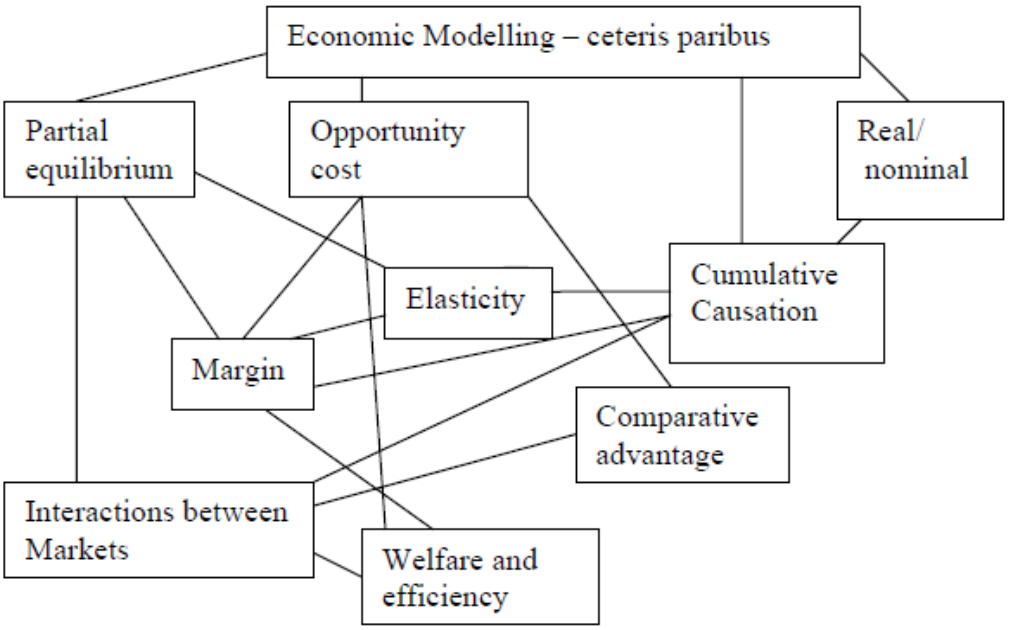


Figura 25 – Rede de Conceitos *Threshold* em Economia desenvolvida no âmbito do projeto ETC (Davies e Mangan, 2005)

Lucas e Mladenovic (2007), utilizando como exemplo o caso da Introdução à Contabilidade, consideram os Conceitos *Threshold* como um marco teórico emergente e proveitoso para a investigação e prática educacional. Advogam que estes conceitos promovem o diálogo, numa perspetiva global, entre professores, professores e alunos e, ainda, entre professores e especialistas educacionais.

Ward e Meyer (2010) promoveram um estudo que visava aprofundar a compreensão da atividade de meta-aprendizagem, através da análise dos dados qualitativos recolhidos com base numa amostra de 370 estudantes do primeiro ano de Microeconomia, em três universidades do Reino Unido, antes e depois do ensino dos Conceitos *Threshold*. As conclusões obtidas demonstraram um aumento do nível de controlo sobre a aprendizagem de Conceitos *Threshold* e que a meta-aprendizagem fornece a base para uma intervenção no apoio ao estudo e assim evitar o insucesso escolar.

Shanahan, Foster e Meyer (s.d.), operacionalizaram um processo de medição da compreensão do Conceito *Threshold* numa aula de Introdução à Economia. A metodologia utilizada assentou num conjunto de questões de escolha múltipla para examinar se a variação na aquisição da noção de Custo de Oportunidade nos alunos, enquanto Conceito *Threshold*, pode ser detetada e avaliada por meio de tais questões. Os resultados obtidos lançam uma nova luz sobre os fatores que influenciam a aquisição deste tipo de Conceitos e a relação entre a aquisição destes conceitos e os resultados finais de aprendizagem.

Boustedt e colegas (2007) desenvolveram uma investigação na área das Ciências Computacionais onde os sujeitos de investigação foram estudantes e professores. Neste trabalho encontram evidências empíricas que reconhecem a existência de Conceitos *Threshold* neste domínio e, simultaneamente, refletem sobre o modo como eles intervêm no processo de ensino.

McCartney *et al.* (2009), no decorrer deste seu estudo, mostraram que a análise dos Conceitos *Threshold* tem implicações práticas na Educação Computacional. Uma delas prende-se com a constatação de que os estudantes, face ao Conceito *Threshold*, tomam diferentes caminhos no processo de aprendizagem (do abstrato para o concreto, do concreto para o abstrato e do abstrato em paralelo com o concreto), o que parece sugerir a não obrigatoriedade de uma estrutura rígida na sequenciação dos conteúdos.

No mesmo ano, Rountree e Rountree (2009), reconhecem três vantagens inerentes ao estudo dos Conceitos *Threshold* na área das Ciências Computacionais: 1) proporcionar uma descrição do significado de um aluno ser bem-sucedido numa disciplina; 2) facultar um contributo epistemológico, que poderá dar sentido, para futuras pesquisas, sobre o que "faz" um bom programador novato; e 3) colocar um foco na comunidade de professores, que dê atenção ao conhecimento disciplinar do docente.

Yorke-Barber *et al.* (2008), apresentam um artigo que tem como objetivo demonstrar como uma abordagem aos Conceitos *Threshold* pode ajudar os alunos, finalistas de Engenharia, na pesquisa de informação para produzir projetos e teses de alta qualidade. Assumindo como provável que os Conceitos *Threshold* podem ser aplicados para descrever os principais conceitos que os alunos precisam de compreender para encontrar informação, estes são definidos como os obstáculos que os estudantes encontram na hora de encontrar conhecimento relevante para os seus trabalhos. É intenção que os resultados obtidos nesta investigação venham a ser utilizados no planeamento de futuras oficinas de formação e *workshops* para desenvolver competências na pesquisa de informação.

"A Quantitative Approach to Identifying Threshold Concepts in Engineering Education" de Holloway, Alpay e Bull (2009), coloca a ênfase na identificação de Conceitos *Threshold* em Engenharia, na perspetiva destes ajudarem a orientar o projeto de cursos básicos e a delinear abordagens a utilizar no ensino desta área. Para tal elaboraram um questionário, através do qual, e com regularidade, os estudantes quantificavam a sua perceção sobre a compreensão de vários temas/conceitos. Finalmente, foi elaborado e aplicado um conjunto de questões para a identificação das características definidoras do potencial Conceito *Threshold*.

Ainda no âmbito da Engenharia, Male e Baillie (2011) assumindo que os Conceitos *Threshold* são, simultaneamente, transformadores e problemáticos, assumem que a partir da identificação e investigação destes conceitos, é possível estruturar os currículos. Neste artigo descreve-se uma metodologia que se desenvolve em duas grandes fases: primeiramente, a identificação dos Conceitos *Threshold* através de entrevistas e *focus groups* realizadas a estudantes, professores e académicos de Engenharia e, seguidamente, realizou-se uma negociação dentro da disciplina e/ou instituição. Concluiu-se que esta metodologia pode ser usada para reconhecer os Conceitos *Threshold*, como parte do desenvolvimento curricular, especialmente onde a integração de áreas distintas de estudo é desejada.

Wimshurst (2011), leva a cabo um estudo exploratório que pretende investigar se a teoria dos Conceitos *Threshold* pode facultar uma visão útil para explorar o entendimento multidisciplinar dos alunos sobre a Educação da Justiça Criminal. Nesta lógica oito estudantes do último ano de uma licenciatura em Criminologia e Justiça Criminal foram convidados a identificar e a refletir sobre um conceito importante neste campo do saber. A análise realizada indicou três subgrupos com diferentes perspetivas conceptuais.

Ainda recentemente, Loertscher (2011) assume que o objetivo principal na identificação dos Conceitos *Threshold*, numa disciplina, é o de fornecer um ponto de partida para esboçar um desenho curricular eficaz e que este deve promover uma melhoria da aprendizagem dos alunos. Neste artigo, os autores identificam algumas competências importantes a desenvolver em sala de aula, com base nos Conceitos *Threshold* em Bioquímica, os quais, na sua opinião, são suscetíveis de apresentarem características multifacetadas.

Taylor (2008), através de um projeto exaustivo, propôs-se melhorar a compreensão dos alunos de Biologia, através do desenvolvimento de estratégias diferentes de aprendizagem e tendo como suporte novos estudos sobre os Conceitos *Threshold,* nesta ciência. A equipa do projeto identificou uma teia de Conceitos *Threshold* e desenvolveu intervenções abordando estes conceitos, envolvendo a comunidade de Biólogos interessados no desenvolvimento do

currículo, usando esta poderosa heurística. A figura seguinte, e que reproduzimos do original do autor, mostra os conceitos e os temas que os professores de Biologia consideram mais complicados.

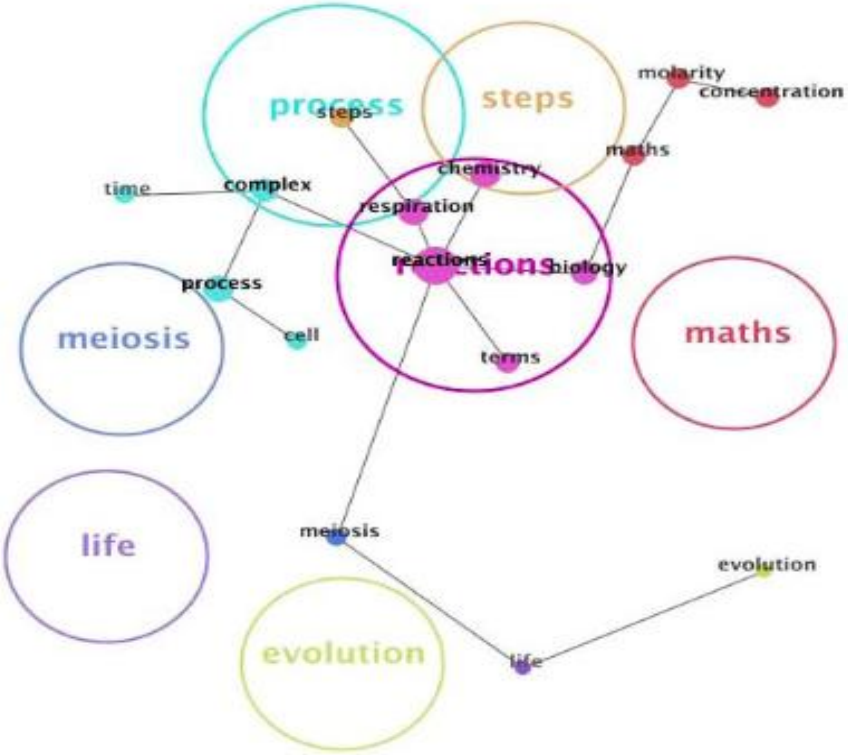


Figura 26 – Conceitos e temas difíceis, identificados pelos professores de Biologia

(Taylor, 2008)

Park e Light (2009), para entender melhor as barreiras conceptuais associadas ao conceito da Estrutura Atómica, exploram, neste estudo, a natureza problemática desta noção científica fundamental. Para ilustrar as dificuldades manifestadas pelos estudantes, foram escolhidos três alunos com bons desempenhos, de uma amostra original constituída por vinte. Os resultados sugeriram que esta noção constitui um possível Conceito *Threshold*, o qual merece estudos mais pormenorizados.

2.3.4. Síntese e conclusões

Da pesquisa bibliográfica efetuada, concluímos que a ideia de Conceito *Threshold* constitui uma noção com aplicabilidade em diversas disciplinas e áreas curriculares e pela qual

a comunidade educativa tem, nos últimos anos, mostrado bastante interesse. Os estudos atrás referidos, manifestam que o seu campo de aplicação tem incidido, na sua grande maioria, na identificação destas ideias ao nível do Ensino Superior, na presunção de que é neste nível de ensino que os conceitos fundamentais de uma ciência deveriam estar devidamente consolidados.

Todavia a sua importância vem dada pela implicação e influência que estes têm no processo de Ensino e Aprendizagem. Estamos convictos que a consciência da sua existência pode ajudar a orientar e a delinear abordagens e metodologias a utilizar no ensino de uma disciplina. Por outro lado, e numa visão mais lata, a sua identificação permite novas orientações para os currículos e pode lançar uma nova luz sobre os fatores que influenciam a compreensão, por parte dos estudantes, de uma dada temática/conteúdo programático.

Neste trabalho propomo-nos identificar potenciais Conceitos *Threshold* na área da Probabilidade em níveis de ensino mais elementares (Ensino Básico e Ensino Secundário de Portugal) e em jovens estudantes com idades entre os 14-18 anos.

CAPÍTULO 3

O CONCEITO DE PROBABILIDADE

3.1. INTRODUÇÃO.

3.2. O CURRICULO DA MATEMÁTICA EM PORTUGAL NO PÓS II GUERRA MUNDIAL

- 3.2.1. O Ensino da Matemática em Portugal nos anos 50
- 3.2.2. Os anos 60 e o movimento da "Matemática Moderna" em Portugal
- 3.2.3. O Ensino da Matemática em Portugal nos anos 90
- 3.2.4. Os atuais Programas de Matemática em Portugal
- 3.2.5. Breve referência à formação de professores dos 1.º e 2. Ciclos, em Portugal

3.3. AS DIFERENTES CONCEÇÕES DE PROBABILIDADE

- 3.3.1. Conceito Clássico (ou de Laplace) de Probabilidade
- 3.3.2. Conceito Geométrico de Probabilidade
- 3.3.3. Conceito Frequencista de Probabilidade
- 3.3.4. Conceito Subjetivo de Probabilidade
- 3.3.5. Conceito Axiomático (ou formal) de Probabilidade

3.4. OS DIFERENTES CONCEITOS E O ENSINO-APRENDIZAGEM DAS PROBABILIDADES

3.5. OS ELEMENTOS DO SIGNIFICADO DE PROBABILIDADE E DA LITERACIA PROBABILÍSTICA

3.6. INVESTIGAÇÕES SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE

- 3.6.1. O período Piagetiano
- 3.6.2. O período pós-Piagetiano
- 3.6.3. O período contemporâneo
  - 3.6.3.1. Trabalhos sobre o currículo das Probabilidades
  - 3.6.3.2. Os recursos didáticos e a Probabilidade
  - 3.6.3.3. As Probabilidades na formação de professores
  - 3.6.3.4. Aprendizagem dos alunos sobre as Probabilidades
- 3.6.4. Síntese e conclusões

CAPÍTULO 3

O CONCEITO DE PROBABILIDADE

"A modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino".

José Sebastião e Silva

"A teoria da probabilidade, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto…É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano"

Pierre Laplace

3.1. INTRODUÇÃO

Ao longo da sua história, a Matemática foi sofrendo profundas transformações ao nível dos seus métodos, processos, técnicas e na sua relação com outros ramos da Ciência e da Tecnologia e, por estes factos, constitui hoje um *património cultural* que deve estar disponível e ao alcance de todos. Por estas razões, a importância da Matemática e a inclusão do seu ensino nos processos de formação dos jovens são reconhecidas tanto pelos responsáveis pelas políticas educativas como pela sociedade em geral.

Nesta lógica, o Parlamento Europeu e o Conselho da União Europeia identificaram a literacia matemática como uma aptidão essencial para a realização pessoal, para uma cidadania ativa, para a inclusão social e para a empregabilidade na sociedade moderna.

Este reconhecimento é também feito pela OCDE - Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económico – que leva a cabo regularmente o PISA - Programme for International Student Assessment – no qual a "*A literacia matemática é definida como a capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados e de usar e se envolver na resolução matemática das necessidades da sua vida, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo*" (PISA, 2004).

Estamos convictos que para o cabal cumprimento desta competência torna-se imprescindível o domínio do raciocínio probabilístico associado ao acaso e à imprevisibilidade de situações com as quais somos confrontados diariamente nas mais variadas situações.

Embora não pareça haver consenso no que diz respeito ao nascimento formal do estudo da Probabilidade, tudo parece indicar que já em civilizações mais antigas como o Egípcia, a Babilónica, a Grega, a Romana, a Chinesa, a Indiana, e provavelmente outras, havia pessoas que se dedicavam à compilação e análise de dados associados a fenómenos aleatórios.

"*A noção de acaso data da História Antiga, tendo a sua origem estado ligada aos jogos de azar, notadamente na civilização egípcia, primeira dinastia, 3500 a.C., certamente com um aspecto lúdico*" (Coutinho, 1994). Por estes tempos, a mensurabilidade de eventos que ainda não ocorreram e que dependiam do acaso, era deixada para magos, feiticeiros e astrólogos, ou nas palavras de Batanero, Henry e Parzysz (2005) "*For centuries all speculation about future events was inconceivable, since the future only belonged to the omniscient and omnipotent glory of the supreme Creator (…)*"

Esta preocupação na recolha e compilação de dados assentava na necessidade prática da procura de regularidades, na obtenção de previsões e estimativas que se tornavam imprescindíveis para a definição das políticas sociais e económicas de um país.

Foram vários os matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento inicial desta temática.

Luca Paciolli (1445-1517), italiano que depois se tornou frei franciscano, escreveu "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità",* publicado em Veneza, o qual trazia o problema dos pontos, também conhecido como problemas das apostas. Este problema, apesar de não ser original de *Paciolli*, dizia:

"A e B estão empenhados num honesto jogo com uma moeda. Eles concordam em continuar até que um deles vença seis rodadas. Todavia o jogo é interrompido quando A vencia cinco e B três rodadas. Como deveriam ser divididas as aposta?" (Melo, s/d)

Várias pessoas, após a formulação do problema dos pontos proposto por Paciolli, tentaram resolvê-lo, sem êxito.

Este problema tem uma possível resolução geométrica interessante que apresentamos na Figura 27.

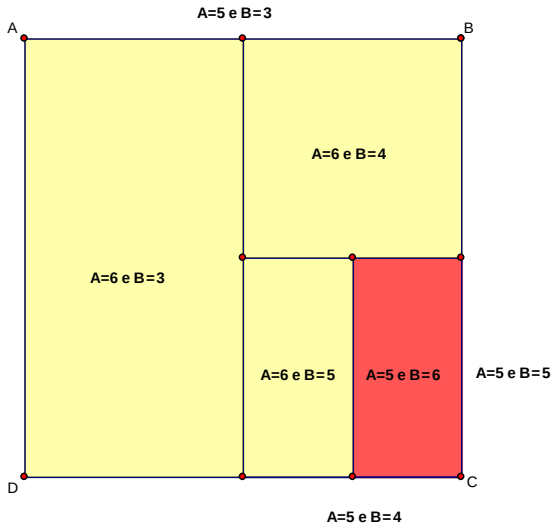


Figura 27 – Possível resolução geométrica do Problema das Apostas

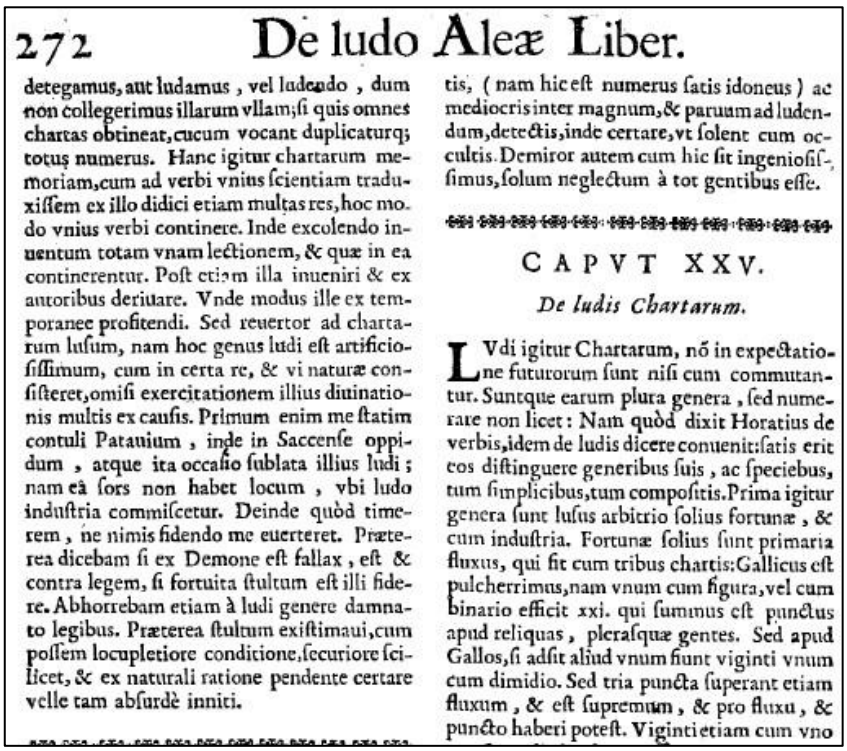
Suponhamos que o quadrado [ABCD] representa o montante das apostas efetuadas pelos jogadores A e B. Como o jogo é interrompido quando A=5 e B=3, a jogada seguinte pode produzir dois possíveis resultados ou A=6 e B=3 (ganhará A e o jogo termina) ou A=5 e B=4 (nenhum ganha e o jogo continua). Para esta última possibilidade os jogadores deverão jogar outra vez, resultando daqui duas possíveis situações, ou A=6 e B=4 (ganha A e o jogo termina) ou A=5 e B=5 (nenhum ganha e o jogo continua). Finalmente para esta última possibilidade, temos um de dois acontecimentos possíveis, ou A=6 e B=5 (ganha A e o jogo termina) ou A=5 e B=6 (ganha B e o jogo termina). Então, e atendendo à Figura 27, temos:

$$\mathrm{P(A\ ganhar)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\mathrm{P(B\ ganhar)} = \frac{1}{8}$$

e as apostas devem ser divididas nesta proporção, isto é $\frac{7}{8}$ para A e $\frac{1}{8}$ para B.

Também, *Gerolamo Cardano* (1501-1576) tinha sido um dos primeiros matemáticos a tentar descrever um método para calcular Probabilidades. No seu livro "*Liber de Ludo Aleae*", para além de calcular algumas probabilidades, também estuda alguns jogos de azar, ensina a jogar e a detetar jogadores desleais.



272 De ludo Aleæ Liber.

detegamus, aut ludamus, vel ludendo, dum non collegerimus illarum vllam; si quis omnes chartas obtineat, cucum vocant duplicaturq; totus numerus. Hanc igitur chartarum memoriam, cum ad verbi vnius scientiam traduxissem ex illo didici etiam multas res, hoc modo vnius verbi continere. Inde excolendo inuentum totam vnam lectionem, & quæ in ea continerentur. Post etiam illa inueniri & ex autoribus deriuare. Vnde modus ille ex temporanee profitendi. Sed reuertor ad chartarum lusum, nam hoc genus ludi est artificiosissimum, cum in certa re, & vi naturæ consisteret, omisi exercitationem illius diuinationis multis ex causis. Primum enim me statim contuli Patauium, inde in Saccense oppidum, atque ita occasio sublata illius ludi; nam eà sors non habet locum, vbi ludo industria commiscetur. Deinde quòd timerem, ne nimis fidendo me euerteret. Præterea dicebam si ex Demone est fallax, est & contra legem, si fortuita stultum est illi fidere. Abhorrebam etiam à ludi genere damnato legibus. Præterea stultum existimaui, cum possem locupletiore conditione, securiore scilicet, & ex naturali ratione pendente certare velle tam absurdè inniti.

tis, (nam hic est numerus satis idoneus) ac mediocris inter magnum, & paruum ad ludendum, detectis, inde certare, vt solent cum occultis. Demiror autem cum hic sit ingeniosissimus, solum neglectum à tot gentibus esse.

CAPVT XXV.

De ludis Chartarum.

LVdi igitur Chartarum, nõ in expectatione futurorum sunt nisi cum commutantur. Suntque earum plura genera, sed numerare non licet: Nam quòd dixit Horatius de verbis, idem de ludis dicere conuenit: satis erit eos distinguere generibus suis, ac speciebus, tum simplicibus, tum compositis. Prima igitur genera sunt lusus arbitrio solius fortunæ, & cum industria. Fortunæ solius sunt primaria fluxus, qui fit cum tribus chartis: Gallicus est pulcherrimus, nam vnum cum figura, vel cum binario efficit xxi. qui summus est punctus apud reliquas, plerasque gentes. Sed apud Gallos, si adsit aliud vnum fiunt viginti vnum cum dimidio. Sed tria puncta superant etiam fluxum, & est supremum, & pro fluxu, & puncto haberi potest. Viginti etiam cum vno

Figura 28 – Extrato do "*Liber de Ludo Aleae*" de Gerolamo Cardano (retirado de http://forum.tarothistory.com/viewtopic.php?f=11&t=724)

Todavia, a génese do estudo mais formal e rigoroso da Probabilidade ocorreu no século XVII com as tentativas de desenvolver uma teoria que possibilitasse a mensurabilidade, com algum rigor, da possibilidade de ocorrência de determinados acontecimentos associados a jogos de azar (com moedas, cartas, dados, entre outros).

Por volta de 1652, *Chevalier de Méré*, um inveterado jogador da corte francesa de Luís XIV, apresenta a *Blaise Pascal* (1623-1662) diversos problemas relacionados com os jogos que habitualmente praticava. Ao deparar-se com algumas dificuldades na resolução dos problemas apresentados por *De Méré*, *Pascal* procurou a ajuda de um outro matemático e seu colega - *Pierre de Fermat* (1601-1665).

Para muitos investigadores na área da História da Matemática, a correspondência entre estes dois matemáticos marca, indubitavelmente, o início formal do pensamento probabilístico, já que, como refere Struik (1989) na sua "*História Concisa das Matemáticas*", "*Fermat e Pascal foram os fundadores da teoria matemática das probabilidades. O gradual*

interesse em problemas relacionados com probabilidades foi devido primeiramente ao desenvolvimento dos seguros, mas as questões específicas que estimularam os grandes matemáticos a pensar neste assunto vieram dos pedidos dos nobres que se entregavam a jogos de acaso, tal como os dados e as cartas".

Depois de Pascal e Fermat a Teoria das Probabilidade sofreu um desenvolvimento vertiginoso graças aos contributos de inúmeros matemáticos e à constatação das inúmeras áreas de aplicabilidade deste conceito.

Entre eles permitimo-nos destacar *Jacob Bernoulli* (1654-1705), autor do tratado " *Ars Conjectandi*", documento que ainda hoje oferece interesse prático na utilização da Teoria da Probabilidade às Ciências Atuariais e à Estatística.

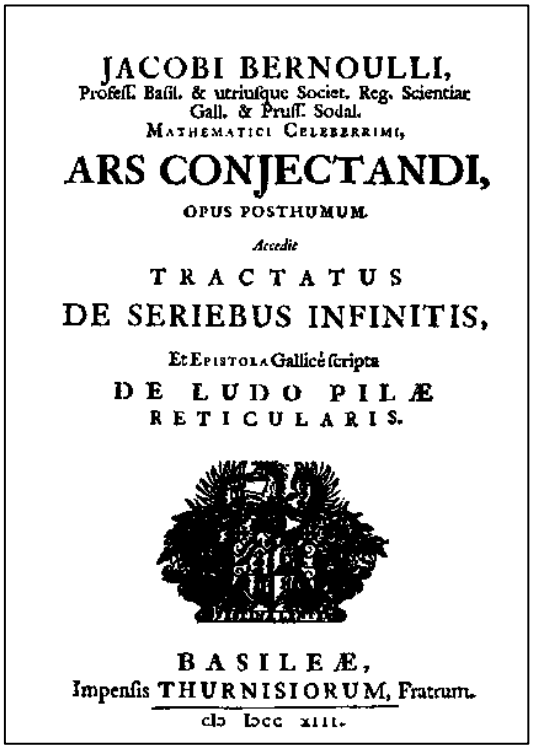
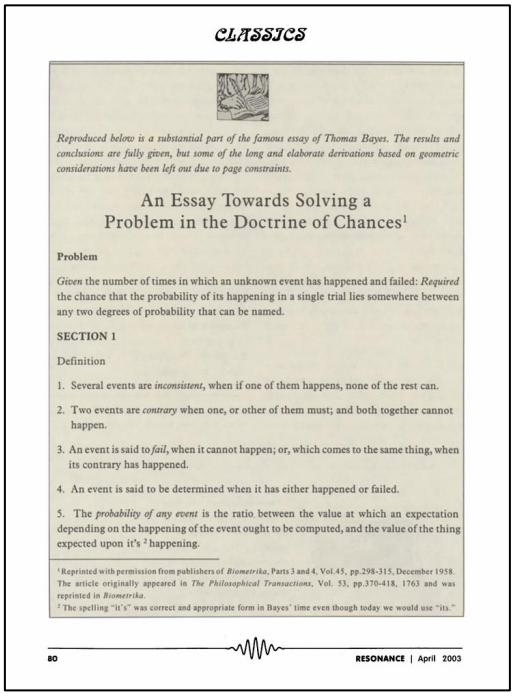

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
Mathematici Celeberrimi,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et Epistola Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc xIIII.

Figura 29 – Capa do tratado " *Ars Conjectandi" de* Jacob Bernoulli
(retirada de http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jacob_Bernoulli_-_Ars_Conjectandi.gif)

Também o matemático amador, e ministro protestante, *Thomas Bayes* (170?-1761) deu um grande impulso à Probabilidade e à Estatística atuais com o método que hoje em dia tem o seu nome - Regra de Bayes. Grosso modo, esta regra refere-se às probabilidades condicionadas e mostra como alterar as probabilidades a priori tendo em conta novas evidências, de forma a obter probabilidades a posteriori. Foi também o primeiro estatístico a lançar claramente o problema fundamental da Estatística: *de que maneira, a partir das observações, é possível saber alguma coisa relativamente a um certo universo?*



CLASSICS

Reproduced below is a substantial part of the famous essay of Thomas Bayes. The results and conclusions are fully given, but some of the long and elaborate derivations based on geometric considerations have been left out due to page constraints.

An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances[1]

Problem

Given the number of times in which an unknown event has happened and failed: *Required* the chance that the probability of its happening in a single trial lies somewhere between any two degrees of probability that can be named.

SECTION 1

Definition

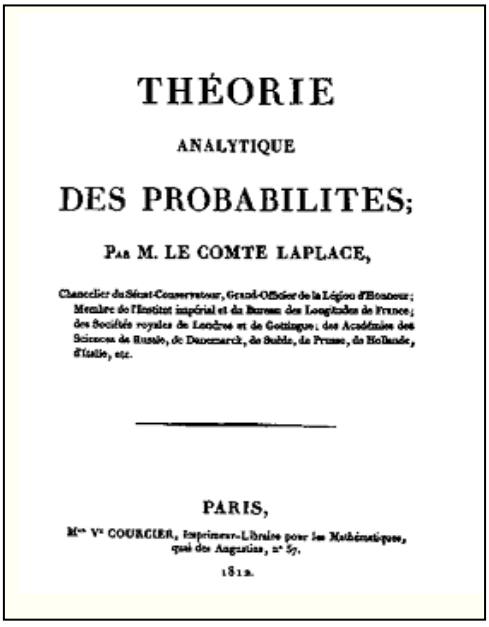
1. Several events are *inconsistent*, when if one of them happens, none of the rest can.
2. Two events are *contrary* when one, or other of them must; and both together cannot happen.
3. An event is said to *fail*, when it cannot happen; or, which comes to the same thing, when its contrary has happened.
4. An event is said to be determined when it has either happened or failed.
5. The *probability of any event* is the ratio between the value at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed, and the value of the thing expected upon it's [2] happening.

[1] Reprinted with permission from publishers of *Biometrika*, Parts 3 and 4, Vol.45, pp.298-315, December 1958. The article originally appeared in *The Philosophical Transactions*, Vol. 53, pp.370-418, 1763 and was reprinted in *Biometrika*.
[2] The spelling "it's" was correct and appropriate form in Bayes' time even though today we would use "its."

80 RESONANCE | April 2003

Figura 30 – Extrato de "*An essay Towards Solving a problem in the Doctrine of Chances"* de Thomas Bayes (retirada de www.google.pt em 7 de outubro de 2013)

Pierre Laplace (1749–1827), autor do livro "*Théorie Analytique des Probabilités*" a quem se ficou a dever a Definição Clássica de Probabilidade, vulgarmente conhecida pelo nome de "*Lei (ou Regra) de Laplace*". Este livro constitui um repositório das ideais probabilísticas descobertas até então.



THÉORIE

ANALYTIQUE

DES PROBABILITES;

PAR M. LE COMTE LAPLACE,

Chancelier du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion d'Honneur; Membre de l'Institut impérial et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, de Hollande, d'Italie, etc.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1812.

Figura 31 – Capa do livro *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (retirada de www.mat.uc.pt/~tenreiro/divulgacao/DivisaoApostas.pps)

Referimos ainda *Andrei Kolmogorov* (1903-1987) que participou das principais descobertas científicas do século XX nas áreas das Probabilidade e Estatística, sendo que um de seus principais trabalhos publicados foi "*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*" - "Fundamentos de Teoria das Probabilidades", no qual ele lança as bases da axiomatização da Teoria das Probabilidades.

Figura 32 – Capa do livro *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* de Kolmogorov (retirada http://www.math.uni-heidelberg.de/stat/memory/)

3.2. O CURRÍCULO DA MATEMÁTICA EM PORTUGAL NO PÓS II GUERRA MUNDIAL

É consensual a importância da Matemática nos percursos formativos dos jovens e assumida a sua relevância nos documentos estruturantes do currículo. São apontados vários argumentos para a sua inclusão nos vários ciclos educativos. Um deles prende-se com o seu aspeto utilitário, em virtude da sua aplicabilidade à resolução de problemas num número cada vez mais crescente de áreas e profissões. Outro dos argumentos refere o caráter formativo da Matemática, enquanto ciência que possui uma linguagem própria que emprega objetos e relações abstratas as quais permitem compreender, representar e criar conexões ao mundo natural e social, contribuindo deste modo para uma cidadania mais responsável, confiante e crítica.

À semelhança do que aconteceu em outros países, as orientações curriculares da Matemática em Portugal têm sofrido profundas alterações que, genericamente, foram

introduzidas como consequência tanto de transformações sociais como de mudanças políticas e, quase sempre, em complementaridade com a proliferação de novas Teorias da Educação e com as diferentes necessidades, manifestadas pela sociedade, de utilizar este *património cultural*.

Estes condicionalismos têm vindo, sucessivamente, a moldar os objetivos, os conteúdos, as metodologias, os materiais, os instrumentos e os métodos de avaliação e, consequentemente, a regular a visão, sobre a Matemática, de diferentes gerações de estudantes, ou, como afirmam Feiteira e Pires (2008), "*(…) todo o currículo é influenciado pelas características e necessidades sociais, cada currículo deverá ficar definitivamente impregnado pelas marcas do tempo e da sociedade a que se refere*".

A tradição portuguesa, no ensino e aprendizagem da Matemática, durante muitos anos, foi baseado na imposição de reformas, bastante generalistas, incidindo essencialmente na mudança de conteúdos do currículo nacional e "*entendida pelo Ministério da Educação (ME) como uma mudança por decreto. A atenção dada a espetos como os da formação e envolvimento dos professores, da avaliação, da organização da escola, da divulgação e produção de diferentes tipos de materiais de apoio tem sido pouco cuidada, ou, quanto muito, bastante desarticulada*" (Porfírio, 1998).

No entanto, nos últimos 25 anos, tem-se assistido a uma mudança nos procedimentos orientadores do currículo. O desenvolvimento e implementação do currículo nacional, para além do que é estipulado superiormente através da produção de documentos emanados pelo Ministério da tutela, têm tido em consideração diversos fatores, de entre os quais destacamos o professor, os materiais ao seu dispor, o contexto de sala de aula, os ritmos de aprendizagem e as novas tecnologias da informação e comunicação.

Face ao exposto afigura-se pertinente realizar uma breve descrição das Orientações Curriculares para a Matemática em Portugal no Pós II Guerra Mundial, já que este período da história portuguesa é caraterizado por profundas convulsões políticas, sociais e culturais. Na parte final desta secção, centraremos o nosso percurso histórico, focalizando a nossa análise na temática da Probabilidade, já que como referem Azcárate, Cardeñoso e Serradó (2004) *"Hazard's treatment" has been incorporated in the curricula after reflection about the substantial changes that society has experienced recently".*

Sem pretendermos ser exaustivos sobre a noção de currículo, parece-nos importante uma clarificação deste conceito. Adotaremos, no presente texto, a definição apresentada pela

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), e com a qual nos identificamos. Segundo esta associação de professores de Matemática:

"*Um currículo é um plano operacional de ensino que descreve em pormenor o que os alunos de Matemática precisam de saber, de que forma devem atingir os objetivos identificados no currículo, o que é que os professores devem fazer para ajudar os alunos a desenvolver os seus conhecimentos matemáticos e o contexto em que a aprendizagem e o ensino devem processar-se*" (NCTM, 1991).

Feita esta clarificação, importa referir que as orientações curriculares instituídas para o ensino da Matemática, sofreram profundas alterações nas últimas décadas do século passado. Como refere Ponte (2003) "*O currículo de Matemática sofreu uma significativa evolução na segunda metade do século XX*".

No que concerne especificamente às Probabilidade, e após um período no qual esta temática foi relegada para um segundo plano nos documentos estruturantes, o seu ensino tem-se mantido presente no currículo da Matemática, nas últimas décadas. A importância deste assunto no processo de ensino/aprendizagem é reconhecida, não só em Portugal, mas como na generalidade dos currículos de outros países e com cada vez mais apologistas a defenderem o seu estudo desde os primeiros anos de escolarização, já que *"(…) notamos una tendencia reciente a renovar su enseñanza (…), de forma que pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde su infancia*" (Batanero, 2005), ou como provam algumas investigações recentes realizadas em crianças de 4-5 anos, metade dos jovens nesta faixa etária conseguem diferenciar entre acontecimentos certos, possíveis, impossíveis e comparar diferentes valores de probabilidades (HodnikČadež e Škrbec, 2011).

3.2.1. O Ensino da Matemática em Portugal nos anos 50

O contexto social e político existente na década de 50 e princípios da década de 60 do século passado em Portugal, condicionava, implicitamente, que a Educação Matemática dos jovens deveria proporcionar a formação imprescindível para se tornarem competentes operários fabris e bons trabalhadores, tanto do comércio como da agricultura.

A este propósito, as diretrizes didáticas que acompanhavam o programa de Matemática do Ensino Primário, desta época, referem que "*A Aritmética na escola primária terá carácter acentuadamente prático, e, por isso, consistirá mais na criação de hábitos, na aquisição de um novo instrumento de trabalho, que na interpretação de conceções abstratas.*

(…) Por isso, o ensino desta disciplina deve ser feito em conformidade com situações vividas pelas crianças, quer no ambiente familiar, quer no meio social." (Decreto-Lei n.º 42994, 1960)

De acordo com esta visão formativa, o que era expectável do sistema educativo era o desenvolvimento de capacidades de leitura, escrita e de aritmética. Assim não é de estranhar, que o programa do Ensino Primário (Decreto-lei n.º 42994, 1960), no que se refere à Matemática, estivesse organizado em torno de duas grandes temáticas: Aritmética e Geometria.

O mote fundamental da aprendizagem da Matemática era o saber "*fazer contas*". A memorização, a mecanização e a realização de tarefas rotineiras constituíam as atividades pedagógicas privilegiadas em contexto de sala de aula. Como consequência, era imperativo que os alunos conhecessem e efetuassem as reproduções das demonstrações de teoremas e praticassem listas intermináveis de exercícios.

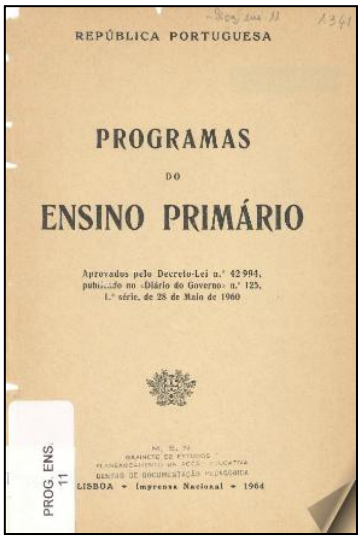


Figura 33 – Capa do livro "Programas do Ensino Primário"
(Imagem retirada de http://www.sg.min-edu.pt/fotos/editor2/RDE/P/EP/EPri_1960/index.html, em 3 de Maio de 2012)

No que diz respeito diretamente às Probabilidades, salienta-se que o programa de Matemática em vigor neste período não contemplava, explicitamente, conteúdos ao nível da Teoria da Probabilidade e da Organização da Dados.

A prossecução de estudos mais avançados encontrava-se somente ao alcance de um número reduzido de estudantes, para os quais estavam acessíveis as profissões mais técnicas, eruditas e economicamente mais rentáveis.

O Programa de Matemática do Ensino Liceal (Decreto-lei n.º 39807, de 7 de Setembro de 1954) "*era essencialmente uma listagem de conteúdos a tratar em cada ano*" (Porfírio, 1998), onde o domínio das técnicas de cálculo, mais uma vez, assumia predominância. O cálculo numérico e algébrico, as regras de derivação, o cálculo com expressões trigonométricas, exponenciais e logarítmicas constituíam o âmago do ensino da Matemática por esta época.

Neste período, os temas matemáticos ensinados aos alunos, antes da sua entrada na Universidade, eram a Aritmética, a Geometria e a Álgebra. Como refere Abrantes (1994) " (…) *a Matemática era encarada ainda como "disciplina mental", perspectiva que não só reflectia concepções antigas como estava de acordo com as teorias psicológicas da época segundo as quais as aptidões de carácter geral podem ser desenvolvidas em qualquer contexto e daí transferidas para outros contextos (...) O estudo da geometria, em especial, era suposto contribuir para o desenvolvimento de capacidades intelectuais desejáveis naqueles que ocupariam posições de chefia. Esta perspectiva orientava o ensino, então profundamente elitista, dirigido para uma minoria, enquanto a formação matemática para a maioria ou não existia ou limitava-se à aritmética elementar".*

De igual modo ao que acontecia no ensino primário, o reconhecimento da importância da Teoria da Probabilidade nos processos de formação dos jovens, destas idades, era praticamente nulo.

Entretanto, ao nível da formação superior - Ensino Universitário - tinha-se começado, progressivamente, a introduzir novos conteúdos provenientes da investigação matemática mais recente, e devidamente "*ancoradas pelas teorias Piagetianas no domínio da Psicologia do Desenvolvimento*" (Silva, 2005), tais como a Álgebra Abstrata, a Topologia, a Teoria dos Conjuntos, a Lógica Matemática e a Teoria da Probabilidade. Estes temas emergiram no seio de um movimento que veio a ser designado por "Matemática Moderna".

3.2.2. Os anos 60 e o movimento da "Matemática Moderna" em Portugal

Do ponto de vista matemático e, em particular do seu ensino, os anos 60 do século XX ficaram marcadas pela proliferação, em termos nacionais e internacionais, do conhecido movimento da "Matemática Moderna" que, grosso modo, reivindicava a necessidade de uma

nova linguagem que pudesse trazer mais formalismo, mais rigor e mais uniformidade à Matemática, aspetos que deveriam ser atingidos com recurso à utilização da Teoria dos Conjuntos.

A esta nova maneira de equacionar e fazer Matemática esteve, indubitavelmente, ligado um grupo de pensadores matemáticos, maioritariamente franceses, com o pseudónimo de *Nicolas Bourbaki*.

Por toda a Europa, os ideais defendidos por esta nova corrente de pensadores começaram a fazer-se ouvir. De entre os princípios adotados por este grupo realça-se a tese de que os estudantes do ensino pré-universitário não possuíam os conhecimentos suficientes para a frequência de estudos superiores.

Em consequência disto, os currículos de Matemática foram profundamente reformulados "*tendo-se introduzido novas matérias, eliminado matérias tradicionais e, sobretudo introduzido (…) uma nova Linguagem (…)* " (Ponte, 2002).

A sua característica mais marcante foi, talvez, a preocupação com uma mudança de conteúdos, focalizando-os nos grandes temas que na época se pensava estarem na base de toda a Matemática.

Surgiram assim novos conteúdos programáticos das quais salientamos a Iniciação à Lógica, Estruturas Algébricas, Álgebra Linear, Probabilidades e Estatística que deveriam articular-se com matérias já existentes, tais como a Iniciação à Análise Infinitesimal, a Trigonometria, o Cálculo Algébrico e a Geometria Analítica.

Neste período, e à semelhança de outros países, Portugal aderiu a esta corrente de pensamento com, entre outras, uma iniciativa de alteração dos currículos da Matemática, num número reduzido de turmas da formação liceal e cujo principal mentor foi o Professor José Sebastião e Silva.

Capítulo VII. INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA E AO CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

1. Lógica de atributos e lógica de conjuntos 396
2. Terminologia e notações 398
3. Frequência absoluta de um atributo numa população 398
4. Frequência relativa 400
5. Frequência relativa do produto lógico 405
5a. Coeficiente de associação 412
6. Extensão dos conceitos do nº 4 415
7. A lógica em termos de acontecimentos 417
8. Expressões proposicionais de acontecimentos; conceito de variável casual 419
9. Frequência dum acontecimento 423
10. Lógica indutiva; certeza absoluta e certeza prática 426
11. Conceito quantitativo de probabilidade 431
12. Axiomatização do conceito de probabilidade 436
13. Exemplos de aplicação 439
14. Probabilidade do produto lógico 447
15. Probabilidade do produto cartesiano 449
16. Problema das provas repetidas; distribuição binomial ... 454
17. Aplicação da distribuição binomial; exemplo da genética.. 459
18. Casos extremos de distribuição binomial 465
19. Valor médio, esperança matemática. Jogos equitativos 466
20. Aplicação aos seguros 471
21. Variação da probabilidade nos seguros 477
22. Teste do qui-quadrado com um grau de liberdade 481
23. Teste do qui-quadrado com mais de um grau de liberdade .. 495
24. Conceitos qualitativo e quantitativo de probabilidade ... 497

TÁBUAS DE MORTALIDADE 501

Tábua AF 501
Tábua PM 502

TÁBUA DA DISTRIBUIÇÃO DE PEARSON: 504

Figura 34 – Índice, relativo ao tema Estatística e Probabilidade, do Compêndio de Matemática do 6.º ano Liceal de José Sebastião e Silva

Estas novas orientações curriculares para o Ensino da Matemática apresentaram como finalidades prioritárias:

(i) utilizar uma nova "linguagem" matemática formal e uniforme para reformar os diferentes temas escolares com vista a torná-los mais coerentes;

(ii) estudar novos temas matemáticos que possam ser apreendidos pelos estudantes, os quais se revestem de importância e de aplicabilidade em áreas consideradas emergentes da sociedade, e;

(iii) suprimir alguns conteúdos, considerados antiquados e sem interesse prático para a época.

Na nossa opinião, uma das grandes virtudes do movimento da "Matemática Moderna" em Portugal foram as preocupações evidenciadas com as metodologias de ensino a serem utilizadas em contexto de sala de aula, preconizando-se agora um ensino menos expositivo e mais orientado para a intervenção ativa e participada, no processo de ensino e aprendizagem, dos estudantes, ou, como refere o próprio José Sebastião e Silva (1964), "*O professor deve*

abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta".

Em Portugal, e em termos de operacionalização, a "Matemática Moderna" conheceu dois momentos diferentes. Como já referimos, os anos 60 assistiram a uma fase experimental de introdução dos ideais de ensino desta corrente de pensadores, sendo que, ao longo dos anos subsequentes, novos programas foram sucessivamente introduzidas a mais turmas do 3º ciclo do ensino liceal.

No início dos anos 70, deu-se a sua massificação aos alunos dos diversos níveis de ensino, sendo elaborados novos programas. Foram os programas dessa época que, com pequenos reajustes, acabaram por vigorar até 1991 (Ponte, s.d.).

3.2.3. O Ensino da Matemática em Portugal nos anos 90

Nos anos 80, o espírito da "Matemática Moderna" começou a perder algum fulgor, em virtude da constatação da não consecução de algumas das suas grandes intenções. Verificou-se, de um modo geral, que as taxas de insucesso eram transversais a todos os níveis de ensino, os objetivos cognitivos eram considerados de baixo nível, sem qualquer ligação à realidade, e o sistema de avaliação passava apenas pela aplicação de testes e exames escritos que visavam a verificação da aquisição daqueles objetivos (Silva, 2010).

O momento de viragem deste processo ocorre em 1988 com a realização, em Vila Nova de Milfontes - Portugal, de um seminário promovido pela Associação de Professores de Matemática (APM) e que marcou a discussão das questões curriculares em Educação Matemática em Portugal (Santos, s.d.). Nesse encontro de docentes de Matemática é produzido um documento, publicado posteriormente pela APM (APM, 1988), no qual se reflete sobre o currículo da Matemática e é feita uma descrição do estado da Matemática naquela época. Para além desta vertente, e em termos metodológicos, o mesmo texto vem ainda reforçar a ideia de que os estudantes devem ter experiências matemáticas genuínas e a possibilidade de utilizar as novas tecnologias como apoio a estas experiências.

De entre o conjunto de objetivos gerais para o ensino da Matemática, destacamos, pela sua atualidade os seguintes (APM, 1988 citado por Matos e Serrazina, 1996):

- *O ensino da Matemática, em todos os níveis, deve proporcionar aos alunos experiências diversificadas em contextos de aprendizagem ricos e variados (…);*
- *A aprendizagem da Matemática deve constituir, em todos os níveis, aos olhos dos alunos uma experiência pessoal positiva que tem significado e importância por si mesma e no momento em que decorre e se desenvolve;*
- *O ensino e aprendizagem da Matemática, em todos os níveis, devem ser avaliados de uma forma que corresponda à diversidade dos seus objetivos e à multiplicidade das suas atividade, recorrendo a instrumentos variados (…).*

Assim, não é de estranhar que em 1991 surjam novos programas de Matemática, incluindo, também, uma nova disciplina – Métodos Quantitativos (a lecionar apenas em um ano) dirigida a todos os alunos que não tinham Matemática no seu currículo.

As equipas responsáveis pela elaboração destes documentos foram nomeadas pelo Ministério da Educação e eram, na sua generalidade, formadas por professores, muitos deles ainda próximos das ideias conceptuais da "Matemática Moderna". No entanto, este último facto não condicionou a abertura destas equipas a novas perspetivas, propostas pela Investigação em Didática da Matemática.

Nesta perspetiva, a resolução de problemas é vista como uma capacidade matemática fundamental a desenvolver em estreita colaboração com o uso das novas tecnologias (Ponte, 2002).

Em 1997 é implementado um "reajustamento" ao programa de Matemática do Ensino Secundário que, como o próprio nome indica, resultou de um ajustamento ao programa existente. Em termos de conteúdos, este dá seguimento à tradição de privilegiar a Análise, sem negligenciar a Trigonometria, o Cálculo Algébrico e a Geometria. Realçamos aqui, o lugar de destaque, deixado neste documento, para a Estatística e as Probabilidades.

Neste reajustamento, a temática das Probabilidades surgia como o *Tema I* com a designação de *Probabilidades e Combinatória* no ano terminal do ensino secundário – 12.º ano. Ao nível das indicações metodológicas previa-se uma componente extremamente prática, já que "*Todo o trabalho deve iniciar-se pela realização de experiências aleatórias (frequências relativas e probabilidades). Os estudantes devem ser levados a elaborar formas de registo*

"legíveis" para os resultados das suas experiências que podem ser partilhadas em grupo. As experiências e o estudo de situações (em particular dos jogos) devem ser aproveitadas para dinamizar discussões de tipo científico, bem como o trabalho cooperativo." (Reajustamento do Programa de Matemática do Ensino Secundário, 1997).

Com a publicação, em 2001, do documento "*Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências* essenciais", estabelecem-se novas orientações curriculares para a Educação Básica, mas agora formuladas em termos de competências.

Este extenso documento, apresentava uma nova organização do ensino a partir de uma multiplicidade de competências gerais, transversais e específicas. Estas, entendidas como *saberes em ação*, articulavam atitudes, capacidades e conhecimentos a desenvolver pelos estudantes, tanto nas diferentes áreas disciplinares, como por ciclo de formação. Nesta lógica *"A clarificação das competências a alcançar no final da educação básica toma como referentes os pressupostos da lei de bases do sistema educativo, sustentando-se num conjunto de valores e de princípios (…). Equacionaram-se à luz destes princípios as competências, concebidas como saberes em uso, necessárias à qualidade da vida pessoal e social de todos os cidadãos, a promover gradualmente ao longo da educação básica"* (DEB, 2001).

O estudo dos fenómenos aleatórios aparece, neste texto, organizado sobre a designação de *Estatística e Probabilidades* e preconiza-se a resolução de problemas, as atividades de investigação, a realização de projetos e os jogos como as experiências de aprendizagem a privilegiar ao longo deste percurso formativo. "*A sensibilidade para distinguir fenómenos aleatórios e fenómenos deterministas e para interpretar situações concretas de acordo com essa distinção"* surge como uma competência transversal para os três ciclos (DEB, 2011).

Apesar destas novas conceções curriculares, os conteúdos programáticos de Matemática do 1.º ciclo, 2.ºciclo e 3.ºciclo mantiveram-se praticamente inalteráveis.

3.2.4. Os atuais Programas de Matemática em Portugal

Apesar de o nosso interesse centrar-se nas referências aos programas de Matemática, importa neste momento apresentar, sucintamente, a estrutura do Sistema Educativo português para perceber-se melhor os diferentes programas que falaremos neste ponto.

A estrutura organizacional do Sistema de Ensino português inclui quatro etapas sequenciais na formação dos jovens:

1.ª - A Educação pré-escolar, para os alunos na faixa etária dos 3 aos 5 anos;

2-ª - O Ensino Básico, que inclui três ciclos sequencias, o 1.º ciclo (1.º ano, 2.ºano, 3.ºano e 4.ºano), o 2.ºciclo (5.ºano e 6.ºano) e o 3.º ciclo (7.ºano, 8.ºano e 9.ºano), num total de nove anos, cujos alunos têm idade, normalmente, entre os seis e os catorze anos;

3.ª- O Ensino Secundário (10.ºano, 11.º ano e 12.ºano), e que corresponde ao período pré-universitário e que engloba os alunos cujas idades normais de frequência situam-se entre os 15 e os 17 anos;

4.ª- O Ensino Superior, normalmente a partir dos 18 anos, e que contempla um sistema de ensino dual: o Ensino Politécnico, orientado para uma constante perspetiva de investigação aplicada e de desenvolvimento; e o Ensino Universitário que orienta para uma constante promoção de investigação e de criação do saber.

Uma visão mais geral pode ser obtida através do seguinte organograma:

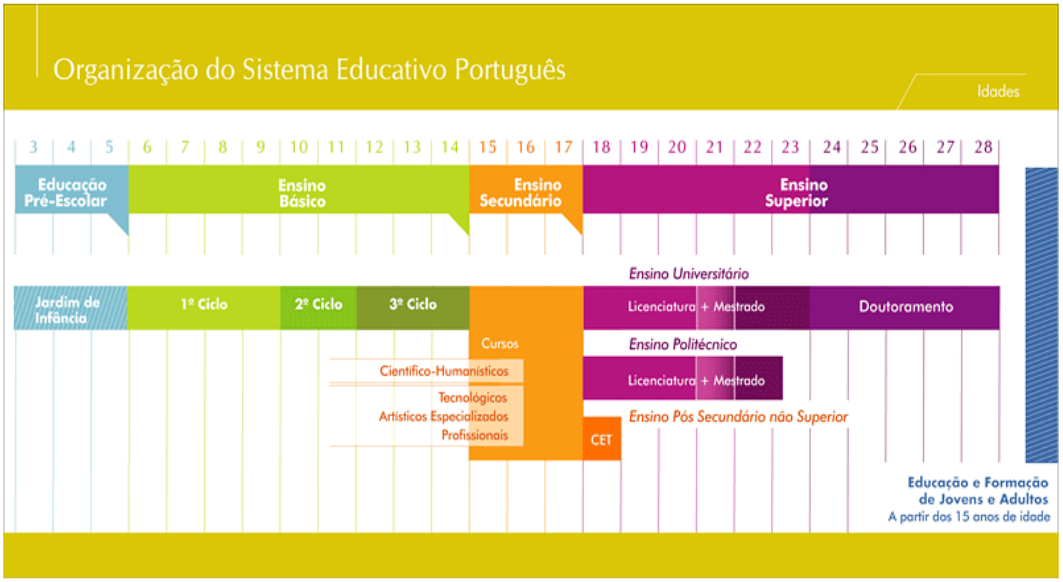


Figura 35 - Organização do Sistema Educativo Português

(**Fonte: Gabinete de Estatística e Planeamento da Educação, 2011**)

Em Setembro de 2003, entrou em vigor um novo programa de Matemática para o Ensino Secundário, que passou a chamar-se Matemática A (dirigido para os estudantes dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas). Passado um ano, em Setembro de 2004, implementam-se dois novos programas: Matemática B (para os alunos dos Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais, Cursos Tecnológicos de Construção Civil e Edificações, de Eletrotecnia e Eletrónica, de Informática, de Administração,

de Marketing e de Desporto) e Matemática Aplicada às Ciências Sociais – MACS – (para os discentes dos Curso Científico-Humanístico de Ciências Sociais e Humanas e Curso Tecnológico de Ordenamento do Território e Ambiente). O aparecimento destas disciplinas no Ensino Secundário veio preencher uma necessidade criada pelas expectativas dos alunos quando optam por diferentes percursos formativos, e, assim "*Os alunos dos Cursos Gerais de Ciências e Economia passaram a ter Matemática A, os alunos dos Cursos Gerais de Ciências Sociais e Humanas passaram a ter MACS, e os alunos de vários cursos tecnológicos passaram a ter Matemática B."* (Silva, 2003). Apesar dos conteúdos a serem lecionados e da complexidade dos mesmos não serem exatamente iguais, o tema das Probabilidades surge nestas três disciplinas.

No que diz respeito à Matemática A, a temática das Probabilidades surge, explicitamente, no 12.º ano (17/18 anos) com a denominação de *Probabilidades e Combinatória.* Os autores do referido programa justificam esta inclusão*, já que "As probabilidades fornecem conceitos e métodos para estudar casos de incerteza e para interpretar previsões baseadas na incerteza."* (ME, 2003). Neste programa os conteúdos encontram-se organizados de acordo com a tabela seguinte:

Tabela 11 - Organização dos Conteúdos de Probabilidades na disciplina de Matemática A 12.º ano dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE PROBABILIDADES

- Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos.
- Operações sobre acontecimentos.
- Aproximações conceptuais para probabilidade:
  - aproximação frequencista de probabilidade;
  - definição clássica de probabilidade ou de Laplace;
  - definição axiomática de probabilidade (caso finito); propriedades da probabilidade.
- Probabilidade condicionada e independência; probabilidade da interseção de acontecimentos. Acontecimentos independentes.

DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS RELATIVAS E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES

- Variável aleatória; função massa de probabilidade:
  - distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta; distribuição de frequências versus distribuição de probabilidades;
  - média versus valor média;
  - desvio padrão amostral versus desvio padrão populacional.
- Modelo Binomial.
- Modelo Normal; histograma versus função densidade.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

- Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações.
- Triângulo de Pascal.
- Binómio de Newton.
- Aplicação ao cálculo de Probabilidades.

Programa de Matemática A (ME, 2003)

Este programa encontra-se organizado de acordo com três grandes tópicos: Probabilidades, Distribuição de Probabilidades e Análise Combinatória. No primeiro destes tópicos, para além de uma consolidação em relação à noção de experiência aleatória, aborda-se explicitamente quatro conceções do significado de Probabilidade, a saber: frequencista, Laplaciano, axiomático e subjetivo. O segundo destes tópicos é dedicado a distribuições de probabilidade discretas (Binomial) e contínuas (Normal). O último destes tópicos prende-se com a Análise Combinatória, enquanto uma das técnicas de contagem de casos possíveis e favoráveis, com aplicações ao cálculo probabilístico.

As orientações metodológicas apontadas para a abordagem destes conteúdos aconselham o recurso à utilização da máquina de calcular, a tirar partido de materiais lúdicos e das simulações, apela à comunicação matemática oral e escrita para explicar o raciocínio utilizado e à resolução de problemas, como modo de aquisição de aprendizagens mais significativas (ME, 2003)

Algo de semelhante aconteceu na Matemática B, já que este tema surge no mesmo ano escolar, só que agora com a designação *Modelos de Probabilidade* e com o qual se pretende que "*As noções de probabilidade devem fazer parte da formação de um cidadão para que ele se possa integrar nas sociedades atuais onde a incerteza e a aleatoriedade são noções usadas frequentemente*." (ME, 2004). A distribuição dos conteúdos neste programa são os descritos na Tabela 12.

Tabela 12 - Organização dos Conteúdos de Probabilidades na disciplina de Matemática B
12.º ano dos Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais
Cursos Tecnológicos de Construção Civil e Edificações, de Eletrotecnia e Eletrónica, de Informática, de Administração, de Marketing e de Desporto

MODELOS DE PROBABILIDADE
• reconhecer as vantagens em encontrar modelos matemáticos apropriados para estudar fenómenos aleatórios; reconhecer as vantagens em encontrar modelos matemáticos apropriados para estudar fenómenos aleatórios;
• compreender as aproximações conceptuais para a probabilidade: – aproximação frequencista de probabilidade; – definição clássica ou probabilidade de Laplace;
• construir modelos de probabilidade em situações simples e usá-los para calcular a probabilidade de alguns acontecimentos;
• apreender as propriedades básicas das distribuições de probabilidade;
• resolver problemas simples, recorrendo à calculadora gráfica ou computador, envolvendo distribuições de probabilidade, em particular envolvendo a distribuição normal.

Programa de Matemática B (ME, 2004)

Os conteúdos incluídos neste programa assentam no pressuposto de, primeiramente, os estudantes serem confrontados com situações aleatórias do seu quotidiano. Na tentativa de modelarem estas situações os alunos devem ser conduzidos a construírem o espaço de resultados de uma experiência aleatória e a definirem acontecimentos. As simulações, com recurso à calculadora gráfica e ao computador, estão também bem patentes neste documento, as quais os discentes devem utilizar para construir empiricamente distribuições de Probabilidade e utilizar a noção frequencista para comparar os resultados das simulações para predizer valores da Probabilidade de um acontecimento.

Propositadamente a Análise Combinatória é deixada de parte, já que segundo os seus autores "*Não se justifica, nesta disciplina, o estudo de modelos para situações que obriguem a utilizar técnicas de contagem que envolvam cálculo combinatório*" (Programa de Matemática B, 2004).

Ao nível das orientações metodológicas, aconselha-se que os estudantes que frequentam esta disciplina sejam confrontados com situações do quotidiano que envolvam o acaso, como os jogos, os inquéritos, as extrações com e sem reposição, os lançamentos de moedas, de dados, entre outros, de modo que "*A base da aprendizagem deve estar na experimentação— recorrendo a materiais manipuláveis ou simulações— e na resolução de problemas."* (ME, 2004).

Por último, na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), este tema surge como ponto programático com a designação de *Modelos de Probabilidade* no 11.ºano do Curso de Ciências Sociais e Humanas e no 12.ºano do Curso Tecnológico de Ordenamento do Território, e justificado pela necessidade de que "*A abordagem dos temas de Estatística, Probabilidades e Inferência Estatística aplicada às Ciências Sociais é feita neste programa de uma forma muito virada para os interesses e necessidades dos estudantes dos Cursos em que esta disciplina se integra.*" (ME-MACS, 2004).

A inclusão desta temática nos percursos formativos referidos anteriormente, é baseada no pressuposto que ela deve ir de encontro às necessidades profissionais futuras e à resolução de problemas reais contextualizados e, por estas razões, deve-se minimizar a importância dos conhecimentos, das técnicas e das rotinas, enquanto objetos matemáticos. Nesta ótica não é de estranhar "*por isso que estes temas são tratados com muitos exemplos e detalhe metodológico*." (Programa de Matemática Aplicada às ciências Sociais, 2004)

Os conteúdos presentes neste programa são:

Tabela 13 - Organização dos Conteúdos de Probabilidades na disciplina de MACS
11.º ano do Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas
12.º ano do Curso Tecnológico de Ordenamento do Território

MODELOS DE PROBABILIDADE

- Fenómenos aleatórios.
- Argumentos de simetria e Regra de Laplace.
- Modelos de probabilidade em espaços finitos. Variáveis quantitativas. Função massa de probabilidade.
- Probabilidade condicional. Árvores de probabilidade. Acontecimentos independentes.
- Probabilidade Total. Regra de Bayes.
- Valor médio e variância populacional.
- Espaço de resultados infinitos. Modelos discretos e modelos contínuos.
- Exemplos de modelos contínuos.
- Modelo Normal.

Programa de MACS (ME-MACS, 2004)

No ano letivo de 2010/2011 entra em vigor o novo programa de matemática para o Ensino Básico o qual " *constitui um reajustamento do Programa de Matemática para o ensino básico, datado do início dos anos noventa (…)".* (DEB, 2007). Estas orientações surgem como uma necessidade de melhorar a articulação entre os três ciclos da Educação Básica.

O documento, também bastante extenso, começa por apresentar as *Finalidades e Objectivos Gerais* para o ensino da Matemática. Segue-se a apresentação dos *Temas Matemáticos* e *Capacidades Transversais* a serem trabalhados no Ensino Básico. As *Orientações metodológicas gerais* e as indicações para a *Gestão curricular* e para a *Avaliação* são apresentadas de seguida. Vêm depois as indicações programáticas relativas a cada um dos ciclos onde, em cada tema, se indicam os principais tópicos, objetivos de aprendizagem e indicações metodológicas específicas de cada ciclo. No final, consta uma bibliografia de apoio e são indicados alguns recursos.

No que concerne especificamente às Probabilidades, esta surge incluído no tema de *Organização e tratamento de dados* o qual, nas palavras nos autores, "*merece algum destaque* (…)". Sugere-se que, desde cedo, os estudantes sejam confrontados com situações aleatórias simples que envolvam o acaso, de modo a que os discentes utilizem o vocabulário próprio para as descrever, tais como, certo, possível, impossível, provável e improvável.

Os conceitos de Probabilidade clássico e frequencista são estudados formalmente no 3.º ciclo da Educação Básica e, em particular, no 9.º ano de escolaridade referindo-se, explicitamente, que "*Neste ciclo, os alunos desenvolvem a sua compreensão das noções de*

experiência aleatória e de acontecimento associado a uma tal experiência. Também desenvolvem a noção de probabilidade como uma medida do grau de possibilidade de um acontecimento se realizar. Devem estimar ou calcular probabilidades, quer utilizando a frequência relativa (conceito frequencista de probabilidade), quer considerando situações simples onde se possa admitir que os resultados da realização da experiência aleatória são igualmente possíveis (conceito clássico de Laplace).” (DEB, 2007).

A organização dada aos conteúdos é a seguinte:

Tabela 14 - Organização dos Conteúdos de Probabilidades no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007)

PROBABILIDADE
• Identificar e dar exemplos de fenómenos aleatórios e deterministas, usando o vocabulário adequado. • Identificar e determinar todos os resultados possíveis quando se realiza determinada experiência aleatória. • Compreender a noção de probabilidade de um acontecimento e que a sua medida se situa entre 0 e 1. • Calcular a probabilidade de um acontecimento pela regra de Laplace. • Compreender e usar a frequência relativa para estimar a probabilidade. • Identificar acontecimentos complementares e compreender que a soma das suas probabilidades é 1. • Identificar acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos e compreender que a probabilidade da sua união é igual à soma das suas probabilidades. • Resolver e formular problemas envolvendo a noção de probabilidade.

Programa de Matemática do Ensino Básico (DEB, 2007)

Neste programa estão explicitamente referidos, na forma de *notas*, alguns aspetos importantes, não só relativamente aos processos de resolução como também a ideias conceptuais a serem tidas em conta no momento do processo de Ensino e Aprendizagem do conceito de Probabilidade.

Assim realça-se a utilização, quando conveniente, de diagramas em árvore e solicita-se a referência à importância de que quando se efetua a atribuição de um valor à probabilidade de um acontecimento esta exprime o grau de convicção na sua ocorrência, a qual pode ser expressa através de uma fração, percentagem ou numeral decimal.

O mesmo documento reforça a necessidade de os estudantes constarem o facto, resultante da definição, que a regra de Laplace só pode ser aplicada no caso de todos os resultados serem igualmente prováveis. Caso contrário, a probabilidade pode ser estimada através da realização de um número significativo de vezes da experiência aleatória e que esta estimativa será tanto melhor quanto maior for o número de repetições dessa experiência.

É nossa opinião, que este Programa de Matemática do Ensino Básico sistematiza, no seu conteúdo, muitas recomendações produzidas por investigações na área da Avaliação e da Didática da Matemática (Almeida, 2011).

Em geral, nos diversos programas da disciplina de Matemática, apresentados anteriormente dos diversos níveis de ensino da Matemática em Portugal, constatamos que, para além de uma listagem de conteúdos a lecionar, estes também apresentam propostas metodológicas e sugerem recursos, quer materiais, quer bibliográficos, para o apoio ao planeamento do processo de Ensino e de Aprendizagem desta disciplina.

No que diz respeito diretamente à temática das Probabilidades, este tópico surge tanto no programa de Matemática do Ensino Básico, como nos programas das diferentes Matemáticas do Ensino Secundário (Matemática A, Matemática B e MACS). Os conteúdos programáticos propostos apontam para a análise de diferentes significados da Probabilidade e são referidas orientações metodológicas e conceptuais específicas deste assunto, devidamente articuladas com as três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem Matemática: a comunicação matemática, a resolução de problemas e o raciocínio matemático.

Todavia, em 2012, o Ministério da Educação elabora e publicita as *METAS CURRICULARES DO ENSINO BÁSICO – MATEMÁTICA,* texto que serviu de base ao Programa de Matemática *do* Ensino Básico que foi publicado em 2013**.**

Este documento descreve o conjunto das metas curriculares da disciplina de Matemática que os alunos devem atingir durante a frequência do Ensino Básico, privilegiando-se os elementos essenciais que constam do Programa de Matemática em vigor, referido anteriormente. Os objetivos gerais, completados por descritores mais precisos, surgem organizados por ano de escolaridade, por domínios e subdomínios (Bivar, Grosso, Oliveira e Timóteo, 2012). Ainda de acordo com os mesmos autores, este documento procura elencar os diferentes descritores de *"(…) forma objetiva e numa linguagem rigorosa destinada ao professor, (…) incluindo uma adaptação da linguagem aos diferentes níveis de escolaridade*."

No 1.º ciclo do Ensino Básico, os diversos temas são abordados de forma progressiva privilegiando-se, numa primeira fase, aspetos mais experimentais e concretos e, posteriormente, introduz-se conceções mais abstratas. Todavia, e no que se refere especificamente à noção de Probabilidade, neste ciclo de formação "*As questões relativas a processos aleatórios foram propositadamente deixadas de lado por se entender que*

apresentam um grau de complexidade demasiado elevado para este nível de ensino, por falta de critérios suficientemente simples que conduzam os alunos a utilizar adequadamente a linguagem associada à interpretação dos fenómenos regidos pelo acaso." (Bivar *et al*., 2012)

Esta ausência de referências explícitas ao estudo dos fenómenos probabilísticos mantém-se no 2.º ciclo, sendo que é somente no ciclo, e ano final, do Ensino Básico que*"(…) é feita uma iniciação às probabilidades e aos fenómenos aleatórios*", e onde se destaca a importância, entre outros, da utilização correta da linguagem da Probabilidade.

A este propósito a Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM, 2012) refere mesmo, num parecer sobre o documento "Metas Curriculares" para o Ensino Básico – Matemática, que "*É ainda de notar que as metas propostas contrariam o Programa de Matemática em tudo o que diz respeito às Probabilidades. Na realidade, este propõe que os alunos explorem situações aleatórias que envolvam o conceito de acaso desde o 1º ciclo, que usem de forma adequada conceitos relacionados com a possibilidade de um determinado acontecimento, e que as experiências aleatórias forneçam contextos adequados para a recolha e análise de dados. No entanto, as metas propostas remetem a abordagem às Probabilidades apenas para o 9º ano, num formato condensado, e de forma formal, renegando as recomendações da investigação acerca do que os alunos podem e devem aprender neste tema.*"

Esta nova orientação patente nas "Metas Curriculares" vem, na nossa opinião, colidir com algumas recomendações de investigadores em Didática da Matemática, entre os quais, Shirley (2000) que refere "*Duas outras áreas importantes da matemática aplicada do século vinte são a estatística e as probabilidades*." e Batanero (2004) "*Todo ello sugiere la urgencia de comenzar la enseñanza de la probabilidad desde la escuela primaria, puesto que las ideas fundamentales estocásticas pueden ser presentadas a estas edades con un nivel de formalización adecuado".*

Somos da opinião que o estudo da Probabilidade, área com proficiência em inúmeros contextos da sociedade, justifica plenamente a relevância da sua inclusão nos currículos, desde os primeiros anos de escolaridade.

Já mais recentemente, em junho de 2013, o Ministério da Educação e Ciência publica o *Programa e as Metas Curriculares* para o Ensino Básico que vem legitimar, formalmente, o que as metas de 2012 afirmavam (Bivar *et al.*, 2013).

Assim, as finalidades do ensino e aprendizagem da Matemática surgem organizadas em três vertentes, a saber: A estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade. Estas "*devem ser levados, passo a passo, a compreender que uma visão vaga e meramente intuitiva dos conceitos matemáticos tem um interesse muito limitado e é pouco relevante, quer para o aprofundamento do estudo da Matemática em si, quer para as aplicações que dela se possam fazer. "* (Bivar *et al.* 2013).

Os domínios de conteúdos, e por ciclos de formação, neste novo programa são:

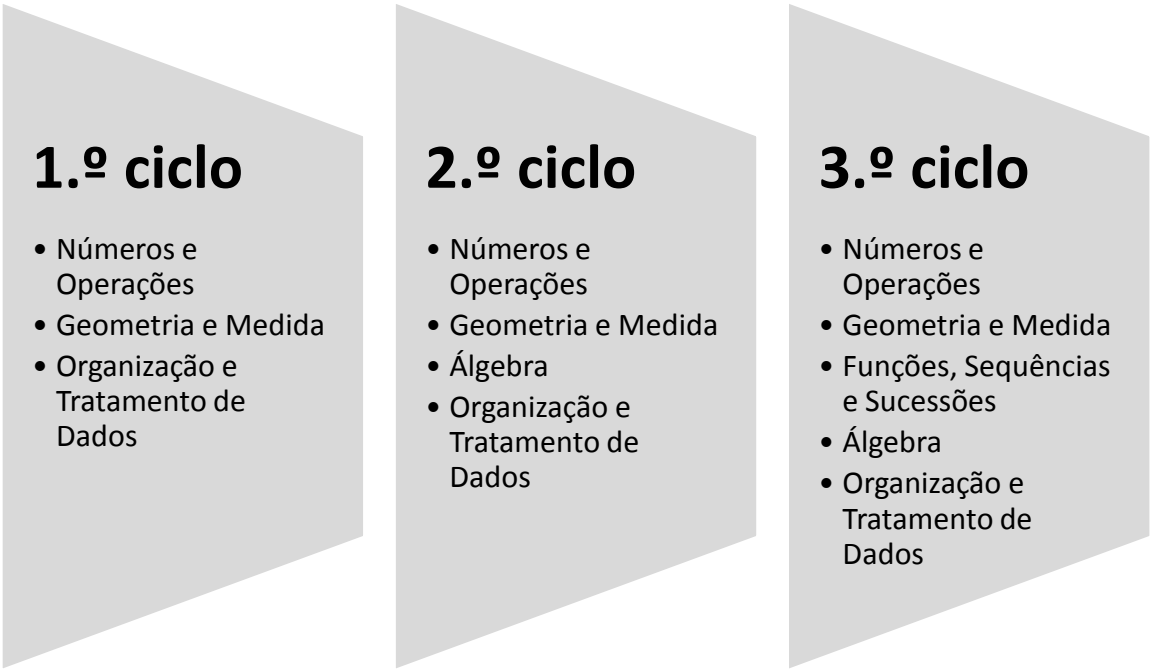


Figura 36 – Domínios de conteúdos pelos ciclos de formação do Ensino Básico

Como se pode constatar, na figura anterior, o domínio Organização e Tratamento de Dados é transversal aos três ciclos, apesar de, como seria expectável, o nível de abordagem ser diferenciado.

No 1.º ciclo é dada ênfase a diversos processos que permitem listar e interpretar informação recolhida em contextos variados, aproveitando-se para fornecer alguma terminologia básica da Teoria dos Conjuntos. No 3.º ano é apresentada a noção de frequência absoluta e, no 4.º ano, a de frequência relativa bem como a representação de números racionais sob forma de percentagem.

No 2.º ciclo abordam-se várias representações de conjuntos de dados e noções estatísticas elementares como a média, a moda, a amplitude e a noção de gráfico cartesiano de uma correspondência, que será trabalhada com mais profundidade no 3.º ciclo no contexto das funções.

No 3.º ciclo são introduzidas algumas medidas de localização e dispersão de um conjunto de dados e é feita, pela primeira vez, uma iniciação às probabilidades e aos fenómenos aleatórios (Bivar *et al.*, 2013).

Neste ciclo, e no que concerne especificamente à temática das Probabilidade, temos:

Tabela 15 - Organização dos Conteúdos de Probabilidades no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (PMCM-EB, Bivar *et al,*.2013)

PROBABILIDADE
• Experiências deterministas e aleatórias; universo dos resultados ou espaço amostral; casos possíveis; • Acontecimentos: casos favoráveis, acontecimento elementar, composto, certo, impossível; • Acontecimentos disjuntos ou incompatíveis e complementares; • Experiências aleatórias com acontecimentos elementares equiprováveis; • Definição de Laplace de probabilidade; propriedades e exemplos; • Problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação de probabilidades de diferentes acontecimentos compostos, utilizando tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore. • Comparação de probabilidades com frequências relativas em experiências aleatórias em que se presume equiprobabilidade dos casos possíveis.

Programa e Metas Curriculares para o Ensino Básico (Bivar *et al.*,2013)

Neste programa exige-se um cuidado na utilização da linguagem associado à Probabilidade (mais provável, igualmente provável, possível, impossível, certo, experiência aleatória, casos possíveis e favoráveis, acontecimentos, entre outros).

Recomenda-se também, a realização de experiências envolvendo a comparação das frequências relativas com as respetivas probabilidades de acontecimentos em experiências repetíveis (aleatórias), em casos em que se presume equiprobabilidade dos casos possíveis. A definição Laplaciana de probabilidade assume um papel de destaque, em paralelo com a utilização de diferentes técnicas de contagem de casos (tabelas de dupla entrada, diagrama em árvore) (Bivar *et al.*, 2013).

Em resumo, a Figura 37 pretende mostrar a evolução, em termos temporais das orientações curriculares da Matemática e anteriormente apresentadas.

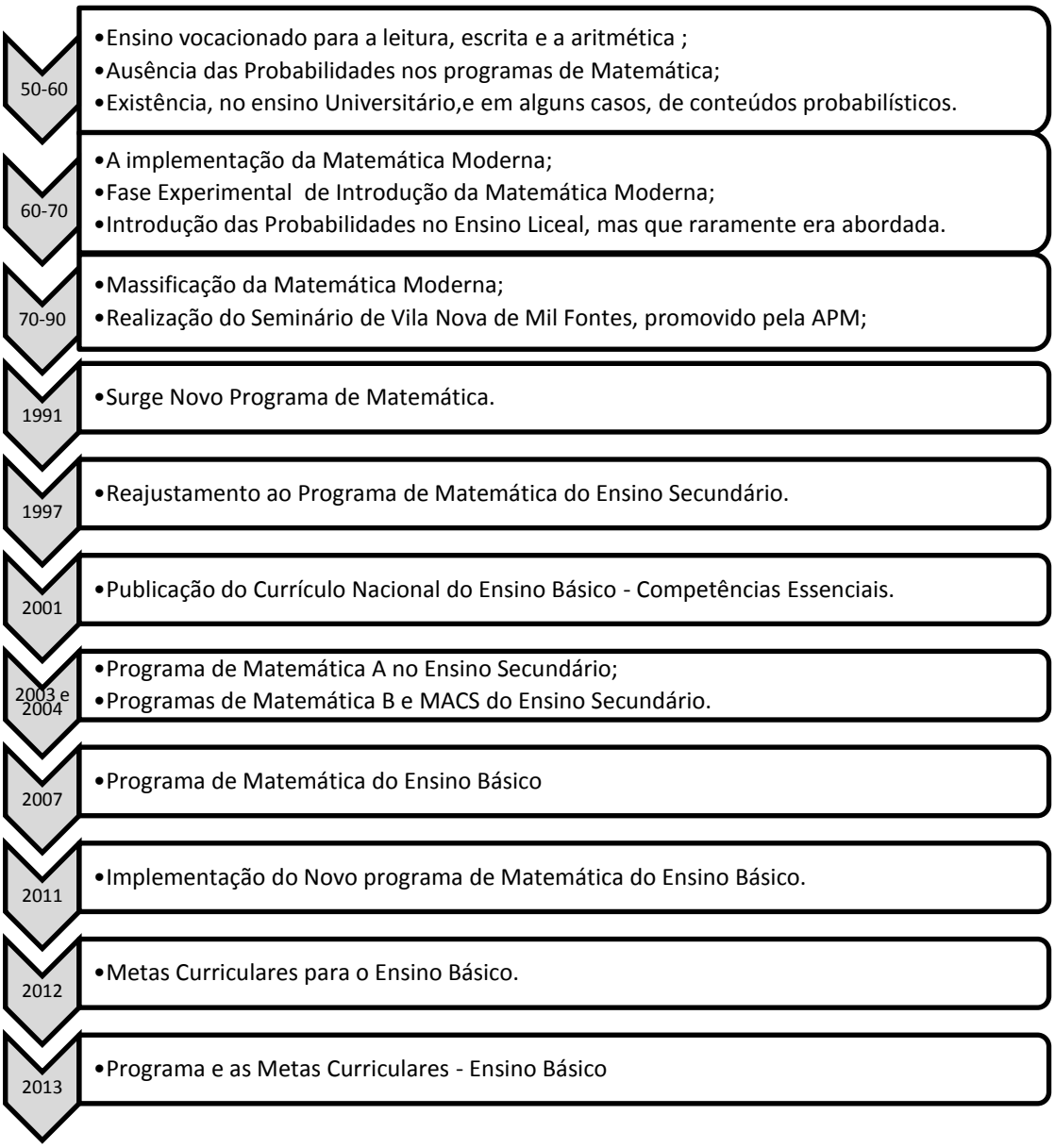


Figura 37 – Evolução das Orientações Curriculares da Matemática, em Portugal no pós II Guerra Mundial

3.2.5. Breve referência à formação de professores dos 1.º e 2.º ciclos em Portugal

Como referimos anteriormente, nos anos mais recentes os currículos de Matemática começaram, com altos e baixos, a reconhecer a importância do ensino da Probabilidade. Todavia, uma condição imprescindível para assegurar o êxito nas aprendizagens desta temática, nos diferentes níveis de ensino, assenta numa adequada preparação dos atuais professores, numa perspetiva de formação ao longo da vida, e dos futuros docentes, ao nível da formação inicial.

Em Portugal, a formação de professores para exercer, nos anos iniciais de Escolarização - Pré-Escolar e Professores do 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico, encontra-se legislada pelo Decreto-Lei nº 43/2007 de 22 de fevereiro. Aqui, definem-se as condições necessárias à obtenção de habilitação profissional para a docência num determinado domínio de intervenção. Neste contexto, e pela primeira vez, promove-se o alargamento dos domínios de habilitação do docente generalista que passam a incluir a habilitação conjunta para a Educação Pré-escolar e para o 1.º ciclo do Ensino Básico ou a habilitação conjunta para os 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico nas áreas da Matemática, Língua Portuguesa, Ciências, História e Geografia de Portugal.

As Escolas Superiores de Educação públicas, não ficaram alheias a esta legislação e propuseram a partir do ano letivo 2007/2008 a Licenciatura em Educação Básica, elaborada com base na legislação atrás referida. No caso da Escola Superior de Educação de Beja, onde o autor deste trabalho desenvolve a sua atividade profissional, entre as várias unidades curriculares da área da Matemática, o plano de estudo desta licenciatura contempla a unidade curricular de *Elementos de Probabilidades e Estatística* que propõe, para além do conhecimento de conteúdos probabilísticos, o desenvolvimento de competências que envolvam, entre outras, a capacidade de interpretar e comunicar sobre a Probabilidade.

Somos da opinião que não basta saber Matemática (Probabilidades) para saber ensinar Matemática (Probabilidades), mas o que o professor sabe vai influenciar o que os alunos aprendem e, nesta perspetiva, a complexidade conceptual da Probabilidade é uma questão importante para a desenvolvimento do conhecimento dos professores. Ainda nesta perspetiva, coincidimos com Rodrigues (2011) quando refere que a formação inicial de professores, no âmbito da Probabilidade, deve-se pautar pela ênfase a dar aos seguintes aspetos, os quais permitirão construir uma conceção mais completa e rica da noção de Probabilidade:

- **Epistemológico** - A necessidade da compreensão das diferentes conceções de Probabilidade, em particular do desenvolvimento histórico do conceito de Probabilidade e dos obstáculos epistemológicos que se fizeram sentir neste percurso;
- **Sociológico e filosófico** - É preciso que o professor compreenda a importância da inclusão de estudos relativos à noção de Probabilidade desde os anos iniciais de escolarização, sendo que para tal é imprescindível a demonstração de evidências das utilizações que a sociedade faz desta temática;
- **Processo Ensino-Aprendizagem** - O professor precisa conhecer estudos no âmbito da psicologia educacional. Para além de conhecer as diferentes conceções de Probabilidade do ponto de vista matemático, ele precisa compreender o modo como essas noções são progressivamente adquiridas pelo aluno do ponto de vista psicológico para assim poder intervir, didaticamente, no ensino desse conteúdo;
- **Didático-metodológico** - O professor precisa conhecer e compreender métodos para o ensino dos diferentes significados de Probabilidade nos anos iniciais da escolarização como, por exemplo, a resolução de problemas, uso de jogos, simulação e modelação matemática (Rodrigues, 2011).

Esta importância da formação dos professores está patente quando efetuamos uma análise aos planos curriculares propostos pelas diferentes Escolas Superiores de Educação e Universidades públicas portuguesas que, de acordo com o Decreto-Lei n.º 43/2007 de 22 de Fevereiro, têm ministrado a Licenciatura em Educação Básica, condição necessária para obter a habilitação profissional para a docência dos Educadores de Infância e de Professores do 1.º e do 2º ciclo do Ensino básico. A Tabela 16 mostra as Unidades curriculares ministradas nestas instituições e que incidem sobre a Teoria das Probabilidades.

Tabela 16 - As unidades curriculares de Probabilidades, na formação em Educação Básica, das Escolas Superiores de Educação em Portugal

Instituição de Ensino Superior	Unidade Curricular	Ano	Semestre	ECTS
ENSINO SUPERIOR POLITÉCNICO				
ESE de Bragança	Números e Estatística	1	Anual	11
ESE de de Beja	Elementos de Probabilidades e Estatística	2	2	6
ESE de Viana do Castelo	Elementos de Matemática [(1)]	1	Anual	9
ESE do Porto	Organização e Tratamento de Dados [(2)]	3	1	5

[(1)] A temática da Teoria da Probabilidade, nem sempre é tratada.
[(2)] Disciplina de opção.

Instituição de Ensino Superior	Unidade Curricular	Ano	Semestre	ECTS
ENSINO SUPERIOR POLITÉCNICO				
ESE de Viseu	Estatística e Probabilidades	3	2	6
ESE de Castelo Branco	Contagem e Análise de Dados	2	1	5
ESE de Faro	Análise de Dados, Estatística e Probabilidades	2	2	
ESE de Lisboa	Probabilidades e Análise de dados	3	1	5
ESE de Setúbal	Estatística e Probabilidades	2	1	4
ESE de Portalegre	Análise de Dados	3	1	5
ESE da Guarda	Matemática - Estatística e Probabilidades	2	2	5
ESE de Coimbra	Matemática III	2	2	6
ESE de Santarém	Tópicos de Matemática Discreta, Estatística e Probabilidades	2	2	5
ESE de Leiria	Tópicos de Análise de Dados, Estatística e Probabilidades	2	1	4
ENSINO UNIVERSITÁRIO				
Universidade da Madeira	Matemática III	2	1	5
Universidade de Aveiro	Conceitos da Matemática II	1	2	8
Universidade de Évora	Elementos de Probabilidades e Estatística I e II	2 3	1 1	5 5
Universidade de Trás-os-Montes e Alto-Douro	Não foi possível obter informação explícita	-	-	-
Universidade do Minho	Números e Probabilidade	2	2	5
Universidade dos Açores	Probabilidades e Estatística	3	1	6

A tabela anterior permite constatar que, quase, a totalidade das Escolas Superiores de Educação e Universidades contemplam, nos seus planos de estudo da Licenciatura em Educação Básica, uma Unidade Curricular que aborda a temática das Probabilidades e/ou Estatística, evidenciando, deste modo, a importância que esta matéria assume na formação dos novos professores destes ciclos de estudo.

3.3. AS DIFERENTES CONCEÇÕES DE PROBABILIDADE

O termo Probabilidade é utilizado frequentemente, e de um modo mais ou menos intuitivo, nas mais variadas situações do dia-a-dia, as quais apresentam "*uma característica comum, que é o facto de não se conseguir prever com exactidão e de antemão, qual o resultado da situação de incerteza*" (Graça Martins e Ponte, 2010).

Nesta secção iremos analisar cinco conceções de Probabilidade que podem, e devem, ser mobilizadas em contexto educativo.

3.3.1. Conceito Clássico (ou de Laplace) de Probabilidade

Como anteriormente referimos, na sua origem a Teoria da Probabilidade esteve intimamente ligada aos jogos e, em particular, aos jogos de azar. Para a sua prática, os jogadores utilizavam frequentemente recursos materiais/objetos, tais como os dados e as cartas.

Em função deste facto e para resolver situações problemáticas que envolviam o acaso e a imprevisibilidade nasceu a Definição Clássica de Probabilidade ou, como frequentemente é conhecida, Lei (ou regra) de Laplace.

LEI (ou regra) DE LAPLACE

Se na realização de uma experiência aleatória - ε - ocorrerem N resultados diferentes e igualmente prováveis – casos possíveis - e se destes, f_A forem favoráveis à ocorrência de um acontecimento A - casos favoráveis - então a probabilidade do acontecimento A – que designaremos por P(A) - é dada por,

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos possíveis}} = \frac{f_A}{N}, \text{com } f_A \leq N$$

Por outras palavras, a Probabilidade de um acontecimento A é o quociente (razão) entre o número de casos (ou resultados) favoráveis à ocorrência de A e o número de casos (ou resultados) possíveis associados à experiência aleatória ε, supostos igualmente prováveis.

Em consequência desta definição de Probabilidade, são evidentes algumas das propriedades Matemáticas desta noção. Apresentamos de seguida algumas destas, as quais evidenciam as características numéricas da Probabilidade e o modo de calcular Probabilidades de acontecimentos compostos.

- **PROPRIEDADE 1**

  Qualquer que seja o acontecimento A, associado a uma experiência aleatória ε, verifica-se que

  $$0 \leq P(A) \leq 1,$$

  dado que, para qualquer acontecimento A, tem-se que $0 \leq f_A \leq N$.

- **PROPRIEDADE 2**

$$\mathrm{P}(\Omega) = 1, \text{ onde } \Omega \text{ representa o espaço de resultados,}$$

já que o número de casos favoráveis coincide com o número de casos possíveis, isto é, f_A=N.

- **PROPRIEDADE 3**

Sejam A e B acontecimentos relacionados com a mesma experiência aleatória, com um número de casos favoráveis f_A e f_B, associados respetivamente a A e B, e tais que não possuam nenhum caso favorável em comum (acontecimentos incompatíveis), então a Probabilidade de se realizar pelo menos um deles (A∪B) é dada por

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Esta relação resulta da constatação de $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{f_A} + \mathrm{f_B}}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{f_A}}{\mathrm{N}} + \frac{\mathrm{f_B}}{\mathrm{N}} = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B})$.

Com o objetivo de ilustrarmos uma aplicação prática desta definição consideremos dois exemplos, retirados das provas de exame de Matemática do 9.º ano de escolaridade do Ensino Básico em Portugal. Para as respetivas resoluções, utilizaremos alguns procedimentos de representação habitualmente utilizados ao nível das técnicas de contagem de casos.

EXEMPLO 1

1. Um saco contém bolas indistinguíveis ao tacto.

Em cada uma das bolas está inscrito um número.

A tabela seguinte apresenta a distribuição dos números inscritos nas bolas que se encontram no saco.

N.º inscrito na bola	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
N.º de bolas	3	3	1	2	1	3

A Ana tira, ao acaso, uma bola do saco.

Qual é a probabilidade de nessa bola estar inscrito um número par superior a 3?

Item 1 Exame Nacional do Ensino Básico- 1.ª chamada / 2011

UMA POSSÍVEL RESOLUÇÃO

Neste exemplo a experiência aleatória consiste em retirar, ao acaso, uma bola numerada de um saco, pelo que Ω={1,2,3,4,5,6}. É salientado que as bolas são indistinguíveis ao tacto, aspeto que vem garantir que a seleção de qualquer uma das bolas é igualmente provável. O saco contém no total treze bolas (13=3+3+1+2+1+3), que neste contexto são os casos possíveis (N). O acontecimento que designaremos por A={saída de uma bola com um número par superior a três} apresenta, mediante as condições dadas, cinco casos favoráveis (f_A) (5 bolas=duas bolas 4+três bolas 6). Sistematizando os dados podemos escrever N=13 e f_A=5. Logo de acordo com a definição Clássica de Probabilidade temos $\mathrm{P(A)} = \frac{5}{13}$.

EXEMPLO 2

1. A mãe, o pai e o filho mais velho da família Coelho ganharam três automóveis num concurso televisivo: um cinzento, um branco e um preto.
Todos queriam o automóvel preto, por isso decidiram distribuir aleatoriamente os três automóveis.

1.1. Qual é a probabilidade de o automóvel preto **não ser** atribuído à mãe?

Assinala a alternativa correcta.

Item 1.1 Exame Nacional do Ensino Básico- 2.ª Chamada / 2009

UMA POSSÍVEL RESOLUÇÃO

Este último exemplo, é, na nossa opinião, um pouco mais complexo que o exemplo apresentado anteriormente, já que tanto o número de casos possíveis (N) como os favoráveis (f_A) não são claramente identificáveis.

Para uma possível resolução iremos socorrer-nos de uma representação Matemática frequentemente utilizada no âmbito da Teoria da Probabilidade – os Diagramas de Árvore.

Atendendo às condições do problema o Diagrama de Árvore associado pode ter o seguinte aspeto:

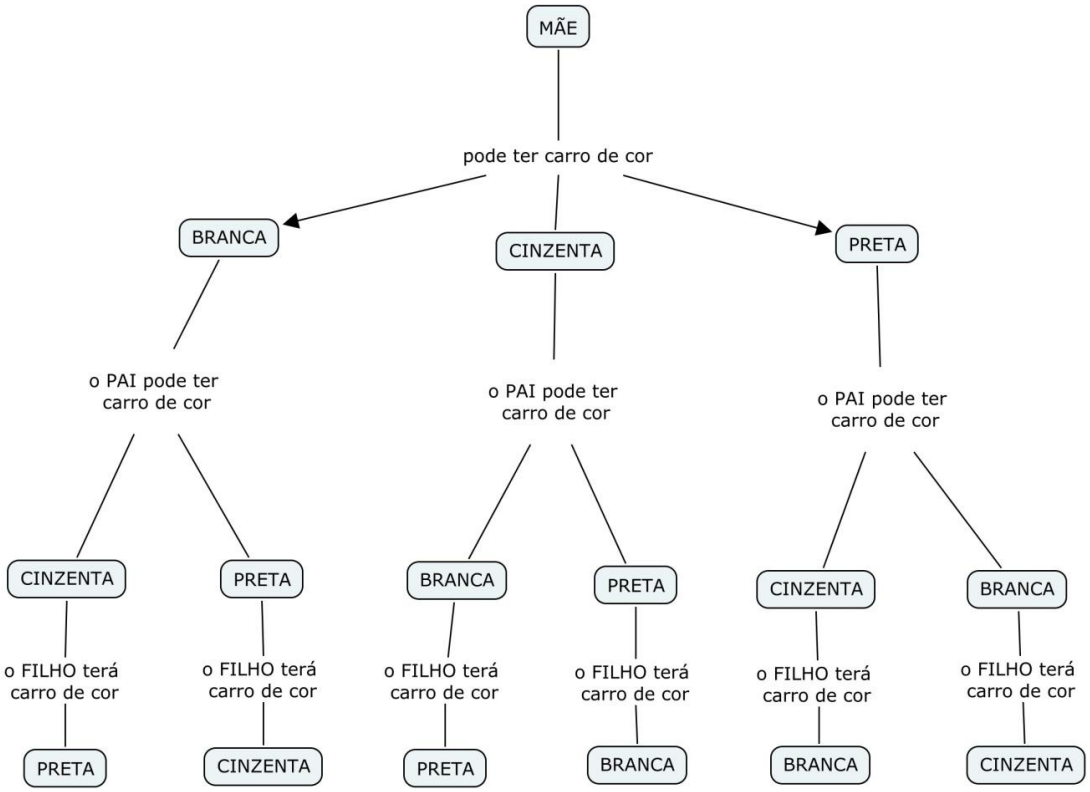


Figura 38 - Diagrama de Árvore

Assim, o conjunto de casos possíveis - Ω - é constituído por todos os ternos ordenados da forma (cor do carro da Mãe, cor do carro do Pai, cor do carro do Filho), ou seja:

$$\Omega=\{(B,C,P), (B,P,C), (C,B,P), (C,P,B), (P,C,B), (P,B,C)\}$$

cuja cardinalidade é seis (6) (N=6 - seis ternos). Os casos favoráveis ao acontecimento B={o carro da mãe não é preto} são,

$$B=\{(B,C,P), (B,P,C), (C,B,P), (C,P,B \}$$

isto é, quatro (4) (f_A=4). Logo $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Nestes últimos exemplos apresentados, a determinação do número de casos possíveis e do número de casos favoráveis foi, relativamente, evidente. Existem no entanto situações, em que a obtenção destes valores torna-se mais complexa. Para muitas destas situações o Cálculo Combinatória constitui um procedimento útil e célere que auxilia a contagem, tanto dos casos possíveis como dos favoráveis.

3.3.2. Conceito Geométrico de Probabilidade

Apesar da relativa simplicidade patente na Definição Clássica (ou de Laplace) de Probabilidade, esta apresenta duas grandes limitações. A primeira diz respeito ao facto da necessidade da assunção de que os casos possíveis terem de ser equiprováveis, o que, do ponto de vista prático, nem sempre acontece. A segunda limitação deriva do pressuposto de que o número de resultados possíveis e favoráveis, associados a uma experiência aleatória, tem que ser finito.

Nesta lógica, se pretendermos calcular a probabilidade de que um ponto, escolhido ao acaso de uma região, se localize numa sub-região incluída na primeira, a Lei (ou regra) de Laplace não permite, de imediato, este cálculo.

Impõe-se o imperativo de efetuar uma extensão do conceito de Probabilidade ao contexto de experiências aleatórias, nas quais os resultados possíveis e favoráveis constituem conjuntos contínuos.

Assim temos,

DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DE PROBABILIDADE

Designemos por "med" uma medida da dimensão (comprimento, área, volume) de uma região qualquer incluída num espaço amostral contínuo (S) de uma experiência aleatória. A Probabilidade de que um ponto selecionado ao acaso a partir de S se localize na região A nela incluída é dada pela razão $P(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{med\ (A)}}{\mathrm{med\ (S)}}$.

Guimarães e Cabral (1998)

Note-se que esta abordagem ao conceito de Probabilidade permite o alargamento do campo de aplicabilidade da noção de Probabilidade a outras áreas, em particular à Geometria, em consonância com o referido por Silva, Campos e Itacarambi (s.d.) quando afirmam que *"Vários estudos vêm sugerindo uma maior enfâse na exploração da Probabilidade, no interior da disciplina de Matemática"*, ou seja, a necessidade de estabelecer conexões a outras áreas da Matemática não relacionadas diretamente com o campo habitual no qual a Teoria da Probabilidade se movimenta.

À semelhança do que fizemos para a definição anterior, apresentamos alguns exemplos de aplicação da definição geométrica.

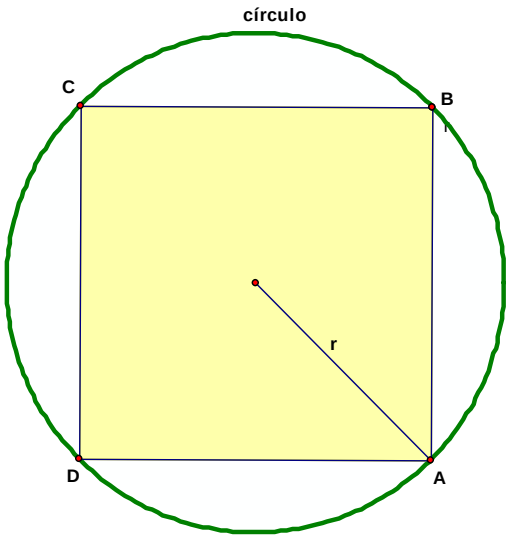
EXEMPLO 3

Considere um círculo de raio r e inscrito nele um quadrado. Marca-se ao acaso no interior do círculo um ponto. Qual a probabilidade do ponto "cair" no interior do quadrado?

Adaptado de Pedrosa & Gama (2004)

UMA POSSÍVEL RESOLUÇÃO

A situação problemática apresentada pode ser geometricamente representada através da seguinte figura:



Através do Teorema de Pitágoras é possível obter a medida do comprimento do lado do quadrado [ABCD]- digamos L - em função do raio do círculo, isto é, $L=\sqrt{2}\times r$, logo,

P (ponto marcado no círculo cair no quadrado [ABCD]) =

$$P(\text{ponto cair no quadrado}) = \frac{\text{Área [ABCD]}}{\text{Área Círculo}} = \frac{L \times L}{\pi r^2} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}.$$

Um facto curioso da solução encontrada neste exemplo, é que a Probabilidade pedida não depende do raio r do círculo, por outras palavras, a Probabilidade pedida é sempre constante e independentemente do raio do círculo no qual o quadrado está inscrito.

Vejamos, ainda, outro exemplo desta conceção de Probabilidade:

EXEMPLO 4

Dois amigos ficaram de se encontrar entre as 14h e as 15h. Combinaram que a partir do momento que um chegasse, esse esperaria no máximo 20 minutos pelo outro. Findo este período ia-se embora. Qual a probabilidade de os amigos se encontrar nesse intervalo de tempo?

Adaptado de Santos (1981)

UMA POSSÍVEL RESOLUÇÃO

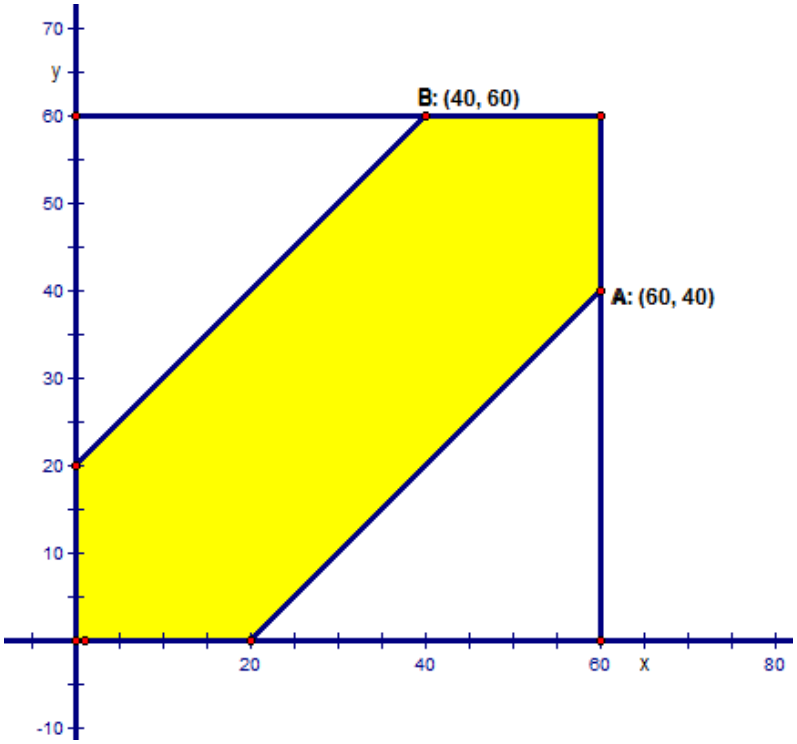
Já que os amigos ficaram de se encontrar entre as 14h e as 15h (período de 60 minutos), torna-se claro que o conjunto dos resultados possíveis são todos os pares ordenados (x,y), tais que o x representa o momento em que chega um dos amigos e y o instante em que o outro amigo chega, isto é, $0 \leq x,y \leq 60$. Os casos possíveis serão dados pela medida da área de um quadrado de lado 60, ou seja, $med(S)=60 \times 60=3600$.

Dado que, a partir do momento em que um dos amigos aparece, espera no máximo 20 minutos pelo outro, não sabendo quem chega primeiro, podemos escrever,

$$|x-y| \leq 20, \text{ que é equivalente a}$$

$$x-y \leq 20 \wedge x-y \geq -20.$$

Esta última condição define, graficamente, uma região do plano que resulta da interseção de dois semiplanos, a qual se encontra representada a sombreado na figura seguinte.



Logo a P (dos amigos se encontrar)=

$$\frac{med(\acute{a}rea\ sombreado)}{med(S)} = \frac{3600-2\times\frac{40\times40}{2}}{3600} = \frac{3600-1600}{3600} = \frac{2000}{3600}$$=0,55…

3.3.3. Conceito Frequencista de Probabilidade

Tanto a definição clássica como a definição geométrica de Probabilidade apresentam uma enorme limitação: não podem ser utilizadas na determinação de probabilidades de acontecimentos associados à realização de um grande número de situações aleatórias em que a simetria e a equiprobabilidade dos resultados não se aplica.

Todavia, estudos teóricos relacionados com a previsão quantitativa de acontecimentos futuros, baseados em observações registadas e obtidas a partir da repetição de experiências, têm proliferado em diversas áreas da ciência.

Uma das muitas contribuições de *Jakob Bernoulli* (1654-1705) ao campo do pensamento probabilístico foi a *Lei dos Grandes Números*, na qual sugere o fato de se puder atribuir probabilidades aos acontecimentos aleatórios, que surgem, em diversas áreas do saber, a partir da frequência relativa observada numa sucessão grande de ensaios da mesma experiência aleatória (Batanero, Henry e Parzysz, 2005).

Em *Probability, Statistics and Truth,* Richard von Mises (1952) oferece a seguinte definição frequencista de probabilidade:

DEFINIÇÃO FREQUENCISTA DE PROBABILIDADE

Seja ε uma experiência aleatória. Mediante as mesmas condições teóricas, realizemos N ensaios independentes da experiência aleatória ε, com N suficientemente grande. Em cada ensaio o acontecimento A pode ou não ocorrer. Seja f_A o número de ocorrências do acontecimento A. Então

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{f_A}{N} = \lim_{N\to\infty} fr_A$$

onde $fr_A = \frac{f_A}{N}$ chama-se frequência relativa.

Adaptado de Mises (1952)

A frequência relativa fr_A apresenta as seguintes propriedades, de fácil verificação:

- $0 \leq fr_A \leq 1$.
- $fr_A = 1$ se, e somente se, A ocorrer em todas as N repetições.
- $fr_A = 0$ se, e somente se, A nunca ocorrer nas N repetições.
- Se A e B forem acontecimentos incompatíveis, e se fr_{AUB} for a frequência relativa associada ao acontecimento AUB, então, $fr_{AUB} = fr_A + fr_B$.

Reforçamos a ideia, presente nesta definição, que esta regularidade tem que ser uma regularidade a longo termo ($N\to\infty$). Esta regularidade não tem necessariamente que existir, a não ser ao fim de um número muito grande de repetições do fenómeno aleatório.

Uma das principais características do conceito frequencista é que a Probabilidade de um acontecimento emerge do processo de experimentação. Vivenciamos esse processo quando, por exemplo, compramos um automóvel e pagamos o respetivo seguro. O valor a ser pago varia, entre outros, de acordo com o índice de sinistralidade da região/país em que o proprietário reside e também com a marca e o modelo do veículo. Para fazer o cálculo, a pagar, do valor do seguro dos carros as seguradoras realizam uma pesquisa estatística sobre o índice de sinistralidade dos mesmos, e por meio desses dados calculam a probabilidade de o proprietário do automóvel ter um acidente com o seu carro, ou seja, a razão entre o número

de possibilidades favoráveis, automóveis "x" acidentados com estas características, e o número total de possibilidades, automóveis "y", em circulação.

De um posto de vista prático, e didático, a abordagem frequencista não permite obter a probabilidade de um acontecimento quando é fisicamente impossível a repetição da experiência aleatória um grande número de vezes, assim como a contingência sobre o número de vezes que temos que repetir a experiência com o intuito de encontrar uma boa estimativa para a Probabilidade do acontecimento. Acresce a isto, o facto de frequentemente os exemplos de simulação utilizados pelos professores em contexto de sala de aula, serem relacionados com acontecimentos equiprováveis, pelo que os alunos não reconhecem utilidade a esta conceção da Probabilidade.

Contudo a crítica mais contundente associada a esta definição prende-se com a confusão entre o objeto matemática abstrato – Probabilidade – e as frequências observadas empíricas que são experimentalmente obtidas (Batanero *et al.*, 2005), ou seja, a frequência relativa e probabilidade não são sinónimos. A frequência relativa de um acontecimento é um valor associado a um facto do passado, já realizado, enquanto a Probabilidade de um acontecimento é um valor relativo a um facto no futuro e por isso incerto e aleatório.

Para ilustrar uma possível aplicação desta definição, consideremos o seguinte exemplo:

EXEMPLO 5

O "Jogo do Rapa" é considerado um jogo de sorte ou azar. Utiliza-se um pequeno pião, ou "rapa", também chamado, em algumas zonas de Portugal, de piorra ou pionete. O "rapa" possui quatro faces e em cada uma delas encontra-se inscrita cada uma das letras R (Rapa – Ganha tudo o que está na mesa), T (Tira um objeto), D (Deixa um objeto), P (Põe lá outro objeto).

Os jogadores, em número variável, colocam-se à volta de uma mesa onde colocam um botão, um feijão, um rebuçado, ou um outro qualquer objeto. Depois de imprimido um movimento rotativo, o rapa fica com uma das faces virada para cima, indicando assim a sorte do jogador.

Qual a probabilidade de saída de cada uma das faces?

UMA POSSÍVEL RESOLUÇÃO

Uma possível abordagem a esta situação pode ser com recurso à definição frequencista. Para tal iremos simular o lançamento do rapa 16, 64, 1024, 4096, 16384 vezes do "rapa" utilizando a folha de cálculo Excel da Microsoft Office. Esta simulação foi feita utilizando a função =ALEATORIOENTRE(1;4) que gera números inteiros aleatórios entre 1 e 4, inclusive, e efetuamos a associação 1=Rapa(R), 2=Tira (T), 3=Deixa (D) e 4=Põe (P).

Como referem Teodoro, Lopes e Mourão (s/d) *"O ensino, como o de probabilidade, vem se apoiando nos últimos anos em alguns recursos computacionais que facilitam o entendimento e melhoram a qualidade da aprendizagem, além de proporcionarem maior interatividade ao aprendiz, que antes não podia visualizar eventos com tanta facilidade e compreensão*".

Utilizando o *Excel* , os resultados obtidos nesta simulação foram:

Tabela 17 – Simulação do "Jogo do Rapa", com recurso ao Excel

	R (Rapa)	T (tira)	P (Põe)	D (Dá)
Ensaios = 16	3	6	4	3
Frequência relativa	0,188	0,375	0,250	0,188
Ensaios = 64	21	13	21	9
Frequência relativa	0,33	0,20	0,33	0,14
Ensaios = 1024	257	257	249	261
Frequência relativa	0,251	0,251	0,243	0,255
Ensaios = 4096	1015	1043	1020	1018
Frequência relativa	0,248	0,255	0,249	0,249
Ensaios = 16384	4119	4079	4144	4042
Frequência relativa	0,251	0,249	0,253	0,247

Para uma melhor visualização do comportamento das frequências relativas das diferentes faces do "rapa" apresentamos o Figura 39:

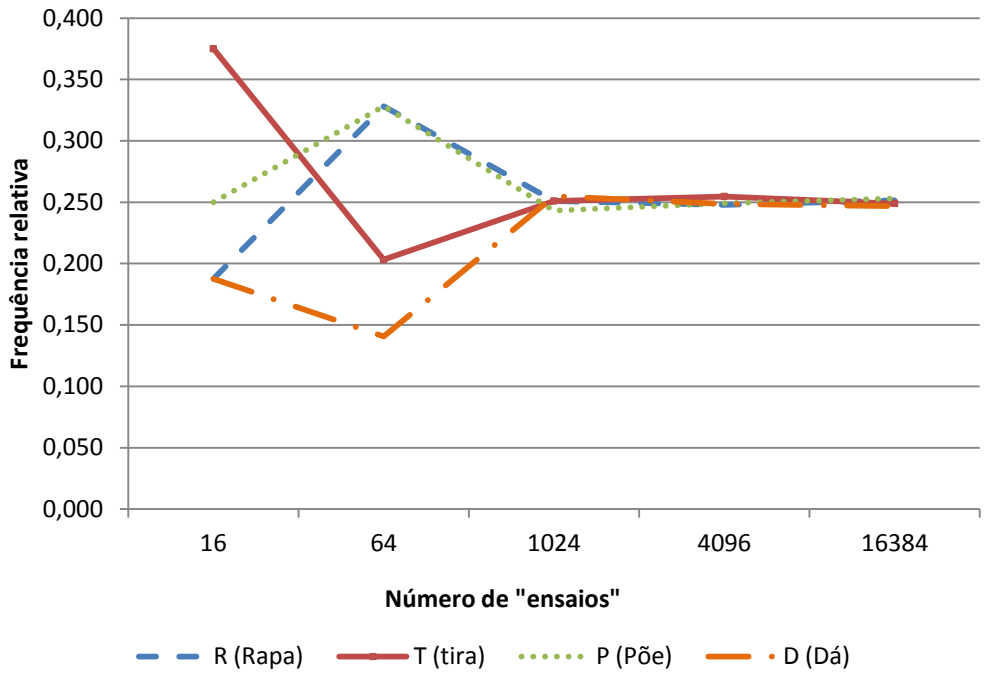


Figura 39 – Simulação em Excel do "Jogo do Rapa"

Na Figura 39 observa-se que, na realização de um número grande de ensaios da mesma experiência aleatória, a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar. Esse valor de estabilidade é a Probabilidade teórica do acontecimento e é independente de quem realiza a experiência [no nosso exemplo P(Rapa)=P(Tira)=P(Põe)=P(Dá)=0,25].

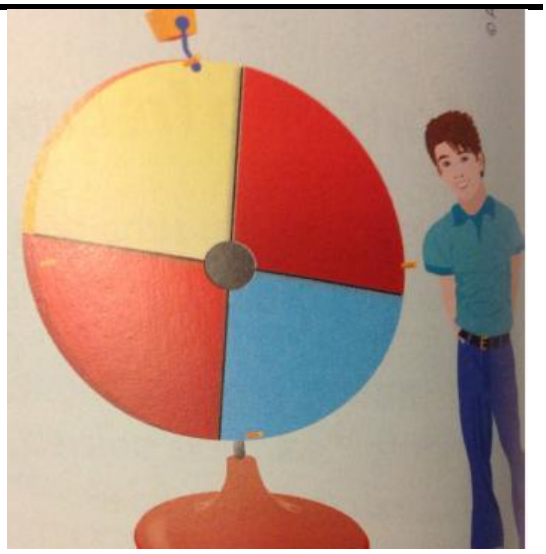
Também podemos constatar que para um número reduzido de experiências realizadas os valores das frequências relativas são bastante diferentes, atenuando-se essa diferença à medida que o número de experiências aumenta.

A aplicação da definição frequencista de Probabilidade pressupõe a "realização" (virtual ou não) de "muitas" experiências e a observação dos resultados obtidos. Esta noção mostra que a probabilidade é o limite da frequência relativa, ou seja, a probabilidade de um acontecimento A é o valor para o qual a frequência relativa de A converge (Palhares *et al.*, 2011).

Consideremos, ainda, o seguinte exemplo, adaptado do Manual Escolar *Matematicamente Falando* (Conceição e Almeida, 2012):

EXEMPLO 6

O Paulo fez girar 400 vezes a roda da fortuna que observas ao lado. Qual das situações A, B ou C, ilustradas te parece representar melhor os resultados obtidos?



	Vermelho	Amarelo	Azul
A	205	97	98
B	136	135	129
C	99	101	200

UMA POSSÍVEL RESOLUÇÃO

Atendendo à figura que acompanha este problema, constatamos qua a área pintada a vermelho da roda da fortuna é o dobro da área com a cor azul e da área com cor amarela, sendo que estas duas últimas apresentam áreas iguais. Com a realização de um número significativo de experiências (400) é expectável que os valores das frequências relativas traduzam estas relações entre as diferentes áreas.

	Frequências relativas		
	Vermelho	Amarelo	Azul
A	0,5125	0,2425	0,245
B	0,34	0,3375	0,3225
C	0,2475	0,2525	0,5

Atendendo à tabela acima, que reflete as frequências relativas calculadas com base nas 400 experiências realizadas, a situação que mais se aproxima da esperada é a A, já que os valores traduzem, aproximadamente, os valores previstos das relações entre as diferentes áreas, ou seja, [Vermelho = 0,5125 (≅0,50); Amarelo = 0,2425 (≅0,25); Azul=0,245(≅0,25)].

3.3.4. Conceito Subjetivo de Probabilidade

A aplicação da definição frequencista constitui uma excelente plataforma para a conceptualizar e até obter estimativas de probabilidades de acontecimentos associados a fenómenos aleatórios suscetíveis de serem repetidos um número significativo de vezes e sujeitos aos mesmos condicionalismos experimentais. Porém, existem experiências aleatórias que, pelas suas especificidades, nunca mais, ou dificilmente, se repetirão.

Nestas situações é conveniente interpretar a Probabilidade como manifestação do grau de convicção, ou crença, que cada individuo atribui à ocorrência dos acontecimentos, com base na experiência e informação anteriores.

Na conceção subjetivista, as probabilidades expressam um grau de crença, credibilidade ou perceção pessoal. Fernandes (1999) designa-a de "personalista", pois, segundo ele, as duas conceções anteriores – clássica e frequencista - são propriedades do mundo real, enquanto na perceção subjetivista as probabilidades são avaliações pessoais, de situações aleatórias, inerentes ao individuo. Desse modo, a probabilidade passa de uma avaliação externa ao sujeito para uma avaliação centrada no sujeito. Nesta lógica, o indivíduo utiliza as suas experiências e o seu conhecimento sobre o assunto para exprimir a Probabilidade de um evento, o que possibilita diferentes medidas de Probabilidade para um mesmo acontecimento, e, consequentemente, uma atribuição numérica, baseada em informação obtida em dados e/ou conhecimento mais, ou menos, pormenorizados do fenómeno em análise.

Nas palavras de Batanero e Díaz (2007) "*En estas situaciones la probabilidad no es una propiedad física tangible (…) sino una percepción o grado de creencia en la verosimilitud de la persona que asigna la probabilidad sobre la plausibilidad de ocurrencia del suceso (que ocurrirá o no)*". Murteira (1988) acrescenta que "*A informação a priori, anterior ou externa em relação à amostra ou experiência, deriva normalmente dos conhecimentos acumulados no domínio em causa ou em domínios conexos, bem como da intuição ou sensibilidade do investigador"* ou, ainda como afirma Gal (2005), *"An event's predictability depends on our assumptions regarding the processes affecting the occurrence of that event and the quality of the information we use to support estimates of probability."*

Graça Martins e Ponte (2010) para exemplificar este conceito apresentam o seguinte exemplo "Se lhe perguntarem qual a probabilidade do próximo presidente da República de Portugal ser homem, o que responde?". Em primeiro, e com base na informação que se tem

do passado, não é natural esperar que exista igual probabilidade de ser homem ou mulher. Já que todos os presidentes da República portugueses, até ao momento, foram homens é expectável atribuir ao acontecimento "o próximo presidente da República é homem" uma probabilidade de 1 (=100%).

Todavia permitimo-nos fazer uma chamada de atenção. Embora se possam equacionar diversos modos de exprimir tais graus de crença ou credibilidade, é importante que estes traduzam probabilidades, ou seja devem satisfazer a lista de propriedades que foram anteriormente identificadas para a Probabilidade. Guimarães e Cabral (1998) apontam um argumento a favor da verificação de tais propriedades, "*mesmo que haja certas experiências que, na realidade, não se repitam, pode sempre imaginar-se essa possibilidade teórica. Então as propriedades satisfeitas pelas probabilidades interpretadas como limites de frequências devem ser também satisfeitas pelas probabilidades subjectivas*".

Para esta nova visão do conceito de Probabilidade muito contribuiu o conhecido matemático Thomas Bayes, quando em 1763 apresentou o seguinte o teorema, relacionado com Probabilidades Condicionadas.

"Sejam A e B dois acontecimentos de Ω associados a uma experiência aleatória ε, então,

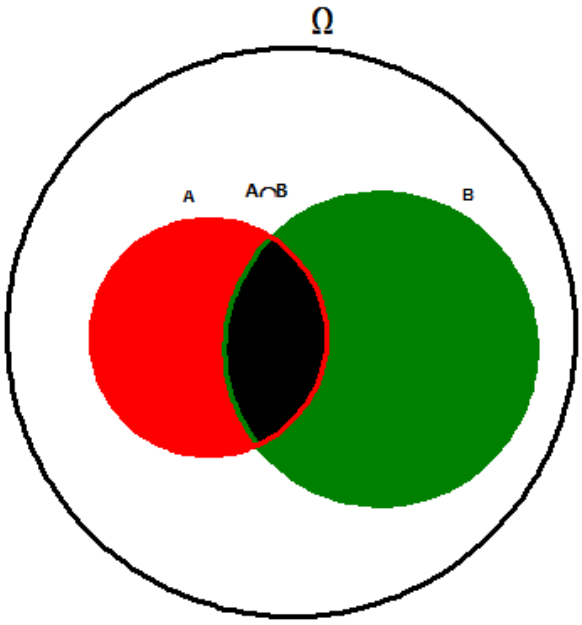
$$\mathrm{P}(\text{A ocorrer dado que ocorreu B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$$

ou ainda

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$$

Um outro modo de explicar esta definição é a seguinte: dado que o acontecimento B ocorreu, os casos possíveis passam a ser todos aqueles associados a B, como pretendemos determinar a probabilidade de A ocorrer, os acontecimentos favoráveis serão aqueles comuns a A e a B.

Esquematicamente temos:



B=zona a verde∪ zona preto

A∩B=zona preto

$$\mathbf{P(A|B)} = \frac{\textbf{Área da zona a Preto}}{\textbf{Área da zona a verde} \cup \textbf{zona preto}}$$

Figura 40 – Interpretação geométrica da $\mathbf{P(A|B)}$

Uma das ideias principais inerente a esta última relação, é a de que probabilidade de um acontecimento A dado que ocorreu um acontecimento B, depende não apenas da possível relação entre os acontecimentos A e B, mas também da probabilidade da ocorrência de cada um dos acontecimentos. Ou seja, esta relação mostra como alterar, face a novas evidências, as probabilidades a *priori* de forma a obter probabilidades *a posteriori*.

Generalizando, esta fórmula permite obter as probabilidades de várias causas quando uma das suas consequências é observada. A probabilidade de tal causa seria, portanto, sujeita a revisão em função das novas informações e, por conseguinte, perderia caráter objetivo postulado pelo conceção frequencista (Batanero, Henry e Parzysz, 2005).

É frequente encontrar-se nos mais variados meios de comunicação notícias nas quais o conteúdo apela a uma interpretação subjetiva de Probabilidade.

De seguida apresentamos dois desses exemplos, recolhidas da imprensa escrita portuguesa.

EXEMPLO 7

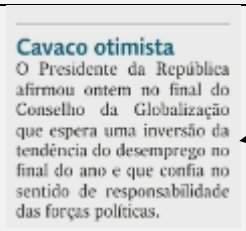
Esperança de vida sobe para doentes com cancro

SOBREVIVÊNCIA Até 2030 é de esperar um aumento do número de novos casos de cancro na ordem dos 25%. Mas a verdade é que está também a aumentar cada vez mais o

co anos, para todos os tipos de tumor, ronda os 54%, e os 44% a 10 anos. Ou seja, quase metade dos doentes com cancro continuarão vivos daqui a 10 anos. Mas os que

Ou seja, quase metade dos doentes com cancro continuarão vivos daqui a 10 anos.

In Diário de Notícias de 7 de Maio de 2012



Cavaco otimista

O Presidente da República afirmou ontem no final do Conselho da Globalização que espera uma inversão da tendência do desemprego no final do ano e que confia no sentido de responsabilidade das forças políticas.

O Presidente da República afirmou ontem no final do Conselho da Globalização que espera uma inversão da tendência do desemprego no final do ano (…)

In Semanário Expresso de 5 de Maio de 2012

O exemplo seguinte, mostra uma aplicação do Teorema de Bayes no contexto da Área da Saúde.

EXEMPLO 8

Para um certo tipo de cancro a taxa de prevalência - proporção de doentes na população em geral - é 0,005. Um teste diagnóstico para esta doença é tal que:

- a probabilidade do teste resultar positivo quando aplicado a um indivíduo com cancro - sensibilidade do teste - é 0,99;
- a probabilidade do teste resultar negativo quando o indivíduo não tem cancro - especificidade do teste - é 0,95.

- Qual a probabilidade do teste dar positivo?

- Calcule o valor preditivo do teste, isto é, a probabilidade de um indivíduo ter cancro sabendo que o teste deu positivo?

UMA POSSÍVEL RESOLUÇÃO

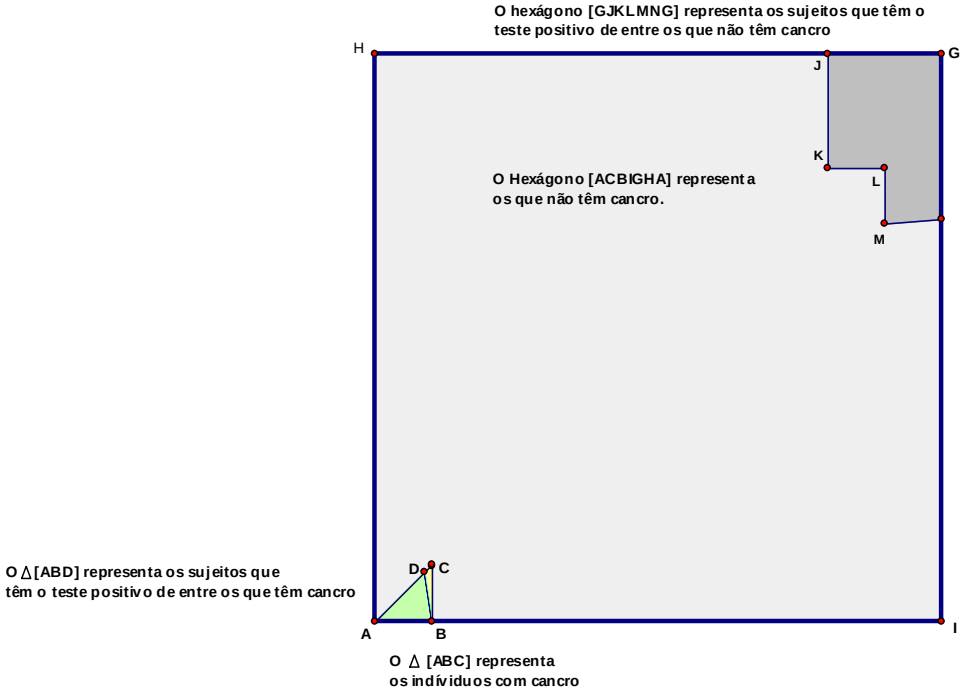
O enunciado da situação problemática apresentada permite escrever as seguintes igualdades, algumas explícitas, outras implícitas.

1. P(Ter cancro) = 0,005 e P(Não ter cancro)=0,995;
2. P(Teste positivo/Tem cancro)=0,99 e P(Teste negativo/Tem cancro)=0,01 ;
3. P(Teste negativo/Não tem cancro)=0,95 e P(Teste Positivo/Não tem cancro)=0,05.

Estes dados podem ser representados através do seguinte esquema no qual o quadrado [AIGH] pretende representar a referida população e, proporcionalmente, o Δ[ABC] os sujeitos com cancro, Δ[ABD] os sujeitos que têm teste positivo de entre os que têm cancro. O hexágono [ACBIGHA] os sujeitos que não têm cancro e o hexágono [GJKLMNG] os sujeitos que têm o teste positivo de entre os que não têm cancro. Assim, atendendo a esta figura temos,

P(Teste Positivo) =Área [ABD]+Área[GJKLMNG], ou seja

P(Teste Positivo)=P(Ter cancro)×P(Teste positivo/Tem cancro)+ P(Não ter cancro)×P(Teste positivo/Não tem cancro)=0,005×0,99+0,995×0,05=0,00495+0,04975=0,0547=5,47%



Atendendo ao teorema de Bayes, o segundo pedido pode ser obtido como,

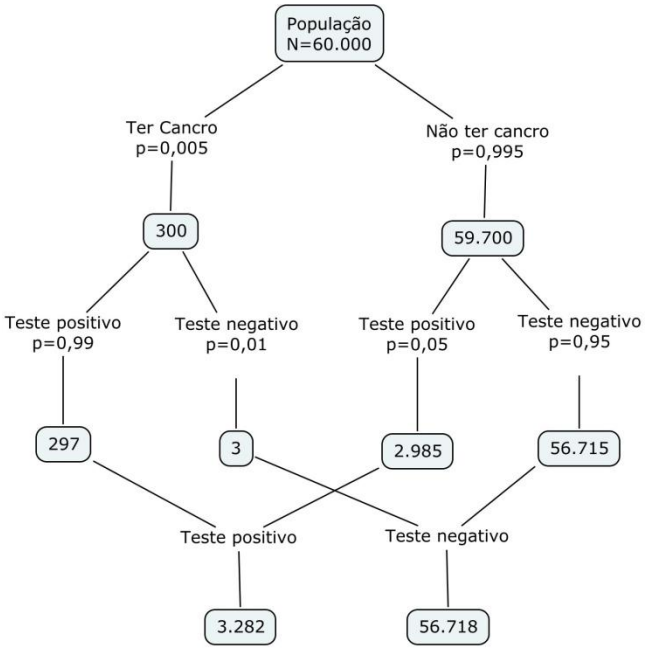
$$\mathrm{P}(\text{Ter cancro}|\text{Teste positivo}) = \frac{\mathrm{P}(\text{Ter cancro} \cap \text{Teste positivo})}{\mathrm{P}(\text{Teste positivo})} =$$

$$= \frac{0{,}005 \times 0{,}99}{0{,}0547} \cong 0{,}0905 = 9{,}05\%$$

Isto é, somente 9,05% dos sujeitos que apresentam um teste positivo é que efetivamente apresentam um problema oncológico. Este resultado, à primeira vista surpreendente, resulta em grande medida do fato da existência de um número significativo de "falsos positivos", isto é, de sujeitos que apresentam um teste positivo, mas que não têm cancro.

Alguns estudos recentes (Sedlemeier, 1999, citado por Batanero e Díaz, 2007) afirmam que para facilitar a aprendizagem da resolução de situações bayesianas, os dados do problema devem-se apresentar na forma de frequências absolutas, em detrimento de percentagens ou probabilidades, assim como Martignon e Wassner (2002) sugerem o uso conjunto de diagramas de árvore e das frequências absolutas no processo de ensino deste tipo de problemas, conseguindo-se aprendizagens mais significativas.

Deste modo, e utilizando um recurso já visto atrás, podemos considerar o seguinte diagrama de árvore construído supondo, sem quebra de generalidade, uma população de 60000 indivíduos:



Este último diagrama permite-nos a seguinte leitura:

Em 60.000 sujeitos, há 300 que têm cancro e 59.700 que não têm. Ao efetuar a prova nos doentes com cancro teremos 297 com um teste positivo, mas também em 2.985 sujeitos que não têm cancro. Assim há um total de 3.282 pessoas, das 60.000, que ao realizar o teste, este dá um resultado positivo. Numericamente, as probabilidades pedidas no exemplo assumem os valores:

$$\mathrm{P}(\text{Teste Positivo}) = \frac{297+2.985}{60.000} = \frac{3.282}{60.000} \cong 0{,}0547 = 5{,}47\%, \text{ e}$$

$$\mathrm{P}(\text{Ter cancro}|\text{Teste positivo}) = \frac{297}{3.282} \cong 0{,}0905 = 9{,}05\%.$$

3.3.5. Conceito Axiomático (ou formal) de Probabilidade

Durante algum tempo, a linha mais ortodoxa de matemáticos ainda demonstrava bastantes relutâncias na subjetividade atribuída ao significado de Probabilidade como grau de crença. Estes achavam ser necessário alicerçar este conceito em fundamentos mais teóricos da Matemática, socorrendo-se, para tal, da Lógica Simbólica e da Teoria dos Conjuntos.

Para ultrapassar estas contingências, *Andrey Kolmogorov*, baseando-se nos resultados de *Emile Borel* sobre Teoria da Medida e dos Conjuntos, apresentou um sistema axiomático para a Teoria das Probabilidades, conseguindo a fundamentação Matemática e as regras essenciais para o trabalho com as Probabilidades. Nas palavras de Nogales (2008) "*No cabe duda de que es el trabajo de Kolmogorov en probabilidad el que ha conseguido modificar definitivamente la imagen que los matemáticos tenían del Cálculo de Probabilidades; las consecuencias de ese hecho son evidentes: un número creciente de matemáticos han ido sumando sus esfuerzos en la construcción del Cálculo de Probabilidades hasta el punto de que, hoy en día, es una de las ramas más interesantes, fértiles y elegantes de la matemática...".*

Segundo Oliveira e Barros (2007), o impacto da obra de *Kolmogorov* foi tanto que, desde logo, se tornou referência e formulação básica para a Teoria das Probabilidades e este "*significado matemático-axiomático es un significado estructural, que responde a una problemática de organización y estructuración de los restantes significados parciales de la probabilidad*" (Batanero, 2006). Deste modo, a Probabilidade formal constituiu-se como um conceito definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos daqueles axiomas.

Estes axiomas são:

DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DE KOLMOGOROV

Seja ε uma experiência aleatória e Ω o conjunto de resultados. Dizemos que P(.) é uma probabilidade se verificar os seguintes axiomas:

- Axioma 1 - $P(A) \geq 0$, para todo o $A \in \Omega$;
- Axioma 2 - $P(\Omega) = 1$;
- Axioma 3 - Se A e B forem acontecimentos incompatíveis, isto é, $A \cap B = \emptyset$, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Nota: no caso de um número infinito de acontecimentos o axioma 3 pode ser substituído por:

- Axioma 3'- Se A_1, A_2, A_3, … são acontecimentos incompatíveis dois a dois, isto é, $Ai \cap Aj = \emptyset$ se $i \neq j$, então

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Esta definição, e os seus respetivos axiomas, o que vem estipular é que:

- a Probabilidade é numero real não negativo;
- a probabilidade associada ao conjunto de resultados - Ω - é um (1), e;
- se pode calcular a probabilidade de um acontecimento composto por várias alternativas incompatíveis (pu mutuamente exclusivas) bastando para tal adicionar as probabilidades de cada um desses acontecimentos.

Com base nestes axiomas, podem-se deduzir, entre outros, os seguintes teoremas cuja utilização na resolução de problemas é recorrente:

- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$, qualquer que seja $\mathrm{A} \in \Omega$;

  (Pode-se calcular a probabilidade de um acontecimento à custa da probabilidade do acontecimento contrário)

- $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$, quaisquer que sejam $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \Omega$;

  (Generalização da probabilidade da reunião de dois acontecimentos)

- $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \geq \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

  (A probabilidade da reunião de dois acontecimentos é sempre superior ou igual à probabilidade da ocorrência simultânea desses acontecimentos)

Vejamos alguns exemplos de aplicação deste significado de Probabilidade.

EXEMPLO 9

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 30\%$;
- $P(A \cup B) = 70\%$;
- A e B são incompatíveis.

Qual é o valor de $P(B)$?

Item 1 do Exame Nacional de Matemática A de 2010

UMA POSSÍVEL RESOLUÇÃO:

Se A e B são incompatíveis, então a P(A∩B)=0. Atendendo a que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

então

$0,7 = 0,3 + P(B) - 0 \Leftrightarrow P(B) = 0,4 = 40\%$

EXEMPLO 10

2.

2.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Prove que: $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B)$

(P designa a probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A e $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B.)

Item 2.1 do Exame Nacional de Matemática A de 2008

UMA POSSÍVEL RESOLUÇÃO:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$$

$$= P(\overline{A}) + 1 - P(B) - [1 - P(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}})=$$

$$= P(\overline{A}) + 1 - P(B) - [1 - P(A \cup B)] =$$

$$= P(\overline{A}) + 1 - P(B) - 1 + P(A \cup B) =$$

$= P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B)$, como queríamos provar.

3.4. OS DIFERENTES CONCEITOS E O ENSINO-APRENDIZAGEM DAS PROBABILIDADES

Como já foi referido, e historicamente, a visão mais clássica, ou Laplaciana, dominou durante um largo período de tempo o ensino da Teoria da Probabilidade. Posteriormente, com a implementação da Matemática Moderna, veio-se introduzir uma conceção mais formal e axiomática desta área da Matemática. Todavia, com o crescente interesse e consciencialização da aplicabilidade deste conceito a inúmeras e diferentes áreas do saber, assistiu-se a uma inclusão da noção de Probabilidade como o limite da frequência relativa. Porém, existem

experiências aleatórias que, pelas suas especificidades, nunca mais, ou dificilmente, se repetirão. Nestas situações é conveniente interpretar a Probabilidade como manifestação do grau de convicção que cada individuo atribui à ocorrência dos acontecimentos, com base na experiência e informação anteriores

Os diferentes conceitos de Probabilidade evidenciam a natureza complexa deste conceito Matemático e manifestam que a abordagem pedagógica desta noção não se pode limitar a uma única perspetiva (Batanero, Henry e Parzysz, 2005), de tal modo que os alunos para alcançar um nível adequado de compreensão da Probabilidade é necessário que sejam capazes de relacionar as abordagens clássica, frequencista, subjetiva e axiomática (Sánchez e Valdez, 2013).

Numa visão mais didática, e segundo Batanero, Henry e Parzysz (2005), é desejável distinguir três diferentes fases no processo, em contexto de sala de aula, de modelação dos fenómenos aleatórios. Numa primeira fase, os alunos devem trabalhar ao nível do concreto, observando e tentando descrever, por palavras próprias, situações reais, o que normalmente implica alguma abstração e simplificação da realidade, tendo frequentemente por base modelos pré-construídos. A segunda fase consiste na formalização do modelo e na qual se estabelecem os pressupostos e hipóteses probabilísticas que permitem representar, à custa de um sistema simbólico, o modelo concreto. Na terceira e última fase, é aconselhável voltar às questões iniciais e averiguar se os resultados matemáticos obtidos traduzem a situação concreta proposta. Esta fase poderá ser considerada como uma validação do modelo considerado. Esquematicamente teremos,

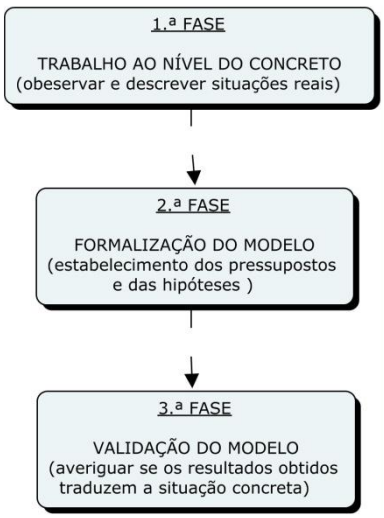


Figura 41 - Proposta didática Probabilidade em contexto de sala de aula

(Batanero, Henry e Parzysz, 2005)

Leo Breiman (citado por Martignon e Wassner, 2002) refere que "*Probability theory has a right and a left hand. On the right is the rigorous foundational work using the tools of measure theory. The left hand thinks "probabilistically", reduces problems to gambling situations, coin tossing, etc.",* ou seja, se por um lado a Probabilidade reduz-se a uma medida de *Kolmogorov*, por outro, ela conta o número de casos possíveis e favoráveis e, nestes casos, necessita de socorrer-se da definição Laplaciana.

Em resumo, no decorrer do desenvolvimento do conceito de Probabilidade, diferentes conceções foram-lhe sendo outorgados, justificados pela necessidade da resolução de situações práticas, em diferentes períodos da história, e do progresso de outros campos da Matemática, nos quais a Probabilidade encontrou os elementos imprescindíveis a um formalismo axiomático para a construção de um modelo Matemático. Contudo, para os estudantes puderem relacionar as diferentes conceções é necessário que tenham a possibilidade de as abordar pedagogicamente.

Como refere Batanero (2005) "(…) *los diferentes significados de la probabilidad también deberían incluirse progresivamente comenzado desde las ideas intuitivas de los alumnos sobre el azar y la probabilidad, ya que le comprensión es un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto*".

3.5. OS ELEMENTOS DO SIGNIFICADO DE PROBABILIDADE E DA LITERACIA PROBABILISTICA

Num artigo escrito por Carmen Batanero, publicado na revista Relime em 2005, intitulado "*Significados de la Probabilidade en la Educación Secundaria*", esta investigadora parte de um modelo teórico (Diáz Godino e Batanero, 1998) no qual estuda o significado dos objetos matemáticos e, para tal, considera cinco elementos diferenciados para caraterizar esse mesmo significado. O referido modelo parte da noção de situação-problema e conjetura que "*o objeto matemático emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas à la resolución de cierto campo o tipo de problemas matemáticos. El significado del objeto seria una entidad compuesta formada por el conjunto de prácticas operatorias y discursivas relacionadas con dicho campo de problemas. Para el caso de la probabilidad, diferenciaríamos entre el conjunto de prácticas ligadas a la resolución del campo de problemas correspondiente (estudio, análisis y predicción de fenómenos aleatorios), que*

englobaría todo lo que hacemos y decimos para resolver este tipo de problema, y el objeto matemático probabilidad, que ha emergido históricamente y sigue evolucionando como consecuencia de tales prácticas." (Batanero, 2005)

Neste modelo, efetua-se uma diferenciação entre o significado institucional e pessoal do objeto matemático. O primeiro destes significados diz respeito às práticas, relativas a um certo campo de problemas, que são comuns dentro de uma instituição ou de uma sala de aula, podendo para o mesmo objeto, dependendo da instituição e da complexidade de abordagem, haver diferentes versões. Todavia, para Díaz Godino e Batanero (1994) o conceito de instituição é muito amplo. Uma instituição particular é a Matemática, constituída pelos produtores do saber matemático. Um exemplo apontado como instituição, num sentido lato, são os livros de texto já que eles propõem situações/problemas matemáticos e descrevem práticas usando meios específicos da Matemática (González e Gusmán, 2013).

O significado pessoal é específico e está associado a um sujeito particular que pertence a essa instituição e, em particular, as práticas realizada pelo individuo no seu intento de resolver as situações/problemas (práticas pessoais).

Esquematicamente podemos sistematizar estes aspetos no seguinte esquema, contextualizado ao conceito de Probabilidade:

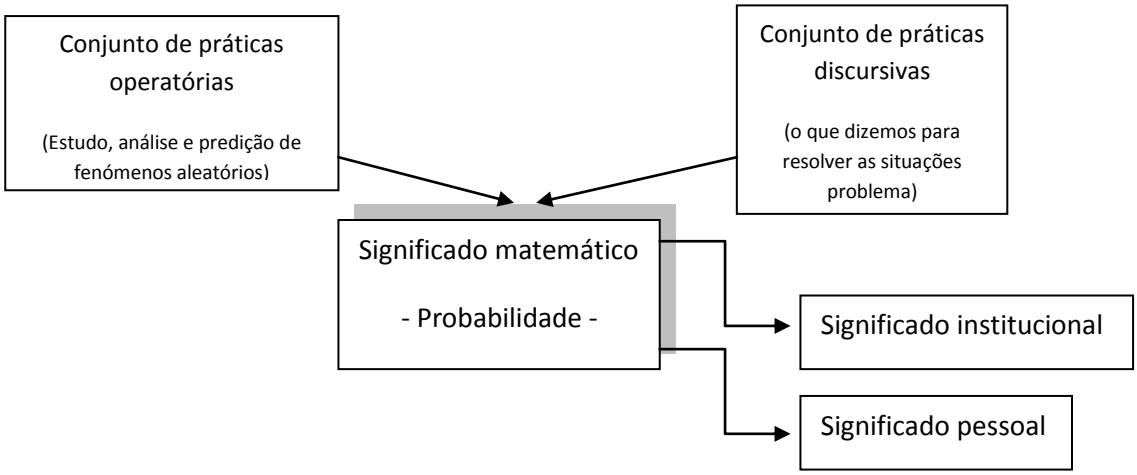


Figura 42 – Os diferentes significados matemáticos (Probabilidade)

Seguidamente, apresentaremos os componentes ou elementos constituintes desse significado, para a análise do processo de ensino-aprendizagem do conceito de Probabilidade.

Ainda, de acordo com Batanero (2005), estes elementos são os seguintes:

- ***O campo de problemas no qual emerge o objeto matemático***

  Historicamente, os objetos matemáticos emergiram para resolver problemas específicos que surgiam no quotidiano das pessoas. A solução encontrada inicialmente para o problema, pode ser generalizada a outros problemas análogos, isto é, a resolução frequentemente traz consigo outras entidades matemáticas, que posteriormente podem ser tema de estudo e, inclusive, serem introduzidas no ensino. No caso da Probabilidade é unanimemente reconhecido que os jogos, e em particular os jogos de azar, desempenharam um papel decisivo na evolução desta Teoria.

- ***Elementos linguísticos***

  No momento da resolução de um problema é necessário o recurso a objetos e sistemas de representação matemáticos que facilitem a obtenção da solução. Aqui podem ser incluídos os símbolos, as palavras, os gráficos, as operações e os conceitos associados. No contexto da Teoria da Probabilidade é frequente o recurso a termos como aleatório, acaso, sorte/azar, letras, fração, quociente, chance, representação algébrica e gráficos de funções, tabelas de frequência e de dupla entrada.

- ***Procedimentos e Algoritmos***

  Os primeiros procedimentos utilizados para a resolução de um problema, no campo da Teoria da Probabilidade, apelavam ao Cálculo Combinatório, à contagem do número de casos possíveis e favoráveis e, consequentemente, à determinação da Probabilidade mediante o recurso a um quociente. Posteriormente, e face à necessidade de introduzir diferentes aspetos conceptuais nesta noção, surgiu a necessidade de recolher dados e estimar a Probabilidade através da frequência relativa. Em paralelo definem-se as funções de probabilidade e, com o advento das tecnologias da informação e comunicação, aparecem programas informáticos que "oferecem" valores das probabilidades.

- ***As definições e propriedades dos objetos e as suas relações com outros objetos matemáticos***

  É frequente o recurso a entidades matemáticas que não integrando diretamente o campo de estudo em análise são utilizados para promover avanços significativos no processo matemático em estudo, mas os quais, juntamente com as suas propriedades, são utilizados para resolver problemas. Assim, podemos referir o facto de a probabilidade ser sempre positiva, as regras da soma e do produto, o teorema da

probabilidade total e de Bayes, assim como as suas relações com os conceitos de esperança matemática, distribuição e convergência.

- ***Os argumentos e demonstrações das propriedades***

  Todas as ações e objetos que formam parte da atividade matemática encontram-se ligadas entre si mediante argumentos e raciocínios que são necessários para justificar e fortalecer a validade da solução de um problema ou propriedade e, inclusive, para comunicá-la a outras pessoas.

Esta diferenciação dos elementos do significado do objeto matemático, evidencia, em geral, a complexidade concetual das noções Matemáticas e do conceito de Probabilidade, em particular, mas que no entanto são importantes ter em conta no momento do seu ensino e aprendizagem.

Importa também perceber se estes elementos do significado de Probabilidade, ilustrados por Batanero (2005), vão de encontro ao que se deseja ser as competências a desenvolver nos atuais estudantes em relação à noção de Probabilidade, com vista a que a utilizem para fazer julgamentos bem fundamentados em face das necessidades da sua vida.

Gal (2005) reflete sobre o que deve ser entendido por Literacia Probabilística e alega que esta designação sugere, para além de crenças, atitudes, hábitos mentais e uma perspetiva crítica, um conjunto amplo de conhecimento factual e certas aptidões formais e informais. Nesta lógica sugere cinco aspetos importantes que se devem ter em consideração e relacionados com o conhecimento de Probabilidades, alertando, todavia, que devem ser encarados de um modo relativo, já que "*sufficient level of knowledge or understanding in the area of probability cannot be defined in absolute terms, and different cultures and life contexts pose diverse and changing demands in this regard"* (Gal, 2005).

Segundo este investigador, estes elementos do conhecimento da Literacia Probabilística são:

- ***Grandes ideias: Variabilidade, Aleatoriedade, Independência, Previsibilidade e Incerteza.***

  É importante que os estudantes demonstrem confiança e familiaridade com várias ideias fundamentais - *grandes ideias* – especialmente o acaso, a aleatoriedade, a independência e a variabilidade, já que servem de alicerce aos alunos para compreender, representar e interpretar informação de natureza probabilística.

- ***Descobrir probabilidades: Modos de encontrar ou estimar a probabilidade de um acontecimento.***

  Os alunos têm que estar familiarizados com os modos de determinar a Probabilidade de acontecimentos, com o propósito de compreender as afirmações probabilísticas feitas por outros ou para gerar estimativas sobre a Probabilidade de acontecimentos e comunicar com base nelas. É aqui que os diferentes significados de Probabilidade – Clássico, Geométrico, Frequencista, Subjetivo e Axiomático - devem ser trabalhados.

- ***Linguagem: Os termos e métodos utilizados para comunicar sobre a Probabilidade.***

  Os estudantes devem compreender a linguagem probabilística, ou seja, as diversas formas empregadas para representar e comunicar sobre probabilidades, sejam elas de cariz mais abstrato ou concreto.

- ***Contexto: Compreender o papel e as implicações das questões e mensagens probabilísticas em vários contextos e no discurso pessoal e público.***

  É essencial o reconhecimento do papel das probabilidades nos processos de comunicações no mundo. Isto é, por um lado, identificar o impacto do acaso e da aleatoriedade em diferentes situações e processos, por outro, averiguar as áreas comuns ou situações onde a noção de probabilidade pode surgir na vida de uma pessoa.

- ***Questões críticas: questões para refletir quando se lida com probabilidades*.**

  Aqui é sublinhada a importância de ser capaz de se fazerem críticas e colocar questões sobre informação quantitativa relacionada com a Probabilidade.

A comparação entre os elementos do significado de Probabilidade, propostos por Batanero (2005), e os elementos da Literacia Probabilística, propostos por Gal (2005), permite-nos, na nossa opinião, identificar denominadores comuns entre estas duas abordagens, as quais se conjugam e complementam.

A figura seguinte pretende evidenciar essas analogias.

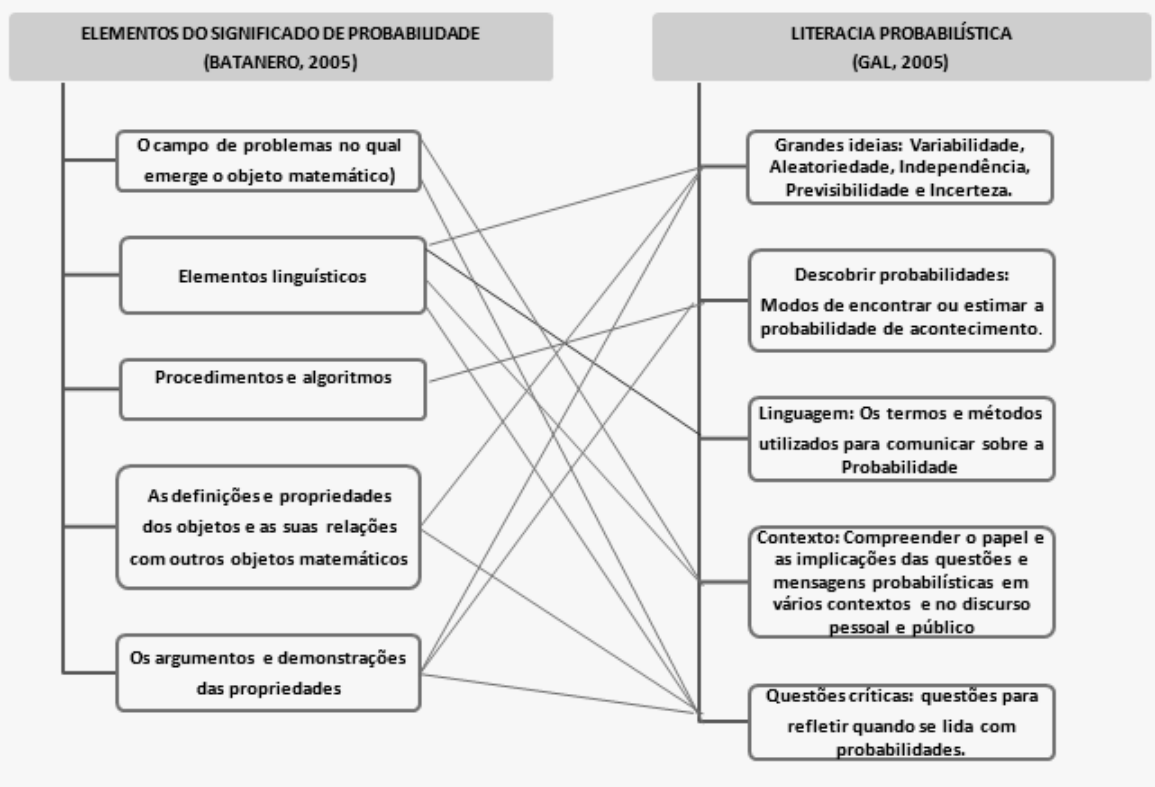


Figura 43 - Elementos do significado de Probabilidade (Batanero, 2005) e da Literacia Probabilística (Gal, 2005)

Como se pode constatar na Figura 43 os elementos do significado de Probabilidade surgem intimamente relacionados com os aspetos da Literacia Probabilística, e vice-versa.

3.6. INVESTIGAÇÕES SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE

A investigação no desenvolvimento do pensamento probabilístico e o seu contributo ao Ensino e à Aprendizagem da Probabilidade, tem sofrido um incremento significativo nos últimos 70 anos, justificado em grande parte pelo desenvolvimento teórico que esta área sofreu no último século e pelo reconhecimento do seu apoio ao progresso de outras ciências. Tornou-se assim clara a importância desta temática nas diferentes etapas de escolarização e, consequentemente, o aparecimento de várias investigações de índole educativa sobre as Probabilidade.

De acordo com Jones e Thornton (2005) os estudos sobre a Probabilidade podem ser categorizados, tomando como referência uma perspetiva histórica dos trabalhos de investigação, de acordo com três períodos cronológicos:

- ***O período Piagetiano;***
- ***O período pós-Piagetiano;***
- ***O período contemporâneo***.

3.6.1. O período Piagetiano

O primeiro destes períodos, que podemos situá-lo entre 1950 e 1960, foi dominado essencialmente pelos trabalhos de Piaget e Inhelder. Apesar do estudo destes investigadores não estar diretamente relacionado com o Ensino e a Aprendizagem da Probabilidade, a metodologia de pesquisa, os objetivos e os resultados encontrados constituíram referenciais para as investigações produzidas posteriormente.

Para Piaget, o conceito de Probabilidade, tal como acontece com outros conceitos por ele estudados (e.g. número), desenvolve-se segundo uma sequência hierárquica de etapas.

Analisando o desenvolvimento das probabilidades em estreita ligação com a ideia do acaso e das operações dedutivas, Piaget e Inhelder (1975), com base em entrevistas realizadas a alunos com idades compreendidas entre os 4 e os 15 anos, estabeleceram três etapas fundamentais: a etapa I, que ocorre antes dos 7-8 anos; a etapa II, que ocorre entre os 7-8 anos e os 11-12 anos; e a etapa III, com início a partir dos 11-12 anos e completando-se por volta dos 14-15 anos.

De acordo com estes autores, o conceito de Probabilidade, enquanto conjunto formal de ideias, desenvolve-se apenas durante a fase operacional formal, a qual ocorre aproximadamente pelos 12 anos de idade. Nesta idade, as crianças podem raciocinar probabilisticamente sobre uma variedade de instrumentos aleatórios. Para demonstrar que as crianças têm uma compreensão intuitiva da "Lei dos Grandes Números" e que o pensamento intuitivo sobre eventos ocasionais começa mesmo antes de serem ensinados, estes investigadores usaram um jogo com ponteiros, os quais foram colados sobre cartas divididas em vários setores e, em seguida, foram girados os ponteiros. Eles mostraram que as crianças podiam prever, a longo prazo, quais as regiões mais e menos prováveis da carta em que o ponteiro cairia.

Ainda neste período, e apesar do apoio limitado dado pela investigação a esta temática, houve algumas tentativas sérias para introduzir a Probabilidade no currículo escolar de uma forma mais generalizada (Jones e Thornton, 2005), em particular nos Estados Unidos da América e na Europa.

3.6.2 O período pós-Piagetiano

O período pós-Piagetiano foi profícuo na investigação sobre o pensamento probabilístico de crianças e adultos. Muito deste trabalho assentou na pesquisa das conceções dos indivíduos sobre a Probabilidade e, em particular, a importância do ensino e a sua influência no conceito de Probabilidade, em jovens.

Os trabalhos realizados por Efraim Fischbein constituíram um marco nesta matéria, os quais procuram "*demostrar que los niños tienen ideas correctas parcialmente formadas sobre los conceptos probabilísticos y analizó el efecto de la instrucción para la mejora de estas intuiciones*" (Batanero, 2013). Assim, para este autor, o modo como os jovens se comportam em ambiente educacional constitui um marco importante de estudo.

Fischbein (1975) defende que a *intuição* é uma aquisição cognitiva ou crença que é espontânea, autoevidente para o crente e adaptável e, por conseguinte, pode ser influenciada pela instrução sistemática.

Esta posição teórica permitiu-lhe efetuar uma distinção entre *intuições primárias e intuições secundárias.* As *intuições primárias* são convicções cognitivas derivadas da experiência pessoal e construídas sem a necessidade de uma instrução sistemática. As *intuições secundárias* são convicções cognitivas reestruturadas e que são adquiridas através da formação e geralmente consolidadas no contexto de uma tarefa específica.

Na perspetiva do Ensino e Aprendizagem o trabalho de Fischbein é particularmente interessante, em virtude de que as investigações levadas a cabo sobre as intuições terem sido realizadas com jovens de diferentes idades em contexto de instrução.

Como resultado desta pesquisa, Fischbein produziu uma caracterização do desenvolvimento das *intuições* probabilísticas dos alunos. Esta caracterização engloba três etapas de desenvolvimento: *pré-escolar, operacional concreto e operacional formal*. Para cada uma destas fases, ele organizou descrições do tipo de *intuições* probabilísticas que lhe estão associadas - a intuição do acaso/intuição da relação frequência relativa, a estimativa de probabilidades, os efeitos da instrução e as operações de análise combinatória.

Um resumo destes indicadores pode ser observado na Tabela 18.

Tabela 18 - Resumo das características das Etapas de Desenvolvimento de Fischbein (adaptado de Jones e Thornton, 2005)

Etapa	Intuição do acaso/frequência relativa	Estimação de probabilidades	Efeitos da instrução	Operações combinatórias
Pré-escolar (< 7 anos)	- algum sentido de imprevisibilidade; - adaptará previsões em resposta aos resultados dos ensaios.	- algumas vezes baseiam os raciocínios probabilísticos na estimação de razões.	- instrução tem efeito mínimo.	- alguma facilidade com combinações usando materiais concretos.
Operacional concreto (7-11 anos)	- o acaso começa a apresentar uma estrutura conceptual organizada; - formação de equívocos.	- faz comparações intuitivas de probabilidades em situações básicas.	- sensível à instrução em estratégias de comparação; - pensamento proporcional não completamente adquirido.	- estabelece procedimentos simples através de tentativa e erro.
Operacional formal (>11-12)	- desenvolvimento de raciocínios mais abstratos que conduzem a um conceito mais completo de probabilidade; - ainda pode procurar dependências causais; - sensível ao reforço da predição.	- faz comparações usando probabilidades e estas tornam-se mais sofisticadas.	- recetivo à instrução que leva à construção de probabilidades.	- procedimentos sistemáticos ainda não totalmente desenvolvidos, mas sensíveis à instrução.

Na sequência do trabalho de Fischbein, dois outros investigadores, Kahneman e Tversky (1972) colocam a enfase da sua pesquisa nas *heurísticas* e nos *pré-conceitos*. De acordo com estes autores as heurísticas são estratégias estatisticamente simples que as pessoas utilizam para realizar estimativas de probabilidades ou julgamentos sobre a incerteza. Todavia estas estratégias, que podem ser extremamente úteis nestes juízos, podem também criar equívocos e conceitos errados. As três heurísticas definidas por estes autores são: a *representatividade* (avaliar a probabilidade pelo grau com que um acontecimento A pode influenciar a ocorrência de um acontecimento B); a *disponibilidade* (as pessoas que usam esta heurística utilizam-na para avaliar a probabilidade de um acontecimento de acordo com a facilidade com que eles se lembram das ocorrências anteriores desse mesmo acontecimento); e o *ajuste e ancoragem* (as pessoas que utilizam esta heurística fazem estimativas de probabilidade inadequadas a partir de um valor inicial que foi ajustado com base na informação dada no problema). Para além da problemática das heurísticas estes

investigadores analisaram outras importantes ideias ao nível do conceito clássico, frequencista e subjetivo de Probabilidade.

Neste período também houve investigação para analisar a influência da instrução sobre a utilização das heurísticas pelos alunos ao nível das probabilidades.

Shaughnessy (1977) conduziu um programa de 12 semanas de instrução intensiva, com estudantes universitários, na tentativa de traçar o seu perfil na utilização de heurísticas.

Vários estudos foram desenvolvidos por educadores matemáticos com indivíduos de diferentes idades e a frequentarem diferentes níveis de ensino. Nestes trabalhos, e na sua globalidade, procuravam observar o pensamento dos alunos sobre vários conceitos associados à Probabilidade. De entre estes trabalhos permitimo-nos destacar o realizado por Steinbring (1991) no qual, baseando-se numa análise epistemológica do estocástico, analisa a Probabilidade tanto do ponto de vista empírico (frequencista) como teórico (clássico) e enfatiza a relação dual entre probabilidade e possibilidade.

O trabalho desenvolvido nesta época permitiu criar os fundamentos para toda a investigação produzida nas últimas décadas ou, como refere Jones e Thornton (2005), *"Moreover, the research of this second phase provided the infrastructure for ongoing research that was needed in the next phase to support new challenges in teaching and learning".*

3.6.3. O período contemporâneo

Nas últimas duas décadas e meia assistiu-se, na maior parte dos países, a reformas significativas nos sistemas de ensino e, nesta lógica, a alterações ao nível dos respetivos currículos e dos conteúdos programáticos. Entre estes conteúdos a emergência do Ensino e da Aprendizagem das Probabilidades e da Estatística, em diferentes fases da formação dos estudantes, tem assumido um papel de destaque, como refere Romero (2009) "*Las actuales tendencias de la enseñanza de la estocástica pasa por la introducción de esta materia desde los niveles más elementales, a fin de familiarizar al alumno con la percepción de esta parte de la matemática desde su início educativo*".

Algumas associações profissionais, destacam mesmo a importância desta temática nos currículos nacionais. *The National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), num relatório elaborado em 2000, explicita cinco áreas a serem contempladas nos programas de Matemática, uma das quais é a Análise de Dados e a Probabilidade. Em Portugal, a Associação

de Professores de Matemática (APM), num trabalho publicado em 1998 refere que *"(…) devem ser reforçadas componentes que evidenciem a importância de temas como a Geometria e a Estatística na aprendizagem dos alunos, destacando o seu papel formativo como instrumento na interpretação e intervenção sobre a realidade".*

O período contemporâneo tem sido, na nossa opinião, fértil ao nível da investigação nesta área, onde podemos encontrar pesquisas sobre o Currículo da Probabilidade e os Recursos Educativos utilizados, sobre a Aprendizagem e o Ensino da Probabilidade e respetivos Ambientes Educacionais e, ainda, a Formação de Professores que lecionam este tema.

No Ensino-Aprendizagem da Matemática podemos falar de um triângulo (humano-programático) cujos vértices, de acordo com Houssaye (2000), são formados pela Matemática, pelo aluno e pelo professor e as arestas representam as possíveis relações entre estes elementos, isto é, o ensinar, o aprender e o formar.

A revisão bibliográfica realizada procurou enquadrar-se nesta lógica organizacional (Figura 44). Assim, neste ponto, apresentaremos trabalhos e investigações sobre:

- Currículo das Probabilidades;
- Recursos no Ensino-Aprendizagem das Probabilidades;
- Formação de Professores na área das Probabilidades, e;
- Aprendizagem do aluno sobre as Probabilidades.

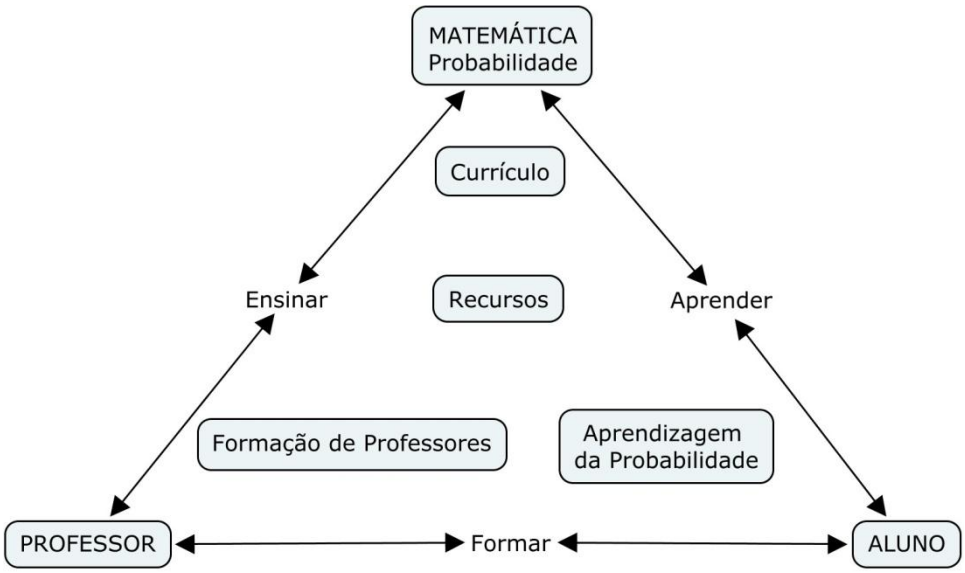


Figura 44 – A revisão bibliográfica no contexto dos elementos do triângulo pedagógico (baseado em Houssaye, 2000)

3.6.3.1. Trabalhos sobre o currículo das Probabilidades

No que concerne aos estudos sobre o currículo, os investigadores têm assumido que a temática das Probabilidades constitui um tipo diferente de conhecimento matemático, já que em torno desta matéria falamos de experiências e acontecimentos aleatórios, risco e incerteza que surgem associados às mais variadas situações do quotidiano, numa lógica diferente do sim/não tradicional. Por este facto necessitam de desenhos e de sequências de ensino específicas, destinadas a introduzir os conceitos e procedimentos probabilísticos elementares à sua aprendizagem.

Alguns destes estudos têm desenvolvido a ideia da literacia probabilística para todos os cidadãos. Esta necessidade, para além de impor a inclusão e desenvolvimento de novas técnicas pedagógicas e conceitos probabilísticos nos currículos de diferentes ciclos de estudo, tem vindo a detetar métodos, conceitos e noções fundamentais, nesta área, que devem ser estudados e a necessidade da sua inclusão desde os primeiros anos de formação. Nesta área de investigação têm também proliferado os trabalhos comparativos entre currículos de Probabilidades de diferentes países.

A seguinte tabela sintetiza os trabalhos revistos.

Tabela 19- Trabalhos de investigação, sobre o currículo das Probabilidades

Autores	Data	Temática Geral
Keeler e Steinhorst	2001	Aprendizagem da Probabilidade baseada em atividades.
Batanero	2004	As ideias estocásticas fundamentais e o currículo de Probabilidades.
Batanero	2005	Os elementos do significado de Probabilidade.
Gal	2005	A literacia probabilística.
Fuentes e Aranzabal	2009	Proposta didática para o ensino da Probabilidade em alunos do Ensino Superior.
Caldeira	2009	Análise dos programas de Matemática A e B do Ensino Secundário português.
Rodrigues	2011	As probabilidades no Currículo da Formação de Professores.
HodnikČadež e Škrbec	2011	A compreensão dos conceitos probabilísticos na Educação Pré-escolar e no 1.º ciclo.

Autores	Data	Temática Geral
Gómez e Contreras	2013	Significados da Probabilidade no currículo espanhol para a Educação Primária.
Millán	2013	Raciocínio combinatório no currículo espanhol
Sánchez e Cezón	2013	Os gráficos nas diretrizes curriculares do Ensino Primário em Espanha e na Colômbia.
Merino e Reyes	2013	Comparação entre os conteúdos do currículo chileno e espanhol da temática da Estatística e da Probabilidade.
Ruiz	2013	Estudo comparativo dos currículos espanhol e americana da temática da Estatística e da Probabilidade.

Keeler e Steinhorst (2001), tendo como premissa que a temática da Probabilidade num curso inicial de Estatística é difícil de ensinar, já que, "*não há muito tempo, os conceitos e os procedimentos são difíceis, e os alunos não veem relevância na sua aprendizagem*", sugerem utilizar uma abordagem baseada na investigação e no trabalho formal sobre os problemas e que necessariamente devem incluir as respostas intuitivas dos estudantes. Acrescentam, ainda, que os alunos devem ter um papel ativo ao invés de passivo, que os projetos devem ir de encontro aos interesses manifestados pelos discentes e a metodologia de projeto deve constituir uma proposta pedagógica a ser privilegiada nos currículos.

Batanero (2004) no texto "*Ideas Estocásticas Fundamentales ¿Qué Contenidos se Debe Enseñar en la Clase de Probabilidad?*" procura sistematizar os possíveis conteúdos a incluir num Curso de Probabilidades, dirigido a estudantes de Educação Primária e Secundária. Considera que as noções estocásticas fundamentais a considerar são aquelas que tiveram um papel relevante na história das probabilidades, as que surgem implicitamente nas mais variadas situações aleatórias e aquelas que são contraintuitivas. Estas ideias podem ser introduzidas gradualmente e com crescentes graus de formalização ao longo da formação e devem constituir um referencial para a elaboração do currículo da Probabilidade.

Como já referimos neste Capítulo, Batanero (2005), partindo de um modelo teórico (Díaz Godino e Batanero, 1998) no qual estuda o significado dos objetos matemáticos, considera cinco elementos diferenciados para caraterizar esse mesmo significado: estes elementos são: *O campo de problemas no qual emerge o objeto matemático*, os *elementos linguísticos*, os *procedimentos e algoritmos*, *as definições e propriedades dos objetos e as suas relações com outros objetos matemáticos* e *os argumentos e demonstrações das propriedades*. Esta diferenciação dos elementos do significado do objeto matemático, evidencia a complexidade conceptual dos conceitos matemáticos, em geral, e, em particular, da noção de

Probabilidade, mas que no entanto são relevantes ter em consideração no momento do seu ensino e aprendizagem.

Gal (2005) reflete sobre o que deve ser entendido por Literacia Probabilística e alega que esta designação sugere, para além de crenças, atitudes, hábitos mentais e uma perspetiva crítica, um conjunto amplo de conhecimentos factuais e certas aptidões formais e informais. Nesta lógica sugere cinco aspetos importantes que se devem ter em consideração e intimamente relacionados com o conhecimento de Probabilidades, alertando, todavia, que devem ser encarados de um modo relativo. *Segundo este investigador,* estes elementos de conhecimento são: as *grandes ideias, descobrir probabilidades,* a *linguagem, o contexto* e as *questões críticas.*

Fuentes e Aranzabal (2009) apresentam uma proposta didática para o ensino da Probabilidade dirigida a alunos do Ensino Superior. Para tal descrevem o desenho, a implementação e a avaliação de uma sequência de ensino destinada a introduzir os conceitos e os procedimentos probabilísticos elementares. As conclusões obtidas evidenciam que esta proposta de sequência formativa pode proporcionar aos estudantes uma maior capacidade de raciocínio probabilístico. Na Figura 45 mostra-se esta sequência formativa, que reproduzimos dos seus autores.

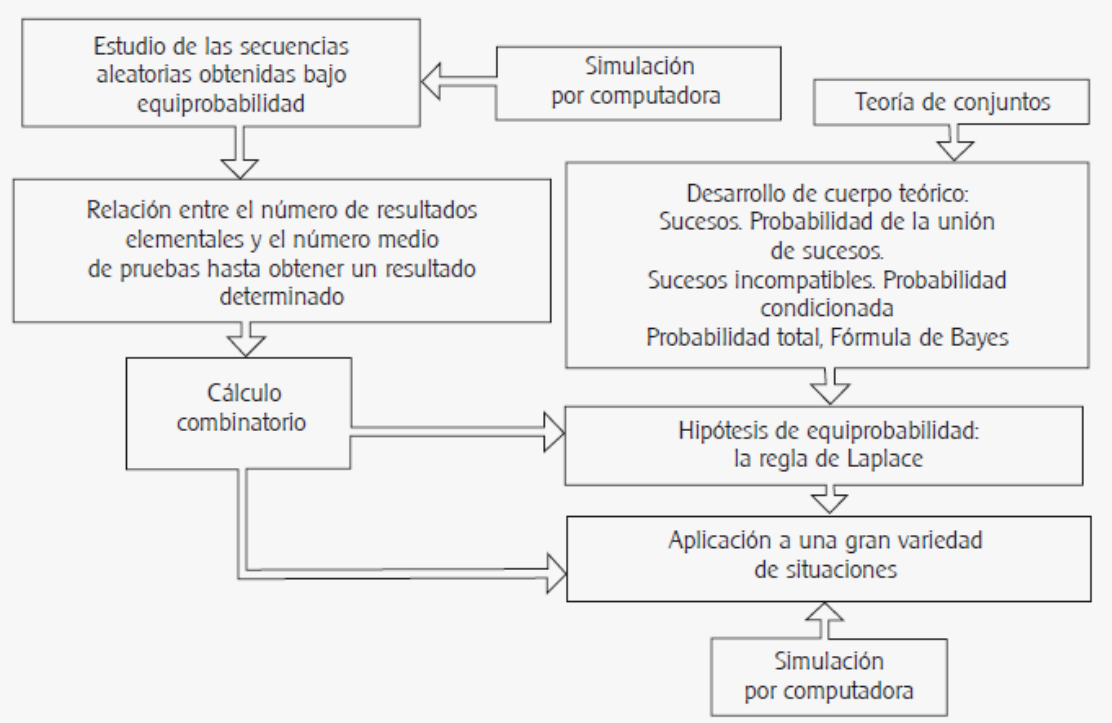


Figura 45 – Conteúdos e sequência para a Unidade Probabilidade

(Fuentes e Aranzabal, 2009)

Caldeira (2009), na sua dissertação de mestrado em Probabilidades e Estatística, analisou as unidades de Estatística, de Probabilidades e Combinatória e de Modelos de Probabilidade nos programas de Matemática A e B do Ensino Secundário português. As conclusões apontaram para a necessidade de uma revisão das temáticas de Estatística e Probabilidades nestes programas do Ensino Secundário de Portugal.

Na sua tese, apresentada no Curso de Pós-Graduação em Educação, intitulada "*A probabilidade como componente curricular na formação Matemática inicial de professores polivalentes",* Rodrigues (2011) desenvolve uma proposta cujo objetivo é o de indicar os conhecimentos necessários que devem integrar um programa de ensino das noções de Probabilidade na formação Matemática inicial de professores polivalentes de cursos de Pedagogia. A proposta sugerida pauta-se por aspetos sociológicos, filosóficos, relativos à cultura Matemática escolar, ao processo de ensino-aprendizagem e à Didática da Matemática.

Em 2011, HodnikČadež e Škrbec, reconhecendo o facto de não ser consensual, entre os investigadores, a idade em que as crianças são capazes de lidar com determinados conteúdos de Probabilidade, estabelecem como objetivo no seu estudo, realizado na Eslovénia, a identificação do momento em que os alunos são capazes de diferenciar entre acontecimentos certos, possíveis, impossíveis e prever a Probabilidade de vários acontecimentos. Os resultados obtidos estabeleceram que as crianças foram capazes de efetuar esta diferenciação antes mesmo dos 8 anos de idade. A Figura seguinte, retirada do original, mostra o desempenho médio, por idades, na tarefa de resolver o Teste de Conhecimentos.

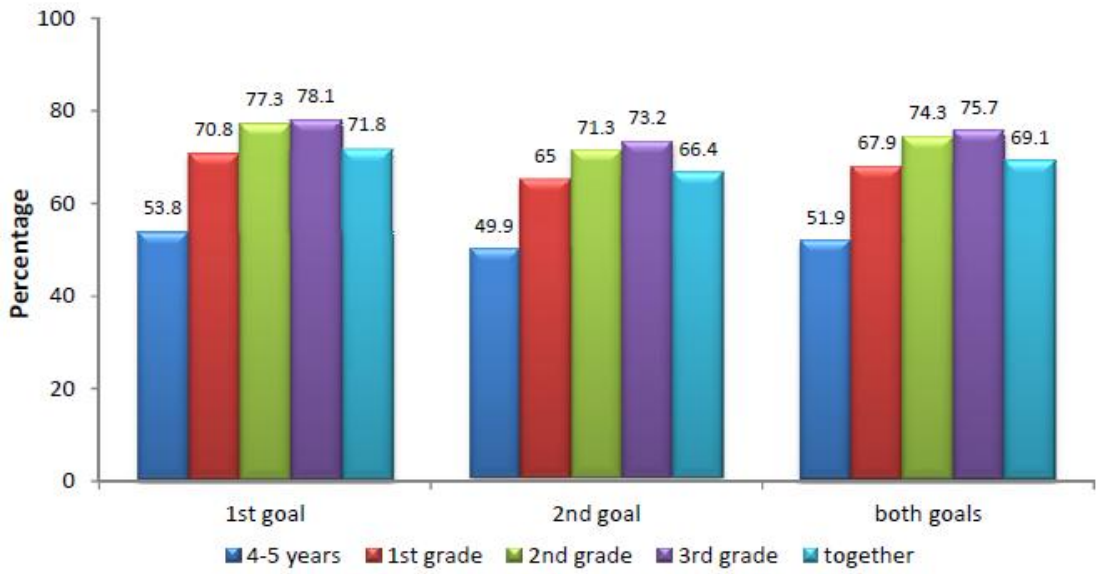


Figura 46 - O desempenho médio na tarefa de resolver o Teste de Conhecimentos, no que diz respeito aos objetivos (HodnikČadež e Škrbec, 2011)

Mais recentemente nas *I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria,* Gómez e Contreras (2013), apresentam um trabalho no qual analisam, com base em algumas ferramentas ontosemióticas, os significados sugeridos pelas diretrizes curriculares espanholas para o Ensino Primário, com a intenção de orientar os professores responsáveis pela lecionação neste nível de ensino. A partir desta abordagem, identifica-se, no currículo, os objetos primários ligados a cada significado o que permitiu estabelecer uma referência para a prática destes docentes. Ao nível de conclusões podemos citar que; o nível de complexidade dos conceitos aumenta ao progredir-se nos vários ciclos sem alcançar uma formalização ou definição; observou-se que as orientações curriculares incluem temáticas associadas ao significado intuitivo de Probabilidade (estudantes com 6 a 7 anos) e temáticas que permitem a conexão da Estatística ao significado subjetivo e frequencista de Probabilidade (alunos com 8 e 9 anos) e, ainda, temáticas que formalizam o significado clássico e frequencista (discentes com 10 e 11 anos). O currículo adiciona conteúdos ao significado clássico e amplia os contextos de aplicação, fazendo ênfase a exemplos ligados ao quotidiano da criança e aos jogos de azar, como fonte para os problemas.

Ainda nas mesmas Jornadas Millán (2013), expõe as principais ideias relacionadas com a importância do Ensino e Aprendizagem da Combinatória que têm sido objeto de pesquisa e trabalho realizado na Universidade de Granada e o estado atual do currículo espanhol neste campo. Explicitamente, o autor define que a intenção desta comunicação é de mostrar algumas das ideias que justificam a necessidade da presença da Análise Combinatória em sala de aula e analisa as diretrizes estabelecidas pelo currículo espanhol na Educação Primária, Secundaria e *Bachillerato*. Concluiu-se, no entanto, que o currículo espanhol não se refere explicitamente a esta vertente Matemática, sendo contudo necessários alguns conceitos desta área para calcular probabilidades.

Sánchez e Cezón (2013), na comunicação que apresentaram também neste evento, estabelecem como objetivo principal a análise do currículo oficial colombiano e espanhol no que diz respeito à importância atribuída ao estudo dos gráficos no Ensino Primário, de modo a identificar semelhanças e diferenças significativas. Destaca-se, como conclusão, que as diretrizes curriculares de ambos os países recomendam o trabalho com gráficos desde os primeiros anos e que as atividades a privilegiar devem conter relações entre a construção e a interpretação dos mesmos, aspeto que, segundo estes autores, é essencial para a compreensão gráfica.

Ainda nesta linha de investigação, tanto Merino e Reyes (2013) como Ruiz (2013), efetuam um estudo comparativo dos conteúdos programáticos de Estatística e Probabilidade

em diferentes países. Os primeiros autores focalizam-se nas diretrizes curriculares chilenas e espanholas ("*Comparación entre los contenidos del currículo chileno y español en el área de estadística y probabilidade*") e o segundo trabalho entre as orientações espanholas e americanas ("*Estudio comparativo de los currículos de probabilidad y estadística español y americano*"). Em ambos os trabalhos, o objetivo pode ser considerado semelhante, já que em ambos os textos pretende-se efetuar uma comparação das capacidades estabelecidas pelos documentos oficiais para as Probabilidades e Estatística. Todavia em Merino e Reyes (2013) a investigação centra-se ao nível da Educação Primária, enquanto Ruiz (2013) alarga o seu trabalho às escolas em que se leciona o Ensino Secundário.

3.6.3.2. Os recursos didáticos e a Probabilidade

Os recursos didáticos, como instrumentos pedagógicos utilizadas pelo professor para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem, permitem despertar e estimular o estudante de modo que este desenvolva a criatividade, tornando-se um participante ativo das suas construções cognitivas. Os recursos didáticos a utilizar no processo de ensino devem ser os mais diversificados possíveis e, sempre que possível, acessíveis aos discentes.

De entre estes recursos didáticos os manuais escolares, intimamente ligados ao currículo, merecem algum destaque, já que se assumem como uma das ferramentas mais utilizadas por estudantes e professores, dentro e fora da sala de aula e, até mesmo, pelos pais e encarregados de educação, como se pode constatar no estudo realizado em 2009, promovido pelo Observatório de Recursos Educativos (ORE, 2009), no qual se concluiu que "*O manual escolar é o recurso educativo mais mobilizado pelos encarregados de educação quando querem auxiliar os seus educandos nos estudos. É não só o material pedagógico a que os pais mais recorrem para ajudarem os seus educandos nas tarefas escolares, mas também, para este mesmo efeito, o recurso educativo que aqueles menos consideram quando têm de se referir ao que menos utilizam*".

Alguns dos trabalhos de investigação sobre os manuais escolares têm analisado as sequências didáticas, a importância da linguagem probabilística e do respetivo conceito, para além de noções sobre estatística.

Neste mundo tecnológico onde imperam os recursos informáticos, exige-se aos professores a utilização didática de novas e diferentes ferramentas pedagógicas, como auxiliares da sua ação educativa. Assim, um outro auxiliar educativo que tem sido objeto de

investigações no âmbito da Probabilidade é a utilização de ferramentas tecnológicas. Consideramos que, de um modo geral, estas facilitam e ampliam a exploração, de uma forma dinâmica, de conceitos e processos probabilísticos que favorecem a construção, por parte dos estudantes, dos diferentes significados matemáticos.

Na Tabela seguinte apresentam-se os trabalhos consultados.

Tabela 20 - Trabalhos de investigação, sobre recursos didáticos para as Probabilidades

Autores	Data	Temática Geral
Ortiz, Batanero e Serrano	2001	A linguagem probabilística nos manuais escolares.
Cobo e Batanero	2004	Significado da média nos livros de texto do Ensino Secundário.
Coutinho	2005	Simulação de situações aleatórias no contexto da Probabilidade Geométrica.
Azcárate, Cardeñoso e Serradó	2006	Caracterização da noção de Probabilidade nos livros de texto da ESO.
Azcárate e Serradó	2006	Tendências didáticas dos livros de texto de matemática da ESO.
Cantero	2013	Análise da Probabilidade Condicionada nos livros de texto do 2.º de Secundária.
González e Guzmán	2013	O desenvolvimento teórico do Cálculo Combinatório em alguns livros de texto de Matemática.
Gea *et al*.	2013	A organização dos dados bidimensionais nos livros de texto *Bachillerato*.
Mercado	2013	Exploração de conceitos probabilísticos com o Geogebra.
Fernandes *et al*.	2013	A folha de cálculo para a construção de gráficos e tabelas estatísticas.
Fernandes e Ponte	2013	O uso de simulações para desenvolver a noção de Probabilidade.
Teodoro, Lopes e Mourão	s.d.	A simulação computacional no ensino da conceção frequencista de Probabilidade.
Alexander e Bueno	2013	As técnicas de Monte Carlo para o ensino da Estatística.

Em 2001, Ortiz, Batanero e Serrano, refletem sobre a linguagem probabilística utilizada nos livros de texto de *Bachillerato*, realizando um estudo empírico dos termos e expressões presentes neste recurso didático. Ressaltam importância dos autores dos manuais escolares enquanto responsáveis pela definição de um novo nível de transposição didática de uma temática, ao concretizar os desenhos curriculares.

Cobo e Batanero (2004), desenharam uma investigação sobre o significado da média patente em manuais escolares. Para tal utilizam uma amostra de 22 livros texto da Educação Secundária e sobre os quais estudam os problemas propostos, os algoritmos de cálculo, as definições, as propriedades, as representações e os argumentos utilizados. Conclui-se sobre a existência de diferentes significados para a média, assim como sobre a inexistência, em alguns manuais, de elementos relevantes deste significado.

"La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO" é um artigo da autoria de Azcárate, Serradó e Cardeñoso, publicado em 2006 e no qual se caracteriza a noção de Probabilidade nos manuais escolares do Ensino Secundário Obrigatório (ESO). A pesquisa efetuada baseou-se numa análise de conteúdo que incidiu sobre vinte livros de diferentes editoras. Os resultados permitiram analisar e caracterizar o modo como é apresentada a noção de Probabilidade e estabelecem as tendências e os perfis destes recursos didáticos.

Na mesma linha de pensamento, e no mesmo ano, Azcárate e Serradó (2006) escrevem um artigo sobre os diferentes elementos que caracterizam cada uma das partes da unidade didática relativa ao tratamento do azar nos livros de texto de Matemática da ESO. A caracterização realizada incide, numa primeira fase, sobre os objetivos, conteúdos e atividades utilizadas para motivar, explorar e avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes. Numa segunda fase analisa-se o modo como se encontra organizada a sequência formativa dos conteúdos e da estrutura do discurso usado para apresentar as noções teóricas. Por último, e no final da unidade, incluem uma análise dos diferentes tipos de situações de trabalho para consolidar e avaliar as matérias apreendidas. Deste estudo, diferenciam duas possíveis tendências didáticas subjacentes à estrutura dos manuais escolares. Uma destas tendências "*reflejan en sus textos una propuesta que se caracteriza por organizar y secuenciar los contenidos de forma lineal, que introduce las nociones teóricas de forma deductiva, y en el que las actividades son fundamentalmente de aplicación o validación de los contenidos introducidos, sin el uso de recursos«manipulativos» y sin fomentar el trabajo cooperativo*", a outra "*que se caracteriza por organizar y secuenciar los contenidos de forma helicoidal, con una estructura del discurso de carácter inductivo, intercalando las nociones teóricas y las actividades*" (Azcárate e Serradó,2006).

Cantero (2013), tendo como objeto de estudo o modo como a Probabilidade Condicionada é descrita nos manuais escolares, faz uma análise, de acordo com o enfoque ontosemiótico, atendendo às situações problema, linguagem, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos. Nesta perspetiva concluiu que há bastante unanimidade no uso

da notação do conceito de Probabilidade Condicionada nos livros de texto, no entanto a linguagem utilizada na definição não é a mais correta, o que facilita o aparecimento de conceções erróneas.

González e Guzmán (2013), atendendo ao facto de que a Combinatória constitui um conteúdo de difícil aprendizagem por parte dos alunos, levam a cabo uma pesquisa na qual, com base na teoria dos significados pessoais e institucionais dos objetos matemáticos de Batanero e Díaz Godino, descrevem o desenvolvimento teórico deste tema presente em alguns manuais escolares de Matemática de Educação Secundária em Espanha.

Também no âmbito dos manuais escolares, Gea *et al*. (2013) apresentam, com base numa amostra de oito livros de texto de *Bachillerato,* um estudo sobre o tratamento da organização de dados em estatística bidimensional. O estudo incide sobre as diferentes representações utilizadas – tabelas e gráficos – e o conjunto de tarefas que se propõem aos estudantes para que este construa o significado dos objetos matemáticos. São detetadas algumas diferenças na utilização das diferentes representações, privilegiando-se o registo gráfico.

Os ambientes de aprendizagem apoiados na tecnologia computacional têm tido nos últimos anos um enorme impacto em diferentes domínios da Matemática e a Teoria das Probabilidades não se tem mantido distante à utilização deste recurso pedagógico.

Com recurso a um ambiente de geometria dinâmico – CABRI -, Coutinho (2005) mostra que a aprendizagem do conceito Geométrico de Probabilidade torna-se acessível para alunos de 14-15 anos. Também foi possível constatar neste trabalho que as atividades desenvolvidas favoreceram os alunos no momento da construção da relação entre uma ideia intuitiva de Probabilidade e a frequência estabilizada, como medida aproximada dessa Probabilidade. Tendo como principal atividade o jogo de "*Franc-Carreau*", a Figura abaixo (reproduzido do original) ilustra a passagem de domínios no desenrolar da modelação, incluindo o momento no qual o aluno deve trabalhar no domínio pseudoconcreto:

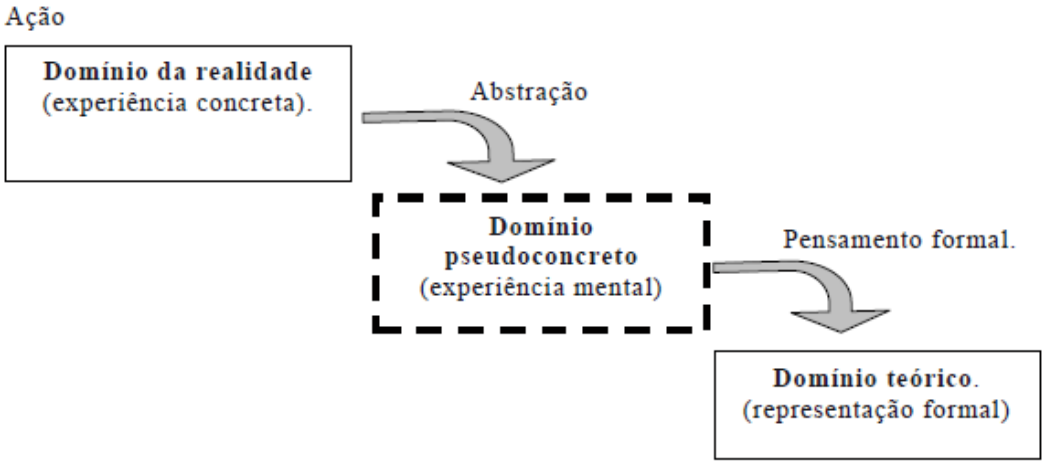


Figura 47 – Os diferentes domínios no processo de modelação (Coutinho, 2005)

Também nesta lógica, Mercado (2013), utilizando um *software* de geometria dinâmico – *GeoGebra* – apresenta atividades promotoras de aprendizagens de conceitos probabilisticos, entre os quais; 1) Diagramas de Venn, Probabilidade Condicional e Teorema de Bayes; 2) A máquina de Galton, e 3) aproximação da distribuição Normal à distribuição Binomial. Um exemplo de uma das atividades – Teorema de Bayes - mostra-se na figura seguinte, que reproduzimos do seu autor:

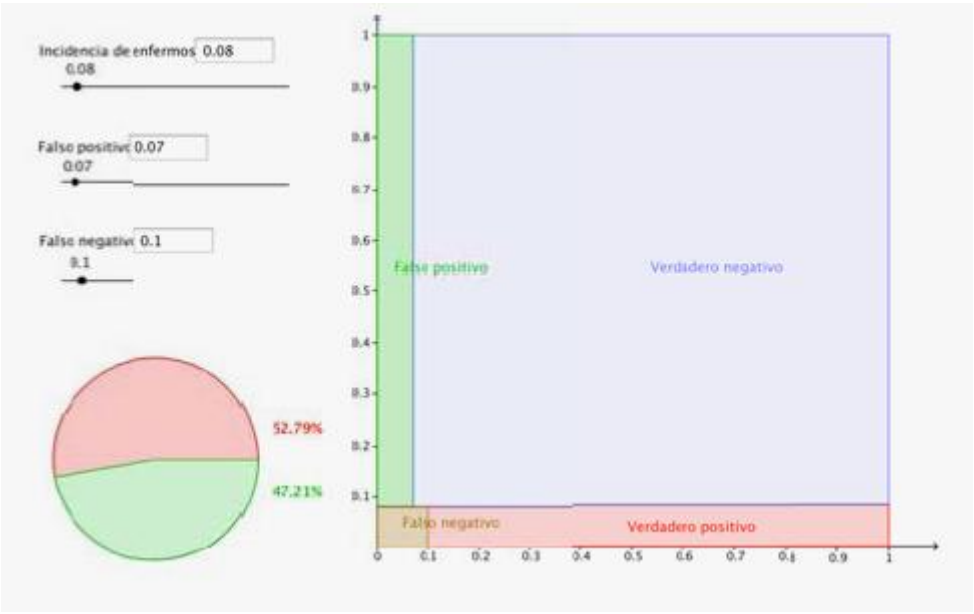


Figura 48 – Aplicação do Teorema de Bayes com o GeoGebra (Mercado, 2013)

Este autor conclui que uma das vantagens da utilização destes ambientes dinâmicos prende-se com a facilidade de acesso a uma multiplicidade de representações, as quais passam por questões de natureza algébrica, gráfica, tabular e às simulações.

Na mesma linha de investigação, Fernandes *et al*. (2013), utilizando um software de fácil manuseamento - Folha de Cálculo – compara o desempenho dos alunos na construção dos gráficos com, e sem, a folha de cálculo e avaliam as suas perceções acerca do uso deste recurso. Em termos dos resultados, destaca-se um melhor desempenho dos alunos quando usam a Folha de Cálculo e as reações muito favoráveis à utilização da Folha de Cálculo.

Fernandes e Ponte (2013) numa comunicação intitulada "*O uso de simulações para desenvolver a noção de probabilidade e a capacidade de resolução de problemas"*, analisam o modo como alunos portugueses do 9.º ano (com cerca de 14-15 anos) respondem a questões envolvendo a noção intuitiva de Probabilidade, com base em simulações realizadas com o *software TinkerPlots*. De acordo com os autores, "*este estudo representa a etapa inicial de uma investigação de design research que tem em vista construir uma unidade de ensino para os alunos deste nível de escolaridade, tirando partido das novas tecnologias*".

Na mesma linha de pesquisa, Teodoro, Lopes e Mourão (s.d.) utilizando um *software* desenvolvido em ambiente *Delphi,* em linguagem *Pascal* e através de um programa executável de fácil manuseamento, simulam experiências aleatórias com acontecimentos equiprováveis. Através das experiências realizadas, (extração com reposição de bolas de sacos e de lançamento de moedas e dados) foi observado que o estudante interpreta, comparativamente, as experiências com a noção clássica de Probabilidade, promovendo-se, deste modo, um melhor entendimento desta conexão. Concluiu-se que este recurso informático, pela sua versatilidade, pode até ser utilizado na abordagem a outros temas da estatística básica, como, por exemplo, o estudo e a análise das medidas de posição e dispersão.

Alexander e Bueno (2013), mostram que as técnicas de Monte Carlo e a realização de experiências efetuadas em computador com números pseudoaleatórios, pode ser muito útil na assimilação de conceitos da Estatística e da Probabilidade e pode facilitar muito o ensino destas matérias, até em níveis educativos mais elementares. Os autores argumentam ainda que os professores podem criar as suas aplicações para que os estudantes adquiram melhor as competências associadas a estes temas, através das quais os alunos podem realizar as suas próprias experiências e visualizar o cálculo de indicadores como a variância, a média ou a função de distribuição, com base no número de experiências.

3.6.3.3. As Probabilidades na formação de professores

Partilhamos da opinião que um dos alicerces da promoção de ambientes eficazes de aprendizagem é o professor. Estes profissionais assumem um papel essencial no processo de Ensino ao interpretar e adaptar o currículo às necessidades e interesses dos alunos.

Atualmente, a investigação nesta área acentua a importância da reflexão sobre a formação e a prática letiva de professores, que invariavelmente lecionarão conteúdos probabilísticos ou, como afirma Azcárate (1996), "*(…) el profesor su personalidad, sus ideas, creencias y conocimientos filtran y modifican el currículum propuesto, convirtiéndose en el agente fundamental de la actividad educativa*".

Torna-se claro que muita da investigação produzida ao nível do Ensino da Probabilidade tem servido como suporte para facultar aos professores o conhecimento científico e as atitudes pedagógicas necessárias que facilitem de promovam nos estudantes, de diferentes idades, aprendizagens mais significativas.

Na Tabela 21 estão listados os trabalhos revistos.

Tabela 21- Trabalhos de investigação sobre Professores e Formação de Professores, em Probabilidade

Autores	Data	Temática Geral
Koirala	1995	Conceções, de futuros professores do Ensino Secundário, sobre Probabilidade.
Azcárate	1996	Conceções disciplinares de futuros professores do Ensino Primário sobre aleatoriedade e Probabilidade.
Batanero, Díaz Godino e Roa	2004	Formar professores para ensinar Probabilidades.
Pratt	2005	O que podem os professores fazer para ajudar os alunos a perceber o conceito de Probabilidade.
Stohl	2005	A importância da Probabilidade na formação de professores.
Roca, Batanero e Fortuny	2006	As atitudes e conhecimentos de Estatística elementar na formação de Professores do Ensino Primário.
Lopes	2008	O ensino da Estatística e da Probabilidade e a formação de professores.
Ortiz, Serrano e Mohamed	2009	Competências de futuros professores primários sobre Probabilidade.
Batanero	2009	Desafios na formação Estatística de professores.
Viali e Cury	2009	Análise de erros em Probabilidade com professores em formação contínua.

Autores	Data	Temática Geral
Batanero *et al*.	2010	Avaliação do conceito de aleatoriedade de professores em formação através do trabalho de projeto.
Contreras	2011	Avaliação de conhecimentos e recursos didáticos na formação de professores sobre Probabilidade Condicionada.
Rodrigues	2011	A probabilidade como componente curricular na formação Matemática inicial de professores.
Batanero et al.	2012	A compreensão da aleatoriedade por futuros professores de Primária.
Maanan	2012	Avaliação do conhecimento de futuros professores do ensino primário sobre Probabilidade.
Ortiz, Mohamed e Serrano	2013	Significado frequencista de Probabilidade em futuros professores.
Anasagasti e Berciano	2013	Competências probabilísticas de futuros professores do Ensino Primário.
Díaz Godino	2013	Desenho e análise de tarefas para o desenvolvimento didático-matemático de professores.

Koirala (1995), na sua tese de doutoramento, analisa as conceções, de dois grupos de futuros professores do Ensino Secundário da Unversidade de *British Comumbia*, sobre a Probabilidade e, ainda, a consistência dessas conceções e as respetivas visões utilitárias na resolução de problemas do quotidiano. Deste trabalho, resultou que os futuros professores apresentam diferentes conceções, que o autor agrupa em dois grupos - formal e não-formal - e que dependem largamente do contexto das definições das atividades.

Azcárate (1996), numa monografia baseada na sua tese de doutoramento, apresenta uma investigação sobre as conceções disciplinares de futuros professores do Ensino Primário em torno das noções de Aleatoriedade e Probabilidade. A problemática definida centrou-se em perceber o modo como os futuros professores do Ensino Primário percebem o mundo da incerteza e quais as conceções manifestadas, por este grupo, em torno destas noções do conhecimento probabilístico. As conclusões apontaram para uma diversidade de conceções expressas pelos professores deste nível de ensino. No que respeita às tendências do pensamento destes docentes foram inventariadas cinco tipologias entre os 57 sujeitos da amostra: Indeciso (8 professores), Determinista (15 professores), Causalidade (12 professores), *Standard* (16 professores) e Incerteza (6 professores).

Batanero, Díaz Godino e Roa (2004), analisam as razões pelas quais o ensino da Probabilidade é difícil para os professores de Matemática e descrevem os conteúdos necessários na preparação didática dos professores para ensinar Probabilidade. Nesta lógica, analisam alguns exemplos de atividades para ajudar a concretizar esta formação. Estas atividades levam em conta a experiência, nesta área, da Universidade de Granada em cursos

de formação de professores do Ensino Primário e Secundário, bem como de um curso opcional em Didática da Estatística, que está incluído no Mestrado em Ciências Estatísticas, em funcionamento desde 1996. Os autores referem ainda que um dos objetivo deste artigo é o de incentivar outros colegas para organizar cursos semelhantes nas suas universidades, como parte de seus programas oficiais de formação de professores, ou em formação pós-graduada.

A mesma autora, em colaboração com Roca e Fortuny (2006), analisam as atitudes e conhecimentos de Estatística elementar na formação de Professores do Ensino Primário. Para avaliar as atitudes dos professores de Educação Primária face à Estatística, analisam as diferentes componentes que a configuram, identificam algumas variáveis que a afetam e relacionam as atitudes e os conhecimentos estatísticos destes professores. Como resultado, deste trabalho, é considerado que os professores de primária têm bastante capacidade de aprender esta matéria, no entanto é uma matéria que não gostam e consideram que não é demasiado fácil.

Num artigo intitulado "*How do teachers foster students' understanding of probability?*" escrito por Pratt (2005), este autor, atendendo ao facto de que nos anos mais recentes os currículos de Matemática começaram a reconhecer a importância do Acaso e da Probabilidade como uma componente explícita na formação dos estudantes com idades superiores a 7 anos, apontam quatro indicações metodológicas/pedagógicas que podem ajudar a redesenhar o ensino da Probabilidade. Assim aconselha a: i) evidenciar o objetivo e a utilidade da Probabilidade; ii) testar conjeturas pessoais; iii) realização de muitas experiências associadas a uma experiência aleatória, e; iv) proporcionar diferentes contextos, nos quais se podem realizar essas experiências.

Stohl (2005), escreve um dos capítulos do livro "*Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*" designado por "*Probabilit in teacher education and development*", no qual afirma que o sucesso de qualquer currículo de Probabilidade depende muito do entendimento dos professores sobre esta noção, bem como a compreensão profunda de outras questões, referindo, como exemplo, uma análise cuidada dos equívocos dos alunos sobre esta temática. Este capítulo termina com um conjunto de sete sugestões propostas por Kvatinsky and Even (2002, citado por Stohl, 2005) e que podem constituir elementos de um quadro conceptual que os docentes devem possuir sobre Probabilidade, e que são:

- As características essenciais da Probabilidade, como fenómeno não-determinístico;

- As potencialidades da Probabilidade, como fator importante e integrante dos fenómenos naturais;
- O uso e a interpretação de diferentes representações e modelos;
- Como e quando usar formas alternativas de abordar o conceito de probabilidade;
- Possuir um repertório de exemplos que possa ser utilizado para ensinar determinados conceitos;
- Deter diferentes formas de conhecimento e compreensão para que se possa efetuar, sempre que necessário, uma distinção entre conhecimento intuitivo e formal de Probabilidade, e;
- Identificar os aspetos Matemáticos que apoiam e suportam o conhecimento da Probabilidade.

Lopes (2008) destaca, entre outros aspetos, questões relativas à formação inicial e contínua de professores, ao desenvolvimento e ao conhecimento profissional dos docentes que ensinam na educação infantil e nos ensinos fundamental e médio, do Brasil. Conclui que a formação de professores não incorpora um trabalho sistemático sobre estocástica, o que dificulta um trabalho significativo em contexto de sala de aula. Por outro lado, a formação do educador matemático deve prever um processo de Ensino e Aprendizagem de conteúdos que ocorra através da resolução de problemas, de simulações e de experiências que permitam ao profissional construir conhecimentos e estabelecer relações com diferentes informações, para além da necessidade de dominar diversas linguagens e formas de expressão.

Ortiz, Serrano e Mohamed (2009) apresentam uma investigação sobre a competência de comparação de probabilidades e estratégias empregadas por futuros professores de Educação Primária. Os resultados obtidos, não obstante serem melhores do que os obtidos em alunos com idades entre 10 e 14 anos, mostram uma grande dificuldade dos participantes em resolver algumas das atividades propostas. No final do artigo é recomendado a urgência de reforçar a formação probabilística elementar destes futuros docentes, reforçando a atenção deste tema nos programas de formação de professores, alterando não só conteúdos, mas também as metodologias.

Em 2009, Batanero, no *II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* realizado na Universidade do Minho, dinamiza uma conferência intitulada "*Retos para la Formación Estadística de los Profesores*" e na qual apresenta um estudo teórico sobre a problemática da formação de professores para ensinar Estatística. Assumindo que a formação de professores que ensinam a Estatística, que em muitos países (como acontece em Portugal) está a cargo de

professores de Matemática dos Ensinos Primário, Básico e Secundário, apresenta lacunas mais ou menos profundas, revê um conjunto de orientações para o ensino desta área.

Num artigo de Viali e Cury (2009) são apresentados resultados parciais de uma pesquisa, no âmbito de uma formação, com o objetivo de analisar as soluções dadas por 21 professores a uma questão sobre Probabilidade. A análise de erros foi estruturada com base em procedimentos de análise de conteúdo, tendo sido elaboradas classes de erros relacionados com as definições de Probabilidade. Pelos resultados obtidos, concluiu-se que os professores participantes não souberam resolver a questão e que os conhecimentos necessários à sua resolução, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, fazem parte dos conteúdos da Educação Básica.

Batanero *et al*. (2010), descrevem uma experiência, realizada com 215 professores em formação de Espanha, elaborada numa perspetiva de trabalho de projeto e cujo objetivo era o de indagar sobre a conceção destes sobre aleatoriedade. No âmbito de um projeto estatístico, os professores recolheram informação a partir de uma experiência clássica para avaliar as intuições destes sobre aleatoriedade. De seguida, essa informação foi tratada e, em consequência, foi produzido um relatório no qual os docentes tiveram que justificar as suas conclusões. Em primeiro, as conceções foram analisados a partir dos dados recolhidos e, de seguida, analisaram-se os relatórios escritos. Os resultados obtidos mostraram, por um lado, uma boa perceção sobre os valores esperados numa série de experiências realizadas e, por outro, pobres conceções sobre variação e independência em sequências aleatórias. Os resultados mostraram ainda a necessidade de uma melhor preparação destes professores e a evidência da proficuidade do trabalho de projeto para melhorar os seus conhecimentos.

Contreras (2011), na sua tese de doutoramento apresentada na Universidade de Granada, desenha dois estudos empíricos. No primeiro destes estudos, que incide sobre uma amostra de 183 futuros professores do ensino primário, pretendeu analisar aspetos sobre o conteúdo matemático a partir das respostas dadas a uma tarefa e, a partir de um enfoque ontosemiótico, classificou as estratégias utilizadas e descreveu os conflitos semióticos demonstrados pelos participantes. No segundo estudo, descreve a avaliação dos conhecimentos matemáticos de uma amostra de futuros professores de secundária constituída por 95 estudantes da Licenciatura de Matemáticas e 101 estudantes do Máster de Secundária. As respostas dadas permitiram avaliar, simultaneamente, a presença das principais preconceções sobre o conhecimento matemático formal. Estes estudos mostraram a necessidade formativa dos futuros professores, tanto nos aspetos matemáticos, como nos aspetos didáticos relacionados com a Probabilidade Condicionada.

Também na sua tese de pós-graduação, Rodrigues (2011) com base no levantamento bibliográfico e documental, elabora um ensaio teórico que tem como objetivo indicar os conhecimentos necessários para a elaboração de uma proposta didática para o ensino de noções de Probabilidade na formação Matemática inicial de professores. A proposta construída nesta lógica encontra-se pautada por aspetos relativos a fundamentos da cultura matemática, sociológicos, filosóficos, didáticos e do ensino-aprendizagem desta temática.

Batanero *et al*. (2012), aludindo às novas diretrizes curriculares espanholas para a Probabilidade na Educação Primária que requerem uma formação específica para os futuros professores que deve estar consubstanciada na avaliação de necessidades formativas, estrutura uma investigação na qual analisam as respostas abertas, fornecidas por 157 docentes, a um problema sobre a conceção subjetiva de Probabilidade (Figura 49).

Tarea. El profesor pidió a Clara y a Luisa que lanzaran cada una de ellas una moneda 150 veces, y que apuntaran cada vez si salía cara ó cruz. Por cada "cara" se ha apuntado un 1, y por cada "cruz" un 0. Aquí están los dos grupos de resultados:

Clara: 010110011001010110110100011100011011010101100100 01
010100111001101011001011001011001001011101100110 11
010100101100101011000100110101100111011101011000 11
Luisa: 100111011111010011100100111001000111011111101010101
111000000100010100100000100011000101000000000011001
000000011111000011010100100100111111010011000011000

Una de las chicas lanzó la moneda como dijo el profesor, anotando los resultados; pero la otra hizo trampas; no lanzó la moneda, sino que inventó los resultados
a. ¿Qué niña ha hecho trampas?
b. ¿Por qué crees que ha sido ella?

Figura 49 – Tarefa proposta (Batanero *et al*., 2012)

Os resultados mostraram uma mistura de ideias corretas e incorretas, algumas delas coincidindo com falácias que ocorreram ao logo da história da Probabilidade. Recomenda-se a utilização de algumas destas conclusões para futuros programas de formação de professores.

Na sua tese de doutoramento, apresentada na Universidade de Granada, Maanan (2012) avaliou o conhecimento do conteúdo matemático e didático da Probabilidade, em futuros professores do Ensino Primário, tendo como base o marco teórico do Enfoque Ontosemiótico (EOS). Já num trabalho prévio, este mesmo autor, tinha detetado as dificuldades manifestadas por futuros professores na resolução de problemas elementares de Probabilidade. Neste trabalho, mais amplo, este investigador alarga o seu estudo à análise destas dificuldades a outros conceitos probabilísticos. Uma das implicações de interesse deste trabalho, refere-se à necessidade de os formadores dos futuros professores melhorarem o ensino das Probabilidades tanto ao nível do conhecimento especializado do conteúdo

matemático, como da necessidade de apresentação de várias situações experimentais e contextualizadas que sejam representativas dos conceitos que se deseja ensinar.

Por sua vez, Ortiz, Mohamed e Serrano (2013), focalizam-se na caracterização do significado frequencista de Probabilidade em futuros professores. Para tal apresentam uma análise detalhada das respostas, a dois problemas de probabilidade frequencista, fornecidas por 167 futuros professores de Educação Primária da Universidade de Granada. Estes resultados foram usados para comparar com os alcançados por alunos com idades entre os 10 e os 14 anos, que tinham participado numa investigação anterior. Este estudo permitiu colocar de manifesto a grande variedade de significados pessoais e mostrar que existem importantes dificuldades relacionadas com a compreensão deste conceito.

No mesmo ano, e atendendo às orientações do currículo escolar de Matemática em Espanha, Anasagasti e Berciano (2013) analisam as competências probabilísticas de futuros professores do Ensino Primário. Através de uma amostra de 144 futuros professores de Educação Primária, avaliaram a competência "*Conocer el currículo escolar de matemáticas y aplicarlo al análisis de propuestas del área en la Educación Primaria y, al diseño y desarrollo de nuevas actividades*". Para tal construíram e aplicaram um questionário para detetar carências na referida competência relativa ao bloco temático "*Tratamiento de la información, azar y probabilidade*". Os resultados obtidos mostraram um escasso conhecimento do currículo e, consequentemente, limitações nas propostas de desenho e desenvolvimentos de novas atividades.

Na conferência dinamizada por Díaz Godino (2013), nas *I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, este preletor, nos pressupostos da metodologia de investigação baseada no desenho de tarefas, mostra a aplicação de algumas ferramentas teóricas, da perspetiva Ontosemiótica do conhecimento e da instrução Matemática, para o desenho e análise de tarefas dirigidas à formação matemática e didática de professores. A metodologia aplicada contextualizou-se numa sequência de tarefas, derivadas da experiência aleatória de observar a soma de pontos ao lançar dois dados, e que foram equacionadas para desenvolver as componentes do conhecimento didático-matemático de futuros professores da Educação Primária, sobre estocástica. Segundo o mesmo autor, a valorização de uma tarefa requere uma análise detalhada, *a priori* da sua resolução, para identificar os objetos centrais que se colocam em estudo, de tal modo que esta informação seja útil nas fases de implementação das tarefas e da avaliação das aprendizagens. Uma das ferramentas que a perspetiva Ontosemiótica propõe para esta análise é a noção de

configuração de objetos e processos (Figura 50 – que reproduzimos do original do autor) e que pode aplicar-se tanto do ponto de vista institucional, como pessoal.

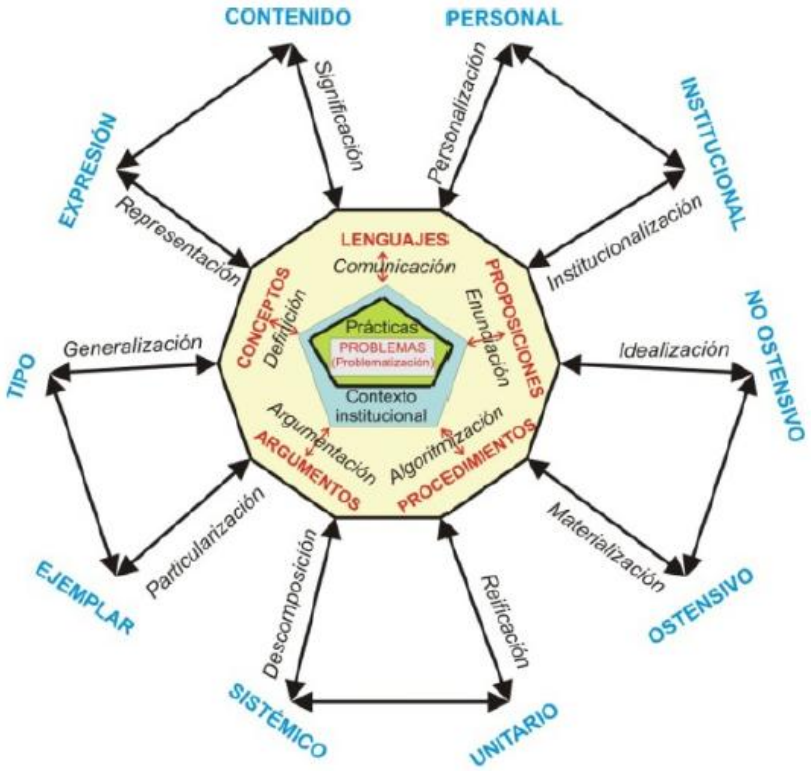


Figura 50 – Configuração de objetos e processos matemáticos (Díaz Godino, 2013)

3.6.3.4. Aprendizagem dos alunos sobre as Probabilidades

Os conceitos Matemáticos/Probabilidades a serem incluídas nos programas curriculares, constituem um elemento relevante a ter em consideração nos processos de Ensino e Aprendizagem. Todavia, não basta identificar as ideias probabilísticas indispensáveis, já que nos parece necessário investigar o modo de melhorar o acesso dos estudantes a esses conceitos, através de novas metodologias e atividades e, assim, ajudar a estimular a sua vontade de aprender.

Alguma desta investigação focaliza-se no estudo da compreensão de noções associadas à Teoria da Probabilidade e, em particular, sobre o conceito de Probabilidade, seus significados, crenças e intuições por parte dos alunos. Outros estudos abordam conceitos probabilísticos específicos: Probabilidade Condicionada, Teorema de Bayes, Aleatoriedade, entre outros.

Alguns destes trabalhos, encontram-se sintetizados na Tabela 22.

Tabela 22- Trabalhos de investigação, sobre a aprendizagem das Probabilidades

Autores	Data	Temática Geral
Coutinho	1994	Estudo didático sobre a visão frequencista do conceito de Probabilidade.
Batanero, Green e Serrano	1998	Aleatoriedade – o seu significado e implicações didáticas.
Muñoz	1998	As preconceções em Probabilidades.
Fernandes	1999	Estudo sobre as intuições probabilísticas e ensino das probabilidades.
Gómez	2000	Uma proposta didática para o tratamento da Probabilidade no *Bachillerato.*
Way	s.d.	O raciocínio estratégico de crianças na resolução de atividades probabilísticas.
Martignon and Wassner	2002	A utilização das frequências absolutas no ensino da estocástica.
Langrall e Mooney	2005	Características do pensamento probabilístico dos estudantes.
Díaz e Fuente	s.d.	Estudo exploratório das dificuldades manifestadas por alunos na resolução de problemas sobre o Teorema de Bayes.
Lecoutre *et al*.	2006	Intuições dos alunos sobre o Acaso e a Probabilidade.
Batanero e Díaz	2007	Probabilidade, grau de crença e processo de aprendizagem.
Batanero, Fernandes e Contreras	2009	Análise semiótica do problema de Monty Hall.
Nemirovsky *et al*.	2009	Conceção dos alunos sobre Probabilidade e precisão.
Sobreiro	2011	A Probabilidade Condicionada em alunos do secundário.
Lopes	2011	Uma proposta Didático-Pedagógica para o Estudo da Conceção Clássica de Probabilidade.
Lopes	2013	Uma proposta Didático-Pedagógica para o ensino do Teorema de Bayes.
Almeida *et al*.	2013	Organização conceptual da noção de Probabilidade.

Já em 1994 as preocupações com as aprendizagens da Probabilidade pelos estudantes eram manifestadas por Coutinho (1994). A partir de uma visão frequencista, a autora apresenta um trabalho didático sobre o ensino do acaso, cujo objetivo é o de estudar as conceções espontâneas, ou pré-construídas, dos alunos a propósito desta temática. Para tal analisa as sequências experimentais, a partir de observações da estabilização relativa de um acontecimento, após a realização de um grande número de repetições de uma experiência aleatória. Os resultados evidenciaram o grau de influência que as conceções espontâneas

exercem sobre a aprendizagem do conceito de Probabilidade e destaca a importância da experimentação como amplificador para a motivação do aluno.

Batanero *et al*. (1998), apresentam, entre outros, um resumo de investigações em torno da perceção dos estudantes sobre a aleatoriedade e as suas implicações. Neste artigo é apresentada uma reflexão sustentada em outras investigações, e numa perspetiva didática, relacionada com o Acaso enquanto ponto de partida para a aprendizagem da Probabilidade.

As preconceções mostradas pelos alunos nas mais variadas áreas da ciência, não coincidem frequentemente com as noções teóricas estabelecidas. Nesta ótica, Muñoz (1998), reconhece que os alunos, através das suas intuições, expõem a existência de contextos de validez limitada nos quais estas conceções se apoiam. Assim, é importante identificar algumas destas ideias. Para tal, utilizando uma metodologia baseada em entrevistas a alunos do COU, propôs dois problemas de probabilidades: um sobre acontecimentos equiprováveis e outro sobre acontecimentos independentes. O investigador concluiu que ao identificar as conceções, e o que as sustentam, obtém-se indicações sobre o porquê de haver conceitos mais facilmente entendidos pelos estudantes e, outros, mais difíceis. Para além disto, esta identificação pode constituir uma primeira etapa para o desenho de estratégias para combater o insucesso nesta área.

Fernandes (1999), na sua tese de doutoramento realiza dois estudos: um primeiro sobre "intuições probabilísticas", em que se identificam e caracterizam intuições probabilísticas de alunos do 8º ano e do 11º ano portugueses, e um segundo estudo sobre o Ensino das Probabilidades. Entre outros, os resultados mostraram que os alunos, de ambos os anos escolares, revelaram intuições mais limitadas e primitivas de probabilidades em experiências compostas do que em probabilidades com experiências simples. Além disso, as elevadas percentagens de respostas corretas obtidas na classificação dos acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis, sugerem que os alunos possuem intuições corretas sobre esta classificação dos acontecimentos.

Por sua vez, Gómez (2000), apresenta uma proposta didática que, na sua opinião, constitui um método alternativo ao tratamento formal da Probabilidade e, em particular, da Probabilidade Condicionada. O método proposto é baseado no recurso aos Diagramas de Árvore, convenientemente ampliados mediante um procedimento que o autor denominou de "*renormalización"*, o qual permite resolver qualquer problema de Probabilidade Condicionada evitando o Teorema de Bayes e, inclusive, exibe uma margem de aplicabilidade muito mais extensa que o teorema anteriormente referido.

Com base num conjunto de tarefas propostas, Way (s.d), efetuou entrevistas em três escolas a 74 crianças com idades entre os 4-12 anos que não tinham recebido qualquer instrução formal em Probabilidade, uma vez que não fazia parte do currículo escolar. O estudo confirmou a presença de três etapas de desenvolvimento (Etapa 1- Pensamento não probabilístico; Etapa 2 - Pensamento Emergente probabilístico, e; Etapa 3 – Quantificação da Probabilidade). Este trabalho descreve ainda as características das estratégias das crianças para fazer decisões probabilística em cada etapa e aponta implicações para futuras pesquisas em relação ao ensino desta temática.

Martignon and Wassner (2002), desenvolvem um estudo comparativo para averiguar a influência de diferentes representações – fórmulas, modelos gráficos e valores numéricos – na compreensão de "ideias importantes" em estocástica. Com base no pressuposto que os Diagramas de Árvore quando combinados com as frequências absolutas aumentam drasticamente o conhecimento, desenham uma investigação na qual alunos com idades entre os 15-19 anos recebem formação, com recurso a computadores, na qual trabalham com atividades probabilísticas elementares. O efeito da formação é medido subsequentemente com recurso a testes. Através destes, conseguiu-se obter informação sobre a compreensão dos estudantes quando utilizam diferentes representações e o quanto beneficiaram delas. Os resultados preliminares apontaram para a conclusão de que o grupo de estudantes que foi confrontado com a utilização das frequências absolutas e os Diagramas de Árvore demonstrou melhores aprendizagens sobre ideias chave da estocástica.

Langrall e Mooney (2005), assinam um capítulo do livro *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, no qual exploram as características do pensamento probabilístico dos estudantes. Entre outros, são explicitamente referidos os aspetos conceptuais e qualitativos, associados à ideia de Probabilidade, com que os estudantes devem ser confrontados para fortalecerem as noções relevantes desta temática. Estes aspetos são:

- aprender a discernir o padrão global da ocorrência de acontecimentos e não tentar encontrar uma explicação causal de cada resultado;
- reconhecer a estabilidade, a longo prazo, das frequências relativas;
- atribuir probabilidades a conjuntos finitos de resultados e comparar as proporções observadas destas probabilidades;
- ultrapassar a tendência para acreditar que a regularidade descrita pela probabilidade, aplica-se aos resultados associados a sequências aleatórias curtas, e;
- aplicar a compreensão das proporções para construir um modelo matemático da Probabilidade e desenvolver uma compreensão de algumas leis e axiomas básicos.

Diáz e De La Fuente (s.d.), à custa de um estudo exploratório, enumeram um conjunto de dificuldades manifestadas por alunos, a frequentarem o curso de Psicologia, sobre o Teorema de Bayes, antes e depois do ensino da Probabilidade Condicionada. Nas conclusões refere-se que este tipo de problemas reveste-se de uma enorme complexidade mesmo quando os dados são em formato de frequências absolutas.

Lecoutre *et al*. (2006), estudam as conceções dos estudantes sobre a aleatoriedade e consideram que esta deve ser levado em conta quando se ensina inferência estatística. A experiência idealizada pretendeu explorar as crenças subjetivas sobre Aleatoriedade e Probabilidade, através de duas tarefas sucessivas. Assim, os participantes foram solicitados a classificar 16 itens familiares: 8 itens associados a experiências da vida cotidiana e 8 itens de natureza estocástica. Para além disto, foram comparados três grupos de sujeitos diferentes formados consoante o seu conhecimento da teoria da Probabilidade. Um dos resultados importante foi que os argumentos utilizados para determinar se um evento é, ou não, aleatório parecem ser de diferentes naturezas.

Batanero e Díaz (2007), analisam a visão subjetiva da Probabilidade e algumas das suas implicações. Apresentam, ainda, algumas situações do quotidiano que favorecem a introdução desta perspetiva, nos últimos anos, na Educação Secundária, em paralelo com a utilização de alguns recursos didáticos (tabelas, Diagramas de Árvore e recursos na internet) que as autoras consideram ser facilitadoras da compreensão do Teorema de Bayes. A Figura 51, reproduzida do original, mostra uma dessas representações

Sucesos	Probabilidad inicial	Verosimilitud	Producto	Probabilidad final
A_i	$P(A_i)$	$P(B/A_i)$	$P(A_i)xP(B/A_i)$	$P(A_i)xP(B/A_i)/S$
A_2	$P(A_2)$	$P(B/A_2)$	$P(A_2)xP(B/A_2)$	$P(A_2)xP(B/A_2)/S$
...				
A_n	$P(A_n)$	$P(B/A_n)$	$P(A_n)xP(B/A_n)$	$P(A_n)xP(B/A_n)/S$
Suma	1		S	1

Figura 51 – Organização do cálculo da Probabilidade final (Batanero e Díaz, 2007)

A mesma autora, em colaboração com Fernandes e Contreras (2009), publicam, na revista SUMA, uma análise semiótica do problema de *Monty Hall* (Figura 52) e as suas implicações didáticas. O trabalho incide sobre os objetos e processos matemáticos implícitos em algumas soluções possíveis deste problema, mundialmente conhecido. São também

referidos alguns dos raciocínios errados mais frequentes e explicações dos conflitos semióticos presentes. Conclui-se com a possibilidade do uso deste problema no ensino.

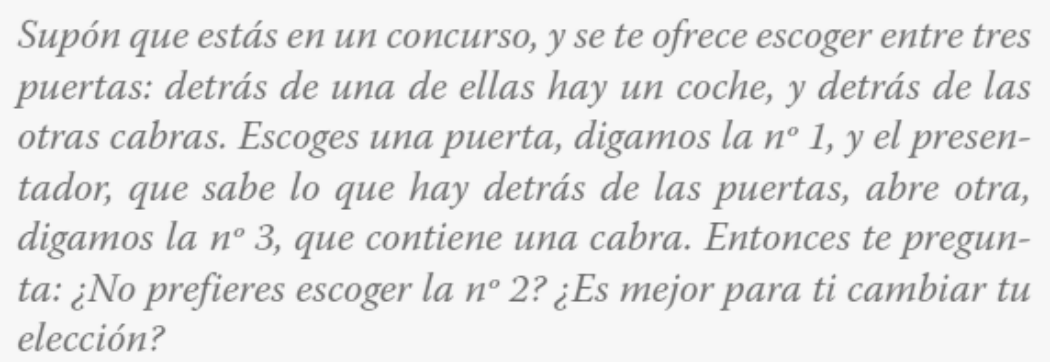

Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras cabras. Escoges una puerta, digamos la nº 1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la nº 3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: ¿No prefieres escoger la nº 2? ¿Es mejor para ti cambiar tu elección?

Figura 52 – Problema de *Monty Hall* (Batanero *et al*., 2009)

No mesmo ano, Nemirovsky *et al.* (2009) exploram as conceções dos estudantes sobre a Probabilidade através de uma análise quantitativa e qualitativa de dois testes aplicados em momentos diferentes. Para tal foi idealizado um questionário, utilizando uma escala de *Likert*, e apresentado a uma subamostra de alunos. Os autores conseguiram mostrar resultados referentes às crenças e conceções sobre Probabilidade, margem de erro, precisão, certeza e validade. Registou-se também, uma percentagem muito baixa de discentes que tem uma postura coerente com a visão científica dos termos.

Sobreiro (2011), na sua tese de Mestrado em *Didática - Área de Especialização em Matemática para Professores do 3º CEB/Secundário* –, procurou compreender a rede de objetos (linguagem, conceitos, propriedades, procedimentos e argumentos) estabelecidos por alunos de uma turma do 12º ano de escolaridade, de Portugal, quando confrontados com problemas de Probabilidade Condicionada. Utilizou-se algumas ferramentas teóricas do enfoque Ontosemiótico do conhecimento e do ensino da Matemática para investigar o tipo de objetos e relações, entre os mesmos, postos em jogo na resolução das situações-problema com que os alunos foram confrontados. Concluiu-se que a Probabilidade Condicionada é um conceito difícil para os alunos, pela complexidade de elementos que engloba e que o aluno tem que relacionar, bem como pelos processos matemáticos implícitos. Observou-se, também, que a Probabilidade Condicionada está intimamente relacionada com erros comuns do aluno, tanto ao nível do conceito, como de procedimentos e linguagem.

Lopes (2011), discute uma proposta didática e pedagógica para a abordagem da conceção clássica de Probabilidade. O ponto de partida para a construção deste conceito é uma situação de jogo associada à metodologia de resolução de problemas. Na mesma linha de

investigação, Lopes (2013), apresenta agora uma proposta didática e pedagógica para o ensino do Teorema de Bayes que se baseia num jogo de dados e na resolução de problemas. Através do uso deste jogo, formulam-se vários problemas que, com a intervenção do professor, permitiu estimular os alunos na construção dos conceitos básicos da Teoria da Probabilidade, e, em particular, do Teorema de Bayes.

Almeida *et al.* (2013), expõem alguns resultados preliminares sobre a organização conceptual dos alunos em relação ao conceito de Probabilidade. À custa das Redes Associativas Pathfinder e utilizando um *software* – *Goluca* -, recolheram e trataram os dados de 214 alunos a frequentarem, no ano letivo 2012/2013, o 9.ºano de escolaridade em Portugal. Os resultados obtidos permitiram identificar os conceitos que assumem uma maior relevância na estrutura conceptual dos alunos – os conceitos Nucleares -, aquelas noções que ainda não estão devidamente incorporadas na estrutura cognitiva dos estudantes – os nós Extremidade - e a sua respetiva organização (Figura 53).

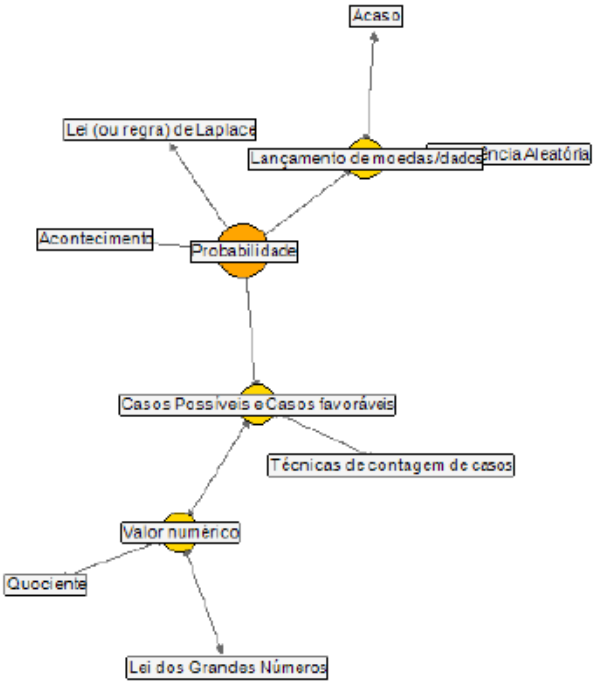


Figura 53 - Rede Associativa Média Pathfinder (Almeida *et al.,* 2013)

3.6.4. Síntese e conclusões

Ao longo da revisão bibliográfica que apresentamos anteriormente, ficou patente que a investigação didática, nas últimas décadas, em torno da Teoria da Probabilidade foi bastante extensa e rica.

Ao nível das investigações sobre o currículo salienta-se, entre outras, a proposta de diferentes metodologias para o ensino da Probabilidade, as quais preconizam um papel mais ativo dos alunos e a inclusão do trabalho de projeto, contextualizado ao interesse manifestado pelos estudantes. Por outro lado a inclusão de novas noções nestes documentos estruturantes, e uma análise dos seus significados, são aconselhadas, as quais refere-se podem ser introduzidas gradualmente e com crescentes graus de formalização ao longo da escolaridade. Verifica-se também, nesta linha de investigação, uma preocupação na pesquisa dos currículos em vigor de vários países e uma análise comparativa de alguns. Conclui-se que apesar de se verificar explicitamente o cumprimento, nestes textos, de algumas das recomendações apontadas pela didática da Probabilidade, ainda subsistem evidências que apontam para a necessidade de uma revisão, nos programas, das temáticas da Estatística e das Probabilidades.

O Ensino e a Aprendizagem da Probabilidade, têm-se socorrido de vários recursos pedagógicos. Os computadores, com *software* específico, podem, e devem, ser utilizados na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objetos Matemáticos, de tal modo que " *O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados*. " (Ponte *et al.*, 2008). A investigação realizada tem demonstrado que a utilização de programas informáticos específicos (e.g. CABRI, GeoGebra, *TinkerPlots,* Folha de Cálculo) tem facilitado a aquisição de diferentes conceitos probabilísticos e demonstrado um melhor desempenho dos estudantes, em complementaridade com a evidência da proficuidade do trabalho colaborativo para melhorar os seus conhecimentos

Os manuais escolares constituem também um recurso de aprendizagem importante que serve de referência permanente para os diferentes intervenientes na Educação, "*(…) devendo ser escolhidos tendo em atenção a sua qualidade científico-didáctica, mas também a qualidade discursiva*" (Ponte *et al.,* 2008). Nesta sequência, a linguagem probabilística utilizada, o significado de diferentes conceitos estocásticos abordados, as várias componentes

da unidade didática dedicada à Probabilidade - objetivos, conteúdos e atividades utilizadas - têm sido objeto contínuo de investigação.

Conscientes da importância do papel do professor no contexto educativo, os investigadores a trabalhar na área da didática da Probabilidade não têm negligenciado este aspeto. Os inúmeros artigos escritos sobre o trabalho pedagógico dos professores, e, em especial, sobre a formação de professores em Probabilidades de diferentes níveis de escolaridade, vêm atestar este interesse. Assim, as conceções e as respetivas visões destes profissionais sobre Probabilidade têm-se demonstrado diversificadas, insuficientes e por vezes erróneas, pelo que urge organizar cursos dentro de um quadro conceptual e como parte de programas oficiais de formação de professores.

Os estudos sobre as aprendizagens da Probabilidade dos alunos têm-se também multiplicado. As conceções, os significados, as metodologias, as diferentes representações, os conceitos e a sua organização, as dificuldades de aprendizagem, os procedimentos e a linguagem, têm sido objeto de pesquisa com alunos. As conclusões apontam para a existência de conflitos e para a dificuldade que esta temática induz nos estudantes.

CAPÍTULO 4

ASPETOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO

4.1. JUSTIFICAÇÃO DA METODOLOGIA

4.2. A AMOSTRA

4.2.1. O 1.º Momento de recolha de dados

4.2.2. O 2.º Momento de recolha de dados

4.3. AS DIFERENTES FASES DA INVESTIGAÇÃO

4.3.1. Definição dos termos, conceitos, noções e exemplos utilizados na elaboração das Redes Associativas *Pathfinder*

4.3.1.1. O questionário aos docentes para identificar os termos/conceitos/noções/exemplos

4.3.1.2. Categorização dos termos/conceitos/noções/exemplos com base nos artigos de referência sobre os elementos do significado e a literacia probabilística

4.3.1.3. As referências aos termos/conceitos/noções/exemplos nos manuais escolares

4.3.1.4. As referências no programa de matemática, dos 9.º e 12.º anos de escolaridade, em vigor em 2012/13 dos termos/conceitos/noções/exemplos

4.3.2. Inquirição, nos 1.º e 2.º momentos, dos estudantes do 9.º e do 12.º ano de escolaridade

4.3.2.1. O programa *GOLUCA*

4.3.2.2. As técnicas estatísticas utilizadas para analisar os indicadores quantitativos das Redes Associativas *Pathfinder*

4.3.2.3. Questionário para deteção dos potenciais Conceitos *Threshold*

CAPÍTULO 4

ASPETOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO

"A metodologia consistirá na análise sistemática e crítica dos pressupostos, princípios e procedimentos lógicos que moldam a investigação de determinados problemas"

Marinús Lima

Neste Capítulo centraremos o nosso discurso nas opções metodológicas definidas para o desenho de investigação, tentando justificar as escolhas e os referenciais levados em consideração na recolha e tratamento dos dados.

4.1. JUSTIFICAÇÃO DA METODOLOGIA

A complexidade dos fenómenos intervenientes nos problemas educativos impõe que, em muitos estudos, as metodologias a utilizar na pesquisa sejam as mais variadas possíveis, já que os diferentes tipos de dados, variáveis e fontes, são também díspares.

Sendo que a temática do presente estudo insere-se no âmbito da Didática da Matemática e tendo presente o objetivo essencial desta investigação que consiste na compreensão da estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º (14-15 anos) e 12.º (17-18 anos) anos sobre a noção de Probabilidade, torna-se claro que os sujeitos de investigação são os estudantes destes dois níveis de escolaridade.

Como referimos anteriormente (Capítulo 3), a opção pela análise dos estudantes, destes dois anos de escolaridade, prende-se fundamentalmente com o facto de ser nestas etapas do processo formativo dos jovens que é, formalmente, estudada a temática das Probabilidades. Nos 10.º e 11.º anos do ensino secundário, os conteúdos associados à

Probabilidade encontram-se ausentes dos programas de Matemática A, pelo que esta matéria não é abordada explicitamente.

Em termos de planificação, refira-se que logo em setembro, tanto no ano terminal do Ensino Básico (9.º ano) como no ano final do Ensino Secundário (12.º ano), este assunto matemático constitui o primeiro bloco de conteúdos a ser ministrado aos estudantes.

Também é nestes dois anos de escolaridade, sobre os quais recai a nossa investigação, que é levada a cabo uma avaliação externa da responsabilidade dos serviços centrais do Ministério da Educação e que compreende a realização de exames nacionais nos 9.º ano e 12.º anos, os quais incidem sobre as aprendizagens e competências e com influência na classificação final da Matemática. A elaboração destes exames, é da responsabilidade dos serviços centrais do Ministério da Educação, através do Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE). A classificação final a atribuir à disciplina de Matemática, é calculada tendo em conta a classificação de frequência final do 3.º período e a classificação do exame de Matemática, de acordo com a seguinte fórmula:

$$CF = \frac{7 \times Cf + 3 \times Ce}{10}$$

onde,

CF = classificação final na disciplina;

Cf = classificação de frequência no final do 3.º período (9.ºano) ou Média de 10.º, 11.º e 12.º (12.º ano);

Ce = classificação da prova de exame.

Tendo em atenção estes factos, optou-se por efetuar a recolha de dados, com os mesmos estudantes, em dois momentos distintos – 1.º Momento e 2.º Momento - separados no tempo.

O 1.º Momento de recolha de dados, que ocorreu em janeiro/fevereiro de 2013, foi planificado para ser executado após a lecionação da temática das Probabilidades e no qual pretendia-se obter as primeiras representações da estrutura cognitiva dos estudantes, dadas através das redes associativas *Pathfinder*, sobre este conceito.

O 2.º Momento de obtenção de informação, que aconteceu em maio/junho de 2013, teve como objetivos averiguar da consolidação e evolução das representações da estrutura cognitiva em torno da Probabilidade, analisar a sedimentação deste conhecimento e a

estabilidade temporal das conceções cognitivas dos estudantes, ao compará-las com as obtidas no 1.º Momento. Esta comparação baseou-se na tipologia dos conceitos e nas relações estabelecidas entre eles. Em paralelo, e com recurso a um questionário em papel, recolheram-se dados para identificar potenciais Conceitos *Threshold*.

Estabeleceu-se, propositadamente, um período de, aproximadamente, três meses que mediou entre os dois Momentos de recolha de dados. Pretendia-se que o 2.º Momento coincidisse com o final do ano letivo, altura em que os diferentes professores estão a preparar os alunos para a realização dos exames de final de ciclo.

A Figura 54 pretende mostrar a distribuição no tempo dos momentos em que ocorreram a recolha de dados:

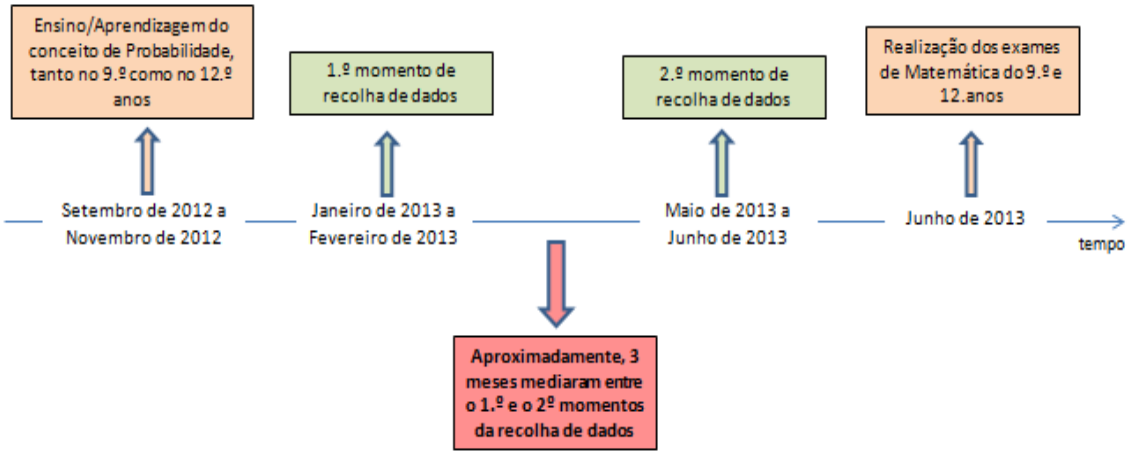


Figura 54 – Organização, em termos temporais, do 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados nos 9.º e 12.º anos

A recolha de dados foi realizada em cinco Estabelecimentos de Ensino do concelho de Beja, dos quais três eram agrupamentos verticais de escolas (Agrupamento de Escolas de Santa Maria, Agrupamento de Escolas Mário Beirão e Agrupamento de Escolas de Santiago Maior) e dois eram Escolas Secundárias com 3.º ciclo (D.Manuel I e Diogo de Gouveia). Foi solicitada autorização às respetivas Direções das escolas para a realização da recolha de dados nas turmas e, inclusive, numa das escolas foi necessário pedir o consentimento aos Pais e Encarregados de Educação (Anexo I).

Para a recolha de dados efetuada junto dos alunos foram utilizados questionários. Um deles tradicional, isto é, em papel (Anexo II), para aferir sobre as características dos potenciais Conceitos *Threshold* e um outro construído numa perspetiva tecnológica, já que foi substituído

por uma ferramenta informática – *Goluca* (Casas, Godinho e Luengo, 2011) - que nos permitiu enunciar as questões, recolher os dados, determinar e apresentar alguns resultados.

Em complementaridade, e face à dimensão da matriz de dados obtidos, também foram utilizados, para o tratamento ao nível dos procedimentos da estatística inferencial, os *software* SPSS (versão 20) e a Folha de Cálculo Excel 2007.

O autor deste trabalho deslocou-se pessoalmente a cada uma das escolas/turmas, facto que nos permitiu garantir a equidade da aplicação das provas em todos os momentos.

Optou-se por um desenho de investigação descritivo com características transversais, facto sustentado pela inquirição dos dois grupos de estudantes regulada por um corte no tempo. Apesar de nem sempre serem os mesmos alunos que são observados nos dois momentos distintos da linha temporal, a seleção aleatória de um número significativo de sujeitos leva-nos a considerar que estes representam o seu correspondente grupo.

4.2. A AMOSTRA

4.2.1. O 1.º Momento de recolha de dados

No 1.º Momento de recolha de dados, que ocorreu em janeiro/fevereiro de 2013, foram questionados 250 estudantes do 9.º ano e 94 alunos do 12.º ano de escolaridade, perfazendo um total de 344 alunos. Como já referimos este procedimento ocorreu em todas as cinco escolas, com 3.º ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário, do concelho de Beja. A intenção inicial era tentar inquirir todos os alunos destes dois anos de escolaridade, no entanto isso não foi possível devido a alguns fatores que condicionaram esse objetivo inicial (e.g. alunos que faltaram no momento da inquirição, a não autorização do Pai ou Encarregado de Educação, entre outros).

De acordo com a informação prestada pela Direção Regional de Estabelecimentos Escolares (DREE), o número total de alunos a frequentar, em Beja, o 9.º ano e o 12.º ano de escolaridade no ano letivo de 2012/13 era de 450, apesar de acharmos que este número está inflacionado e não corresponder ao total efetivo de alunos a frequentarem estes níveis de ensino, em virtude de ser sustentado pelas informações que as Direções das Instituições de Ensino enviam para este organismo no período da preparação do ano letivo seguinte (julho/agosto)

No entanto, e de acordo com os dados da DREE, a distribuição dos alunos por escola apresenta-se na Tabela 23.

Tabela 23 – Dimensão da população e da amostra do estudo no 1.º Momento de recolha de dados (Dados fornecidos pela Direção Regional de Estabelecimentos Escolares)

	População		Amostra (1.º Momento)	
Escola	9.º ano	12.ºano	9.º ano	12.ºano
Agrupamento n.º 1 – Santa Maria	60	----	52 (86,7%)	----
Agrupamento n.º 2 – Mário Beirão	78	----	41 (52,6%)	----
Agrupamento n.º 3 – Santiago Maior	64	----	58 (90,6%)	----
Escola Secundária com 3.º ciclo – D.Manuel I	65	80	57 (87,7%)	73 (91,3%)
Escola Secundária com 3.º ciclo – Diogo de Gouveia	57	46	42 (73,7%)	21 (45,7%)
Total	324	126	250 (77,2%)	94 (74,6%)
			76,4%	

Podemos constatar que neste momento da recolha de dados, a nossa amostra é constituída por 77,2% dos alunos do 9.º ano e por 74,6% dos discentes do 12.ºano, perfazendo 76,4% do total de estudantes que frequentavam estes anos de escolaridade, o que constitui um conjunto de sujeitos que nos garante uma muito boa representatividade da população.

Em termos de escolas, e no ano terminal do Ensino Básico, foi na escola de Santiago Maior que tivemos uma maior percentagem de inquiridos (90,6%), verificando-se na D.Manuel I a percentagem mais elevado de inquiridos no ano terminal do Ensino Secundário (91,3%).

4.2.2. O 2.º Momento de recolha de dados

Passados três meses após a realização do 1.º Momento, e com a mesma população, efetuou-se uma recolha de dados posterior – 2.º Momento.

Globalmente, a dimensão da amostra neste 2.º Momento diminuiu ligeiramente (passou de 344 para 325 alunos). Todavia o total de alunos do 12.º ano aumentou nesta etapa posterior da recolha de dados. Apesar desta reduzida diminuição do tamanho da amostra, parece-nos que a representatividade da população é garantida.

A distribuição dos alunos no 2.º Momento por escola e ano de escolaridade apresenta-se na Tabela 24.

Tabela 24 – Dimensão da população e da amostra do estudo no 2.º Momento de recolha de dados (Dados fornecidos pela Direção Regional de Estabelecimentos Escolares)

	População		Amostra (2.º Momento)	
Escola	9.º ano	12.ºano	9.º ano	12.ºano
Agrupamento n.º 1 – Santa Maria	60	----	54 (90,0%)	----
Agrupamento n.º 2 – Mário Beirão	78	----	37 (47,4%)	----
Agrupamento n.º 3 – Santiago Maior	64	----	50 (78,1%)	----
Escola Secundária com 3.º ciclo – D.Manuel I	65	80	42 (64,6%)	77 (96,3%)
Escola Secundária com 3.º ciclo – Diogo de Gouveia	57	46	43 (75,4%)	22 (47,8%)
Total	324	126	226 (69,8%)	99 (78,6%)
			72,2%	

Neste momento da inquirição, a amostra é constituída por 69,8% dos alunos do 9.º ano e por 78,6% dos discentes do 12.ºano, perfazendo 72,2% do total de estudantes que frequentavam estes anos de escolaridade.

4.3. AS DIFERENTES FASES DA INVESTIGAÇÃO

O desenho da presente investigação obrigou ao delineamento de três fases sequenciais e funcionalmente dependentes:

- 1.ª FASE – Definição dos termos, conceitos, noções e exemplos a serem utilizados na elaboração das Redes Associativas Pathfinder. A seleção destes elementos constituiu uma etapa fundamental do nosso estudo. Para tal inquiriram-se vinte e dois professores, analisaram-se seis manuais escolares do 9.º ano de escolaridade e os programas de Matemática do Ensino Básico e Ensino Secundário, levou-se em consideração artigos que clarificam os elementos do significado (Batanero, 2005) e da literacia (Gal, 2005) probabilística, no sentido de corroborar da relevância dos termos identificados.

- 2.ª FASE – Inquirição, num 1.º momento, dos estudantes do 9.º e do 12.º ano de escolaridade. As respostas dadas pelos alunos foram efetuadas em computador e, por esta razão, as mesmas ocorreram em salas de aula de informática, utilizando o programa *Goluca*, nos meses de janeiro e fevereiro de 2013. Optou-se por estas

datas, já que este tema foi lecionado no 1.º período do ano letivo de 2012/13 (setembro a novembro de 2012), tanto no 9.º ano como no 12.º ano.

- 3.ª FASE - Inquirição, num segundo momento, dos estudantes do 9.º e do 12.º ano de escolaridade e passagem do questionário para a deteção dos potenciais Conceitos *Threshold*. Esta fase tem como objetivo a análise da sedimentação das estruturas cognitivas dos discentes, obtidas na fase anterior e ocorreu em maio e junho de 2013. Também, nesta fase, preocupar-nos-emos, com a possível deteção, através de um questionário em papel, dos potenciais *Threshold*.

Como atrás foi mencionado, o conceito de Probabilidade constitui o primeiro bloco temática a estudar em ambos os anos de escolaridade. Consequentemente o seu ensino de coincide com o início do ano letivo (setembro) e, dependendo das turmas, termina em novembro. Optou-se por efetuar o 1.º momento de recolha de dados logo no começo do 2.º período (janeiro), por acharmos que esta noção, neste instante, ainda permanece bastante presente na memória dos estudantes. Para averiguarmos da estabilidade temporal/sedimentação do conhecimento das conceções dos alunos, impusemos um intervalo de tempo entre o 1.º e o 2.º momento de recolha de dados, que foi de aproximadamente três meses.

Este último momento de recolha de dados ocorreu no final do mês de maio e primeira semana de junho, altura em que o ano letivo está a terminar. Todavia, os diferentes professores, como preparação para os exames nacionais que se realizam no final do mês de junho, voltam a abordar o conceito de Probabilidade. Assim, neste 2.º momento de recolha de dados, os estudantes têm bem presente esta noção.

4.3.1. Definição dos termos, conceitos, noções e exemplos utilizados na elaboração das Redes Associativas *Pathfinder*

Nesta fase, considerada por nós extremamente importante, definiremos os conceitos/termos a ser utilizados na construção das redes PFNET e, consequentemente, na análise da estrutura cognitiva dos alunos. Para tal inquirimos um conjunto de professores de Matemática do 2.º e 3.ºciclos do Ensino Básico e do Ensino Secundário através de um

questionário (Figura 55/Anexo III), com a intenção de aferir sobre os termos/conceitos/noções/exemplos que estes consideram ser os mais relevantes no período do Ensino da noção de Probabilidade. A opção pela utilização destes professores deve-se ao fato de ser nestes níveis de ensino que formalmente se introduz do conceito de Probabilidade.

De seguida, e com base em artigos de referência sobre a Probabilidade, enquadraremos os termos citados por estes profissionais e efetuar uma categorização dos mesmos dentro de um marco teórico de referência. O objetivo deste procedimento é o de justificar a utilização destes conceitos/termos/noções/exemplos com base nos diferentes elementos do significado de Probabilidade e da Literacia Probabilística.

Analisou-se também alguns manuais escolares (das editoras com maior implementação no mercado português e com mais livros de texto vendidos) e os programas de Matemática do Ensino Básico e Secundário, em vigor em Portugal no ano letivo de 2012/2013.

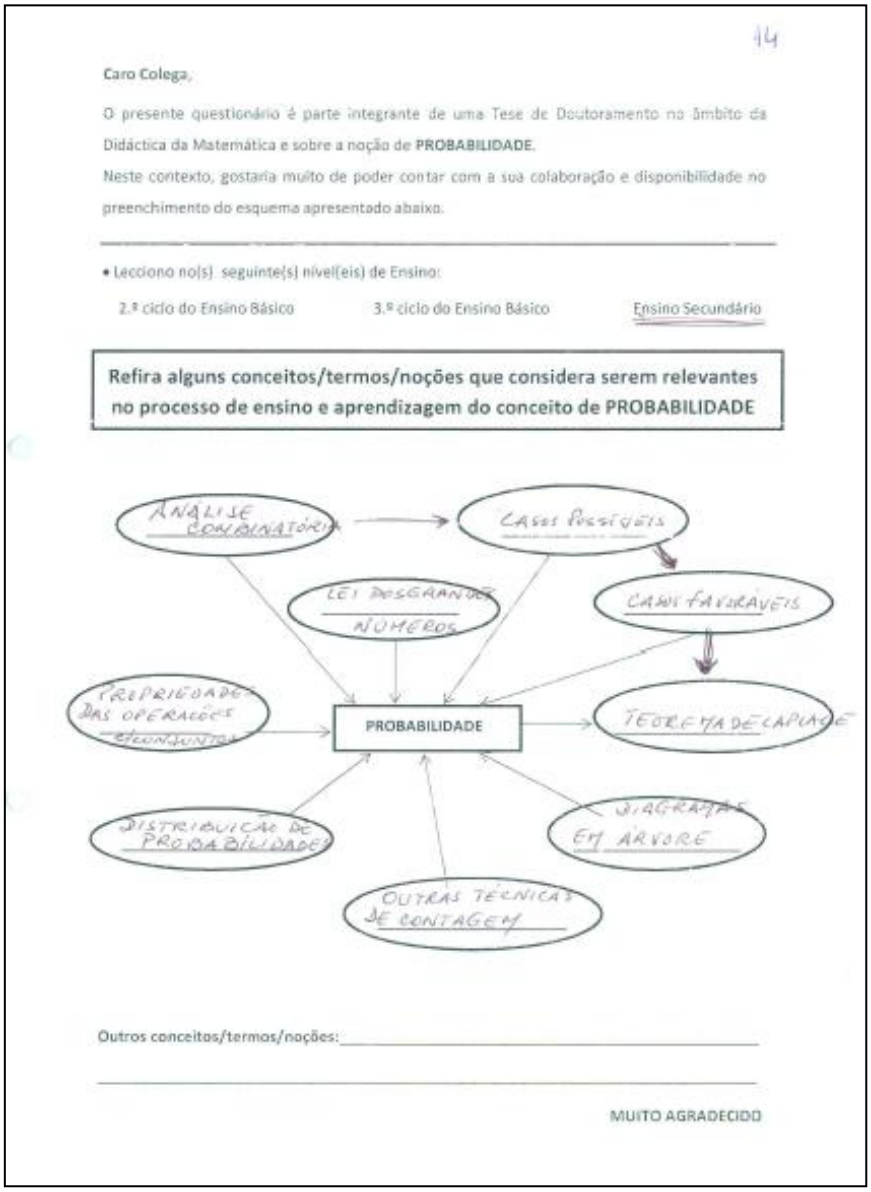
Apresentemos, com um pouco mais de pormenor, alguns dos resultados obtidos nestas fases.

4.3.1.1. O questionário aos docentes para identificar os termos/conceitos/noções/exemplos

O questionário aplicado aos professores (Anexo III) foi respondido por 22 docentes em exercício, das escolas e agrupamentos referidos anteriormente. A distribuição dos professores pelos níveis de ensino foi a seguinte: cinco lecionam ao 2.º ciclo do Ensino Básico, dois intervêm no 2.º e 3º ciclos do Ensino Básico, nove regem unicamente no Ensino secundário e seis lecionam, simultaneamente, no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário.

Para a elaboração do questionário utilizado para a recolha de informação junto dos professores, para além da indicação do nível de ensino em que lecionam e do imperativo à referência aos termos/noções/exemplos que estes profissionais consideram ser relevantes no processo de Ensino e Aprendizagem do conceito de Probabilidade, houve a preocupação que este instrumento apresentasse um aspeto gráfico bastante simples e que fosse respondido de um modo célere.

Na Figura 55 encontra-se um exemplo de um questionário respondido por um professor do Ensino Secundário.


14

Caro Colega,

O presente questionário é parte integrante de uma Tese de Doutoramento no âmbito da Didáctica da Matemática e sobre a noção de **PROBABILIDADE**.

Neste contexto, gostaria muito de poder contar com a sua colaboração e disponibilidade no preenchimento do esquema apresentado abaixo.

• Lecciono no(s) seguinte(s) nível(eis) de Ensino:

2.º ciclo do Ensino Básico 3.º ciclo do Ensino Básico Ensino Secundário

Refira alguns conceitos/termos/noções que considera serem relevantes no processo de ensino e aprendizagem do conceito de PROBABILIDADE

Outros conceitos/termos/noções: _____

MUITO AGRADECIDO

Figura 55 - Questionário aplicado aos professores para a identificação dos conceitos/termos/exemplos utilizados no processo de ensino e aprendizagem da noção de Probabilidade (resposta de um professor)

As respostas obtidas sobre os termos/noções/exemplos que os professores mais consideram ser relevantes no processo de Ensino e Aprendizagem da Probabilidade são as contantes no Anexo IV e foram tratadas com recurso ao SPSS. Importa referir que, ao nível do tratamento destas respostas, não levamos em consideração as diferentes enunciações de termos que variassem em género ou número.

As referências obtidas, totalizaram 207 unidades de análise, grande parte delas intimamente ligadas à noção de Probabilidade. No entanto, algumas foram, na nossa opinião,

extremamente ambíguas e generalistas (e.g. comunicação, difícil, fácil, simples, estratégias, hipótese).

As unidades de registo mais referenciadas foram: *Acontecimento* (16), *Aleatório* (10), *Lei dos Grandes Números* (7), *Casos Possíveis* (7), *Lei de Laplace* (6), *Impossível* (6), *Experiência* (6), *Certo* (6), *Casos Favoráveis* (6), *Possível* (4), *Percentagem* (4), *Frequência relativa* (4), *Fração* (4), *Contagem* (4), *Regra de Laplace* (3), *Incerteza* (3), *Equiprováveis* (3), *Conjuntos* (3), *Combinatória* (3), *Análise Combinatória* (3), *Acontecimento impossível* (3), *Acontecimento certo* (3), *Acaso* (3), *Moedas e Dados* (3).

Apesar de estas referências serem, efetivamente, as mais frequentes, notamos que algumas delas apresentam, implicitamente, aspetos comuns. Assim, e a título de exemplo, os termos certo, possível, equiprováveis, acontecimento impossível e acontecimento certo referem-se a casos particulares de *Acontecimentos*. Nesta lógica, achamos ser importante efetuar uma categorização, mais abrangente, destes conceitos. Esta categorização mais lata, também nos irá permitir reduzir o número de conceitos/noções/exemplos a utilizar na construção das redes PFNET. Do ponto de vista operacional torna-se importante que o número de termos a utilizar nas redes associativas não seja grande, para que os estudantes, no instante em que respondem ao questionário, não demorem muito tempo a dar a sua opinião e que esta seja dada com atenção, ou seja, estes consigam manter a concentração e o interesse pela realização da atividade.

A intenção seguinte foi a de formar categorias com estas referências dos docentes, com o propósito de identificar os conceitos/noções/exemplos que reúnam as características e elementos importantes associados à noção de Probabilidade e que servirão de base à elaboração das Redes Pathfinder. Nesta lógica, impôs-se confrontar estes elementos com alguns artigos de referência sobre Probabilidade (Batanero, 2005; Gal, 2005)

4.3.1.2. Categorização dos termos/conceitos/noções/exemplos com base nos artigos de referência sobre os elementos do significado e a literacia probabilística

Utilizando os elementos, referidos no Capítulo 3, do significado (Batanero, 2005) e da Literacia (Gal, 2005) no contexto do conceito de Probabilidade, foram categorizados, de acordo com o preconizado por Batanero e Gal, os termos/noções/conceitos/exemplos mais referidos pelos professores no questionário, e que se apresentam na Tabela 25.

Tabela 25 - Os diferentes elementos do significado e da literacia da probabilidade e as referências dadas pelos professores (N=22 professores/207 referências)

OS DIFERENTES ELEMENTOS DO SIGNIFICADO DE PROBABILIDADE / LITERACIA PROBABILÍSTICA	AS REFERÊNCIAS DADAS PELOS PROFESSORES E RESPETIVA FREQUÊNCIA	TOTAL DE REFERÊNCIAS
O campo de problemas no qual emerge o objeto matemático e Elementos Linguísticos/Contexto e Questões críticas	Jogo (1) - Jogos de azar (1) - **Moedas e dados** (3)	**5**
	Experiência aleatória (2) - Experiência (3)	**5**
Elementos linguísticos e Procedimentos e Algoritmos/ Grandes Ideias, Linguagem, Contexto e Questões críticas	**Acontecimento** (16) - Certo (9) - Impossível (9) - Contrário (1) - Equiprováveis (4) - Independentes (1) - Possível (4) - Provável (2) -Espaço de acontecimentos (1) - Espaço (1)	**48**
	Aleatório (10) - **Acaso** (3) - Casualidade (1) - Incerteza (3) - Incerto (1) - Possibilidade (1)	**19**
	Casos possíveis (6) - Total (1)	**7**
	Casos favoráveis (6) - Favorável (1)	**7**
Procedimentos e algoritmos/ Descobrir Probabilidades	Razão (2) - Divisão (1) - Fração (4) - Percentagem (4) - **Quociente** (2)	**13**
	Técnicas de Contagem (2) - Análise (2) - Análise Combinatória (3) - Arranjos (2) - Cálculo Combinatório (1) - Combinações (1) - Combinatória (3) - Contagem (4) - Outras Técnicas de Contagem (1) - Permutações (2) - Triângulo de Pascal (1) -Diagramas de árvore (3) -Diagramas (1) - Tabelas de dupla entrada (1) - Tabelas (1)	**28**

OS DIFERENTES ELEMENTOS DO SIGNIFICADO DE PROBABILIDADE / LITERACIA PROBABILÍSTICA	AS REFERÊNCIAS DADAS PELOS PROFESSORES E RESPETIVA FREQUÊNCIA	TOTAL DE REFERÊNCIAS
As definições e propriedades dos objetos e as suas relações com outros objetos matemáticos/Questões Críticas e Grandes Ideias	**Lei de Laplace** (9) - Teorema de Laplace (1) - Regra de Laplace (3) - Bayes (1) - Regra de Bayes (1) - Binómio de Newton (1) - Leis de D'Morgan (1) - Operações com acontecimentos (1) - Conjuntos (3) - Propriedades dos conjuntos (1)	**22**
	[0,1] (1) - ≥ 0 (1) **Valor Numérico** - Números (1) - Resultado (1)	**4**
Os argumentos e demonstrações das propriedades Procedimentos e Algoritmos/Grandes Ideias e Descobrir Probabilidades	**Lei dos grandes números** (7) - Conceito frequencista (1) - Frequência (1) - Frequência relativa (4)	**13**

Já que é nossa intenção que os termos/noções/conceitos/exemplos reflitam os diferentes elementos do significado de Probabilidade (Batanero, 2005) e da Literacia probabilística (Gal, 2005), mas também não sejam em grande número, os elementos selecionados, foram, de acordo com o número de referências, os seguintes (11 termos):

- ***Probabilidade –*** *enquanto conceito aglutinador e objeto de estudo*;
- ***Lançamento de moedas/dados*** – referente a*o campo de problemas no qual emerge o objeto matemático/ Contexto e Questões críticas;*
- ***Experiência aleatória*** – referente *ao campo de problemas no qual emerge o objeto matemático/ Contexto e Questões críticas;*
- ***Acontecimentos*** – referente aos *Elementos linguísticos/Linguagem, Contexto e Questões críticas;*
- ***Acaso*** – referente ao *Elementos linguístico*/Grandes Ideias, Linguagem, Contexto e Questões crítica*s;*
- ***Casos possíveis e casos favoráveis*** – referente aos *Elementos linguísticos*/ Linguagem, Contexto e Questões crítica*s;*
- ***Quociente*** – referente aos *Procedimentos e algoritmos*/ Descobrir Probabilidade*s;*
- ***Técnicas de Contagem de casos*** – referente aos *Procedimentos e algoritmos*/Descobrir Probabilidade*s;*

- ***Lei (ou regra) de Laplace*** – referente *às definições e propriedades dos objetos e as suas relações com outros objetos matemáticos e Procedimentos e algoritmos / Questões críticas e* Descobrir Probabilidades*;*
- ***Valor numérico*** – referente *às definições e propriedades dos objetos e as suas relações com outros objetos matemáticos/ Questões críticas;*
- ***Lei dos Grandes Números*** – Referente *aos argumentos e demonstrações das propriedades/ Descobrir Probabilidade.*

Os termos assim identificados, onze (11), parecem-nos ser relevantes, associados à noção de Probabilidade no processo formal de Ensino e Aprendizagem dos jovens no 9.ºano da Educação Básica em Portugal e reforçados no 12.º ano de escolaridade e que nos parecem ir de encontro ao preconizado por Batanero (2005) e Gal (2005).

A Figura 56 mostra os termos selecionados e que servirão de base à recolha e análise das redes PFNET.

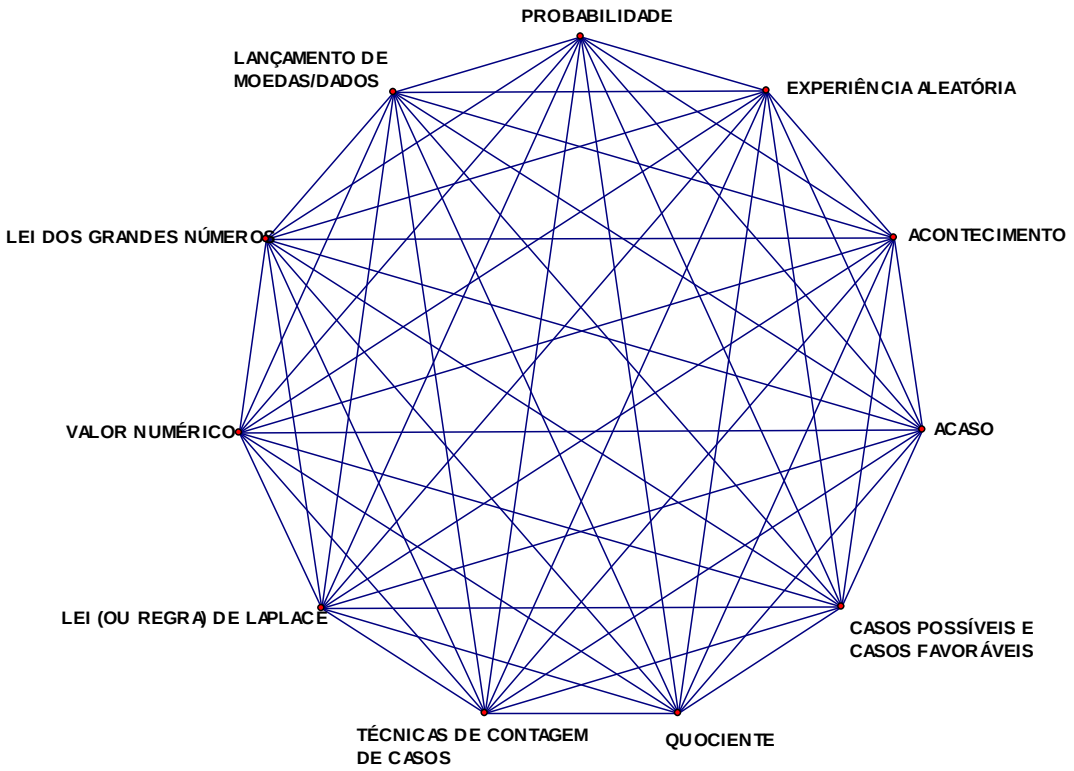


Figura 56 – Os conceitos/termos/noções/exemplos selecionados e todas as suas possíveis relações

Podemos ainda classificar estes conceitos de acordo com a sua maior ou menor generalidade. Sendo o conceito de Probabilidade a noção matemática aglutinadora, podemos considerar a "Acaso", a "Experiência Aleatória" e os "Acontecimentos" como conceitos mais

gerais, os quais para a sua explicação e modelação necessitam de conceitos matemáticos ("Valor numérico", "Quociente", "Técnicas de contagem de casos", "Casos possíveis e favoráveis", "Lei dos Grandes Números e "Lei (ou regra) de Laplace"). Mais restrito, o exemplo considerado "Lançamento de moedas/dados".

A Figura 57 sintetiza esta categorização:

Figura 57 – Hierarquia dos conceitos/termos/noções/exemplos associados à Probabilidade

4.3.1.3. As referências aos termos/conceitos/noções/exemplos, nos manuais escolares

No sentido de complementar esta análise achamos ser necessária uma consubstanciação, da listagem dos termos apresentada anteriormente, dada através dos manuais escolares adotados por professores/escola e utilizados pelos alunos.

Batanero e Serrano, editores de Haro (2002), em relação a este material didático referem que "*Los libros de texto, que sin duda constituyen un recurso didáctico fundamental, no sólo para los alumnos que lo usan, sino para el profesor que basa en ellos una gran parte de su actuación docente*".

A importância destes recursos pedagógicos é ainda dada explicitamente pela Lei de Bases do Sistema Educativo português, ao constatar o estipulado na alínea a), ponto 2, artigo

44º, que refere que "*São recursos educativos privilegiados, a exigirem especial atenção os Manuais Escolares* (…)" (Lei 49/2005 de 30 de Agosto). Para além disto, é reconhecido que o manual exerce uma grande influência na aprendizagem dos alunos, dado que orienta e dirige muitas das atividades dos alunos, assim como a prática pedagógica dos professores (Campanario e Otero, 2000).

A seleção dos livros de texto analisados baseou-se no critério de escolher os manuais do 9.º ano de escolaridade do Ensino Básico mais adotados nas escolas em Portugal. A opção pelos manuais escolares deste ano de escolaridade prende-se com o facto de ser nesta fase do processo formativo dos estudantes na qual se introduz, formalmente, o conceito de Probabilidade e todos os conceitos selecionados são consolidados, e aprofundados, no ano terminal do ensino secundário.

A nossa análise centrou-se nos manuais publicados, em 2012, pelas seguintes editoras:

- ***PI 9*** **– Editora ASA** (Magro, Fidalgo e Louçano, 2012);

- ***Matemática*** **(parte 1) – Porto Editora** (Neves, Silva, Raposo e Silva, 2012);

- ***Matematicamente*** **falando – Areal Editores** (Conceição e Almeida, 2012);

- ***Matemática Dinâmica*** **– Porto Editora** (Faria, Almeida, Antão e Ferreira, 2012);

- ***Novo Espaço*** **(parte 1) – Porto Editora** (Costa e Rodrigues, 2012);

- ***Matemática*** **(volume 1) - Texto Editora** (Pereira e Pimenta, 2012).

Todos os manuais considerados dedicam, sensivelmente, o mesmo número de páginas à temática da Probabilidade.

A tabela seguinte reproduz os índices de cada um dos livros de texto examinados, e cuja digitalização se encontra no Anexo V.

Tabela 26 - Manuais do 9.ºano de escolaridade analisados e respetivos índices

Livro de texto	Índice	
PI 9 – Editora ASA	*UNIDADE 1*	
	Probabilidades	*6*
	Rever + Aplicar	*8*
	Tarefas	*10*
	Experiências e conjunto de resultados	*16*
	Aplicar	*18*
	Probabilidade de um acontecimento	*20*
	Aplicar	*22*
	Conceito frequencista de probabilidade	*24*
	Aplicar	*26*

	Conceito clássico de probabilidade: Lei de Laplace	*28*
	Aplicar	*30*
	Processos organizados de contagem	*32*
	Aplicar	*34*
	Praticar	*36*
	Praticar para a prova final	*42*
	Projeto	*46*
	Não esquecer	*48*
	Testar	*50*
***Matemática* (parte 1) – Porto Editora**	*1 – PROBABILIDADE*	
	ATIVIDADES DE DIAGNÓSTICO	*8*
	1. Experiência aleatória. Espaço de resultados	*10*
	2. Acontecimentos. Operações com acontecimentos	*14*
	3. Definição frequencista de probabilidade	*18*
	4. Regra de Laplace	*22*
	5. Propriedades da probabilidade	*26*
	Probabilidade em experiências compostas	*32*
	…RACIOCINAR…RESOLVER…COMUNICAR…	*35*
	ATIVIDADES COMPLEMENTARES	*38*
	VERIFICA SE JÁ SABES	*48*
	AVALIAÇÃO	*50*
	JOGOS, DESAFIOS E CURIOSIDADES/TECNOLOGIA	*52*
***Matematicamente falando* – Areal Editores**	*PROBABILIDADE*	
	Recordo	*8*
	1 – Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória	*10*
	2 – Noção e cálculo de probabilidade de um acontecimento	*14*
	2.1 Conceito frequencista de probabilidade	*14*
	2.2 Conceito clássico de probabilidade – Lei de Laplace	*17*
	2.3 Acontecimentos complementares. Acontecimento disjuntos	*22*
	Já sei	*28*
	Preparo as provas	*30*
	Teste 1	*34*
***Matemática Dinâmica* – Porto Editora**	*50+50 Avalia o que sabes*	*8*
	Tema 1.Experiências aleatórias. Espaço de resultados	*10*
	Tema 2. Acontecimentos. Classificação dos acontecimentos	*12*
	Tema 3. Operações com acontecimentos	*14*
	Tema 4.Probabilidade de um acontecimento.Regra de Laplace	*16*
	Tema 5.Aplicação da regra de Laplace em experiências compostas	*18*
	Tema 6. Definição frequencista de probabilidade	*20*
	Tema 7.Propriedades da probabilidade	*22*
	Tema 8. Resolução de problemas envolvendo a noção de probabilidade	*24*
	Exercícios e problemas globais	
	Cálculo	
	Comunicação	
	Raciocinio e problemas	*26*
	Síntese do capítulo	*35*
	Avaliação global	*38*
	Tecnologia	*42*
	Histórias dinâmicas	*44*
***Novo Espaço* (parte 1) – Porto Editora**	*Probabilidade*	
	Introdução	*8*
	1. Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória	*9*
	1.1. Espaço de resultados. Acontecimento	*11*
	2. Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento	*14*
	2.1. Probabilidade empírica (ou frequencista) de um acontecimento	*14*
	2.2. Regra de Laplace	*19*
	2.3 Acontecimentos incompatíveis (ou disjuntos ou mutuamente	

	incompatíveis)	*26*
	Para praticar	*30*
	Para a valiar	*40*
***Matemática* (volume 1) - Texto Editora**	*Probabilidade*	
	Organização e tratamento de dados	
	Recorda	*6*
	Recorda e aplica	*8*
	Fenómenos aleatórios	*10*
	Espaço de resultados	*12*
	Acontecimentos	*14*
	Operações com acontecimentos	*16*
	Teoria frequencista de probabilidade.	
	Definição frequencista de probabilidade	*18*
	Lei de Laplace	*20*
	Síntese	*26*
	Aplica +	*27*
	Teste final	*41*

Uma análise mais atenta aos tópicos apresentados nestes índices permite-nos identificar alguns denominadores comuns na apresentação sequencial dos conteúdos.

Para além de atividades iniciais de diagnóstico, em todos os manuais surge a preocupação na clarificação, e entendimento, de *Experiência Aleatória, Acontecimento, Lei (ou Regra) de Laplace,* assim como o estudo do significado *Frequencista de Probabilidade.* Em relação a esta última definição somente dois livros referem e enunciam explicitamente a *Lei dos Grandes Números* (Matemática Dinâmica e PI9, 2012). A *Lei (ou regra) de Laplace* é apresentada em dois dos manuais como a razão e em quatro como o *quociente* entre o número de *casos favoráveis e o número de casos possíveis*.

Em todos estes livros de texto as primeiras atividades dirigidas aos alunos envolvem os exemplos do *lançamento de moedas/dados* e nas quais o termo, frequentemente, utilizado para garantir a aleatoriedade e incerteza da experiência é *acaso* [e.g. "(…) *ao acaso, tiramos sem olhar (…)*" (Matemática – Parte 1, 2012); " *(…) retira-se uma delas ao acaso*" (Matemática – Vol.1, 2012); "*Retirar*, s*ucessivamente, ao acaso (…)"* (Novo Espaço, 2012); "*(…) tira-se uma carta ao acaso (…)*" (Matematicamente falando, 2012); "*(…) tira-se uma bola ao acaso (…)"* (Matemática Dinâmica, 2012) e "*Admitindo que a escolha é feita ao acaso*" (PI9, 2012)]. No âmbito das *Técnicas de contagem de casos,* todos exploram os Diagramas de Árvore e as Tabelas de Dupla Entrada e o facto de a Probabilidade ser um *Valor Numérico*, "*que pode ser expresso através de uma percentagem, fração ou um número decimal*".

Em termos da estrutura do conteúdo, os manuais escolares analisados apresentam uma organização semelhante. Todos estes livros iniciam a sua abordagem com uma diferenciação entre experiência determinística e experiência aleatória, esta última que se

caracteriza pela aleatoriedade, a incerteza e o acaso. Os primeiros exemplos apresentados são, quase sempre, do lançamento de moedas e dados, por serem objetos do dia-a-dia e com os quais os estudantes estão familiarizados.

De seguida, refere-se que ao realizar estas experiências elas produzem um número de acontecimentos diferentes – casos possíveis – alguns destes favoráveis à ocorrência de determinado evento – casos favoráveis. De seguida, discutem-se diferentes técnicas para a contagem destes casos, seja através de Diagramas de Árvore e/ou Tabelas de Dupla entrada, e, após esta contagem, introduz-se a Lei (ou regra) de Laplace, que permite obter um valor numérico para Probabilidade de um acontecimento como o quociente (ou razão) entre os casos favoráveis e os casos possíveis.

Todos os manuais referem que a Probabilidade assim obtida é um valor numérico, que pode ser expresso através de uma fração, percentagem ou número decimal. Importa salientar que todos os livros aportam contributos para a noção de Probabilidade, dada através da Definição Frequencista e com recurso a exemplos de simulação computacional, apesar de nem todos referirem, explicitamente, a Lei dos Grandes Números.

A Figura 58 pretende mostrar a sequência formativa que, genericamente, estes manuais escolares expõem.

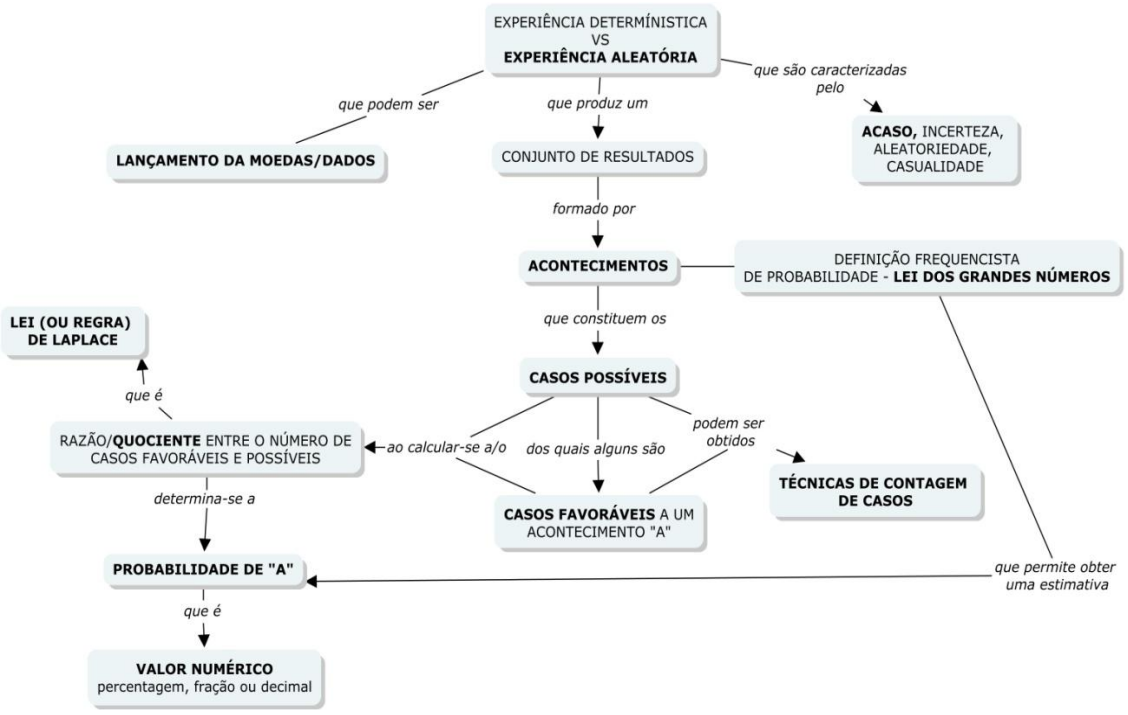


Figura 58 - Sequência formativa dos conteúdos sobre a noção de Probabilidade apresentada na generalidade dos livros de texto do 9.º ano de escolaridade do Ensino Básico

4.3.1.4. As referências nos programas de Matemática do 9.º ano e do 12.º ano de escolaridade, em vigor em 2012/13, dos termos/conceitos/noções/exemplos selecionados.

Apesar de formalmente a noção de Probabilidade surgir somente no 9.º ano de escolaridade, o Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) sugere que os estudantes desde cedo comecem a lidar com termos e representações associados a este conteúdo e a interpretar experiências que envolvam o acaso, a incerteza e a aleatoriedade.

A Probabilidade é um conceito integrado no Bloco Temático - Organização e tratamento de dados e, como é referido no Programa de Matemática *"No que se refere à noção de probabilidade, os programas dos ciclos anteriores prevêem que os alunos trabalhem informalmente a noção de acaso e adquiram o vocabulário básico relativo às situações aleatórias, sendo neste ciclo que se abordam os conceitos de probabilidade de Laplace e frequencista."*

Uma leitura mais apurada deste documento permite encontrar expressões que corroboram a importância dos conceitos identificados anteriormente e que iremos utilizar para a construção das Redes Associativas Pathfinder. Assim, podemos identificar referências relativas a:

- ***Lançamento de moedas/dados*** – "*O lançamento da moeda ao ar, (…) e o lançamento de dados são exemplos*"; "*lançar dois dados*"(DEB, , 2007).
- ***Experiência aleatória*** – "*os alunos também contactam no seu dia-a-dia com situações aleatórias*"; "*a noção de que uma situação aleatória está relacionada com uma experiência*", "*estudo de situações aleatórias simples*"; "*os alunos devem realizar experiências aleatórias*"; "*vocabulário básico relativo às situações aleatórias*"; "*compreensão das noções de experiência aleatória*"; "*Noção de experiência aleatória*" (DEB, , 2007).
- ***Acontecimentos*** – "*existem acontecimentos certos, possíveis, impossíveis, prováveis e improváveis*"; "*utilizar os termos impossível, possível, certo, provável, igualmente provável e improvável*."; "*acontecimento associado a uma tal experiência*"; "*Noção de um acontecimento*"; "*Identificar acontecimentos complementares*"; "*Identificar acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos*" (DEB, , 2007).
- ***Acaso*** – "*conceito de acaso*"; "*resultado que depende do acaso*"; "*Dando seguimento ao trabalho com a incerteza* (…)"; "*a noção de acaso*"; "*o resultado em cada realização da experiência dependa do acaso"* (DEB, , 2007).

- ***Casos possíveis e Casos favoráveis*** – "*listar todos os resultados possíveis*"; "(…) *e registar todas as possibilidades*"; "*dos resultados possíveis*"; "*Identificar e determinar todos os resultados possíveis quando se realiza determinada experiência aleatória*" (DEB, , 2007).
- ***Quociente*** – "*entre os casos favoráveis e possíveis, todos os resultados igualmente prováveis*" (DEB, , 2007).
- ***Técnicas de Contagem de casos*** – "*esquemas de contagem gráfica"; "tabelas de frequências"; "Recorrer, quando conveniente, a diagramas em árvore (…) e para contagens"* (DEB, , 2007).
- ***Lei (ou regra) de Laplace*** – "*os conceitos de probabilidade de Laplace (…)"; "calcular probabilidade (…) considerando situações simples onde se possa admitir que os resultados da realização da experiência aleatória são igualmente possíveis (conceito clássico de Laplace)"; "Calcular a probabilidade de um acontecimento pela regra de Laplace."; "quantificar-se esse valor recorrendo à regra de Laplace"* (DEB, , 2007).
- ***Valor numérico*** – "*probabilidade de um acontecimento e que a sua medida se situa entre 0 e 1*."; "*Salientar que a probabilidade pode ser escrita na forma de fracção, decimal ou percentagem"* (DEB, , 2007).
- ***Lei dos Grandes Números*** – "*A realização de várias experiências (…) permite aos alunos concluírem que, embora o resultado em cada realização da experiência dependa do acaso, existe uma certa regularidade ao fim de muitas realizações da experiência*"; *"realizam experiências que possibilitam a exemplificação da regularidade a longo termo*"; "*Utilizar as tabelas de frequências relativas para explorar a regularidade a longo termo em situações aleatórias*."; "*os conceitos (…) e frequencista"*; "*estimar (…) quer utilizando a frequência relativa (conceito frequencista de probabilidade) "; "quantificar-se esse valor recorrendo ao conceito frequencista"* (DEB, , 2007).

Também o Programa de Maremática do 12.º ano de escolaridade (2003) contempla locuções relativas a estes termos/conceitos/noções/exemplos, apesar de, para alguns, não estas não serem explicitas. Assim,

- ***Lançamento de moedas/dados*** – "*A simulação e o jogo ajudam a construir adequadamente o espaço dos resultados*". (Programa de Matemática A, 2003)
- ***Experiência aleatória*** – "*casos de incerteza e para interpretar previsões baseadas na incerteza*"; "*Experiência que permitam tirar partido de materiais lúdicos e de simulações com a calculadora.*" (Programa de Matemática A, 2003)

- ***Acontecimentos*** – "*sabem como descrever os acontecimentos associados a uma experiência aleatória*"; "*determinar a probabilidade de acontecimentos*". (Programa de Matemática A, 2003)
- ***Acaso*** – "*métodos para estudar casos de incerteza e para interpretar previsões baseadas na incerteza".* (Programa de Matemática A, 2003)
- ***Casos possíveis e Casos favoráveis*** – "*reconhecer os casos possíveis e os casos favoráveis."* (Programa de Matemática A, 2003)
- ***Quociente*** – "razão *entre os casos favoráveis e possíveis, todos equiprováveis*". (Programa de Matemática A, 2003)
- ***Técnicas de Contagem de casos*** – "*No caso das contagens que sejam facilitadas por raciocínios combinatórios, é aconselhável que os estudantes comecem por contar os elementos um a um, utilizando exemplos (desde os mais simples atá aos mais complicados), até que reconheçam a utilidade dos diagramas e depois das organizações simplificadoras."; As técnicas de contagem que aqui aparecem como auxiliar do cálculo de probabilidades".* (Programa de Matemática A, 2003)
- ***Lei (ou regra) de Laplace*** – "*definição clássica de probabilidade ou de Laplace.".* (Programa de Matemática A, 2003)
- ***Valor numérico*** – "*propriedades das probabilidades".* (Programa de Matemática A, 2003)
- ***Lei dos Grandes Números*** – "*aproximação frequencista de probabilidade;".* (Programa de Matemática A, 2003)

4.3.2. Inquirição, nos 1.º e 2.º Momentos, dos estudantes do 9.º e do 12.º ano de escolaridade

Após a seleção dos termos/noções/conceitos/exemplos, passou-se à recolha de dados junto dos estudantes.

Como atrás foi referido (Capítulo 3), as Redes Associativas *Pathfinder* constituem uma metodologia que procura representar uma estrutura do conhecimento a partir de dados de proximidade. Nesta lógica e definidos os conceitos a utilizar nas Redes Associativas *Pathfinder*, utilizaremos o *software GOLUCA* (Godinho, 2007; Casas, Luengo e Godinho,2011) para realizar a recolha de dados e as respetivas representações.

Cada aluno teve que emitir um juízo sobre a proximidade relativamente a 55 pares de conceitos ($C_2^{11} = 55$) combinados a partir dos onze conceitos anteriormente referidos.

Em termos temporais, o 1.º Momento de recolha de dados ocorreu em janeiro de 2013 e o 2.º Momento em finais de maio e, em algumas turmas, princípios de junho de 2013.

4.3.2.1. O programa *GOLUCA*

Dada a complexidade e a quantidade de dados, no que concerne ao número de sujeitos e variáveis, utilizamos para a análise e representação das Redes Associativas *Pathfinder* o *software Goluca*, desenvolvido por Casas, Luengo e Godinho (Godinho, 2007;Casas, Godinho e Luengo, 2011).

O *Goluca*, para além de nos possibilitar a recolha dos dados, tem integrado todos os procedimentos iterativos anteriormente descritos e apresenta, ainda, a representação da respetiva estrutura cognitiva, dada através das PFNET.

Comparativamente com outros programas (KNOT, PATHFINDER) é extremamente fácil de usar, apresenta um interface bastante intuitivo e a possibilidade de utilizar diferentes tipos de dados (imagem, som) alargando, deste modo, a sua utilização a outros temas e indivíduos. (Casas et al, 2011). Simultaneamente, e em complemento, o *Goluca* calcula os indicadores quantitativos que permitem análises estatísticas inferenciais: Densidade da rede, Coerência, Fator dos nós nucleares, fator do grau dos nós nucleares, Índice de Complexidade da rede.

Por defeito, os parâmetros r e q, necessários à aplicação do algoritmo Pathfinder, encontram-se previamente definidos para r=∞ e q=n-1 (11-1=10).

Inicialmente, é importante a definição dos termos e dos grupos a serem utilizados nas redes PFNET. Para tal cria-se um projeto com o *Goluca*, com a extensão **.gpj*, no qual ficarão alojados os dados recolhidos de todos os alunos.

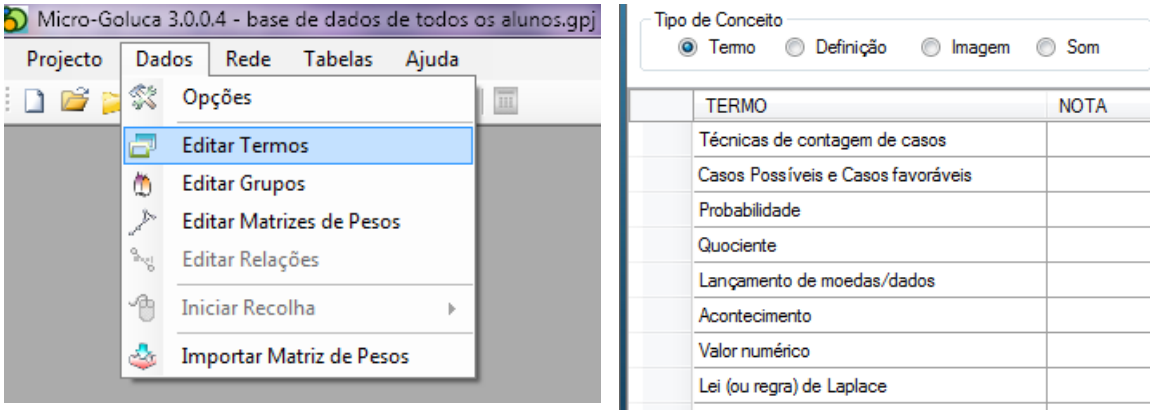


Figura 59 – Definição de termos e grupos com o *Goluca*

Após esta fase preparatória, o trabalho com o *Goluca* pode, na nossa opinião, ser definido de acordo com três etapas:

1) Estabelecer relação entre os termos;

2) Representação da estrutura cognitiva, e

3) Análise da representação da estrutura.

Na etapa de estabelecer as relações entre os termos, procede-se à recolha de dados para quantificar as relações entre os termos, previamente definidos.

Aos diferentes sujeitos é solicitado para que, na sua opinião, indique a maior (menor) proximidade entre os pares de conceitos que, sucessivamente, vão aparecendo no *layout* do *Goluca*, num total de $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Quanto maior (menor) for o peso atribuído, maior (menor) será a proximidade entre os conceitos/termos. Este procedimento é feito, utilizando o cursor do rato, clicando no triângulo, de modo a indicar a intensidade desta relação.

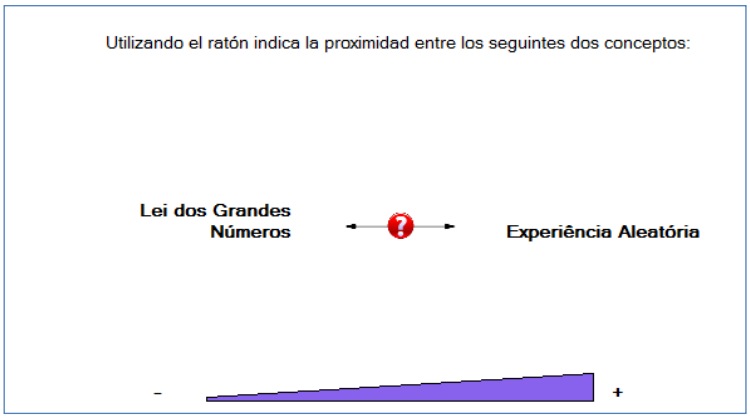


Figura 60 – Interface do *Goluca* para a recolha de dados

Automaticamente é gerada uma matriz para cada individuo. A Tabela seguinte – Tabela 27 – apresenta os pesos da proximidade, dadas por um aluno, em relação à noção de Probabilidade. Esta matriz fica automaticamente gravada no projeto definido.

Tabela 27 – Matriz de proximidade de um aluno do 9.º ano sobre o conceito de Probabilidade, obtida com o software *Goluca*

	TCC	EA	CPCF	Pro	Quo	LMD	Acon	VN	LL	Aca
Técnicas de contagem de casos (TCC)										
Experiência Aleatória (EA)	0,216									
Casos Possíveis e casos favoráveis (CPCF)	0,506	0,848								
Probabilidade (Pro)	0,558	0,913	0,923							
Quociente (Quo)	0,535	0,126	0,535	0,535						
Lançamento de moedas/dados (LMD)	0,545	0,565	0,952	0,935	0,148					
Acontecimento (Acon)	0,181	0,906	0,939	0,881	0,252	0,510				
Valor numérico (VN)	0,532	0,548	0,497	0,116	0,835	0,500	0,177			
Lei (ou regra) de Laplace (LL)	0,194	0,929	0,526	0,558	0,506	0,187	0,197	0,168		
Acaso (Aca)	0,926	0,568	0,868	0,490	0,168	0,935	0,542	0,126	0,116	
Lei dos Grandes Números (LGN)	0,219	0,129	0,165	0,506	0,503	0,184	0,148	0,487	0,145	0,226

Esta matriz de proximidade constitui a base numérica para a representação da estrutura cognitiva do aluno. Posteriormente, estes valores da proximidade são tratados com base na análise de semelhanças entre os pares de conceitos, ou termos, usando para tal uma métrica-r de *Minkowski*, a qual é utilizada para calcular distâncias e construir a disposição geométrica organizacional – as Redes Associativas Pathfinder.

O interface do *Goluca* permite, com facilidade, a construção da Rede PFNET (Figuras 61 e 62).

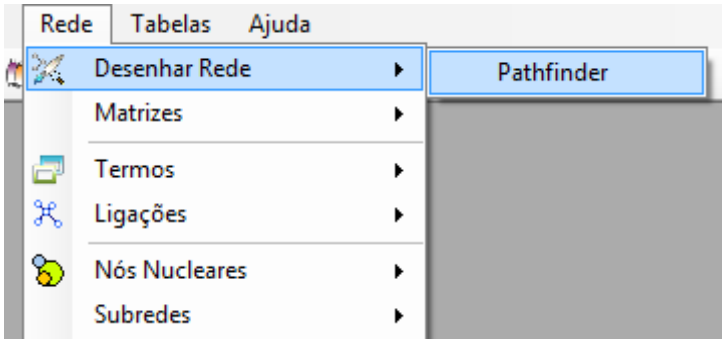


Figura 61 – Construção da rede PFNET no *Goluca*

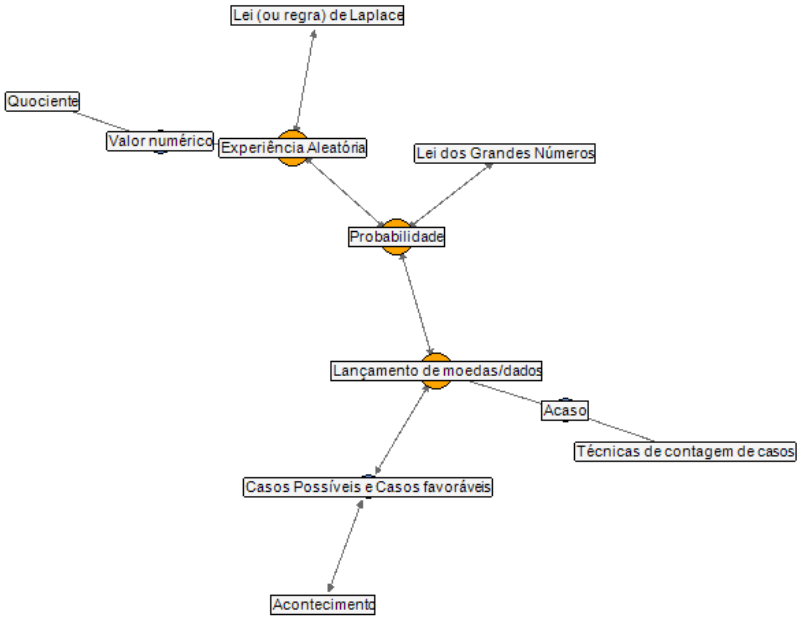


Figura 62 – A rede PFNET (∞,10) de um aluno do 9.º ano de escolaridade

Uma outra funcionalidade do *Goluca* é a construção da rede média de um dado grupo, a qual é obtida tendo como base as matrizes individuais de todos os alunos inquiridos e pertencentes ao grupo em questão.

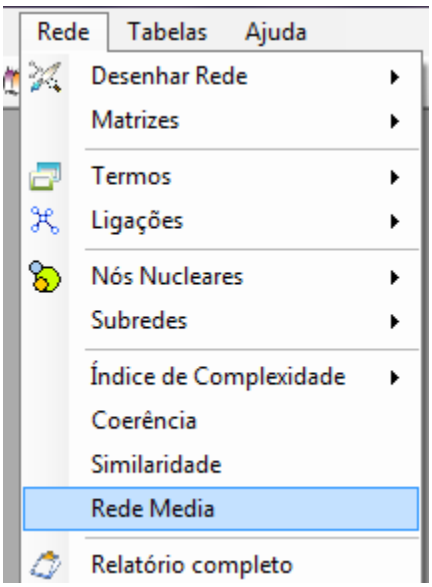


Figura 63 – Construção da rede média PFNET no *Goluca*

Com base na rede PFNET assim obtida podemos identificar as relações mais importantes, os conceitos Nucleares (os que apresentam mais de duas ligações) e que, de acordo com a TCN, assumem uma maior relevância na estrutura cognitiva, e como estes vão evoluindo na estrutura cognitiva de um individuo, durante a aprendizagem de um determinado conceito.

Para além dos Conceitos Nucleares, é possível identificar os nós extremidade (com uma só ligação) e que à luz da TCN, são aqueles que ainda não estão devidamente incorporados na estrutura cognitiva dos alunos.

Como referimos, e em complemento, o *package Goluca* calcula alguns indicadores quantitativos, apresentando os respetivos valores na forma de tabelas, facilmente exportáveis, para outros programas de tratamento estatístico de dados (e.g. Excel ou SPSS).

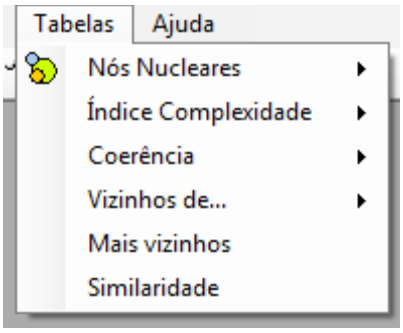
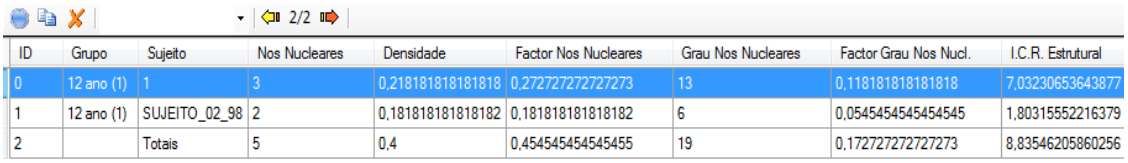


Figura 64 – Determinação dos indicadores quantitativos das redes PFNET

Estes indicadores são facultados na forma de tabelas, o que facilita o tratamento estatístico dos dados:



ID	Grupo	Sujeito	Nos Nucleares	Densidade	Factor Nos Nucleares	Grau Nos Nucleares	Factor Grau Nos Nucl.	I.C.R. Estrutural
0	12 ano (1)	1	3	0,218181818181818	0,272727272727273	13	0,118181818181818	7,032306536438777
1	12 ano (1)	SUJEITO_02_98	2	0,181818181818182	0,181818181818182	6	0,0545454545454545	1,803155552216379
2		Totais	5	0,4	0,454545454545455	19	0,172727272727273	8,835462058602566

Figura 65 – Indicadores quantitativos das redes PFNET's, fornecidas pelo *Goluca (Nós nucleares, Densidade, Factor dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares Factor do grau dos nós nucleares e Índice de complexidade da rede)*

4.3.2.2. As técnicas estatísticas utilizadas para analisar os indicadores quantitativos das Redes Associativas *Pathfinder*

No processo de análise de dados, o investigador é confrontado com a necessidade de mensurar, controlar ou manipular uma, ou mais, variáveis. Assim parece-nos claro que a intenção de um estudo, com uma vertente de análise estatística, são as variáveis e a informação que estas podem facultar.

No decorrer da análise de dados irão ser utilizadas algumas técnicas e métodos estatísticos que visarão, em última instância, a obtenção de conclusões mais consolidadas. A escolha dos procedimentos está intimamente associada, essencialmente, à tipologia das variáveis em estudo e das intenções/objetivos preconizadas pelas mesmas. Assim utilizaremos,

- **Estatística descritiva**
- **Estatística Inferencial**

  Teste do qui-quadrado

  Teste t-Student

  Teste de Mann-Whitney

  Teste de Kolmogorov/Smirnov

  Teste de Levene
- **Árvores de decisão**
- **Análise de Clusters**
- **Regressão**

4.3.2.3. Questionário para deteção dos potenciais Conceitos *Threshold*

Nesta fase do nosso estudo aplicamos um questionário, em papel (Anexo II), aos estudantes. Neste instrumento de recolha de dados, para além do género e do ano de escolaridade, perguntava-se aos alunos qual o conceito/ideia/definição que acharam ser o mais e o menos difícil de compreenderem no decorrer da aprendizagem do conceito de Probabilidade.

Para além desta informação, tornou-se importante analisar as várias dimensões caracterizadores dos Conceitos *Threshold* – transformadora, irreversibilidade, integradora e limitadora - para poderem ser considerados potenciais Conceitos *Threshold* (Meyer e Land, 2003). Para tal elaboramos um questionário, adaptado de Holloway, Alpay e Bull (2009), para tentar detetar a presença das diferentes dimensões dos conceitos mais problemáticos/difíceis.

Com este propósito, a questão IV do questionário é constituída por 13 afirmações que permitem aferir sobre as características dos Conceitos *Threshold* (Holloway, Alpay e Bull, 2009), as quais são valorados em itens de *Likert* de 5 níveis (*1- Totalmente em desacordo* e, no outro extremo, *5 - Totalmente de acordo*, assumindo-se o valor de 3 como indicador de nem desacordo nem acordo). As asserções consideradas no questionário foram:

1. *Eu acho que o* ***conceito*** *é fácil de explicar a um outro colega.*

2. *O entendimento do* ***conceito*** *transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.*

3. *Eu consigo ver aplicações do* ***conceito*** *a outras áreas e disciplinas.*

4. *O* ***conceito*** *é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.*

5. *Eu ter entendido o* ***conceito*** *implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.*

6. *Eu ainda não entendi realmente o* ***conceito****.*

7. *Compreender o* ***conceito*** *foi como um "clique" e agora vejo o que realmente significa.*

8. *Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o* ***conceito****.*

9. *Agora que entendi o* ***conceito****, acho que seria difícil esquecê-lo.*

10. *Entender o* ***conceito*** *fez-me sentir mais como um matemático.*

11. *Foi difícil ver como o* ***conceito*** *se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.*

12. *Assim que entendi o* ***conceito****, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.*

13. *Vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o* ***conceito****.*

Aos estudantes foi solicitado que opinassem sobre estas várias afirmações, especificamente em relação ao conceito que acharam ser o mais complicado e difícil de entender, pelo que a dimensão problemática encontrava-se previamente comprovada.

Sendo uma das escalas mais usadas em pesquisas de opinião (Brown, 2011), pretendeu-se que estudantes especificassem o seu nível de concordância com as 13 afirmações. As pontuações obtidas nesta escala de *Likert*, quando todos os itens estão pela positiva, varia, para cada aluno, no intervalo de 13 pontos (o aluno responde "1" aos 13 itens) a 65 pontos (o aluno responde "5" a todos os 13 itens).

O modo como estes itens estão formulados, visa definir quatro dimensões dentro desta escala – *Transformadora, Integradora, Irreversibilidade* e *Nível de entendimento*. Assim, temos,

Tabela 28 - Escala de *Likert* para análise de potenciais Conceitos *Threshold* e respetivas dimensões e itens

	Dimensão	Item	Escala de cada dimensão
Escala de *Likert* para deteção de potenciais Conceitos *Threshold*	*Transformadora*	2,7 e 10	[3×1=3;3×5=15]
	Integradora	4,5,8,11 e 12	[5×1=5;5×5=25]
	Irreversibilidade	9 e 13	[2×1=2;2×5=10]
	Nível de entendimento	1,3 e 6	[3×1=3;3×5=15]

Na sua globalidade, esta escala varia entre 13 (=13×1) e 65 (13×5) pontos. Quanto mais próximo dos 65 pontos o valor da escala se encontrar, maior é a indicação de que o conceito referido como o mais difícil constitui um potencial Conceito *Threshold*.

Assumiremos que um conceito, para um aluno, verifica a dimensão ***Transformadora*** e possui um ***Nível de entendimento*** alto se a pontuação obtida pelo aluno a partir das respostas aos respetivos itens, estiver contida no intervalo [12;15]. Analogamente, consideraremos que, para um aluno, o conceito verifica a caraterística ***Irreversibilidade*** se a pontuação obtida a partir das respostas aos itens respetivos, estiver no intervalo [8;10]. Por último o conceito para o aluno verificará a propriedade ***Integradora*** se a pontuação obtida a partir da adição dos itens respetivos, pertencer ao intervalo [20;25].

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1. ANÁLISE DOS DADOS DO 1.º MOMENTO DE RECOLHA DE DADOS

5.1.1. A tipologia dos conceitos das redes PFNET, no 1.º momento de recolha de dados

5.1.2. O Teste do Qui-quadrado para a tipologia dos termos/conceitos/noções/exemplos, no 1.º momento de recolha de dados

5.1.3. Árvores de Decisão para o 1.º momento de recolha da dados

5.1.4. Análise dos indicadores quantitativos das redes PFNET, no 1.º momento da recolha de dados

5.1.4.1. A influência do Género nos indicadores quantitativos das PFNET, no 1.º momento da recolha de dados

5.1.4.2. A influência do Ano de Escolaridade nos indicadores quantitativos das PFNET, no 1.º momento da recolha de dados

5.1.4.3. O Índice de Complexidade das redes PFNET (ICR), no 1.º momento de recolha de dados

5.1.4.3.1. O Índice de Complexidade das redes PFNET de acordo com o Género, no 1.º momento de recolha de dados

5.1.4.3.2. O Índice de Complexidade das redes PFNET de acordo com o Ano de Escolaridade, no 1.º momento de recolha de dados

5.1.5. As Redes Médias *Pathfinder* do 1.º momento da recolha de dados

5.1.5.1. A Rede Média Associativa PFNET relativa ao 9.º ano de escolaridade, no 1.º momento de recolha de dados

5.1.5.2. A Rede Média Associativa PFNET relativa ao 12.º ano de escolaridade, no 1.º momento da recolha de dados

5.1.5.3. Índice de Similaridade entre as Redes Médias PFNET do 9.º e 12.º ano, no 1.º momento da recolha de dados

5.1.5.4. Análise de *Clusters* às Redes Médias PFNET do 9.º e 12.º ano, no 1.º momento da recolha de dados

5.2. ANÁLISE DOS DADOS DO 2.º MOMENTO DE RECOLHA DE DADOS

5.2.1. A tipologia dos conceitos das redes PFNET, no 2.º momento de recolha da dados

5.2.2. O Teste do Qui-quadrado para a tipologia dos termos/conceitos/noções/exemplos, no 2.º momento de recolha de dados

5.2.3. Árvores de Decisão para o 2.º momento de recolha da dados

5.2.4. Análise dos indicadores quantitativos das PFNET, no 2.º momento da recolha de dados

5.2.4.1. A influência do Género nos indicadores quantitativos das PFNET, no 2.º momento da recolha de dados

5.2.4.2. A influência do Ano de Escolaridade nos indicadores quantitativos das redes PFNET, no 2.º momento da recolha de dados

5.2.4.3. O Índice de Complexidade das redes PFNET (ICR), no 2.º momento de recolha de dados.

5.2.4.3.1. O Índice de Complexidade das redes PFNET de acordo com o Género, no 2.º momento da recolha de dados

5.2.4.3.2. O Índice de Complexidade das redes de acordo com o Ano de Escolaridade, no 2.º momento de recolha de dados

5.2.5. As Redes Médias *Pathfinder* do 2.º momento da recolha de dados

5.2.5.1 A Rede Média Associativa PFNET relativa ao 9.º ano de escolaridade no 2.º momento da recolha de dados

5.2.5.2. A Rede Média Associativa PFNET relativa ao 12.º ano de escolaridade, no 2.º momento da recolha de dados

5.2.5.3. Índice de Similaridade entre as Redes Médias PFNET do 9.º e 12.º ano, no 2.º momento da recolha de dados

5.2.5.4. Análise de Clusters às Redes Médias PFNET do 9.º e 12.º ano, no 2.º momento da recolha de dados

5.3. ANÁLISE COMPARATIVA DAS REDES E DAS REDES MÉDIAS PFNET NOS DOIS MOMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

5.3.1. Frequência dos conceitos nas redes PFNET nos dois momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade

5.3.2. Comparação dos resultados dos indicadores quantitativos, em função do Género e do Ano de Escolaridade, nos 1.º e 2.º momentos de recolha de dados

5.3.2.1. Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET dos rapazes, do 1.º momento com o 2.º momento de recolha de dados

5.3.2.2. Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET das raparigas, do 1.º momento com o 2.º momento de recolha de dados

5.3.2.3 Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET para o 9.º ano de escolaridade, do 1.º momento com o 2.º momento de recolha de dados

5.3.2.4. Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET para o 12.º ano de escolaridade, do 1.º momento com o 2.º momento de recolha de dados

5.3.2.5. Comparação do Índice de Complexidade das redes PFNET dos 9.º e 12.º anos de escolaridade, do 1.º momento com o 2.º momento da recolha de dados

5.3.3. Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET do 9.ºano (1.º momento) com o 12.º ano de escolaridade (2.º momento)

5.3.4. Comparação do Índice de Complexidade das redes do 9.º ano (1.º momento) com o do 12.º ano (2.º momento)

5.3.5. Tipologia dos conceitos nas Redes Médias PFNET, nos 1.º e 2.º momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade

5.4. QUESTIONÁRIO PARA A DETEÇÃO DE POTENCIAIS CONCEITOS

5.4.1. Os conceitos das PFNET mais fáceis e mais complicados de entender

5.4.2. Análise dos itens e da escala do questionário dos potenciais Conceitos *Threshold*

5.4.3. Análise das dimensões da escala do questionário dos potenciais Conceitos *Threshold*

5.4.4. Relação entre os potenciais Conceitos *Threshold* e as diferentes tipologias dos conceitos das redes PFNET

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DOS RESULTADOS

O aspecto fundamental que a realidade nos apresenta e aquele, portanto, ao qual se deve prender a razão ao procurar uma explicação racional do mundo, é o estarem constantemente as coisas transformando-se umas nas outras.

Bento de Jesus Caraça

Neste Capítulo vamos analisar, e descrever, a informação obtida nos dois Momentos de recolha de dados – 1.º Momento e 2.º Momento. Estes foram recolhidos/tratados utilizando o *Goluca*, *SPSS* (versão 20) e, pontualmente, a folha de cálculo *Excel*.

Os princípios analíticos que nortearam a análise feita aos dados obtidos em ambos os Momentos de questionamento foram semelhantes, sendo que as variáveis estudadas e os procedimentos estatísticos utilizados foram análogos.

Porém, e face às hipóteses de investigação inicialmente formuladas, achamos importante efetuar uma comparação, de características transversais, de algumas variáveis/resultados dos dois instantes em que ocorreu a recolha de dados.

Para além disto, e no 2.º Momento de recolha de dados, foi também efetuada um análise, baseada num questionário (adaptado de Holloway, Alpay e Bull, 2009), para averiguar da presença nas redes PFNET de potenciais Conceitos *Threshold* e a sua possível relação com as diferentes tipologias dos conceitos da Teoria dos Conceitos Nucleares.

A estrutura dada a esta análise de resultados apresenta-se sistematizada no esquema que representamos na Figura 66.

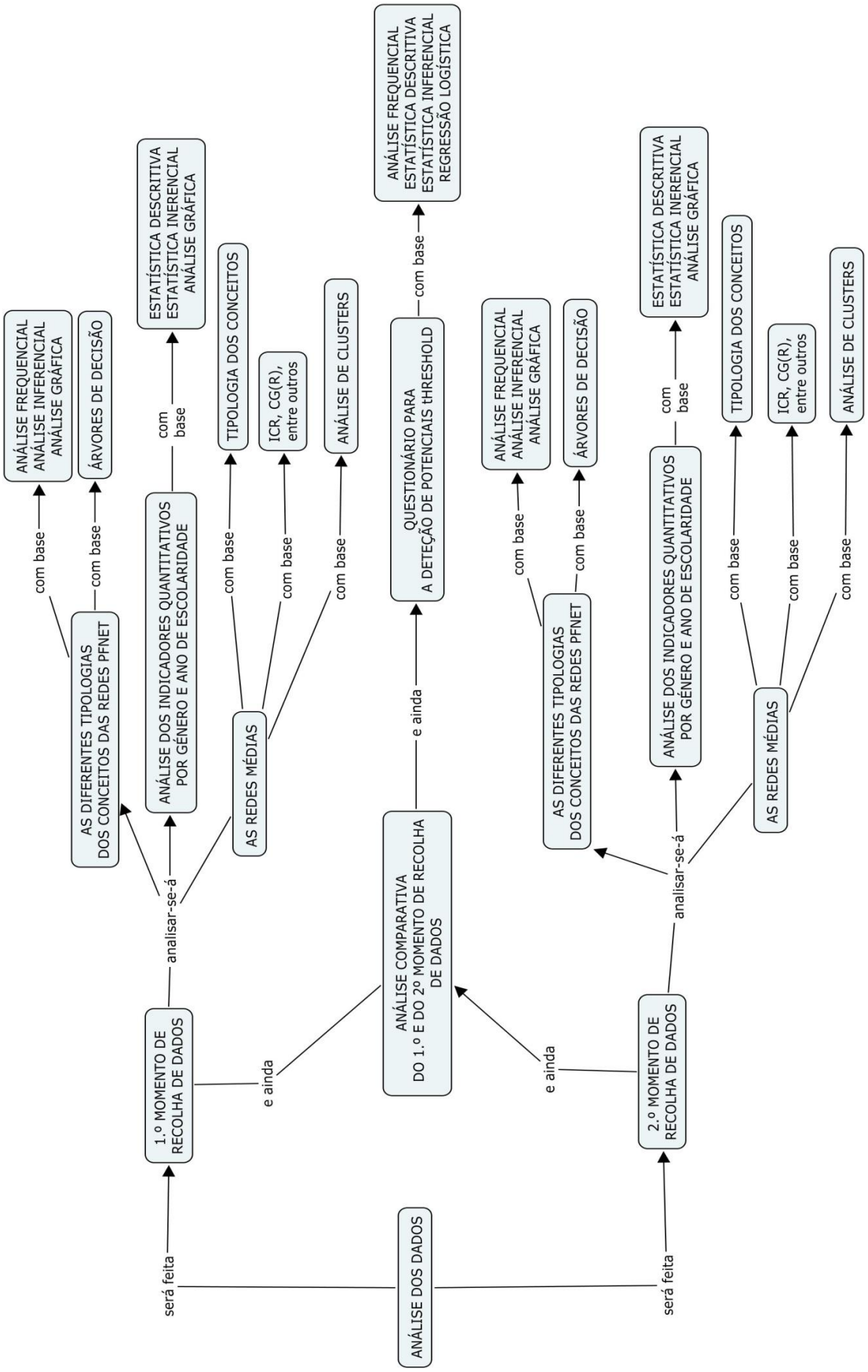


Figura 66 – Procedimentos utilizados na análise de dados

5.1. ANÁLISE DOS DADOS DO 1.º MOMENTO DE RECOLHA DE DADOS

Reforçamos mais uma vez, o referido no Capítulo 4, de que neste 1.º Momento de recolha de dados, os estudantes, com idades entre os 14/15 e os 17/18 anos, frequentavam os 9.ºano e o 12.º anos de escolaridade, em cinco escolas do Concelho de Beja – Portugal:

- Escola Secundária com 3.º ciclo - D.Manuel I;
- Escola Secundária com 3.º ciclo de Diogo de Gouveia;
- Agrupamento de Escolas n.º 1 de Santa Maria;
- Agrupamento de Escolas n.º 2 Mário Beirão;
- Agrupamento de Escolas n.º 3 de Santiago Maior.

As respostas dadas pelos estudantes, neste instante da recolha de dados, foram efetuadas em computador e, por esta razão, as mesmas ocorreram em salas de aula de informática, nas últimas semanas do mês de janeiro e primeira de fevereiro de 2013. Optou-se por estas datas, já que este tema foi lecionado, em ambos os anos escolares, no 1.º período do ano letivo de 2012/13.

O total de estudantes inquiridos foi de 344, sendo que 250 frequentavam o ano terminal do Ensino Básico e 94 estavam a finalizar o Ensino Secundário. Como se pode constatar na Tabela 29, a maioria dos alunos (53,8%) são do género feminino e, relativamente ao ano de escolaridade, são maioritariamente do 9.º ano (72,7%).

Tabela 29 – Distribuição dos estudantes de acordo com o Género e o Ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

Género	Número de alunos	Percentagem	Ano	Número de alunos	Percentagem
Masculino	159	46,2	9.ºano	250	72,7
Feminino	185	53,8	12.º ano	94	27,3

Com exceção das escolas de Santa Maria e Mário Beirão, em todas as outras escolas os discentes do género feminino constituem a maior parcela. A escola que contribuiu com mais alunos para este estudo foi a D.Manuel I (130) e com menos estudantes a Mário Beirão (41).

A distribuição dos estudantes no que concerne ao Género, por Escola, é apresentada na Figura 67.

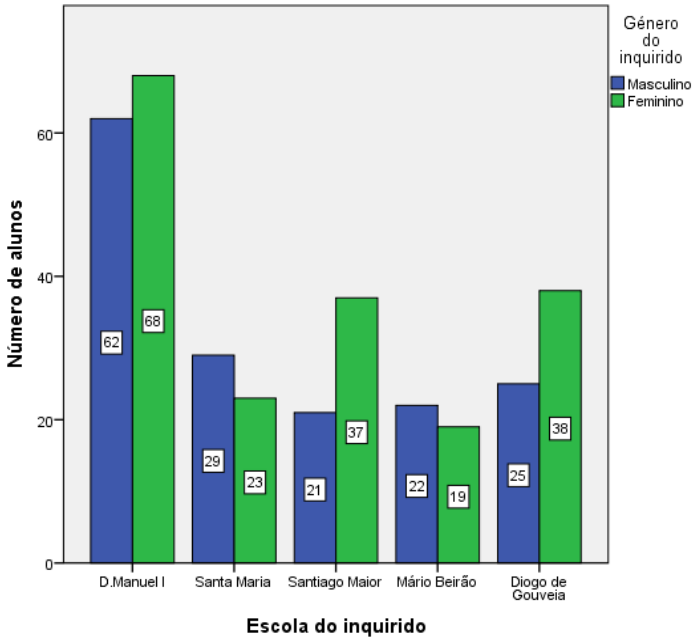


Figura 67 – Distribuição dos estudantes pelas Escolas e Género, no 1.º Momento de recolha de dados

Em relação à distribuição dos discentes por Escolas e Anos de escolaridade verifica-se que em Santa Maria, Santiago Maior e Mário Beirão, em virtude de serem escolas Básicas, só se inquiriram alunos do 9.º ano.

Foi na D. Manuel I e na Diogo de Gouveia que a totalidade dos alunos do 12.º ano foram inquiridos (Figura 68).

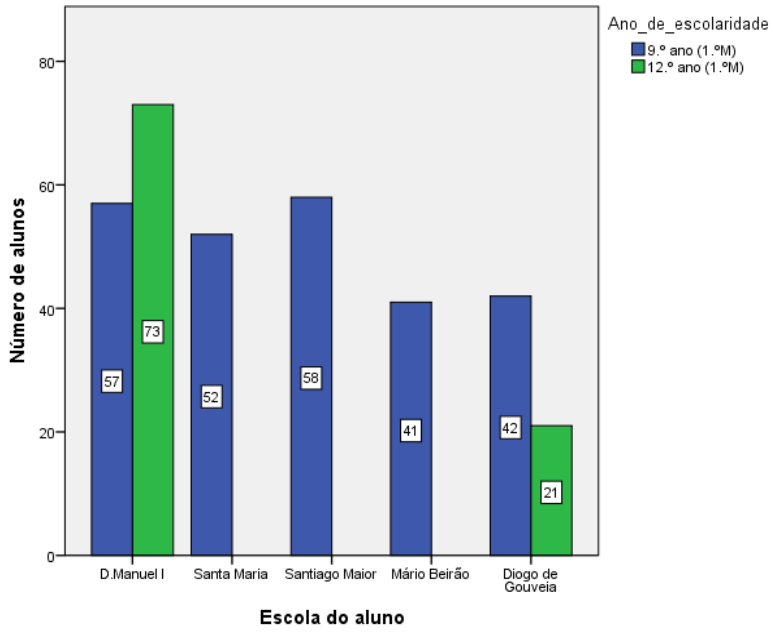


Figura 68 – Distribuição dos alunos por Escola e Ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

Na amostra, a Santiago Maior foi a escola que mais contribuiu com alunos do 9.º ano (23,2%) e a D.Manuel I a instituição escolar que proporcionou mais estudantes do 12.º ano (77,7%).

5.1.1. A tipologia dos conceitos das redes PFNET, no 1.º Momento de recolha de dados

Após a recolha de dados efetuada com o *software Goluca*, as redes produzidas a partir das matrizes obtidas com base na opinião dos alunos em relação às proximidades entre os conceitos/noções/exemplos permitiu-nos obter uma representação organização cognitiva, dos vários alunos, sobre a Probabilidade.

A estrutura topológica das redes PFNET é, como seria de esperar, diferenciada de aluno para aluno.

Assim encontramos redes com uma disposição dos termos de um modo circular, linear, muito centradas num só conceito e, inclusive, em vários conceitos.

De seguida apresentamos alguns exemplos de redes associativas PFNET obtidas.

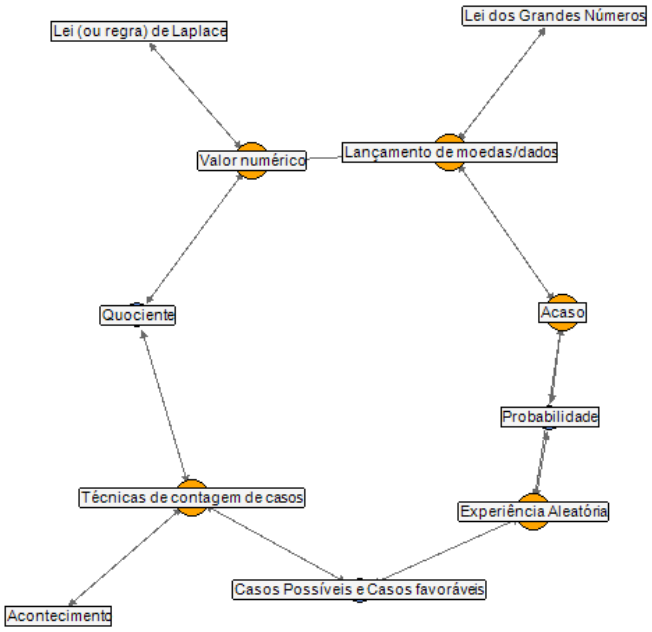


Figura 69 - Rede circular (aluno do 9.º ano, 1.º Momento – Feminino)

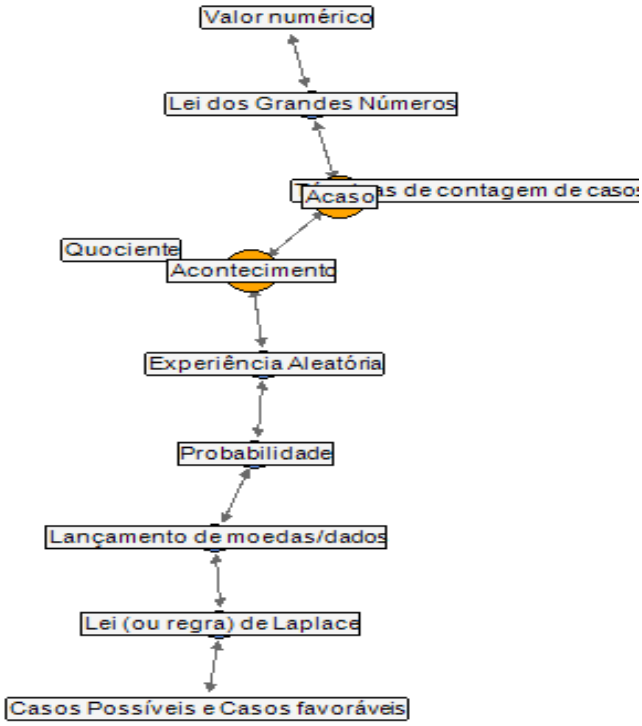


Figura 70 - Rede linear (aluno do 9.º ano, 1.º Momento – Masculino)

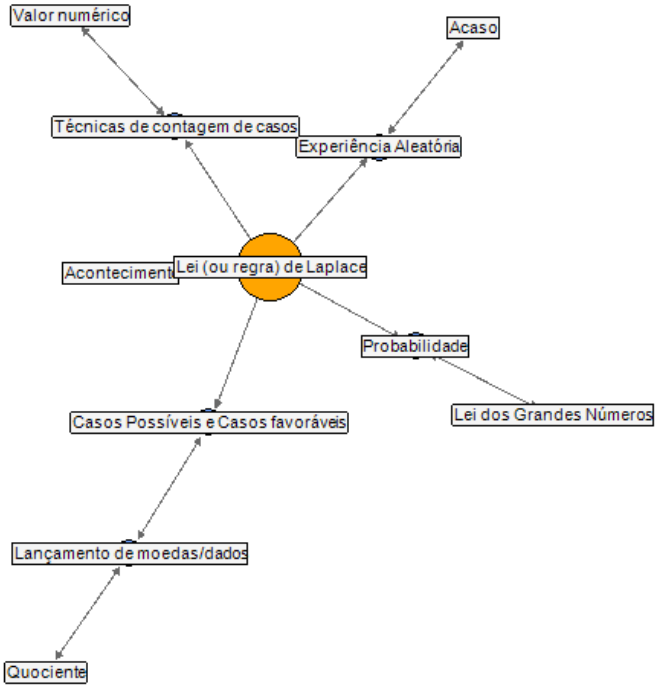


Figura 71 - Rede com um só Conceito Nuclear (aluno do 12.º ano, 1.º Momento – Masculino)

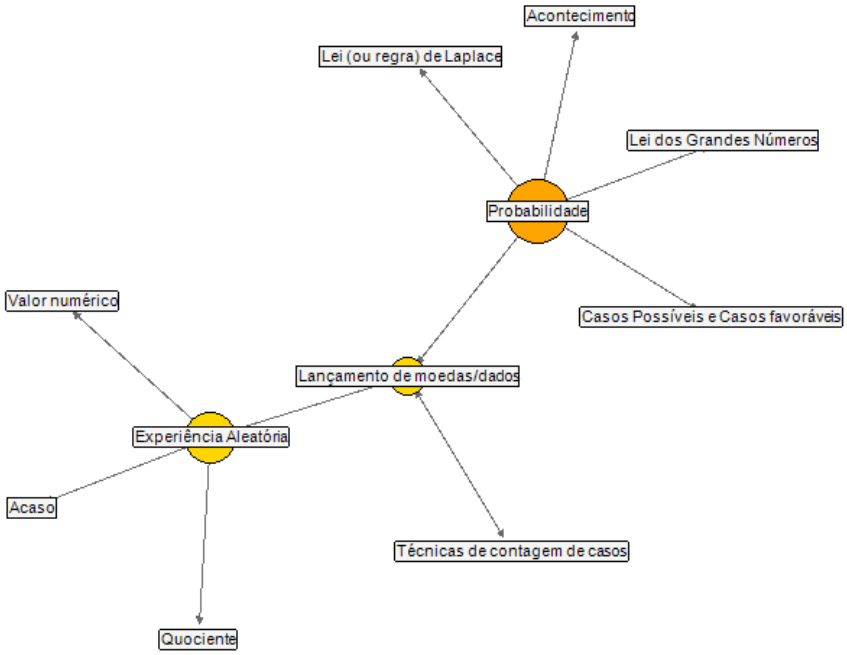


Figura 72 - Rede com vários Conceitos Nucleares (aluno do 12.º ano, 1.º Momento – Feminino)

Com base em todas as redes PFNET obtidas foi possível quantificar o número de vezes que nestas representações da estrutura cognitiva dos alunos surgiram, os vários conceitos, como nó extremidade (NE), nó polar (NP) e Conceito Nuclear (CN). Os valores destas frequências, de acordo com a variável Ano de Escolaridade, encontram-se na Tabela 30.

Tabela 30 – Frequências dos diferentes conceitos/termos/exemplos das PFNET no 9.º e 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

Conceitos	9.º ANO N=250			12.º ANO N=94		
	NE	NP	CN	NE	NP	CN
Acaso	93	87	70	50	25	19
Acontecimento	114	70	66	42	33	19
Casos Possíveis e Casos favoráveis	79	96	75	23	38	33
Experiência aleatória	78	85	87	20	47	27
Lançamento de moedas/dados	61	88	101	21	38	35
Lei (ou regra) de Laplace	129	68	53	25	36	33
Lei dos Grandes Números	134	75	41	51	32	11
Probabilidade	49	76	125	8	26	60
Quociente	153	63	34	54	28	12
Técnicas de contagem de casos	120	75	55	48	31	15
Valor numérico	119	78	53	50	33	11

Os NE mais frequentemente referidos no 9.º ano foram “Quociente” e “Lei dos Grandes Números”, como CN “Probabilidade” e “Lançamento de moedas/dados” e como NP “Casos possíveis e casos favoráveis” e, mais uma vez, “Lançamento de moedas/dados”.

No 12.º ano os NE mais citados foram “Quociente” e “Lei dos Grandes números”, como CN “Probabilidade” e “Lançamento de moedas/dados” e, finalmente, como NP temos “Experiência aleatória” e, com igual frequência, “Lançamento de moedas/dados” e “Casos possíveis e casos favoráveis”.

No que se refere aos diferentes tipos de conceitos, verificamos que há concordância, nestes dois anos de escolaridade, no que diz respeito às maiores frequências em relação aos CN “Probabilidade” e “Lançamento de moedas/dados”, em relação ao NE “Lei dos grandes números” e “Quociente” e, ainda, em relação aos NP “Lançamento de moedas/dados” e “Casos possíveis e casos favoráveis”.

Face ao diferente número de alunos destes dois anos de escolaridade, a Figura 73 mostra as percentagens dos diferentes termos como Conceito Nuclear nos dois anos de escolaridade, e neste momento de recolha de dados.

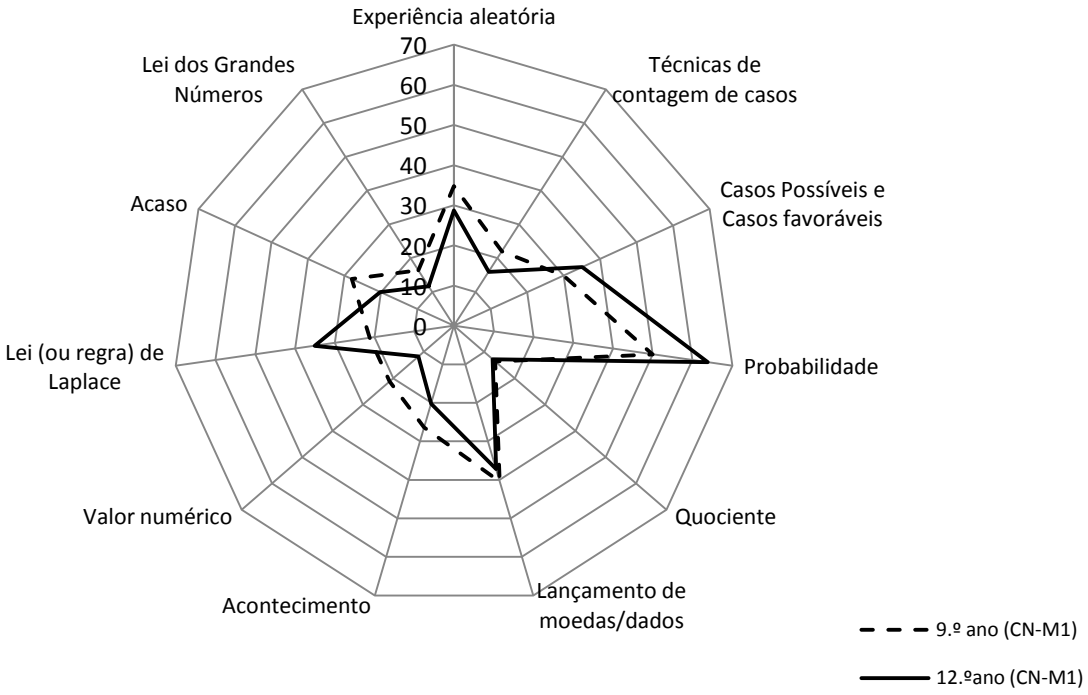


Figura 73 – Percentagem dos diferentes conceitos como Conceito Nuclear no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

A Figura 73 exibe uma característica que nos parece bastante interessante. Os "polígonos" representativos das percentagens como Conceitos Nucleares dos diferentes conceitos nos dois anos de escolaridade considerados, quase que têm a mesma forma e, esta constatação, permite-nos inferir sobre a existência de semelhança no peso relativo dos diferentes termos como Conceitos Nucleares na estrutura cognitiva dos discentes.

De um modo análogo construímos as Figuras 74 e 75, agora para analisar as percentagens dos diferentes termos como nós extremidade e nós polares, respetivamente

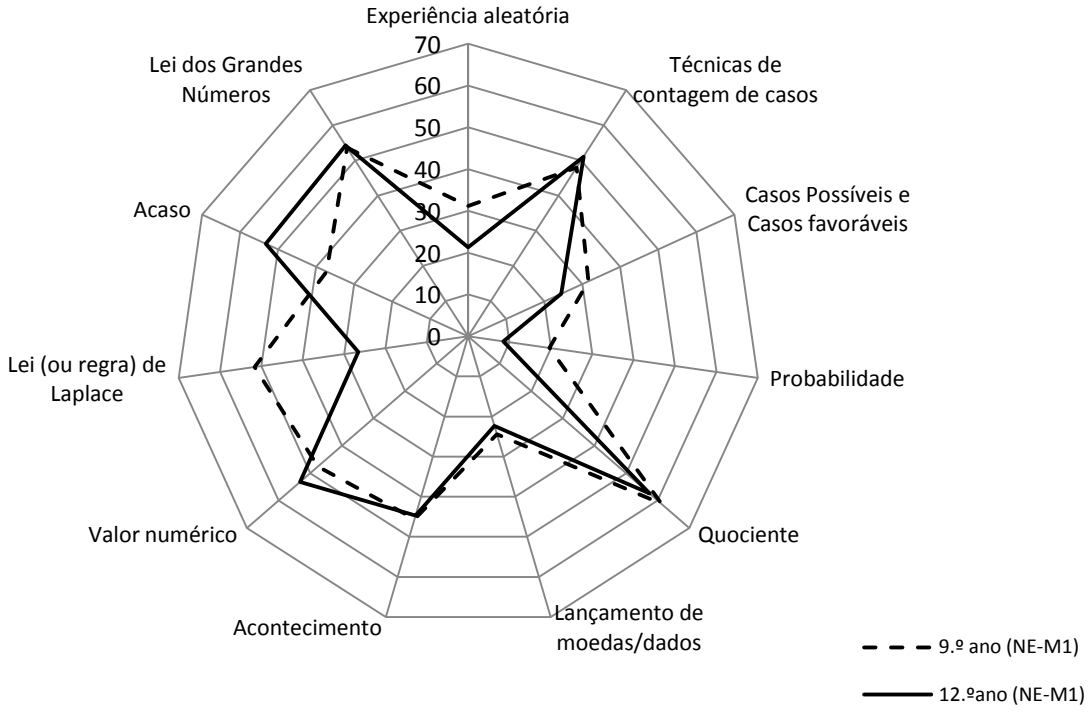


Figura 74 – Percentagem dos diferentes conceitos como nó extremidade no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

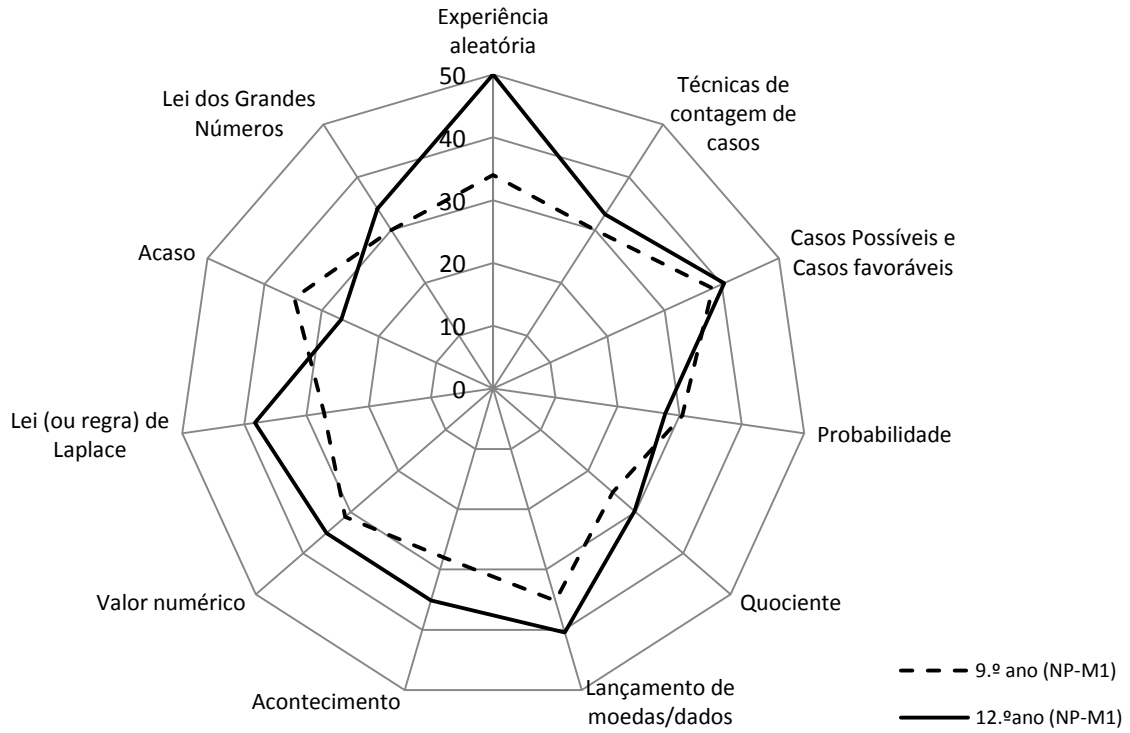


Figura 75 – Percentagem dos diferentes conceitos como nós polar no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

Os gráficos anteriores mostram também, para os dois anos de escolaridade, polígonos bastante semelhantes. Todavia na Figura 74, esta semelhança é quebrada, de um modo mais evidente, pelo conceito "Lei (ou regra) de Laplace" e pelo "Acaso" , enquanto na Figura 75, essencialmente, pelo conceito de "Acaso".

5.1.2. O Teste do Qui-quadrado para a tipologia dos termos/conceitos/noções/exemplos, no 1.º Momento de recolha de dados

O teste qui-quadrado (χ^2), que se apresenta na Tabela 31 para o 1.º Momento de recolha de dados, tem como objetivo testar se a frequência com que os elementos da amostra se repartem pelas classes de uma variável nominal é, ou não, estatisticamente idêntica (Maroco, 2007). Por outras palavras, e no contexto da nossa problemática, se relativamente aos diferentes conceitos das PFNET (Experiência aleatória, Técnicas de contagem de casos, etc), a distribuição dada pelos estudantes na caracterização dos termos pelas diferentes tipologias dos nós das redes - nó extremidade, nó polar e Conceito Nuclear - é estatisticamente idêntica (então Sig.>0,05), caso contrário ocorrerá uma distribuição diferente.

Os requisitos teóricos para a aplicabilidade deste teste são:

- O tamanho da amostra (N) maior, ou igual, que 20, isto é, $N \geq 20$;
- Todas as frequências esperadas (f_e) têm que ser maiores, ou iguais, que 1, ou seja, todas as $f_e \geq 1$, e;
- Pelo menos 80% das frequências esperadas (f_e) têm que ser maiores, ou iguais, que 5, isto é, pelo menos 80% das $f_e \geq 5$.

No presente contexto, estas condições são verificadas.

A Tabela 31 apresenta a estatística do χ^2 e o respetivo nível de significância deste teste, para as vários tipologias dos conceitos considerados nas PFNET.

Tabela 31 – Valores do χ^2 e *Sig*. do teste do qui-quadrado, no 1.º Momento de recolha de dados

Conceitos	9.º ANO N=250		12.º ANO N=94	
	χ^2(g.l.=2)	*Sig.*	χ^2(g.l.=2)	*Sig.*
Acaso	3,416	0,181	17,255	0,000
Acontecimento	17,024	0,000	11,223	0,004
Casos Possíveis e Casos favoráveis	2,984	0,225	3,723	0,155
Experiência aleatória	0,536	0,765	12,532	0,002
Lançamento de moedas/dados	9,992	0,007	5,255	0,072
Lei (ou regra) de Laplace	38,888	0,000	2,064	0,356
Lei dos Grandes Números	53,144	0,000	25,553	0,000
Probabilidade	35,624	0,000	44,511	0,000
Quociente	92,408	0,000	28,681	0,000
Técnicas de contagem de casos	26,600	0,000	17,383	0,000
Valor numérico	26,648	0,000	24,404	0,000

Assim, e tomando como referência um nível de significância de α=0,05 (5%), podemos concluir que:

- No 9.º ano

  - A distribuição de alunos que referem os conceitos “Acaso”, “Casos possíveis e casos favoráveis” e “Experiência aleatória”, como nó extremidade, polar ou Conceito Nuclear é estatisticamente semelhante (*Sig*.>0,05);

  - Os conceitos “Quociente”, “Lei dos Grandes Números”, “Lei (ou regra) de Laplace”, “Valor numérico”, “Técnicas de contagem de casos” e “Acontecimento”, apresentam frequências estatisticamente diferentes e há mais estudantes que os consideram nó extremidade (*Sig*. $\leq$0,05);

  - Os conceitos “Probabilidade” e “Lançamento de moedas/dados”, exibem valores absolutos significativos de discentes que os consideram Conceito Nuclear (*Sig*.$\leq$0,05).

- No 12.º ano

  - Não existem diferenças significativas na distribuição das proporções dos alunos pelas diferentes tipologias dos termos, para os conceitos “Casos possíveis e casos favoráveis”, “Lançamento de moedas/dados” e “Lei (ou regra) de Laplace” (*Sig*.>0,05);

- Os conceitos "Técnicas de contagem de casos", "Quociente", "Acontecimento", "Valor numérico", "Acaso" e "Lei dos Grandes Números", apresentam frequências estatisticamente diferentes das proporções como NE, NP e CN, sendo que há mais alunos que os consideram nó extremidade (*Sig*.≤0,05);

- A "Experiência aleatória" apresenta uma frequência significativa de estudantes que a considera nó polar (*Sig*.≤0,05);

- O conceito de "Probabilidade" é o único que exibe uma proporção significativa de discentes que o considera Conceito Nuclear (*Sig*.≤0,05).

Tanto o 9.º como o 12.º ano apresentam os "Casos possíveis e os casos favoráveis" como igualmente distribuídos pelas diferentes tipologias dos conceitos. Os termos "Quociente", "Lei dos grandes Números", "Valor numérico", "Técnicas de contagem de casos" e "Acontecimento" surgem como nós extremidade. Finalmente, o único termo que surge, em ambos os anos, como Conceito Nuclear é a "Probabilidade".

Estas conclusões encontram-se resumidas na Tabela 32.

Tabela 32 - Distribuição dos conceitos/noções/termos/exemplos como nó extremidade, nó polar e Conceito nuclear, nos 9.º e 12.º anos e no 1.º Momento de recolha de dados (a sombreado os conceitos comuns, de acordo com a tipologia, em ambos os anos de escolaridade)

9.º ano		12.º ano	
Igualmente distribuídos como nó extremidade, polar e Conceito Nuclear	- Experiência aleatória. - **Casos possíveis e casos favoráveis.** - Acaso.	**Igualmente distribuídos como nó extremidade, polar e Conceito Nuclear**	**- Casos possíveis e casos favoráveis.** - Lançamento de moedas/dados. - Lei (ou regra) de Laplace.
nó extremidade	**- Quociente.** **- Lei dos Grandes Números.** - Lei (ou regra) de Laplace. **- Valor numérico.** **- Técnicas de contagem de casos.** **- Acontecimento.**	**nó extremidade**	**- Técnicas de contagem de casos.** **- Quociente.** **- Acontecimento.** **- Valor numérico.** - Acaso. **- Lei dos Grandes Números.**
Conceito Nuclear	**- Probabilidade.** - Lançamento de moedas/dados	**nó polar**	- Experiência aleatória.
		Conceito Nuclear	**- Probabilidade.**

5.1.3. Árvores de Decisão para o 1.º Momento de recolha de dados

No sentido de obtermos uma melhor ideia sobre a influência dos diferentes conceitos/termos/noções/exemplos e respetivas tipologias de nós nos dois anos de escolaridade realizamos ainda um procedimento estatística e classificativo – *As Árvores de Decisão*.

Uma das principais características de uma Árvore de decisão é o seu modo de representação: uma estrutura hierárquica que traduz uma "*árvore invertida*" que se desenvolve da raiz para as folhas.

Esta representação significa uma progressão da análise de dados com o objetivo de desempenhar uma tarefa de previsão/classificação.

Uma árvore de decisão tem o poder de discriminar porque decompõe a relação complexa existente entre a variável dependente e as variáveis explicativas que podem interagir entre si.

De seguida reproduzimos um exemplo para tornar este procedimento mais claro.

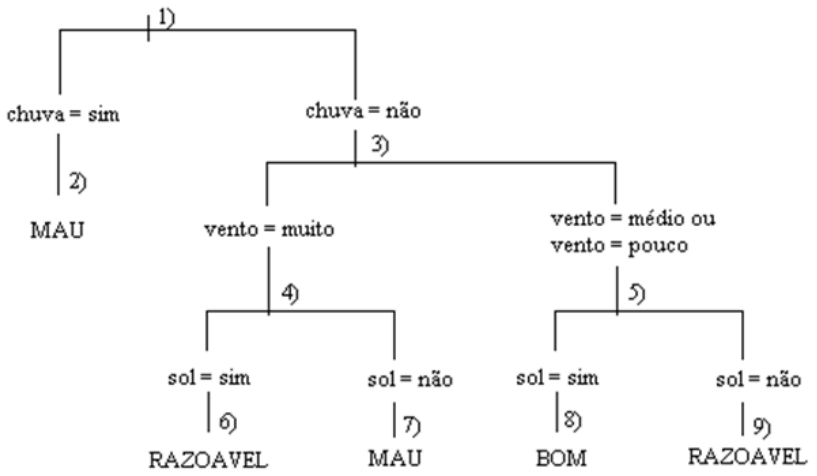


Figura 76 – Árvore de decisão (retirada de www.fep.up.pt/docentes/pcosme)

Neste exemplo temos a variável dependente estado do tempo que pode assumir as classificações de MAU, RAZOAVEL ou BOM, em função de três variáveis independentes: se chove, se faz vento e se está sol. A análise desta árvore permite-nos concluir que: sempre que chove faz mau tempo; nos dias em que não chove mas há muito vento e não há sol então o

tempo é mau; nos dias em que o vento é muito e há sol o tempo é razoável; nos dias em que o vento é médio ou pouco e se há sol o tempo é bom, caso não haja sol o tempo é razoável.

No SPSS, esta representação é inicialmente representada por uma caixa, designada por nó 0, que representa a amostra e identifica as categorias da variável dependente, em termos do seu número de elementos, assim como, da respetiva percentagem.

A partição dos níveis da árvore faz-se por ordem decrescente da importância das diferentes variáveis explicativas. No final os resultados obtidos exibem uma série de grupos explicados por uma ou várias variáveis independentes, os quais diferem, uns dos outros, na explicação da variável dependente (Pestana e Gageiro, 2009).

Trata-se de uma análise que desenvolve-se do geral para o particular, no sentido em que cada novo nível de nós descendentes limita (particulariza) o valor de mais um atributo explicativo.

A qualidade do modelo obtido é analisada através da tabela de classificação que informa sobre o número de previsões corretas e incorretas feitas pela modelização efetuada.

O algoritmo utilizado foi o *CHAID - Chi-Squared Automatic Interaction Detector* – e tem por base o teste de qui-quadrado de *Pearson* de uma tabela de contingência (ou de dupla entrada) e "*constitui um método estatístico extremamente eficiente para a segmentação, ou crescimento de uma árvore*" (Rodrigues, 2005).

O método CHAID opera sobre uma variável dependente, de escala nominal ou ordinal, e maximiza a significância da estatística qui-quadrado em cada partição, caracterizando o CHAID como uma estrutura de sucessivos testes de significância (Silveira e Echeveste, 2011).

No nosso contexto a variável dependente será o ano de escolaridade (9.º ano ou 12.º ano) e as variáveis independentes serão as diferentes tipologias de nós ("nó extremidade", "nó polar" e "Conceito Nuclear") dos vários conceitos considerados nas redes PFNET.

Com recurso ao SPSS 20, a árvore de Decisão obtida, é apresentada na Figura 77.

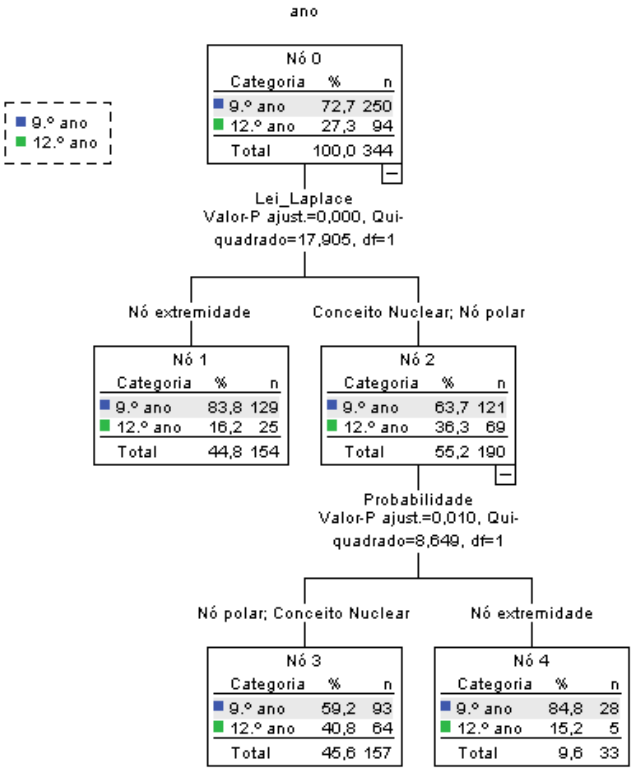


Figura 77 – Árvore de decisão, para o Ano de escolaridade em função da tipologia dos vários termos, no 1.º Momento de recolha de dados

As variáveis independentes consideradas estatisticamente significativas na explicação do ano escolar são, a "Lei (ou regra) de Laplace" (χ^2=17,905;Sig=0,000) e a "Probabilidade" (χ^2=8,649;*Sig.*=0,010).

O método de crescimento traçou 5 nós, dos quais 3 são terminais (nós 1, 3 e 4). O diagrama de árvore mostra, a sombreado cinzento em cada caixa, a categoria prevista da variável "Ano de escolaridade" pelo método CHAID. Repare-se que, em todas as caixas, a categoria sombreada corresponde ao 9.º ano de escolaridade, pelo que o modelo obtido classifica muito bem os alunos do 9.º ano.

O primeiro nível de profundidade da árvore obtém-se através do conceito "Lei (ou regra) de Laplace", sendo esta variável a que melhor classifica os estudantes do 9.º Ano, segmentando-se a amostra em duas modalidades: aqueles que consideram este conceito como nó extremidade e aqueles que o consideram nó polar ou Conceito Nuclear.

O nó terminal 1, que atribui 83,8% de probabilidade de ser do 9.º ano e corresponde a 51,6% ($\frac{129}{250} \times 100\%$) do total de alunos deste nível de ensino. Os dois outros nós extremidade

(3 e 4), que também classificam os estudantes do 9.º ano de escolaridade, são caracterizados pela variável "Probabilidade" também nas modalidades de nó polar ou Conceito Nuclear e nó extremidade.

O nó 3 classifica 37,2% ($\frac{93}{250} \times 100\%$) e o nó 4 11,2% ($\frac{28}{250} \times 100\%$) dos alunos do 9.º ano de escolaridade.

Podemos ainda dizer, em relação aos alunos do 9.º ano de escolaridade e às variáveis consideradas significativas - "Probabilidade" e "Lei (ou regra) de Laplace" - , que:

- 51,6% ($\frac{129}{250} \times 100\%$) considera a "Lei (ou regra) de Laplace" como nó extremidade;

- 37,2% ($\frac{93}{250} \times 100\%$) opina que a "Probabilidade" é um nó polar ou Conceito Nuclear e a "Lei (ou regra) de Laplace" também como nó polar ou Conceito Nuclear;

- 11,2% ($\frac{28}{250} \times 100\%$) considera que a "Probabilidade" é um nó extremidade e a "Lei (ou regra) de Laplace" é um nó polar ou Conceito Nuclear.

Em relação aos estudantes do 12.º ano de escolaridade:

- 26,6% ($\frac{25}{94} \times 100\%$) considera a "Lei (ou regra) de Laplace" como nó extremidade;

- 68,1% ($\frac{64}{94} \times 100\%$) classifica a "Probabilidade" como nó polar ou Conceito Nuclear e a "Lei (ou regra) de Laplace" como nó polar ou Conceito Nuclear;

- 5,3% ($\frac{5}{94} \times 100\%$) opina que a "Probabilidade" é nó extremidade e a "Lei (ou regra) de Laplace" é Conceito Nuclear ou nó polar.

Nos quadros seguintes apresentam-se a tabela de classificação, que informa sobre o número de previsões corretas e incorretas feitas pelo modelo e a tabela de risco que informa sobre a taxa global de classificações incorretas.

Tabela 33 – Tabela de classificação e tabela de risco da Árvore de Decisão para o Ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

Classificação

Observado	Previsto		
	9.º ano (M1)	12.º ano (M2)	Percentagem Correta
9.º ano (M1)	250	0	100,0%
12.º ano(M2)	94	0	0,0%
Porcentagem global	100,0%	0,0%	72,7%

Método de crescimento: CHAID

Variável dependente: ano

Risco

Estimativa	Erro padrão
,273	,024

Método de crescimento: CHAID

Variável dependente: ano

O modelo obtido classifica corretamente a totalidade dos alunos do 9.º ano (100%), por oposição aos alunos do 12.º ano que todos eles são incorretamente classificados, como pertencentes ao 9.º ano. Em termos gerais, o modelo classifica corretamente 72,7% dos estudantes e incorretamente 27,3%. O erro padrão (0,024), permite-nos ainda a construção do intervalo de confiança para a percentagem de classificações incorretas. Assim, o intervalo com um nível de confiança a 95% vem dado por $0{,}273 \pm 1{,}96 \times 0{,}024$, o que vem mostrar que o risco de classificações incorretas situa-se entre 22,6% e 32,0%.

Estes resultados vêm mostrar que, no que concerne aos diferentes conceitos utilizados nas PFNET, associados à noção de Probabilidade e respetivas tipologias, os alunos do 12.º ano estão próximos dos estudantes do 9.º ano de escolaridade, já que os estudantes do 12.º ano são classificados no mesmo grupo dos discentes do ano terminal do ensino básico, pelo que mostram uma estrutura cognitiva semelhante.

5.1.4. Análise dos indicadores quantitativos das redes PFNET, no 1.º Momento da recolha de dados

5.1.4.1. A influência do Género nos indicadores quantitativos das PFNET, no 1.º Momento da recolha de dados

Como atrás foi referido (Capítulo 2), o *Goluca* calcula também um conjunto de indicadores quantitativos que para além das suas propriedades descritivas, permitem-nos

também análises inferenciais. Assim, neste ponto, iremos estudar a distribuição dos valores destes indicadores e averiguar se o Género é, ou não, estatisticamente discriminatório para estas variáveis.

Com recurso ao SPSS, os valores estatísticos da média, mediana e desvio padrão do número de Conceitos Nucleares, número de nós extremidade, número de nós polares, Densidade das redes, Coerência das redes, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares e Fator do grau dos nós nucleares, apresentam-se na Tabela 34 para todos os alunos e para os subgrupos dos sujeitos do género feminino e masculino.

Tabela 34 – Indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Género, no 1.º Momento de recolha de dados

Indicadores das PFNET	Masculino (N=159)			Feminino (N=185)			Total (N=344)		
	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana
Número de nós extremidade	4,33	1,478	4,00	4,50	1,486	5,00	4,42	1,483	5,00
Número de nós polares	3,64	1,548	4,00	3,51	1,672	3,00	3,57	1,615	3,00
Número de Conceitos nucleares	3,03	1,443	3,00	2,99	1,363	3,00	3,01	1,399	3,00
Densidade da Rede	,201	,031	,200	,200	,0289	,182	,201	,030	,200
Fator dos nós nucleares	,276	,131	,273	,272	,124	,273	,274	,127	,273
Grau dos nós nucleares	10,55	5,348	9,00	10,53	5,039	10,00	10,54	5,177	10,00
Fator do grau dos nós nucleares	,096	,049	,082	,096	,046	,091	,096	,0471	,091
Coerência	,185	,256	,185	,152	,272	,156	,167	,265	,176

Os valores apresentados na tabela anterior, evidenciam a semelhança numérica, nos vários indicadores, entre os alunos do género feminino e masculino.

Todavia, para estudar se o Género pode, ou não, ser estatisticamente discriminatório, para este conjunto de indicadores, realizou-se o teste não paramétrico de Mann-Whitney para efetuar esta comparação.

Optou-se por este teste após ter-se comprovado que, à exceção da variável Coerência, todas as outras variáveis, nos dois grupos, não verificavam o pressuposto da normalidade (Tabela 35), facto que inviabilizou a aplicabilidade do teste t-*Student* para amostras independentes.

Tabela 35 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Género dos inquiridos, no 1.º Momento de recolha de dados

Indicadores das PFNET	Género do Inquirido	Kolmogorov-Smirnov[a]		
		Estatística	df	*Sig.*
Número de nós extremidade	Masculino	,165	159	,000
	Feminino	,173	185	,000
Número de nós polares	Masculino	,140	159	,000
	Feminino	,172	185	,000
Número de nós nucleares	Masculino	,270	159	,000
	Feminino	,221	185	,000
Densidade da Rede	Masculino	,341	159	,000
	Feminino	,264	185	,000
Fator dos nós nucleares	Masculino	,270	159	,000
	Feminino	,221	185	,000
Grau dos nós nucleares	Masculino	,204	159	,000
	Feminino	,163	185	,000
Fator do grau dos nós nucleares	Masculino	,204	159	,000
	Feminino	,163	185	,000
Coerência	Masculino	,041	159	,200*
	Feminino	,054	185	,200*

*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.

a. *Lilliefors Significance Correction*

Os valores dos *Sig.* do teste de *Mann-Whitney,* para todas as variáveis, à exceção da Coerência, nos dois grupos considerados, apresentam-se na Tabela 36.

Tabela 36 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis das PFNET de acordo com o Género, no 1.º Momento de recolha de dados

Indicadores das PFNET	Mann-Whitney U	*Sig.*
Número de nós extremidade	13690,0	0,257
Número de nós polares	13597,0	0,219
Número de nós nucleares	14664,0	0,961
Densidade da Rede	14478,5	0,787
Fator dos nós nucleares	14664,0	0,961
Grau dos nós nucleares	14306,5	0,661
Fator do grau dos nós nucleares	14306,5	0,661

a. Variável de agrupamento: Género do inquirido

Os *Sig.* deste teste variaram entre 0,219 e 0,961, superiores a 0,05, pelo que a variável independente Género não é discriminatória relativamente às variáveis quantitativas das redes PFNET, obtidas com o *Goluca*.

Em relação à Coerência das redes, e como os pressupostos teóricos para aplicação do teste t-Student são cumpridos (Normalidade – $Sig._{Masculino/1.ºmomento}$=0,200, $Sig._{Feminino/1.ºmomento}$=0,200, Homogeneidade das Variâncias – *Sig.*=0,269 e o teste de aleatoriedade (Tabela 37) fornece um Sig.=0,450 (>0,05), o qual permite considerar uma amostra aleatória), temos,

Tabela 37 - Teste de sequências para a coerência, no 1.º Momento de recolha de dados

	Coerência
Valor de teste[a]	,1759
Cases < Test Value	172
Cases >= Test Value	172
Total de casos	344
Number of Runs	166
Z	-,756
Sig. Assint. (2 caudas)	,450

a. Mediana

O nível de Significância do teste t-Student apresenta um valor de 0,249 (>0,05) pelo que esta variável apresenta valores médios estatisticamente iguais nos rapazes e nas raparigas.

Em resumo, todos os indicadores quantitativos das redes PFNET - número de nós extremidade, número de nós polares, número de nós nucleares, Densidade da Rede, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares, Fator do grau dos nós nucleares e Coerência – apresentam valores estatisticamente semelhantes nos sujeitos do género masculino e feminino, pelo que, neste momento de recolha de dados, as redes associativas PFNET são estruturalmente semelhantes, de acordo com o género.

5.1.4.2. A influência do Ano de Escolaridade nos indicadores quantitativos das PFNET, no 1.º Momento da recolha de dados.

À semelhança do que fizemos para o Género, averiguemos agora se todos os mesmos indicadores quantitativos são, ou não, estatisticamente idênticos nos dois anos de escolaridade considerados (9.º e 12.º anos). A Tabela 38 mostra os valores da estatística descritiva para todas estas variáveis e para os dois anos de escolaridade.

Tabela 38 – Indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Ano de escolaridade, no 1.º Momento da recolha de dados

Indicadores das PFNET	9.º ano (N=250)			12.º ano (N=94)			Total (N=344)		
	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana
Número de nós extremidade	4,52	1,454	5,00	4,17	1,536	4,00	4,42	1,483	5,00
Número de nós polares	3,44	1,593	3,00	3,90	1,633	4,00	3,57	1,615	3,00
Número de nós nucleares	3,04	1,431	3,00	2,93	1,314	3,00	3,01	1,399	3,00
Densidade da Rede	,200	,031	,182	,203	,0274	,200	,201	,0301	,200
Fator dos nós nucleares	,276	,130	,273	,266	,119	,273	,274	,127	,273
Grau dos nós nucleares	10,62	5,364	10,00	10,32	4,661	9,00	10,54	5,177	10,00
Fator do grau dos nós nucleares	,097	,049	,091	,094	,042	,082	,096	,0471	,091
Coerência	,121	,255	,126	,289	,253	,344	,167	,265	,176

Também, aqui, realizou-se o teste não paramétrico de *Mann-Whitney* para efetuar esta comparação, em virtude do não cumprimento dos requisitos teóricos da Normalidade em todas estas variáveis nas duas subamostras (Tabela 39).

Tabela 39 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Ano de escolaridade dos inquiridos, no 1.º Momento de recolha de dados

Indicadores das PFNET	Ano de Escolaridade	Kolmogorov-Smirnov[a]		
		Estatística	df	*Sig.*
Número de nós extremidade	9.º ano	,178	250	,000
	12.º ano	,142	94	,000
Número de nós polares	9.º ano	,162	250	,000
	12.º ano	,121	94	,002
Número de nós nucleares	9.º ano	,255	250	,000
	12.º ano	,211	94	,000
Densidade da Rede	9.º ano	,319	250	,000
	12.º ano	,252	94	,000
Fator dos nós nucleares	9.º ano	,255	250	,000
	12.º ano	,211	94	,000
Grau dos nós nucleares	9.º ano	,182	250	,000
	12.º ano	,144	94	,000
Fator do grau dos nós nucleares	9.º ano	,182	250	,000
	12.º ano	,144	94	,000
Coerência	9.º ano	,035	250	,200*
	12.º ano	,113	94	,005

*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.
a. *Lilliefors Significance Correction*

Os valores do *Sig*. do teste de *Mann-Whitney* para todas estas variáveis, nos dois anos escolares, apresentam-se na Tabela 40

Tabela 40 – Teste de *Mann-Whitney* para as diferentes variáveis das PFNET de acordo com o Ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

Indicadores das PFNET	Mann-Whitney U	*Sig.*
Número de nós extremidade	10145,000	0,045
Número de nós polares	9793,000	0,015
Número de nós nucleares	11308,500	0,576
Densidade da Rede	10623,500	0,138
Fator dos nós nucleares	11308,500	0,576
Grau dos nós nucleares	11539,500	0,797
Fator do grau dos nós nucleares	11539,500	0,797
Coerência	7382,000	0,000

a. Variável de agrupamento: Ano de escolaridade

Atendendo à tabela anterior, constatamos que existem diferenças estatisticamente significativas nas variáveis número de nós extremidade (*Sig*.=0,045), número de nós polares (*Sig.*=0,015) e na Coerência das redes (*Sig.*=0,000). Tanto o número de nós polares como a Coerência das redes aumenta do 9.º para o 12.º ano e, por oposição, o número de nós extremidade diminui.

Em todas as outras variáveis – número de nós nucleares, Densidade da rede, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares e Fator do grau dos nós nucleares -, o Ano de Escolaridade não é estatisticamente discriminatório (*Sig.*>0,05).

5.1.4.3. O Índice de Complexidade das redes PFNET (ICR), no 1.º Momento de recolha de dados

Analisaremos de seguida o Índice de Complexidade das redes, já que ele constitui uma referência importante no nosso trabalho, na medida em que, tal como referido no Capítulo 2, permite quantificar o nível de complexidade das redes dos indivíduos.

5.1.4.3.1. O Índice de Complexidade das redes PFNET de acordo com o Género, no 1.º Momento de recolha de dados

A Tabela 41 mostra os valores da média, desvio padrão e mediana do ICR para rapazes e raparigas.

Tabela 41 – ICR das redes dos estudantes de acordo com o Género, no 1.º Momento de recolha de dados

	Masculino (N=159)			Feminino (N=185)			Total (N=344)		
	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana
Índice de complexidade da rede	7,672	12,901	4,463	7,147	10,476	4,508	7,390	11,645	4,463

Apesar do valor médio do ICR ser mais elevado no género masculino, a mediana é ligeiramente inferior neste grupo de sujeitos.

Como podemos constatar na Figura 78, a distribuição do ICR nos dois géneros é manifestamente diferente da distribuição normal, já que, para ambos os géneros, apresenta uma assimetria positiva e um achatamento menor que a curva gaussiana.

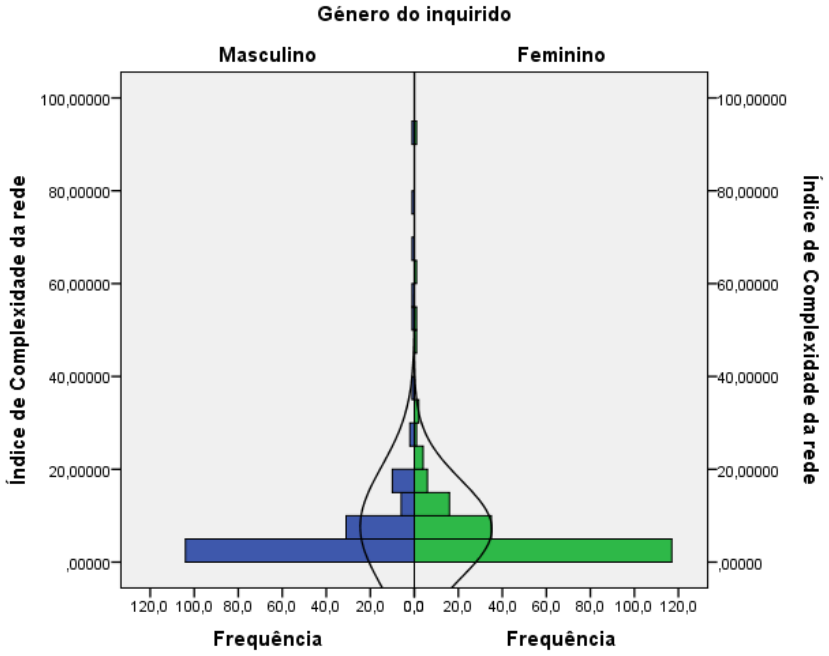


Figura 78 – Histograma do ICR de acordo com o Género, no 1.º Momento de recolha de dados

O teste de Kolmogorov/Smirnov vem corroborar o que graficamente já referimos sobre a não normalidade do ICR nos dois grupos ($Sig._{Masculino/1.ºmomento}$= 0,000<0,05 e $Sig._{Feminino/1.ºmomento}$=0,000<0,05).

O teste de *Mann-Whitney* proporciona os seguintes resultados na comparação do ICR de acordo com o género:

Tabela 42 – Teste de *Mann-Whitney* para o ICR de acordo com o Género, no 1.º Momento de recolha de dados

	Mann-Whitney U	*Sig.*
Índice de complexidade das Redes	14546,000	0,860

a. Variável de agrupamento: Género do inquirido

Podemos assim concluir que o género não tem um efeito estatisticamente significativo sobre o Índice de Complexidade das Redes (*Sig.*>0,05), pelo que não há diferenças no ICR entre rapazes e raparigas.

5.1.4.3.2. O Índice de Complexidade das redes PFNET de acordo com o Ano de Escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

De um modo análogo ao que foi feito anteriormente, a Tabela 43 mostra os valores da média, mediana e desvio padrão do ICR, agora para os alunos dos 9.º e 12.º anos de escolaridade.

Tabela 43 – ICR das redes dos estudantes de acordo com o Ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

	9.º ano (N=250)			12.º ano (N=94)			Total (N=344)		
	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana
Índice de complexidade da rede	7,660	12,704	4,508	6,672	8,205	4,463	7,390	11,645	4,463

Tanto os valores da média como da mediana do Índice de Complexidade das redes diminuem quando passamos dos alunos do 9.º de escolaridade para os estudantes do 12.º ano.

O histograma do ICR para os 9.º e 12.º anos, que se apresenta-se na Figura 79, aponta para a não normalidade das distribuições do ICR neste dois anos de escolaridade.

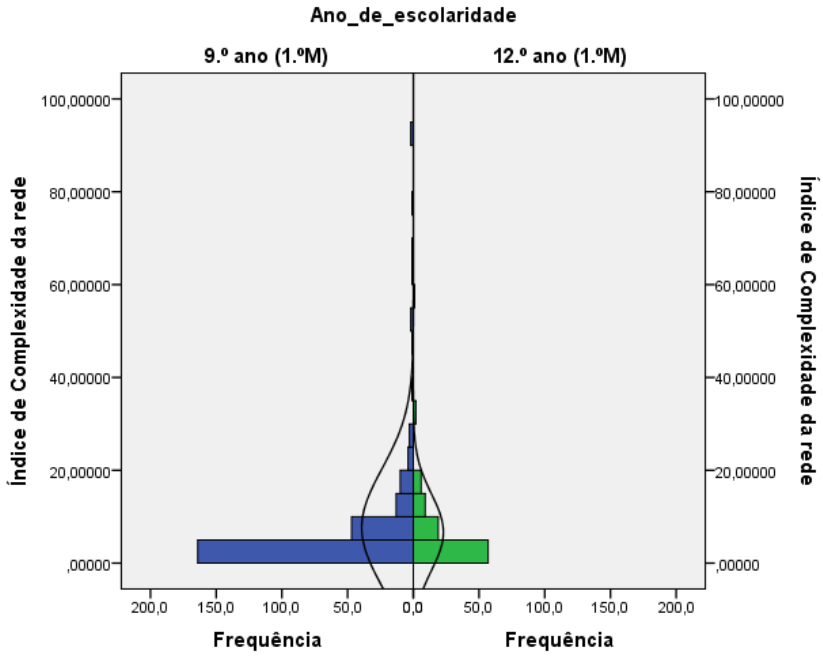


Figura 79 – Histograma do ICR de acordo com o Ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

O teste de Kolmogorov/Smirnov confirma a não normalidade do ICR nos dois grupos ($Sig._{9.ºano/1.ºmomento}$= 0,000<0,05 e $Sig._{12.º/1.ºmomento}$=0,000<0,05).

O teste de Mann-Whitney (*Sig.*=0,924) permite-nos concluir que, os alunos de ambos os anos escolares não apresentam diferenças estatisticamente significativas em relação ao Índice de Complexidade das redes (Tabela 44).

Tabela 44 – Teste de *Mann-Whitney* para o ICR de acordo com o Ano escolar, no 1.º Momento de recolha de dados

	Mann-Whitney U	*Sig.*
Índice de complexidade das Redes	11672,000	0,924

a. Variável de agrupamento: Ano de escolaridade

5.1.5. As Redes Médias Pathfinder do 9.º e 12.º anos, no 1.º Momento da recolha de dados

Como já referimos anteriormente (Capítulo 2 e 4), uma outra potencialidade do *software Goluca* é a construção da Rede Média Associativa PFNET, a qual é obtida tendo como base as matrizes individuais de todos os alunos inquiridos de um determinado grupo.

Esta representação média da estrutura cognitiva dos estudantes torna-se extremamente útil para comparar vários grupos diferentes de indivíduos ou o mesmo grupo em diferentes momentos de investigação.

5.1.5.1. A Rede Média Associativa PFNET relativa ao 9.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

Para os alunos do 9.º ano de escolaridade, a rede média PFNET obtida neste momento de recolha de dados, a partir do *Goluca* apresenta-se na Figura 80.

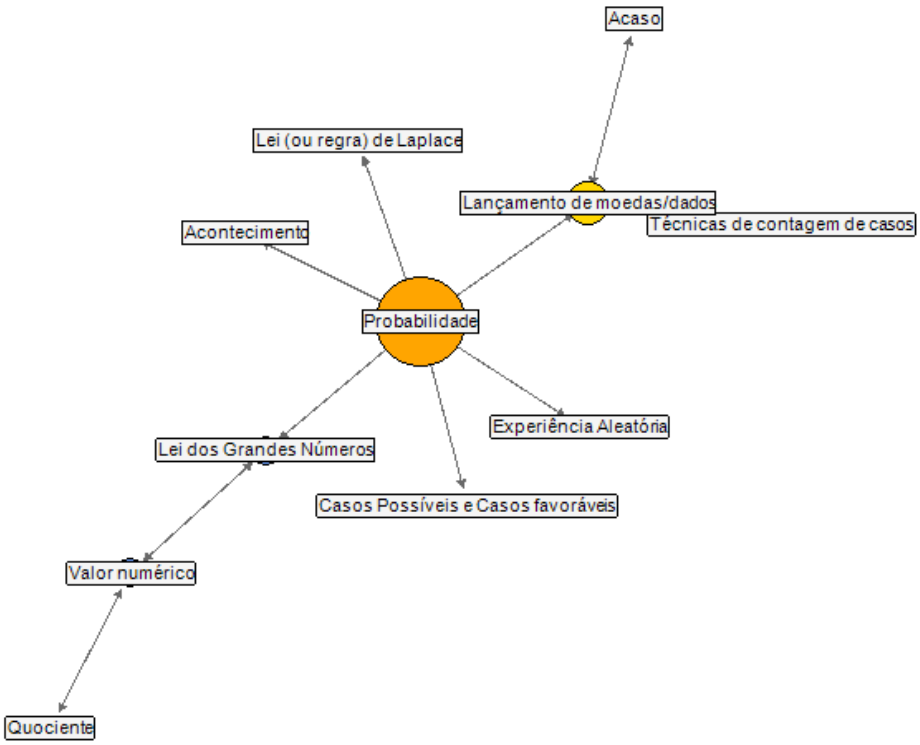


Figura 80 – Rede Média PFNET dos estudantes do 9.º ano (N=250), no 1.º Momento de recolha de dados

Nesta rede sobressaem dois conceitos Nucleares – "Probabilidade" e "Lançamento de moedas/dados".

Sendo o primeiro destes conceitos o objeto matemático central do presente trabalho, a importância dada às relações desta noção com os outros termos das PFNET são bastante valorizadas pelos estudantes.

O outro Conceito Nuclear prende-se com um aspeto mais prático e operacional no processo de Ensino e Aprendizagem do significado de Probabilidade, que é o exemplo utilizado. Os alunos reconhecem muita importância ao "Lançamento de moedas/dados", que, pela sua natureza, não é dos termos mais gerais nem abstratos. Este aspeto vem confirmar um dos pressupostos da Teoria dos Conceitos Nucleares quando postula que na organização conceptual, nem sempre a maior relevância é dada aos conceitos mais inclusivos mas, contrariamente, são os exemplos os mais importantes.

Para além dos conceitos nucleares, encontramos sete nós extremidade - "Quociente", "Casos Possíveis e casos favoráveis", "Experiência aleatória", "Acontecimento", "Lei (ou regra) de Laplace", "Técnicas de contagem de casos" e "Acaso" – e dois nós polares – "Lei dos Grandes Números" e "Valor Numérico".

Os outros indicadores quantitativos desta rede são:

Tabela 45 – Indicadores quantitativos da Rede Média PFNET dos alunos do 9.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

	Nós Nucleares	Densidade	Fator dos nós nucleares	Grau dos nós nucleares	Fator Grau dos nós nucleares	ICR
Rede Média (9.º ano)	2	0,182	0,182	9	0,082	2,716

Em relação à Centralidade da Rede Média o valor obtido apresenta-se na Tabela 46.

Tabela 46 – Centralidade da Rede Média PFNET dos alunos do 9.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

Conceitos	$\mathbf{Grau(N_i)}$	$\mathbf{C_G(N_i)}$	$\frac{(\mathbf{MáxC_G(N_i)) - C_G(N_i))}}{\mathbf{N-2}}$
Acaso	1	0,1	0,056
Acontecimento	1	0,1	0,056
Casos possíveis e casos favoráveis	1	0,1	0,056
Experiência aleatória	1	0,1	0,056
Lançamento de moedas/dados	3	0,3	0,033
Lei (ou regra) de Laplace	1	0,1	0,056
Lei dos Grandes números	2	0,2	0,044
Probabilidade	6	0,6	0
Quociente	1	0,1	0,056
Técnicas de contagem de casos	1	0,1	0,056
Valor numérico	2	0,2	0,044
			$C_G(R) =$O,513

Este último valor (0,513), indica que esta rede média, em termos de organização, se situa entre uma estrutura hierárquica e uma rede (Clariana, 2013).

5.1.5.2. A Rede Média Associativa PFNET relativa ao 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento da recolha de dados

Em relação à rede média PFNET dos alunos do 12.º ano constatamos a existência de somente um conceito nuclear – Probabilidade (Figura 81).

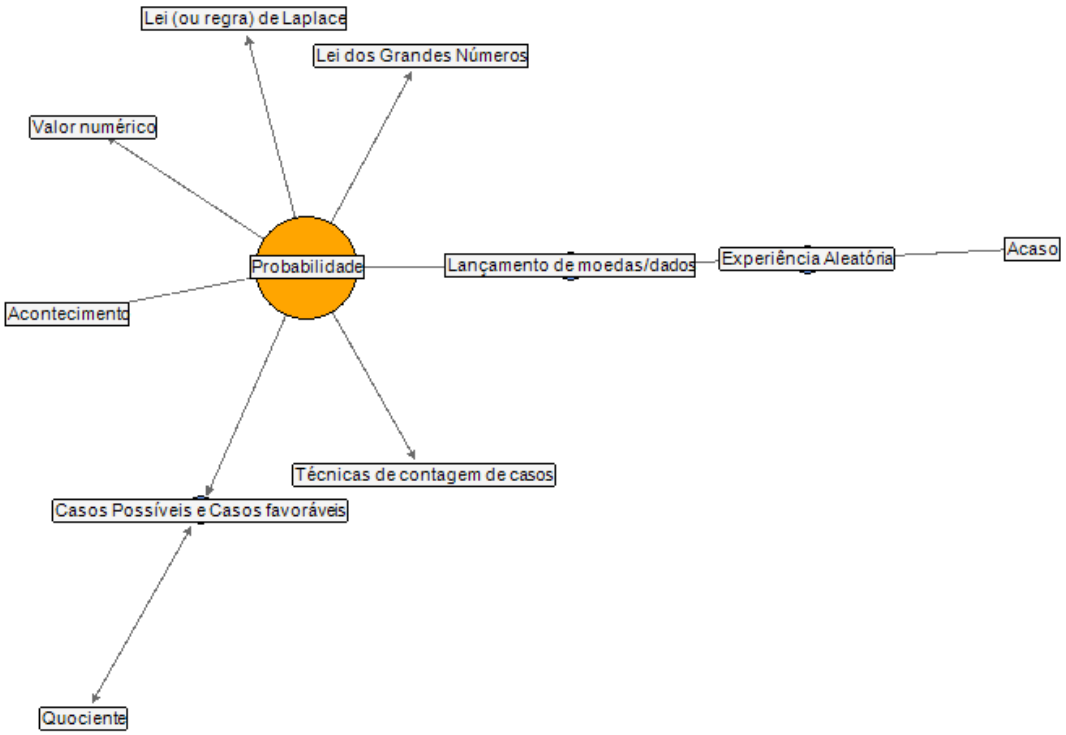


Figura 81 – Rede Média PFNET dos estudantes do 12.º ano (N=94), no 1.º Momento de recolha de dados

Como nós polares identificamos o "Lançamento de moedas/dados", "Experiência aleatória" e "Casos possíveis e casos favoráveis" e como nós extremidade os restantes termos/conceitos/noções, ou seja, "Quociente", "Acontecimento", "Lei (ou regra) de Laplace", "Técnicas de contagem de casos", "Acaso" , "Lei dos Grandes Números" e "Valor Numérico".

Os outros indicadores quantitativos desta rede são os seguintes:

Tabela 47 – Indicadores quantitativos da Rede Média PFNET dos alunos do 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

	Nós Nucleares	Densidade	Fator dos nós nucleares	Grau dos nós nucleares	Fator Grau dos nós nucleares	ICR
Rede Média (12.º ano)	1	0,182	0,091	7	0,064	1,060

O Índice de Centralidade desta rede é:

Tabela 48 – Centralidade da Rede Média PFNET dos alunos do 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

Nós	$\mathrm{Grau}(N_i)$	$C_G(N_i)$	$\frac{(\mathrm{Máx}C_G(N_i)) - C_G(N_i))}{N-2}$
Acaso	1	0,1	0,067
Acontecimento	1	0,1	0,067
Casos possíveis e casos favoráveis	2	0,2	0,056
Experiência aleatória	2	0,2	0,056
Lançamento de moedas/dados	2	0,2	0,056
Lei (ou regra) de Laplace	1	0,1	0,067
Lei dos Grandes números	1	0,1	0,067
Probabilidade	7	0,7	0
Quociente	1	0,1	0,067
Técnicas de contagem de casos	1	0,1	0,067
Valor numérico	1	0,1	0,067
			$C_G(R) = 0{,}637$

Este valor, de acordo com Clariana (2013), é indicador que estamos perante uma estrutura de rede e muito centrada no conceito de Probabilidade.

Com o intuito de uma análise comparativa, na Figura 82 apresentamos os valores do Índice de Complexidade e de Centralidade de grau das redes dos dois anos de escolaridade.

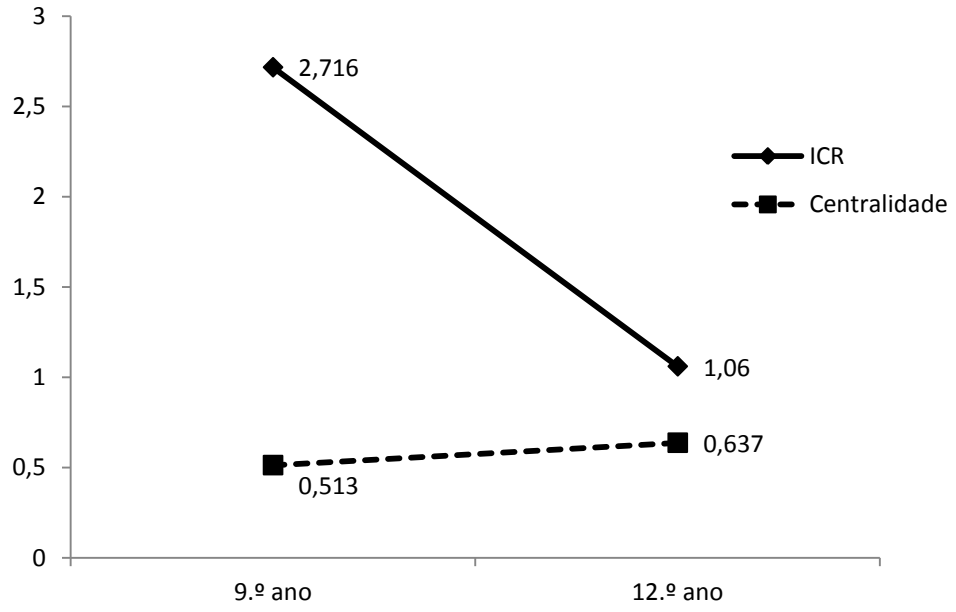


Figura 82 – ICR e Centralidade de grau da Rede Média PFNET dos 9.º e 12.º anos, no 1.º Momento de recolha de dados

O Índice de Complexidade da rede média do 12.º ano é, inferior ao mesmo índice relativo ao 9.º ano de escolaridade, traduzindo-se numa redução de, aproximadamente, 39,03% neste indicador.

No que concerne, à Centralidade de grau das duas redes, acontece exatamente o oposto, ou seja, este indicador aumenta do 9.º para o 12.º ano, o que é indicador de uma estrutura topológica mais centrada no conceito de "Probabilidade".

5.1.5.3. Índice de Similaridade entre as Redes Médias PFNET do 9.º e 12.º anos, no 1.º Momento da recolha de dados

Relembremos que o Índice de Similaridade de duas redes é calculado a partir da análise das ligações existentes e das ligações comuns entre duas redes e pode ser considerado uma grandeza indicativa da semelhança entre redes, de tal modo que um valor alto deste índice significa mais proximidade entre estas representações. A relação que nos permite obter este valor é (Capítulo 2):

$$\text{Similaridade} = \text{S} = \frac{\text{Número de ligações em comum}}{\text{Total de ligações das duas redes} - \text{Número de ligações em comum}}$$

A sua aplicação às redes médias PFNET obtidas para os 9.º e 12.º anos, neste 1.º Momento de recolha de dados, permite-nos obter:

$$\text{S}_{9.º\text{M1}/12.º\text{M1}} = \frac{5}{20-5} = \frac{5}{15} \approx 0{,}333$$

valor que é revelador de uma similaridade moderada.

As ligações comuns das redes médias PFNET destes dois anos de escolaridade, e que traduzem uma consolidação temporal, entre diferentes momentos formativos, da relação entre conceitos, são:

- Probabilidade ↔ Lançamento de dados/moedas
- Probabilidade ↔ Lei (ou regra) de Laplace;
- Probabilidade ↔ Lei dos Grandes Números;
- Probabilidade ↔ Casos possíveis e Casos Favoráveis;
- Probabilidade ↔ Acontecimento

Todas estas ligações, que se apresentam esquematicamente na Figura 83, emergem do conceito de Probabilidade.

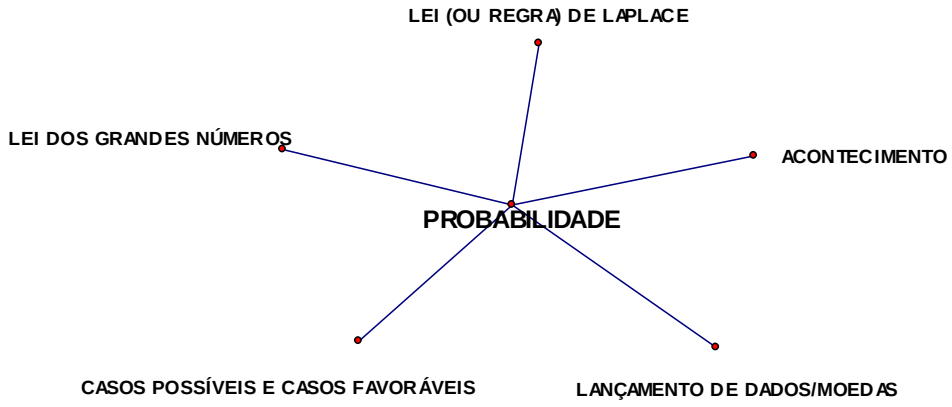


Figura 83 - As ligações comuns das Redes Médias PFNET dos 9.º e 12.º anos, no 1.º Momento da recolha de dados

5.1.5.4. Análise de *Clusters* às Redes Médias PFNET do 9.º e 12.º anos, no 1.º Momento da recolha de dados

Conscientes que as redes médias PFNET, obtidas com o *Goluca*, fornecem-nos informação geral e relevante sobre a estrutura organizacional dos conceitos associados à noção de Probabilidade em ambos os anos de escolaridade, no entanto, parece-nos ser importante analisar, com algum detalhe, o modo como os conceitos surgem agrupados nestas representações da estrutura cognitiva.

A opção, para esta análise, recaiu sobre a Análise de *Clusters*.

Esta metodologia tem como objetivo a identificação de grupos homogéneos com base em determinadas características. A criação de uma partição dos elementos deverá ter como critério a homogeneidade dos elementos que inserem-se em cada grupo (homogeneidade intra-grupos) e a diferença entre grupos (heterogeneidade inter-grupos), ou seja, cada variável pertencente a um determinado *Cluster* é similar a todas as outras pertencentes a esse *Cluster*, e é diferente das observações pertencentes aos outros *Clusters* (Maroco, 2007)

O método da análise de Clusters pode ser descrito sucintamente da seguinte forma: dado um conjunto de n indivíduos para os quais existe informação sobre a forma de p

variáveis, o método agrupa os indivíduos em função da informação existente, de modo que os indivíduos de um grupo sejam tão semelhantes quanto possível e sempre mais semelhantes, aos elementos do mesmo grupo do que a elementos dos restantes grupos.

Com recurso ao SPSS 20, adotaremos o Método de *Ward* para a criação dos diferentes *Clusters*.

Este método baseia-se na perda de informação resultante do agrupamento dos indivíduos e medida através da soma dos quadrados dos desvios das observações.

Para a seleção do número de agrupamentos a reter, e de entre os vários critérios existentes (Maroco, 2007), usaremos o do R quadrado, o qual aconselha que o número mínimo de grupos retenha uma percentagem significativa da variabilidade total. Este valor é a razão entre a soma dos quadrados entre grupos (SQC) e a soma dos quadrados totais (SQT) para cada uma das variáveis utilizadas. Adotaremos neste contexto uma percentagem de explicação da variabilidade não inferior a 75%.

De um modo mais explicito, a relação numérica que nos permite calcular este valor (r quadrado) vem dada por:

$$R\ quadrado = \frac{SQC}{SQT} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k} n_{ij}(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{i)}{}^{2}}{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k}\sum_{k=1}^{n_1}(X_{ijk} - \overline{X)}^{2}}$$

Utilizaremos o *cluster*ing hierárquico em virtude de este ser utilizado para de descobrir divisões naturais na rede.

Esta técnica é normalmente baseada em métricas de similaridade ou força das conexões entre vértices (conceitos).

As matrizes que servirão de suporte à aplicação desta técnica serão as matrizes de distâncias, dadas pelo *Goluca* (Tabelas 49 e 50) das Redes Médias de ambos os anos de escolaridade.

Tabela 49 – Matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 9.º ano, no 1.º Momento de recolha de dados

	EA	TCC	CPCF	Pro	Quo	LMD	Aco	VN	LRL	Aca	LGN
Experiência Aleatória	0	0,4	0,34	0,26	0,49	0,27	0,32	0,426	0,41	0,29	0,466
Técnica de contagem de casos	0,4	0	0,35	0,35	0,48	0,34	0,4	0,376	0,42	0,42	0,428
Casos possíveis e favoráveis	0,34	0,35	0	0,27	0,45	0,28	0,32	0,381	0,37	0,37	0,431
Probabilidade	0,26	0,35	0,27	0	0,47	0,23	0,26	0,395	0,36	0,27	0,376
Quociente	0,49	0,48	0,45	0,47	0	0,49	0,48	0,391	0,46	0,53	0,465
Lançamento de dados/moedas	0,27	0,34	0,28	0,23	0,49	0	0,29	0,421	0,4	0,26	0,457
Acontecimento	0,32	0,4	0,32	0,26	0,48	0,29	0	0,436	0,4	0,35	0,454
Valor Numérico	0,43	0,38	0,38	0,39	0,39	0,42	0,44	0	0,41	0,47	0,367
Lei (ou regra) de Laplace	0,41	0,42	0,37	0,36	0,46	0,396	0,4	0,411	0	0,46	0,454
Acaso	0,29	0,42	0,37	0,27	0,53	0,27	0,35	0,467	0,46	0	0,45
Lei dos Grandes Números	0,47	0,43	0,43	0,38	0,47	0,46	0,45	0,367	0,45	0,45	0

Tabela 50 – Matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 12.º ano, no 1.º Momento de recolha de dados

	EA	TCC	CPCF	Pro	Quo	LMD	Aco	VN	LRL	Aca	LGN
Experiência Aleatória	0	0,39	0,29	0,18	0,42	0,153	0,28	0,435	0,25	0,17	0,361
Técnica de contagem de casos	0,39	0	0,24	0,23	0,48	0,276	0,39	0,321	0,32	0,49	0,344
Casos possíveis e favoráveis	0,29	0,24	0	0,09	0,22	0,151	0,25	0,302	0,12	0,46	0,434
Probabilidade	0,18	0,23	0,09	0	0,25	0,138	0,2	0,257	0,1	0,31	0,297
Quociente	0,42	0,48	0,22	0,25	0	0,434	0,49	0,312	0,28	0,52	0,438
Lançamento de dados/moedas	0,15	0,28	0,15	0,14	0,43	0	0,24	0,451	0,26	0,22	0,351
Acontecimento	0,28	0,39	0,25	0,2	0,49	0,241	0	0,43	0,25	0,4	0,374
Valor Numérico	0,43	0,32	0,3	0,26	0,31	0,451	0,43	0	0,36	0,53	0,302
Lei (ou regra) de Laplace	0,25	0,32	0,12	0,1	0,28	0,26	0,25	0,358	0	0,39	0,391
Acaso	0,17	0,49	0,46	0,31	0,52	0,223	0,4	0,53	0,39	0	0,477
Lei dos Grandes Números	0,36	0,34	0,43	0,3	0,44	0,351	0,37	0,302	0,39	0,48	0

Com recurso ao SPSS 20, adotaremos o Método de *Ward* para a criação dos diferentes *Clusters*.

Este método baseia-se na perda de informação resultante do agrupamento dos indivíduos e medida através da soma dos quadrados dos desvios das observações.

Assim utilizando as matrizes de distância fornecidas pelo *Goluca* das redes médias PFNET, a percentagem de explicação dada pelos 6 *cluster*s da variabilidade é de,

aproximadamente, 75,1%, o que, de acordo com o previamente estabelecido, é um bom valor relativo.

$$R\ quadrado\ (9.º\ ano/1.º\ momento) = \frac{SQC}{SQT} = \frac{1{,}45}{1{,}931} = 0{,}751 = 75{,}1\%$$

O respetivo *dendograma* desta análise apresenta-se na Figura 84.

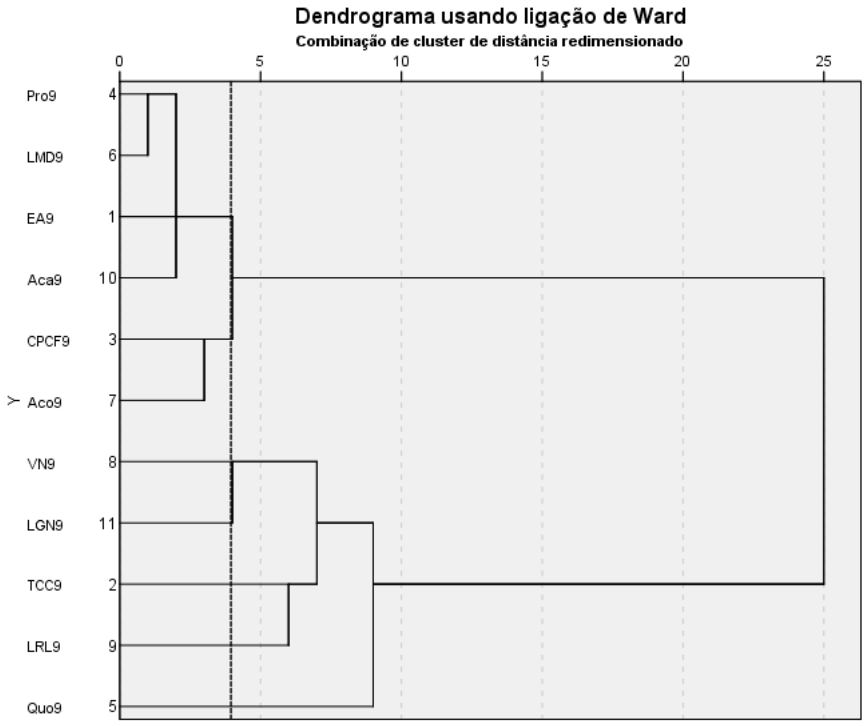


Figura 84 – *Dendograma* da análise de Clusters do 9.ºano, para o 1.º Momento de recolha de dados

Os seis Clusters, para o 9.º ano de escolaridade, fornecem-nos os seguintes grupos heterogéneos entre si (Figura 85).

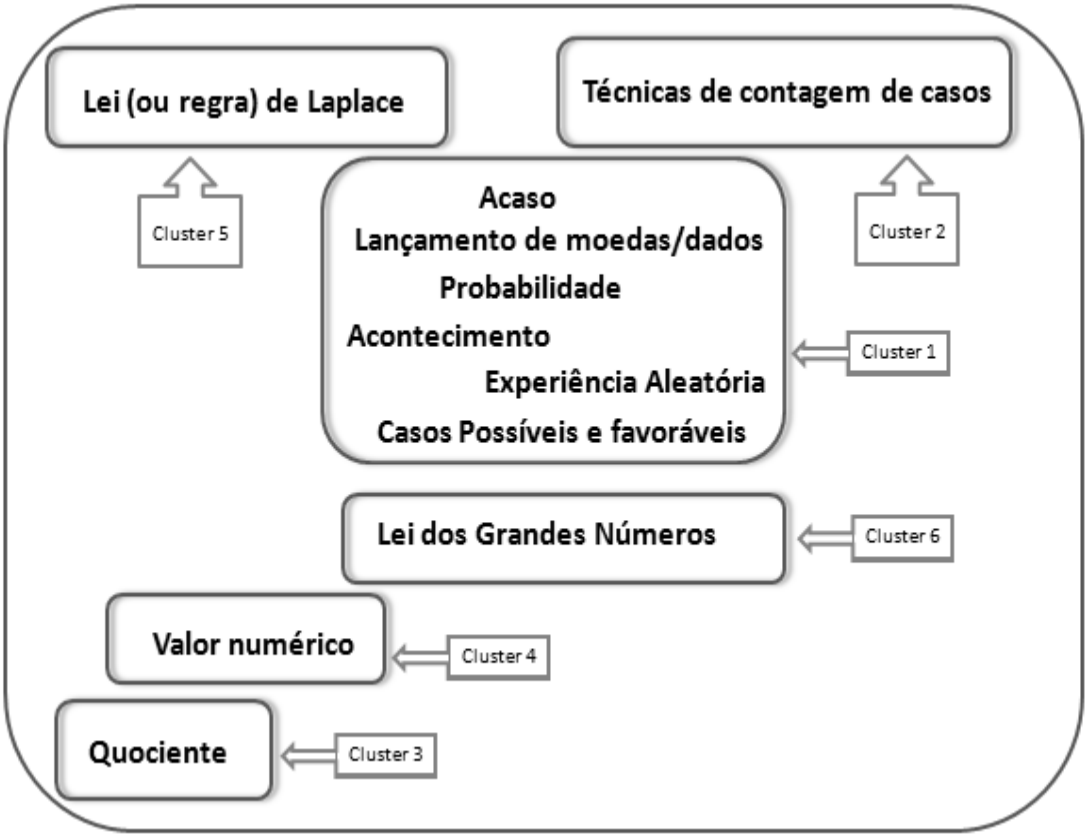


Figura 85 – *Clusters* com base na matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 9.º ano, no 1.º Momento da recolha de dados

Constatamos a existência de um agrupamento (*cluster* 1), constituído por 6 termos, e a existência de cinco grupos unitários.

No maior destes *clusters* constatamos termos associados ao Campo de problemas e ao contexto em que as probabilidades naturalmente ocorrem ("Lançamento de moedas/dados" e "Experiência aleatória") e conceitos especificamente ligados à linguagem das Probabilidades ("Acaso", "Acontecimento" e "Casos possíveis e favoráveis"). Os *clusters* singulares dividem-se pelos outros elementos do significado de Probabilidade.

Ainda, o maior destes grupos inclui os dois Conceitos Nucleares presentes nesta Rede Média – "Probabilidade" e "Lançamento de moedas/dados" – e alguns dos nós extremidade que se encontram muito próximas destes conceitos nucleares – "Acontecimento", "Casos possíveis e favoráveis", "Experiência aleatória" e "Acaso". Com exceção do termo "Valor numérico" (nó polar), todos os *clusters* unitários são constituídos por nós extremidade – "Quociente", "Lei (ou) regra de Laplace", "Lei dos Grandes Números" e "Técnicas de contagem de casos".

Em relação ao 12.º ano, a percentagem de explicação da variabilidade dada pelos cinco *cluster*s considerados é de, aproximadamente, 75,04%, o que constitui um bom valor relativo (Maroco, 2007),

$$R\ quadrado\ (12.º\ ano) = \frac{SQC}{SQT} = \frac{1{,}533}{2{,}043} = 0{,}7504 = 75{,}04\%$$

O dendograma relativo a esta análise de *clusters* apresenta-se na Figura 86.

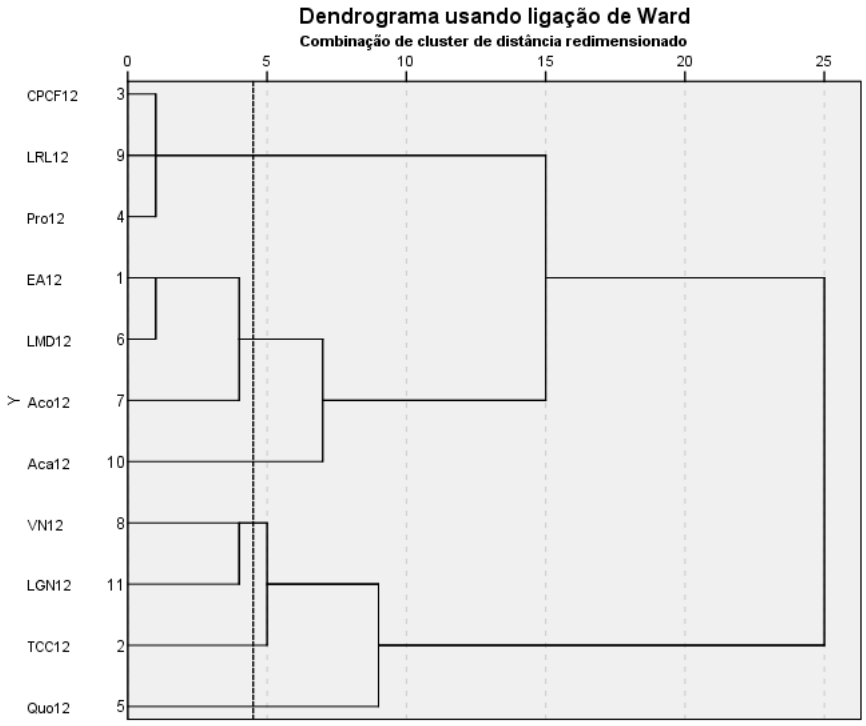


Figura 86 – Dendograma da análise de Clusters do 12.ºano,

para o 1.º Momento de recolha de dados

Os grupos homogéneos obtidos apresentam-se na Figura 87.

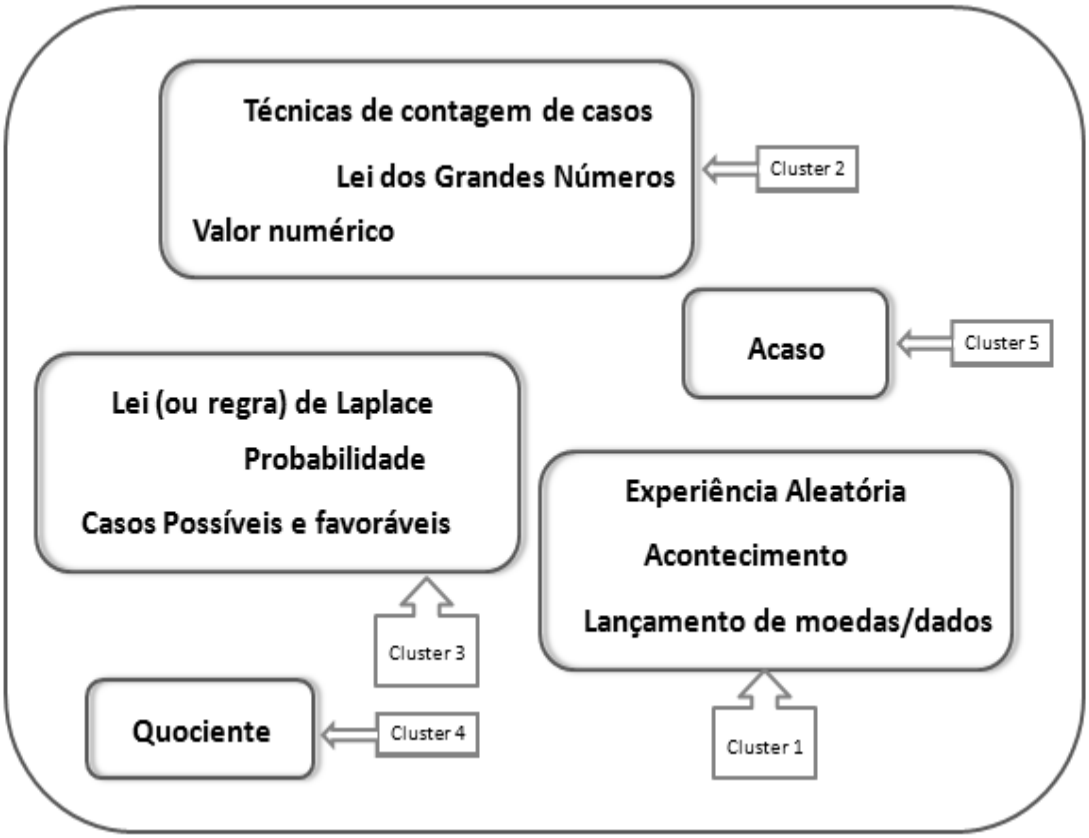


Figura 87 – *Cluster*s com base na matriz de distâncias da rede Média PFNET do 12.º ano, no 1.º Momento da recolha de dados

Os *cluster* formados (5), três deles são constituídos por três termos cada (*Cluster* 1 , *Cluster* 2 e *Cluster* 3). No primeiro destes grupos encontramos ideias ligadas ao campo de problemas e à linguagem probabilística ("Experiência Aleatória", "Acontecimento" e "Lançamento de dados/moedas"); no segundo grupo aspetos associados aos algoritmos, às grandes ideias e propriedades ("Técnica de contagem de casos", "Lei dos Grandes Números" e "Valor Numérico"); e o último destes *clusters*, relaciona definições e elementos linguísticos associados ao conceito de Probabilidade ("Lei (ou regra) de Laplace", "Probabilidade" e "Casos possíveis e favoráveis").

Os restantes dois agrupamentos são unitários, formados pelo "Acaso" e um outro constituído por "Quociente". Ressalta-se que este último, já aparecia como *cluster* unitário na rede média do 9.º ano de escolaridade.

Associado ao único Conceito Nuclear desta rede média – "Probabilidade" – surgem a "Lei (ou regra) de Laplace" e os "Casos possíveis e favoráveis", aspetos mais operatórios e práticos desta temática.

5.2. ANÁLISE DOS DADOS DO 2.º MOMENTO DE RECOLHA DE DADOS

Para a estudo dos resultados deste 2.º Momento de recolha de dados, baseamo-nos nos mesmos pressupostos daqueles que nortearam o 1.º Momento, isto é, realizou-se nas mesmas turmas, escolas e anos de escolaridade, em salas de informática e a informação recolhida foi tratada utilizando o Goluca, o Excel 2007 e o SPSS 20. Do 1.º para o 2.º Momento desta recolha de dados, mediou um intervalo de tempo que, dependendo das turmas, variou entre 3-4 meses.

Este outro Momento do nosso estudo, que foi realizado durante os meses de maio/junho de 2013, período que coincidiu com o final do ano letivo 2012/13, teve como objetivo analisar a "sedimentação cultural", entendida neste contexto como aquele conjunto de conceitos, e respetivas relações, que se perpetuam e se mantêm inalteráveis com o passar do tempo.

O total de sujeitos inquiridos neste momento foi de 325. Comparativamente com o 1.º Momento, verificou-se uma ligeira redução de 5,5% (19 alunos), justificada, essencialmente, pelo facto de que neste momento da recolha de dados os estudantes não estarem presentes na sala de aula.

A distribuição dos inquiridos, neste momento, por género e escola apresenta-se na Tabela 51.

Tabela 51 – Distribuição dos estudantes por Género e Escola no 2.º Momento da recolha de dados

		Escola do inquirido					
		D.Manuel I	Santa Maria	Santiago Maior	Mário Beirão	Diogo de Gouveia	Total
Género do inquirido	Masculino	58	30	20	17	26	151
	Feminino	61	24	30	20	39	174
Total		119	54	50	37	65	325

À semelhança do que aconteceu no 1.º Momento de recolha de dados, são os alunos do género feminino (53,5%) que constituem a maior proporção de discentes. A escola que mais contribui com estudantes foi a D. Manuel I (36,6%) e com menos a Mário Beirão (11,1%).

Em relação aos anos de escolaridade em análise - 9.º e 12.º anos de escolaridade - a distribuição dos discentes é a que consta da Figura 88.

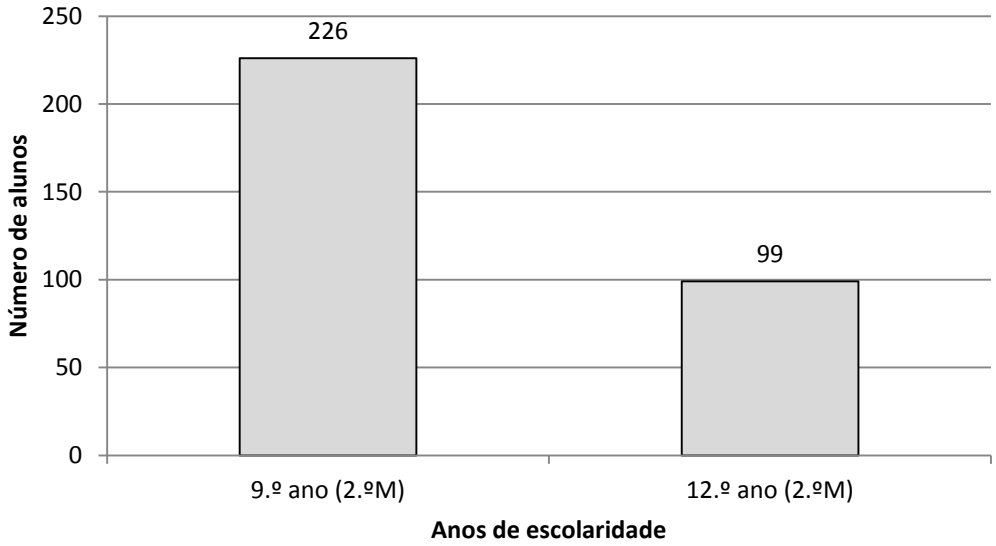


Figura 88 – Distribuição dos estudantes por Ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados

Os alunos do 9.º ano de escolaridade constituem a maioria da nossa amostra (69,5%), sendo que os estudantes do ano terminal do ensino secundário perfazem 30,5%, sendo todos provenientes das Escolas Secundárias com 3.º ciclo, D.Manuel I e Diogo de Gouveia.

5.2.1. A tipologia dos conceitos das redes PFNET, no 2.º Momento de recolha da dados

Como se pode constatar no Tabela 52, as redes produzidas com base na opinião dos alunos em relação às proximidades entre conceitos, neste 2.º Momento, permitiram-nos quantificar o número de vezes que os estudantes referiram os termos considerados como nó extremidade (NE), nó polar (NP) e Conceito Nuclear (CN).

Tabela 52 – Frequências dos diferentes conceitos/termos/exemplos das PFNET no 9.º e 12.º ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados

Conceitos	9.º ANO N=226			12.º ANO N=99		
	NE	NP	CN	NE	NP	CN
Acaso	94	80	52	41	40	18
Acontecimento	85	81	60	42	34	23
Casos Possíveis e Casos favoráveis	66	91	69	15	37	47
Experiência aleatória	65	84	77	31	40	28
Lançamento de moedas/dados	75	77	74	26	39	34
Lei (ou regra) de Laplace	90	80	56	31	38	30
Lei dos Grandes Números	123	67	36	54	32	13
Probabilidade	50	62	114	13	30	56
Quociente	131	55	40	57	26	16
Técnicas de contagem de casos	104	74	48	55	26	18
Valor numérico	110	70	46	54	36	9

Os NE mais frequentemente referidos no 9.º ano foram “Quociente” e “Lei dos grandes Números”, como CN “Probabilidade” e “Experiência aleatória” e como NP “Casos possíveis e casos favoráveis” e, mais uma vez, “Experiência aleatória”.

No 12.º ano os NE mais citados foram “Quociente” e “Técnicas de contagem de casos”, como CN “Probabilidade” e “Casos possíveis e casos favoráveis” e, finalmente, como NP, com igual frequência, “Experiência aleatória” e “Acaso”.

Deste modo verificamos que há concordância neste 2.º Momento e nestes dois anos de escolaridade, no que diz respeito às maiores frequências em relação aos CN “Probabilidade”, em relação ao NE “Quociente” e, ainda, em relação ao NP “Experiência aleatória”.

As Figuras 89, 90 e 91 mostram, respetivamente, as percentagens dos diversos temos/conceitos/exemplos enquanto Conceitos Nucleares, nós extremidade e nós polares, nos dois anos de escolaridade.

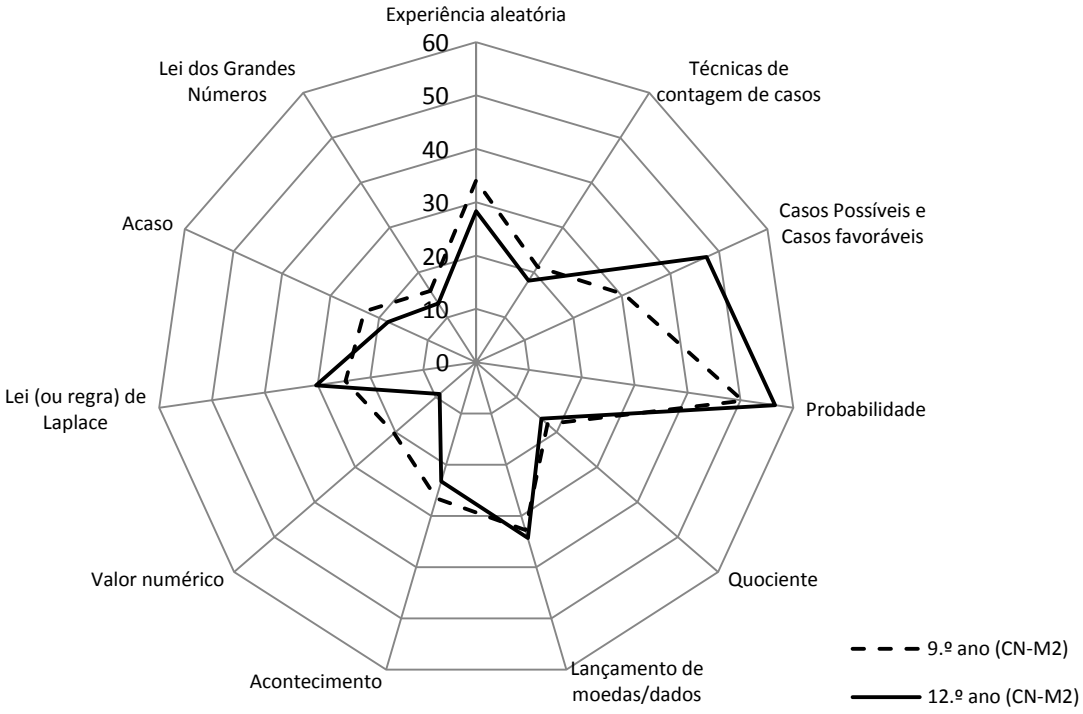


Figura 89 – Percentagem dos diferentes conceitos como Conceitos Nucleares no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados

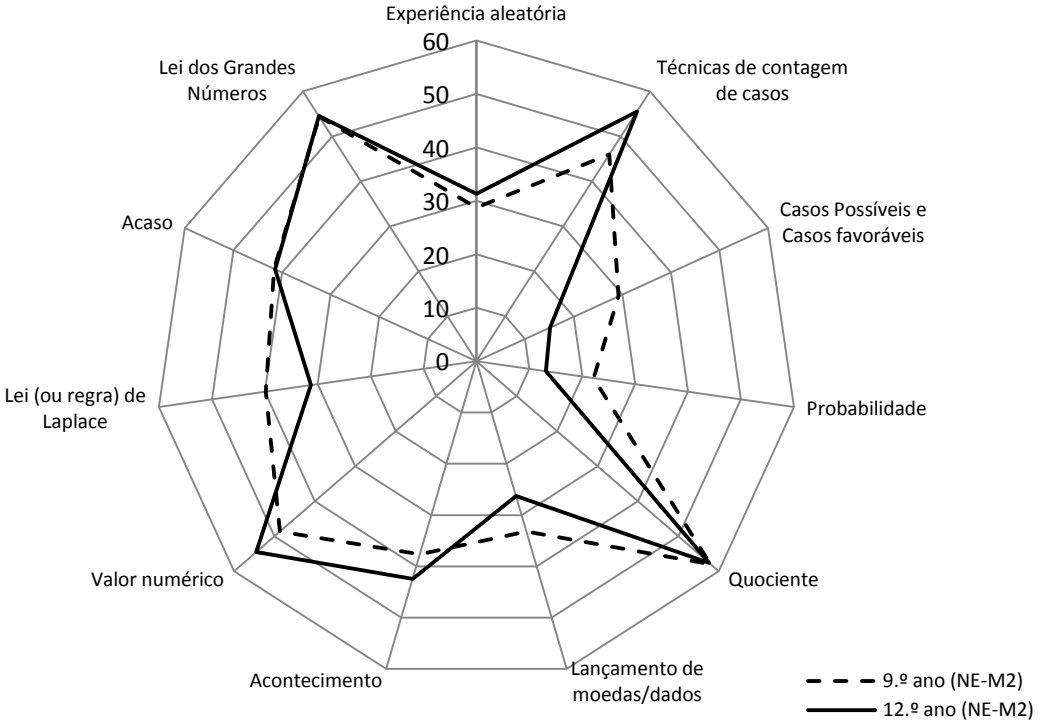


Figura 90 – Percentagem dos diferentes conceitos como nós extremidade no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados

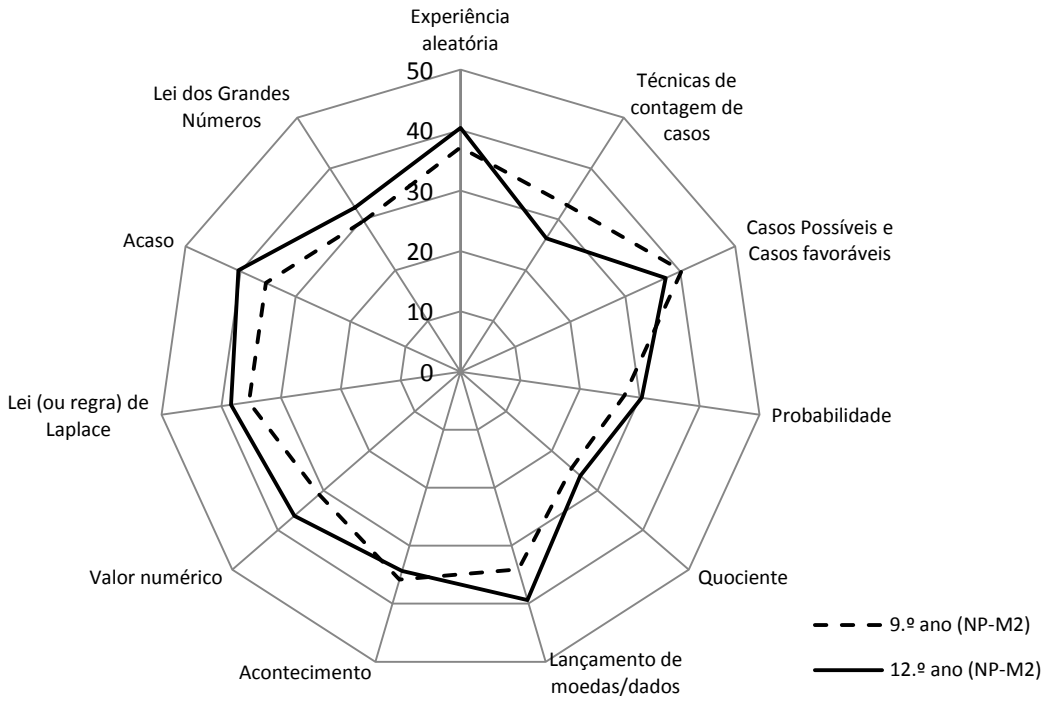


Figura 91 – Percentagem dos diferentes conceitos como nós polares no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade no 2.º Momento de recolha de dados

Resulta da análise destas figuras, que as distribuições destas percentagens, nos dois anos escolares e no que refere-se às diversas tipologias, apresentam linha poligonais, globalmente, com a mesma "forma", o que é indicador da similitude, dada pelos estudantes destes dois anos de escolaridade, às várias tipologias associadas aos conceitos/termos das redes PFNET.

5.2.2. O Teste do Qui-quadrado para a tipologia dos termos/conceitos/noções/exemplos, no 2.º Momento de recolha de dados

O teste qui-quadrado (χ^2), que se apresenta na Tabela 53 para o 2.º Momento de recolha de dados, tem como objetivo testar se a frequência com que os sujeitos da amostra referem as diferentes tipologias dos conceitos das PFNET é, ou não, estatisticamente idêntica ou, ainda, se relativamente aos diferentes conceitos (Experiência aleatória, Técnicas de contagem de casos, entre outros) estes se distribuem de modo semelhante (*Sig.*>0,05) pelas diferentes tipologias dos nós das redes - nó extremidade, nó polar e Conceito Nuclear.

Tabela 53 – Valores do χ^2 e *Sig.* do teste do qui-quadrado, no 2.º Momento de recolha de dados

Conceitos	9.º ANO N=226		12.º ANO N=99	
	χ^2(g.l.=2)	*Sig.*	χ^2(g.l.=2)	*Sig.*
Acaso	12,142	0,002	10,242	0,006
Acontecimento	4,788	0,091	5,515	0,063
Casos Possíveis e Casos favoráveis	4,947	0,084	16,242	0,000
Experiência aleatória	2,451	0,294	2,362	0,307
Lançamento de moedas/dados	0,062	0,97	2,606	0,272
Lei (ou regra) de Laplace	8,106	0,017	1,152	0,562
Lei dos Grandes Números	51,619	0,000	25,515	0,000
Probabilidade	30,726	0,000	28,424	0,000
Quociente	63,195	0,000	27,627	0,000
Técnicas de contagem de casos	20,850	0,000	22,970	0,000
Valor numérico	27,752	0,000	31,091	0,000

Admitindo uma nível de significância de α=0,05 (5%), podemos concluir que:

- No 9.º ano

  - A distribuição de alunos que referem os conceitos “Experiência aleatória”, “Casos possíveis e casos favoráveis”, “Lançamento de Moedas” e “Acontecimento” como nó extremidade, polar ou Conceito Nuclear é estatisticamente semelhante (*Sig.*>0,05);

  - Os conceitos “Quociente”, “Lei dos Grandes Números”, “Lei (ou regra) de Laplace”, “Valor numérico”, “Acaso” e “Técnicas de contagem de casos”, apresentam distribuições de frequências estatisticamente diferentes de estudantes pelas tipologias dos termos, sendo que a maior parte dos estudantes consideram-nos nó extremidade (*Sig.*<0,05);

  - O conceito “Probabilidade”, apresenta uma frequência significativa de discentes que o consideram Conceito Nuclear (*Sig.*<0,05).

- No 12.º ano

  - Não existem diferenças na distribuição das frequências, entre os estudantes, das diferentes tipologias dos conceitos “Experiência aleatória”, “Lançamento de moedas/dados”, “Acontecimento” e “Lei (ou regra) de Laplace”;

- Os conceitos "Técnicas de contagem de casos", "Quociente", "Acaso", "Valor numérico", "Acaso" e "Lei dos Grandes Números", apresentam frequências estatisticamente diferentes, havendo mais estudantes que os consideram nó extremidade;

- Os conceitos de "Probabilidade" e "Casos possíveis e casos favoráveis" exibem frequências estatisticamente diferentes, sendo que há mais discentes que os consideram Conceito Nuclear

Tanto o 9.º como o 12.º ano apresentam a "Probabilidade" como Conceito Nuclear. Os conceitos "Experiência aleatória" e "Lançamento de moedas/dados" estão igualmente distribuídos pelas diferentes tipologias dos conceitos. Por último as "Técnicas de contagem de casos", "Quociente", "Acaso", "Valor numérico" e "Lei dos Grandes Números", surgem mais frequentemente como nós extremidade.

Estas conclusões encontram-se resumidas na Tabela 54.

Tabela 54 - Distribuição das respostas dos conceitos/noções/termos/exemplos como nó extremidade, nó polar e Conceito nuclear, nos 9.º e 12.º anos, no 2.º Momento de recolha de dados (a sombreado os conceitos comuns, de acordo com a tipologia, em ambos os anos de escolaridade)

9.º ano		12.º ano	
Igualmente distribuídos como nó extremidade, polar e Conceito Nuclear	- **Experiência aleatória.** - Casos possíveis e casos favoráveis. - **Lançamento de dados/moedas**; -Acontecimento.	**Igualmente distribuídos como nó extremidade, polar e Conceito Nuclear**	**- Experiência Aleatória** - **Lançamento de moedas/dados.** - Acontecimento - Lei (ou regra) de Laplace.
nó extremidade	**- Quociente.** **- Lei dos Grandes Números.** - Lei (ou regra) de Laplace. **- Valor numérico.** **- Técnicas de contagem de casos.** **- Acaso**	**nó extremidade**	**- Técnicas de contagem de casos.** **- Quociente.** **- Acaso** **- Valor numérico.** **- Lei dos Grandes Números.**
Conceito Nuclear	**- Probabilidade.**	**Conceito Nuclear**	**- Probabilidade.** - Casos Possíveis e casos favoráveis

5.2.3. Árvores de Decisão para o 2.º Momento de recolha da dados

Também neste 2.º Momento de recolha de dados, efetuamos o procedimento classificativo das Árvores de Decisão, com o mesmo objetivo descrito para o 1.º Momento, ou seja, a obtenção de uma melhor ideia sobre a influência das diferentes tipologias dos conceitos/termos/noções/exemplos das redes PFNET, nos dois anos de escolaridade.

De igual modo, a variável dependente será o ano de escolaridade (9.º ano e 12.º anos, neste 2.º Momento) e as variáveis independentes serão as várias tipologias dos conceitos (nós extremidade, nó polar e Conceito nuclear) dos diferentes conceitos utilizados nas redes PFNET.

Analogamente ao efetuado anteriormente, o algoritmo utilizado foi o *CHAID - Chi-Squared Automatic Interaction Detector.*

Na árvore de Decisão obtida, e apresentada na Figura 92, a variável independente considerada estatisticamente significativa na explicação do ano escolar é "Caso possíveis e casos favoráveis" (χ^2=8,463;*Sig.*=0,011). O método de crescimento considerou somente 2 nós, todos terminais (nós 1 e 2). O diagrama da árvore mostra, a sombreado cinzento em cada caixa, a categoria prevista da variável "Ano de escolaridade" pelo método CHAID. Note-se que, em todas as caixas, a categoria sombreada corresponde ao 9.º ano de escolaridade, pelo que o modelo obtido classifica muito bem os alunos do 9.º ano.

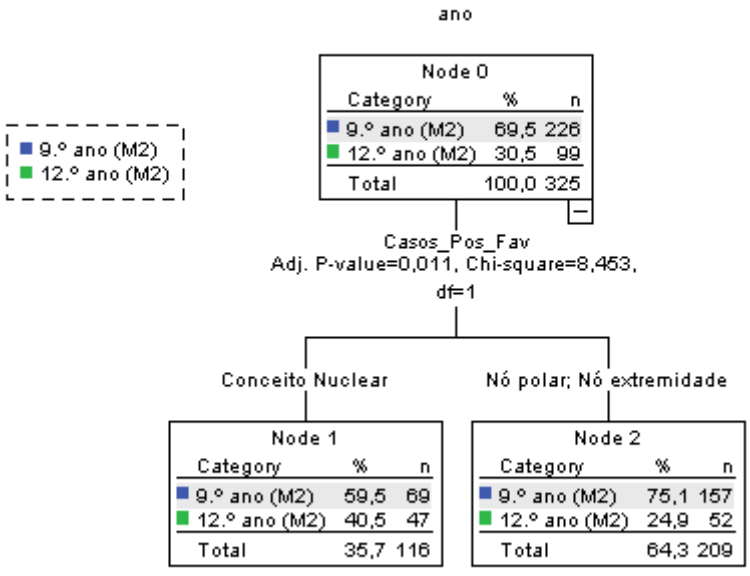


Figura 92 – Árvore de decisão do Ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados

O único nível de profundidade desta árvore obtém-se através do conceito "Casos possíveis e casos favoráveis", sendo esta variável a que melhor classifica os estudantes do 9.º ano.

De seguida, segmentou-se a amostra em dois grupos: Aqueles que consideram este Conceito Nuclear e aqueles que o consideram nó polar ou nó extremidade.

O nó terminal 1, que atribui 59,5% de probabilidade de ser do 9.º ano e corresponde a 30,5% ($\frac{69}{226} \times 100\%$) do total de alunos deste nível de ensino, que considera "Casos possíveis e os caso favoráveis" como Conceito Nuclear. O outro nó terminal (Nó 2), que também classifica os estudantes do 9.º ano de escolaridade, é caracterizado pelos "Casos possíveis e casos favoráveis" nas tipologias de Nó polar ou Nó extremidade e corresponde a 69,5% ($\frac{157}{226} \times 100\%$) dos alunos do 9.º ano de escolaridade.

Assim, e em relação aos alunos do 9.º ano de escolaridade;

- 69,5% ($\frac{157}{226} \times 100\%$) considera os "Casos possíveis e os casos favoráveis" como nó polar ou nó extremidade;
- 30,5% ($\frac{69}{226} \times 100\%$) vê os "Casos possíveis e os casos favoráveis" como Conceito Nuclear.

Em relação aos estudantes do 12.º ano, temos que:

- 62,6% ($\frac{52}{99} \times 100\%$) considera os "Casos possíveis e os casos favoráveis" como nó polar ou nó extremidade, e;
- os restantes discentes 47,5% ($\frac{47}{99} \times 100\%$) vê os "Casos possíveis e os casos favoráveis como Conceito Nuclear".

A tabela de classificação informa sobre o número de previsões corretas e incorretas feitas pelo modelo, enquanto a tabela de risco informa sobre a taxa global de classificações incorretas.

Tabela 55 – Tabela de classificação e tabela de risco da Árvore de Decisão, no 2.º Momento de recolha de dados

Classificação

Observado	Previsto		
	9.º ano (M2)	12.º ano (M2)	Percentagem Correta
9.º ano (M2)	226	0	100%
12.º ano (M2)	99	0	0%
Percentagem global	100,0%	0,0%	69,5%

Método de crescimento: CHAID
Variável dependente: ano

Risco

Estimativa	Erro padrão
,305	,026

Método de crescimento: CHAID

Variável dependente: ano

Em termos gerais o modelo classifica corretamente 69,5% dos estudantes e incorretamente 30,5%, todos estes pertencentes ao 12.º ano de escolaridade.

O erro padrão (0,026), permite-nos a construção do intervalo de confiança para a percentagem de classificações incorretas. Assim, o intervalo com um nível de confiança de confiança a 95% vem dado por $0{,}305 \pm 1{,}96 \times 0{,}026$, o que vem mostrar que o risco de classificações incorretas situa-se entre 25,4% e 35,6%.

5.2.4. Análise dos indicadores quantitativos das PFNET, no 2.º Momento da recolha de dados

5.2.4.1. A influência do Género nos indicadores quantitativos das PFNET, no 2.º Momento da recolha de dados.

Com os dados recolhidos neste 2.º Momento pelo *software Goluca*, analisaremos a possível influência do Género, como variável discriminatória no conjunto de indicadores quantitativos das redes PFNET.

Com recurso ao SPSS, os valores estatísticos do número de Conceitos Nucleares, *número* de nós extremidade, número de nós polares, Densidade das redes, Coerência das redes, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares e Fator do grau dos nós nucleares, apresentam-se na Tabela 56, para todos os alunos e para os subgrupos de estudantes do Género feminino e masculino.

Tabela 56 – Indicadores quantitativos das redes de acordo com o Género, no 2.º Momento de recolha de dados

	Masculino (N=151)			Feminino (N=174)			Total (N=325)		
	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana
Número de nós extremidade	4,32	1,480	5,00	4,37	1,52	4,00	4,34	1,50	5,00
Número de nós polares	3,64	1,556	3,00	3,74	1,56	4,00	3,69	1,56	4,00
Número de Conceitos nucleares	3,05	1,559	3,00	2,90	1,44	3,00	2,97	1,50	3,00
Densidade da Rede	0,204	0,037	0,20	0,20	0,03	0,18	0,20	0,03	0,18
Fator dos nós nucleares	0,28	0,142	0,273	0,26	0,13	0,27	0,27	0,14	0,27
Grau dos nós nucleares	10,90	6,113	9,00	10,17	5,29	9,00	10,51	5,69	9,00
Fator do grau dos nós nucleares	0,099	0,056	0,082	0,09	0,05	0,08	0,10	0,05	0,08
Coerência	0,202	0,241	0,171	0,15	0,26	0,16	0,18	0,25	0,17

Em conformidade com o que aconteceu no 1.º Momento de recolha de dados, estes indicadores das redes PFNET, evidenciam uma similaridade numérica, para os alunos de ambos os géneros.

Com o propósito de estudar se o Género pode, ou não, ser estatisticamente discriminatório, para este conjunto de indicadores, realizou-se o teste não paramétrico de *Mann-Whitney* para efetuar esta comparação. A opção por este teste baseou-se no facto de que, à exceção da variável Coerência, todas as outras variáveis, nos dois géneros, não verificaram o pressuposto da normalidade, facto que inviabilizou a aplicabilidade do teste t-*Student* para amostras independentes (Tabela 57).

Tabela 57 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Género dos inquiridos, no 2.º Momento de recolha de dados

Indicadores quantitativos das PFNET	Género	*Kolmogorov-Smirnov*[a]		
		Estatística	df	*Sig.*
Número de nós extremidade	Masculino	,187	151	,000
	Feminino	,155	174	,000
Número de nós polares	Masculino	,169	151	,000
	Feminino	,128	174	,000
Número de nós nucleares	Masculino	,227	151	,000
	Feminino	,236	174	,000
Densidade da Rede	Masculino	,303	151	,000
	Feminino	,287	174	,000
Fator dos nós nucleares	Masculino	,227	151	,000
	Feminino	,236	174	,000
Grau dos nós nucleares	Masculino	,180	151	,000
	Feminino	,191	174	,000
Fator do grau dos nós nucleares	Masculino	,180	151	,000
	Feminino	,191	174	,000
Coerência	Masculino	,059	151	,200*
	Feminino	,042	174	,200*

*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.

Os valores dos *Sig.* do teste de *Mann-Whitney,* para todas as variáveis, à exceção da Coerência, nos dois grupos, apresentam-se na Tabela 58.

Tabela 58 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis de acordo com o Género, no 2.º Momento de recolha de dados

	Mann-Whitney U	*Sig.*
Número de nós extremidade	13080,0	,945
Número de nós polares	12410,0	,380
Número de nós nucleares	12341,5	,330
Densidade da Rede	12101,5	,180
Fator dos nós nucleares	12341,5	,330
Grau dos nós nucleares	12124,5	,229
Fator do grau dos nós nucleares	12124,5	,229

a. Variável de agrupamento: Género do inquirido

Os *Sig.* deste teste e para estas variáveis variaram entre 0,180 e 0,945, superiores a 0,05 (5%), pelo que a variável independente Género não é discriminatória relativamente às variáveis número de nós extremidade, número de nós polares, número de nós nucleares, Densidade da Rede, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares e Fator do grau dos nós nucleares das redes PFNET.

Em relação à Coerência das redes, e como os pressupostos teóricos para aplicação do teste t-*Student* são cumpridos (Normalidade – $Sig._{Masculino/2.ºmomento}$=0,200 e $Sig._{Feminino/2.ºmomento}$=0,200 - e Homogeneidade das Variâncias – *Sig*=0,332 e o teste de aleatoriedade - Tabela 59 - fornece um Sig.=0,868 (>0,05), o qual permite considerar uma amostra aleatória), temos,

Tabela 59 - Teste de sequências para a coerência de acordo com o Género, no 2.º Momento de recolha de dados

	Coerência
Valor de teste[a]	,1704
Cases < Test Value	162
Cases >= Test Value	163
Total de casos	325
Number of Runs	162
Z	-,166
Sig. Assint. (2 caudas)	,868

a. Mediana

O *Sig.* do teste t-*Student* apresenta um valor de 0,074 (>0,05) pelo que a coerência apresenta valores médios estatisticamente iguais nos rapazes e nas raparigas e neste Momento de recolha de dados.

5.2.4.2. A influência do Ano de Escolaridade nos indicadores quantitativos das redes PFNET, no 2.º Momento da recolha de dados

À semelhança do que fizemos para o género averiguemos se todos estes indicadores quantitativos são, ou não, estatisticamente idênticos nos dois anos de escolaridade considerados. A Tabela 60 mostra os valores das estatísticas descritivas média, mediana e desvio padrão para todas estas variáveis e para os dois anos de escolaridade.

Tabela 60 – Indicadores quantitativos das redes de acordo com o Ano de escolaridade, no 2.º Momento da recolha de dados

	9.º ano (N=226)			12.º ano (N=99)			Total (N=325)		
	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana
Número de nós extremidade	4,39	1,47	5,00	4,23	1,56	4,00	4,34	1,50	5,00
Número de nós polares	3,63	1,54	3,00	3,82	1,60	4,00	3,69	1,56	4,00
Número de nós nucleares	2,97	1,47	3,00	2,95	1,56	3,00	2,97	1,50	3,00
Densidade da Rede	0,20	0,03	0,18	0,21	0,04	0,20	0,20	0,03	0,18
Fator dos nós nucleares	0,27	0,13	0,27	0,27	0,14	0,27	0,27	0,14	0,27
Grau dos nós nucleares	10,39	5,43	9,00	10,78	6,27	9,00	10,51	5,69	9,00
Fator do grau dos nós nucleares	0,09	0,05	0,08	0,10	0,06	0,08	0,10	0,05	0,08
Coerência	0,14	0,25	0,14	0,26	0,24	0,30	0,18	0,25	0,17

Também aqui, realizou-se o teste não paramétrico de *Mann-Whitney* para efetuar esta comparação, em virtude do não cumprimento dos requisitos teóricos da Normalidade em todas estas variáveis nas duas amostras (Tabela 61), com exceção da Coerência (Normalidade – $Sig._{9.ºano/2.ºmomento}$ =0,200 e $Sig._{12.ºano/2.ºmomento}$ =0,097 - e Homogeneidade das Variâncias – *Sig*=0,992 e o teste de aleatoriedade - Tabela 59 - fornece um Sig.=0, 868(>0,05), o qual permite considerar uma amostra aleatória).

Tabela 61 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Ano de escolaridade dos inquiridos, no 2.º Momento de recolha de dados

Indicadores quantitativos das PFNET	Ano de escolaridade	Kolmogorov-Smirnov[a]		
		Estatística	Df	*Sig.*
Número de nós extremidade	9.º ano	,182	226	,000
	12.º ano	,158	99	,000
Número de nós polares	9.º ano	,177	226	,000
	12.º ano	,172	99	,000
Número de nós nucleares	9.º ano	,254	226	,000
	12.º ano	,193	99	,000
Densidade da Rede	9.º ano	,289	226	,000
	12.º ano	,286	99	,000
Fator dos nós nucleares	9.º ano	,254	226	,000
	12.º ano	,193	99	,000
Grau dos nós nucleares	9.º ano	,201	226	,000
	12.º ano	,180	99	,000
Fator do grau dos nós nucleares	9.º ano	,201	226	,000
	12.º ano	,180	99	,000
Coerência	9.º ano	,031	226	,200*
	12.º ano	,082	99	,097

*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.

a. *Lilliefors Significance Correction*

Os valores dos *Sig.* de *Mann-Whitney* para estas variáveis, nos dois anos escolares, apresentam-se na Tabela 62.

Tabela 62 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis de acordo com o Ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados

	***Mann-Whitney* U**	***Sig.***
Número de nós extremidade	10362,00	,278
Número de nós polares	10088,00	,151
Número de nós nucleares	10971,50	,775
Densidade da Rede	10450,00	,302
Fator dos nós nucleares	10971,50	,775
Grau dos nós nucleares	10952,00	,762
Fator do grau dos nós nucleares	10952,00	,762

a. Variável de agrupamento: Ano de escolaridade

Atendendo aos valores presentes na tabela anterior, constatamos que não existem diferenças estatisticamente significativas para todas estas variáveis (*Sig.*>0,05), pelo que o Ano de Escolaridade não é discriminatório para estas variáveis.

Em relação à variável Coerência o teste t-*Student* para amostras independentes, fornece um *Sig.*=0,000<0,05, pelo que existem diferenças significativas nos dois anos de escolaridade considerados, aumentando este valor do 9.º (0,14) para o 12.º ano (0,26), o que é indicador de uma maior consistência da aprendizagem e de um modo mais atento na atribuição dos valores de similaridades entre os conceitos dos estudantes do ano terminal do ensino secundário.

5.2.4.3. O Índice de Complexidade das redes PFNET (ICR), no 2.º Momento da recolha de dados

5.2.4.3.1. O Índice de Complexidade das redes PFNET de acordo com o Género, no 2.º Momento de recolha de dados

A Tabela 63 mostra os valores da média, desvio padrão e mediana do ICR para rapazes e raparigas.

Tabela 63 – ICR das redes dos estudantes de acordo com o Género, no 2.º Momento de recolha de dados

	Masculino (N=151)			Feminino (N=174)			Total (N=325)		
	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana
Índice de complexidade da rede	8,646	14,66	4,462	7,12	11.549	4,06	7,83	13,09	4,06

Apesar do valor médio do ICR ser mais elevado no género masculino, a mediana é ligeiramente inferior neste grupo de sujeitos.

Como podemos constatar na Figura 93, a distribuição do ICR nos dois géneros é manifestamente diferente da distribuição normal, já que, para ambos os grupos, apresenta uma assimetria positiva e um achatamento menor que a curva gaussiana.

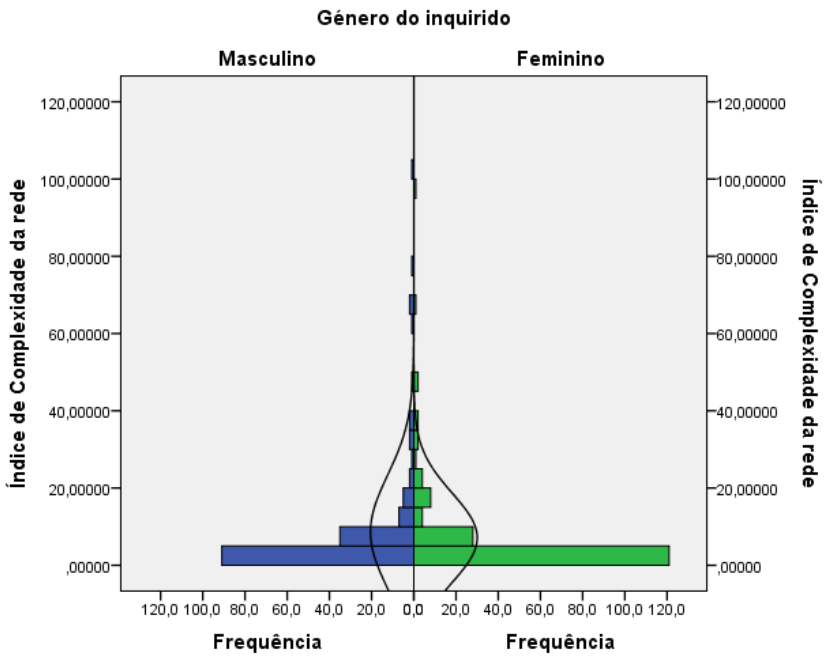


Figura 93 – Histograma do ICR de acordo com o Género, no 2.º Momento de recolha de dados

O teste de *Kolmogorov/Smirnov* vem corroborar o que graficamente já referimos sobre a não normalidade do ICR nos dois grupos ($Sig._{Masculinos/2.ºmomento}$= 0,000<0,05 e $Sig._{Femininos/2.ºmomento}$=0,000<0,05).

O teste de *Mann-Whitney* oferece os seguintes resultados:

Tabela 64 – Teste de *Mann-Whitney* para o ICR de acordo com o Género, no 2.º Momento da recolha de dados

	***Mann-Whitney* U**	***Sig.***
Índice de complexidade das Redes	12089,50	0,214

a. Variável de agrupamento: Género do inquirido

Podemos assim concluir que o Género não tem um efeito estatisticamente diferente sobre o Índice de Complexidade das Redes (*Sig.*>0,05), pelo que não há diferenças significativas no ICR entre rapazes e raparigas.

5.2.4.3.2. O Índice de Complexidade das redes PFNET de acordo com o Ano de Escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados

De um modo análogo ao que foi feito anteriormente, a Tabela 65 mostra os valores da média, mediana e desvio padrão do ICR para os alunos dos 9.º e 12.º anos de escolaridade.

Tabela 65 – ICR das redes dos estudantes de acordo com o Ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados

	9.º ano (N=226)			12.º ano (N=99)			Total (N=325)		
	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana	Média	DP	Mediana
Índice de complexidade da rede	7,53	12,62	4,06	8,51	14,15	4,46	7,83	13,09	4,06

Tanto os valores da média como da mediana, do Índice de Complexidade das redes, aumenta ligeiramente quando passamos dos alunos do 9.º de escolaridade para os estudantes do 12.º ano.

O histograma do ICR para os 9.º e 12.º anos, que se apresenta-se na Figura 94, aponta para a não normalidade das distribuições.

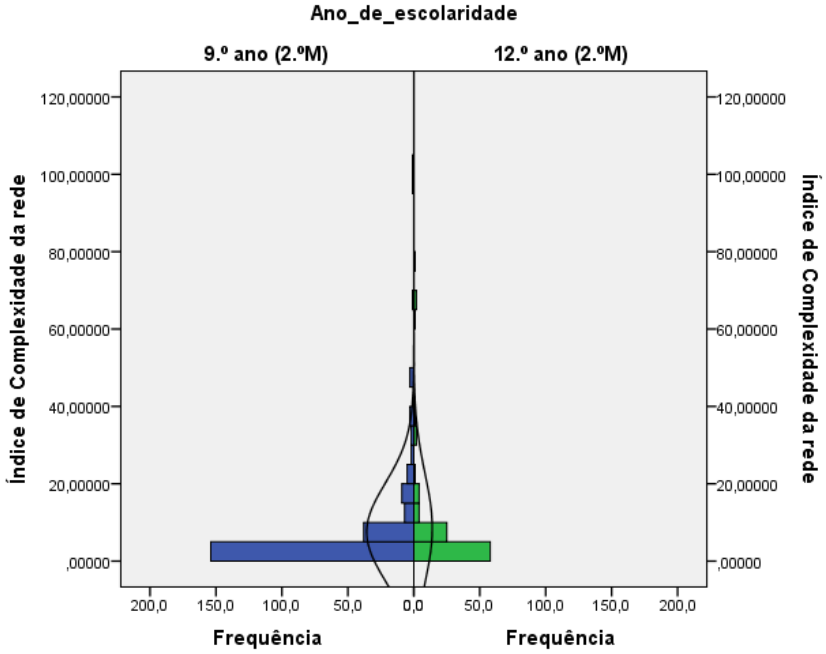


Figura 94 – Histograma do ICR de acordo com o Ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados

O teste de *Kolmogorov/Smirnov* reforça a não normalidade do ICR nos dois grupos ($Sig._{9.ºano/2.ºmomento}$= 0,000<0,05 e $Sig._{12.ºano/2.ºmomento}$=0,000<0,05).

O teste de *Mann-Whitney* (*Sig.*=0,809) permite-nos concluir que, os alunos de ambos os anos de escolaridade não apresentam diferenças estatisticamente significativas (*Sig.*>0,05) em relação ao Índice de Complexidade das redes (Tabela 66).

Tabela 66 – Teste de *Mann-Whitney* para o ICR de acordo com o Ano de escolaridade no 2.º Momento de recolha de dados

	***Mann-Whitney* U**	***Sig.***
Índice de complexidade das Redes	10999,000	,809

a. Variável de agrupamento: Ano de escolaridade

5.2.5. As Redes Médias *Pathfinder* do 9.º e 12.º anos, no 2.º Momento da recolha de dados

De seguida discutiremos as Redes Médias Associativas PFNET, que foram obtidas tendo como base as matrizes individuais de todos os alunos inquiridos neste 2.º Momento da recolha de dados.

5.2.5.1 A Rede Média Associativa PFNET relativa ao 9.º ano de escolaridade no 2.º Momento da recolha de dados

Para os alunos do 9.º ano de escolaridade, a rede média PFNET obtida apresenta-se na Figura 95.

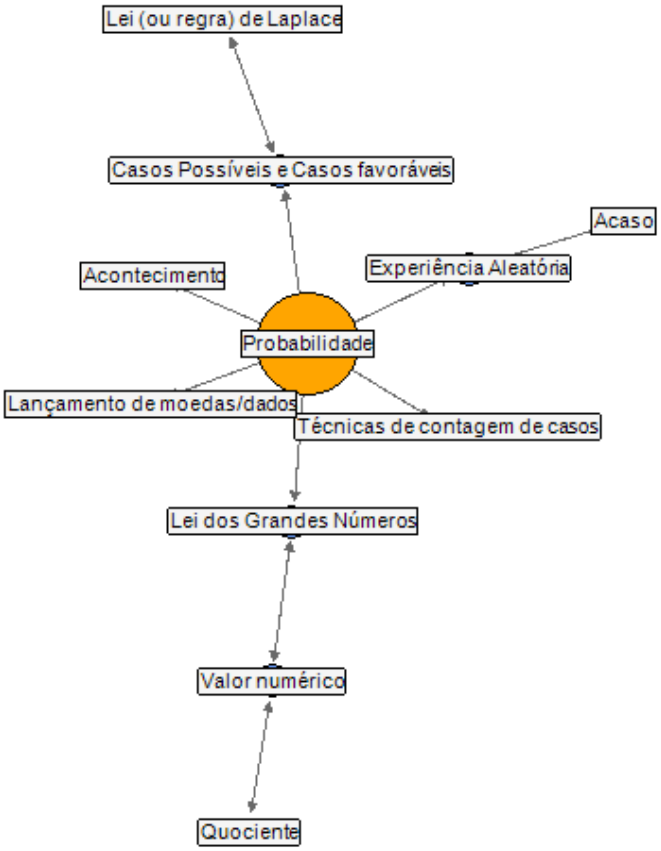


Figura 95 – Rede Média PFNET dos estudantes do 9.º ano (N=226), no 2.º Momento da recolha dados

Nesta rede sobressai um só conceito Nuclear – "Probabilidade", à semelhança do que aconteceu no 1.º Momento de recolha de dados. Pelo facto de este conceito constituir o objeto matemático central do presente trabalho, a importância dada às relações desta noção com os outros termos é bastante valorizada pelos estudantes.

Para além deste Conceito nuclear, encontramos seis nós extremidade - "Quociente", "Acontecimento", "Lei (ou regra) de Laplace", "Técnicas de contagem de casos", Lançamento de moedas/dados" e "Acaso" – e quatro Nós polares – "Lei dos Grandes Números", Experiência aleatória", "Casos possíveis e casos favoráveis" e "Valor Numérico".

Outros indicadores quantitativos desta rede são:

Tabela 67 – Indicadores quantitativos da Rede Média PFNET dos alunos do 9.º ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados

	Nós Nucleares	Densidade	Fator dos nós nucleares	Grau dos nós nucleares	Fator Grau dos nós nucleares	ICR
Rede Média do 9.º ano	1	0,182	0,091	6	0,055	0,91

E, em relação ao grau de centralidade da rede temos,

Tabela 68 – Centralidade da rede Média PFNET dos alunos do 9.º ano de escolaridade, no 2.º Momento da recolha de dados

Conceitos	$\mathbf{Grau(N_i)}$	$\mathbf{C_G(N_i)}$	$\frac{(\mathbf{MáxC_G(N_i)) - C_G(N_i))}}{\mathbf{N-2}}$
Acaso	1	0,1	0,056
Acontecimento	1	0,1	0,056
Casos possíveis e casos favoráveis	2	0,2	0,044
Experiência aleatória	2	0,2	0,044
Lançamento de moedas/dados	1	0,1	0,056
Lei (ou regra) de Laplace	1	0,1	0,056
Lei dos Grandes números	2	0,2	0,044
Probabilidade	6	0,6	0,000
Quociente	1	0,1	0,056
Técnicas de contagem de casos	1	0,1	0,056
Valor numérico	2	0,2	0,044
			$C_G(R) =$O,511

Este último valor é indicador de uma estrutura cognitiva bastante centralizada no conceito de Probabilidade.

5.2.5.2. A rede Média Associativa PFNET relativa ao 12.º ano de escolaridade, no 2.º Momento da recolha de dados

Em relação à Rede Média PFNET dos alunos do 12.º ano, no 2.º Momento, constatamos a existência de dois Conceitos nucleares – "Probabilidade" e "Casos possíveis e casos Favoráveis" (Figura 96).

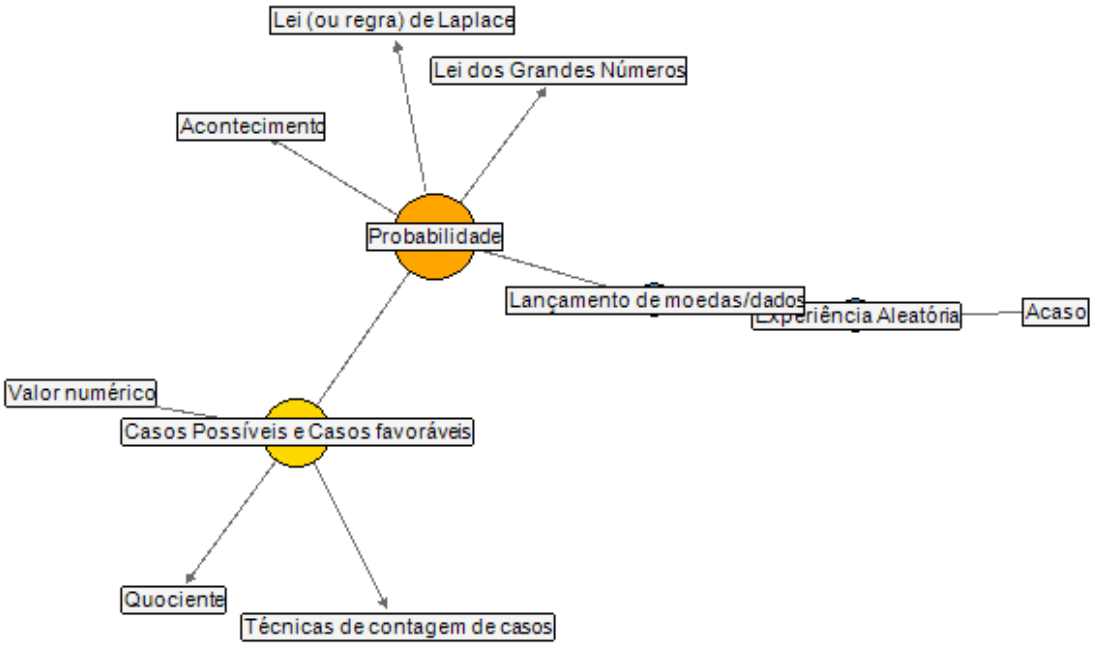


Figura 96 – Rede Média PFNET dos estudantes do 12.º ano (N=99), no 2.º Momento de recolha de dados

Como nós polares identificamos o "Lançamento de moedas/dados" e "Experiência aleatória" e como nós extremidade os restantes conceitos/termos/noções, ou seja, "Quociente", "Acontecimento", "Lei (ou regra) de Laplace", "Técnicas de contagem de casos" e "Acaso" , "Lei dos Grandes Números" e "Valor Numérico".

Os indicadores quantitativos desta rede são:

Tabela 69 – Indicadores quantitativos da Rede Média PFNET dos alunos do 12.º ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados

	Nós Nucleares	Densidade	Fator dos nós nucleares	Grau dos nós nucleares	Fator Grau dos nós nucleares	ICR
Rede Média (12.º ano)	2	0,182	0,182	9	0,082	2,72

O índice de Centralidade da rede apresenta-se na Tabela 70

Tabela 70 – Centralidade da Rede Média PFNET dos alunos do 12.º ano de escolaridade, no 2.º Momento de recolha de dados

Conceitos	$\mathbf{Grau(N_i)}$	$\mathbf{C_G(N_i)}$	$\frac{(\mathbf{MáxC_G(N_i)) - C_G(N_i))}}{\mathbf{N-2}}$
Acaso	1	0,1	0,044
Acontecimento	1	0,1	0,044
Casos possíveis e casos favoráveis	4	0,4	0,011
Experiência aleatória	2	0,2	0,033
Lançamento de moedas/dados	2	0,2	0,033
Lei (ou regra) de Laplace	1	0,1	0,044
Lei dos Grandes números	1	0,1	0,044
Probabilidade	5	0,5	0,000
Quociente	1	0,1	0,044
Técnicas de contagem de casos	1	0,1	0,044
Valor numérico	1	0,1	0,044
			$C_G(R)$ =0,389

Em termos comparativos, apresentamos na Figura 97 o valor do Índice de Complexidade da rede e de Centralidade da rede, para este momento de recolha de dados e para os 9.º e o 12.º anos de escolaridade.

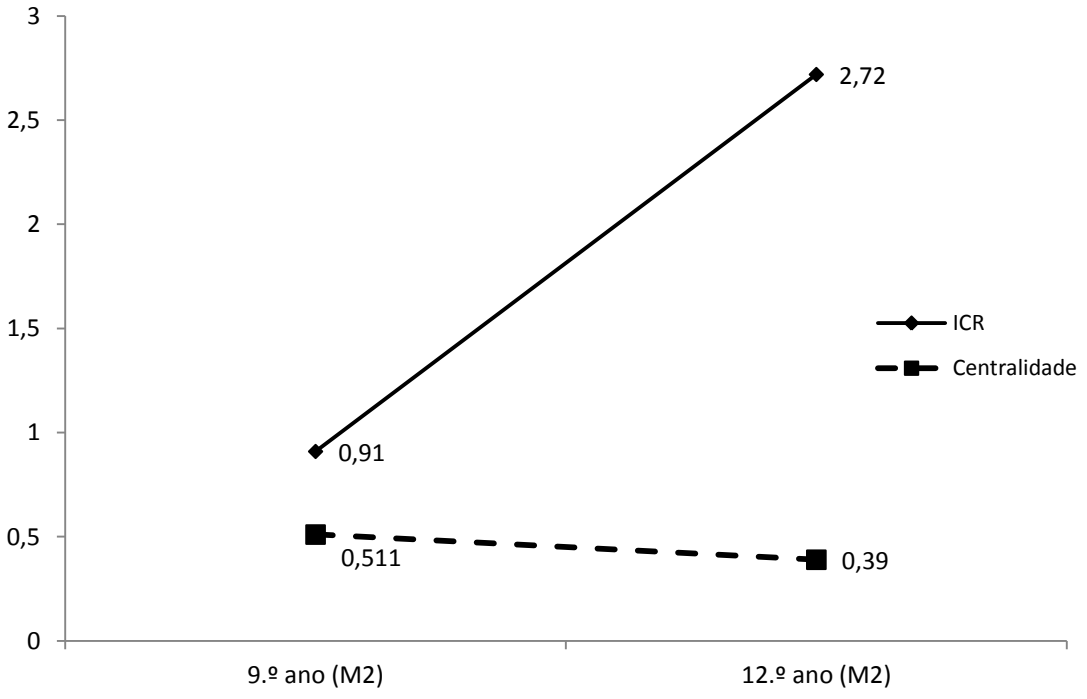


Figura 97 – ICR e Centralidade de grau da Rede Média do 9.º e 12.º anos, no 2.º Momento da recolha de dados

Neste 2.º Momento, o Índice de Complexidade da rede (ICR) média do 12.º ano é, superior ao mesmo índice relativo ao 9.º ano de escolaridade. No que concerne, à Centralidade de grau das duas redes, acontece exatamente o oposto, ou seja, este indicador diminui do 9.º para o 12.º ano, o que é indicador, no 12.º ano, de uma estrutura topológica menos centrada no conceito de "Probabilidade".

5.2.5.3. Índice de Similaridade entre as Redes Médias PFNET do 9.º e 12.º anos, no 2.º Momento da recolha de dados

A partir da análise das ligações existentes e das ligações comuns entre as duas Redes Médias PFNET dos diferentes anos de escolaridade, determinemos o valor do índice de similaridade.

$$S_{9.ºM2/12.ºM2} = \frac{5}{20-5} = \frac{5}{15} \approx 0{,}333$$

As ligações comuns das redes médias destes dois anos de escolaridade, e que traduzem uma consolidação temporal da relação entre conceitos são, neste momento de recolha de dados:

- Probabilidade ↔ Lançamento de dados/moedas
- Probabilidade ↔ Acontecimento;
- Probabilidade ↔ Lei dos Grandes Números;
- Probabilidade ↔ Casos possíveis e Casos Favoráveis;
- Experiência aleatória ↔ Acaso,

as quais representamos na Figura 98.

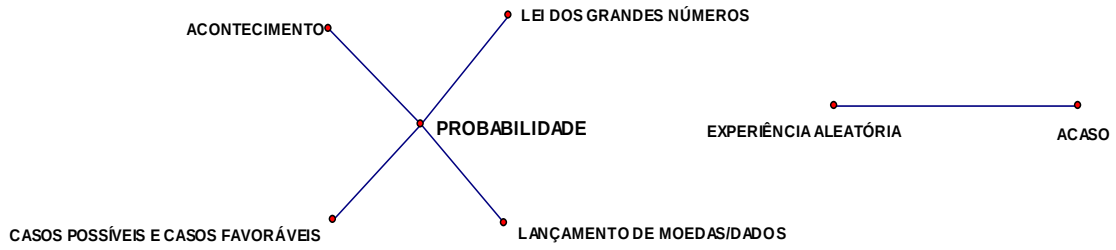


Figura 98 - As ligações comuns das Redes Médias PFNET dos 9.º e 12.º anos, no 2.º Momento da recolha de dados

5.2.5.4. Análise de *Clusters* às Redes Médias PFNET do 9.º e 12.º anos, no 2.º Momento da recolha de dados

Também nesta fase de recolha de dados iremos realizar uma análise de *Clusters* para identificar grupos homogéneos com base nas matrizes de distâncias calculadas a partir do Algoritmo *Pathfinder* do *software Goluca*.

Analogamente ao procedimento executado anteriormente, e com recurso ao SPSS 20, adotaremos o Método de *Ward* para a criação dos diferentes *Clusters*, os quais serão selecionados a partir de um valor do R quadrado superior (ou igual) a 75%.

As matrizes que servirão de suporte à aplicação desta técnica serão as matrizes de distância das redes médias dos 9.º e 12.º anos, apresentadas nas Tabelas 71 e 72.

Tabela 71 – Matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 9.º ano, no 2.º Momento de recolha de dados

	EA	TCC	CPCF	Pro	Quo	LMD	Aco	VN	LRL	Aca	LGN
Experiência Aleatória	0,00	0,37	0,33	0,24	0,45	0,24	0,30	0,40	0,38	0,28	0,38
Técnica de contagem de casos	0,37	0,00	0,35	0,32	0,45	0,36	0,35	0,39	0,42	0,41	0,41
Casos possíveis e favoráveis	0,33	0,35	0,00	0,26	0,41	0,30	0,29	0,40	0,32	0,35	0,41
Probabilidade	0,24	0,32	0,26	0,00	0,42	0,23	0,27	0,37	0,35	0,31	0,37
Quociente	0,45	0,45	0,41	0,42	0,00	0,47	0,44	0,37	0,40	0,49	0,44
Lançamento de dados/moedas	0,24	0,36	0,30	0,23	0,47	0,00	0,33	0,40	0,37	0,29	0,41
Acontecimento	0,30	0,35	0,29	0,27	0,44	0,33	0,00	0,42	0,37	0,34	0,41
Valor Numérico	0,40	0,39	0,40	0,37	0,37	0,40	0,42	0,00	0,38	0,43	0,36
Lei (ou regra) de Laplace	0,38	0,42	0,32	0,35	0,40	0,37	0,37	0,38	0,00	0,41	0,38
Acaso	0,28	0,41	0,35	0,31	0,49	0,29	0,34	0,43	0,41	0,00	0,43
Lei dos Grandes Números	0,38	0,41	0,41	0,37	0,44	0,41	0,41	0,36	0,38	0,43	0,00

Tabela 72 – Matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 12.º ano, no 2.º Momento de recolha de dados

	EA	TCC	CPCF	Pro	Quo	LMD	Aco	VN	LRL	Aca	LGN
Experiência Aleatória	0,00	0,37	0,24	0,22	0,44	0,18	0,29	0,43	0,27	0,25	0,33
Técnica de contagem de casos	0,37	0,00	0,29	0,30	0,48	0,31	0,39	0,39	0,35	0,41	0,37
Casos possíveis e favoráveis	0,24	0,29	0,00	0,09	0,21	0,24	0,27	0,30	0,16	0,38	0,39
Probabilidade	0,22	0,30	0,09	0,00	0,23	0,17	0,20	0,33	0,14	0,33	0,28
Quociente	0,44	0,48	0,21	0,23	0,00	0,38	0,50	0,37	0,23	0,55	0,43
Lançamento de dados/moedas	0,18	0,31	0,24	0,17	0,38	0,00	0,22	0,41	0,28	0,25	0,35
Acontecimento	0,29	0,39	0,27	0,20	0,50	0,22	0,00	0,51	0,27	0,34	0,36
Valor Numérico	0,43	0,39	0,30	0,33	0,37	0,41	0,51	0,00	0,34	0,48	0,38
Lei (ou regra) de Laplace	0,27	0,35	0,16	0,14	0,23	0,28	0,27	0,34	0,00	0,40	0,43
Acaso	0,25	0,41	0,38	0,33	0,55	0,25	0,34	0,48	0,40	0,00	0,46
Lei dos Grandes Números	0,33	0,37	0,39	0,28	0,43	0,35	0,36	0,38	0,43	0,46	0,00

Assim, com base nestas matrizes, a análise de *Clusters* para o 9.º ano de escolaridade, neste 2.º Momento, fornece-nos 7 grupos heterogéneos entre sí (Figura 100) e a percentagem de explicação dada por estes 7 *cluster*s da variabilidade é de 80%, o que, de acordo com o previamente estabelecido (Maroco, 2007), é um bom valor relativo.

$$R\ quadrado\ (9.º\ ano) = \frac{SQC}{SQT} = \frac{1{,}312}{1{,}64} = 0{,}8 = 80\%$$

O dendograma relativo a esta análise de *clusters* apresenta-se na Figura 99.

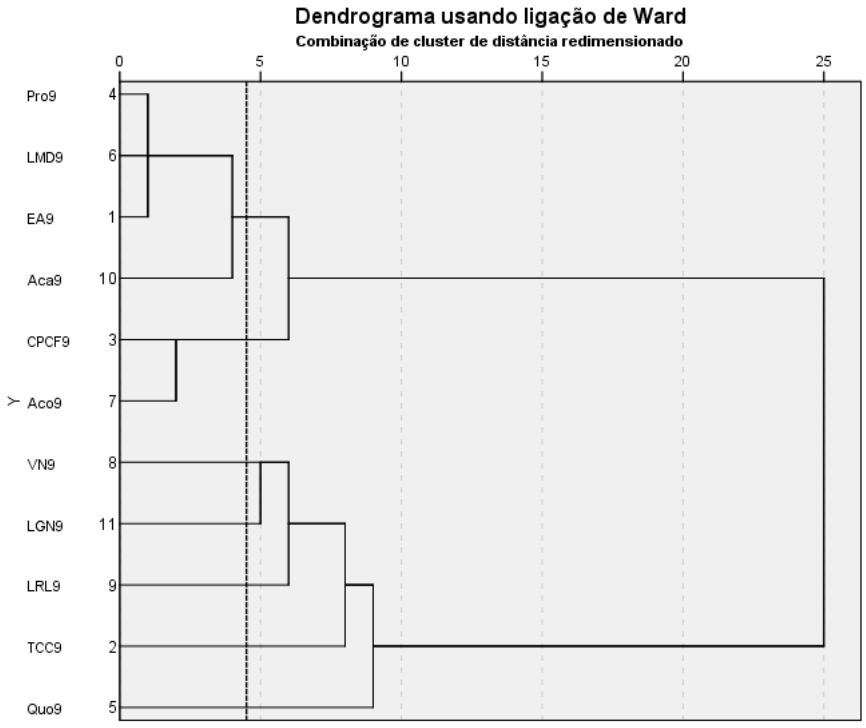


Figura 99 – Dendograma da análise de Clusters do 9.ºano, 2.º Momento de recolha de dados

Para uma melhor visualização, representamos estes agrupamentos na figura seguinte:

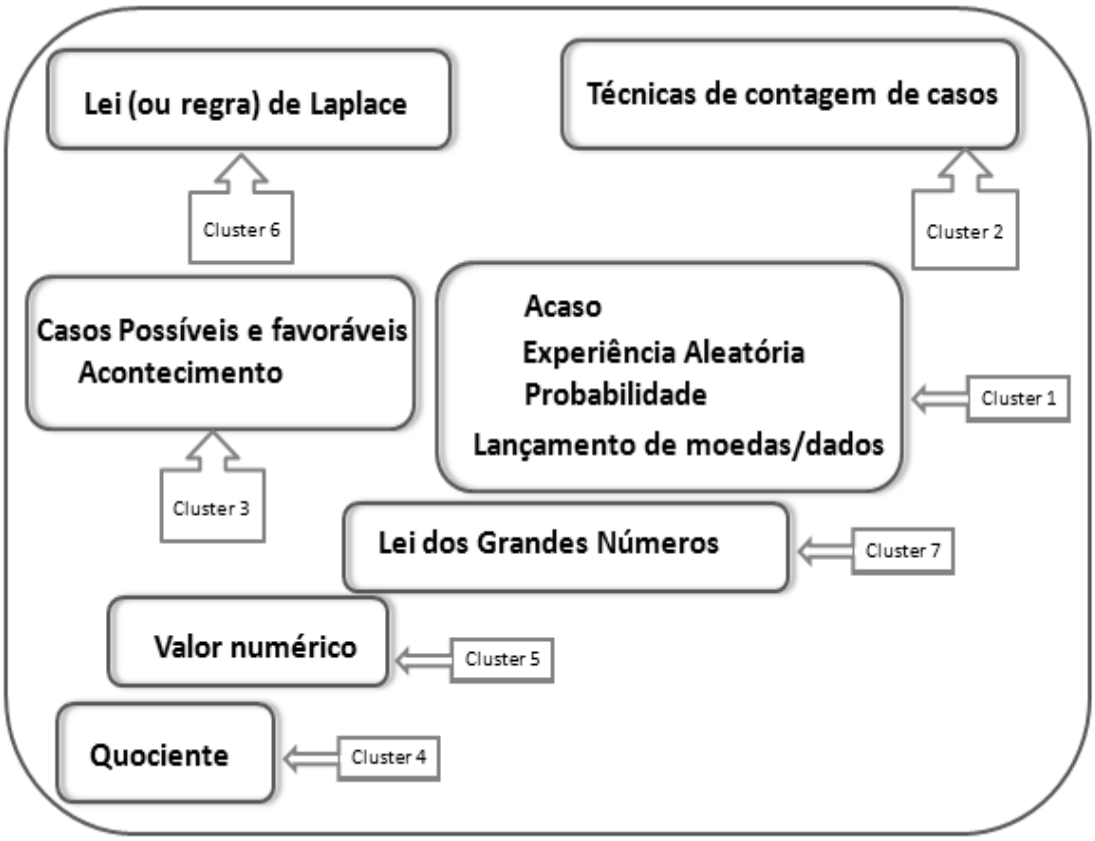


Figura 100 – *Cluster*s com base na matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 9.º ano, no 2.º Momento da recolha de dados

No grupo de estudantes do 9.º ano, constatamos a existência de um agrupamento (*cluster* 1), constituído por quatro conceitos e um outro (cluster 3) com dois conceitos e ainda a existência de cinco grupos unitários.

No maior destes *clusters* surgem os termos associados ao Campo de problemas e ao contexto em que as probabilidades naturalmente ocorrem ("Lançamento de moedas/dados" e "Experiência aleatória") e conceitos especificamente ligados à linguagem das Probabilidades ("Acaso"). Os *clusters* singulares dividem-se pelos outros elementos do significado de Probabilidade.

Em relação ao 12.º ano, retivemos 6 *clusters* (Figura 102) cuja percentagem de explicação à variabilidade total é de 80,8%, já que

$$R\ quadrado\ (12.º\ ano) = \frac{SQC}{SQT} = \frac{1{,}505}{1{,}862} = 0{,}808 = 80{,}8\%$$

O respetivo dendograma é,

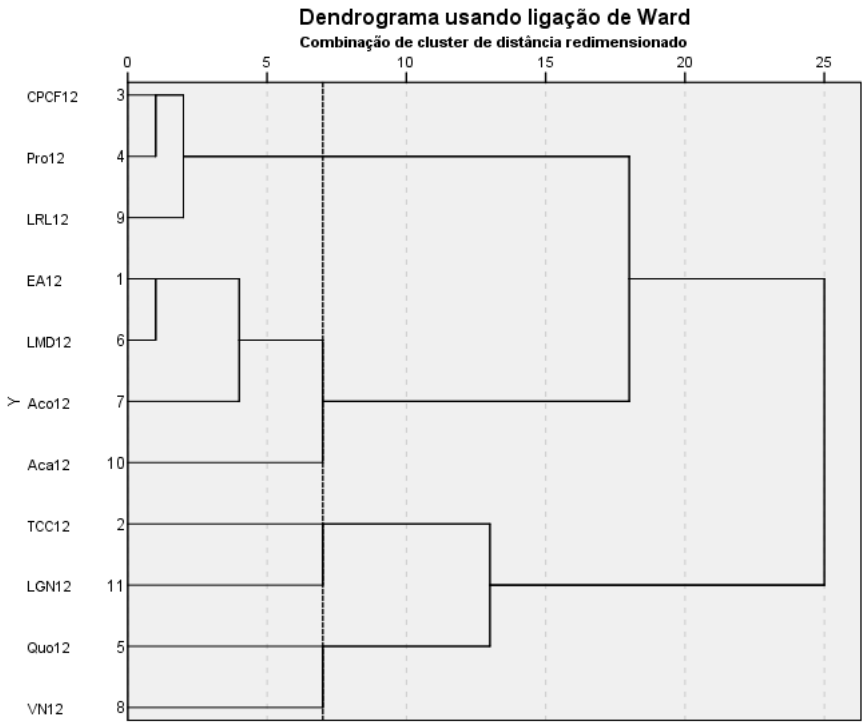


Figura 101 – Dendograma da análise de Clusters do 12.ºano, 2.º Momento de recolha de dados

Estes *clusters*, apresentam-se na Figura 102.

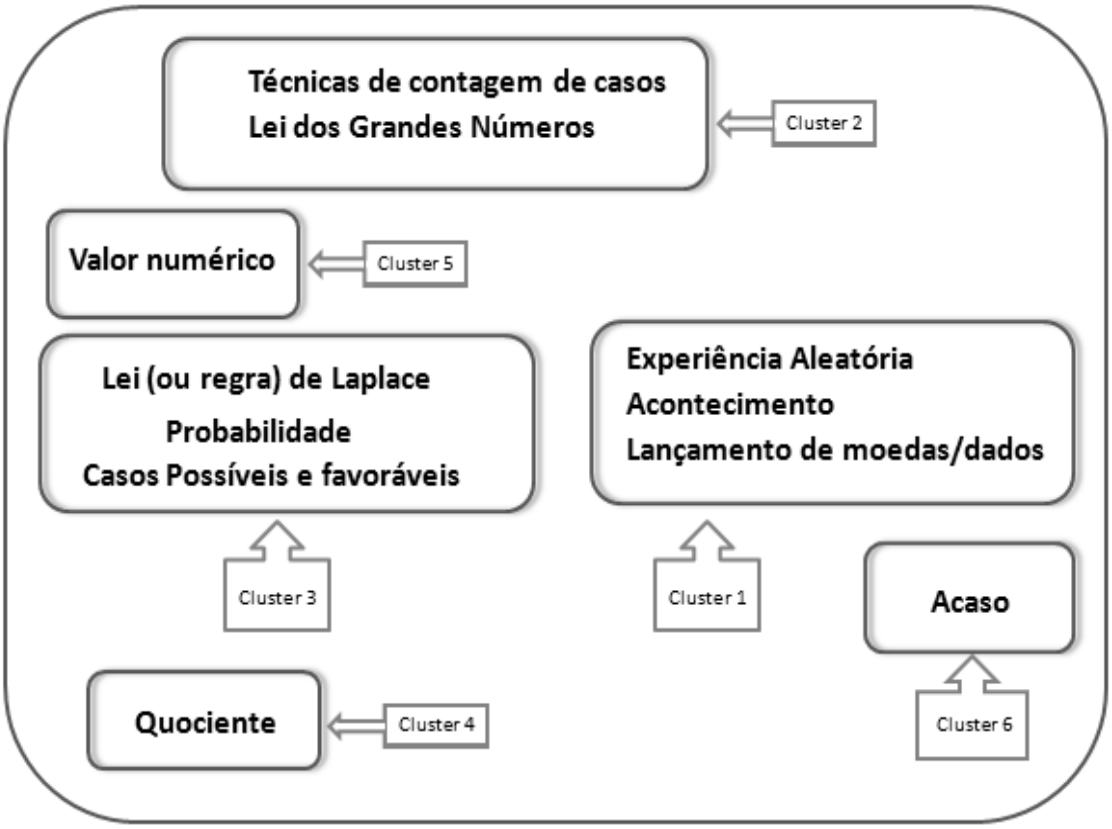


Figura 102 – *Cluster*s com base na matriz de distâncias da Rede Média PFNET do 12.º ano, no 2.º Momento da recolha de dados

No 12.º ano os *cluster* formados (6), dois são constituídos por três termos cada (*Cluster* 1 e *Cluster* 3) e o *cluster* 2 com dois conceitos.

No primeiro destes grupos encontramos ideias ligadas ao campo de problemas e à linguagem probabilística ("Experiência Aleatória", "Acontecimento" e "Lançamento de dados"); no *cluster* 2, aspetos associados aos algoritmos, às grandes ideias e propriedades ("Técnica de contagem de casos" e "Lei dos Grandes Números"); e o *cluster 3*, relaciona definições e elementos linguísticos associados ao conceito de Probabilidade ("Lei (ou regra) de Laplace", "Probabilidade" e "Casos possíveis e favoráveis").

Os restantes três agrupamentos são unitários, formados pelo "Acaso", outro constituído por "Quociente" e ainda um constituído por "Valor Numérico".

5.3. ANÁLISE COMPARATIVA DAS REDES E DAS REDES MÉDIAS PFNET NOS DOIS MOMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

Nesta secção iremos efetuar algumas análises comparativas e transversais que consideramos necessárias para obter respostas às nossas perguntas de investigação. Este estudo será efetuado através da comparação dos dados associados as PFNET, nos dois momentos de recolha de dados. Para introduzir uma vertente de transversalidade na nossa análise, iremos também confrontar alguns destes indicadores no 9.º ano (1.º Momento) e o 12.º ano (2.º Momento), já que consideramos estes anos/momentos os mais distantes em termos temporais e, por este facto, podem-nos fornecer indicações sobre a evolução da estrutura cognitiva dos estudantes dadas através das PFNET.

O esquema geral desta pesquisa apresenta-se na Figura 103 e no qual as setas representam as comparações a efetuar.

Alunos	1.º Momento de Recolha de dados	2.º Momento de Recolha de dados
9.º ano	Tipologia dos conceitos nas PFNET	Tipologia dos conceitos nas redes
	Indicadores quantitativos das PFNET	Indicadores quantitativos das PFNET
	ICR	ICR
	Tipologia dos conceitos nas PFNET média	Tipologia dos conceitos nas PFNET média
12.º ano	Tipologia dos conceitos nas PFNET	Tipologia dos conceitos nas redes
	Indicadores quantitativos das PFNET	Indicadores quantitativos das PFNET
	ICR	ICR
	Tipologia dos conceitos nas PFNET média	Tipologia dos conceitos nas PFNET média
Rapazes	Indicadores quantitativos das PFNET	Indicadores quantitativos das PFNET
Raparigas	Indicadores quantitativos das PFNET	Indicadores quantitativos das PFNET

Figura 103 - Esquema geral das comparações a realizar do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados

5.3.1. Frequência dos conceitos nas redes PFNET nos dois momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade

A Tabela 73 sistematiza as conclusões obtidas no teste do qui-quadrado relativo às frequências com que os diferentes conceitos, considerados para a construção das PFNET,

surgem como nó extremidade, nó polar, Conceito Nuclear ou igualmente distribuídos por estas três tipologias. Assim temos,

Tabela 73 – Resultados do teste do qui-quadrado para a tipologia dos conceitos nas redes PFNET, nos dois Momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade

	9.ºano M1	9.ºano M2	12.ºano M1	12.ºano M2
Acaso	Igual. distribuído	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Acontecimento	Nó extremidade	Igual. Distribuído	Nó extremidade	Igual distribuído
Casos possíveis e favoráveis	Igual. distribuído	Igual. Distribuído	Igual. Distribuído	Conceito Nuclear
Experiência aleatória	Igual. distribuído	Igual. Distribuído	Nó polar	Igual. Distribuído
Lançamento de dados/moedas	Conceito Nuclear	Igual. Distribuído	Igual. Distribuído	Igual. Distribuído
Lei (ou regra) de Laplace	Nó extremidade	Nó extremidade	Igual. Distribuído	Igual. Distribuído
Lei dos Grandes Números	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Probabilidade	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear
Quociente	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Técnicas de contagem de casos	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Valor numérico	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade

Em relação ao 9.º ano de escolaridade, o número de alunos evidencia estabilidade na classificação dos conceitos em relação aos termos “Casos possíveis e favoráveis” (Igualmente distribuídos), “Experiência aleatória” (Igualmente distribuídos), “Lei (ou regra) de Laplace” (nó extremidade), “Lei dos Grandes Números” (nó extremidade), “Probabilidade” (Conceito Nuclear), “Quociente”, “Técnicas de contagem de casos” e “Valor numérico”, todos estes como nó extremidade. Mudam, tendencialmente, a sua tipologia os termos de “Acaso”, “Acontecimento” e “Lançamento de moedas/dados”.

No 12.º ano, a frequência de alunos mostra concordância na tipologia dos termos “Acaso” (nó extremidade), “Lançamento de moedas/dados” (Igualmente distribuídos), “Lei (ou regra) de Laplace” (Igualmente distribuídos), “Probabilidade” (Conceito Nuclear) e, como nó extremidade os conceitos de “Quociente”, “Técnicas de contagem de casos” e “Valor numérico”. Com alterações temos as noções de “Acontecimento”, “Casos possíveis e favoráveis” e “Experiência aleatória”.

Uma análise mais transversal destes resultados considerando o 9.º ano (no 1.º Momento) e o 12.º ano (no 2.º Momento), constatamos que “Experiência aleatória” (Igualmente distribuídos), “Lei dos Grandes Números” (NE), “Probabilidade” (CN), “Quociente” (NE), “Técnicas de contagem de casos” (NE) e “Valor numérico (NE)” mantêm a mesma tipologia. O “Acaso” inicia com alguma indefinição ao nível do tipo de conceito, no entanto surge no 12.º ano como NE. Com a ideia de “Acontecimento” e a “Lei (ou regra) de Laplace” é

exatamente o contrário. Os "Casos possíveis e os favoráveis" no 9.º ano surge distribuído igualmente pelas diferentes tipologias, no entanto consolida-se no ano terminal do secundário como Conceito Nuclear.

5.3.2. Comparação dos resultados dos indicadores quantitativos, em função do Género e Ano de escolaridade, nos 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados

A Tabela 74 apresenta uma sistematização dos resultados relativos aos vários indicadores quantitativos das redes PFNET de acordo com o Género e o Ano de Escolaridade no 1.º Momento e no 2.º Momento, já discutidos e apresentados anteriormente.

Tabela 74 – Sistematização dos resultados dos indicadores quantitativos, relativos ao Género e Ano de escolaridade, em ambos os Momentos de recolha de dados

Indicador quantitativo da rede PFNET	1.º Momento de recolha de Dados		2.º Momento de recolha de dados	
	Género (rapazes vs raparigas)	Ano de escolaridade (9.º ano vs 12.º ano)	Género (rapazes vs raparigas)	Ano de escolaridade (9.º ano vs 12.º ano)
Número de nós extremidade	Estatisticamente iguais	Estatisticamente diferentes	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Número de nós polares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente diferentes	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Número de nós nucleares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Densidade da Rede	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Fator dos nós nucleares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Grau dos nós nucleares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Fator do grau dos nós nucleares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Coerência	Estatisticamente iguais	Estatisticamente diferentes	Estatisticamente iguais	Estatisticamente diferentes
Índice de complexidade da rede	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais

Relativamente aos vários indicadores quantitativos, no 1.º e no 2.º Momento de recolha de dados, a variável Género não foi discriminatória, isto é os diferentes indicadores apresentaram valores estatisticamente iguais. Em relação ao Ano de Escolaridade somente a variável Coerência da rede mantém valores estatisticamente diferentes, em ambos os Momentos de recolha de dados.

5.3.2.1. Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET dos rapazes, do 1.º Momento com o 2.º Momento de recolha de dados

Comparemos as várias medidas das redes PFNET nos dois Momentos de recolha de dados, para os sujeitos do género masculino.

Com o propósito de estudar se os valores deste conjunto de indicadores são, ou não, estatisticamente diferentes nos rapazes, realizou-se o teste não paramétrico de *Mann-Whitney* para efetuar esta comparação. A opção por este teste baseou-se no facto de que, à exceção da variável Coerência, todas as outras variáveis, nos dois momentos e para este género, não verificavam o pressuposto da normalidade, facto que inviabilizou a aplicabilidade do teste t-*Student* para amostras independentes (Tabela 75).

Tabela 75 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET dos rapazes, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados

Indicadores quantitativos das PFNET	Género (Masculino)	*Kolmogorov-Smirnov*[a]		
		Estatística	df	*Sig.*
Número de nós extremidade	1.º Momento	,165	159	,000
	2.º Momento	,187	151	,000
Número de nós polares	1.º Momento	,140	159	,000
	2.º Momento	,169	151	,000
Número de nós nucleares	1.º Momento	,270	159	,000
	2.º Momento	,227	151	,000
Densidade da Rede	1.º Momento	,341	159	,000
	2.º Momento	,303	151	,000
Fator dos nós nucleares	1.º Momento	,270	159	,000
	2.º Momento	,227	151	,000
Grau dos nós nucleares	1.º Momento	,204	159	,000
	2.º Momento	,180	151	,000
Fator do grau dos nós nucleares	1.º Momento	,204	159	,000
	2.º Momento	,180	151	,000
Coerência	1.º Momento	,041	159	,200*
	2.º Momento	,059	151	,200*
ICR	1.º Momento	,314	159	,000
	2.º Momento	,315	151	,000

*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.
a. *Lilliefors Significance Correction*

Os valores dos *Sig.* do teste de *Mann-Whitney,* para todas as variáveis, à exceção da Coerência, nos dois momentos, apresentam-se na Tabela 76.

Tabela 76 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis das redes PFNET dos rapazes, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados

	***Mann-Whitney* U**	***Sig.***
Número de nós extremidade	11866,000	,857
Número de nós polares	11586,000	,588
Número de nós nucleares	11993,500	,988
Densidade da Rede	11743,000	,721
Fator dos nós nucleares	11993,500	,988
Grau dos nós nucleares	11766,500	,762
Fator do grau dos nós nucleares	11766,500	,762
ICR	11816,000	,811

a. Variável de agrupamento: Momento da recolha de dados

Os *Sig*. deste teste e para estas variáveis variaram entre 0,588 e 0,988, superiores a 0,05, pelo que a variável de agrupamento não é discriminatória nos rapazes relativamente às variáveis Número de nós extremidade, Número de nós polares, Número de nós nucleares, Densidade da Rede, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares e Fator do grau dos nós nucleares e Índice de complexidade das redes PFNET.

Em relação à Coerência das redes, e como os pressupostos teóricos para aplicação do teste t-Student são cumpridos (Normalidade – $Sig._{Masculino/1.ºmomento}$=0,200 e $Sig_{Masculino/2.ºmomento}$.=0,200, Homogeneidade das Variâncias – *Sig*=0,523 e aleatoriedade da amostra - Tabela 77 - *Sig*.=1,000*)*, temos

Tabela 77 - Teste de sequências para a coerência dos rapazes, nos 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados

	Coerência
Valor de teste[a]	,1828
Cases < Test Value	155
Cases >= Test Value	155
Total de casos	310
Number of Runs	156
Z	,000
Sig. Assint. (2 caudas)	1,000

a. Mediana

O *Sig.* do teste de t-*Student* apresenta um valor de 0,548 (>0,05) pelo que esta variável apresenta valores médios estatisticamente iguais para os rapazes nos dois momentos de recolha de dados.

5.3.2.2. Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET das raparigas, do 1.º Momento com o 2.º Momento de recolha de dados

De seguida vamos comparar também as várias medidas das redes PFNET nos dois Momentos de recolha de dados, para os indivíduos femininos.

Analogamente, e com o propósito de estudar se os valores deste conjunto de indicadores são, ou não, estatisticamente diferentes, realizou-se o teste não paramétrico de *Mann-Whitney* para efetuar esta comparação. A opção por este teste baseou-se no facto de que, também à exceção da variável Coerência, todas as outras variáveis, nos dois Momentos e para este género, não verificavam o pressuposto da normalidade, facto que inviabilizou a aplicabilidade do teste t-*Student* para amostras independentes (Tabela 78).

Tabela 78 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET das raparigas, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados

Indicadores quantitativos das PFNET	Género (Feminino)	*Kolmogorov-Smirnov*[a]		
		Estatística	Df	*Sig.*
Número de nós extremidade	1.º Momento	,173	185	,000
	2.º Momento	,155	174	,000
Número de nós polares	1.º Momento	,172	185	,000
	2.º Momento	,128	174	,000
Número de nós nucleares	1.º Momento	,221	185	,000
	2.º Momento	,236	174	,000
Densidade da Rede	1.º Momento	,264	185	,000
	2.º Momento	,287	174	,000
Fator dos nós nucleares	1.º Momento	,221	185	,000
	2.º Momento	,236	174	,000
Grau dos nós nucleares	1.º Momento	,163	185	,000
	2.º Momento	,191	174	,000
Fator do grau dos nós nucleares	1.º Momento	,163	185	,000
	2.º Momento	,191	174	,000
Coerência	1.º Momento	,054	185	,200*
	2.º Momento	,042	174	,200*
ICR	1.º Momento	,261	185	,000
	2.º Momento	,287	174	,000

*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.

Os valores dos *Sig.* do teste de *Mann-Whitney,* para todas as variáveis, à exceção da Coerência, nos dois Momentos, apresentam-se na Tabela 79.

Tabela 79 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis das redes PFNET das raparigas, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados

	***Mann-Whitney* U**	***Sig.***
Número de nós extremidade	15113,000	,306
Número de nós polares	14562,500	,113
Número de nós nucleares	15033,500	,262
Densidade da Rede	15392,000	,432
Fator dos nós nucleares	15033,500	,262
Grau dos nós nucleares	14717,500	,159
Fator do grau dos nós nucleares	14717,500	,159
ICR	14795,500	,185

a. Variável de agrupamento: Momento da recolha de dados

Os *Sig*. deste teste e para estas variáveis apresentaram valores no intervalo 0,113 e 0,432, superiores a 0,05, pelo que a variável Momento de recolha de dados não é discriminatória nas raparigas relativamente às variáveis Número de nós extremidade, Número de nós polares, Número de nós nucleares, Densidade da Rede, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares e Fator do grau dos nós nucleares e Índice de complexidade das redes PFNET.

Em relação à Coerência das redes, e como os pressupostos teóricos para aplicação do teste t-Student são cumpridos (Normalidade – $Sig._{Femininos/1.ºmomento}$=0,200 e $Sig_{Femininos/2.ºmomento}$.=0,200 - e Homogeneidade das Variâncias – *Sig*=0,414 e aleatoriedade da amostra - Tabela 80 - com um *Sig.*=0,541, é também verificada)

Tabela 80 - Teste de sequências para a coerência das raparigas, nos 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados

	Coerência
Valor de teste[a]	,1606
Cases < Test Value	179
Cases >= Test Value	180
Total de casos	359
Number of Runs	175
Z	-,581
Sig. Assint. (2 caudas)	,561

a. Mediana

O *Sig.* do teste t-Student apresenta um valor de 0,998 (>0,05) pelo que a coerência das redes PFNET apresenta valores médios estatisticamente iguais para as raparigas nos dois Momentos de recolha de dados.

5.3.2.3 Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET para o 9.º ano de escolaridade, do 1.º Momento com o 2.º Momento de recolha de dados

Parece-nos ainda importante realizar uma comparação destas várias medidas das redes PFNET nos dois Momentos de recolha de dados, para os dois anos de escolaridade estudados.

Para verificar se os valores destes indicadores são, ou não, estatisticamente diferentes no 9.º ano do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados, realizou-se o teste não paramétrico de *Mann-Whitney* para efetuar esta comparação. A opção por este teste baseou-se no facto de que, à exceção da variável Coerência, todas as outras variáveis, nos dois Momentos, não verificavam o pressuposto da normalidade, facto que inviabilizou a aplicação do teste t-*Student* para amostras independentes (Tabela 81).

Tabela 81 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET do 9.º ano de escolaridade, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados

Indicadores quantitativos das PFNET	Momento (9.ºano)	*Kolmogorov-Smirnov*[a]		
		Estatística	df	*Sig.*
Número de nós extremidade	1.º Momento	,178	250	,000
	2.º Momento	,182	226	,000
Número de nós polares	1.º Momento	,162	250	,000
	2.º Momento	,177	226	,000
Número de nós nucleares	1.º Momento	,255	250	,000
	2.º Momento	,254	226	,000
Densidade da Rede	1.º Momento	,319	250	,000
	2.º Momento	,289	226	,000
Fator dos nós nucleares	1.º Momento	,255	250	,000
	2.º Momento	,254	226	,000
Grau dos nós nucleares	1.º Momento	,182	250	,000
	2.º Momento	,201	226	,000
Fator do grau dos nós nucleares	1.º Momento	,182	250	,000
	2.º Momento	,201	226	,000
Coerência	1.º Momento	,035	250	,200*
	2.º Momento	,031	226	,200*

*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.

a. *Lilliefors Significance Correction*

Os valores dos diferentes *Sig.* do teste de *Mann-Whitney,* para todas as variáveis, à exceção da Coerência, nos dois Momentos, apresentam-se na Tabela 82.

Tabela 82 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis das PFNET do 9.º ano de escolaridade, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados

	***Mann-Whitney* U**	***Sig.***
Número de nós extremidade	27001,500	,392
Número de nós polares	26649,500	,276
Número de nós nucleares	27038,500	,400
Densidade da Rede	27950,000	,826
Fator dos nós nucleares	27038,500	,400
Grau dos nós nucleares	26724,500	,306
Fator do grau dos nós nucleares	26724,500	,306

a. Variável de agrupamento: Momento da recolha de dados

Os níveis de significância deste teste e para estas variáveis variaram entre 0,276 e 0,826, superiores a 0,05, pelo que a variável de agrupamento não é discriminatória relativamente às variáveis Número de nós extremidade, Número de nós polares, Número de nós nucleares, Densidade da Rede, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares e Fator do grau dos nós nucleares das redes PFNET.

Em relação à Coerência das redes, e como os pressupostos teóricos para aplicação do teste t-Student são cumpridos (Normalidade – $Sig._{9.º\ ano/1.ºmomento}$=0,200 e $Sig_{9.º\ ano/2.ºmomento}$.=0,200 - e Homogeneidade das Variâncias – *Sig*=0,642 e aleatoriedade da amostra - Tabela 83 -, com um *Sig.*=0,233 é também verificada)

Tabela 83 - Teste de sequências para a coerência dos estudantes do 9.º ano, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados

	Coerência
Valor de teste[a]	,1347
Cases < Test Value	238
Cases >= Test Value	238
Total de casos	476
Number of Runs	252
Z	1,193
Sig. Assint. (2 caudas)	,233

a. Mediana

O *Sig.* do teste t-*Student* apresenta um valor de 0,508 (>0,05) pelo que esta variável apresenta valores médios estatisticamente iguais nos dois Momentos de recolha de dados, para o 9.º ano de escolaridade.

5.3.2.4. Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET para o 12.º ano de escolaridade, do 1.º Momento com o 2.º Momento de recolha de dados

No 12.º ano de escolaridade o teste de K/S indica-nos o não comportamento gaussiano de todas variáveis (Tabela 84).

Tabela 84 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET do 12.º ano de escolaridade, do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados

Indicadores quantitativos das PFNET	Momento (12.ºano)	*Kolmogorov-Smirnov*[a]		
		Estatística	df	*Sig.*
Número de nós extremidade	1.º Momento	,142	94	,000
	2.º Momento	,158	99	,000
Número de nós polares	1.º Momento	,121	94	,002
	2.º Momento	,172	99	,000
Número de nós nucleares	1.º Momento	,211	94	,000
	2.º Momento	,193	99	,000
Densidade da Rede	1.º Momento	,252	94	,000
	2.º Momento	,286	99	,000
Fator dos nós nucleares	1.º Momento	,211	94	,000
	2.º Momento	,193	99	,000
Grau dos nós nucleares	1.º Momento	,144	94	,000
	2.º Momento	,180	99	,000
Fator do grau dos nós nucleares	1.º Momento	,144	94	,000
	2.º Momento	,180	99	,000
Coerência	1.º Momento	,113	94	,005
	2.º Momento	,082	99	,097

*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.

a. *Lilliefors Significance Correction*

Os valores dos *Sig.* do teste de *Mann-Whitney,* para todas as variáveis, nos dois Momentos, apresentam-se na Tabela 85.

Tabela 85 – Teste de *Mann-Whitney* para as variáveis das PFNET do 12.º ano de escolaridade do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados

	***Mann-Whitney* U**	***Sig.***
Número de nós extremidade	4532,500	,751
Número de nós polares	4531,000	,748
Número de nós nucleares	4547,500	,779
Densidade da Rede	4506,500	,687
Fator dos nós nucleares	4547,500	,779
Grau dos nós nucleares	4602,000	,895
Fator do grau dos nós nucleares	4602,000	,895
Coerência	4346,000	,429

a. Variável de agrupamento: Momento da recolha de dados

Os *Sig*. deste teste, e para estas variáveis, variaram entre 0,429 e 0,895, superiores a 0,05, pelo que a variável Momento de recolha de dados não é discriminatória relativamente às variáveis Número de nós extremidade, Número de nós polares, Número de nós nucleares, Densidade da Rede, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares, Fator do grau dos nós nucleares e Coerência das redes PFNET's.

5.3.2.5. Comparação do Índice de Complexidade das redes PFNET dos 9.º e 12.º anos de escolaridade, do 1.º Momento com o 2.º Momento da recolha de dados

O Índice de Complexidade das redes PFNET, para o 9.º ano de escolaridade nos dois Momentos de recolha de dados não apresenta um comportamento normal (o teste de Kolmogorov/Smirnov ($Sig._{9.º\ ano/1.º\ momento}$= 0,000<0,05 e $Sig._{9.º\ ano/2º\ momento}$=0,000<0,05).

O teste de *Mann-Whitney* proporciona os seguintes resultados (Tabela 86), que para este ano de escolaridade indicam-nos que não há diferenças significativas no ICR nos dois Momentos de recolha de dados (*Sig*.=0,346>0,05).

Tabela 86 – Teste de *Mann-Whitney* para o ICR do 9.º ano de escolaridade do 1.º para o 2.º Momento da recolha de dados

	***Mann-Whitney* U**	***Sig.***
Índice de complexidade das Redes	26839,5	0,346

a. Variável de agrupamento: Momento de recolha de dados

Analogamente, para o 12.º ano de escolaridade, o Índice de Complexidade das redes PFNET, nos dois Momentos de recolha de dados não apresenta um comportamento normal (o teste de Kolmogorov/Smirnov ($Sig._{12.º\ ano/1.º\ momento}$= 0,000<0,05 e $Sig._{12.º\ ano/\ 2º\ momento}$=0,000<0,05).

O teste de *Mann-Whitney* para o 12.º ano proporciona os seguintes resultados (Tabela 87), pelo que não há diferenças significativas no ICR nos dois Momentos de recolha de dados (*Sig*.=0,822>0,05).

Tabela 87 – Teste de *Mann-Whitney* para o ICR do 12.º ano de escolaridade do 1.º para o 2.º Momento da recolha de dados

	***Mann-Whitney* U**	***Sig.***
Índice de complexidade das Redes	4566,0	0,822

a. Variável de agrupamento: Momento de recolha de dados

5.3.3. Comparação dos indicadores quantitativos das redes PFNET do 9.ºano (1.º Momento) com o 12.º ano de escolaridade (2.º Momento)

Numa perspetiva transversal iremos comparar os valores dos vários indicadores quantitativos das redes PFNET entre o 9.º ano (1.º Momento) e o 12.º ano (2.º Momento)

Com a intenção de estudar se os valores deste conjunto de indicadores são, ou não, estatisticamente diferentes, realizou-se o teste não paramétrico de *Mann-Whitney* para efetuar esta comparação. A opção por este teste baseou-se no facto de que, à exceção da variável Coerência, todas as outras variáveis, nos dois momentos, não verificavam o pressuposto da normalidade, facto que inviabilizou a aplicabilidade do teste t-*Student* para amostras independentes (Tabela 88).

Tabela 88 – Teste de Normalidade (K/S) para os indicadores quantitativos das redes PFNET do 9.º ano (1.º Momento) para o 12.º ano (2.º Momento)

Indicadores quantitativos das PFNET	Ano (Momento)	*Kolmogorov-Smirnov*[a]		
		Estatística	Df	*Sig.*
Número de nós extremidade	9.º ano (1.ºM)	,178	250	,000
	12.º ano (2.ºM)	,158	99	,000
Número de nós polares	9.º ano (1.ºM)	,162	250	,000
	12.º ano (2.ºM)	,172	99	,000
Número de nós nucleares	9.º ano (1.ºM)	,255	250	,000
	12.º ano (2.ºM)	,193	99	,000
Densidade da Rede	9.º ano (1.ºM)	,319	250	,000
	12.º ano (2.ºM)	,286	99	,000
Fator dos nós nucleares	9.º ano (1.ºM)	,255	250	,000
	12.º ano (2.ºM)	,193	99	,000
Grau dos nós nucleares	9.º ano (1.ºM)	,182	250	,000
	12.º ano (2.ºM)	,180	99	,000
Fator do grau dos nós nucleares	9.º ano (1.ºM)	,182	250	,000
	12.º ano (2.ºM)	,180	99	,000
Coerência	9.º ano (1.ºM)	,035	250	,200*
	12.º ano (2.ºM)	,082	99	,097

*. Este é um limite inferior da significância verdadeira.
a. *Lilliefors Significance Correction*

Os valores dos *Sig.* do teste de *Mann-Whitney,* para todas as variáveis, à exceção da Coerência, nos dois Momentos de obtenção dos dados, apresenta-se na Tabela 89.

Tabela 89 – Teste de *Mann-Whitney* para os vários indicadores das PFNET para o 9.º ano (1.º Momento) e o 12.º ano (2.º Momento)

	Mann-Whitney U	Sig.
Número de nós extremidade	10926,500	,080
Número de nós polares	10517,500	,026
Número de nós nucleares	11667,500	,388
Densidade da Rede	11651,000	,354
Fator dos nós nucleares	11667,500	,388
Grau dos nós nucleares	12133,000	,775
Fator do grau dos nós nucleares	12133,000	,775

a. Variável de agrupamento: Ano e Momento da recolha de dados

Com exceção da variável número de nós polares, cujos valores são maiores no 12.º ano (2.º Momento) todas as outras variáveis apresentam um *Sig*. que varia entre 0,08 e 0,775, superiores a 0,05, pelo que a variável de agrupamento não é discriminatória relativamente às

variáveis número de nós extremidade, número de nós nucleares, Densidade da Rede, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares e Fator do grau dos nós nucleares das redes PFNET.

Em relação à Coerência das redes, e como os pressupostos teóricos para aplicação do teste t-Student são cumpridos (Normalidade – $Sig._{9.ºano/1.ºmomento}$=0,200 e $Sig_{12.ºano/2.ºmomento}$.=0,097 - e Homogeneidade das Variâncias – *Sig*=0,635 e aleatoriedade da amostra - Tabela 90 -, com um *Sig.*=0,629 é também verificada)

Tabela 90 - Teste de sequências para a coerência dos estudantes do 9.º ano (1.ºMomento) para o 12.ºano (2.º Momento) de recolha de dados

	Coerência
Valor de teste[a]	,1660
Cases < Test Value	174
Cases >= Test Value	175
Total de casos	349
Number of Runs	180
Z	,483
Sig. Assint. (2 caudas)	,629

a. Mediana

O *Sig.* do teste t-*Student* apresenta um valor de 0,000 (<0,05) pelo que esta variável apresenta valores médios estatisticamente diferentes nos dois Momentos de recolha de dados e nos dois anos letivos considerados, com valores mais elevados no 12.ºano (2.º Momento).

5.3.4. Comparação do Índice de Complexidade das redes do 9.º ano (1.º Momento) com o do 12.º ano (2.º Momento)

O Índice de Complexidade das redes PFNET, para o 9.º ano de escolaridade (1.º Momento) e para o 12.º ano (2.º Momento) não apresenta um comportamento normal (o teste de Kolmogorov/Smirnov ($Sig._{9.º\ ano/1.º\ momento}$= 0,000<0,05 e $Sig._{12.º\ ano/2º\ momento}$=0,000<0,05).

O teste de *Mann-Whitney* apresenta os seguintes resultados (Tabela 91), que para estes anos de escolaridade e nestes Momentos de recolha de dados, os quais indicam-nos que não há diferenças significativas no ICR nos dois Momentos de recolha de dados (*Sig*.=0,346>0,05).

Tabela 91 – Teste de *Mann-Whitney* do ICR para o 9.º ano (1.º Momento) e o 12.º ano (2.º Momento)

	***Mann-Whitney* U**	***Sig.***
Índice de complexidade das Redes	12138,500	,780

a. Variável de agrupamento: Momento de recolha de dados

O valor do *Sig.*=0,780 (>0,05) é indicador de que em termos da complexidade das redes não há diferenças significativas entre o 9.ºano (1.º Momento) e o 12.ºano (2.º Momento).

5.3.5. Tipologia dos conceitos nas Redes Médias PFNET, nos 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade

Na Tabela 92 mostramos as tipologias dos conceitos presentes nas redes médias PFNET nos dois Momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade. A sombreado evidenciamos os conceitos que mantiveram a mesma tipologia em cada ano escolar nos dois Momentos de recolha de dados.

Tabela 92 – Tipologia dos conceitos nas Redes Médias nos dois Momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade

	9.ºano M1	**9.ºano M2**	**12.ºano M1**	**12.ºano M2**
Acaso	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Acontecimento	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Casos possíveis e favoráveis	Nó extremidade	Nó polar	Nó polar	Conceito Nuclear
Experiência Aleatória	Nó extremidade	Nó polar	Nó polar	Nó polar
Lançamento de dados/moedas	Conceito Nuclear	Nó extremidade	Nó polar	Nó polar
Lei (ou regra) de Laplace	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Lei dos Grandes Números	Nó polar	Nó polar	Nó extremidade	Nó extremidade
Probabilidade	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear
Quociente	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Técnicas de contagem de casos	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Valor Numérico	Nó polar	Nó polar	Nó extremidade	Nó extremidade

Parece-nos evidente que o ano de escolaridade mais constante ao nível da tipologia dos termos/ideias/exemplos é o 12.º ano, já que dos onze conceitos considerados somente um

altera a tipologia do 1.º para o 2.º Momento ("Casos possíveis e caso favoráveis"), o que é demonstrativo de uma maior consolidação da estrutura cognitiva dos estudantes.

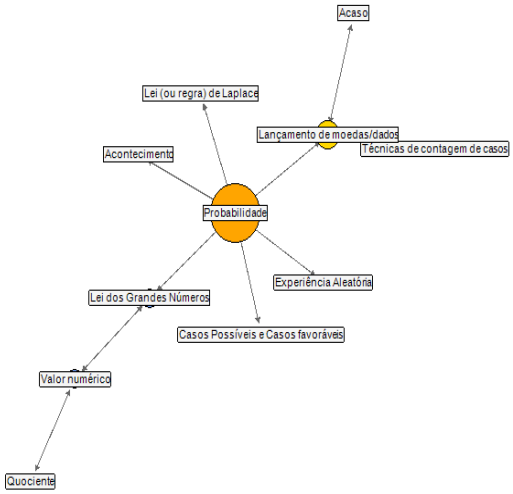
Em relação aos estudantes mais jovens, oito dos conceitos conservam a sua tipologia e três variam na sua tipologia ("Experiência aleatória", "Casos possíveis e favoráveis" e "Lançamento de moedas/dados").

Uma leitura mais transversal, e comparando a tipologia dos conceitos desde o 1.º Momento de recolha de dados no 9.º ano, para o 2.º Momento de recolha de dados no 12.º ano de escolaridade constatamos que:

- Os conceitos "Acaso", "Acontecimento", "Lei (ou regra) de Laplace", "Quociente" e "Técnicas de contagem de casos", mantêm-se nestes anos escolares como nó extremidade;
- A noção de "Probabilidade" é o único conceito que se mantém, nestes anos e Momentos, como Conceito Nuclear;
- O conceito "Experiência aleatória", que inicialmente é um nó extremidade, passa a nó polar;
- Tanto o conceito "Valor numérico" como a "Lei dos Grandes Números" diminuem de importância cognitiva ao passar de nó polar a nó extremidade;
- A importância do exemplo "Lançamento de dados/moedas" é diminuída, em virtude de passar de Conceito Nuclear (9.º ano, 1.º Momento) para nó polar (12.º ano, 2.º Momento).
- Por oposição, o estatuto cognitivo dos "Casos possíveis e dos casos favoráveis" amplia-se, ao passar de nó extremidade, no 9.º ano (1.º Momento), a Conceito Nuclear, no 12.º ano (2.º Momento).

Ainda para averiguar a evolução do 1.º para o 2.º Momento de recolha de dados, sintetizemos os resultados obtidos para as redes médias dos dois anos de escolaridade.

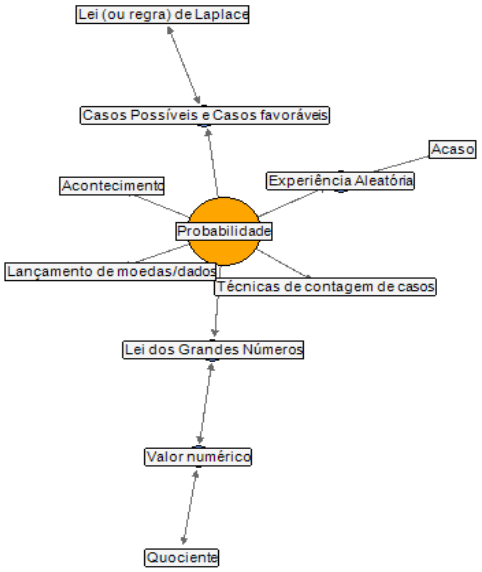
A Figura 104 apresenta as redes médias do 9.º ano de escolaridade e respetivos indicadores quantitativos – Índice de complexidade e centralidade da rede.



<u>Rede Média 9.º ano M1</u>

ICR =2,716

Centralidade de rede = 0,513



<u>Rede Média 9.º ano M2</u>

ICR =0,91

Centralidade de rede =0,511

Similaridade = 0,538

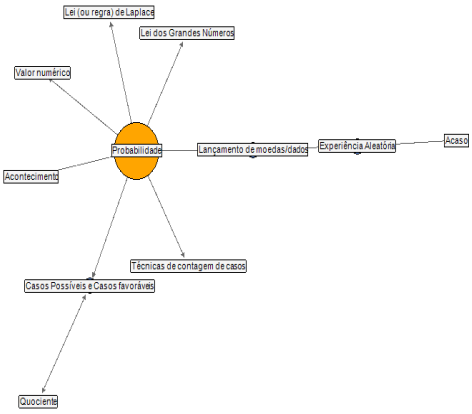
Figura 104 – As Redes Médias do 9.º ano nos dois Momentos de recolha de dados

Do ponto de vista da disposição geométrica dos conceitos na rede, é curioso que a "cauda" formada pelos termos "Quociente", "Valor numérico" e "Lei dos Grandes Números" é comum a ambas as representações, assim como o eixo formado pela "Lei (ou regra) de Laplace", "Casos possíveis e favoráveis" e o Conceito Nuclear "Probabilidade". Note-se que os termos "Quociente" e "Acaso" surgem na periferia destas representações.

O número de ligações comuns destas redes médias é de sete pelo que o índice de similaridade é de:

$$\text{Similaridade}_{9.ºM1/9.ºM2} = \frac{7}{20-7} = \frac{7}{13} \approx 0{,}538$$

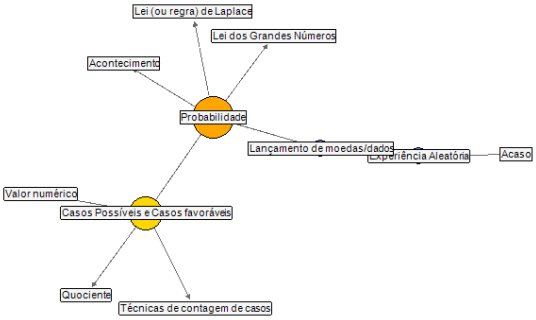
A Figura 105 apresenta as Redes Médias, nos dois Momentos de recolha de dados, relativas ao 12.º ano de escolaridade.



Rede Média 12.º ano M1

ICR =1,06

Centralidade de rede =0,637



Rede Média 12.º ano M2

ICR =2,72

Centralidade de rede =0,389

Similaridade = 0,667

Figura 105 – As Redes Médias do 12.º ano nos dois Momentos de recolha de dados

Ambas as redes apresentam um eixo central formado pelos termos "Acontecimento", "Probabilidade", "Lançamento de moedas/dados", "Experiência aleatória" e "Acaso". Realça-se o facto, que já ocorria nas redes médias PFNET do 9.º ano, dos conceitos de "Acaso" e "Quociente" surgirem na periferia destas estruturas geométricas.

Estas duas últimas redes médias apresentam oito ligações em comum o que implica que o índice de similaridade entre elas é:

$$\text{Similaridade}_{12.ºM1/12.ºM2} = \frac{8}{20-8} = \frac{8}{12} \approx 0{,}667$$

Uma análise evolutiva, tomando em consideração a rede média PFNET do 9.º ano (1.º Momento) e o 12.º ano (2.º Momento) mostra-nos que o número de ligações em comum são cinco pelo que Índice de Similaridade, neste caso, é:

$$\text{Similaridade}_{9.ºM1/12.ºM2} = \frac{5}{20-5} = \frac{5}{15} \approx 0{,}333$$

No que concerne às ligações que se mantêm, em qualquer dos Momentos de recolha de dados e nos dois anos de escolaridade estudados, estas são:

- Probabilidade ↔ Lançamento de dados/moedas
- Probabilidade ↔ Acontecimento;
- Probabilidade ↔ Lei dos Grandes Números;
- Probabilidade ↔ Casos possíveis e Casos favoráveis,

ou, em termos esquemáticos,

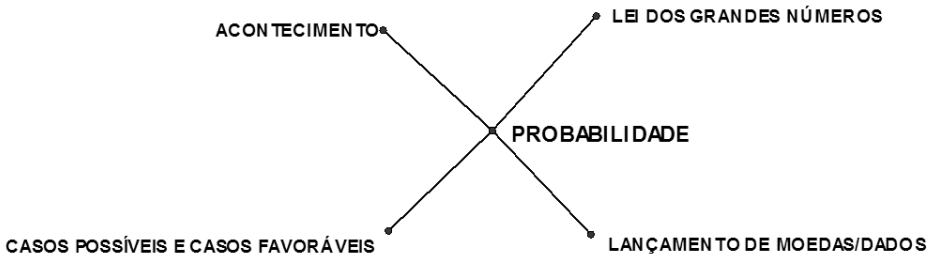


Figura 106 – Ligações comuns nos dois Momentos da recolha de dados e nos dois anos de escolaridade

O gráfico dos valores do ICR e da Centralidade das redes médias PFNET para ambos os anos de escolaridade e para os dois anos de escolaridade é

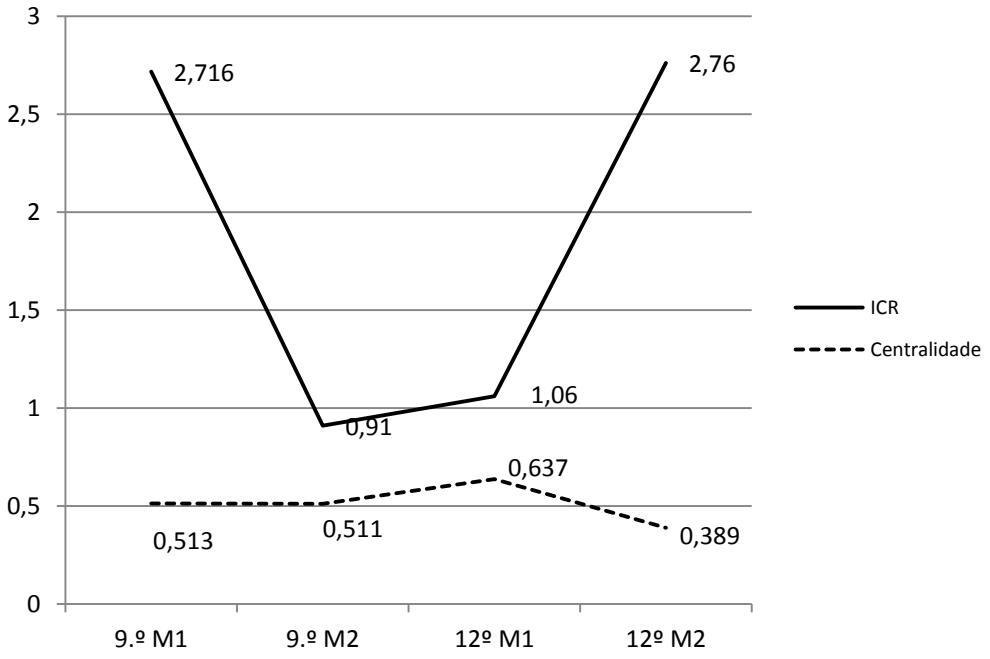


Figura 107 – Valores do ICR e da Centralidade das redes médias PFNET, para o 9.º ano (1.º e 2.º Momentos) e para o 12.º ano (1.º e 2.º Momentos)

Atendendo a estes indicadores das redes médias PFNET, verificamos no 9.º ano de escolaridade um decréscimo da complexidade da rede e uma estabilização da centralidade da rede. No 12.º ano há um aumento do ICR e uma diminuição da Centralidade. Quando comparamos o 9.º ano (1.º Momento) com o 12.º ano (2.º Momento) constamos uma manutenção do valor do ICR e um decréscimo da Centralidade.

5.4. QUESTIONÁRIO PARA A DETEÇÃO DE POTENCIAIS CONCEITOS

O questionário utilizado (Anexo II), adaptado de Holloway, Alpay e Bull (2009), tem como objetivo a identificação de potenciais Conceitos *Threshold* e, através das respostas dadas, estabelecer relações entre estes e as diferentes tipologias dos conceitos das redes PFNET (nó extremidade, nó polar e Conceito Nuclear).

Para além do reconhecimento dos conceitos menos complicados/fáceis e mais complicados/difíceis de entender pelos alunos (Figura 108), pretende-se estudar as diferentes afirmações de acordo com itens de uma Escala de *Likert,* e respetivas dimensões, associadas às características dos Conceitos *Threshold,* com base no definido por Meyer e Land (2003).

I – GÉNERO MASCULINO ☐ FEMININO ☒

II – ANO DE ESCOLARIDADE 9.º ANO ☒ 12.º ANO ☐

III - NA TUA OPINIÃO DOS CONCEITOS ABAIXO INDICADOS, DIZ, INDICANDO COM UM X, QUAL FOI PARA TI O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL E O MENOS COMPLICADO/FÁCIL DE PERCEBER:

CONCEITO/TERMO/IDEIA/NOÇÃO	MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL	MENOS COMPLICADO/FÁCIL
ACASO		
ACONTECIMENTO		
CASOS POSSÍVEIS E CASOS FAVORÁVEIS	X	
EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA		
LANÇAMENTO DE MOEDAS/DADOS		
LEI (OU REGRA) DE LAPLACE		
LEI DOS GRANDES NÚMEROS		
PROBABILIDADE		X
QUOCIENTE		
TÉCNICAS DE CONTAGEM DE CASOS		
VALOR NUMÉRICO		

IV – EM RELAÇÃO AO CONCEITO REFERIDO ANTERIORMENTE COMO O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER PRETENDE-SE QUE OPINES SOBRE DIFERENTES ASPETOS. NUM DOS EXTREMOS DESTA ESCALA ESTÁ O "*1-TOTALMENTE EM DESACORDO*" E NO OUTRO EXTREMO "*5-TOTALMENTE DE ACORDO*".

CONCEITO MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER	Totalmente em desacordo		Nem em desacordo nem de acordo		Totalmente de acordo
1. Eu acho que o ***conceito*** é fácil de explicar a um outro colega.	①	②	③	●	⑤
2. O entendimento do ***conceito*** transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	①	●	③	④	⑤
3. Eu consigo ver aplicações do ***conceito*** a outras áreas e disciplinas.	①	●	③	④	⑤
4. O ***conceito*** é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	①	②	③	●	⑤
5. Eu ter entendido o ***conceito*** implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	①	②	●	④	⑤
6. Eu ainda não entendi realmente o ***conceito***.	①	②	③	④	●
7. Compreender o ***conceito*** foi como um "*clique*" e agora vejo o que realmente significa.	●	②	③	④	⑤
8. Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o ***conceito***.	①	②	●	④	⑤
9. Agora que entendi o ***conceito***, acho que seria difícil esquecê-lo.	●	②	③	④	⑤
10. Entender o ***conceito*** fez-me sentir mais como um matemático.	①	●	③	④	⑤
11. Foi difícil ver como o ***conceito*** se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	①	●	③	④	⑤
12. Assim que entendi o ***conceito***, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	①	●	③	④	⑤
13. Vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o ***conceito***.	●	②	③	④	⑤

Figura 108 – Resposta de um aluno do 9.º ano (Feminino) ao questionário

5.4.1. Os conceitos das PFNET menos complicados/fáceis e mais complicados/difíceis de entender

O questionário utilizado, foi respondido, no 2.º Momento da recolha de dados (maio e junho de 2013), pelos 325 alunos de ambos os Géneros e Anos de Escolaridade. Este instrumento de obtenção de informação é constituído por quatro grupos de questões. As questões I e II pretendem caracterizar os inquiridos em relação ao Ano de Escolaridade e ao gGénero.

Com a questão III pretendia-se saber, de entre os conceitos utilizados nas redes PFNET, qual tinha sido, na opinião dos estudantes, o termos menos complicado/fácil e o mais complicado/difícil de entender.

As respostas dadas pelos alunos à questão III estão organizadas nas Tabelas 93 e 94.

Tabela 93 – Conceito menos complicado/mais fácil de entender referido pelos estudantes

Conceitos	9.º ano Masculino	9.º ano Feminino	9.º ano Total	12.º ano Masculino	12.º ano Feminino	12.ºano Total	Total
Acaso	13	8	21	2	7	9	30
Acontecimento	9	7	16	5	8	13	29
Casos possíveis e casos favoráveis	10	19	29	10	9	19	48
Experiência aleatória	4	14	18	3	1	4	22
Lançamento de moedas/dados	25	21	46	3	4	7	53
Lei (ou regra) de Laplace	4	7	11	12	17	29	40
Lei dos Grandes Números	0	0	0	1	1	2	2
Probabilidade	34	40	74	5	4	9	83
Quociente	3	2	5	2	2	4	9
Técnicas de contagem de casos	2	2	4	1	0	1	5
Valor numérico	2	0	2	1	1	2	4
Total	106	120	226	45	54	99	325

A leitura da Tabela 93 permite-nos concluir que o conceito menos complicado/mais fácil de entender foi o de “Probabilidade” no 9.º ano (74) e a ”Lei (ou regra) de Laplace” (29) no 12.º ano. As ideias menos referidas como mais fáceis foram “Lei dos Grandes Números” (0) no 9.º ano e “Técnicas de contagem de casos” (1), no 12.º ano.

Em relação ao conceito mais complicado/difícil de entender, obtivemos:

Tabela 94 – Conceito mais complicado/mais difícil de entender referido pelos estudantes

Conceitos	9.º ano Masculino	9.º ano Feminino	9.º ano Total	12.º ano Masculino	12.º ano Feminino	12.ºano Total	Total
Acaso	2	5	7	4	4	8	15
Acontecimento	2	4	6	0	0	0	6
Casos possíveis e casos favoráveis	1	7	8	2	2	4	12
Experiência aleatória	1	3	4	3	2	5	9
Lançamento de moedas/dados	0	2	2	0	0	0	2
Lei (ou regra) de Laplace	37	32	69	1	2	3	72
Lei dos Grandes Números	35	25	60	13	20	33	93
Probabilidade	3	0	3	2	3	5	8
Quociente	11	26	37	2	2	4	41
Técnicas de contagem de casos	8	7	15	15	15	30	45
Valor numérico	6	9	15	3	4	7	22
Total	106	120	226	45	54	99	325

O conceito mais complicado/difícil de entender no 9.º ano de Escolaridade foi a "Lei (ou regra) de Laplace" (69) e a "Lei dos Grandes Números" (60), verificando-se também este último conceito (33) juntamente com as "Técnicas de contagem de casos" (30) como os mais complicados de entender pelos estudantes do 12.º ano. O menos referido como o mais complicado/difícil foi o "Lançamento de moedas/dados", em ambos os anos de escolaridade.

Daqui resulta que o conceito que parece perpetuar-se no tempo (tanto no 9.º como no 12.º ano) como o mais difícil de entender no 9.º e no 12.º ano, é a "Lei dos Grandes Números", que surge neste contexto como problemático/difícil e, consequentemente de acordo com Meyer e Land (2003), um candidato a Conceito *Threshold*.

Somos da opinião a "Lei dos Grandes Números", pela sua proficuidade em estabelecer conexões entre os diferentes significados de Probabilidade (Laplaciana, Frequencista e Subjetiva), deve ser um conceito mais trabalhado e com mais profundidade no 9.º ano de escolaridade e reforçado o seu ensino e aprendizagem no ano terminal do ensino secundário, para ultrapassar estas dificuldades manifestadas pelos estudantes.

5.4.2. Análise dos itens e da escala do questionário dos potenciais Conceitos *Threshold*

A IV, e última questão deste questionário, pretendia, em relação ao conceito referido por cada estudante como o mais complicado/difícil de entender, saber a opinião destes sobre diferentes aspetos desse conceito. Para tal foi utilizada uma escala na qual num dos extremos encontra-se o "1-*totalmente em desacordo*" e no outro extremo "5-*totalmente de acordo*".

Após a recodificação de alguns itens que estavam formulados pela negativa (It6, It11 e It13), efetuou-se a análise e tratamento dos dados, utilizando, mais uma vez, o SPSS 20.

A Tabela 95 apresenta as médias e os desvios padrões das respostas dos alunos aos vários itens.

Tabela 95 – Média e desvio padrão dos 13 itens do questionário

	N=325	
	Média	**Desvio padrão**
It1 -Eu acho que o conceito é fácil de explicar a um outro colega.	2,47	1,041
It2 - O entendimento do conceito transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	2,64	1,134
It3 - Eu consigo ver aplicações do conceito a outras áreas e disciplinas.	2,90	1,264
It4 - O conceito é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	2,89	1,129
It5 - Eu ter entendido o conceito implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	2,87	1,139
It6 - Eu já entendi realmente o conceito.	2,87	1,375
It7 - Compreender o conceito foi como um "clique" e agora vejo o que realmente significa.	2,60	1,199
It8 - Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o conceito.	2,82	1,070
It9 - Agora que entendi o conceito, acho que seria difícil esquecê-lo.	2,78	1,318
It10 - Entender o conceito fez-me sentir mais como um matemático.	2,49	1,193
It11 - Foi fácil ver como o conceito se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	3,08	1,161
It12 - Assim que entendi o conceito, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	2,84	1,110
It13 – Não vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o conceito.	2,56	1,252

Com exceção do It11- "*Foi fácil ver como o conceito se ajusta e complementa a outros temas e assuntos*", todos os restantes itens apresentam médias de respostas abaixo de "*3* –

Nem em desacordo nem em acordo" e com uma variabilidade, nas respostas, semelhante. Daqui resulta que os alunos se situam globalmente, e em média, numa perspetiva de discordância relativamente às várias afirmações que os itens expressam.

A Figura 109, apresenta os valores médios dos diferentes itens, incluindo-se também um intervalo de variação de $\pm$ 1 desvio padrão em relação à média.

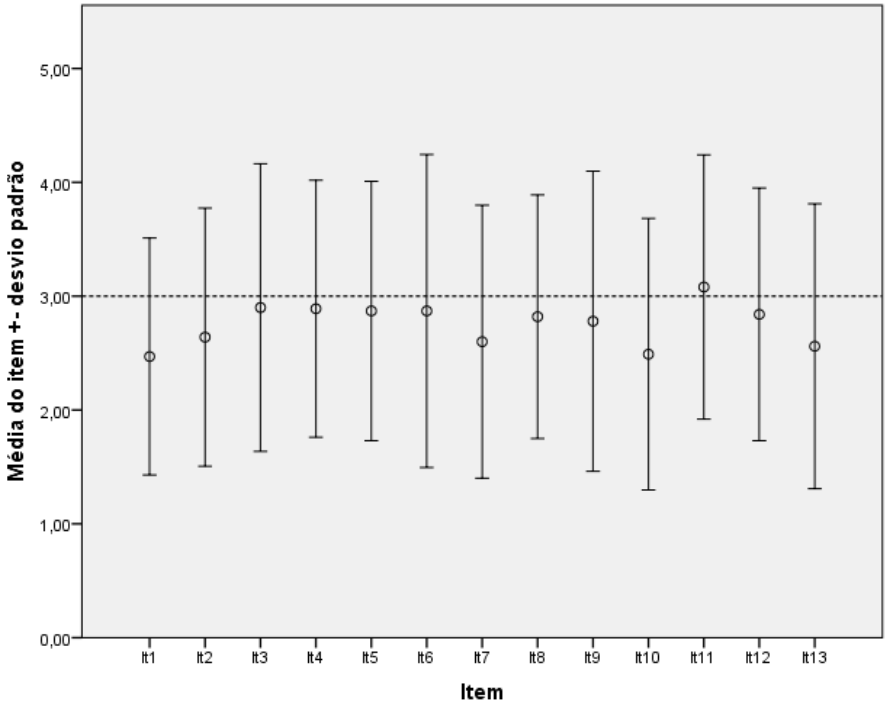


Figura 109 – As médias dos itens do questionário $\pm$ 1 desvio padrão

Face a estes resultados, podemos concluir que os estudantes reconhecem que necessitam de manter atualizado o conhecimento sobre o conceito, têm dificuldade em ver aplicações e relações do conceito com outras ideias probabilísticas e ainda não entenderam realmente o conceito.

A consistência interna de uma escala é medida frequentemente através do *Alpha* de *Cronbach* (α), que é uma das medidas mais usadas para a verificação da consistência interna de um grupo de variáveis (ou itens). Esta medida pode definir-se como a correlação que se espera obter entra a escala usada e outras escalas hipotéticas do mesmo universo, com igual número de itens, que meçam a mesma característica. (Pestana e Gageiro, 2000).

Para além de alguns indicadores estatísticos desta escala, a Tabela 96 apresenta o valor do Alpha de *Cronbach* (α). Esta escala de 13 itens e resultante da adição de todos os itens, apresenta um intervalo de variação possível entre 13 (=13$\times$1) e 65 (=13$\times$5) pontos.

Tabela 96 - Estatísticas de confiabilidade, média e desvio padrão da escala

Alfa de Cronbach (α)	Média da escala	Desvio padrão da escala	Número de itens
0,648	35,81	6,76	13

De acordo com Pestana e Gageiro (2000) um valor de α=0,648 é indicador de uma consistência interna fraca.

A escala, apresenta um valor médio de 35,81 pontos (com uma variabilidade de 6,76), evidencia que os estudantes apesar de considerarem os conceitos referidos como complicados/problemáticos, estes ainda não verificam as outras características/dimensões dos Conceitos *Threshold*.

Os valores da escala em função da variável ano de escolaridade não apresenta valores estatisticamente diferentes (Tabela 98), o que já não acontece com a variável Género na qual os rapazes ponderam, em média, de um modo mais elevado os diferentes itens (36,78) do que as raparigas (34,97) (Tabela 97).

Tabela 97 – Medidas descritivas da Escala em função do género e do ano de escolaridade

Variável Escala		Medidas descritivas		
		Média	Desvio padrão	*N*
Ano de escolaridade	9.º ano	35,37	6,53	226
	12.º ano	36,82	7,18	99
Género	Masculino	36,78	6,50	151
	Feminino	34,97	6,88	174

Tabela 98 – Teste de *Kolmogorov/Smirnov e* de *Mann/Whitney* para a escala e em relação ao Ano de escolaridade e ao Género

Variável Escala		Teste de *Kolmogorov/Smirnov*			Teste de *Mann/Whitney*	
		Estatística	Df	*Sig.*	*Mann-Whitney* U	*Sig.*
Ano de escolaridade	9.º ano	,076	226	,003	9764,000	,068
	12.º ano	,066	99	,200*		
Género	Masculino	,076	151	,031	11051,500	,013
	Feminino	,064	174	,077		

5.4.3. Análise das dimensões da escala do questionário dos potenciais Conceitos *Threshold*

Ainda de acordo com Holloway, Alpay e Bull (2009), construímos, à custa dos treze itens (It1, It2, It3, It4, It5, It6, It7, It8, It9, It10, It11, It12 e It13) da questão IV do questionário, quatro novas variáveis que definem quatro dimensões, a saber:

Transformadora=It2+It7+It10, cujo intervalo de variação é de 3 (=3×1) a 15 (=3×5);

Integradora= It4+ It5+ It8+ It11+ It12, cujo intervalo de variação é de 5 (=5×1) a 25 (=5×5);

Irreversibilidade= It9+ It13, cujo intervalo de variação é de 2 (=2×1) a 10 (=2×5);

Nível de Entendimento= It1+ It3+ It6, cujo intervalo de variação é de 3 (=3×1) a 15 (=3×5).

E assim teremos,

Tabela 99 – Medidas descritivas das dimensões dos questionário para detetar os CT

	Género				Ano de escolaridade				Total	
	Masculino		Feminino		9.º ano		12.º ano			
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
Transformadora	8,07	2,51	7,44	2,45	7,76	2,46	7,68	2,59	7,73	2,50
Integradora	14,75	2,79	14,29	3,12	14,27	3,01	15,03	2,84	14,50	2,97
Irreversibilidade	5,46	1,47	5,22	1,61	5,42	1,59	5,14	1,44	5,33	1,55
Nível de Entendimento	8,51	2,44	8,01	2,46	7,92	2,28	8,97	2,70	8,24	2,46

De acordo com o que definimos no Capítulo 4, relativamente às quatro dimensões desta escala, constatamos que os valores médios, em função do Género, do Ano de Escolaridade e para todos os alunos, com exceção da dimensão Integradora no 12.º ano, encontram-se abaixo do limiar para considerar que os conceitos mais complicados/difíceis, considerados pelos estudantes, verifiquem estas dimensões dos Conceitos *Threshold* (Figuras 110, 111, 112, 113). Relembramos que a dimensão integradora dos Conceitos *Threshold* tem a ver com a sua relevância enquanto elemento conector com outros temas, em geral, e matemáticos, em particular.

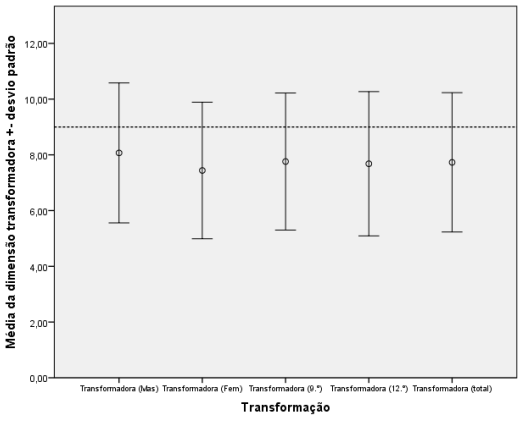


Figura 110 – Os valores da dimensão Transformadora em função do Género e do Ano de escolaridade

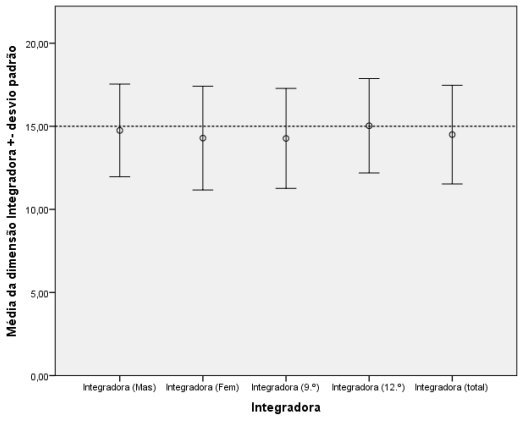


Figura 111 – Os valores da dimensão Integradora em função do Género e do Ano de escolaridade

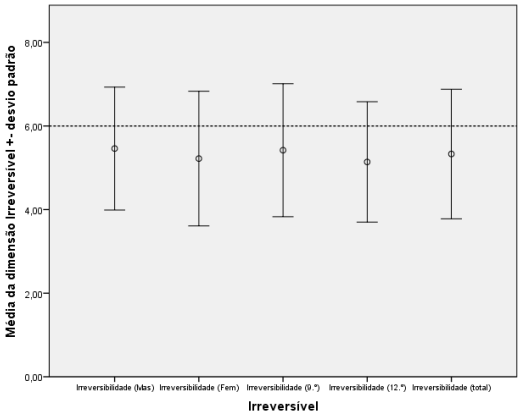


Figura 112 – Os valores da dimensão Irreversível em função do Género e do Ano de escolaridade

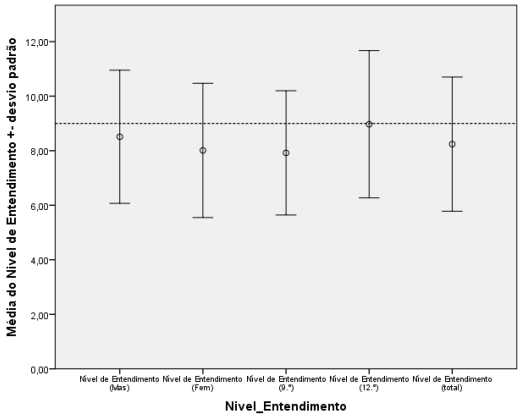


Figura 113 – Os valores da dimensão Nível de Entendimento em função do Género e do Ano de escolaridade

Será ainda importante averiguar se as variáveis Género e Ano de Escolaridade provocam alterações significativas nos valores destas várias dimensões.

Já que os requisitos da normalidade para as diferentes dimensões não são cumpridos (teste de *Kolmogorov-Smirnov)*, a tabela seguinte inclui a estatística do teste não-paramétrico de *Mann-Whitney*.

Na Tabela 100 mostramos estes valores.

Tabela 100 – Teste de Normalidade (K/S) e de *Mann-Whitney* para as dimensões da escala para o Conceitos *Threshold*

Indicadores quantitativos das PFNET	Género/ano	*Kolmogorov-Smirnov*[a]			Teste de *Mann-Whitney*	
		Estatística	Df	*Sig.*	U	*Sig.*
Transformadora	Masculino	,093	151	,003	11132,500	,017
	Feminino	,106	174	,000		
Integradora	Masculino	,110	151	,000	11930,500	,151
	Feminino	,101	174	,000		
Irreversível	Masculino	,137	151	,000	12017,000	,176
	Feminino	,148	174	,000		
Nível de Entendimento	Masculino	,119	151	,000	11606,500	,068
	Feminino	,102	174	,000		
Transformadora	9.º ano (1.ºM)	,094	226	,000	10874,000	,686
	12.º ano (2.ºM)	,125	99	,001		
Integradora	9.º ano (1.ºM)	,104	226	,000	9543,000	,034
	12.º ano (2.ºM)	,106	99	,008		
Irreversível	9.º ano (1.ºM)	,153	226	,000	10271,000	,230
	12.º ano (2.ºM)	,149	99	,000		
Nível de Entendimento	9.º ano (1.ºM)	,124	226	,000	8261,000	,000
	12.º ano (2.ºM)	,134	99	,000		

a. *Lilliefors Significance Correction*

Ao nível da variável género, somente a dimensão Transformadora apresenta grandezas estatisticamente diferentes entre as raparigas e os rapazes (*Sig*.<0,05), valores mais altos neste último grupo.

No que concerne ao ano de escolaridade verificam-se diferenças estatisticamente significativas entre o 9.º e o 12.º ano de escolaridade (*Sig*.<0,05) nas dimensões Integradora e Nível de Entendimento, sempre com valores mais altos no ano terminal do ensino secundário.

5.4.4. Relação entre os potenciais Conceitos *Threshold* e as diferentes tipologias dos conceitos das redes PFNET

Para averiguar sobre a relação entre os potenciais Conceitos *Threshold* (CT) e as diferentes tipologias dos conceitos das redes PFNET, construímos a tabela seguinte que apresenta as frequências com que os diferentes conceitos/termos/noções/exemplos utilizados, surgem nas redes PFNET como nós extremidade (NE), nós polares (NP) e Conceitos Nucleares (CN). Para além disso incluiu-se uma coluna com a frequência com que os mesmos termos são referidos, pelos estudantes, como os mais complicados/difíceis (potenciais CT) para os alunos.

Tabela 101 – Frequências dos vários conceitos das PFNET como NE, NP e CN e como potencial CT

	Frequência como CT			Frequência como NE			Frequência como NP			Frequência como CN		
	9.º	12.º	Total	9.º	12.º	Total	9.º	12.º	Total	9.º	12.º	Total
Acaso	7	8	15	94	41	135	80	40	120	52	18	70
Acontecimento	6	0	6	85	42	127	81	34	115	60	23	83
Casos possíveis e casos favoráveis	8	4	12	66	15	81	91	37	128	69	47	116
Experiência aleatória	4	5	9	65	31	96	84	40	124	77	28	105
Lançamento de moedas/dados	2	0	2	75	26	101	77	39	116	74	34	108
Lei (ou regra) de Laplace	69	3	72	90	31	121	80	38	118	56	30	86
Lei dos Grandes Números	60	33	93	123	54	177	67	32	99	36	13	49
Probabilidade	3	5	8	50	13	63	62	30	92	114	56	170
Quociente	37	4	41	131	57	188	55	26	81	40	16	56
Técnicas de contagem de casos	15	30	45	104	55	159	74	26	100	48	18	66
Valor numérico	15	7	22	110	54	164	70	36	106	46	9	55

A visualização gráfica da relação entre as diferentes tipologias dos termos nas redes PFNET (NE, NP e CN) e os potenciais Conceitos *Threshold* (CT), esboçamos os Diagramas de Dispersão que relacionam a frequências destes conceitos nos 9.º e 12.º anos e, ainda em relação ao total de estudantes.

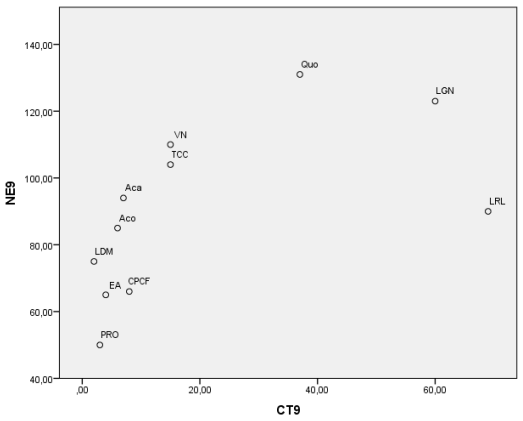


Figura 114 – Diagrama de dispersão entre CT_9 e NE_9

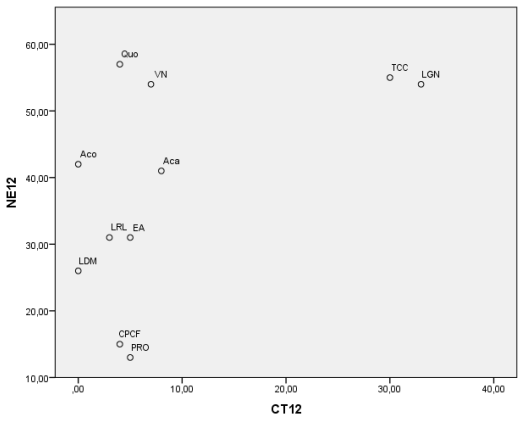


Figura 115 – Diagrama de dispersão entre CT_{12} e NE_{12}

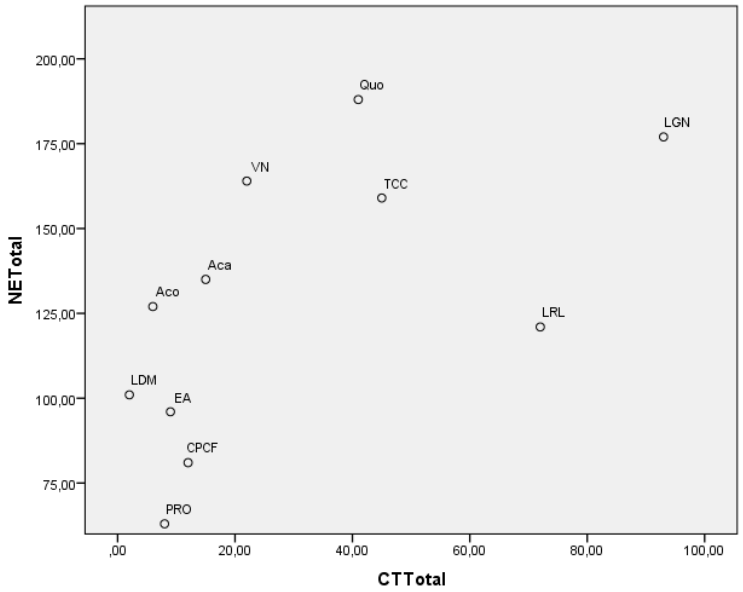


Figura 116 – Diagrama de dispersão entre CT_{Total} e NE_{Total}

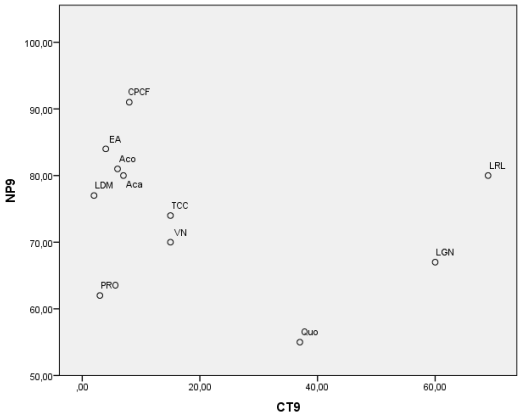


Figura 117 – Diagrama de dispersão entre CT_9 e NP_9

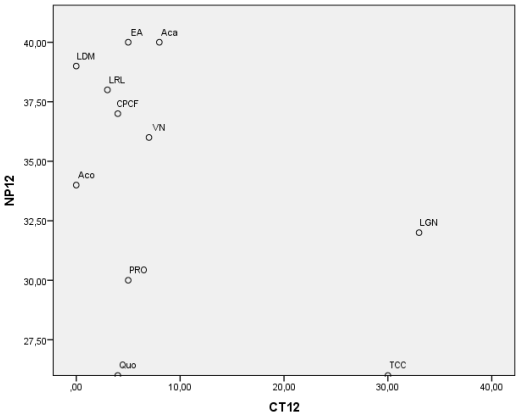


Figura 118 – Diagrama de dispersão entre CT_{12} e NP_{12}

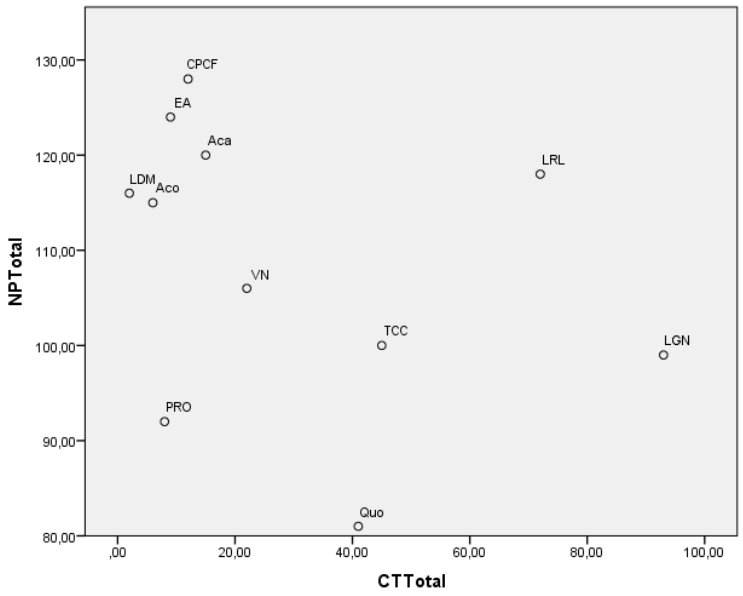


Figura 119 – Diagrama de dispersão entre CT_{Total} e NP_{Total}

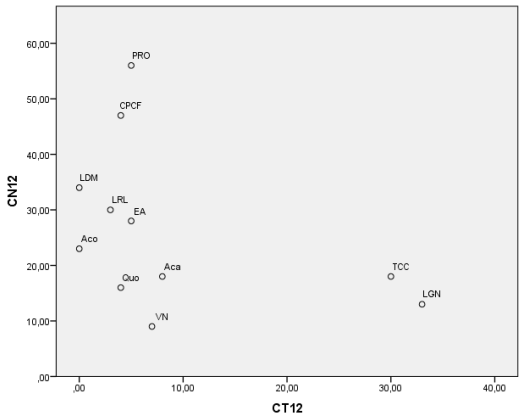


Figura 120 – Diagrama de dispersão entre CT_9 e CN_9

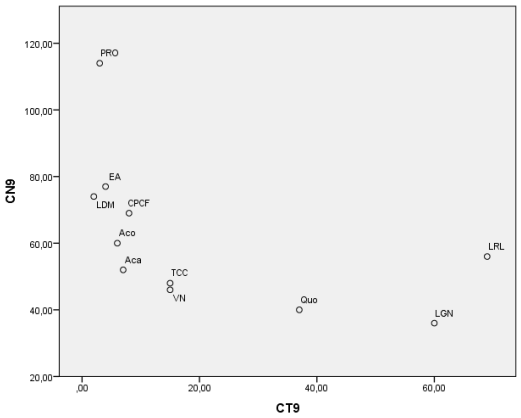


Figura 121 – Diagrama de dispersão entre CT_{12} e CN_{12}

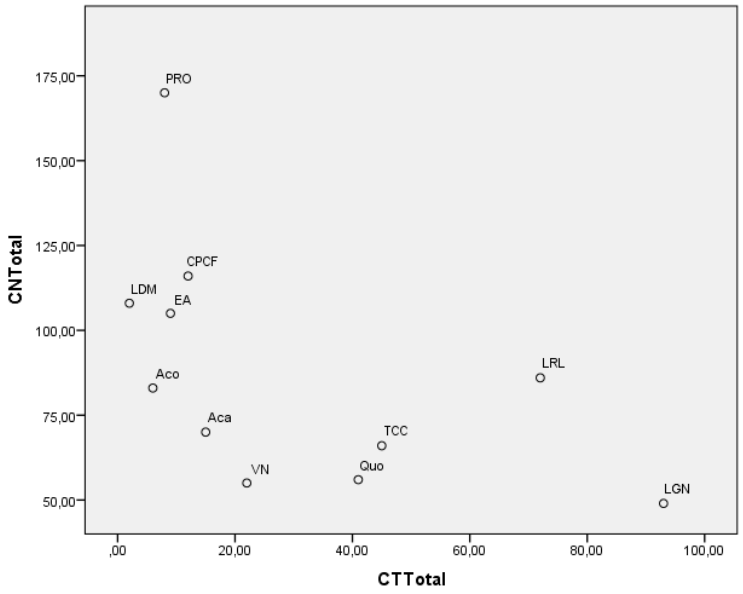


Figura 122 – Diagrama de dispersão entre CT_{Total} e CN_{Total}

Paralelamente, e para mensurar a relação existente entre as frequências com que surgem como potenciais CT e as diferentes tipologias dos conceitos nas redes PFNET (NE, NP e CN), calculamos o coeficiente de correlação de *Spearman,* dado por $\rho = 1 - \frac{6\sum_i d_i^2}{(N^2-1)\times N}$. A opção por este coeficiente justifica-se pela não normalidade do comportamento dos valores associados a estas variáveis e confirmados pelo teste de Shapiro/Wilk, aconselhado para amostras pequenas (Maroco, 2007). Os coeficientes foram determinados com as variáveis: frequência como CT e frequência como NE (no 9.º, no 12.º ano e em relação ao total de alunos), frequência como CT e frequência como NP (no 9.º, no 12.º ano e em relação ao total

de alunos) e ainda, frequência como CT e frequência como CN (no 9.º, no 12.º ano e em relação ao total de alunos).

Os valores destes coeficientes foram:

Tabela 102 – Coeficientes de correlação de *Spearman* (ρ) entre os potenciais Conceitos *Threshold* (CT) e as diferentes tipologias dos conceitos nas PFNET (NE, NP e CN)

$\rho(CT_9 \text{ e } NE_9) = 0,743^{**}$	$\rho(CT_{12} \text{ e } NE_{12}) = 0,389$	$\rho(CT_{Total} \text{ e } NE_{Total}) = 0,636^{*}$
$\rho(CT_9 \text{ e } NP_9) = -0,251$	$\rho(CT_{12} \text{ e } NP_{12}) = -0,216$	$\rho(CT_{total} \text{ e } NP_{Total}) = -0,273$
$\rho(CT_9 \text{ e } CN_9) = -0,797^{**}$	$\rho(CT_{12} \text{ e } CN_{12}) = -0,537$	$\rho(CT_{total} \text{ e } CN_{Total}) = -0,682^{*}$

*A correlação é significativa no nível 0,05 (2 extremidades).

**A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).

A leitura destes valores permite-nos retirar algumas conclusões. A primeira é a existência de uma correlação positiva e significativa da frequência com que são referidos os potenciais Conceitos *Threshold* (CT) e os nós extremidade (NE), tanto no 9.º ano (0,743) como para o total de alunos (0,636), sendo que quanto mais alunos referem um termo como CT mais alunos também o referem como nó extremidade. No 12.º ano esta correlação apesar de positiva é baixa e não significativa.

Em segundo, valores de correlações baixas negativas da frequência com que são referidos os Conceitos *Threshold* (CT) e os nós polares (NP) no 9.º ano (-0,251), no 12.º (-0,216) e no total (-0,273). Todavia, todos estes valores não são estatisticamente significativos.

O último aspeto prende-se com o facto de haver correlações negativas e significativas da frequência com que são referidos os potenciais Conceitos *Threshold* (CT) e os Conceitos Nucleares (CN) tanto no 9.º ano (-0,797) como para a totalidade dos alunos (-0,682). No 12.º (-0,537) e apesar do coeficiente indicar uma correlação moderada negativa, esta não é, no entanto, significativa. Deste modo, quanto mais alunos referem um CT menos alunos referem-no como Conceito Nuclear.

De um modo semelhante, a Tabela 103 apresenta o número de alunos que referem os diferentes termos como CT e o número médio de ligações (NML) de cada conceito nas redes PFNET, por ano de escolaridade e para o total da amostra.

Tabela 103 – Frequência como CT e o número médio de ligações por rede PFNET

	Frequência dos CT			Número médio de ligações por rede PFNET (NML)		
	9.º	**12.º**	**total**	**9.º**	**12.º**	**Total**
Acaso	7	8	15	1,92	1,85	1,90
Acontecimento	6	0	6	2,02	1,92	1,99
Casos possíveis e casos favoráveis	8	4	12	2,12	2,69	2,29
Experiência aleatória	4	5	9	2,27	2,12	2,22
Lançamento de moedas/dados	2	0	2	2,19	2,23	2,20
Lei (ou regra) de Laplace	69	3	72	1,93	2,18	2,01
Lei dos Grandes Números	60	33	93	1,68	1,67	1,68
Probabilidade	3	5	8	2,61	3,01	2,73
Quociente	37	4	41	1,68	1,67	1,68
Técnicas de contagem de casos	15	30	45	1,83	1,71	1,79
Valor numérico	15	7	22	1,80	1,61	1,74

Os respetivos Diagramas de Dispersão que relacionam estas variáveis, apresentam-se nas Figuras 123, 124 e 125.

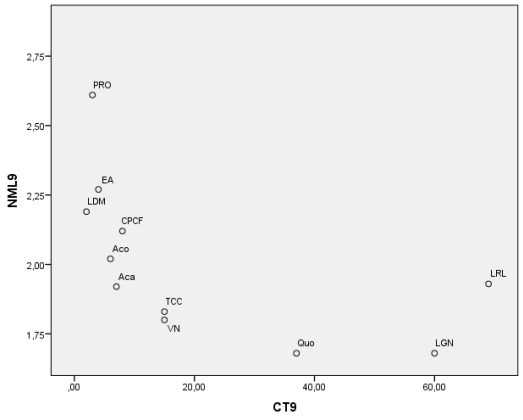


Figura 123 – Diagrama de dispersão entre CT_9 e NML_9

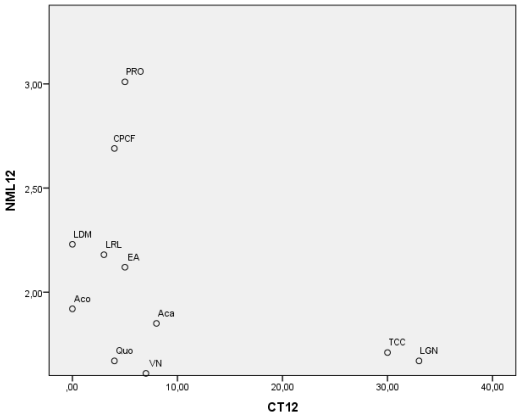


Figura 124 – Diagrama de dispersão entre CT_{12} e NML_{12}

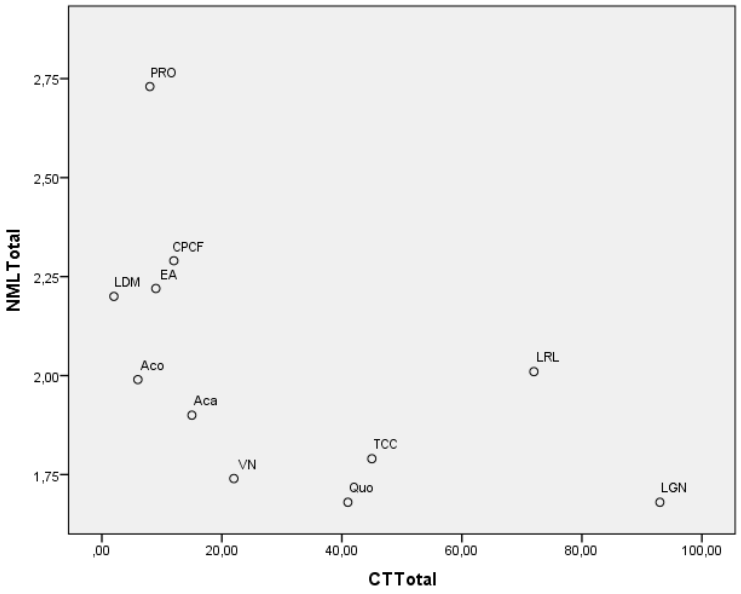


Figura 125 – Diagrama de dispersão entre CT_{Total} e NML_{Total}

Os coeficientes de correlação de *Spearman* obtidos entre as frequências e o número médio de ligações do conceito, constam da tabela seguinte.

Tabela 104 – Correlações de *Spearman* (ρ) entre frequência dos vários termos como CT e o número médio de ligações (NML) por rede PFNET

$\rho(CT_9$ e $NML_9)$= -0,566	$\rho(CT_{12}$ e $NML_{12})$= -0,511	$\rho(CT_{Total}$ e $NML_{Total})$= - 0,651*

*A correlação é significativa no nível 0,05 (2 extremidades).

Todos estes valores de *Spearman* são negativos e justificativos de uma correlação moderada negativa entre as variáveis, todavia só é significativa para a totalidade dos alunos. Estes valores indicam que quanto mais alunos mencionam determinado termo como potencial CT, menor é o valor médio do número (NML) de ligações desse conceito na rede PFNET.

A tabela seguinte, análoga à Tabela 101, apresenta as frequências com que os diferentes conceitos/termos/noções/exemplos utilizados, surgem nas redes PFNET como nós extremidade (NE), nós polares (NP), Conceitos Nucleares (CN) e ainda uma coluna com a frequência com que os mesmos termos são referidos como os menos complicados/fáceis de entender (CF) pelos alunos. Os coeficientes de correlação de *Spearman* foram determinados com as variáveis: frequência como CF e frequência como NE (no 9.º, no 12.º ano e em relação ao total de alunos), frequência como CF e frequência como NP (no 9.º, no 12.º ano e em

relação ao total de alunos) e ainda, frequência como CF e frequência como CN (no 9.º, no 12.º ano e em relação ao total de alunos).

Tabela 105 – Frequências dos vários conceitos das PFNET como mais fáceis de entender (CF) e como NE, NP e CN nas PFNET

	Frequência como fácil (CF)			Frequência como NE			Frequência como NP			Frequência como CN		
	9.º	12.º	Total	9.º	12.º	Total	9.º	12.º	Total	9.º	12.º	Total
Acaso	21	9	30	94	41	135	80	40	120	52	18	70
Acontecimento	16	13	29	85	42	127	81	34	115	60	23	83
Casos possíveis e casos favoráveis	29	19	48	66	15	81	91	37	128	69	47	116
Experiência aleatória	18	4	22	65	31	96	84	40	124	77	28	105
Lançamento de moedas/dados	46	7	53	75	26	101	77	39	116	74	34	108
Lei (ou regra) de Laplace	11	29	40	90	31	121	80	38	118	56	30	86
Lei dos Grandes Números	0	2	2	123	54	177	67	32	99	36	13	49
Probabilidade	74	9	83	50	13	63	62	30	92	114	56	170
Quociente	5	4	9	131	57	188	55	26	81	40	16	56
Técnicas de contagem de casos	4	1	5	104	55	159	74	26	100	48	18	66
Valor numérico	2	2	4	110	54	164	70	36	106	46	9	55

Os Diagramas de Dispersão seguintes permitem-nos ter uma visão sobre esta relação.

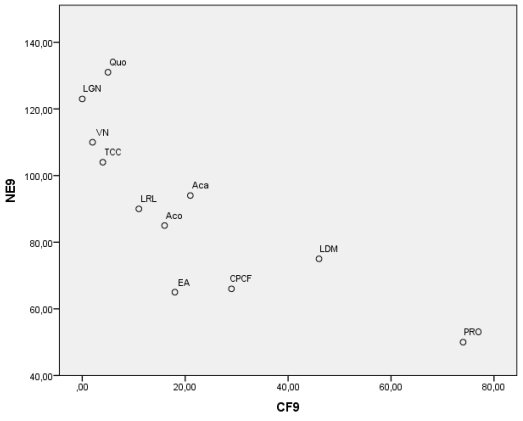


Figura 126 – Diagrama de dispersão entre CF_9 e NE_9

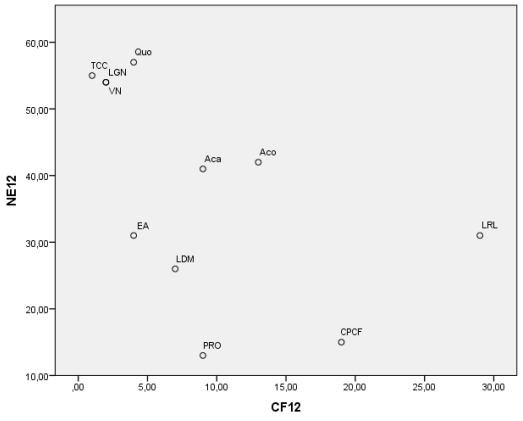


Figura 127 – Diagrama de dispersão entre CF_{12} e NE_{12}

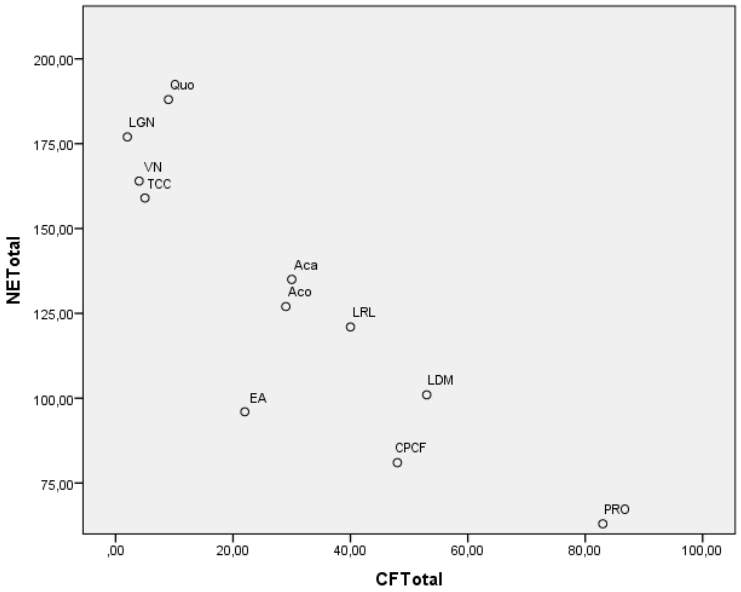


Figura 128 – Diagrama de dispersão entre CF_{Total} e NE_{Total}

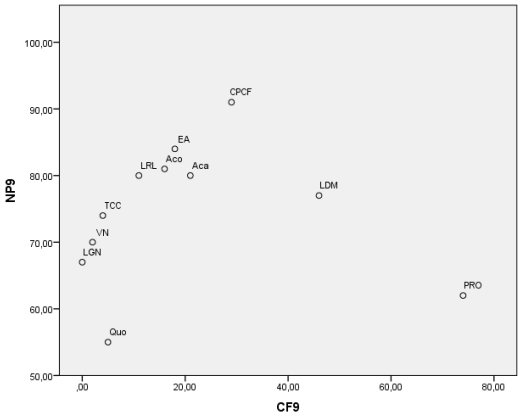


Figura 198 – Diagrama de dispersão entre CF_9 e NE_9

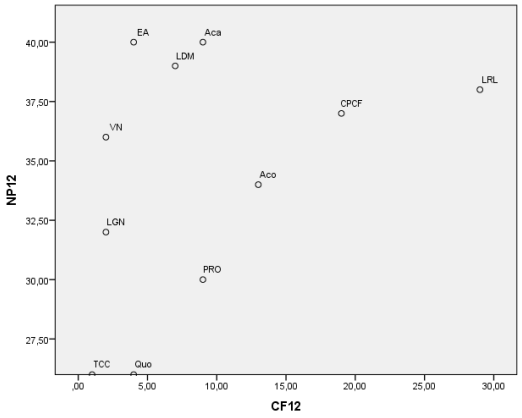


Figura 130 – Diagrama de dispersão entre CF_{12} e NE_{12}

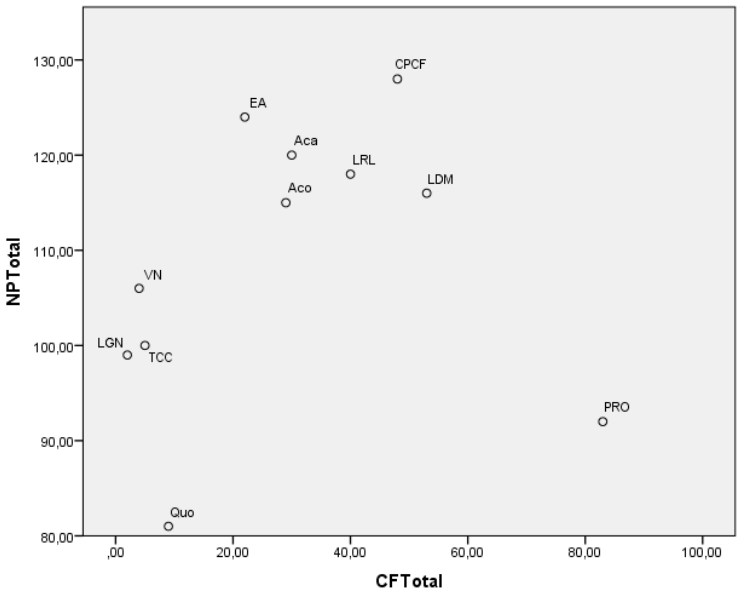


Figura 131 – Diagrama de dispersão entre CF_{Total} e NP_{Total}

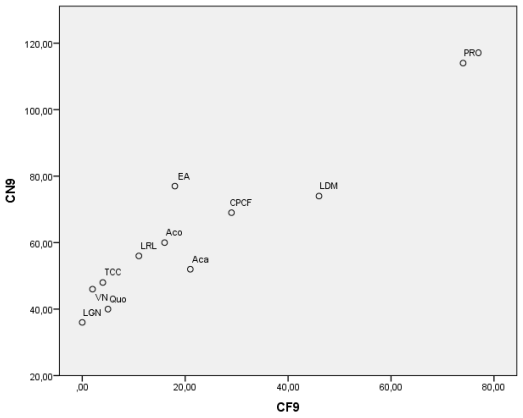


Figura 132 – Diagrama de dispersão entre CF_9 e CN_9

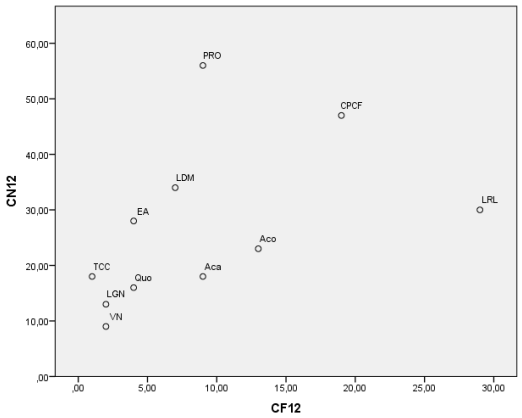


Figura 133 – Diagrama de dispersão entre CF_{12} e CN_{12}

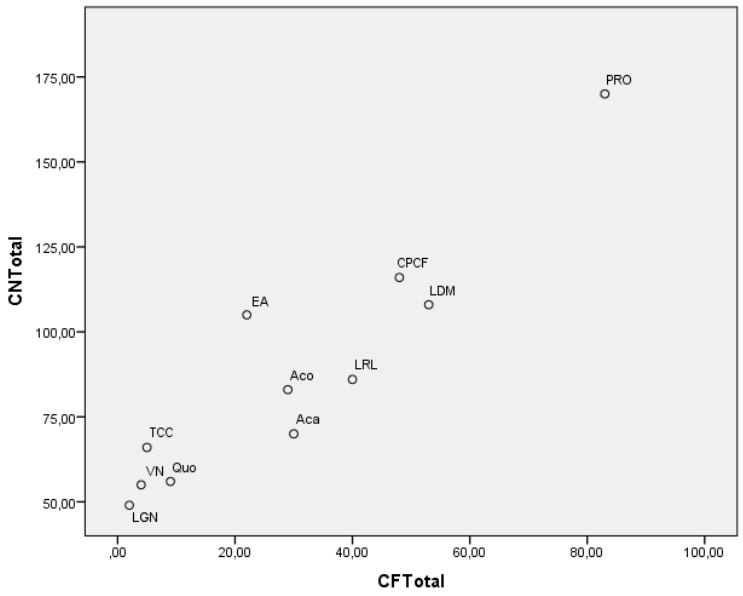


Figura 134 – Diagrama de dispersão entre CF_{Total} e CN_{Total}

O Coeficiente correlação de *Spearman (*ρ), para estas frequências fornece os seguintes valores.

Tabela 106 – Coeficientes de correlação de *Spearman* (ρ) entre os conceitos mais fáceis (CF), e as diferentes tipologias dos conceitos nas PFNET (NE, NP e CN)

$\rho(CF_9$ e $NE_9) = -0,836$**	$\rho(CF_{12}$ e $NE_{12}) = -0,651$*	$\rho(CF_{Total}$ e $NE_{Total}) = -0,827$**
$\rho(CF_9$ e $NP_9) = 0,333$	$\rho(CF_{12}$ e $NP_{12}) = 0,393$	$\rho(CF_{total}$ e $NP_{Total}) = 0,336$
$\rho(CF_9$ e $CN_9) = 0,873$**	$\rho(CF_{12}$ e $CN_{12}) = 0,672$*	$\rho(CF_{total}$ e $CN_{Total}) = 0,918$**

*A correlação é significativa no nível 0,05 (2 extremidades).

**A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).

Através destes coeficientes constatamos a existência de uma correlação alta negativa e significativa da frequência com que são referidos os conceitos mais fáceis (CF) e os nós extremidade (NE) tanto no 9.º ano (-0,836), como para o total de alunos (-0,827), sendo que quanto mais alunos referem um CF menos alunos também o referem como nó extremidade. No 12.º ano esta correlação moderada também é negativa e significativa.

Verificam-se também valores de correlações baixas positivas da frequência com que são referidos os conceitos mais fáceis (CF) e os nós polares (NP) tanto no 9.º ano (0,333) como no 12.º (0,393) como no total (0,336), no entanto estes valores não são significativos.

Finalmente, constata-se a existência de correlações altas positivas e significativas entre a frequência com que são referidos os conceitos mais fáceis (CF) e os Conceitos Nucleares (CN), tanto no 9.º como no 12.º ano (0,873; 0,672, respetivamente) como para a totalidade dos alunos (0,918), sendo que quanto mais alunos referem um conceito como fácil, também mais alunos o referem como Conceito Nuclear. Há, assim, uma tendência para que os Conceitos Nucleares serem também os conceitos referidos como mais fáceis para os alunos.

Na Tabela 107 apresenta-se o número de alunos que referem os diferentes termos como conceitos mais fácil (CF) e o número médio de ligações (NML) de cada conceito na rede PFNET, por ano de escolaridade e do total da amostra, no 2.º Momento de recolha de dados:

Tabela 107 – Frequência dos vários termos como conceito fácil (CF) e o número médio de ligações por rede PFNET

	Frequência dos CT			Número médio de ligações por rede PFNET (NM)		
	9.º	12.º	total	9.º	12.º	Total
Acaso	21	9	30	1,92	1,85	1,90
Acontecimento	16	13	29	2,02	1,92	1,99
Casos possíveis e casos favoráveis	29	19	48	2,12	2,69	2,29
Experiência aleatória	18	4	22	2,27	2,12	2,22
Lançamento de moedas/dados	46	7	53	2,19	2,23	2,20
Lei (ou regra) de Laplace	11	29	40	1,93	2,18	2,01
Lei dos Grandes Números	0	2	2	1,68	1,67	1,68
Probabilidade	74	9	83	2,61	3,01	2,73
Quociente	5	4	9	1,68	1,67	1,68
Técnicas de contagem de casos	4	1	5	1,83	1,71	1,79
Valor numérico	2	2	4	1,80	1,61	1,74

Os respetivos Diagramas de dispersão, apresentam-se nas Figuras 135, 136 e 137.

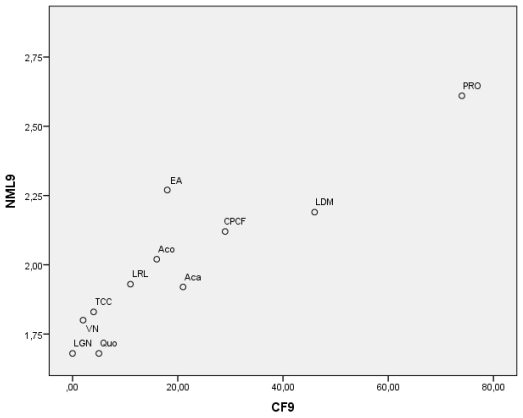


Figura 135 – Diagrama de dispersão entre CF_9 e NML_9

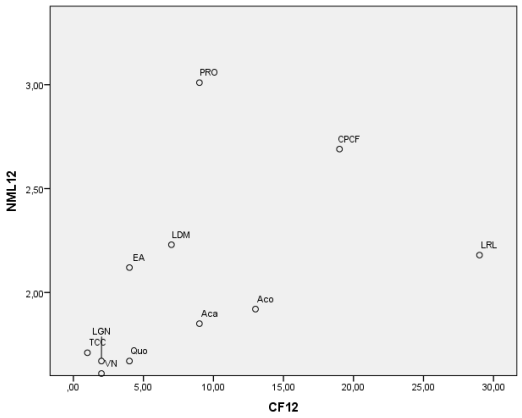


Figura 136 – Diagrama de dispersão entre CF_{12} e NML_{12}

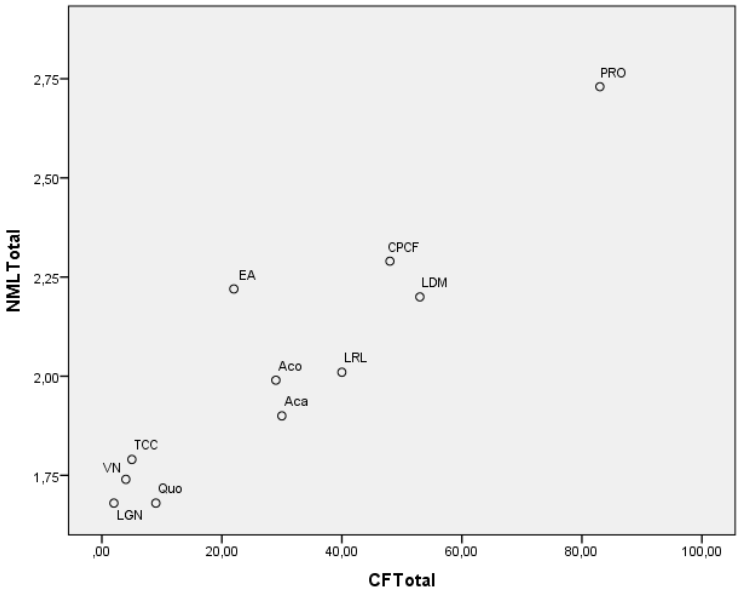


Figura 137 – Diagrama de dispersão entre CF_{Total} e NML_{Total}

Os coeficientes de correlação de *Spearman* (ρ) obtidos, constam da tabela seguinte.

Tabela 108 – Correlações de *Spearman* (ρ) entre frequência como conceito fácil (CF) e o número médio de ligações (NML) do conceito por rede PFNET

$\rho(CF_9$ e $NML_9)= 0{,}861^{**}$	$\rho(CF_{12}$ e $NML_{12})= 0{,}693^{*}$	$\rho(CF_{Total}$ e $NML_{Total})= 0{,}843^{**}$

*A correlação é significativa no nível 0,05 (2 extremidades).

**A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).

Todos estes valores são positivos e demonstrativos de uma correlação significativa moderada/alta e positiva entre as variáveis conceito fácil (CF) e número médio de Ligações por rede (NML), o que é revelador de que quanto mais alunos mencionam determinado termo como um conceito fácil, maior é o valor médio do número de ligações desse conceito na respetiva rede PFNET.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES, CONTRIBUTOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA, LIMITAÇÕES E PERSPETIVAS FUTURAS DE INVESTIGAÇÃO

6.1. CONCLUSÕES

6.2 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS FACE AO MARCO TEÓRICO ADOTADO

6.3. CONTRIBUTOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

6.4. LIMITAÇÕES E PERSPETIVAS FUTURAS DE INVESTIGAÇÃO

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES, CONTRIBUTOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA, LIMITAÇÕES E PERSPETIVAS FUTURAS DE INVESTIGAÇÃO

"O final de uma viagem não significa, necessariamente, o fim do trajecto, mas sim o início de uma próxima jornada"

Autor Desconhecido

6.1. CONCLUSÕES

A nossa opção organizacional para apresentar as conclusões, focar-se-á na sistematização dos resultados obtidos no Capítulo 5 e tendo como base os objetivos e perguntas de investigação, que nortearam este trabalho. Em paralelo, apresentaremos as principais implicações para a Educação resultantes desta investigação e algumas perspetivas de desenvolvimento futuro que, neste âmbito, se podem considerar.

Relembramos que, nesta investigação, definimos o nosso objetivo geral como sendo:

"*Compreender a estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º (14-15 anos) e 12.º (17-18 anos) anos de escolaridade sobre a noção de Probabilidade, com base no marco teórico da Teoria dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold."*

Para clarificar este objetivo geral, definimos, ainda, sete objetivos específicos (*Obj.Esp.*), complementados com sete perguntas de investigação (*Perg.)*, aos quais tentaremos, neste Capítulo, dar resposta.

Assim, seguidamente enunciaremos os objetivos estabelecidos, as perguntas de investigação e as conclusões a que chegamos. No final destas colocamos, entre parêntesis, as secções que suportam as mesmas.

- ***Obj.Esp.*$_1$** – Obter as representações das estruturas cognitivas dos alunos, dadas através das Redes Associativas Pathfinder, dos estudantes dos 9.º e 12 anos de escolaridade e em relação à noção de Probabilidade,

No decorrer no nosso trabalho empírico, e nos dois momentos de recolha de dados, foram obtidas um total de 669 (1.º momento – 344 e 2.º momento – 325) representações das estruturas cognitivas de estudantes, dadas através das Redes Associativas *Pathfinder*, em torno do conceito de Probabilidade. As redes PFNET conseguidas basearam-se nas respostas de 359 estudantes do género feminino (1.º momento – 185 e 2.º momento – 174) e 310 de alunos do género masculino (1.º momento – 159 e 2.º momento – 151). Destas PFNET, 476 referem-se a respostas provenientes do 9.º ano de escolaridade (1.º momento – 250 e 2.º momento – 226) e as restantes 193 (1.º momento – 94 e 2.º momento – 99) relativas às opiniões emitidas pelos alunos do 12.º ano de escolaridade (Secções 5.1. e 5.2.).

- ***Obj.Esp.*$_2$** - Conhecer a forma como os alunos, destes níveis de ensino, organizam conceptualmente, os conceitos relacionados com a Probabilidade.
  - ***Perg.*$_1$** – Como se encontram organizadas as representações das estruturas cognitivas dos alunos relacionadas com a Probabilidade, dadas através das Redes Associativas Pathfinder, dos estudantes dos 9.º e 12 anos de escolaridade?

A partir das redes Médias PFNET dos dois momentos de recolha de dados, podemos observar que no grupo de estudantes mais jovens, emerge um Conceito Nuclear "Probabilidade" ($C_G(R)_{9.ºano/1.ºmomento}$=0,513 e $C_G(R)_{\ 9.ºano/2.ºmomento}$=0,511), em torno do qual orbitam os termos "Acontecimento", "Lançamento de moedas/dados", "Experiência aleatória", "Lei dos Grandes Números" e os "Casos possíveis e favoráveis", todos estes associados à linguagem específica desta temática matemática. O exemplo "Lançamento de dados/moedas" perde importância, ao passar de Conceito Nuclear, no 1.º momento, a nó extremidade, no 2.º momento de recolha de dados. São comuns, nestas redes médias PFNET do 9.º ano, 7 ligações (Similaridade=0,538) e a existência de uma "cauda" formada pela "Lei dos Grandes Números", "Valor numérico" e "Quociente" e, diametralmente opostos como nós extremidade nesta disposição, "Acaso" e "Quociente", constituindo estes últimos conceitos os

menos consolidados na estrutura cognitiva dos alunos em torno da Probabilidade (Secção 5.1.5.).

Mais uma vez, os termos "Acaso" e "Quociente" surgem, nas redes médias PFNET dos estudantes do 12.º ano de escolaridade e nos dois momentos de recolha de dados, muito afastados. São redes muito centradas no Conceito Nuclear "Probabilidade" ($C_G(R)_{12.ºano/1.ºmomento}$=0,637 e $C_G(R)_{12.ºano/2.ºmomento}$=0,389), apesar de, no 2.º momento de recolha de dados, o termo "Casos possíveis e favoráveis" aumentar a sua relevância nestas representações das estruturas cognitivas, e por esta razão passar a Conceito Nuclear, aspeto que, na nossa opinião, se prende com reconhecimento da importância que os alunos atribuem à utilização do Cálculo Combinatório para determinar estas quantidades. Ainda para este nível de ensino é recorrente a existência de uma "cauda", agora formada pelas noções de "Lançamento de moedas/dados", "Experiência aleatória" e "Acaso", o que nos parece uma associação coesa já que falamos de um exemplo que constitui uma experiência aleatória e que, por esta razão, envolve a incerteza. Ainda neste ano de escolaridade verifica-se a presença de oito ligações comuns nestas PFNET, o que resulta numa Similaridade=0,667. A imprevisibilidade associada a este tema matemático, expressa através dos termos "Acaso" e da "Experiência aleatória", não surgem muito próximos de "Probabilidade" (Secção 5.2.5 e 5.3.5.).

É curioso no 9.º ano a fraca ligação existente entre a Probabilidade e a sua vertente mensurável dada pelos termos "Quociente" e "Valor Numérico" (Secções 5.1.5. e 5.2.5).

Apesar do incremento da dificuldade dos conteúdos probabilísticos do 9.º ano para o 12.º ano, não há diferenças estatisticamente significativas no Índice de Complexidade das redes, nos dois anos de escolaridade e nos dois momentos, o que é numericamente demonstrativo da inexistência de um aumento de complexidade das PFNET (Secções 5.1.4.3., 5.2.4.3. e 5.3.4.).

- ***Obj.Esp.₃*** - Através das Redes Associativas Pathfinder, identificar os Conceitos Nucleares, os nós extremidade e nós polares mais frequentes na organização conceptual dos estudantes dos 9.º e 12.º anos de escolaridade, no que concerne à noção de Probabilidade;
  - ***Perg.₂*** – Quais são os Conceitos Nucleares (CN), nós extremidade (NE) e nós polares (NP) mais frequentes na organização conceptual, dada através das Redes Associativas Pathfinder, dos estudantes dos 9.º e 12.º anos, em relação à noção de Probabilidade?

Os conceitos, estatisticamente mais frequentes, referidos no 9.º ano e em ambos os momentos de recolha de dados foram: "Quociente" e "Lei dos Grandes Números" como NE; "Probabilidade", como CN; e os "Casos possíveis e casos favoráveis", como NP. Em relação ao 12.º ano, as noções, estatisticamente mais frequentes como NE foram, o "Quociente", como CN a "Probabilidade" e, finalmente, a "Experiência aleatória" como NP (Secções 5.1.2. e 5.2.2.).

A representação gráfica, das frequências relativas destes conceitos das PFNET como CN, NE e NP, mostra linhas poligonais muito semelhantes em ambos os anos de escolaridade e nos dois momentos de recolha de dados. Este aspeto evidencia a parecença da distribuição dos pesos das diferentes tipologias dos conceitos na estrutura cognitiva dos alunos (5.1.1. e 5.2.1.).

O modelo das Árvores de Decisão obtido, realça que a totalidade dos alunos do 9.º ano (100%) são corretamente classificados, por oposição aos alunos do 12.º ano que todos eles são incorretamente classificados, como pertencentes ao 9.º ano. Esta evidência estatística vem mostrar que, no que concerne às diferentes tipologias dos conceitos associados à noção de Probabilidade, os alunos do 12.º ano estão bastante próximos dos estudantes do 9.º ano de escolaridade (Secções 5.1.3. e 5.2.3.).

- ***Obj.Esp.$_4$*** - Averiguar se existem diferenças nos vários indicadores quantitativos das Redes Associativas Pathfinder, entre os alunos do género feminino e masculino, e dos diferentes anos de escolaridade em relação ao conceito de Probabilidade;
  - ***Perg.$_4$*** – Será que existem diferenças nos vários indicadores quantitativos das Redes Associativas Pathfinder relativas à noção de Probabilidade, entre os alunos do género feminino e masculino?
  - ***Perg.$_5$*** – Será que existem diferenças nos vários indicadores quantitativos das Redes Associativas Pathfinder relativas à noção de Probabilidade, nos diferentes anos de escolaridade?

Relativamente aos vários indicadores quantitativos - Número de nós extremidade, Número de nós polares, Número de nós nucleares, Densidade da Rede, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares, Fator do grau dos nós nucleares, Coerência e Índice de complexidade das redes - no 1.º e no 2.º momento de recolha de dados - a variável género não foi discriminatória, isto é, estas diferentes medidas apresentaram valores estatisticamente iguais entre rapazes e raparigas (Secções 5.1.4.1. e 5.2.4.1.).

Em relação ao ano de escolaridade, e nos dois momentos de recolha de dados, de todas os indicadores considerados somente a variável Coerência das redes mantém valores estatisticamente diferentes, em ambos os momentos de recolha de inquirição, aumentando este valor dos estudantes do 9.º ano para o 12.º ano de escolaridade (Secções 5.1.4.2. e 5.2.4.2.).

- ***Obj.Esp.$_5$*** – Analisar a evolução da organização conceptual do conceito de Probabilidade à medida que os alunos avançam na escolaridade;
  - ***Perg.$_3$*** - São estes conceitos sempre os mesmos ou mudam de acordo com o nível de aprendizagem?

Uma análise transversal dos resultados, considerando as várias redes PFNET do 9.º ano no 1.º momento e as do 12.º ano, no 2.º momento, constatamos que "Experiência aleatória" (Igualmente distribuída como NE, NP e CN), "Lei dos Grandes Números" (NE), "Probabilidade" (CN), "Quociente" (NE), "Técnicas de contagem de casos" (NE) e "Valor numérico (NE)" não variam a sua respetiva tipologia. O "Acaso" inicia com alguma indefinição ao nível do tipo de conceito, no entanto define-se no 12.º ano como NE. Com os termos "Acontecimento" e "Lei (ou regra) de Laplace" é exatamente o contrário. Os "Casos possíveis e os favoráveis" no 9.º ano (1.º momento) surge distribuído igualmente pelas diferentes tipologias, no entanto consolida-se no ano terminal do secundário (2.º momento) como Conceito Nuclear (Secção 5.3.).

Os vários indicadores quantitativos das redes PFNET, tanto das raparigas como dos rapazes do 1.º para o 2.º momento de recolha de dados, apresentam valores estatisticamente iguais (Secções 5.3.2.1. e 5.3.2.2.).

Os mesmos indicadores das PFNET, relativos tanto ao 9.º ano, do 1.º para o 2.º momento de recolha de dados, como ao 12.º ano, nestes mesmos instantes, apresentam valores estatisticamente iguais (Secções 5.3.2.3. e 5.3.2.4.).

Ao comparamos, estes mesmos indicadores, entre o 9.º ano (1.º momento) e o 12.º ano (2.º momento) constatamos que, com exceção da variável Número de nós polares, cujo valor é maior no 12.º ano (2.º momento), todas as outras variáveis apresentam valores estatisticamente semelhantes (Secção 5.3.3.).

- ***Obj.Esp.$_6$*** – Identificar potenciais Conceitos *Threshold* presentes na organização conceptual dos estudantes dos 9.º e 12.º anos de escolaridade, em relação ao conceito de Probabilidade.

- ***Perg.*$_6$** – Quais são os potenciais Conceitos *Threshold* presentes na organização conceptual dos estudantes dos 9.º e 12.º anos, em relação à noção de Probabilidade?

O conceito mais complicado/difícil de entender simultaneamente no 9.º ano como no 12.º ano de escolaridade foi a "Lei dos Grandes Números" (9.ºano – 60; 12.º ano - 33). Daqui resulta que o conceito que parece perpetuar-se no tempo como o mais difícil de entender em ambos os anos de escolaridade, é a "Lei dos Grandes Números". Pelo facto de ser uma noção problemática, complicada e difícil de entender, constitui um candidato a ser um potencial Conceito *Threshold* (Secção 5.4.1.).

Todavia, o questionário utilizado não evidenciou que esta noção verificava também as outras características associadas a este tipo de conceito, ou seja, Transformadora, Integradora, Irreversível e Limitadora (Secções 5.4.2. e 5.4.3.).

- ***Obj.Esp.*$_7$** – Relacionar os potenciais Conceitos *Threshold* com as diferentes tipologias dos conceitos presentes nas redes associativas Pathfinder, à luz da Teoria dos Conceitos Nucleares.
- ***Perg.*$_7$** – Será que existe alguma relação entre os potenciais Conceitos *Threshold* e as diferentes tipologias dos conceitos presentes nas redes associativas Pathfinder, à luz da Teoria dos Conceitos Nucleares?

A existência de uma correlação positiva e significativa da frequência com que são referidos os potenciais Conceitos *Threshold* (CT) e os nós extremidade, tanto no 9.º ano, como para o total de alunos, pelo que quanto mais alunos referem um CT mais alunos também o referem como nó extremidade. No 12.º ano esta correlação, apesar de positiva, é baixa e não significativa. A presença de valores de correlações baixas negativas da frequência com que são referidos os Conceitos *Threshold* e os nós polares tanto no 9.º ano, como no 12.ºano, como no total, todavia todos estes valores não são significativos. Há correlações negativas e significativas da frequência com que são referidos os potenciais Conceitos *Threshold* e os Conceitos Nucleares tanto no 9.º ano, como para a totalidade de estudantes, sendo que quanto mais alunos referem um CT menos alunos referem-no como Conceito Nuclear. No 12.º e apesar do coeficiente indicar uma correlação moderada negativa, esta não é significativa. Os valores da correlação de *Spearman* são negativos e demonstrativos de uma correlação moderada negativa entre as variáveis e o número médio de ligações das redes PFNET, todavia só é significativa para a totalidade dos alunos. Estes valores indicam que quanto mais alunos mencionam determinado termo como potencial CT, menor é o valor médio do número de ligações desse conceito na rede PFNET (Secção 5.4.4.).

Analogamente verificamos a existência de uma correlação alta negativa e significativa da frequência com que são referidos os conceitos mais fáceis (CF) e os nós extremidade tanto no 9.º ano, como para o total de alunos, sendo que quanto mais alunos referem um CF menos alunos também o referem como nó extremidade. No 12.º ano esta correlação moderada também é negativa. Verifica-se também valores de correlações baixas positivas da frequência com que são referidos os conceitos mais fáceis e os nós polares tanto no 9.º ano, como no 12.º como para o total de alunos, no entanto estes valores não são significativos. Finalmente, correlações altas positivas e significativas da frequência com que são referidos os conceitos mais fáceis e os Conceitos Nucleares, tanto no 9.º como no 12.º ano como para a totalidade dos alunos, sendo que quanto mais alunos referem um conceito como fácil, também mais alunos referem-no como Conceito Nuclear. Há, assim, uma tendência para que os Conceitos Nucleares sejam também os conceitos mais fáceis de os alunos entenderem (Secção 5.4.4.).

Estas últimas conclusões parecem-nos ser, de algum modo, expectáveis, já que, por definição, o Conceito Nuclear é aquele que se destaca pela sua relevância (dada através do número de ligações estabelecidas nas PFNET) na representação da estrutura cognitiva, pelo que os estudantes ponderam muito as relações estabelecidas com ele e, por esta razão, reconhecem-no como importante, acessível e fácil. Por oposição, o nó extremidade ainda não se encontra devidamente consolidado na estrutura cognitiva, por considerá-lo difícil e problemático e os estudantes manifestam este facto relacionando-o fracamente com os restantes conceitos.

6.2 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS FACE AO MARCO TEÓRICO ADOTADO

Nesta secção iremos, a partir dos resultados numéricos e das várias representações utilizadas (gráficos, redes, tabelas), efetuar a interpretação dos factos à luz da Teoria dos Conceitos Nucleares (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2003, 2004) e dos Conceitos *Threshold* (Meyer e Land, 2005).

1 – Organização geográfica do conhecimento:

Verificamos que ao longo do processo de aprendizagem da noção de Probabilidade, existem Conceitos Nucleares, que surgem representados nas redes como nós com mais de duas ligações (nós nucleares).

Em geral, podemos comprovar que os alunos ao longo da sua escolarização mantêm um número reduzido de conceitos como nucleares nas suas representações da estrutura cognitiva sobre a Probabilidade, assim como da manutenção de algumas relações que estabelecem com outros termos e que se conservam e preservam no tempo (Probabilidade↔Acontecimento; Probabilidade↔Casos possíveis e favoráveis; Probabilidade↔Lançamento de dados/moedas; Probabilidade↔Lei dos Grandes Números).

Apesar do incremento, natural, da dificuldade dos conteúdos do 9.º ano para o 12.º ano, os Índices de Complexidade das Redes, para o Ano de Escolaridade, nos dois momentos de inquirição, apresentam valores estatisticamente semelhantes, o que é numericamente demonstrativo da inexistência de um aumento de complexidade das PFNET. O mesmo acontece para o ICR de acordo com Género e em ambos os momentos de recolha de dados. Este facto evidencia que no ano escolar em que os alunos aprofundam a temática das Probabilidades a respetiva estrutura cognitiva não se torna mais complexa, privilegiando relações já existentes/consolidadas.

Uma análise mais transversal permite-nos afirmar que, excluindo o número de nós polares, que aumenta do 9.º ano (1.º momento) para o 12.º ano (2.º momento), todos os restantes indicadores quantitativos das PFNET apresentam valores estatisticamente semelhantes.

Outra particularidade do conhecimento geográfico diz respeito à vista do conjunto e que se manifesta através da Similaridade das redes *Pathfinder* cujo índice mostra um conjunto de ligações que, como já aludimos anteriormente, se mantêm ao longo do tempo.

2 – Conceitos Nucleares e Conceitos *Threshold*

No que respeita à identificação de Conceitos Nucleares, mostrou-se que aquele que se perpetua no tempo é o conceito mais geral "Probabilidade", facto que não nos parece despropositado já que constitui o objeto matemático em estudo e que os alunos parecem valorizar mais.

Todavia, e no 12.º ano, emerge um outro Conceito Nuclear "Casos possíveis e favoráveis" o que, na nossa opinião, se prende com reconhecimento da importância que os alunos atribuem à utilização do Cálculo Combinatório para determinar e contar estes casos. Apesar dos alunos no 9.º ano de escolaridade determinarem o número de casos possíveis e casos favoráveis à custa de tabelas de dupla entrada, de diagramas de árvore ou através da

enumeração individual dos casos, no ano terminal do ensino secundário é maior a complexidade que se reveste nesta contagem, sendo necessária a utilização desta técnica Matemática.

Ficou também demonstrada a tendência para que os Conceitos Nucleares sejam também os conceitos mais fáceis de os alunos entenderem e por esta razão não poderem ser considerados potenciais Conceitos *Threshold,* à luz do definido por Meyer e Land (2005). No entanto existe uma relação significativa forte e positiva com que são referidos os potenciais Conceitos *Threshold* e os nós extremidade das PFNET. Parece-nos que pelo facto de os nós extremidade ainda não estarem devidamente consolidados na estrutura cognitiva dos estudantes não invalida que, pela importância de alguns deles ("Lei dos Grandes Números"), se deva investir de um modo mais profícuo no seu processo de Ensino/Aprendizagem.

3 – Os caminhos de custo mínimo

A Teoria dos Conceitos Nucleares estabelece que quando se atinge um mais elevado nível de conhecimento numa dada área, privilegia-se um conjunto de ligações entre conceitos, tornando a estrutura cognitiva mais simples. Apesar de no nosso trabalho não termos detetado diminuição do Índice de Complexidade das Redes, este também não aumentou mantendo-se, estatisticamente semelhante.

4 - As Redes Associativas Pathfinder

Consideramos que as redes PFNET obtidas constituem uma excelente aproximação da estrutura cognitiva dos alunos. A metodologia associada às redes associativas *Pathfinder* permitiu-nos, sem intervenção externa, obter uma representação visual, aliada a um conjunto de indicadores quantitativos que nos forneceram indicações sobre a organização dos conceitos em torno da noção de Probabilidade dos estudantes, salientando-se aqueles mais fortemente consolidados - Conceitos Nucleares – e aqueles que ainda não se encontram devidamente incorporados na estrutura cognitiva - nós extremidade -, assim como as relações estabelecidas entre os termos e que se perpetuam ao longo do tempo.

Alguns destes nós extremidade (potenciais Conceitos *Threshold*), apesar de surgirem na periferia das redes e com poucas ligações, são no entanto considerados os mais difíceis de entender pelos estudantes, constituindo conteúdos complicados e problemáticos de entender mas que quando compreendidos eles são transformadores no desenvolvimento da aprendizagem.

Apesar de não conhecermos estudos da aplicação específica destas Teorias à temática das Probabilidades, todavia, alguns destas conclusões estão patentes em investigações aplicadas a outros assuntos matemáticos. Podemos encontrar em Casas (2002), Antunes (2011) e Catarreira (2013), a constatação da existência de um número reduzido de Conceitos Nucleares presentes na estrutura cognitiva e sobre os quais os alunos centram o seu conhecimentos. Nas pesquisas destes mesmos autores, verificou-se também um não aumento do Índice de Complexidade das PFNET, a existência de ligações que se mantêm no tempo e a constatação da relevância da metodologia das redes PFNET no processo de Ensino e Aprendizagem.

Por outro lado a identificação do potencial Conceito *Threshold* "Lei dos Grandes Números" vem mostrar a consideração que este conceito, enquanto uma dos modos de descobrir probabilidades (Gal, 2005) através de procedimentos e algoritmos (Batanero, 2005), assume enquanto elemento de "*(…)de hacer inferencias que conecten los enfoques subjetivo, clásico y frecuencial*" (Sánchez e Valdez, 2013)

6.3. CONTRIBUTOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

A Teoria dos Conceitos Nucleares, enquanto nova proposta didática, constitui, na nossa opinião, um referencial pedagógico rico e fecundo e que deve ser levado em consideração no processo de ensino e aprendizagem. Ao possibilitar a identificação dos conceitos mais significativos e as relações mais relevantes na estrutura cognitiva dos alunos, estamos convictos que temos uma outra ferramenta didática para organizar a prática pedagógica.

A metodologia das Redes Associativas Pathfinder constitui uma técnica simples, de fácil implementação em contexto de sala de aula e que permite com celeridade aceder às representações da estrutura cognitiva dos estudantes sobre, não só, conteúdos ligados às Probabilidades, mas inclusive de outras temáticas matemáticas.

Um outro aspeto relevante, prende-se com a análise das representações da organização concetual, dadas através das PFNET. Nestas podemos identificar os conceitos, considerados pelos alunos como os mais relevantes e sobre os quais estes constroem o seu conhecimento – Conceitos Nucleares. As relações estabelecidas entre os vários conceitos nas redes PFNET são também uma fonte valiosa de informação, já que permite consolidar as mais pertinentes e atenuar aquelas que se apresentam desacertadas.

Acresce ainda que, o professor com esta metodologia consegue ter uma visão mais lata e, consequentemente, identificar com maior facilidade as conceções menos corretas dos estudantes, o que lhe permite desenvolver estratégias que conduzam, mais facilmente, ao sucesso educativo.

Todavia, e para além da importância reconhecida dos Conceitos Nucleares, a mais-valia do presente trabalho prende-se com a necessidade de atribuir-se alguma relevância a outra tipologia de conceitos que surgem nas redes PFNET – os nós extremidade.

Estes, por definição, são conceitos que ainda não estão devidamente consolidados na estrutura cognitiva dos alunos, no entanto pela dificuldade manifestada pelos alunos na sua compreensão, expressa através da fraca relação que estabelecem com outros conceitos, podem, porém, constituir noções fundamentais para um melhor entendimento de um determinado tema – Conceito *Threshold*.

No nosso trabalho conseguimos detetar como potencial Conceito *Threshold* a "Lei dos Grandes Números" e, ainda, mostrar a relação existente entre os nós extremidade das PFNET e os conceitos mais difíceis/complicados de entender (potenciais Conceitos *Threshold*). Consideramos que para os estudantes alcançarem um nível adequado de compreensão sobre a Probabilidade, estes devem ser capazes de estabelecerem conexões que relacionem os seus diferentes significados. Nesta lógica opinamos que a "Lei dos Grandes Números", pela sua proficuidade em estabelecer pontes entre as diferentes conceções de Probabilidade (Laplaciana, Frequencista e Subjetiva), deve ser uma noção mais abordada com mais profundidade no 9.º ano de escolaridade e reforçado o seu ensino e aprendizagem no ano terminal do ensino secundário /12.º ano).

Consideramos ainda, que é necessário mais investigação, em particular com alunos jovens, para fundamentar melhor a identificação e implicações dos Conceitos *Threshold* para a Teoria das Probabilidade.

6.4. LIMITAÇÕES E PERSPETIVAS DE FUTURAS DE INVESTIGAÇÃO

Apesar de sempre termos pautado esta nossa pesquisa com base na idoneidade dos instrumentos utilizados e na seriedade da recolha de dados efetuada, temos consciência, no final desta investigação, de alguns constrangimentos que não equacionamos no início deste nosso trabalho.

A primeira destas limitações prendeu-se com o questionário utilizado para detetar os potenciais Conceitos *Threshold*. Se é verdade que este instrumento de recolha de dados permitiu-nos obter conclusões valiosas, consideramos agora que deveria ter havido o estabelecimento de uma correspondência entre as redes PFNET produzidas pelos alunos e as respostas dadas pelos estudantes ao questionário. Estamos convictos que, havendo a criação desta relação, a riqueza da informação obtida cresceria exponencialmente. Para além deste aspeto, alguns dos itens utilizados neste instrumento de recolha de dados, podem, e devem, ser reformulados e o questionário ser aplicado a um maior número de alunos.

Uma outra limitação, refere-se ao acesso à obtenção de dados. Apesar de quase a totalidade dos estabelecimentos de ensino não terem colocado entraves à recolha de dados, em algumas das turmas houve dificuldades nesta inquirição, o que levou que esta fase da investigação se arrastasse no tempo.

Este estudo abriu novos caminhos de investigação que sugerem pesquisas futuras, relacionadas com novos conteúdos, com diferentes participantes e até com novas metodologias, e que descrevemos de seguida:

1- Estudar as representações das estruturas cognitivas dos professores sobre o conceito de Probabilidade.

Como organizam concetualmente, os professores em exercício, as suas estruturas cognitivas em torno do conceito de Probabilidade?

2 – Comparar a estrutura cognitiva de aluno e professores sobre o conceito de Probabilidade, com base na Teoria dos Conceitos Nucleares.

Que semelhanças e diferenças apresentam as representações das estruturas cognitivas de alunos e professores, com base na TCN?

3 – Identificar potenciais Conceitos *Threshold* comuns a alunos e Professores.

Será que os Conceitos *Threshold* identificados nos alunos, coincidem com os mesmos Conceitos *Threshold* dos professores?

4 – Indagar da possível relação entre as diferentes tipologias dos conceitos das PFNET e os Conceitos *Threshold* na representação da estrutura cognitiva de professores em exercício e futuros professores.

Como organizam os professores em exercício e os futuros professores as suas conceções em torno do conceito de Probabilidade e será que existe alguma relação entre os conceitos mais/menos relevantes dessa conceção e os Conceitos *Threshold*?

5 – Analisar a possibilidade de outras técnicas e metodologias que permitam sustentar a relação entre as diferentes tipologias dos conceitos das PFNET (NE, NP e CN) e os Conceitos *Threshold*.

Existirão outras técnicas e metodologias que possam ser aplicadas para corroborar da relação entre NE, NP e CN e os Conceitos *Threshold*?

6 – Estudar a relação entre as diferentes tipologias dos conceitos das PFNET e os Conceitos *Threshold* a outras temáticas da Didática da Matemática?

Será que a relação entre as diferentes tipologias dos conceitos das PFNET e os Conceitos *Threshold* se verifica em outros temas da Didática da Matemática (Geometria, Álgebra, entre outros).

No final deste trabalho, e apesar das dúvidas e dificuldades que uma investigação com este cariz sempre acarreta, é gratificante reconhecer a aprendizagem que esta pesquisa produziu no seu autor, pois como afirma Quivy e Campenhoudt "*É um caminhar para um melhor conhecimento e deve ser aceite como tal, com todas as hesitações, os desvios e as incertezas que isso implica".*

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática – A experiência do Projecto Mat789*. Tese de doutoramento. Lisboa: APM.

Abrantes, P. (2001). *Reorganização Curricular do Ensino Básico: Princípios, Medidas e Implicações*. Lisboa: Ministério da Educação - DEB.

Abrantes, P. & Araújo (coord.) (2002). *Reorganização Curricular do Ensino Básico: Avaliação das Aprendizagens*. Lisboa: Ministério da Educação – DEB.

Aguirre, L. (2008). *Enseñanza y Aprendizaje de la Función Cuadrática utilizando um Simulador Geométrico desde el Enfoque de la Teoria de los Conceptos Nucleares*. Trabalho final de Master. Badajoz: Universidade de Extremadura.

Alexander, D. & Bueno, F. (2013). Técnicas Monte Carlo para la enseñanza de la estadística. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 579-586. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Alsina, C. (2010). *A seita dos números – O teorema de Pitágoras*. Espanha: RBA Coleccionables S.A.

Almeida, A. (2008). *O contributo da Avaliação Formativa/Formadora na Facilitação da Aprendizagem Significativa da Matemática.* Tese de Mestrado. Lisboa: Universidade Aberta.

Almeida, C. (2011). *O contributo das Redes Associativas Pathfinder à avaliação das aprendizagens em Matemática: Aplicação aos exames de Matemática da 1.ª chamada do 9.ºano de escolaridade do Ensino Básico português.* Trabalho Final de Master. Badajoz: Universidade de Extremadura.

Almeida, C., Casas, L. & Luengo, R. (2013). A organização conceptual dos estudantes, dada através das Redes Associativas Pathfinder, do conceito de Probabilidade: Um estudo com alunos do 9.º ano de Escolaridade do Ensino Básico Português. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 83-90. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Anasagasti, A. & Berciano, A. (2013). Prueba exploratoria sobre competencias de futuros maestros de Primaria: Conocimiento del bloque relativo al tratamiento de la información, azar y probabilidad, en el currículo escolar de Matemáticas. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 531-538. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Antunes, A. (2010). *Estructura Cognitiva y Conceptos Nucleares en la Enseñanza/Aprendizaje de la Trigonometría: Estudio Comparativo Realizado con Alumnos del 10.º al 12.º Año de Enseñanza Secundária a través de la Aplicación de Diferentes Metodologías*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidade de Extremadura.

Antunes, F. & Dantas, L. (2010). Sistematização do conhecimento declarativo em educação física escolar de 5.ª à 8.ª séries do ensino fundamental. *Revista Brasileira de Educação Física e Esporte*, 24(2), 205-221.

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. (1ª ed.). Lisboa: APM.

APM, (1998). *Matemática 2001 – Diagnóstico e Recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática & IIE.

Arias, J. (2008). *Evaluación de la Calidad de Cursos Virtuales: Indicadores de Calidad y Construcción de un Cuestionario de Medida. Aplicación al Ámbito de Asignaturas de Ingeniería Telemática*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidade de Extremadura.

Ausubel, D., Novak, J. & Hanesian, H. (1978) *Psicologia educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: EditoraTillas.

Azcárate, P. (1996*). Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Editorial COMARES.

Azcárate, P. & Cardeñoso, J. & Serradó, A. (2004). "Hazard's treatment" in secondary school. *Actas do European Research in Mathematics Education III*. Itália: University of Pisa.

Azcárate, P. & Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.

Azcárate, P. & Cardeñoso, J. & Serradó, A. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO*. Revista Tarbiya*, 38, 91-112.

Bardin, L. (2009). *Análise de conteúdo* (4.ª ed.). Lisboa: Edições 70.

Barrantes, M. & Blanco, L. J. (2004) Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para Maestro sobre la geometría Escolar. *Enseñanza de las Ciencias,* 22 (2), 241-250.

Batanero, C., Green, D. & Serrano, L. (1998). Randomness, its meanings and educational implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(1), 113-123.

Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales ¿Qué Contenidos se Debe Enseñar en la Clase de Probabilidad**?.** In Fernandes, J., Sousa, M. & Ribeiro, S. (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola,* 9-30. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Batanero, C., Díaz Godino, J. & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal os Statistics Educacion*, 12 (1).

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidade en la educación secundaria. *Relime - Revista Latinoamericana de Investigação en Educación en Matemática Educativa*, 8(3) 247-263.

Batanero, C. & Henry, M. & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G.A.Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 15-37. Nova Iorque, USA: Springer.

Batanero, C. & Sanchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability?. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 241-266**.** New York, USA: Springer.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafio educativo. Em P. Flores y J. Lupiáñez (Eds), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística e azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Batanero, C. & Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. Ponencia Invitada en *las XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Granada: Espanha.

Batanero, C. (2009). Retos para la formación Estadistica de los Professores. *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação.

Batanero, C., Ruiz, B. & Arteaga, P. (2009). Comparación de distribuiciones: Una actividad sencilla para los futuros professores?. *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação.

Batanero, C., Fernandes, J. & Contreras, J. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Revista SUMA*, 62, 11-18.

Batanero, C., Arteaga, P., Ruiz, B. & Roa, R. (2010). Assessing pre-service teachers conceptions of randomness through project work. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society*. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics. Ljubljana: Slovenia

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L. & Contreras, J. (2012). Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de Educación Primaria. *Journal of Research in Mathematics Education*, 1(3), 222-245.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M. (2012). *Metas curriculares do Ensino Básico – Matemática*. Lisboa: MEC.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M., Damião, H. & Festas, I. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática- Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Blanco, L. (2005). El Informe PISA como instrumento de evaluación del sistema educativo. *La Gaceta de la RSME*, 8(3), 713 – 724.

Boustedt, J., Eckerdal, A., McCartney, R., Moström, J., Ratcliffe, M., Sanders, K. & Zander, K. (2007). Threshold Concepts in Computer Science: Do they exist and are they useful?. *SIGCSE '07 - Proceedings of the 38th SIGCSE technical symposium on Computer science education*, 504 – 508.

Boyer, C. (1974). *História da Matemática*. Brasil: Editora Edgard Blücher Ltd.

Brown, J. (2011). Likert items and scales of measurement?. *Testing & Evaluation SIG Newsletter*, 15(1) 10-14.

Bulmer, M., O'Brien, M. & and Price, S. (2007). Troublesome concepts in statistics: a student perspective on what they are and how to learn them. *Proceedings of the Assessment in Science Teaching and Learning Symposium,* September, 9-15. Sydney: University of Sydney.

Caldeira, S. (2009). *A estatística e as probabilidades no ensino secundário: Análise dos programas de Matemática A e B na perspectiva do professor e dos alunos*. Tese de Mestrado. Lisboa: Universidade de Lisboa

Câmara, M. (2001). Inteligência artificial: representação do conhecimento. *Disciplina de Comunicação Técnica Profissional*. Coimbra: Departamento de Engenharia Informática da Universidade de Coimbra.

Campanario, M. & Otero, J. (2000). La Comprensión de los Libros de Texto. Em Perales Palacios & Cañal. P. (Ed), *Didáctica de las Ciências Experimentales*, 323-338. Alcoy: Editorial Marfil, S.A.

Cantero, A. (2013). Análisis de la presentación de la probabilidad condicionada en libros de texto de 2º de bachillerato. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 105-112. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Carvalho, B. (2009). O trabalho colaborativo de duas professoras de Matemática no ensino dos arranjos completos. *Atas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação.

Carvalho, J. (2011). *Estudio de las posibilidades de aplicación a la enseñanza de la Matemática del entorno PmatE: Validación y aportaciones en 1.ºciclo de Enseñanza Básica de Portugal*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidade de Extremadura.

Carvalho, J., Casas, L. & Luengo, R. (2012). Estudio de la estructura cognitiva: mapas conceptuales versus redes asociativas Pathfinder. In Cañas, A., Novak, J. & Vanhear, J. (Eds.), *Fifth International Conference on Concept Mapping*. Malta: Valletta.

Casas, L. & Luengo, R. (1999). La Exploroción de la Estructura Coceptual en los alumnos. Um Método Empírico: las Redes Asociativas Pathfinder. *Campo Abierto, Revista de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura*, 16, 13-33.

Casas, L. (2002). *El Estudio de la Estructura Cognitiva de Alumnos a Través de Redes Asociativas Pathfinder. Aplicaciones y Posibilidades en Geometria*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidade de Extremadura.

Casas, L. & Luengo, R. (2003). Redes Asociativas Pathfinder y Teoria de los Conceptos Nucleares. Aportaciones à la Investigación em Didáctica de las Matemáticas. Em E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, & A. Vallecinos (Eds). *Investigación en Educación*

Matemática. VII Simposio de la Sociedade Española de Investigación em Educación Matemática (SEIEM). 179-188. Granada: Universidade de Granada.

Casas, L. & Luengo, R. (2004). Representación del Conocimento y Aprendizaje. Teoria de los Conceptos Nucleares. *Revista Española de Pedagogia R.E.P.* Ano LXII, 227, 59-84.

Casas, L. & Luengo, R. (2005). Conceptos Nucleares en la Construcción del Concepto de Ángulo. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(2), 201–216.

Casas, L., Luengo, R. & Godinho, V. (2011). Software GOLUCA: Knowledge Representation in Mental Calculation. *US-China Education Review*, 4,592-600.

Casas, L., Boza, M., Godinho, V. & Catarreira, S. (2012). Representación del conocimiento: redes asociativas pathfinder como alternativa a mapas conceptuales en educación infantil. In Cañas, A., Novak, J. & Vanhear, J. (Eds.), *Fifth International Conference on Concept Mapping*. Malta: Valetta.

Casas, L. & Luengo, R. (2012) The study of pupil´s cognitive structure: the concept of angle. *European Journal of Psycology of Eductation*. DOI: 10.1007/s10212-012-0119-4.

Casas, L., Godinho, V., Luengo, R., Verissimo, S. & Torres, J. (2012) Theory of Nuclear Concepts, a new approach to understand and represent cognitive structures. En Pumilla, P. *et al*., *Didactic Strategies and Technologies for Education: Incorporating Advancements*, *IGI Global: Hershey*, 591-604.

Casas, L., Luengo, R., Canchado, M. & Torres, J. (2013). Una experiencia de representación del conocimiento en Educación Infantil mediante el uso de Redes Asociativas Pathfinder. *Revista de Educación a Distancia (RED)*, 36.

Catarreira, S. (2013). *A introdução das ideias da Teoria dos Conceitos Nucleares no ensino da Geometria e as suas implicações.* Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidade de Extremadura.

Chen, C. (2004). Searching for intellectual turning points: Progressive knowledge domain visualization. *PNAS*, 101(1), 5303–5310.

Chernoff, E. & Zazkis, R. (2011). From personal to conventional probabilities: from sample set to sample space. *Educ Stud Math*, 77, 15–33.

Clariana, R. & Wallace, P. (2006). A comparison of pair-wise, list-wise, and clustering approaches for eliciting structural knowledge. *International Journal of Instructional Media*, 36 (3).

Clariana, R., Wallace, P. & Godshalk, V. (2009). Deriving and measuring group knowledge structure from essays: The effects of anaphoric reference. *Education Tech Research Dev*, 57,725–737.

Clariana, R. (2010). Deriving Individual and Group Knowledge Structure from Network Diagrams and from Essays. Em Ifenthaler, D. *et al.* (Eds.), *Computer-Based Diagnostics and Systematic Analysis of Knowledge.*

Clariana, R., Draper, D. & Land, S. (2011). An automated measure of group knowledge structure convergence. Apresentação na *Annual Meeting of the Association for Educational Communications and Technology*. Jacksonville: EUA.

Clariana, R., Engelmann, T. & Yu, W. (2013). Using centrality of concept maps as a measure of problem space states in computer-supported collaborative problem solving. *Education Tech Research,* 61, 423–442.

Cobo, B. & Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5–18.

Conceição, A. & Almeida, M. (2012). *Matematicamente Falando – 9.º ano*. Porto: Areal Editores.

Contreras, J., Batanero C. & Fernández, J.(2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall. In Serrano, L. (ed) *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica,* 179-188. Granada: Universidade de Granada.

Contreras, J. (2011*). Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tese de Doutoramento. Granada: Universidade de Granada.

Corcho, P., Casas, L. & Luengo, R. (2012). Utilización conjunta de Mapas Conceptuales y Redes Asociativas Pahtfinder en profesores y estudiantes de grado de primaria. In Cañas, A. , Novak, J. & Vanhear, J. (Eds.), *Fifth International Conference on Concept Mapping*. Malta: Valletta.

Costa, B. & Rodrigues, A. (2012). *Novo Espaço (parte 1) 9.º ano*. Porto: Porto Editora.

Cousin, G. (2006). An introduction to threshold concepts. *Planet*, 17, 4-5.

Cousin, G. (2010). Neither teacher-centred nor student-centred: threshold concepts and research partnerships. *Journal of Learning Development in Higher Education.*

Coutinho, C. (1994). *Introdução ao conceito de Probabilidade por uma visão frequêncista: Estudo Epistemológico e Didáctico*. Tese de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: Brasil.

Coutinho, C. (2005) Probabilidade geométrica: um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri. *Educação Matemática Pesquisa*, 7(2), 185-199.

Crato, N. (2006). *Desastre no ensino da Matemática: Como recuperar o tempo perdido*. Lisboa: Edições Gradiva.

Curtis, M. & Davis, M. (2003). Assessing knowledge structure in accounting education: an application of Pathfinder Associative Networks. *Journal of Accounting Education*, 21, 185–195.

D'Ambrósio, U. (1996*). Da realidade à ação: Reflexões sobre a educação e matemática*. Campinas: Unicamp.

Davies, P. (2003). Threshold Concepts: how can we recognise them?. Paper apresentado em *EARLI Conference*, August 26 – 30th. Itália: Padova.

Davies, P. & Mangan, J. (2005). Recognising Threshold Concepts: an exploration of diferente approaches*.* Paper apresentado *em EARLI Conference* August 23st. Chipre: Nicosia.

Davies, P. & Mangan, J. (2006a*).* Embedding Threshold Concepts: from theory to pedagogical principles to learning activities. Paper apresentado em *Threshold Concepts within the Disciplines - Symposium*, 30th August- September 1st. Glasgow: Escócia.

Davies, P. & Mangan, J. (2006b*).* Trajectories of students' learning: threshold concepts and subject learning careers*.* Paper apresentado na *Annual Conference of the Society for Research in Higher Education*, University of Brighton, 13th-15th December. Brighton: Reino Unido.

Davies, P. & Mangan, J. (2007). Threshold concepts and the integration of understanding in economics. *Studies in Higher Education*, 32(6), 711-726.

DEB, (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação - DEB.

DEB, (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Delgado, A. (2000). Teorema de Pitágoras: originalidade de las demonstraciones de E. García Quijano (1848). *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 3(2), 277-296.

Decreto-lei n.º 39807, de 7 de Setembro de 1954. Programas das disciplinas do Ensino Liceal. 1ª Série – n.º 198/54. Ministério da Educação Nacional - Direcção-Geral do Ensino Liceal.

Decreto-Lei nº 42994, de 28 de Maio de 1960. Programas do Ensino Primário. Diário do Governo, 1ª Série - nº 125. Lisboa: Imprensa Nacional.

Decreto-Lei n.º 43/2007 de 22 de Fevereiro de 2007. Diário da República, 1.º série—n.º 38. Lisboa: Ministério da Educação.

Díaz, C. & Fuente, I. (s.d.). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicologia. Consulta em 24 de junho de 2013 e disponível em http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/edumatematDiazFuente.pdf.

Díaz, C. (2009a). Sesgos en Probabilidad Condicional e Implicaciones para la enseñanza. *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga. Centro de Investigação em Educação.

Díaz, C. (2009b). Probabilidad condicional: sesgos e implicaciones para la enseñanza de la estadística. In Romero, L. (Eds), T*endencias actuales de la investigación en educación estocástica,* 35-55. Granada: Universidad de Granada.

Díaz Godino, J. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355**.**

Díaz Godino, J. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority área of research in Mathematics Education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics education as a research domain: A search for identity*, 177-195. Netherlands: Kluwer.

Díaz Godino, J. & y Batanero, C. (2009*).* Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. In Serrano, L. (Ed.) *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica,* 9-34. Granada: Universidad de Granad.

Díaz Godino, J. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico matemático de professores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 1-16. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86.

Dunne, T., Low, T. & Ardington, C. (2003). Exploring Threshold concepts in basic Statistics, using the Internet. Comunicação apresentada na *IASE Satellite Conference On Assessing Student Learning in Statistics*. Berlin: Germany.

Easdown, D. (2007). The role of proof in mathematics teaching and The Plateau Principle Proceedings of the Assessment. In *Science Teaching and Learning Symposium,* University of Sydney, September, 28-33.

Ernst, M. (2011). Active learning? not with my syllabus!. *Teaching Statistics Trust*, 34(1), 21–24.

Faria, L., Almeida, P., Antão, C. & Ferreira, M. (2012*). Matemática Dinâmica (parte 1) – 9.º ano*. Porto: Porto Editora.

Feiteira, R. & Pires, M. (2008). Reflexões sobre os currículos de Matemática em Portugal. *UNIÓN- Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n.º 16, 183-196.

Feldman, L & and Morgan, F. (2003). The Pedagogy and Probability of the Dice Game HOG. *Journal of Statistics Education,* 11(2).

Fernandes, R. (s.d.). O Ensino da Matemática às Ciências e às Engenharias. Consulra em 13 de julho de 2013 e disponível em http://www.math.ist.utl.pt/~rfern/cim.html.

Fernandes, J. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: Uma Proposta de Ensino de Probabilidades no 9º Ano de Escolaridade*. Tese de Doutoramento. Braga: Universidade do Minho.

Fernandes, J. & Correia, P. (2013). Intuições de alunos do 9º ano em independência e probabilidade condicionada. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 19-38. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Fernandes, J., Vasconcelos, A. & Gonçalves, C. (2013). Potencialidades do uso da folha de cálculo na construção de tabelas e gráficos estatísticos. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 515-522. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Fernandes, C. & Ponte, J. (2013). O uso de simulações para desenvolver a noção de probabilidade e capacidade de resolução de problemas. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 497-504. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht, Holanda: Reidel.

Fuentes, J. & Aranzabal, J. (2009). Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la universidad basada en la investigación didáctica*. Educación Matemática*, 21(3),127-162. México: Santillana.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemas. Em Jones, G. (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 39-43.

García-Ligero, M.E., García-Ligero, M.J. & Román, P. (2009.) Una experiencia didáctica sobre probabilidad mediante un casino. *Revista Investigación Operacional*, 30(3), 266-278.

Gea, M., Batanero, C., Cañadas, G. & Arteaga, P. (2013). La organización de datos bidimensionales en libros de texto de Bachillerato. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 373-382. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godinho, V. (2007*). Implementação do software GOLUCA e aplicação à modificação de redes conceptuais*. Trabalho de DEA. Badajoz: Universidad de Extremadura.

Gómez, S. (2000). ¿Para qué enseñar fórmulas pudiendo enseñar procedimientos? Una propuesta didáctica para el tratamento de la Probabilidad en Bachillerato. *Revista SUMA*, 35, 55-62.

Gómez, E. & Contreras. J. (2013). Significados de la probabilidad en el currículo español para la educación primaria. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 571-578. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

González, J. & Guzmán, R. (2013). Desarrollo teórico del tema de combinatoria presente en algunos libros de texto de matemática de educación secundaria en España. En J. M.

Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 181-188. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Graça Martins, M. & Ponte, J. (2010). *Organização e tratamentos de dados*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Großschedl, J. & Harms, U. (2013). Assessing conceptual knowledge using similarity judgments. *Studies in Educational Evaluation*, 39, 71–81.

Guimarães, R. & Cabral, J. (1998). *Estatística*. Lisboa: Editora McGraw-Hill de Portugal Lda.

Haro, J. (2002). La probabilidad en los libros de texto. En Batanero, C. e Serrano, L. (Eds), *Grupo de Investigación en Educación Estadística da Universidad de Granada.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Hill, M. & Hill, A. (2002). *Investigação por questionário*. Lisboa: Edições Sílabo.

HodnikČadež, T. & Škrbec, M. (2011). Understanding the Concepts in Probability of Pre-School and Early School Children. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 7(4), 263-279.

Holloway, M., Alpay, E. & Bull, A. (2009). A Quantitative Approach to Identifying Threshold Concepts in Engineering Education. In *EE2010 conference*.

Houssaye, J. (2000).Théorie *et Pratiques de l'Education Scolaire: le triangle pédagogique* (3.ª ed). Editions Peter Lang.

Humphrey, R. & Simpson, B. (2012): Writes of passage: writing up qualitative data as a threshold concept in doctoral research. *Teaching in Higher Education*, 17(6),735-746.

Jiménez, M., Casas, L. & Luengo, R. (2010). Representación del conocimiento y percepción subjetiva del proceso de aprendizaje profesional: estudio cualitativo en personal de enfermería. *Viguera Editores SL, EDUC MED*, 13 (3), 163-170.

Jones, G. & Thornton, C. (2005). An Overview of research into the teaching and learning of Probability. In Graham A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and Learning*, 65-92.

Kahnernan, D., & Tversky, A. (1972). Subjective Probability: A judgement of representativeness. *Cognitive Psychology,* 3, 430-454.

Keeler, C. e Steinhorst, K. (2001). A New Approach to Learning Probability in the First Statistics Course. *Journal of Statistics Education*, 9(3).

Kempa, R. (1991). Student's learning difficulties in science. Causes and possible remedies. *Enseñanza de las Ciencias,* 9, 119-128.

KNOT Software, (1989). Interlink, Inc. P.O. Box 4086 UPB, Las Cruces, NM 88003-4086.

Koirala, H. (1995). *Conceptions of Probability held by preservice teachers of secundary school mathematics*. Tese de Doutoramento. Vancouver: The University of British Columbia.

Konold, C. (1988). *Understanding Students' Beliefs About Probability*. *Massachusetts - Scientific Reasoning Research Inst. Amherst: Institution Massachusetts University*.

Kudikyala, U. & Vaughn, R. (2005). Software requirement understanding using Pathfinder networks: discovering and evaluating mental models. *The Journal of Systems and Software*, 74, 101–108.

Lambert, J. (2004). *Technology Integration expertise in middle school social studies teachers: A study of multiplicity in thinking and practice*. Tese de Doutoramento. EUA: Faculty of North Caroline State University.

Langrall, C. & Mooney, E. (2005). Characteristics of elementary school Students' probabilistic reasoning. In Graham A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* 95-119.

Lecoutre, M., Rovira, K., Lecoutre, B. & Poitevineau, J. (2006). People's intuitions about randomness and probability: an empirical study. *Statistics Education Research Journal,* 5(1), 20-35.

Lei de Bases do Sistema Educativo – Lei 49/2005 de 30 de Agosto. Diário da República - I Série - A. Lisboa: Assembleia da República.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España: Una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH. *XVIII Encontro de Investigação em Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* (Portugal).

Loertscher, J. (2011). Threshold Concepts in Biochemistry. *Biochemistry and Molecular Biology Education* , 39(1), 56–57.

Lopes, C. (2008). O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Caderno Cedes*, 28(74), 57-73.

Lopes, J. (2011). Uma Proposta Didático-Pedagógica para o Estudo da Concepção Clássica de Probabilidade. *Bolema*, 24(39), 607-628.

Lopes, J. (2013). Una propuesta para la enseñanza del teorema de Bayes a través de un juego de dados y de resolución de problemas. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 601-608. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Lucas, U. & Mladenovic, R. (2007). The potential of threshold concepts: an emerging framework for educational research and practice. *London Review of Education*, 5(3), 237-248.

Luengo, R., Casas, L., Mendoza, M. & Arias, J. (2011). Possibilities of "Nuclear Concepts Theory" on Educational Research, a Review. *International Conference "The future of Education",* 16 - 17 June*. F*lorence: Italia.

Luengo, R. (2013). La Teoría de los Conceptos Nucleares y su aplicación en la investigación en Didáctica de las Matemáticas*. UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 34, 9-36.

Maanan, M. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre Probabilidad*. Tese de Doutoramento. Granada: Universidad de Granada.

Magro, F., Fidalgo, F. & Louçano, P. (2012). *PI – 9º ano (vol.1).* Porto: Edições ASA II, S.A.

Male, S. & Baillie, C. (2011). Threshold capabilities: an emerging methodology to locate curricula threshold*. Proceedings of the Research in Engineering Education Symposium*. Madrid: Espanha.

Maroco, J. & Garcia-Marques, T. (2006). Qual a fiabilidade do alfa de Cronbach? Questões antigas e soluções modernas?. *Laboratório de Psicologia*, 4(1), 65-90

Maroco, J. (2007). *Análise Estatística – Com utilização do SPSS (3.ª ed.)*. Lisboa: Edições Sílabo.

Martignon, L. & Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. Consulta em 11 de Maio de 2012 e disponível em http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/10_52_ma.pdf.

Masouros, S. & Alpay, E. (2010). Mathematics and online learning experiences: a gateway site for engineering students. *European Journal of Engineering Education*, 35(1), 59-78.

Matos, J. & Serrazina, M. (1996). *Didáctica da Matemática*. Universidade Aberta: Lisboa.

Mayén,S., Ortiz, J. & Díaz, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en el uso de la mediana. In Romero, L. (Eds) T*endencias actuales de la investigación en educación estocástica,* 75-94. Granada: Universidad de Granada.

McCartney, R. & Boustedt, J. & Eckerdal, A. & Moström, J. & Sanders, K. & Thomas, L. & Zander, C. (2009). Liminal spaces and learning computing. *European Journal of Engineering Education*, 34(4), 383-391.

McGaghie, W. (1996). Comparison of knowledge structures with the Pathfinder Scaling Algorithm. Paper apresentado na *The Annual Meeting of the American Research Association* (April, 8-12). Nova Yorque: EUA.

ME, (2003). Programa de Matemática A. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário.

ME, (2004). Programa de Matemática B. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário.

ME, (2004). Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais. Lisboa: Ministério da Educação: Departamento do Ensino Secundário.

Melo, T. (s/d). Relações Históricas entre os Jogos de Azar e a Probabilidade. Consulta em 01 de agosto de 2013 e disponível em http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/584/93.

Mercado, M. (2013). Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 309-318. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Merino, R, & Reyes, K. (2013). Comparación entre los contenidos del currículo chileno y español en el área de estadística y probabilidad. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 137-142. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Meyer, J. & Land, R. (2003). *Threshold Concepts and Troublesome Knowledge: Linkages to Ways of Thinking and Practising within the Disciplines*. Occasional Report 4, ETL Project. Scotland: University of Edinburgh.

Meyer, J. & Land, R. (2005). Threshold concepts and troublesome knowledge (2): Epistemological considerations and a conceptual framework for teaching and learning. *Higher Education*, 49 (3), 373–388.

Meyer, J. & Land, R. (eds) (2006). *Overcoming Barriers to Student Understanding: threshold concepts and troublesome knowledge.* London: Routledge.

Michels, J. (2009). *O processo ensino aprendizagem da tabuada: desvendando práticas e criando possibilidades*. Trabalho para obtenção do título de Especialista. Brasil: Universidade do Extremo Sul Catarinense.

Millán, E. (2013). Razonamiento Combinatorio y el currículo español. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *In Actas das I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 539-545. Universidade de Granada: Espanha.

Mises, R. (1952). *Probability, statistics and truth* (J. Neyman, 0. Scholl, & E. Rabinovitch, Tradução). London: William Hodge and company. (Trabalho original publicado em 1928).

Moreira, M. (1999). *Aprendizagem significativa*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

Murcho, D. (2006). Exames nacionais e sucesso escolar no ensino básico e secundário. Consulta em 31 de Maio de 2011 e disponível em http://criticanarede.com/ens_exames.html.

Muñoz, A. (1998). Algunas ideas preconcebidas sobre probabilidade. *Revista SUMA*, 29, 29-34.

Murteira, B. (1988). Estatística: *Inferência e Decisão*. Lisboa, Portugal: Imprensa Nacional – Casa da Moeda.

NCTM, (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM, (1999). *Normas para a avaliação em Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM, (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston.

Nemirovsky, I., Giuliano, M.,Pérez, S.,Concari, S., Sacerdoti, A. & Alvarez, M. (2009). Students' conceptions about probability and *accuracy. The Montana Mathematics Enthusiast,* 6(1 e 2), 41-46.

Neves, M., Silva, A., Raposo, M. & Silva, J. (2012). *Matemática – Parte 1 – 9.º ano*. Porto: Porto Editora.

Nogales, A. (2008). *Teorías de la medida y de la probabilidade*. Badajoz: Manuales da UEX.

Oliveira, E. & Barros, V. (2007). Do plausível ao provável: um breve ensaio histórico. *Ciências & Cognição,* 11, 184-191.

Ontoria, A. (Coord.) (2003). *Mapas conceptuais: Uma técnica para aprender.* Porto: Edições ASA.

ORE (2009) . Observatório de Recursos Educativos: Os manuais escolares na relação escola-família. Consulta em 10 de setembro de 2013 e disponível em http://www.ore.org.pt/filesobservatorio/pdf/Osmanuaisescolaresnarelacaoescolafamilia.pdf.

Ortiz, J., Batanero, C, & Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Revista SUMA*, 38, 5-13.

Ortiz,J., Serrano, L. & Mohamed, N. (2009). Competencias de los futuros profesores de primária sobre la probabilidade. In Serrano, L. (Ed.) *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica, 95-116.* Granada: Universidad de Granada.

Ortiz,J., Mohamed, N. & Serrano, L. (2013). Significado de la probabilidad frecuencial en futuros professores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 563-570. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

Palhares, P. (coord.) & Gomes, A. & Elza, M. (2011). *Complementos de Matemática para Professores do Ensino Básico.* Lisboa – Portugal: LIDEL, Edições Técnicas Lda.

Park, E. & Light, G. (2009). Identifying Atomic Structure as a Threshold Concept: Student mental models and troublesomeness. *International Journal of Science Education*, 31(2), 233-258.

Pedrosa, A. & Gama, S. (2004). *Probabilidades e Estatística*. Porto, Portugal: Porto Editora.

Pelizzari, A., Kriegl, M.,Baron, M., Finck, N. & Dorocinski, S. (2002). Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel. *Rev. PEC*, 2(1), 37-42.

Pereira, P. & Pimenta, P. (2012*). Matemática (vol.1) – 9º ano*. Lisboa: Texto Editores.

Perkins, D. (1999). The many faces of constructivism. *Educacional Leadership*, 57(3), 6-11.

Pestana, M. & Gageiro, J. (2000). *Análise de dados para Ciências Sociais – A complementaridade do SPSS* (2.ª ed.).Lisboa: Edições Sílabo.

Pestana, M. & Gageiro, J. (2009). *Análise categórica, Árvores de Decisão e Análise de Conteúdo em Ciências Sociais e da Saúde com o SPSS*.Lisboa: Lidel – Edições Técnicas, Lda.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in students*. New York: Norton.

Pinto, J. & Santos, L. (2006*). Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

PISA (2004). *PISA 2003 - Conceitos Fundamentais em Jogo na Avaliação da Literacia Matemática.* Portugal: ME.

Ponte, J. (s.d.). O currículo de matemática do ensino secundário. Consulta em 16 de Maio de 2012] e disponível em www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/.../ponte-etc(3Curriculo)%2097.doc.

Ponte, J. (2002). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade Educativa? Conferência realizada no *Seminário sobre "O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas*, promovido pelo Conselho Nacional de Educação, em Lisboa-Portugal.

Ponte, J. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. Consulta em 01 de Maio de 2012 e disponível em http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4071/1/03-Ponte%20%28Rev-SPCE%29.pdf.

Porfírio, J. (1998). Os currículos de Matemática: como têm evoluído. *Educação e Matemática*, 50, 32-38.

Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 345-366**.** New York: Springer.

Queiroz, C. & Coutinho, S. (s.d). Probabilidade Geométrica: Um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias Cabri. Consulta em 5 de Agosto de 2012 e disponível em http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/probabilidade.pdf.

Quivy, R. & Campenhoudt, L. (1992). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Editora Gradiva.

Reajustamento do Programa de Matemática do Ensino Secundário de 1997. Consulta em 17 de Maio de 2012 e disponível em http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexvf.html.

Remesal, A. (2006*). Los problemas en la evaluación del aprendezaje matemático en la educación obligatoria: Perspectivas de los professores y alumnos*. Tese de Doutoramento. Barcelona: Universidade de Barcelona.

Rezende, F. & Ferreira, A. (2011). O Ensino de Probabilidade na Educação Básica: Análise da Produção de um Grupo de Estudos de Professores de Matemática. Consulta em 2 de Agosto de 2012 e disponível em http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/1275.

Roca, A., Batanero, C. & Fortuny, J. (2006). Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del professorado. *Tarbiya, Revista de investigación e innovación educativa*,38, 79-90.

Rodrigues, J. (2011). *A probabilidade como componente curricular na formação Matemática inicial de professores polivalentes*. Tese de Pós-Graduação. Curitiba: Universidade Federal do Paraná.

Rodrigues, M. (2005). *Árvores de Classificação*. Monografia. Universidade dos Açores: Portugal.

Romero, L. (Ed.) (2009). *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica.* Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Educación y Humanidades, Melilla: Universidad de Granada.

Rosário, M. (2007). *Influência do Exame Nacional do 9.º ano de escolaridade nas práticas de ensino e de avaliação em Matemática*. Tese de Mestrado. Braga: Universidade do Minho.

Rountree, J. & Rountree, N. (2009). Issues Regarding Threshold Concepts in Computer Science. Artigo apresentado na *Eleventh Australasian Computing Education Conference* (ACE2009). Wellington: Nova Zelândia.

Ruiz, B., Arteaga, P. & Batanero, C. (2009*)*. Competencias de futuros profesores en la comparación de datos. In Serrano, L. (Ed.) *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica,* 57-84*.* Granada: Universidad de Granada.

Ruiz, P. (2013). Estudio comparativo de los currículos de probabilidad y estadística español y americano. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 265-

272. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Sánchez, E. & Valdez, J. (2013). La cuantificación del azar: una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidade. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas das *I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 39-45. Granada: Universidad de Granada.

Sánchez, M. & Cezón, P.(2013). Los gráficos estadísticos en las directrices curriculares para la Educación Primaria en España y Colombia. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 397-405. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Santos, L. (s.d.). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. Consulta em 20 de Maio de 2012 e disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/msantos/apa.pdf.

Santos, F. (1981). *Cálculo das Probabilidades* (Vol.I). Lisboa: Plátano Editora.

Sarwar, G. (2012). *Comparing the Effect of Reflections, Written Exercises, and Multimedia Instruction to Address Learners' Misconceptions using Structural Assessment of Knowledge.* Tese de Doutoramento. Canada: Ottawa.

Scheja, M. & Pettersson, K. (2010). Transformation and contextualisation: conceptualising students' conceptual understandings of threshold concepts in calculus. *Higher Education*, 59, 221–241.

Schvaneveldt, R., Dearholt, D. & Durso, F. (1985). *Pathfinder: Scaling with network structures* (Memorandum in Compute and Cognitive Science, MCCS.85-9). Las Cruces, NM: Computing Research Laboratory, New Mexico State University.

Schvaneveldt, R., Dearholt, D. & Durso, F. (1988). Graph Theoretic Foundations of Pathfinder Networks. *Computer Mathematics Applications*, 15(4), 337-345.

Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Serrano, E, Quirim, A., Botia, J. & Cordón, O. (2010). Debugging complex software systems by means of pathfinder networks. *Information Sciences*, 180, 561–583.

Shanahan, M., Foster, G. & Meyer, J (s.d.). Operationalising a Threshold Concept in Economics: A Pilot Study Using Multiple Choice Questions on Opportunity Cost. *International Review of Economics Education.*

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of probability: An experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational Studies in Mathematics***,** 8,285-316.

Shirley, L. (2000). Matemática do século XX: o século em breve revista. *Educação e Matemática*, 60, 73-79.

Silva, V. & Campos, T. & Itacarambi, R. (s.d.). Probabilidade e geometria: uma investigação com alunos universitários. Consulta em 4 de Maio de 2012 e disponível em http://redeabe.org.br/o ficina_probabilidade_geometria.pdf.

Silva, A. (2010). *Programas de Matemática do 1º Ciclo: Uma Pesquisa histórica desde 25 de Abril de 1974 até 1990*. Tese de Mestrado. Portugal: Escola Superior de Educação de Lisboa.

Silva, J. (2003). Novos Programas de Matemática no Ensino Secundário – 2003/2004. *Gazeta de Matemática*, 145, 10-17.

Silva, J. S. (1964). *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*. Lisboa: ME.

Silva, J.S. (1964). *Compêndio de Matemática para o 6.º ano*. Lisboa*:* Ministério da Educação.

Silva, M. (2005). *Os Números Imaginários: (um estudo sobre) a sua "realidade"*. Tese de Mestrado. Portugal: Universidade do Minho.

Silveira, M & Echeveste, M. (2011). Utilização de árvores de decisão (CHAID) para alinhamento de atributos no desenvolvimento de novo produto. *8.º Congresso Brasileiro de Gestão de Desenvolvimento de Produto*. Porto Alegre: Brasil.

Sobreiro, D. (2011*). Probabilidade condicionada: um estudo com alunos do ensino secundário*. Tese de Mestrado. Aveiro: Universidade de Aveiro.

SPIEM (2012). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática: Parecer sobre o documento "Metas Curriculares" para o Ensino Básico – Matemática. Consulta em 11 de Janeiro de 2013 e disponível em http://www.apm.pt/files/200299_SPIEM_PARECER_FINAL_METAS_CURRICULARES_500ebf3b9e854.pdf.

Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education*, 135-168. Amsterdam, Holanda: Kluwer.

Stenberg, R. (2000). *Psicologia cognitiva*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 345-366**.** Nova Iorque, USA: Springer.

Struik, D. (1989). *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Suero, M., Pérez, Á., Pardo, P. & Martínez, G. (2011). Presentación de las actividades que lleva a cabo el grupo orión de investigación del área de óptica de la Universidad de Extremadura. Badajoz: Universidade de Extremadura.

Taylor, C. (2008). Threshold Concepts, Troublesome Knowledge and Ways of Thinking and Practising − Can We Tell the Difference in Biology? In Land, R. Meyer, J. & Smith, J. (eds), *Threshold concepts within the disciplines.* Holanda: Sense Publishers.

Teodoro, J. & Lopes, J. & Mourão, G. (s.d.). O Ensino sobre a concepção frequentista de Probabilidade Estruturado na Simulação Computacional. Consulta em 7 de Maio de 2012 e disponível em http://www.ime.unicamp.br/sinape/sites/default/files/O%20ENSINO%20SOBRE%20A%20CONCEP%C3%87%C3%83O%20FREQUENTISTA%20DE%20PROBABILIDADE%20ESTRUTURADO%20NA%20SIMULA%C3%87%C3%83O%20COMPUTACIONAL_0.pdf.

Trumpower, D.L., Sharara, H., & Goldsmith, T.E. (2010). Specificity of Structural Assessment of Knowledge. *Journal of Technology, Learning, and Assessment*, 8(5).

Valadares, J. (2006). Fundamentação epistemológica da Teoria da Aprendizagem Significativa. Comunicação apresentada no *V Encuentro Internacional sobre Aprendizage Significativo*. Madrid: Espanha.

Vasconcelos, C., Almeida, L. & Praia, J. (2000). Métodos de estudo e aprendizagem significativa em Ciências Naturais: Um estudo empírico. *EDUCARE*, 8, 123-132.

Viali, L. & Cury, H. (2009). Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada. *Educ. Matem. Pesq*., 11(2), 373-391.

Vilches, A. & Pérez, D. (2010). El programa pisa: un instrumento para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, 53, 121-154.

Ward, S. & Meyer, J. (2010). Metalearning capacity and threshold concept engagement. *Innovations in Education and Teaching International,* 47 (4), 369-378.

Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In Graham A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 145-169.

Way, J. (s.d.). The Development of Children's Reasoning Strategies in Probability Tasks. Consulta em 17 de Agosto de 2012 e disponível em http://www.merga.net.au/documents/RR_way.pdf.

Wimshurst, K. (2011). Applying threshold concepts theory to an unsettled field: an exploratory study in criminal justice education. *Studies in Higher Education*, 36(3), 301-314.

Wouters, P., van der Spek, E. & Van Oostendorp, H. (2011). Measuring learning in serious games: a case study with structural assessment. *Education Tech Research Dev*, 59, 741–763.

Yorke-Barber, P., Atkinson, L., Possin, G. & Woodall, L. (2008). Light bulb moments: identifying information research threshold concepts for fourth year engineering students. Proceedings of the *2008 AaeE* Conference. Yeppoon, Central Queensland.

Zhang, J. (2008). *Visualization for Information Retrieval.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

ANEXOS

ANEXO I - PEDIDO DE CONSENTIMENTO INFORMADO AOS PAIS E ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

ANEXO II - QUESTIONÁRIO PARA A DETEÇÃO DOS CONCEITOS THRESHOLD

ANEXO III - QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES PARA A IDENTIFICAÇÃO DOS TERMOS/NOÇÕES/EXEMPLOS UTILIZADOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA NOÇÃO DE PROBABILIDADE

ANEXO IV - CONCEITOS/TERMOS/NOÇÕES/EXEMPLOS REFERIDOS PELOS PROFESSORES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

ANEXO V - ÍNDICES DOS MANUAIS ESCOLARES ANALISADOS

ANEXO VI – ALGUNS QUESTIONÁRIO RESPONDIDOS PELOS PROFESSORES PARA IDENTICAÇÃO DOS TERMOS/NOÇÕES/EXEMPLOS

ANEXO VII – EXEMPLOS DE REDES PFNET OBTIDAS, NO 1.º E NO 2.º MOMENTO

ANEXO VIII - ALGUNS QUESTIONÁRIOS RESPONDIDOS PELOS ALUNOS PARA A DETEÇÃO DOS CONCEITOS THRESHOLD

ANEXOS

ANEXO I

PEDIDO DE CONSENTIMENTO INFORMADO AOS PAIS E ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Solicita-se a sua autorização para a participação do seu (sua) educando(a) num estudo, cujo objetivo geral é o de analisar a ***Organização Conceptual dos alunos sobre a noção de Probabilidade.***

Se autorizar essa participação, iremos solicitar a colaboração voluntária do seu (sua) educando(a) para responder a questões acerca da noção de Probabilidade. Todos os dados que forem recolhidos serão anónimos e confidenciais, sendo apenas utilizados para fins didáticos no âmbito deste estudo. Não existe qualquer risco, ou dano, pela participação do seu (sua) educando(a) neste estudo.

Agradeço desde já a Vossa colaboração.

Eu, _____autorizo ☐ não autorizo ☐ meu (minha) educando (a) a participar neste estudo, com o objetivo de analisar a ***Organização Conceptual dos alunos sobre a noção de Probabilidade.***

Beja. ___/___/____

_____

Assinatura do Encarregado de Educação

ANEXO II

QUESTIONÁRIO PARA A DETEÇÃO DOS CONCEITOS THRESHOLD

QUESTIONÁRIO

I – GÉNERO MASCULINO ☐ FEMININO ☐

II – ANO DE ESCOLARIDADE 9.º ANO ☐ 12.º ANO ☐

III - NA TUA OPINIÃO DOS CONCEITOS ABAIXO INDICADOS, DIZ, INDICANDO COM UM X, QUAL FOI PARA TI O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL E O MENOS COMPLICADO/FÁCIL DE PERCEBER:

CONCEITO/TERMO/IDEIA/NOÇÃO	MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL	MENOS COMPLICADO/FÁCIL
ACASO		
ACONTECIMENTO		
CASOS POSSÍVEIS E CASOS FAVORÁVEIS		
EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA		
LANÇAMENTO DE MOEDAS/DADOS		
LEI (OU REGRA) DE LAPLACE		
LEI DOS GRANDES NÚMEROS		
PROBABILIDADE		
QUOCIENTE		
TÉCNICAS DE CONTAGEM DE CASOS		
VALOR NUMÉRICO		

IV – EM RELAÇÃO AO CONCEITO REFERIDO ANTERIORMENTE COMO O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER PRETENDE-SE QUE OPINES SOBRE DIFERENTES ASPETOS. NUM DOS EXTREMOS DESTA ESCALA ESTÁ O "1-*TOTALMENTE EM DESACORDO*" E NO OUTRO EXTREMO "5-*TOTALMENTE DE ACORDO*".

CONCEITO MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER	Totalmente em desacordo		Nem em desacordo nem acordo		Totalmente de acordo
1. Eu acho que o *conceito* é fácil de explicar a um outro colega.	①	②	③	④	⑤
2. O entendimento do *conceito* transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	①	②	③	④	⑤
3. Eu consigo ver aplicações do *conceito* a outras áreas e disciplinas.	①	②	③	④	⑤
4. O *conceito* é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	①	②	③	④	⑤
5. Eu ter entendido o *conceito* implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	①	②	③	④	⑤
6. Eu ainda não entendi realmente o *conceito*.	①	②	③	④	⑤
7. Compreender o *conceito* foi como um "*clique*" e agora vejo o que realmente significa.	①	②	③	④	⑤
8. Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o *conceito*.	①	②	③	④	⑤
9. Agora que entendi o *conceito*, acho que seria difícil esquecê-lo.	①	②	③	④	⑤
10. Entender o *conceito* fez-me sentir mais como um matemático.	①	②	③	④	⑤
11. Foi difícil ver como o *conceito* se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	①	②	③	④	⑤
12. Assim que entendi o *conceito*, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	①	②	③	④	⑤
13. Vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o *conceito*.	①	②	③	④	⑤

ANEXO III

QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES PARA A IDENTIFICAÇÃO DOS TERMOS/NOÇÕES/EXEMPLOS UTILIZADOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA NOÇÃO DE PROBABILIDADE

Caro Colega,

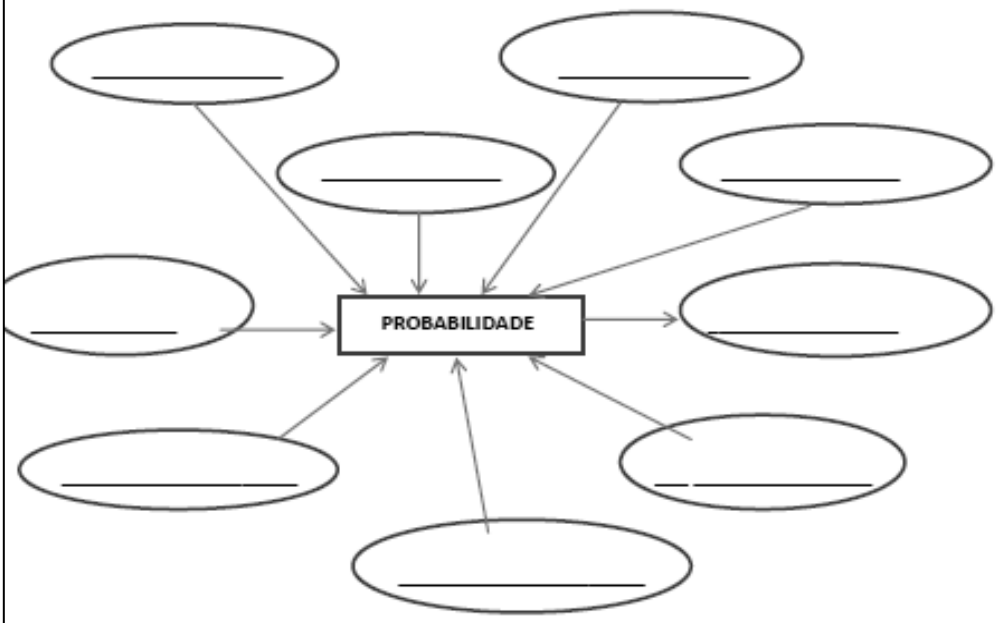
O presente questionário é parte integrante de uma Tese de Doutoramento no âmbito da Didáctica da Matemática e sobre a noção de **PROBABILIDADE**.

Neste contexto, gostaria muito de poder contar com a sua colaboração e disponibilidade no preenchimento do esquema apresentado abaixo.

• Lecciono no(s) seguinte(s) nível(eis) de Ensino:

☐ 2.º ciclo do Ensino Básico ☐ 3.º ciclo do Ensino Básico ☐ Ensino Secundário

Refira alguns termos/noções/exemplos que considera serem relevantes no processo de ensino e aprendizagem do conceito de PROBABILIDADE



Outros conceitos/termos/noções:_____

_____

MUITO AGRADECIDO

ANEXO IV

CONCEITOS/TERMOS/NOÇÕES/EXEMPLOS REFERIDOS PELOS PROFESSORES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

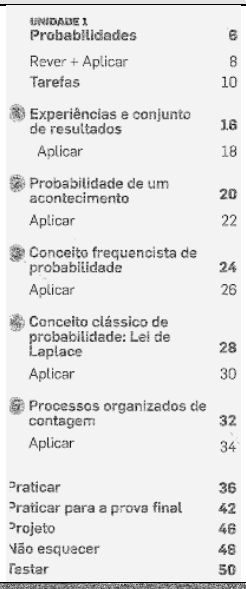
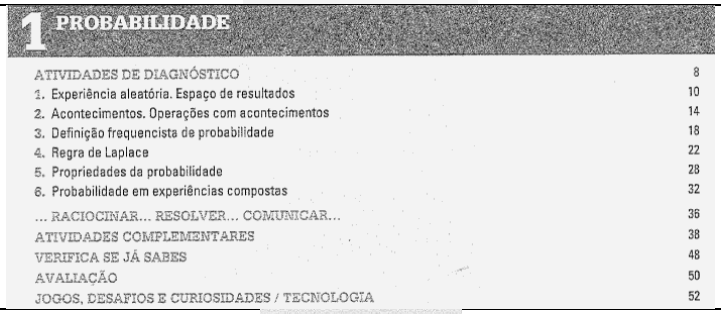
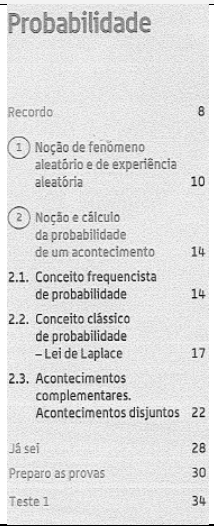
Termos referidos		Frequência	Percentagem
	[0,1]	1	,5
	Acaso	3	1,4
	Acontecimento	16	7,7
	acontecimento certo	3	1,4
	acontecimento impossível	3	1,4
	acontecimentos contrários	1	,5
	acontecimentos equiprováveis	1	,5
	acontecimentos independentes	1	,5
	Aleatório	10	4,8
	Amostra	3	1,4
	Análise	2	1,0
	análise combinatória	3	1,4
	Arranjos	2	1,0
	Moedas	2	1,0
	binómio newton	1	,5
	cálculo combinatórios	1	,5
	casos favoráveis	6	2,9
	casos possíveis	7	3,4
	Casualidade	1	,5
	Certo	6	2,9
	Combinações	1	,5
	Combinatória	3	1,4
	Composta	1	,5
	Comunicação	2	1,0
	conceito frequencista	1	,5
	Conjuntos	3	1,4
	Contagem	4	1,9
	diagrama de árvore	3	1,5
	Diagramas	1	,5
	Difícil	1	,5
	distribuição normal	1	,5
	distribuição probabilidade	2	1,0
	Divisão	1	,5
	Equiprováveis	3	1,4
	Dados	1	,5
	espaço de acontecimentos	1	,5

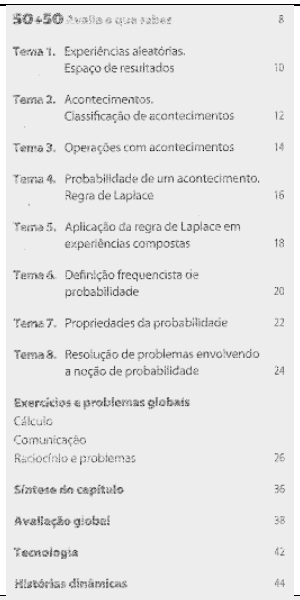
	Estatística	3	1,4
	Estratégia	2	1,0
	Experiência	6	2,9
	experiência aleatória	2	1,0
	Fácil	1	,5
	Favorável	1	,5
	Fração	4	1,9
	frequência relativa	4	1,9
	Frequências	1	,5
	Hipótese	1	,5
	Impossível	6	2,9
	Incerteza	3	1,4
	Incerto	1	,5
	Interpretação	1	,5
	interpretação enunciado	1	,5
	Jogo	1	,5
	jogo de azar	1	,5
	Laplace	2	1,0
	lei de Laplace	1	,5
	lei dos grandes números	7	3,4
	lei Laplace	6	2,9
	leis de d'morgan	1	,5
	maior ou igual a 0	1	,5
	mais provável	1	,5
	Medida	1	,5
	menor ou igual a 1	1	,5
	Números	1	,5
	operações com acontecimentos	1	,5
	outras técnicas de contagem	1	,5
	pelo menos que	1	,5
	Percentagem	4	1,9
	Permutação	2	1,0
	População	1	,5
	Possibilidade	1	,5
	Possível	4	1,9
	probabilidade complementar	1	,5
	probabilidade condicionada	2	1,0
	propriedades conjuntos	1	,5
	Provável	2	1,0
	Quociente	2	1,0
	Raciocínio	2	1,0
	Razão	2	1,0
	regra de Bayes	1	,5

	regra de Laplace	3	1,4
	Resultado	1	,5
	senso comum	1	,5
	Simples	1	,5
	tabela de dupla entrada	1	,5
	Tabelas	1	,5
	técnicas contagem	2	1,0
	teorema lapace	1	,5
	teorema probabilidades totais	1	,5
	Total	1	,5
	triângulo pascal	1	,5
	Universo	2	1,0
	Variável	1	,5
	Total	207	100,0

ANEXO V

ÍNDICES DOS MANUAIS ESCOLARES ANALISADOS

Livro de texto	Índice
PI 9 – Editora ASA	 UNIDADE 1 Probabilidades 6 Rever + Aplicar 8 Tarefas 10 Experiências e conjunto de resultados 16 Aplicar 18 Probabilidade de um acontecimento 20 Aplicar 22 Conceito frequencista de probabilidade 24 Aplicar 26 Conceito clássico de probabilidade: Lei de Laplace 28 Aplicar 30 Processos organizados de contagem 32 Aplicar 34 Praticar 36 Praticar para a prova final 42 Projeto 46 Não esquecer 48 Testar 50
***Matemática* (parte 1) – Porto Editora**	 1 PROBABILIDADE ATIVIDADES DE DIAGNÓSTICO 8 1. Experiência aleatória. Espaço de resultados 10 2. Acontecimentos. Operações com acontecimentos 14 3. Definição frequencista de probabilidade 18 4. Regra de Laplace 22 5. Propriedades da probabilidade 28 6. Probabilidade em experiências compostas 32 ... RACIOCINAR... RESOLVER... COMUNICAR... 36 ATIVIDADES COMPLEMENTARES 38 VERIFICA SE JÁ SABES 48 AVALIAÇÃO 50 JOGOS, DESAFIOS E CURIOSIDADES / TECNOLOGIA 52
***Matematicamente falando* – Areal Editores**	 Probabilidade Recordo 8 1 Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória 10 2 Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento 14 2.1. Conceito frequencista de probabilidade 14 2.2. Conceito clássico de probabilidade – Lei de Laplace 17 2.3. Acontecimentos complementares. Acontecimentos disjuntos 22 Já sei 28 Preparo as provas 30 Teste 1 34

Matemática Dinâmica **– Porto Editora**	 50+50 Avalia o que sabes 8 Tema 1. Experiências aleatórias. Espaço de resultados 10 Tema 2. Acontecimentos. Classificação de acontecimentos 12 Tema 3. Operações com acontecimentos 14 Tema 4. Probabilidade de um acontecimento. Regra de Laplace 16 Tema 5. Aplicação da regra de Laplace em experiências compostas 18 Tema 6. Definição frequencista de probabilidade 20 Tema 7. Propriedades da probabilidade 22 Tema 8. Resolução de problemas envolvendo a noção de probabilidade 24 Exercícios e problemas globais Cálculo Comunicação Raciocínio e problemas 26 Síntese do capítulo 36 Avaliação global 38 Tecnologia 42 Histórias dinâmicas 44
Novo Espaço **(parte 1) – Porto Editora**	Probabilidade • Introdução 8 1. Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória 9 1.1. Espaço de resultados. Acontecimento 11 2. Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento 14 2.1. Probabilidade empírica (ou frequencista) de um acontecimento 14 2.2. Regra de Laplace 19 2.3. Acontecimentos incompatíveis (ou disjuntos ou mutuamente exclusivos) 26 • Para praticar 30 • Para avaliar 40
Matemática **(volume 1) - Texto Editora**	1 PROBABILIDADE ATIVIDADES DE DIAGNÓSTICO 8 1. Experiência aleatória. Espaço de resultados 10 2. Acontecimentos. Operações com acontecimentos 14 3. Definição frequencista de probabilidade 18 4. Regra de Laplace 22 5. Propriedades da probabilidade 28 6. Probabilidade em experiências compostas 32 ... RACIOCINAR... RESOLVER... COMUNICAR... 36 ATIVIDADES COMPLEMENTARES 38 VERIFICA SE JÁ SABES 48 AVALIAÇÃO 50 JOGOS, DESAFIOS E CURIOSIDADES / TECNOLOGIA 52

ANEXO VI

ALGUNS QUESTIONÁRIO RESPONDIDOS PELOS PROFESSORES PARA IDENTICAÇÃO DOS TERMOS/NOÇÕES/EXEMPLOS

Caro Colega,

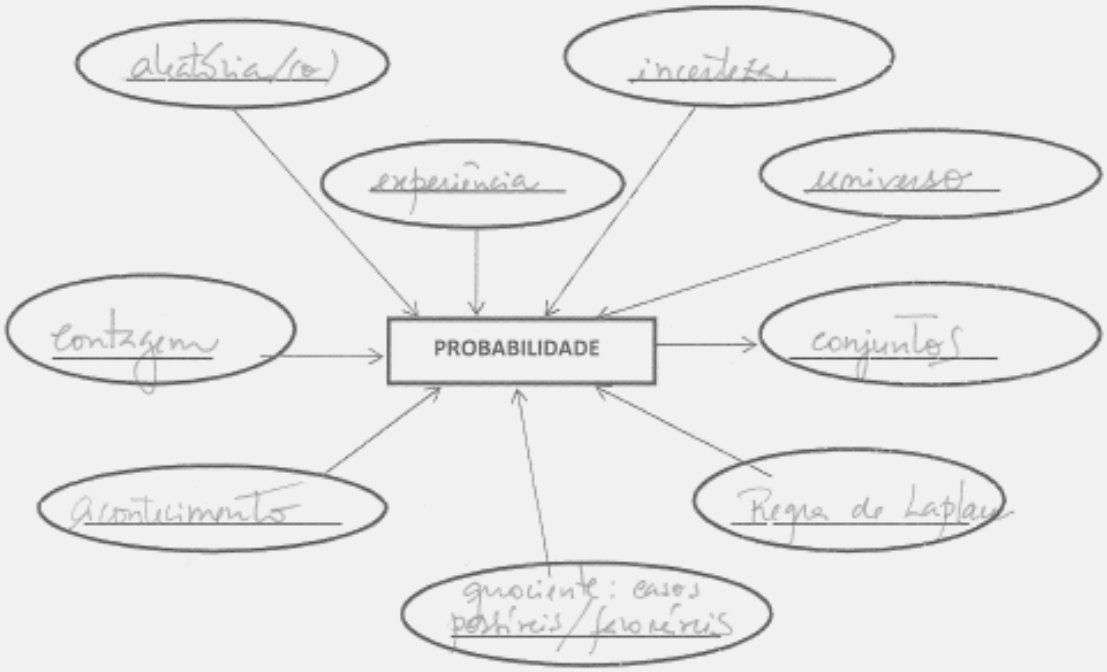
O presente questionário é parte integrante de uma Tese de Doutoramento no âmbito da Didáctica da Matemática e sobre a noção de **PROBABILIDADE**.

Neste contexto, gostaria muito de poder contar com a sua colaboração e disponibilidade no preenchimento do esquema apresentado abaixo.

• Lecciono no(s) seguinte(s) nível(eis) de Ensino:

2.º ciclo do Ensino Básico 3.º ciclo do Ensino Básico Ensino Secundário

Refira alguns conceitos/termos/noções que considera serem relevantes no processo de ensino e aprendizagem do conceito de PROBABILIDADE



Outros conceitos/termos/noções:_____

_____

MUITO AGRADECIDO

Questionário de um Professor do 3.º ciclo do Ensino Básico

Caro Colega,

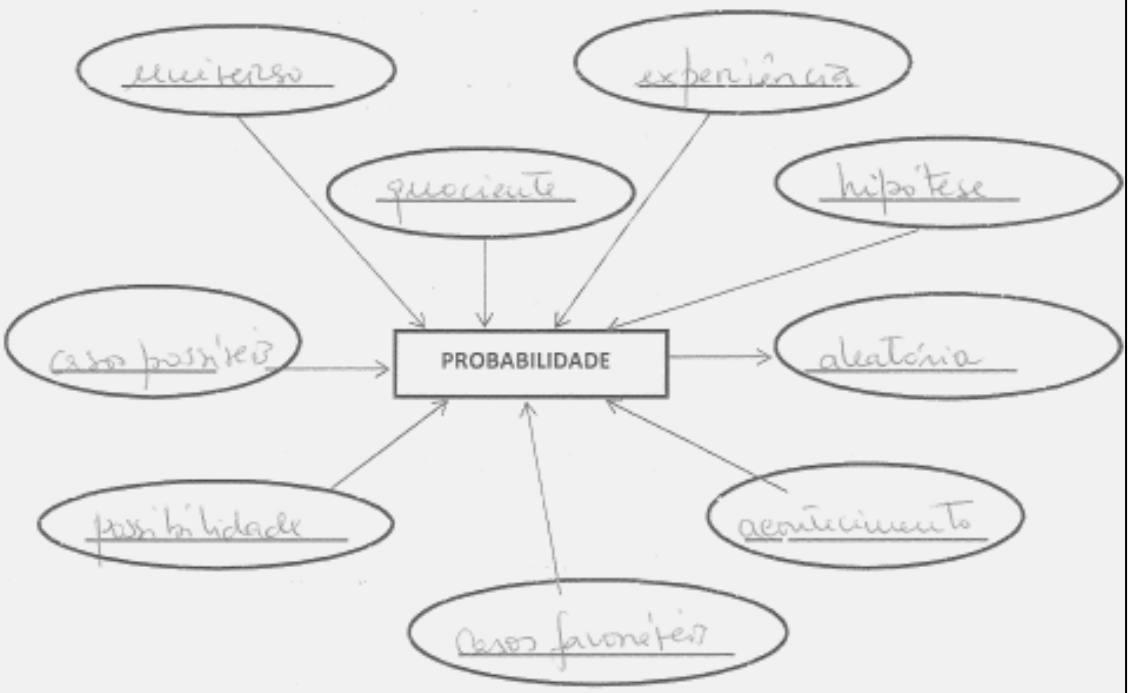
O presente questionário é parte integrante de uma Tese de Doutoramento no âmbito da Didáctica da Matemática e sobre a noção de **PROBABILIDADE**.

Neste contexto, gostaria muito de poder contar com a sua colaboração e disponibilidade no preenchimento do esquema apresentado abaixo.

• Lecciono no(s) seguinte(s) nível(eis) de Ensino:

2.º ciclo do Ensino Básico 3.º ciclo do Ensino Básico Ensino Secundário

Refira alguns conceitos/termos/noções que considera serem relevantes no processo de ensino e aprendizagem do conceito de PROBABILIDADE



Outros conceitos/termos/noções: taxa fixa, simples, composta

MUITO AGRADECIDO

Questionário de um Professor do Ensino Secundário

Caro Colega,

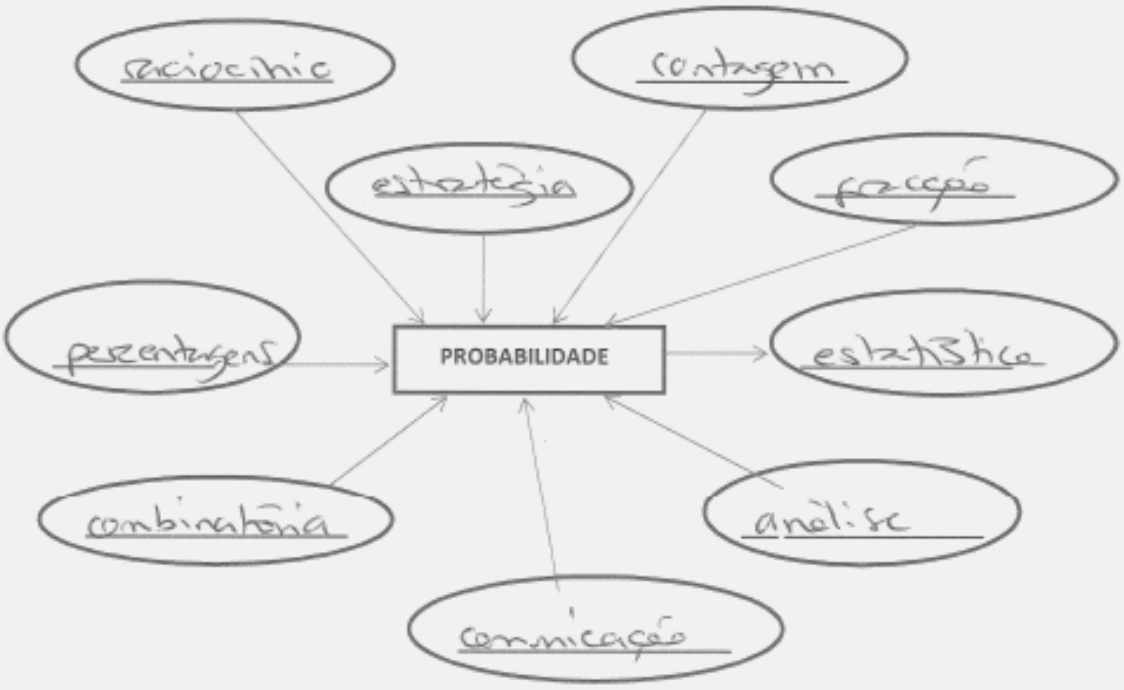
O presente questionário é parte integrante de uma Tese de Doutoramento no âmbito da Didáctica da Matemática e sobre a noção de **PROBABILIDADE**.

Neste contexto, gostaria muito de poder contar com a sua colaboração e disponibilidade no preenchimento do esquema apresentado abaixo.

• Lecciono no(s) seguinte(s) nível(eis) de Ensino:

2.º ciclo do Ensino Básico 3.º ciclo do Ensino Básico Ensino Secundário

Refira alguns conceitos/termos/noções que considera serem relevantes no processo de ensino e aprendizagem do conceito de PROBABILIDADE



Outros conceitos/termos/noções:_____

_____

MUITO AGRADECIDO

Questionário de um Professor do 3.º ciclo do Ensino Básico

Caro Colega,

O presente questionário é parte integrante de uma Tese de Doutoramento no âmbito da Didáctica da Matemática e sobre a noção de **PROBABILIDADE**.

Neste contexto, gostaria muito de poder contar com a sua colaboração e disponibilidade no preenchimento do esquema apresentado abaixo.

• Lecciono no(s) seguinte(s) nível(eis) de Ensino:

2.º ciclo do Ensino Básico | 3.º ciclo do Ensino Básico | Ensino Secundário

Refira alguns conceitos/termos/noções que considera serem relevantes no processo de ensino e aprendizagem do conceito de PROBABILIDADE

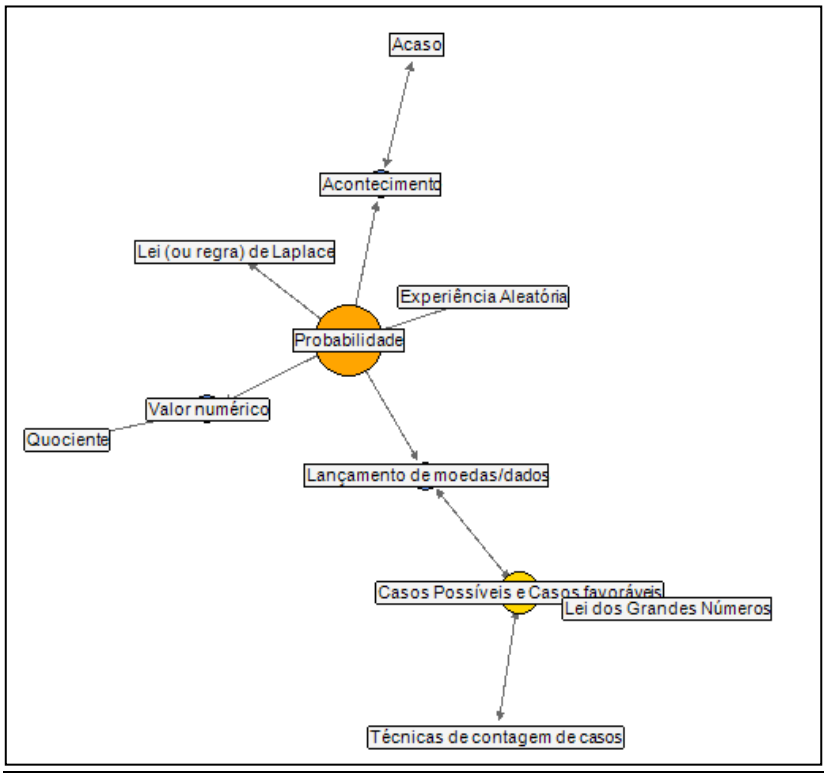
Outros conceitos/termos/noções:_____

MUITO AGRADECIDO

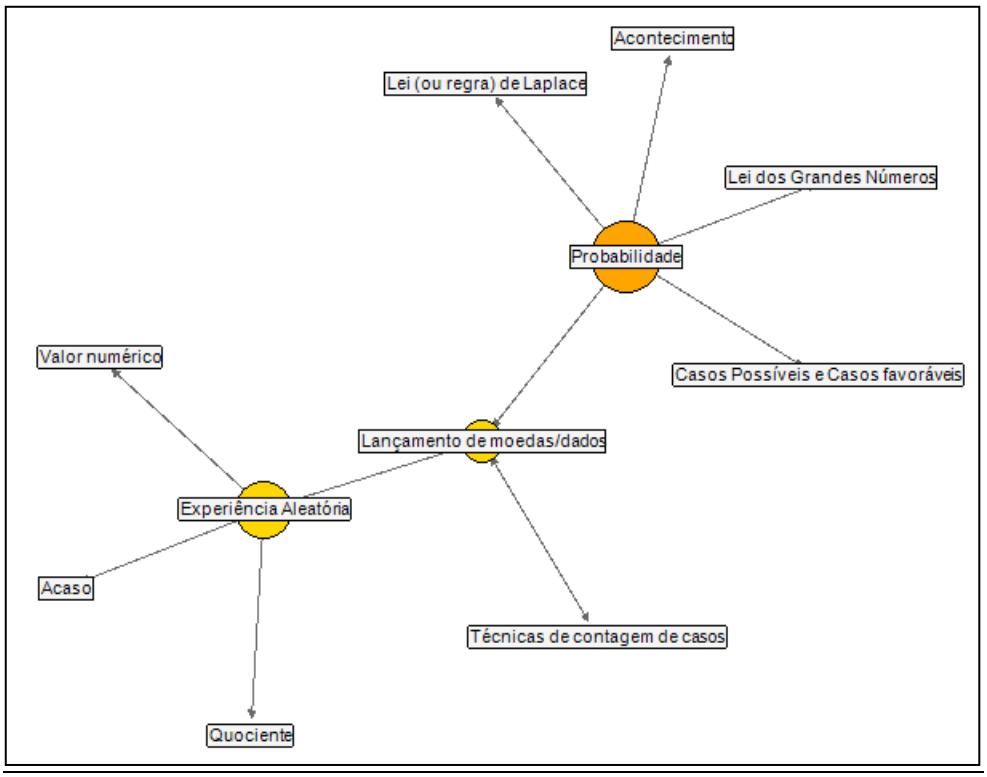
Questionário de um Professor do 3.º ciclo do Ensino Básico

ANEXO VII

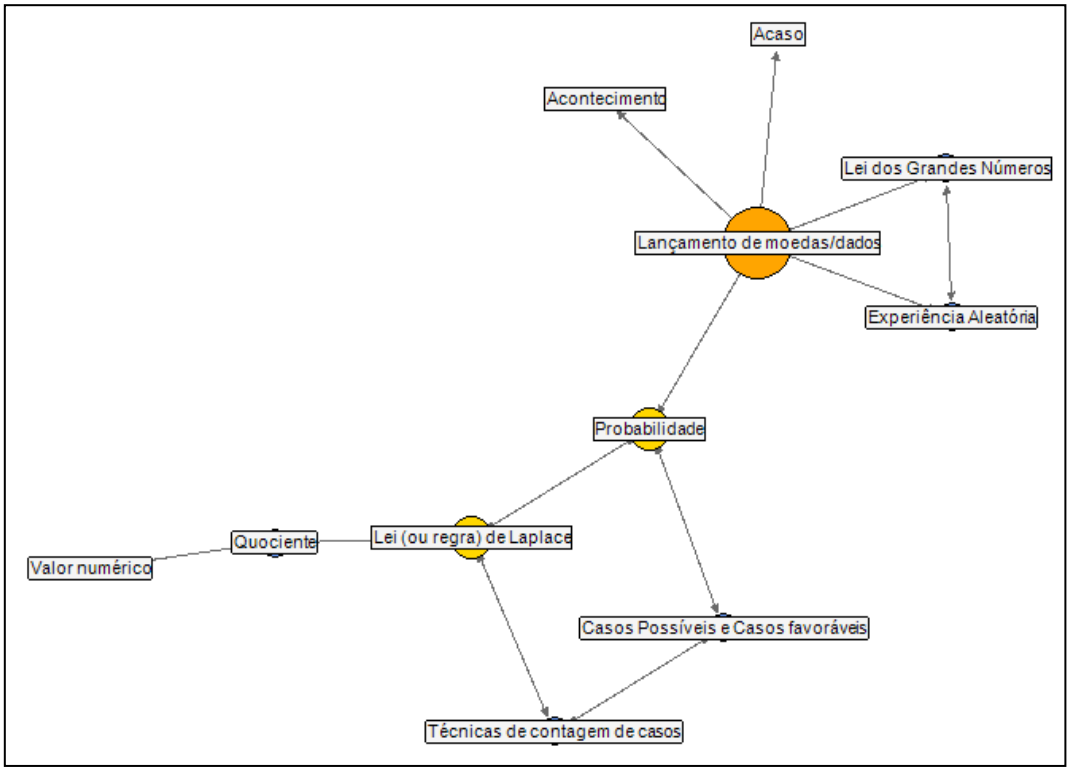
EXEMPLOS DE REDES PFNET OBTIDAS, NO 1.º E NO 2.º MOMENTO



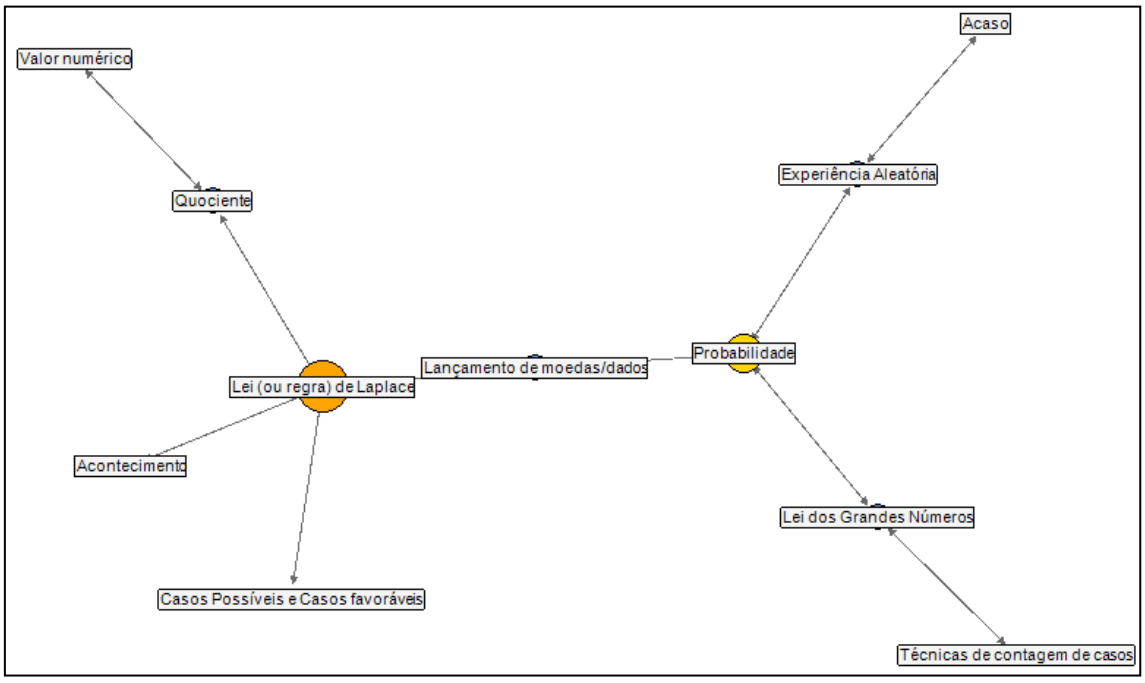
Rede de um aluno do 9.º Ano no 1º momento (Feminino)



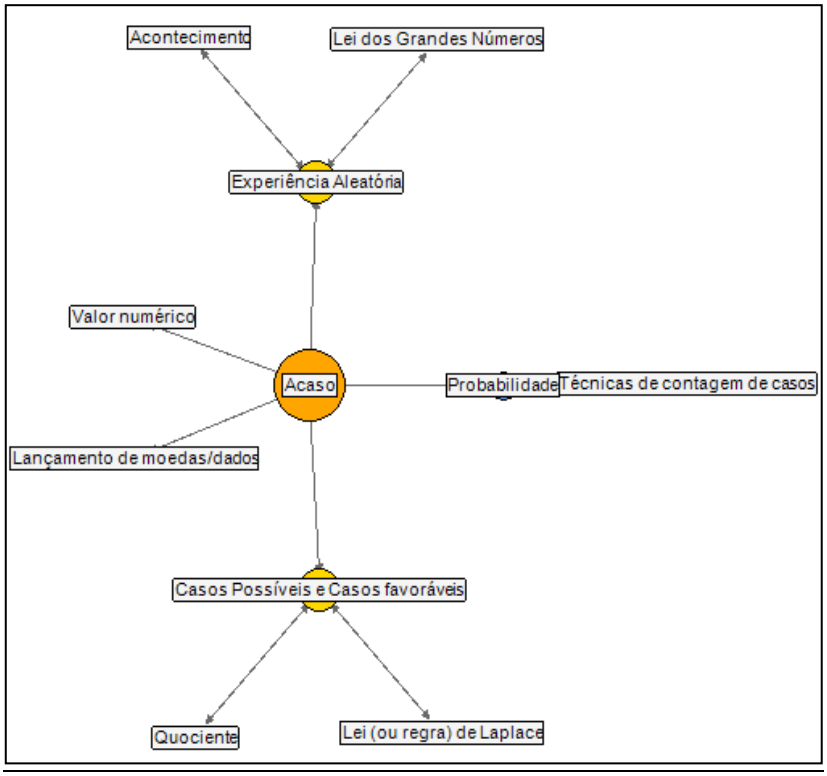
Rede de um aluno do 9.º Ano no 1º momento (Masculino)



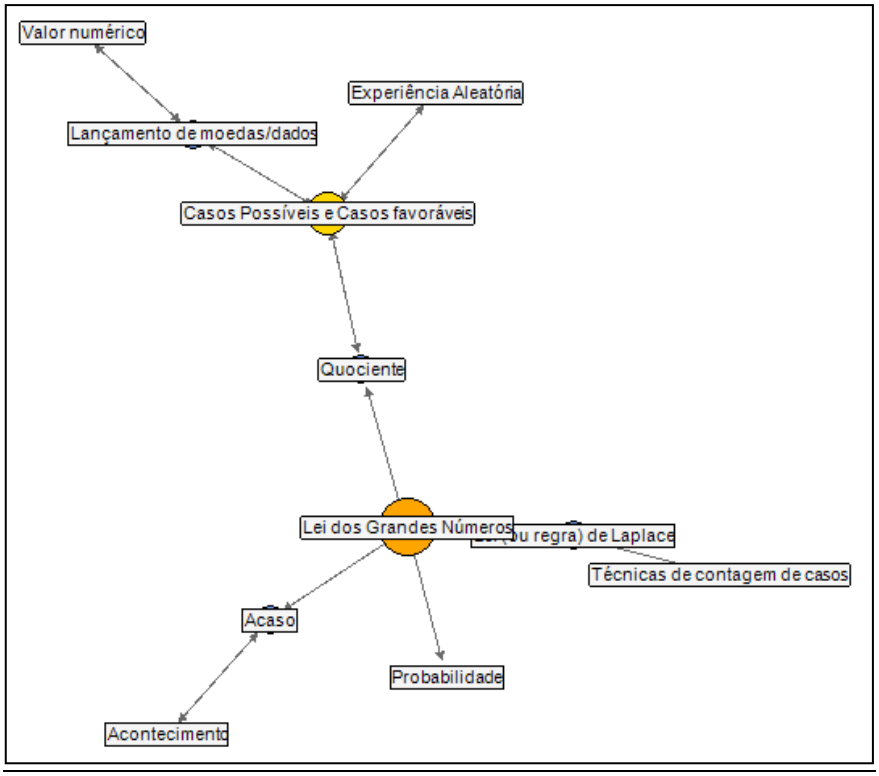
Rede de um aluno do 12.º Ano no 1º momento (Feminino)



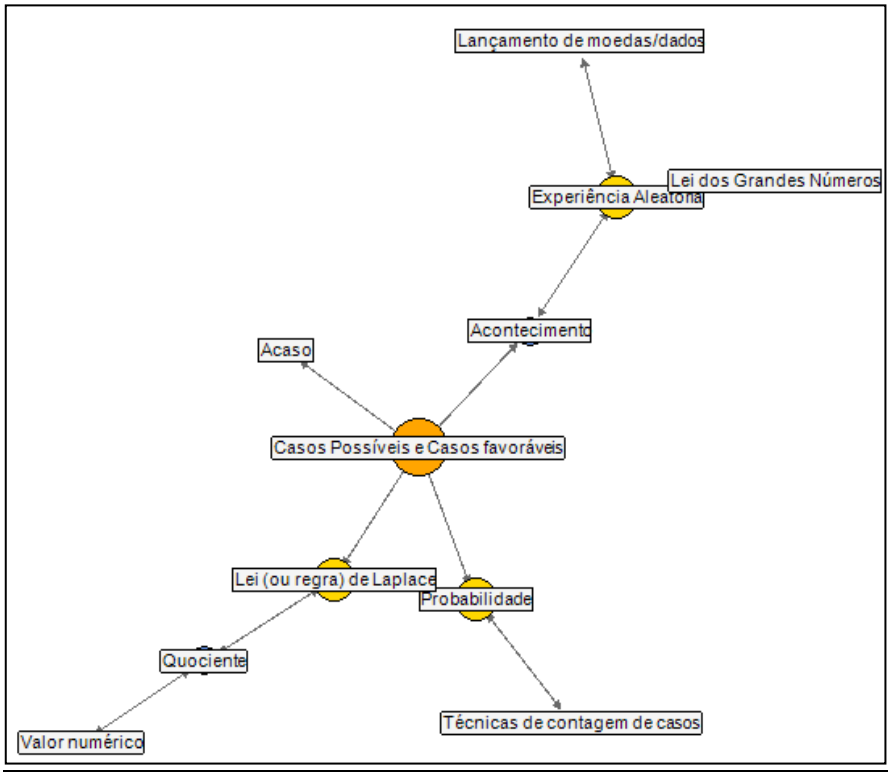
Rede de um aluno do 12.º Ano no 1º momento (Masculino)



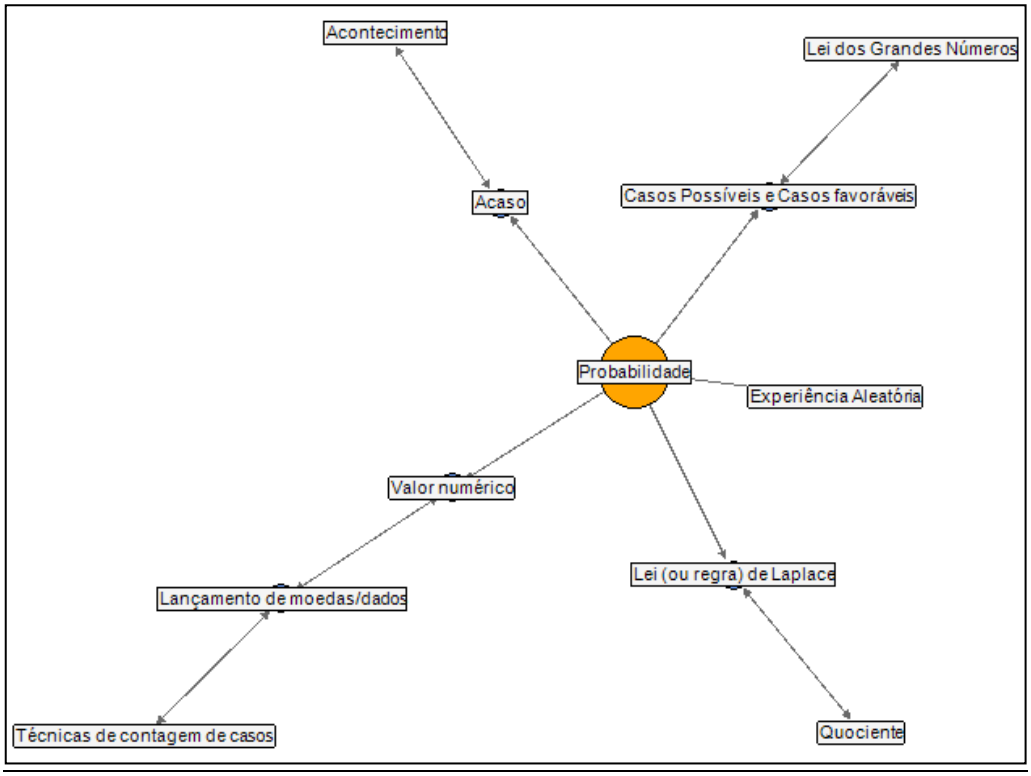
Rede de um aluno do 9.º Ano no 2º momento (Feminino)



Rede de um aluno do 9.º Ano no 2º momento (Masculino)



Rede de um aluno do 12.º Ano no 2º momento (Feminino)



Rede de um aluno do 12.º Ano no 2º momento (Masculino)

ANEXO VIII

ALGUNS QUESTIONÁRIOS RESPONDIDOS PELOS ALUNOS PARA A DETEÇÃO DOS CONCEITOS THRESHOLD

I – GÉNERO MASCULINO ☐ FEMININO ☒

II – ANO DE ESCOLARIDADE 9.º ANO ☒ 12.º ANO ☐

D623

III - NA TUA OPINIÃO DOS CONCEITOS ABAIXO INDICADOS, DIZ, INDICANDO COM UM X, QUAL FOI PARA TI O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL E O MENOS COMPLICADO/FÁCIL DE PERCEBER:

CONCEITO/TERMO/IDEIA/NOÇÃO	MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL	MENOS COMPLICADO/FÁCIL
ACASO		
ACONTECIMENTO		
CASOS POSSÍVEIS E CASOS FAVORÁVEIS		
EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA		X
LANÇAMENTO DE MOEDAS/DADOS		
LEI (OU REGRA) DE LAPLACE		
LEI DOS GRANDES NÚMEROS		
PROBABILIDADE		
QUOCIENTE	X	
TÉCNICAS DE CONTAGEM DE CASOS		
VALOR NUMÉRICO		

IV – EM RELAÇÃO AO CONCEITO REFERIDO ANTERIORMENTE COMO O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER PRETENDE-SE QUE OPINES SOBRE DIFERENTES ASPETOS. NUM DOS EXTREMOS DESTA ESCALA ESTÁ O "***1-TOTALMENTE EM DESACORDO***" E NO OUTRO EXTREMO "***5-TOTALMENTE DE ACORDO***".

CONCEITO MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER	Totalmente em desacordo		Nem em desacordo nem acordo		Totalmente de acordo
1. Eu acho que o ***conceito*** é fácil de explicar a um outro colega.	①	②	③	④	⑤
2. O entendimento do ***conceito*** transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	①	②	③	④	⑤
3. Eu consigo ver aplicações do ***conceito*** a outras áreas e disciplinas.	①	②	③	④	⑤
4. O ***conceito*** é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	①	②	③	④	⑤
5. Eu ter entendido o ***conceito*** implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	①	②	③	④	⑤
6. Eu ainda não entendi realmente o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
7. Compreender o ***conceito*** foi como um "*clique*" e agora vejo o que realmente significa.	①	②	③	④	⑤
8. Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
9. Agora que entendi o ***conceito***, acho que seria difícil esquecê-lo.	①	②	③	④	⑤
10. Entender o ***conceito*** fez-me sentir mais como um matemático.	①	②	③	④	⑤
11. Foi difícil ver como o ***conceito*** se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	①	②	③	④	⑤
12. Assim que entendi o ***conceito***, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	①	②	③	④	⑤
13. Vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤

Questionário de um estudante do 9. Ano (Feminino)

I – GÉNERO MASCULINO ☐ FEMININO ☒

II – ANO DE ESCOLARIDADE 9.º ANO ☒ 12.º ANO ☐

III - NA TUA OPINIÃO DOS CONCEITOS ABAIXO INDICADOS, DIZ, INDICANDO COM UM X, QUAL FOI PARA TI O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL E O MENOS COMPLICADO/FÁCIL DE PERCEBER:

CONCEITO/TERMO/IDEIA/NOÇÃO	MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL	MENOS COMPLICADO/FÁCIL
ACASO		
ACONTECIMENTO		X
CASOS POSSÍVEIS E CASOS FAVORÁVEIS		
EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA		
LANÇAMENTO DE MOEDAS/DADOS		
LEI (OU REGRA) DE LAPLACE		
LEI DOS GRANDES NÚMEROS	X	
PROBABILIDADE		
QUOCIENTE		
TÉCNICAS DE CONTAGEM DE CASOS		
VALOR NUMÉRICO		

IV – EM RELAÇÃO AO CONCEITO REFERIDO ANTERIORMENTE COMO O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER PRETENDE-SE QUE OPINES SOBRE DIFERENTES ASPETOS. NUM DOS EXTREMOS DESTA ESCALA ESTÁ O "***1-TOTALMENTE EM DESACORDO***" E NO OUTRO EXTREMO "***5-TOTALMENTE DE ACORDO***".

CONCEITO MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER	Totalmente em desacordo		Nem em desacordo nem acordo		Totalmente de acordo
1. Eu acho que o ***conceito*** é fácil de explicar a um outro colega.	①	②	③	④	⑤
2. O entendimento do ***conceito*** transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	①	②	③	④	⑤
3. Eu consigo ver aplicações do ***conceito*** a outras áreas e disciplinas.	①	②	③	④	⑤
4. O ***conceito*** é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	①	②	③	④	⑤
5. Eu ter entendido o ***conceito*** implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	①	②	③	④	⑤
6. Eu ainda não entendi realmente o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
7. Compreender o ***conceito*** foi como um "*clique*" e agora vejo o que realmente significa.	①	②	③	④	⑤
8. Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
9. Agora que entendi o ***conceito***, acho que seria difícil esquecê-lo.	①	②	③	④	⑤
10. Entender o ***conceito*** fez-me sentir mais como um matemático.	①	②	③	④	⑤
11. Foi difícil ver como o ***conceito*** se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	①	②	③	④	⑤
12. Assim que entendi o ***conceito***, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	①	②	③	④	⑤
13. Vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤

Questionário de um estudante do 9. Ano (Feminino)

I – GÉNERO MASCULINO [X] FEMININO [ ]

II – ANO DE ESCOLARIDADE 5M94 9.º ANO [X] 12.º ANO [ ]

III - NA TUA OPINIÃO DOS CONCEITOS ABAIXO INDICADOS, DIZ, INDICANDO COM UM X, QUAL FOI PARA TI O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL E O MENOS COMPLICADO/FÁCIL DE PERCEBER:

CONCEITO/TERMO/IDEIA/NOÇÃO	MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL	MENOS COMPLICADO/FÁCIL
ACASO		
ACONTECIMENTO		
CASOS POSSÍVEIS E CASOS FAVORÁVEIS		
EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA		
LANÇAMENTO DE MOEDAS/DADOS		
LEI (OU REGRA) DE LAPLACE	X	
LEI DOS GRANDES NÚMEROS		
PROBABILIDADE		X
QUOCIENTE		
TÉCNICAS DE CONTAGEM DE CASOS		
VALOR NUMÉRICO		

IV – EM RELAÇÃO AO CONCEITO REFERIDO ANTERIORMENTE COMO O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER PRETENDE-SE QUE OPINES SOBRE DIFERENTES ASPETOS. NUM DOS EXTREMOS DESTA ESCALA ESTÁ O "***1-TOTALMENTE EM DESACORDO***" E NO OUTRO EXTREMO "***5-TOTALMENTE DE ACORDO***".

CONCEITO MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER	Totalmente em desacordo		Nem em desacordo nem acordo		Totalmente de acordo
1. Eu acho que o ***conceito*** é fácil de explicar a um outro colega.	①	②	③	④	⑤
2. O entendimento do ***conceito*** transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	①	②	③	④	⑤
3. Eu consigo ver aplicações do ***conceito*** a outras áreas e disciplinas.	①	②	③	④	⑤
4. O ***conceito*** é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	①	②	③	④	⑤
5. Eu ter entendido o ***conceito*** implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	①	②	③	④	⑤
6. Eu ainda não entendi realmente o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
7. Compreender o ***conceito*** foi como um "*clique*" e agora vejo o que realmente significa.	①	②	③	④	⑤
8. Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
9. Agora que entendi o ***conceito***, acho que seria difícil esquecê-lo.	①	②	③	④	⑤
10. Entender o ***conceito*** fez-me sentir mais como um matemático.	①	②	③	④	⑤
11. Foi difícil ver como o ***conceito*** se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	①	②	③	④	⑤
12. Assim que entendi o ***conceito***, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	①	②	③	④	⑤
13. Vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤

Questionário de um estudante do 9. Ano (Masculino)

I – GÊNERO MASCULINO [X] FEMININO [ ]

II – ANO DE ESCOLARIDADE 9.º ANO [X] 12.º ANO [ ]

III - NA TUA OPINIÃO DOS CONCEITOS ABAIXO INDICADOS, DIZ, INDICANDO COM UM X, QUAL FOI PARA TI O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL E O MENOS COMPLICADO/FÁCIL DE PERCEBER:

CONCEITO/TERMO/IDEIA/NOÇÃO	MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL	MENOS COMPLICADO/FÁCIL
ACASO		
ACONTECIMENTO		
CASOS POSSÍVEIS E CASOS FAVORÁVEIS		X
EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA		
LANÇAMENTO DE MOEDAS/DADOS		
LEI (OU REGRA) DE LAPLACE		
LEI DOS GRANDES NÚMEROS	X	
PROBABILIDADE		
QUOCIENTE		
TÉCNICAS DE CONTAGEM DE CASOS		
VALOR NUMÉRICO		

IV – EM RELAÇÃO AO CONCEITO REFERIDO ANTERIORMENTE COMO O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER PRETENDE-SE QUE OPINES SOBRE DIFERENTES ASPETOS. NUM DOS EXTREMOS DESTA ESCALA ESTÁ O "***1-TOTALMENTE EM DESACORDO***" E NO OUTRO EXTREMO "***5-TOTALMENTE DE ACORDO***".

CONCEITO MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER	Totalmente em desacordo		Nem em desacordo nem acordo		Totalmente de acordo
1. Eu acho que o ***conceito*** é fácil de explicar a um outro colega.	①	②	③	④	⑤
2. O entendimento do ***conceito*** transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	①	②	③	④	⑤
3. Eu consigo ver aplicações do ***conceito*** a outras áreas e disciplinas.	①	②	③	④	⑤
4. O ***conceito*** é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	①	②	③	④	⑤
5. Eu ter entendido o ***conceito*** implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	①	②	③	④	⑤
6. Eu ainda não entendi realmente o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
7. Compreender o ***conceito*** foi como um "*clique*" e agora vejo o que realmente significa.	①	②	③	④	⑤
8. Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
9. Agora que entendi o ***conceito***, acho que seria difícil esquecê-lo.	①	②	③	④	⑤
10. Entender o ***conceito*** fez-me sentir mais como um matemático.	①	②	③	④	⑤
11. Foi difícil ver como o ***conceito*** se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	①	②	③	④	⑤
12. Assim que entendi o ***conceito***, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	①	②	③	④	⑤
13. Vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤

Questionário de um estudante do 9. Ano (Masculino)

I – GÉNERO MASCULINO ☐ FEMININO ☒

II – ANO DE ESCOLARIDADE 9.º ANO ☐ 12.º ANO ☒

III - NA TUA OPINIÃO DOS CONCEITOS ABAIXO INDICADOS, DIZ, INDICANDO COM UM X, QUAL FOI PARA TI O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL E O MENOS COMPLICADO/FÁCIL DE PERCEBER:

CONCEITO/TERMO/IDEIA/NOÇÃO	MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL	MENOS COMPLICADO/FÁCIL
ACASO		
ACONTECIMENTO		
CASOS POSSÍVEIS E CASOS FAVORÁVEIS		
EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA		
LANÇAMENTO DE MOEDAS/DADOS		
LEI (OU REGRA) DE LAPLACE		X
LEI DOS GRANDES NÚMEROS		
PROBABILIDADE		
QUOCIENTE		
TÉCNICAS DE CONTAGEM DE CASOS		
VALOR NUMÉRICO	X	

IV – EM RELAÇÃO AO CONCEITO REFERIDO ANTERIORMENTE COMO O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER PRETENDE-SE QUE OPINES SOBRE DIFERENTES ASPETOS. NUM DOS EXTREMOS DESTA ESCALA ESTÁ O "1-*TOTALMENTE EM DESACORDO*" E NO OUTRO EXTREMO "*5-TOTALMENTE DE ACORDO*".

CONCEITO MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER	[illegible]		[illegible]		[illegible]
1. Eu acho que o *conceito* é fácil de explicar a um outro colega.	①	②	③	④	⑤
2. O entendimento do *conceito* transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	①	②	③	④	⑤
3. Eu consigo ver aplicações do *conceito* a outras áreas e disciplinas.	①	②	③	④	⑤
4. O *conceito* é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	①	②	③	④	⑤
5. Eu ter entendido o *conceito* implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	①	②	③	④	⑤
6. Eu ainda não entendi realmente o *conceito*.	①	②	③	④	⑤
7. Compreender o *conceito* foi como um "*clique*" e agora vejo o que realmente significa.	①	②	③	④	⑤
8. Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o *conceito*.	①	②	③	④	⑤
9. Agora que entendi o *conceito*, acho que seria difícil esquecê-lo.	①	②	③	④	⑤
10. Entender o *conceito* fez-me sentir mais como um matemático.	①	②	③	④	⑤
11. Foi difícil ver como o *conceito* se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	①	②	③	④	⑤
12. Assim que entendi o *conceito*, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	①	②	③	④	⑤
13. Vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o *conceito*.	①	②	③	④	⑤

Questionário de um estudante do 12. Ano (Feminino)

I – GÉNERO MASCULINO ☐ FEMININO ☒

II – ANO DE ESCOLARIDADE 9.º ANO ☐ 12.º ANO ☒

III - NA TUA OPINIÃO DOS CONCEITOS ABAIXO INDICADOS, DIZ, INDICANDO COM UM X, QUAL FOI PARA TI O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL E O MENOS COMPLICADO/FÁCIL DE PERCEBER:

CONCEITO/TERMO/IDEIA/NOÇÃO	MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL	MENOS COMPLICADO/FÁCIL
ACASO		
ACONTECIMENTO		
CASOS POSSÍVEIS E CASOS FAVORÁVEIS		
EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA		
LANÇAMENTO DE MOEDAS/DADOS		
LEI (OU REGRA) DE LAPLACE		
LEI DOS GRANDES NÚMEROS		X
PROBABILIDADE		
QUOCIENTE		
TÉCNICAS DE CONTAGEM DE CASOS	X	
VALOR NUMÉRICO		

IV – EM RELAÇÃO AO CONCEITO REFERIDO ANTERIORMENTE COMO O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER PRETENDE-SE QUE OPINES SOBRE DIFERENTES ASPETOS. NUM DOS EXTREMOS DESTA ESCALA ESTÁ O "***1-TOTALMENTE EM DESACORDO***" E NO OUTRO EXTREMO "***5-TOTALMENTE DE ACORDO***".

CONCEITO MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER	Totalmente em desacordo		Nem em desacordo nem acordo		Totalmente de acordo
1. Eu acho que o ***conceito*** é fácil de explicar a um outro colega.	①	②	③	④	⑤
2. O entendimento do ***conceito*** transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	①	②	③	④	⑤
3. Eu consigo ver aplicações do ***conceito*** a outras áreas e disciplinas.	①	②	③	④	⑤
4. O ***conceito*** é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	①	②	③	④	⑤
5. Eu ter entendido o ***conceito*** implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	①	②	③	④	⑤
6. Eu ainda não entendi realmente o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
7. Compreender o ***conceito*** foi como um "*clique*" e agora vejo o que realmente significa.	①	②	③	④	⑤
8. Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
9. Agora que entendi o ***conceito***, acho que seria difícil esquecê-lo.	①	②	③	④	⑤
10. Entender o ***conceito*** fez-me sentir mais como um matemático.	①	②	③	④	⑤
11. Foi difícil ver como o ***conceito*** se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	①	②	③	④	⑤
12. Assim que entendi o ***conceito***, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	①	②	③	④	⑤
13. Vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤

Questionário de um estudante do 12. Ano (Feminino)

I – GÉNERO MASCULINO [X] FEMININO [ ]

II – ANO DE ESCOLARIDADE 9.º ANO [ ] 12.º ANO [X]

III - NA TUA OPINIÃO DOS CONCEITOS ABAIXO INDICADOS, DIZ, INDICANDO COM UM X, QUAL FOI PARA TI O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL E O MENOS COMPLICADO/FÁCIL DE PERCEBER:

CONCEITO/TERMO/IDEIA/NOÇÃO	MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL	MENOS COMPLICADO/FÁCIL
ACASO		
ACONTECIMENTO		X
CASOS POSSÍVEIS E CASOS FAVORÁVEIS		
EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA		
LANÇAMENTO DE MOEDAS/DADOS		
LEI (OU REGRA) DE LAPLACE		
LEI DOS GRANDES NÚMEROS		
PROBABILIDADE		
QUOCIENTE		
TÉCNICAS DE CONTAGEM DE CASOS	X	
VALOR NUMÉRICO		

IV – EM RELAÇÃO AO CONCEITO REFERIDO ANTERIORMENTE COMO O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER PRETENDE-SE QUE OPINES SOBRE DIFERENTES ASPETOS. NUM DOS EXTREMOS DESTA ESCALA ESTÁ O "***1-TOTALMENTE EM DESACORDO***" E NO OUTRO EXTREMO "***5-TOTALMENTE DE ACORDO***".

CONCEITO MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER	Totalmente em desacordo		Nem em desacordo nem acordo		Totalmente de acordo
1. Eu acho que o ***conceito*** é fácil de explicar a um outro colega.	①	②	③	④	⑤
2. O entendimento do ***conceito*** transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	①	②	③	④	⑤
3. Eu consigo ver aplicações do ***conceito*** a outras áreas e disciplinas.	①	②	③	④	⑤
4. O ***conceito*** é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	①	②	③	④	⑤
5. Eu ter entendido o ***conceito*** implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	①	②	③	④	⑤
6. Eu ainda não entendi realmente o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
7. Compreender o ***conceito*** foi como um "*clique*" e agora vejo o que realmente significa.	①	②	③	④	⑤
8. Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
9. Agora que entendi o ***conceito***, acho que seria difícil esquecê-lo.	①	②	③	④	⑤
10. Entender o ***conceito*** fez-me sentir mais como um matemático.	①	②	③	④	⑤
11. Foi difícil ver como o ***conceito*** se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	①	②	③	④	⑤
12. Assim que entendi o ***conceito***, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	①	②	③	④	⑤
13. Vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤

Questionário de um estudante do 12. Ano (Masculino)

I – GÉNERO MASCULINO [X] FEMININO [ ]

II – ANO DE ESCOLARIDADE 9.º ANO [ ] 12.º ANO [X]

III - NA TUA OPINIÃO DOS CONCEITOS ABAIXO INDICADOS, DIZ, INDICANDO COM UM X, QUAL FOI PARA TI O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL E O MENOS COMPLICADO/FÁCIL DE PERCEBER:

CONCEITO/TERMO/IDEIA/NOÇÃO	MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL	MENOS COMPLICADO/FÁCIL
ACASO		
ACONTECIMENTO		
CASOS POSSÍVEIS E CASOS FAVORÁVEIS		
EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA		
LANÇAMENTO DE MOEDAS/DADOS		
LEI (OU REGRA) DE LAPLACE		X
LEI DOS GRANDES NÚMEROS		
PROBABILIDADE		
QUOCIENTE		
TÉCNICAS DE CONTAGEM DE CASOS	X	
VALOR NUMÉRICO		

IV – EM RELAÇÃO AO CONCEITO REFERIDO ANTERIORMENTE COMO O MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER PRETENDE-SE QUE OPINES SOBRE DIFERENTES ASPETOS. NUM DOS EXTREMOS DESTA ESCALA ESTÁ O "1-*TOTALMENTE EM DESACORDO*" E NO OUTRO EXTREMO "5-*TOTALMENTE DE ACORDO*".

CONCEITO MAIS COMPLICADO/DIFÍCIL DE ENTENDER	Totalmente em desacordo		Nem em desacordo nem acordo		Totalmente de acordo
1. Eu acho que o ***conceito*** é fácil de explicar a um outro colega.	①	②	③	④	⑤
2. O entendimento do ***conceito*** transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	①	②	③	④	⑤
3. Eu consigo ver aplicações do ***conceito*** a outras áreas e disciplinas.	①	②	③	④	⑤
4. O ***conceito*** é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	①	②	③	④	⑤
5. Eu ter entendido o ***conceito*** implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	①	②	③	④	⑤
6. Eu ainda não entendi realmente o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
7. Compreender o ***conceito*** foi como um *"clique"* e agora vejo o que realmente significa.	①	②	③	④	⑤
8. Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤
9. Agora que entendi o ***conceito***, acho que seria difícil esquecê-lo.	①	②	③	④	⑤
10. Entender o ***conceito*** fez-me sentir mais como um matemático.	①	②	③	④	⑤
11. Foi difícil ver como o ***conceito*** se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	①	②	③	④	⑤
12. Assim que entendi o ***conceito***, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	①	②	③	④	⑤
13. Vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o ***conceito***.	①	②	③	④	⑤

Questionário de um estudante do 12. Ano (Masculino)