



TESIS DOCTORAL

*Espacios Twisted Hilbert y
Transformaciones de Espacios
Quasinormados*

Daniel Morales González

Programa de doctorado
Modelización y experimentación en Ciencia y Tecnología

2022



TESIS DOCTORAL

*Espacios Twisted Hilbert y
Transformaciones de Espacios
Quasinormados*

Daniel Morales González

Programa de doctorado
Modelización y experimentación en Ciencia y Tecnología

2022

V.º B.º. de los directores de Tesis

Dr. D. Jesús Fernández Castillo

Dr. D. Javier Cabello Sánchez

Índice general

Introducción	1
Preliminares	5
0.1. Interpolación de parejas de espacios de Banach	6
0.2. Interpolación de familias	13
0.3. Otras formas de interpolar	15
I Transformaciones de espacios quasinormados	17
1. Quasinormas en espacios de dimensión finita	19
1.1. Quasinormas en espacios de dimensión finita	19
1.2. El espacio \mathcal{Q}	26
2. Transformaciones de espacios quasinormados	29
2.1. Transformaciones por segmentos métricos	30
2.2. Normas Difusas	35
II Interpolación compleja y espacios twisted Hilbert	39
3. Interpolación compleja	41
3.1. Sumas torcidas y centralizadores	42
3.2. Interpolación compleja y derivaciones	43
3.3. Factorización	46
3.4. Fragmentación y amalgama de escalas de interpolación	55
4. Espacios twisted Hilbert	61
4.1. El espacio de Kalton y Peck fragmentado	63

4.2. Otros twisted Hilbert	65
4.3. Espacio asintóticamente Hilbert y no débil Hilbert	67
4.4. Espacio con la propiedad $E(n, n, K)$ y que no es asintóticamente Hilbert	70
4.5. Espacio HAPpy sin la propiedad $E(n, n, K)$	75
4.6. Mapas	80
Bibliografía	86

Agradecimientos

La personalidad es como un trozo de hierro que hay que forjar, uno sostiene el martillo y hay que golpear cuando el fuego ya ha calentado la pieza, buscando eliminar la escoria que hay entremezclada en el interior. Si uno dispone de la ayuda de un buen yunque el trabajo se hará mucho más cómodo. Me gusta pensar que la personalidad es tan maleable como el hierro forjado en caliente; pero también frágil en frío. Los que me han ayudado a hacer este trabajo son todos los que han cambiado mi personalidad, ¡a veces a martillazos!

Si pensamos en este trabajo como un pedacito de mi personalidad, el fuego lo ha puesto Jesús; sin fuego no hay manera de forjar. Javi me dio el yunque; se podría haber forjado sin él, pero el resultado sería muchísimo peor a pesar de haber hecho mucho más esfuerzo. El martillo me lo dio mi familia cuando me educó. Si uno solo hubiera dispuesto de una piedra para golpear...

Agradezco también al resto de miembros del grupo y sus seminarios, Félix, Ricardo, Alberto y Jesús; de cada uno de ellos he intentado tomar cachitos de personalidad. El humor de Félix, la tranquilidad de Ricardo, el “no-parar” de Alberto y de Jesús la seriedad por su trabajo.

No pueden faltar Sergio, Álvaro, Jose Carlos, Rosa, Jaime y Alberto, los amigos que aguantan mis turras míticas, a veces matemáticas, a veces no.

También me siento agradecido con Willian, Wilson, Valentin, Christina y Leandro, que hicieron muy agradable mi estancia en São Paulo.

No quiero enrollarme más. Muchos nombres no aparecen aquí, pero si alguna vez hemos compartido una comida teniendo una buena conversación seguramente hayas dado algún martillazo que otro.

Para terminar, agradezco la ayuda de financiación de la beca BES-2017-079901 ligada al proyecto MTM2016-76958-C2-1-P.

Introducción

Ésta no es una tesis centrada en un tema, desarrollando distintas facetas del mismo y obteniendo nuevos resultados y aplicaciones de diferente interés que resuelven algunos problemas abiertos.

O sí.

Solo que ese tema central no es explícito. Y si lo es, no lo es explícitamente.

Porque esta tesis trata de cómo transformar con continuidad la bola unidad de una quasinorma en otra. El significado de “con continuidad” necesita una explicación que se dará en el Capítulo 1, que trata sobre el *espacio vectorial* de las quasinormas en \mathbb{R}^n : no es un estudio de propiedades topológicas del conjunto de las quasinormas dentro del espacio de las funciones continuas en \mathbb{R}^n , sino que se dota al conjunto de las quasinormas \mathcal{Q} de una estructura natural de espacio vectorial (primero) y de espacio de Banach (a continuación). La configuración de esa estructura debe mucho al tema desarrollado en la segunda parte de la memoria: la interpolación compleja.

Una vez construido el espacio de Banach \mathcal{Q} , el Capítulo 2 desarrolla la idea de transformación continua entre la bola unidad de la quasinorma $\|\cdot\|_1$ y la de la quasinorma $\|\cdot\|_2$ y la cristaliza disponiendo de una curva continua en \mathcal{Q} entre $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$. Estas ideas, de nuevo, deben bastante a la teoría de interpolación: después de todo, una escala de interpolación de extremos X_0 y X_1 es, en cierto modo, una transformación continua entre la bola unidad de X_0 y la de X_1 en la que “los estados intermedios” son (las bolas unidad de) los espacios de la escala.

El material contenido en los Capítulos 1 y 2 forma parte del artículo

[6] The Banach space of quasinorms on a finite-dimensional space, (J. Cabello Sánchez, D. Morales), *The Journal of Geometric Analysis* 31 (2021), 11338-11356.

La información básica acerca de la teoría de interpolación, métodos de interpolación y, en particular, el método de interpolación compleja, puede encontrarse en la sección de Preliminares.

Durante la segunda parte, trabajaremos en el contexto de los espacios de Köthe. Para ponerles cara en esta Introducción, pensemos en espacios de Banach con base incondicional que llevan asociada una estructura natural de ℓ_∞ -módulo. Un centralizador Ω actuando en un ℓ_∞ -módulo X es una aplicación homogénea $\Omega : X \rightarrow \ell_\infty$ con la propiedad de que para cierta constante C , todo $\xi \in \ell_\infty$ y $x \in X$ se tiene que $\Omega(\xi x) - \xi\Omega(x) \in X$ y, además

$$\|\Omega(\xi x) - \xi\Omega(x)\| \leq C\|\xi\|_\infty\|x\|.$$

Cada vez que un espacio X se obtiene por interpolación compleja a partir de una familia $(X_\omega)_\omega$ de espacios de Banach, se genera un centralizador Ω en X . De modo que ya tenemos una conexión entre familias de espacios de Banach distribuidas en la frontera de un dominio del plano complejo y centralizadores (definidos en el correspondiente espacio de interpolación generado por la familia). El teorema central que establece dicha conexión es el Teorema de Kalton, tal y como se cuenta en el Capítulo 3. Nuestro trabajo en este capítulo consiste en establecer la conexión entre el centralizador Ω y la configuración de los espacios de la familia en la frontera. Pongamos el ejemplo más sencillo: si elegimos la banda unidad $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ y la familia $X_\omega = X_0$ para $\omega = it$ y $X_\omega = X_1$ para $\omega = 1 + it$ y llamamos X al espacio interpolado en $1/2$ y Ω al centralizador asociado en X resulta que cambiar la disposición de la familia y poner $X_\omega = X_1$ para $\omega = it$ y $X_\omega = X_0$ para $\omega = 1 + it$ produce el mismo espacio interpolado X mientras que el centralizador cambia a $-\Omega$. Es decir, que mientras que el proceso de interpolación no es sensible a la configuración de los espacios de la familia, la obtención del centralizador sí lo es.

En el Capítulo 3 estudiaremos la relación entre diferentes configuraciones de un número finito de espacios equidistribuidos en arcos de la circunferencia unidad y los centralizadores que generan. Dos resultados típicos de este capítulo son el que hemos denominado Lema de la Mariposa y otro que establece qué configuración de espacios genera el centralizador $\Omega + \Phi i$ a partir de las configuraciones que generan Ω y Φ .

En el capítulo se incluyen aplicaciones de las ideas anteriores que completan algunos aspectos del Teorema de Kalton y un estudio del proceso de fragmentación y amalgama de escalas de interpolación.

El material de este capítulo forma parte de los artículos

[13] The Butterfly lemma (JMF Castillo, D. Morales), *Nonlinear Analysis* 215 (2022), 112630, 9 pp.

[14] Derivation of vector valued complex interpolation scales (JMF Castillo, D.

Morales, J. Suárez de la Fuente), *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 468 (2018), 461-472.

Un espacio twisted Hilbert es un espacio de Banach X que tiene un subespacio de Hilbert H de modo que X/H es también un espacio de Hilbert. Es claro que un espacio twisted Hilbert posee todas las propiedades de los espacios de Hilbert que sean propiedades 3-espacios (superreflexividad, ℓ_2 -saturación, ...). Acerca del resto de propiedades, en general, las de los espacios twisted Hilbert están *cerca* de las de los espacios de Hilbert (tienen tipo p para todo $p < 2$ y cotipo q para todo $q > 2$, ...).

La comprensión de los espacios twisted Hilbert pasa por determinar si es posible construir (y cómo) espacios twisted Hilbert que sean o bien *muy diferentes* de los espacios de Hilbert o bien *muy parecidos*... sin llegar a ser Hilbert. Esta idea está presente en el artículo [43] *A weak Hilbert space that is a twisted Hilbert space* (J. Suárez de la Fuente) *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 19 (2020), 855-867, donde el autor cumple la aparentemente imposible tarea de construir un espacio twisted Hilbert que es débil Hilbert y no Hilbert. Siguiendo con estas ideas, tenemos el artículo

[37] *Some more twisted Hilbert spaces* (D. Morales, J. Suárez de la Fuente) *Annales Fennici Mathematici* 46 (2021), 819-837.

cuyo contenido conforma el último capítulo de la tesis y donde podemos encontrar tres nuevos ejemplos de espacios twisted Hilbert bastante singulares: un espacio asintóticamente Hilbert pero no débil Hilbert, un espacio no asintóticamente Hilbert y un espacio HAPpy (un espacio cuyos subespacios tienen la Propiedad de Aproximación).

El material que compone la tesis es en su mayor parte original. Podríamos haber doblado el tamaño de la tesis incorporando otros resultados de la literatura, que seguramente habrían sido necesarios para poner los nuestros en contexto. Y quizá debería haberlo hecho. La primera decisión arriesgada ha sido no hacerlo. Pero sí me gustaría dejar aquí constancia de los mismos: el Teorema de Kalton, las construcciones de Enflo, Lindenstrauss y Pisier, y la de Kalton y Peck, y por supuesto, la construcción de Jesús Suárez de un espacio débil Hilbert que es también twisted Hilbert.

Preliminares

Sea X un espacio vectorial. Diremos que una aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una *quasinorma* sobre X si cumple

- 1) $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in X$ y $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 3) Existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$, para todos $x, y \in X$.

Si $C = 1$ entonces decimos que $\|\cdot\|$ es una *norma*. Al espacio X dotado de una quasinorma (resp. norma) lo llamaremos *espacio quasinormado* (resp. normado), y si además, el espacio es completo diremos que es un espacio *quasi-Banach* (resp. de Banach). Cuando pueda haber dudas sobre qué quasinorma estemos considerando en X usaremos la notación $(X, \|\cdot\|)$.

Ejemplo. Sea (U, μ) un espacio de medida, donde μ es una medida positiva, y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o \mathbb{C} dotado de su medida de Lebesgue. Identificamos, haciendo cociente, las funciones medibles $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ que coincidan salvo en un conjunto de medida nula. Sea $0 < p < \infty$, denotamos por $L_p(U, \mu, \mathbb{K})$, o simplemente $L_p(U)$, al espacio de las funciones medibles $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_U |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}$$

es finito. Cuando $1 \leq p < \infty$ el espacio $L_p(U)$ es un espacio de Banach, y cuando $0 < p < 1$, $L_p(U)$ es quasi-Banach. El espacio $L_\infty(U)$ es el espacio de Banach que está formado por las funciones medibles y acotadas, y su norma es

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in U} |f(x)|.$$

Escribiremos L_p cuando el espacio de medida sea la semirrecta que forman los reales positivos $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ con su medida de Lebesgue y ℓ_p cuando estemos considerando los números naturales con la medida de contar.

Llamamos bola unidad de un espacio quasinormado al conjunto $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, y cumple las propiedades siguientes:

- 1) Es absorbente; para cada $x \in X$, existe $\sigma > 0$ tal que $x \in \sigma B$.
- 2) Es acotado;

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} B = \{0\}.$$

- 3) Es equilibrado; si $x \in B$ y $|\lambda| \leq 1$ entonces $\lambda x \in B$.

Recíprocamente, es fácil ver que dado un conjunto B que cumpla estas propiedades, su funcional de Minkowski, $\rho_B(x) = \inf\{\sigma > 0 : x \in \sigma B\}$, es una quasinorma sobre X . La bola unidad de un espacio normado es un conjunto que cumple las propiedades anteriores y además

- 4) Es convexo; si $x, y \in B$ entonces $(1 - \theta)x + \theta y \in B$, para todo $0 < \theta < 1$.

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio quasinormado, las bolas abiertas $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \|y - x\| < \varepsilon\}$ son entornos básicos que generan la topología sobre X inducida por la quasinorma $\|\cdot\|$. Dados dos espacios normados X e Y , y una aplicación lineal $T : X \rightarrow Y$ sabemos que T es continua cuando sea acotada en la bola, es decir, que

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} < \infty,$$

y diremos que T tiene norma $\|T\|$.

0.1. Interpolación de parejas de espacios de Banach

Veamos algunas definiciones que aparecen en [2].

Definición 0.1. Sea Σ un espacio vectorial topológico Hausdorff al que llamaremos espacio ambiente y sean dos espacios de Banach X_0 y X_1 con inclusiones lineales y continuas $i_0 : X_0 \rightarrow \Sigma$, $i_1 : X_1 \rightarrow \Sigma$. Llamaremos a (X_0, X_1) pareja compatible de espacios de Banach.

Nota. Es esencial observar que una pareja compatible (X_0, X_1) no solamente es el par de espacios de Banach X_0 y X_1 . Siempre que escribamos *pareja compatible* (X_0, X_1) nos estaremos refiriendo a los espacios X_0 y X_1 que podemos identificar como subespacios de un espacio ambiente Σ a través de las inclusiones i_0, i_1 .

Dada una pareja compatible de espacios de Banach (X_0, X_1) , podemos formar el espacio suma $X_0 + X_1 = \{x \in \Sigma : x = x_0 + x_1, x_j \in X_j, j = 0, 1\}$, que es un espacio de Banach con la norma $\|x\|_{X_0+X_1} = \inf_{x=x_0+x_1} \{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\}$, y el espacio intersección $X_0 \cap X_1 = \{x \in \Sigma : x \in X_j, j = 0, 1\}$, que es de Banach con la norma $\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}$.

Definición 0.2. Dada una pareja compatible (X_0, X_1) de espacios de Banach, un espacio de Banach X es un espacio intermedio entre X_0 y X_1 si es un subespacio de $X_0 + X_1$ que contiene a $X_0 \cap X_1$ como subespacio. El espacio X es un espacio interpolado entre X_0 y X_1 si además cualquier operador $T : X_0 + X_1 \rightarrow X_0 + X_1$ tal que $T(X_0) \subset X_0$ y $T(X_1) \subset X_1$ cumple que $T(X) \subset X$.

Obsérvese que cuando los espacios X_0 y X_1 son de dimensión finita, los espacios que sean interpolados, lo serán con cualquier norma. Por tanto, el problema de encontrar un espacio interpolado entre espacios de dimensión finita es una cuestión algebraica.

Ejemplo 0.3. Consideremos \mathbb{R}^3 como espacio ambiente, los espacios $X_0 = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ y $X_1 = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, y las inclusiones

$$i_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y) \mapsto (x, y, 0)$$

y

$$i_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad z \mapsto (0, 0, z).$$

El espacio suma es $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ porque la única descomposición posible de $(x, y, z) \in X_0 + X_1$ es $(x, y, 0) + (0, 0, z)$, y por tanto

$$\|(x, y, z)\| = \|x, y\|_1 + |z|.$$

El espacio intersección es $X_0 \cap X_1 = 0$.

Los espacios interpolados entre X_0 y X_1 son \mathbb{R}^3 , y los subespacios $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ y el 0. Un espacio que no es interpolado es $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$, porque las rotaciones T cuyo eje es el subespacio X_1 , cumplen que $T(X_0) \subset X_0$ y $T(X_1) \subset X_1$ pero no que $T(E) \subset E$, véase la Figura 1.

Ejemplo 0.4. Si del ejemplo anterior conservamos tanto el espacio ambiente como la inclusión i_0 , pero cambiamos de lugar al espacio X_1 , por ejemplo, consideramos la inclusión

$$j_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad x \mapsto (x, 0, 0),$$

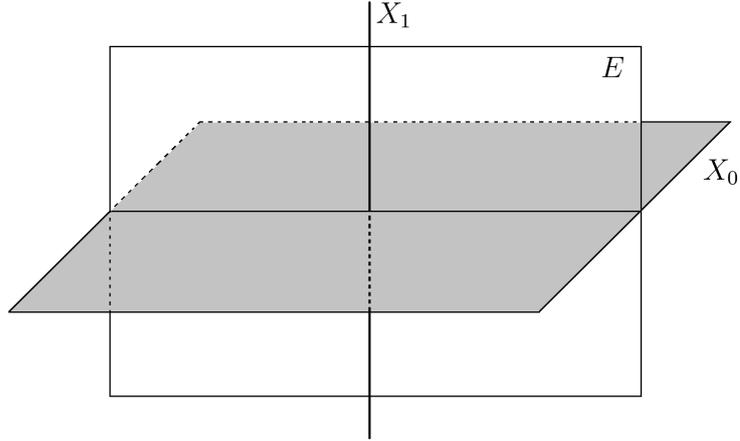


Figura 1

es fácil comprobar que el espacio suma es $X_0 + X_1 = X_0$ y el espacio intersección es $X_0 \cap X_1 = X_1$.

En este caso, los espacios interpolados son los subespacios $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ y $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\}$.

Vamos a denotar por \mathcal{B} a la categoría cuyos objetos son los espacios de Banach y los morfismos son los operadores. Denotaremos por \mathcal{C} a la categoría que tiene por objetos las parejas compatibles de espacios de Banach y cuyos morfismos de (X_0, X_1) en (Y_0, Y_1) son los operadores $T : X_0 + X_1 \rightarrow Y_0 + Y_1$ tales que $T : X_0 \rightarrow Y_0$ y $T : X_1 \rightarrow Y_1$ son operadores.

Definición 0.5. *Un método de interpolación de parejas es un funtor $F : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ tal que $F(X_0, X_1)$ es un espacio interpolado entre X_0 y X_1 , y tal que $F(T) = T$ para todo $T : (X_0, X_1) \rightarrow (X_0, X_1)$.*

Los dos ejemplos más sencillos de método de interpolación son el funtor intersección $\Delta(X_0, X_1) = X_0 \cap X_1$ y el funtor suma $\Sigma(X_0, X_1) = X_0 + X_1$, con $\Delta(T) = \Sigma(T) = T$.

0.1.1. El método K

Ya sabemos que dada una pareja compatible (X_0, X_1) de espacios de Banach, la función

$$\|x\|_{X_0+X_1} = \inf_{x=x_0+x_1} \{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\}$$

es una norma en $X_0 + X_1$. Pues bien, dado $x \in X_0 + X_1$ y $t > 0$, se define el funcional K por

$$K(t, x) = \inf_{x=x_0+x_1} \{ \|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} \}.$$

Es fácil ver que para cada $t > 0$, $K(t, \cdot)$ es una norma en $X_0 + X_1$ y que además es equivalente a $\| \cdot \|_{X_0+X_1}$ puesto que

$$\min\{1, t\}(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}) \leq \|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} \leq \max\{1, t\}(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}).$$

Vamos a construir un espacio de interpolación usando el funcional $\Phi_{\theta,q}$, que de cierta forma promedia los valores de una función no negativa $f(t)$. Dados $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, este funcional se define como

$$\Phi_{\theta,q}(f(t)) = \left(\int_0^\infty \left(\frac{f(t)}{t^\theta} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Observar que si fijamos $x \in X_0 + X_1$, la función $t \mapsto K(t, x)$ es no negativa. Se define $(X_0, X_1)_{\theta,q;K}$ como el espacio formado por todos los $x \in X_0 + X_1$ para los que los valores

$$\|x\|_{\theta,q;K} = \begin{cases} \Phi_{\theta,q}(K(t, x)) & \text{para } 1 \leq q < \infty, \\ \sup_t \frac{K(t, x)}{t^\theta} & \text{si } q = \infty, \end{cases}$$

son finitos, y se demuestra que es un espacio interpolado entre X_0 y X_1 , véase el Teorema 3.1.2 de [2].

0.1.2. El método J

De la misma manera que construíamos el método K a partir del espacio X_0+X_1 , ahora nos fijaremos en el espacio $X_0 \cap X_1$ para construir el método J . Dado $x \in X_0 \cap X_1$ y $t > 0$, el funcional J se define por

$$J(t, x) = \max\{\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}\}.$$

Al igual que en el método K , para todos los $t > 0$, $J(t, \cdot)$ son normas equivalentes en $X_0 \cap X_1$, pues

$$\min\{1, t\} \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\} \leq J(t, x) \leq \max\{1, t\} \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}.$$

El espacio $(X_0, X_1)_{\theta, q; J}$ es un espacio interpolado (véase el Teorema 3.2.2 de [2]) entre X_0 y X_1 que está formado por los elementos $x \in X_0 \cap X_1$ que se pueden escribir de la forma

$$x = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t},$$

siendo $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X_0 \cap X_1$ una aplicación medible que cumple $\Phi_{\theta, q}(J(t, u(t))) < \infty$. La norma de $(X_0, X_1)_{\theta, q; J}$ se define como

$$\|x\|_{\theta, q; J} = \inf_u \Phi_{\theta, q}(J(t, u(t))),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles elecciones de u .

0.1.3. Método de interpolación real y espacios de Lorentz

Debido al siguiente teorema, se suele hablar del método de interpolación real, y los espacios interpolados se denotan por $(X_0, X_1)_{\theta, q}$.

Teorema (Teorema 3.3.1. de [2]) *Si $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, se tiene que $(X_0, X_1)_{\theta, q; K} = (X_0, X_1)_{\theta, q; J}$ con equivalencia de normas.*

Introduzcamos los espacios de Lorentz. Consideremos la semirrecta que forman los reales positivos $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, dotada de la medida de Lebesgue que denotaremos por m . Sea L_0 el espacio de las funciones medibles $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, donde identificamos funciones que coinciden salvo en un conjunto de medida nula. Dada una función $f \in L_0$, su función de distribución λ_f se define como

$$\lambda_f(t) = m\{s : |f(s)| > t\},$$

y su reordenamiento decreciente es

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}.$$

Intuitivamente hablando, para una función positiva f , si suponemos que el conjunto que queda por debajo de la gráfica de f son tablas apiladas, el reordenamiento de f se consigue empujando todas esas tablas hacia la izquierda hasta que quedan pegadas al eje vertical (ver Figura 2).

Ahora, dados $0 < p, q \leq \infty$ ponemos

$$\|f\|_{p, q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & \text{para } q < \infty, \\ \sup_t t^{1/p} f^*(t) & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

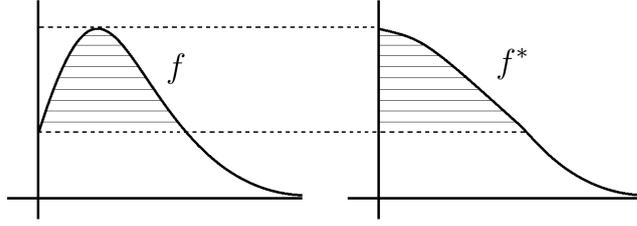


Figura 2

El espacio de Lorentz $L_{p,q}$ es el espacio de todas las funciones $f \in L_0$ para las que $\|f\|_{p,q}$ es finito. Los espacios $L_{p,q}$ son por lo general espacios quasinormados, y se tiene que $L_{p,p} = L_p$ con igualdad de normas. Hay una dependencia clara entre un espacio $L_{p,q}$ y los inversos de sus índices p^{-1} y q^{-1} , por lo que en los ejemplos y figuras de esta sección los representaremos en un cuadrado como el de la Figura 3.

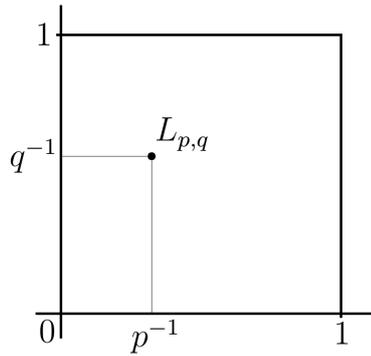


Figura 3

La siguiente fórmula indica cómo interpolar los espacios de Lorentz por el método de interpolación real.

Teorema (Teorema 5.3.1. de [2]) Sean $0 < p_0, p_1, q_0, q_1, q \leq \infty$, y p tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

con $0 < \theta < 1$. Si $p_0 \neq p_1$ entonces

$$(L_{p_0, q_0}, L_{p_1, q_1})_{\theta, q} = L_{p, q}.$$

Y en el caso $p_0 = p_1 = p$, la fórmula se cumple si

$$\frac{1}{q} = \frac{1 - \theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Observar en la Figura 4 que si vamos variando el valor de θ desde 0 hasta 1 los espacios interpolados resultarían en la línea discontinua horizontal, desde L_{p_0, q_0} hasta L_{p_1, q_1} .

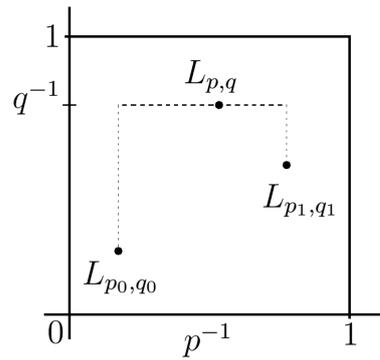


Figura 4

Un ejemplo concreto: Para ningún $0 < \theta < 1$ el espacio interpolado $(L_1, L_2)_{\theta, 3}$ es un espacio L_p (valdría cualquier $q > 2$). Véase la Figura 5.

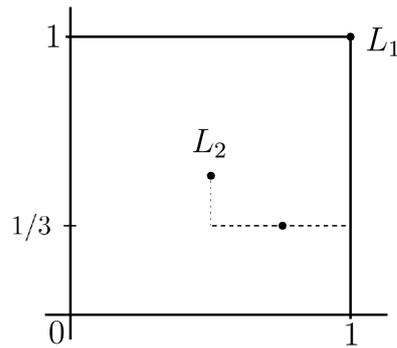


Figura 5

0.1.4. El método de interpolación compleja de Calderón

Consideremos el conjunto $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$. Dada una pareja compatible de espacios de Banach (X_0, X_1) , el espacio de Calderón \mathcal{C} (Sección 2 de [7]) está formado por las funciones $f : \bar{\mathbb{S}} \rightarrow X_0 + X_1$ que cumplen

- f es acotada y continua en $\bar{\mathbb{S}}$;
- f es analítica en \mathbb{S} ;
- Las funciones $h_j : \mathbb{R} \rightarrow X_j$, $t \mapsto f(j + it)$, con $j = 0, 1$, son continuas, y $h_j(t) \rightarrow 0$ cuando $|t| \rightarrow \infty$.

El espacio \mathcal{C} dotado con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \max\left\{\sup_t \|f(it)\|_0, \sup_t \|f(1 + it)\|_1\right\}.$$

es de Banach.

Se define $[X_0, X_1]_{\theta}$ como el espacio formado por todos los $x \in X_0 + X_1$ tales que $x = f(\theta)$ para alguna función $f \in \mathcal{C}$. La norma en $[X_0, X_1]_{\theta}$ es

$$\|x\|_{\theta} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{C}} : x = f(\theta)\}$$

y se demuestra que es un espacio interpolado entre X_0 y X_1 , véase el Teorema 4.1.2 de [2]. Llamaremos *escala de interpolación entre X_0 y X_1* a la familia de espacios interpolados $(X_{\theta})_{0 < \theta < 1}$.

0.2. Interpolación de familias

Consideremos el *disco unidad* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Denotaremos por $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1\}$ a la circunferencia unidad. Consideremos la curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{T}, \quad t \mapsto e^{it}.$$

Dado $A \subset \mathbb{T}$, denotaremos por μ a la medida de Haar en \mathbb{T} definida

$$\mu(A) = \frac{m(\gamma^{-1}(A))}{2\pi},$$

siendo m la medida de Lebesgue en $[0, 2\pi]$. El factor $(2\pi)^{-1}$ hace que $\mu(\mathbb{T}) = 1$ y si A es un arco de circunferencia entonces $\mu(A)$ es su longitud de arco dividida por 2π .

Consideraremos una familia de interpolación $(X_\xi)_{\xi \in \partial\mathbb{T}}$ de espacios de Banach, todos ellos contenidos de forma lineal y continua en un mismo espacio de Banach Σ , al que llamaremos *espacio ambiente*.

Una familia $(X_\xi)_{\xi \in \mathbb{T}}$ se dice que es *admisibile* si existen dos funciones $h, k \in L_0$ estrictamente positivas tales que dada $f \in L_0$ se cumple que $\|fh\|_1 \leq \|f\|_{X_\xi} \leq \|fk\|_\infty$ para todo $\xi \in \mathbb{T}$. Una familia admisibile $(X_\xi)_{\xi \in \mathbb{T}}$ se dice que es *fuertemente admisibile* si además existe un subespacio $V \subset L_0$ de dimensión numerable que es denso con respecto a la topología de L_0 en B_{X_ξ} para casi todos los $\xi \in \mathbb{T}$. Decimos que una familia es *finita* cuando está formada por finitos espacios distintos. Toda familia finita de espacios separables es fuertemente admisibile. Además, definir una familia en un subconjunto A de \mathbb{T} con $\mu(A) = 1$ es equivalente a definirla en todo \mathbb{T} .

Una función f analítica en \mathbb{D} se dice que *pertenece a la clase N^+* (página 16 y Teorema 2.10 de [21]) si las integrales

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$$

están uniformemente acotadas para $r < 1$, con la notación $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$, y además

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Dada una familia admisibile $(X_\xi)_{\xi \in \mathbb{T}}$, se define el espacio \mathcal{N}^+ de funciones $f : \mathbb{D} \rightarrow L_0$ tales que

- La función

$$F_s : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z)(s)$$

pertenece a la clase N^+ para todo $z \in \mathbb{D}$.

- $\|f\|_{\mathcal{N}^+} = \text{ess sup}_{\xi \in \mathbb{T}} \|f(\xi)\|_{X_\xi} < \infty$, siendo $\xi = e^{i\theta}$ y $f(\xi) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ con respecto a la topología de L_0 .

Para $z \in \mathbb{D}$ definimos X_z el espacio formado por todos los $x \in \Sigma$ tales que $x = f(z)$ para alguna función $f \in \mathcal{N}^+$. La norma en X_z es

$$\|x\|_z = \inf\{\|f\|_{\mathcal{N}^+} : x = f(\theta)\}.$$

0.3. Otras formas de interpolar

Cuando interpolamos una pareja, pedimos que ciertos operadores cumplan una acotación en los espacios interpolados, véanse las Definiciones 0.2 y 0.5, y en el caso de la interpolación de familias, el Teorema 2.7 de [27] establece una acotación similar en ciertos operadores en los espacios interpolados. En [19], Coifman y Semmes comentan que deberíamos buscar nuevos métodos de interpolación en los que no sea necesaria dicha acotación de los operadores en los espacios interpolados. La construcción que plantean es la que sigue.

Fijemos un espacio vectorial complejo V de dimensión finita y denotemos por $\mathcal{N}(V)$ el espacio de las normas sobre V . Sea D una región (conjunto abierto, conexo y no vacío) de \mathbb{R}^n y supongamos que tenemos dada una aplicación

$$f : \partial D \rightarrow \mathcal{N}(V).$$

Dar un *método de interpolación* es dar una aplicación

$$F : \bar{D} \rightarrow \mathcal{N}(V),$$

tal que $F(\xi) = f(\xi)$ para todo $\xi \in \partial D$. Diremos que $(V, F(z))$ (o simplemente $F(z)$) es el *espacio interpolado* en $z \in D$.

Hay que pedir que un método cumpla ciertas propiedades, por ejemplo, en [19] piden que el método esté relacionado con ciertas ecuaciones diferenciales. Como las regiones en \mathbb{R} son los intervalos, en cuya frontera tendremos dos espacios, digamos X e Y , podemos relacionar estos métodos de interpolación con las curvas en $\mathcal{N}(V)$ de X a Y .

Parte I

Transformaciones de espacios quasinormados

Capítulo 1

Quasinormas en espacios de dimensión finita

Perdona Jet, ¿no habías dicho que había qīngjiāo ròu sī?

Spike Spiegel

1.1. Quasinormas en espacios de dimensión finita

El objetivo principal de este capítulo es dotar de estructura de espacio de Banach al conjunto de las quasinormas continuas definidas en \mathbb{R}^n . Comenzaremos dotando a este conjunto de estructura de espacio vectorial. Elegiremos la norma $\|\cdot\|_2$ como el origen y el punto medio de $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ como la quasinorma

$$\|\cdot\|_X^{1/2} \|\cdot\|_Y^{1/2}.$$

Entonces, dada una quasinorma $\|\cdot\|_X$, su quasinorma opuesta $\|\cdot\|_{\tilde{X}}$ debe cumplir

$$\|\cdot\|_X^{1/2} \|\cdot\|_{\tilde{X}}^{1/2} = \|\cdot\|_2.$$

Definición 1.1. Denotemos $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ e $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_Y)$. Dado $\theta \in [0, 1]$, denotaremos por $(X, Y)_\theta$ al espacio \mathbb{R}^n dotado de la quasinorma $\|\cdot\|_X^\theta \|\cdot\|_Y^{1-\theta}$ y lo llamaremos espacio interpolado entre X e Y en θ .

Vamos a fijar $n \geq 2$ para el resto del capítulo. Denotaremos por \mathcal{Q}_0 al conjunto de todas las quasinormas continuas definidas en \mathbb{R}^n .

Definición 1.2. Denotemos por $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 / \sim$, con $\|\cdot\|_X \sim \|\cdot\|_Y$ si y solo si $\|\cdot\|_X = \lambda \|\cdot\|_Y$, para algún $\lambda > 0$. Pongamos $[[\cdot\|_2]$ como origen y definamos el punto medio de dos clases de quasinormas como

$$([\|\cdot\|_X], [\|\cdot\|_Y])_{1/2} = \left[\|\cdot\|_X^{1/2} \|\cdot\|_Y^{1/2} \right],$$

por lo que la opuesta de $[\|\cdot\|_X]$ es

$$\|\cdot\|_{\tilde{X}} = \frac{\|\cdot\|_2^2}{\|\cdot\|_X}$$

en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\|0\|_{\tilde{X}} = 0$; el producto por escalares viene dado por

$$\theta \star [\|\cdot\|_X] = [\|\cdot\|_X^\theta \|\cdot\|_2^{1-\theta}], \quad (-\theta) \star [\|\cdot\|_X] = [\|\cdot\|_{\tilde{X}}^\theta \|\cdot\|_2^{1-\theta}]$$

para $\theta \in [0, \infty)$; y la suma de dos clases de quasinormas por

$$[\|\cdot\|_X] \oplus [\|\cdot\|_Y] = 2 \star \left[\|\cdot\|_{(X,Y)_{1/2}} \right].$$

Proposición 1.3. \mathcal{Q} es un espacio vectorial.

Demostración. Para cualquier par de quasinormas continuas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ sobre \mathbb{R}^n y dado $\theta > 0$, el conjunto

$$B_\theta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_X^\theta \|x\|_Y^{1-\theta} \leq 1\}$$

es absorbente, acotado y equilibrado, por lo que $\|\cdot\|_X^{1/2} \|\cdot\|_Y^{1/2}$ es una quasinorma, y es continua porque $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ lo son. El producto por escalares y la suma también están bien definidas y está claro que estas operaciones no dependen del representante elegido. \square

Una vez que tenemos la estructura de espacio vectorial introduciremos en \mathcal{Q} la siguiente distancia multiplicativa definida en [31] y [41] dada por:

$$d([\|\cdot\|_X], [\|\cdot\|_Y]) = \min\{\mu : \|\cdot\|_X \leq \lambda \|\cdot\|_Y \leq \mu \|\cdot\|_X \text{ para algún } \lambda > 0\}. \quad (1.a)$$

Usaremos la palabra *quasinorma* de aquí hasta el final del capítulo para referirnos a quasinorma continua.

Proposición 1.4. La función d definida en (1.a) es una distancia multiplicativa.

Demostración. Vamos a ver que d cumple las propiedades:

1. $d(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y) = 1$ si y solo si $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ son proporcionales.
2. $d(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y) = d(\|\cdot\|_Y, \|\cdot\|_X)$.
3. $d(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y) \leq d(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Z)d(\|\cdot\|_Z, \|\cdot\|_Y)$.

La primera propiedad es obvia por cómo hemos construido el cociente.
La simetría se debe a que

$$\begin{aligned}
d(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y) &= \min\{\mu : \|\cdot\|_X \leq \lambda\|\cdot\|_Y \leq \mu\|\cdot\|_X\} \\
&= \min\{\mu : \|\cdot\|_X \leq \lambda\|\cdot\|_Y \leq \mu\|\cdot\|_X \leq \mu\lambda\|\cdot\|_Y\} \\
&= \min\{\mu : \lambda\|\cdot\|_Y \leq \mu\|\cdot\|_X \leq \mu\lambda\|\cdot\|_Y\} \\
&= \min\{\mu : \|\cdot\|_Y \leq \frac{\mu}{\lambda}\|\cdot\|_X \leq \mu\|\cdot\|_Y\} \\
&= d(\|\cdot\|_Y, \|\cdot\|_X).
\end{aligned}$$

Y para la desigualdad triangular, pongamos que $\mu = d(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Z)$ y que $\mu' = d(\|\cdot\|_Z, \|\cdot\|_Y)$. Existen λ, λ' tales que

$$\|\cdot\|_X \leq \lambda\|\cdot\|_Z \leq \mu\|\cdot\|_X \quad \text{y} \quad \|\cdot\|_Z \leq \lambda'\|\cdot\|_Y \leq \mu'\|\cdot\|_Z,$$

y uniendo ambas parejas de desigualdades obtenemos que

$$\|\cdot\|_X \leq \lambda\|\cdot\|_Z \leq \lambda\lambda'\|\cdot\|_Y \leq \lambda\mu'\|\cdot\|_Z \leq \mu\mu'\|\cdot\|_X,$$

lo que implica que $d(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y) \leq \mu\mu' = d(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Z)d(\|\cdot\|_Z, \|\cdot\|_Y)$. \square

Lema 1.5. Sean dos quasinormas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$, $\lambda > 0$ y $\mu \geq 1$ tales que $\|\cdot\|_X \leq \lambda\|\cdot\|_Y \leq \mu\|\cdot\|_X$. Entonces $\mu = d(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y)$ si y solo si los conjuntos $S_X \cap \lambda^{-1}S_Y$ y $\lambda^{-1}S_Y \cap \mu^{-1}S_X$ son no vacíos.

Además, $\mu = d(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y)$ si y solo si existen dos representantes $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ tales que:

1. $\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_Y \leq \mu\|\cdot\|_X$.
2. Existen $x \in S_X \cap S_Y$ e $y \in S_Y \cap \mu^{-1}S_X$.

Demostración. La cadena de desigualdades $\|\cdot\|_X \leq \lambda\|\cdot\|_Y \leq \mu\|\cdot\|_X$ es equivalente a la cadena de inclusiones $\mu^{-1}B_X \subset \lambda^{-1}B_Y \subset B_X$. Supongamos que $S_X \cap \lambda^{-1}S_Y = \emptyset$. La distancia entre los compactos $\lambda^{-1}B_Y$ y S_X se alcanzaría y sería estrictamente positiva. Por tanto existiría $\varepsilon > 0$ tal que

$$(1 + \varepsilon)\mu^{-1}B_X \subset (1 + \varepsilon)\lambda^{-1}B_Y \subset B_X,$$

que es equivalente a que

$$\|\cdot\|_X \leq \frac{\lambda}{1+\varepsilon} \|\cdot\|_Y \leq \frac{\mu}{1+\varepsilon} \|\cdot\|_X,$$

y llegamos a contradicción porque $\mu' = \frac{\mu}{1+\varepsilon} < \mu$, por lo que $S_X \cap \lambda^{-1}S_Y \neq \emptyset$. Análogamente $\lambda^{-1}S_Y \cap \mu^{-1}S_X \neq \emptyset$.

Obsérvese que si elegimos al representante de $(\|\cdot\|_Y)$ cuya bola esté inscrita en S_X , es decir, que no se puede agrandar sin salirse de B_X , obtenemos que $\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_Y \leq \mu \|\cdot\|_X$ y además, que existen $x \in S_X \cap S_Y$ e $y \in S_Y \cap \mu^{-1}S_X$. \square

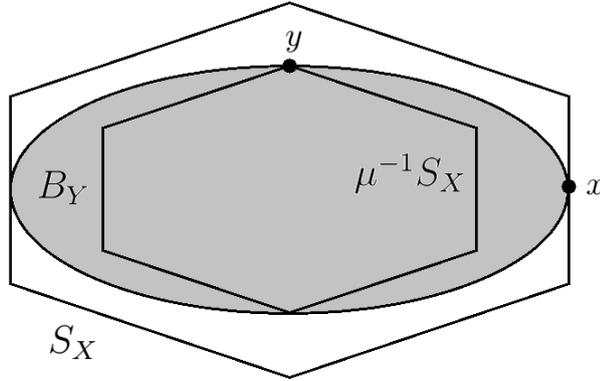


Figura 1.1: Puntos x e y del Lema 1.5 para dos normas en dimensión 2.

Denotemos por $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ e $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_Y)$, y consideremos las inclusiones canónicas

$$i : X \rightarrow Y \quad j : Y \rightarrow X.$$

Obsérvese que $\|i\| = \sup\{\|x\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$ es el mínimo número por el que hay que multiplicar la bola B_Y para que contenga a la bola B_X , y que $\|j\| = \sup\{\|y\|_X : \|y\|_Y \leq 1\}$ es el mínimo número por el que hay que multiplicar la bola B_X para que contenga a la bola B_Y . Es fácil ver que la distancia definida en (1.a) es exactamente

$$d([\|\cdot\|_X], [\|\cdot\|_Y]) = \|j\| \cdot \|i\| = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{\|a\|_X}{\|a\|_Y} \cdot \sup_{b \in \mathbb{R}^n} \frac{\|b\|_Y}{\|b\|_X}.$$

Por el Lema 1.5, sabemos que $\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{\|a\|_X}{\|a\|_Y}$ y $\sup_{b \in \mathbb{R}^n} \frac{\|b\|_Y}{\|b\|_X}$ se alcanzan en los puntos $x \in S_X \cap S_Y$ e $y \in S_Y \cap \mu^{-1}S_X$ respectivamente, y se tiene que

$$\frac{\|x\|_X}{\|x\|_Y} \cdot \frac{\|y\|_Y}{\|y\|_X} = \mu.$$

Proposición 1.6. *La distancia d definida en (1.a) es invariante por traslaciones, es decir, cualesquiera que sean $[\|\cdot\|_X]$, $[\|\cdot\|_Y]$ y $[\|\cdot\|_Z]$, se cumple*

$$d([\|\cdot\|_X] \oplus [\|\cdot\|_Z], [\|\cdot\|_Y] \oplus [\|\cdot\|_Z]) = d([\|\cdot\|_X], [\|\cdot\|_Y]).$$

Demostración. Para ver que d es invariante por traslaciones vamos a tomar $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ y $\|\cdot\|_Z$ y tendremos en cuenta que

$$\begin{aligned} d([\|\cdot\|_X] \oplus [\|\cdot\|_Z], [\|\cdot\|_Y] \oplus [\|\cdot\|_Z]) &= d(2 \star [\|\cdot\|_{(X,Z)_{1/2}}], 2 \star [\|\cdot\|_{(Y,Z)_{1/2}}]) \\ &= d\left(\left[\frac{\|\cdot\|_X \|\cdot\|_Z}{\|\cdot\|_2}\right], \left[\frac{\|\cdot\|_Y \|\cdot\|_Z}{\|\cdot\|_2}\right]\right) \end{aligned}$$

Para todo $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$ tenemos que

$$\frac{\frac{\|z\|_X \|z\|_Z}{\|z\|_2}}{\frac{\|z\|_Y \|z\|_Z}{\|z\|_2}} = \frac{\|z\|_X}{\|z\|_Y}. \quad (1.b)$$

Sea $\mu = d([\|\cdot\|_X], [\|\cdot\|_Y])$. Por el Lema 1.5 podemos suponer que $\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_Y \leq \mu \|\cdot\|_X$ y elegir x e y tales que $\|x\|_X = \|x\|_Y = \|y\|_Y = 1$ y $\|y\|_X = 1/\mu$. Ahora, la ecuación (1.b) implica que

$$\begin{aligned} d([\|\cdot\|_X], [\|\cdot\|_Y]) = \mu &= \frac{\|x\|_X}{\|x\|_Y} \cdot \frac{\|y\|_Y}{\|y\|_X} = \frac{\frac{\|x\|_X \|x\|_Z}{\|x\|_2}}{\frac{\|x\|_Y \|x\|_Z}{\|x\|_2}} \cdot \frac{\frac{\|y\|_Y \|y\|_Z}{\|y\|_2}}{\frac{\|y\|_X \|y\|_Z}{\|y\|_2}} \\ &\leq d([\|\cdot\|_X] \oplus [\|\cdot\|_Z], [\|\cdot\|_Y] \oplus [\|\cdot\|_Z]). \end{aligned}$$

De forma similar, ahora aplicando el Lema 1.5 a $\|\cdot\|_{X \oplus Z}$ y $\|\cdot\|_{Y \oplus Z}$ se obtiene la otra desigualdad. \square

Teorema 1.7. *El espacio \mathcal{Q} dotado de la norma*

$$\|[\|\cdot\|]\| = \log(d([\|\cdot\|], [\|\cdot\|_2]))$$

es un espacio de Banach.

Demostración. La aplicación está bien definida porque no depende del representante elegido de $[\|\cdot\|]$. Comprobemos que $\|\|\cdot\|\|$ es una norma en \mathcal{Q} .

Es evidente que $\|\|\|\|\cdot\|\|\| = 0$ si y solo si $d([\|\cdot\|], [\|\cdot\|_2]) = 1$, que es equivalente a que $[\|\cdot\|] = [\|\cdot\|_2]$.

Para $[\|\cdot\|]$ y $\theta > 0$, elijamos al representante $\|\cdot\|$ que cumple $\|\cdot\| \geq \|\cdot\|_2$ y tal que $S \cap S_2 \neq \emptyset$. Entonces, la quasinorma $(\|\cdot\|, \|\cdot\|_2)_\theta$ también cumple que $(\|\cdot\|, \|\cdot\|_2)_\theta \geq \|\cdot\|_2$ y $S_{(\|\cdot\|, \|\cdot\|_2)_\theta} \cap S_2 \neq \emptyset$; más aún, se puede ver que los conjuntos $S_{(\|\cdot\|, \|\cdot\|_2)_\theta} \cap S_2$ y $S \cap S_2$ coinciden. Ahora, por el Lema 1.5 sabemos que existe $y \in S_2$ tal que

$$d([\|\cdot\|], [\|\cdot\|_2]) = \|y\|,$$

y es claro que

$$d([\|\cdot\|, \|\cdot\|_2]_\theta, [\|\cdot\|_2]) = \|y\|^\theta \|y\|_2^{1-\theta} = \|y\|^\theta,$$

de donde obtenemos que $\|\|\theta \star [\|\cdot\|]\| = \theta \cdot \|\|\|\cdot\|\|\|$.

Para los valores negativos de θ basta ver que

$$\begin{aligned} \|\|(-1) \star [\|\cdot\|_X]\| &= \|\|[\|\cdot\|_{\tilde{X}}]\| \\ &= \log(d([\|\cdot\|_{\tilde{X}}], [\|\cdot\|_2])) \\ &= \log(d([\|\cdot\|_X], [\|\cdot\|_2])) \\ &= \|\|[\|\cdot\|_X]\|. \end{aligned}$$

La desigualdad triangular se obtiene de la invarianza por traslaciones de la distancia (Lema 1.6).

$$\begin{aligned} \|\|[\|\cdot\|_X] \oplus [\|\cdot\|_Y]\| &= \log d([\|\cdot\|_X] \oplus [\|\cdot\|_Y], [\|\cdot\|_2]) \\ &= \log d([\|\cdot\|_X] \oplus [\|\cdot\|_Y] \oplus [\|\cdot\|_{\tilde{Y}}], [\|\cdot\|_2] \oplus [\|\cdot\|_{\tilde{Y}}]) \\ &= \log d([\|\cdot\|_X], [\|\cdot\|_{\tilde{Y}}]) \\ &\leq \log(d([\|\cdot\|_X], [\|\cdot\|_2]) \cdot d([\|\cdot\|_2], [\|\cdot\|_{\tilde{Y}}])) \\ &= \log d([\|\cdot\|_X], [\|\cdot\|_2]) + \log d([\|\cdot\|_Y], [\|\cdot\|_2]) \\ &= \|\|[\|\cdot\|_X]\| + \|\|[\|\cdot\|_Y]\|. \end{aligned}$$

Obsérvese que para cualquier X se tienen las igualdades

$$[\|\cdot\|_X] \oplus [\|\cdot\|_{\tilde{X}}] = [\|\cdot\|_2] \quad \text{y} \quad [\|\cdot\|_X] \oplus [\|\cdot\|_2] = [\|\cdot\|_X].$$

Nos falta ver la completitud de la norma. Sea una sucesión de Cauchy

$$([\|\cdot\|^{(1)}], [\|\cdot\|^{(2)}], \dots, [\|\cdot\|^{(k)}], \dots) \subset \mathcal{Q}.$$

Eligiendo los representantes de cada clase para que cumplan $\|\cdot\|^{(k)}(e_1) = 1$, siendo $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ (se podría haber fijado cualquier otro vector), tenemos que existen $\varepsilon, M > 0$ tales que

$$\varepsilon\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|^{(k)} \leq M\|\cdot\|_2 \text{ para todo } k. \quad (1.c)$$

La definición de $\|\|\cdot\|\|$ implica que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, la sucesión $\|x\|^{(k)}$ también es de Cauchy, así que pondremos

$$\|x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x\|^{(k)}.$$

Se deduce de la ecuación (1.c) que $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ es un conjunto acotado y absorbente, y es equilibrado por la definición de $\|\cdot\|$. Así que $\|\cdot\|$ es una quasinorma, y es continua porque localmente es el límite uniforme de quasinormas continuas. Es fácil ver que $\|\|\cdot\|\| = \lim_{k \rightarrow \infty} [\|\cdot\|^{(k)}]$, lo que implica que $\|\|\cdot\|\|$ es completa en \mathcal{Q} . \square

Es natural preguntarse cómo es el subconjunto \mathcal{N} formado por las clases de equivalencia de las normas sobre \mathbb{R}^n . Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.8. *El conjunto \mathcal{N} es cerrado en \mathcal{Q} y no es convexo.*

Demostración. Para ver que es cerrado consideremos una sucesión

$$([\|\cdot\|^{(1)}], [\|\cdot\|^{(2)}], \dots, [\|\cdot\|^{(k)}], \dots) \subset \mathcal{N}.$$

Eligiremos los representantes que cumplen $\|\cdot\|^{(k)}(e_1) = 1$ y pondremos

$$\|x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x\|^{(k)}.$$

Si suponemos que la bola B no es convexa, existen dos puntos $a, b \in \mathbb{R}^n$ en la esfera de la quasinorma $\|\cdot\|$ tal que su punto medio cumple $\|\frac{a+b}{2}\| > 1$. Pero

$$\left\| \frac{a+b}{2} \right\|^{(k)} \leq \frac{1}{2}(\|a\|^{(k)} + \|b\|^{(k)}) \rightarrow 1,$$

y tendríamos una contradicción.

Veamos que \mathcal{N} no es convexo en \mathcal{Q} con un contraejemplo en dimensión 2 fácilmente aplicable a cualquier dimensión. Definimos sobre \mathbb{R}^2 el par de normas isométricas a $\|\cdot\|_1$

$$\|(a, b)\|_X = 2|a| + \frac{1}{2}|b| \quad \text{y} \quad \|(a, b)\|_Y = \frac{1}{2}|a| + 2|b|.$$

Tenemos que

$$\|(1, 0)\|_X = 2 = \|(0, 1)\|_Y \quad \text{y} \quad \|(0, 1)\|_X = \frac{1}{2} = \|(1, 0)\|_Y,$$

mientras que $\|(1, 1)\|_X = 5/2 = \|(1, 1)\|_Y$, por lo que

$$\|(1, 1)\|_{(X,Y)_{1/2}} > \|(1, 0)\|_{(X,Y)_{1/2}} + \|(0, 1)\|_{(X,Y)_{1/2}}.$$

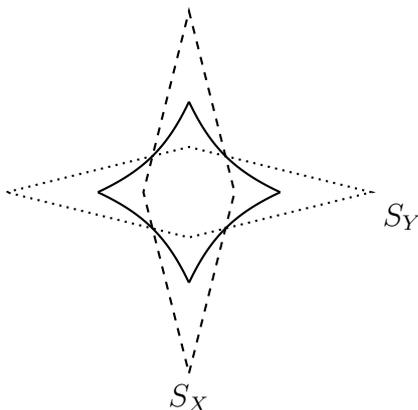


Figura 1.2: La bola $B_{(X,Y)_{1/2}}$ no es convexa.

□

1.2. El espacio \mathcal{Q}

Denotemos por \mathbb{P}_{n-1} al espacio proyectivo de dimensión $n - 1$, es decir,

$$\mathbb{P}_{n-1} = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) / \sim,$$

con $x \sim y$ si y solo si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dotado de la topología cociente, y por $C(\mathbb{P}_{n-1}) / \equiv$ al espacio de funciones continuas en \mathbb{P}_{n-1} con $f \equiv g$ si y solo si $f = g + \lambda$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lema 1.9. *La función $\text{rg}[f] = \max f - \min f$ es una norma en $C(\mathbb{P}_{n-1}) / \equiv$.*

Demostración. El valor del rango es independiente de la elección del representante de $[f]$, pues $\text{rg}[f] = \text{rg}[f + \lambda]$.

- $\text{rg}[f] = 0$ si y solo si f es constante;

- $\text{rg} [\lambda f] = \lambda \cdot \text{rg} [f]$ para $\lambda > 0$, y $\text{rg} [-f] = \text{rg} [f]$;

▪

$$\begin{aligned}
 \text{rg} [f + g] &= \text{máx}(f + g) - \text{mín}(f + g) \\
 &= \text{máx}(f + g) + \text{máx}((-f) + (-g)) \\
 &\leq \text{máx} f + \text{máx}(-f) + \text{máx} g + \text{máx}(-g) \\
 &= \text{rg} [f] + \text{rg} [g].
 \end{aligned}$$

□

Proposición 1.10. *Los espacios $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|)$ y $(C(\mathbb{P}_{n-1})/\sim, \text{rg}(\cdot))$ son isométricos.*

Demostración. Denotemos S^{n-1} a la esfera de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Una quasinorma en \mathbb{R}^n queda determinada por los valores que toma en S^{n-1} ; esto se debe a que las quasinormas son absolutamente homogéneas, es decir, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para cualesquiera que sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Obsérvese que podemos identificar el espacio proyectivo \mathbb{P}_{n-1} como el cociente S^{n-1}/\sim , con $x \sim y$ si y solo si $x = \pm y$. Además, el espacio \mathbb{P}_{n-1} es compacto por ser la imagen continua de un compacto.

Supongamos que $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación continua tal que $f(x) = f(-x)$, entonces por la propiedad universal del cociente tendremos que la aplicación $\tilde{f} : \mathbb{P}_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{f}([x]) = f(x)$ es también continua. Teniendo en cuenta esto, es claro que cada quasinorma continua $\|\cdot\|_X$ define una aplicación continua $f_X : \mathbb{P}_{n-1} \rightarrow (0, \infty)$.

Dada una función continua $f : \mathbb{P}_{n-1} \rightarrow (0, \infty)$, definimos $\|\lambda x\|_f = |\lambda| f([x])$ para todo $x \in S^{n-1}$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Denotemos $B_f = \{\lambda x \in \mathbb{R}^n : \|\lambda x\|_f \leq 1\}$. Es fácil comprobar que B_f es absorbente porque f alcanza mínimo en el compacto \mathbb{P}_{n-1} ; es acotado porque f también alcanza máximo; y es equilibrado por la propia definición de $\|\cdot\|_f$.

Obtenemos así una correspondencia biunívoca entre el espacio de las quasinormas continuas $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y el espacio de las funciones continuas y positivas $\mathbb{P}_{n-1} \rightarrow (0, \infty)$. Si consideramos la relación de equivalencia $\|\cdot\|_X \sim \|\cdot\|_Y$ si y solo si $\|\cdot\|_X = \lambda \|\cdot\|_Y$, para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, esta correspondencia se mantiene si hacemos equivalentes las funciones de $C(\mathbb{P}_{n-1}, (0, \infty))$ que son proporcionales, es decir, $f \sim g$ si y solo si $f = \lambda g$, para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De esta forma ya tenemos la biyección $\mathcal{Q} \leftrightarrow C(\mathbb{P}_{n-1}, (0, \infty))/\sim$, y para acabar con la biyección consideremos la aplicación $\log : C(\mathbb{P}_{n-1}, (0, \infty)) \rightarrow C(\mathbb{P}_{n-1})$. Para que $C(\mathbb{P}_{n-1}, (0, \infty))/\sim$

y $C(\mathbb{P}_{n-1})/\equiv$ sean equivalentes tenemos que dotar a $C(\mathbb{P}_{n-1})$ con la relación de equivalencia $f \equiv g$ si y solo si $f = \lambda + g$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{Q} \longrightarrow C(\mathbb{P}_{n-1}, (0, \infty))/\sim \longrightarrow C(\mathbb{P}_{n-1})/\equiv$$

$$\|\cdot\| \longmapsto f \longmapsto \log f.$$

Para ver que $(\mathcal{Q}, \|\|\cdot\|\|)$ y $(C(\mathbb{P}_{n-1})/\equiv, \text{rg}(\cdot))$ son isométricos, sea $\|\|\cdot\|\| \in \mathcal{Q}$ y elijamos el representante $\|\cdot\|$ como se indica en el Lema 1.5 de tal forma que

$$\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_2 \leq \mu \|\cdot\|, \quad (1.d)$$

siendo μ la distancia entre $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_2$. Teniendo en cuenta la biyección anterior, la ecuación (1.d) es equivalente a

$$f \leq 1 \leq \mu f,$$

equivalente de nuevo a

$$\log f \leq 0 \leq \log \mu + \log f,$$

de donde se obtiene que $\log \mu = \text{rg}[\log f]$, y por tanto

$$\|\|\|\cdot\|\|\| = \log d(\|\|\cdot\|\|, \|\cdot\|_2) = \log \mu = \text{rg}[\log f].$$

□

Capítulo 2

Transformaciones de espacios quasinormados

¿Qīngjiāo ròu sī? ¿Sin carne?

Definición 2.1. *Dados un espacio topológico X , un par de puntos $x, y \in X$, y un intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} , llamaremos curva de x a y a una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ tal que $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$.*

Definición 2.2. *Sean $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ e $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_Y)$ espacios quasinormados. Llamaremos transformación de X en Y a cualquier curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{Q}$ de $[\|\cdot\|_X]$ a $[\|\cdot\|_Y]$.*

Fijándonos en la bola unidad de los espacios normados, podemos estudiar la interpolación de espacios normados como un problema de deformación de conjuntos convexos. Concretamente, en [41] se formula la siguiente pregunta: “dados dos conjuntos convexos B_0 y B_1 de \mathbb{R}^n , ¿cuáles podrían ser formas óptimas de conectar ambos conjuntos mediante una curva de conjuntos convexos de \mathbb{R}^n ? ¿Y qué debería significar óptima?” En el Capítulo 1 hemos visto que el espacio de las quasinormas tiene estructura de espacio normado. Usaremos la distancia definida en (1.a) para conectar dos espacios quasinormados con segmentos métricos, que son imágenes de curvas de mínima longitud, teniendo así una noción de optimalidad.

Ejemplo 2.3. El espacio interpolado por el método de interpolación compleja de Calderón (véase la Sección 0.1.4) entre $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ y $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ en θ es

$$\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\frac{2}{1-\theta}}\right).$$

La Figura 2.1 muestra la transformación de la bola unidad de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ en la bola unidad de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

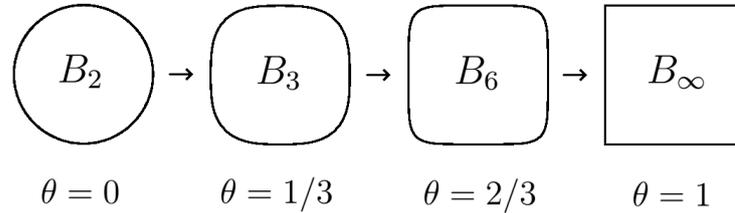


Figura 2.1

2.1. Transformaciones por segmentos métricos

Sea (X, d) un espacio métrico.

Definición 2.4. Dado un par de puntos distintos $x, y \in X$, se dice que $z \in X$ está entre x e y si $x \neq z \neq y$ cumpliéndose que

$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y).$$

Definición 2.5. Sean $x, y \in X$ dos puntos distintos. Un subconjunto $S \subset X$ es un segmento métrico de x a y (diremos que x e y son los extremos de S) si existe una isometría

$$\gamma : [a, b] \rightarrow X$$

tal que $\gamma([a, b]) = S$, $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$.

Lema 2.6. Todos los puntos de un segmento métrico están entre sus extremos (salvo los propios extremos).

Demostración. Sea S un segmento métrico de x a y y una isometría

$$\gamma : [a, b] \rightarrow X.$$

Dado $z \in S$ existe $c \in [a, b]$ tal que $z = \gamma(c)$ y se cumple

$$d(x, y) = |a - b| = |a - c| + |c - b| = d(x, z) + d(z, y).$$

□

Definición 2.7. Se define la longitud de la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ como

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \right\},$$

donde el supremo se toma sobre las particiones finitas $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$ y $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.8. Se dice que una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ es de mínima longitud si $L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma})$ para cualquier otra curva $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow X$ tal que $\tilde{\gamma}(c) = \gamma(a)$, $\tilde{\gamma}(d) = \gamma(b)$.

Lema 2.9. Los segmentos métricos son imagen de curvas de mínima longitud.

Demostración. Dada una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ de x a y y una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$, se tiene por la desigualdad triangular que

$$d(x, y) \leq \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)),$$

y por tanto $d(x, y) \leq L(\gamma)$.

Si además γ es una isometría obtenemos que

$$d(x, y) = |a - b| = \sum_{i=1}^n |t_{i-1} - t_i| = \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$$

para todas las particiones, y por tanto $d(x, y) = L(\gamma)$. □

Trabajaremos con intervalos de la forma $[0, b]$ (con $b > 0$) para simplificar los cálculos.

Sea $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathcal{Q}$ una curva de q_0 a q_1 . La curva γ es una isometría si dados $0 < s < t < 1$ se cumple que

$$d(\gamma(tb), \gamma(sb)) = (t - s)b = (t - s)d(q_0, q_1).$$

Dadas dos normas n_0 y n_1 en \mathbb{R}^n , se define la *curva de Calderón* de n_0 a n_1 como la curva $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathcal{Q}$ dada por

$$\gamma(\theta b) = n_\theta,$$

para cada $0 < \theta < 1$, donde n_θ es la norma del espacio interpolado en θ por el método de Calderón entre (\mathbb{R}^n, n_0) y (\mathbb{R}^n, n_1) , véase la Introducción.

Dada una curva de Calderón y dados $0 < s < t < 1$, se cumple que (ver sección 2 de [41])

$$d(n_t, n_s) = (t - s)d(n_0, n_1),$$

por lo que las imágenes de las curvas de Calderón son segmentos métricos. En particular, el conjunto \mathcal{N} de las normas es conexo por arcos e incluso conexo por segmentos métricos.

Proposición 2.10. *Sea $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathcal{Q}$ una curva. Representaremos los elementos de \mathcal{Q} como elementos de $C(\mathbb{P}_{n-1})/\cong$. Pongamos que $\gamma(\theta b) = \overline{f_\theta}$, con $0 \leq \theta \leq 1$. Entonces existe un punto $y \in \mathbb{P}_{n-1}$ y representantes f_0 y f_1 de $\overline{f_0}$ y $\overline{f_1}$ tales que*

$$\text{rg}(\overline{f_1} - \overline{f_0}) = \text{rg}(f_1 - f_0) = (f_1 - f_0)(y).$$

Además, si γ es isometría, entonces para todo $0 < \theta < 1$ existe un representante de $\overline{f_\theta}$ para el que se tiene que

$$f_\theta(y) = (1 - \theta)f_0(y) + \theta f_1(y).$$

Más aún, dados $0 < s < t < 1$ se cumple

$$\text{rg}(\overline{f_t} - \overline{f_s}) = \text{rg}(f_t - f_s) = (f_t - f_s)(y).$$

Demostración. Podemos elegir f_0 y f_1 , representantes de $\overline{f_0}$ y $\overline{f_1}$ respectivamente, tales que

$$f_0 \leq f_1 \leq f_0 + \text{rg}(f_1 - f_0),$$

o equivalentemente, tales que

$$0 \leq f_1 - f_0 \leq \text{rg}(f_1 - f_0),$$

es decir, la función $f_1 - f_0$, que es continua en el compacto \mathbb{P}_{n-1} y no negativa, está acotada por su propio rango, así que existen dos puntos $x, y \in \mathbb{P}_{n-1}$ para los que

$$(f_1 - f_0)(x) = 0 \quad \text{y} \quad (f_1 - f_0)(y) = \text{rg}(f_1 - f_0).$$

Si además γ es isometría, entonces

$$\text{rg}(\overline{f_\theta} - \overline{f_0}) = \theta b \quad \text{y} \quad \text{rg}(\overline{f_1} - \overline{f_\theta}) = (1 - \theta)b.$$

Por el primer apartado tenemos que hay un representante f_θ para el que se obtienen las desigualdades

$$f_\theta(y) \leq f_0(y) + \theta b$$

y

$$f_\theta(y) \geq f_1(y) - (1 - \theta)b = f_0(y) + \theta b,$$

y por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} f_\theta(y) &= f_0(y) + \theta b \\ &= f_0(y) + \theta(f_1 - f_0)(y) \\ &= (1 - \theta)f_0(y) + \theta f_1(y). \end{aligned}$$

De esta ecuación se obtiene fácilmente que, para $0 < s < t < 1$,

$$(f_t - f_s)(y) = (t - s)(f_1 - f_0)(y) = (t - s)b = \text{rg}(\overline{f_t} - \overline{f_s}).$$

□

Ejemplo 2.11. Consideremos en \mathbb{R}^n las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ y sea $\gamma : [0, n] \rightarrow \mathcal{Q}$ la curva de Calderón de $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_\infty$, que viene dada por

$$\gamma(\theta n) = \|\cdot\|_{\frac{1}{1-\theta}},$$

con $0 < \theta < 1$. El punto $\sum_{i=1}^n e_i \in \mathbb{R}^n$ determina las distancias

$$d(\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q) = n^{|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}|}.$$

Obsérvese que $p \geq q$ implica que $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$, y que $\|e_1\|_p = \|e_1\|_q$ para todos p, q .

2.1.1. Transformaciones por Emersión e Inundación

La Proposición 2.10 da lugar a las siguientes dos transformaciones. Dadas dos funciones f_0 y f_1 tales que $0 \leq f_1 - f_0 \leq \text{rg}(f_1 - f_0) = b$ construimos las curvas $\gamma_E, \gamma_I : [0, b] \rightarrow \mathcal{Q}$ de f_0 a f_1 poniendo para $0 < \theta < 1$

$$\gamma_E(\theta b) = \text{máx}\{f_0, f_1 - (1 - \theta)b\},$$

a la que llamaremos *transformación por emersión*, y

$$\gamma_I(\theta b) = \text{mín}\{f_0 + \theta b, f_1\},$$

a la que llamaremos *transformación por inundación*. Véase la Figura 2.2.

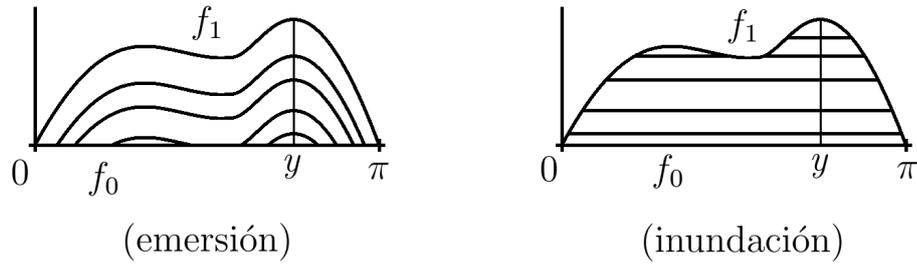


Figura 2.2: Intuitivamente hablando, a la izquierda f_1 emerge de f_0 mientras que a la derecha f_0 inunda a f_1 .

Ejemplo 2.12. Las funciones continuas en la recta proyectiva \mathbb{P}_1 se identifican con las funciones f continuas en el intervalo $[0, \pi]$ tales que $f(0) = f(\pi)$. Supongamos que $f_0 = 0$ y f_1 es continua, no negativa y tal que $f_1(0) = f_1(\pi) = 0$. La Figura 2.2 muestra las transformaciones por emersión y por inundación de f_0 en f_1 .

Proposición 2.13. *Las curvas $\gamma_E, \gamma_I : [0, b] \rightarrow \mathcal{Q}$ son isometrías, es decir, sus imágenes son segmentos métricos.*

Demostración. Dados $0 < s < t < 1$, es claro que

$$\text{rg}(\gamma(tb) - \gamma(sb)) = (t - s)b$$

donde $\gamma = \gamma_E, \gamma_I$, por tanto

$$d(\gamma(tb), \gamma(sb)) = (t - s)b = (t - s)d(\gamma(0), \gamma(1)).$$

□

Ejemplo 2.14. En la Figura 2.3 vemos cómo son las transformaciones por emersión y por inundación de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Observar que en la expresión de γ_E , tomar el máximo de las dos funciones equivale a tomar la unión de las bolas correspondientes, mientras que en la expresión de γ_I , tomar el mínimo equivale a tomar la intersección de dichas bolas. Esto quiere decir que si γ_I es una curva entre dos normas, entonces

$$\gamma_I(\theta b) \in \mathcal{N}$$

para todo $0 < \theta < 1$ porque la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo. En cambio, $\gamma_E(\theta b)$ pueden ser quasinormas (como en el Ejemplo 2.14).

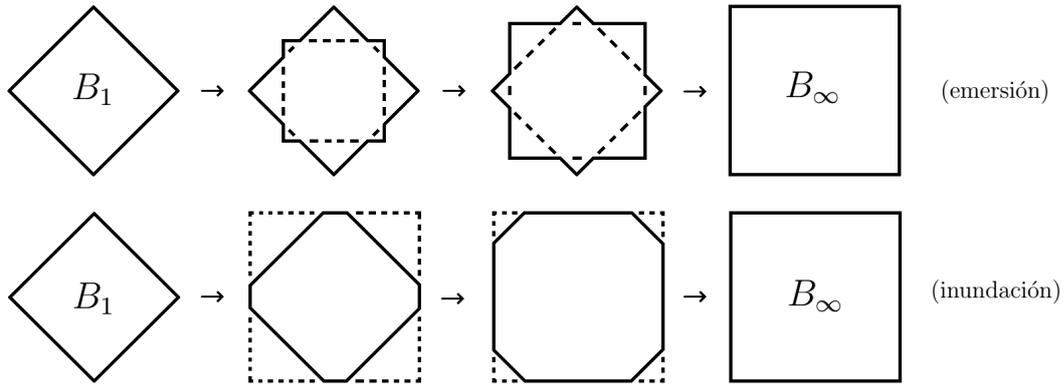


Figura 2.3: Intuitivamente, arriba B_∞ emerge de B_1 y abajo B_1 inunda a B_∞ .

2.2. Normas Difusas

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definición 2.15. [1] Una norma difusa en X es una función $N : X \times [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ que cumple:

(N1) $N(x, 0) = 0$, para todo $x \in X$;

(N2) $[N(x, t) = 1, \text{ para todo } t > 0]$ si y solo si $x = 0$;

(N3) $N(\lambda x, t) = N\left(x, \frac{t}{|\lambda|}\right)$, para todo $t \geq 0$, $x \in X$ y $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$;

(N4) $N(x + y, t + s) \geq \min\{N(x, t), N(y, s)\}$, para todo $x, y \in X$ y $t, s \geq 0$;

(N5) Para cada $x \in X$, $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$.

Diremos que (X, N) es un espacio normado difuso.

Observar que para cada $x \in X$ la función $N_x : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, $N_x(t) = N(x, t)$ es no decreciente. Para todo $t < s$, y aplicando (N2) y (N4) tenemos

$$N_x(s) = N(x, s) \geq \min\{N(0, s - t), N(x, t)\} = N(x, t) = N_x(t).$$

Ejemplo 2.16. Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, la función

$$N_{\|\cdot\|} : X \times [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$$

definida por

$$N_{\|\cdot\|}(x, t) = \frac{t}{t + \|x\|}, \quad N_{\|\cdot\|}(0, 0) = 0,$$

es una norma difusa en X y la llamaremos *norma difusa estándar*.

Definición 2.17. Dado el espacio vectorial X , una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es quasicóncava si para todos $x, y \in X$ y $0 < \lambda < 1$ se cumple que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}.$$

Vamos a denotar por \mathcal{F} al conjunto de las normas difusas en X y sea \mathcal{A} el conjunto de las funciones quasicóncavas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen

(A1) $f(0) = 1$, y si $f(tx) = 1$ para todo t , entonces $x = 0$;

(A2) $\lim_{t \rightarrow 0} f(tx) = 1$ para todo x ;

(A3) $f(\lambda x) = f(|\lambda|x)$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$.

Proposición 2.18. (Caracterización de las normas difusas) *La aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ f &\longmapsto N_f(x, t) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{t}\right) & \text{if } t \neq 0; \\ 0 & \text{if } t = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

es biyectiva.

Demostración. Es fácil ver que está bien definida, vamos a ver que dada $f \in \mathcal{A}$, N_f es una norma difusa en X :

(N1) $N_f(x, 0) = 0$, para todo $x \in X$ por la definición de N_f .

(N2) $N_f(0, t) = f\left(\frac{0}{t}\right) = 1$, para todo $t > 0$. Si $x \neq 0$, entonces (A1) implica que existe algún $t \in \mathbb{R}$ tal que $N_f(x, t) = f\left(\frac{x}{t}\right) \neq 1$.

(N3) $N_f(\lambda x, t) = f\left(\frac{\lambda x}{t}\right) = f\left(\frac{|\lambda|x}{t}\right) = N_f\left(x, \frac{t}{|\lambda|}\right)$, para todo $t \geq 0, x \in X$ y $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$.

(N4) Para cada $x, y \in X$ y $t, s \geq 0$

$$\begin{aligned}
N_f(x + y, t + s) &= f\left(\frac{x + y}{t + s}\right) \\
&= f\left(\frac{t}{t + s} \cdot \frac{x}{t} + \frac{s}{t + s} \cdot \frac{y}{s}\right) \\
&\geq \min\left\{f\left(\frac{x}{t}\right), f\left(\frac{y}{s}\right)\right\} \\
&= \min\{N_f(x, t), N_f(y, s)\};
\end{aligned}$$

donde la desigualdad se obtiene por la quasiconcavidad de f .

(N5) Dado $x \in X$, $\lim_{t \rightarrow \infty} N_f(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} f(tx) = 1$.

Nos falta la sobreyectividad, dada $N \in \mathcal{F}$, la función $f_N(x) = N(x, 1)$ pertenece a \mathcal{A} :

(A0) f_N es quasicóncava: para cada $x, y \in X$, $\lambda \in [0, 1]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
f_N(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= N(\lambda x + (1 - \lambda)y, 1) \\
&\geq \min\{N(\lambda x, \lambda), N((1 - \lambda)y, 1 - \lambda)\} \\
&= \min\{N(x, 1), N(y, 1)\} \\
&= \min\{f_N(x), f_N(y)\}.
\end{aligned}$$

(A1) $f_N(0) = N(0, 1) = 1$ y, si $x \neq 0$, entonces existe t tal que $f_N(x) = N(x, 1) \neq 1$ por (N2).

(A2) $\lim_{t \rightarrow 0} f_N(tx) = \lim_{t \rightarrow 0} N(tx, 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$ por (N5).

(A3) $f_N(\lambda x) = N(\lambda x, 1) = N(|\lambda|x, 1) = f_N(|\lambda|x)$ por (N3).

□

Identificar las normas difusas con las funciones quasicóncavas ofrece la posibilidad de interpretarlas geoméricamente. Es conocido que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es quasicóncava si y solo si los conjuntos $S(f, \lambda) = \{x \in X : f(x) \geq \lambda\}$ son convexos. Además, si f cumple que $f(x) = f(-x)$ también tenemos que $S(f, \lambda)$ son simétricos. Lo único que les faltaría cumplir a los conjuntos $S(f, \lambda)$ para que sus funcionales de Minkowsky definieran normas es que sean acotados y absorbentes, y estas propiedades están relacionadas con el comportamiento de $f(tx)$ cuando $t \rightarrow 0$ y $t \rightarrow \infty$. Tenemos el siguiente resultado que permite ver las normas difusas como transformaciones de espacios normados.

Teorema 2.19. (de descomposición de normas difusas) Sea (X, N) un espacio normado difuso. Supongamos además que

(N6) Para cada $x \in X$, $N(x, t)$ converge a 0 cuando $t \rightarrow 0$,

y para cada $0 < \alpha < 1$ consideremos la función

$$p_\alpha(x) = \inf\{t > 0 : N(x, t) > \alpha\} = \inf\{t > 0 : f_N(x/t) > \alpha\}.$$

Entonces $\mathcal{P} = \{p_\alpha : \alpha \in (0, 1)\}$ es una familia ascendente de normas en X .

Demostración. Veamos que p_α es una norma en X :

(i) Se anula únicamente en $x = 0$. Como $N(0, t) = 1$ para $t > 0$, tenemos que $p_\alpha(0) = 0$. Y, si $p_\alpha(x) = 0$ entonces $x = 0$ porque para cada $x \neq 0$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow 0} N(x, t) = 0$ por (N6).

(ii) Es positivamente homogénea:

$$\begin{aligned} p_\alpha(\lambda x) &= \inf\{t > 0 : N(\lambda x, t) > \alpha\} \\ &= \inf\left\{t > 0 : N\left(x, \frac{t}{|\lambda|}\right) > \alpha\right\} \\ &= \inf\{|\lambda|t > 0 : N(x, t) > \alpha\} \\ &= |\lambda| \inf\{t > 0 : N(x, t) > \alpha\} \\ &= |\lambda| p_\alpha(x). \end{aligned}$$

(iii) Y satisface la desigualdad triangular:

Si $f(x/t) > \alpha$ y $f(y/s) > \alpha$, entonces por la definición de quasiconcavidad tenemos la desigualdad $f(\lambda x/t + (1-\lambda)y/s) > \alpha$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. Poniendo $\lambda = t/(t+s)$ obtenemos

$$\alpha < f\left(\frac{t}{t+s}x/t + \frac{s}{t+s}y/s\right) = f((x+y)/(t+s)).$$

Así, $p_\alpha(x) \leq t$ y $p_\alpha(y) \leq s$ implican que $p_\alpha(x+y) \leq t+s$.

Ahora, para ver que $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{0 < \alpha < 1}$ es una familia ascendente observemos que para $\alpha < \beta$ se tiene

$$\begin{aligned} p_\alpha(x) &= \inf\{t > 0 : N(x, t) > \alpha\} \\ &\leq \inf\{t > 0 : N(x, t) > \beta\} = p_\beta(x), \end{aligned}$$

porque $N(x, t) > \beta$ implica que $N(x, t) > \alpha$. □

Parte II

Interpolación compleja y espacios twisted Hilbert

Capítulo 3

Interpolación compleja

¡Hay que ver! Llamar a esto
qīngjiāo ròu sī...

Sea (S, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida σ -finito y denotemos por L_0 el espacio de funciones reales o complejas μ -medibles en S . Haremos equivalentes dos funciones si coinciden salvo en un conjunto de medida nula. En L_0 , consideramos la topología de convergencia en medida, en la que dado $A \in \mathcal{A}$ de medida finita y $\varepsilon > 0$, los conjuntos

$$\{g \in L_0 : \mu\{s \in A : |f(s) - g(s)| > \varepsilon\} < \varepsilon\}$$

son entornos de la función $f \in L_0$. El espacio L_0 es Hausdorff.

Definición 3.1. ([27]) *Un espacio de Köthe sobre S es un subespacio vectorial X de L_0 con una norma $\|\cdot\|$ que lo hace espacio de Banach y tal que*

(1) *La bola unidad $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ es cerrada en L_0 .*

(2) *Existen dos funciones $h, k \in L_0$ estrictamente positivas tales que*

$$\|hf\|_1 \leq \|f\| \leq \|kf\|_\infty,$$

para toda función $f \in L_0$.

(3) *Si $x \in X$, $f \in L_0$ y $|f| \leq |x|$, entonces $f \in X$ y $\|f\| \leq \|x\|$.*

Decimos que una función f está *esencialmente acotada* cuando $|f| \leq M$ casi siempre, es decir, cuando existe $M \geq 0$ tal que $|f(s)| \leq M$ salvo en un conjunto

de medida nula. Denotaremos por L_∞ el espacio de las funciones esencialmente acotadas con su norma

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f| = \inf\{M \geq 0 : |f| \leq M \text{ casi siempre}\}.$$

Llamaremos *espacios de sucesiones* a los espacios de Köthe sobre el espacio de medida \mathbb{N} con la medida de contar. Obsérvese que en los espacios de sucesiones el supremo esencial coincide con el supremo. Ejemplos de espacios de sucesiones son los espacios de Banach con base 1-incondicional.

Definición 3.2. Una base $(u_n)_{n=1}^\infty$ de un espacio de Banach es K -incondicional, con $K \geq 1$, si para todo $N \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left\| \sum_{n=1}^N a_n u_n \right\| \leq K \cdot \left\| \sum_{n=1}^N b_n u_n \right\|,$$

con $|a_n| \leq |b_n|$ para $n = 1, \dots, N$.

Un espacio con una base K -incondicional se puede renormar para que $K = 1$.

3.1. Sumas torcidas y centralizadores

Una *suma torcida* de dos espacios de Banach Y, Z es un espacio de Banach X que tiene un subespacio cerrado Y_0 isomorfo a Y y cuyo cociente X/Y_0 es isomorfo a Z . Una *sucesión exacta corta* de espacios de Banach es un diagrama

$$0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

formado por espacios de Banach y operadores donde la imagen de cada operador coincide con el núcleo del siguiente. Por el teorema de la aplicación abierta, X es una suma torcida de Y y Z . Se dice que dos sucesiones exactas $0 \rightarrow Y \rightarrow X_1 \rightarrow Z \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow Y \rightarrow X_2 \rightarrow Z \rightarrow 0$ son equivalentes si existe un operador $T : X_1 \rightarrow X_2$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow T & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

y se dice que $0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow 0$ es *trivial* si es equivalente a $0 \rightarrow Y \xrightarrow{j} Y \oplus Z \xrightarrow{q} Z \rightarrow 0$, siendo $j(y) = (y, 0)$ y $q(y, z) = z$.

Diremos que una aplicación $\Omega : X \rightarrow L_0$ es *homogénea* si $\Omega(\lambda x) = \lambda \Omega(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y todo $x \in X$.

Definición 3.3. Sea X un espacio de Köthe. Diremos que una aplicación homogénea $\Omega : X \rightarrow L_0$ es un centralizador en X si existe una constante C tal que $\Omega(fx) - f\Omega(x) \in X$ para todo $f \in L_\infty$ y todo $x \in X$, y además

$$\|\Omega(fx) - f\Omega(x)\|_X \leq C\|f\|_\infty\|x\|_X. \quad (3.a)$$

Un centralizador Ω en X induce una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{j} X \oplus_\Omega X \xrightarrow{q} X \rightarrow 0,$$

siendo $X \oplus_\Omega X = \{(f, x) \in L_0 \times X : f - \Omega(x) \in X\}$ dotado con la quasinorma

$$\|(f, x)\|_\Omega = \|f - \Omega(x)\|_X + \|x\|_X,$$

y con $j(x) = (x, 0)$ y $q(f, x) = x$. Un centralizador Ω se dice que es *trivial* si la sucesión exacta que induce es trivial. Decimos que una aplicación homogénea F es *acotada* cuando $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Fx\|$ es finito. Un centralizador Ω es trivial si y solo si existe una aplicación lineal $L : X \rightarrow L_0$ tal que $\Omega - L : X \rightarrow X$ es acotada, y diremos que dos centralizadores Ω, Ψ son *equivalentes* (respectivamente *acotadamente equivalentes*) si su diferencia $\Omega - \Psi$ es trivial (respectivamente acotada). También diremos que dos centralizadores Ω, Ψ son *proyectivamente equivalentes* cuando exista $w \in \mathbb{C}$ tal que Ω y $w\Psi$ son equivalentes.

3.2. Interpolación compleja y derivaciones

En [7], Calderón construye un método de interpolación compleja para parejas de espacios de Banach que hemos descrito en la Introducción. Posteriormente, en [18] se construye otro método para interpolar familias de espacios de Banach que luego Kalton modificó en [27] y esencialmente es el que se puede ver en la Introducción. Lo que nos interesa en este momento es cómo se pueden construir sumas torcidas a través de la interpolación, y para eso vamos a hacer una construcción general que puede verse en la Sección 10 de [29] y en [11].

Sea \mathcal{U} un conjunto del plano complejo conformemente equivalente al disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; de hecho, solamente consideraremos $\mathcal{U} = \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$, que usaremos para interpolar parejas, o bien $\mathcal{U} = \mathbb{D}$, que usaremos para interpolar familias. En la frontera $\partial\mathcal{U}$, colocamos una familia $(X_\xi)_{\xi \in \partial\mathcal{U}}$ de espacios de Banach, todos ellos contenidos de forma lineal y continua en un mismo espacio de Banach Σ , al que llamaremos *espacio ambiente*. Se construye un espacio de Banach \mathcal{F} de funciones analíticas $f : \mathcal{U} \rightarrow \Sigma$ tales que:

- Para cada $z \in \mathcal{U}$, la evaluación

$$\delta_z : \mathcal{F} \rightarrow \Sigma, \quad f \mapsto f(z)$$

es continua.

- Si $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{D}$ es una equivalencia conforme, entonces $f \in \mathcal{F}$ si y solo si $\varphi f \in \mathcal{F}$ y $\|\varphi f\|_{\mathcal{F}} = \|f\|_{\mathcal{F}}$.

Este espacio será el espacio de Calderón \mathcal{C} en el caso de estar interpolando parejas o el espacio \mathcal{N}^+ en caso de interpolar familias, véase la Introducción.

Definimos el espacio interpolado en $z \in \mathcal{U}$ como

$$X_z = \delta_z(\mathcal{F}) = \{x \in \Sigma : x = f(z) \text{ para algún } f \in \mathcal{F}\},$$

dotado con su norma cociente $\|x\|_z = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}} : x = f(z)\}$. La evaluación de la derivada

$$\delta'_z : \mathcal{F} \rightarrow \Sigma, \quad f \mapsto f'(z)$$

también es continua y llamaremos *espacio derivado en $z \in \mathcal{U}$* a

$$dX_z = (\delta'_z, \delta_z)(\mathcal{F}) = \{(x_1, x_2) \in \Sigma \times \Sigma : x_1 = f'(z), x_2 = f(z) \text{ para algún } f \in \mathcal{F}\},$$

y su norma es

$$\|(x_1, x_2)\| = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}} : x_1 = f'(z), x_2 = f(z)\}.$$

El subespacio $Y = \{(x_1, x_2) \in dX_z : x_2 = 0\}$ es una copia isométrica de X_z . En efecto, dado un elemento $(x, 0) \in Y$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f'(z) = x$ y $f(z) = 0$. Sea $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{D}$ una aplicación conforme tal que $\varphi(z) = 0$. Como $f(z) = 0$, podemos escribir $f = \varphi g$ y $\|f\|_{\mathcal{F}} = \|g\|_{\mathcal{F}}$. Entonces $f'(w) = \varphi'(w)g(w) + \varphi(w)g'(w)$, y por tanto $f'(z) = \varphi'(z)g(z)$ y

$$\|(x, 0)\|_{dX_z} = |\varphi'(z)|^{-1} \|x\|_{X_z}.$$

Por otra parte, dX_z/Y es isométrico a X_z así que podemos formar la sucesión exacta $0 \rightarrow X_z \rightarrow dX_z \rightarrow X_z \rightarrow 0$, es decir, el espacio derivado dX_z es una suma torcida de X_z consigo mismo.

Diremos que una aplicación $B_z : X_z \rightarrow \mathcal{F}$ es una *selección* de $\delta_z : \mathcal{F} \rightarrow X_z$ si $\delta_z B_z = \text{Id}_{X_z}$ y si $\|B_z(x)\|_{\mathcal{F}} \leq K \|x\|_z$, entonces decimos que $B_z(x)$ es un *K-extremal* para x en z . Llamaremos *derivación en $z \in \mathcal{U}$* a una aplicación $\Omega_z = \delta'_z B_z$, siendo

$B_z : X_z \rightarrow \mathcal{F}$ una selección homogénea y acotada de la aplicación $\delta_z : \mathcal{F} \rightarrow X_z$. Dada una derivación Ω_z , el espacio

$$d_{\Omega_z} X_z = \{(f, x) \in \Sigma \times X_z : f - \Omega_z(x) \in X_z\}$$

es una suma torcida de X_z consigo mismo, y las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow X_z \rightarrow dX_z \rightarrow X_z \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \rightarrow X_z \rightarrow d_{\Omega_z} X_z \rightarrow X_z \rightarrow 0$$

son equivalentes, véase [29].

Si elegimos dos selecciones B_z y V_z y sus derivaciones $\delta'_z B_z$ y $\delta'_z V_z$ son distintas, su diferencia $\delta'_z B_z - \delta'_z V_z$ es una aplicación acotada, y por tanto $\delta'_z B_z$ y $\delta'_z V_z$ son acotadamente equivalentes, lo que provoca que los espacios derivados $d_{\delta'_z B_z} X_z$ y $d_{\delta'_z V_z} X_z$ sean isomorfos, véase [12].

Ejemplo 3.4. Llamaremos *peso* a una sucesión $\omega = (\omega_i)_{i=1}^{\infty}$ de números reales estrictamente positivos. Consideremos los espacios ℓ_p con peso, definidos por

$$\ell_p(\omega) = \left\{ (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum |y_i|^p \omega_i < \infty \right\}$$

con la norma $\|y\| = (\sum |y_i|^p \omega_i)^{1/p}$. Sean ω_0, ω_1 dos pesos y consideremos la pareja de interpolación $(\ell_p(\omega_0), \ell_p(\omega_1))$. El espacio interpolado es $[\ell_p(\omega_0), \ell_p(\omega_1)]_{\theta} = \ell_p(\omega_0^{1-\theta} \omega_1^{\theta})$ (Sección 5.4 de [2]). Como la aplicación $B_{\theta}(x)(z) = x \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^{(\theta-z)/p}$ es una selección acotada y homogénea de la evaluación $\delta_{\theta} : \mathcal{C} \rightarrow \ell_p(\omega_0^{1-\theta} \omega_1^{\theta})$, la derivación asociada es la aplicación lineal $x \rightarrow -\frac{1}{p} x \log \frac{\omega_1}{\omega_0}$, y por tanto es trivial. En particular, $[\ell_2(\omega^{-1}), \ell_2(\omega)]_{1/2} = \ell_2$ con derivación trivial.

Ejemplo 3.5. La pareja de interpolación (ℓ_{∞}, ℓ_1) tiene como espacio interpolado en $1/2$ a ℓ_2 , y la aplicación $B_{1/2}(x)(z) = x^{2z}$ es una selección homogénea y acotada de la evaluación $\delta_{1/2}$, así que la derivación es

$$(B_{1/2}(x)(z))'(1/2) = 2x \log x,$$

para $\|x\|_2 = 1$. Si, en cambio, consideramos la pareja (ℓ_1, ℓ_{∞}) , el espacio interpolado en $1/2$ también es ℓ_2 , pero ahora una selección acotada es $V_{1/2}(x)(z) = x^{2(1-z)}$, y por tanto la derivación queda

$$(V_{1/2}(x)(z))'(1/2) = -2x \log x,$$

para $\|x\|_2 = 1$. Vemos que el espacio interpolado no depende del sentido en el que recorramos la escala, es decir, $[X, Y]_{\theta} = [Y, X]_{1-\theta}$, pero la derivación sí cambia; si la derivación de (X, Y) en θ es Ω entonces la derivación de (Y, X) en $1 - \theta$ es $-\Omega$.

Dados dos espacios de Banach X, Y de dimensión infinita, se dice que Y es *finitamente representable en X* si dado cualquier subespacio E de Y de dimensión finita y dado $\varepsilon > 0$, existen un subespacio F de X y un isomorfismo lineal $T : E \rightarrow F$ tal que $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$. Se dice que un espacio de Banach X es *superreflexivo* si todos los espacios finitamente representables en X son reflexivos. Ejemplos de espacios superreflexivos son los espacios L_p con $1 < p < \infty$.

Un centralizador Ω en un espacio de Köthe X se dice que es *real* si $\Omega(x)$ es real siempre que x sea real.

Teorema 3.6. [Teorema de Kalton]

- Dada una pareja de interpolación (X_0, X_1) de espacios de Köthe y $0 < \theta < 1$, la derivación Ω_θ es un centralizador real en X_θ .
- Para todo centralizador real Ω en un espacio de Köthe X separable y superreflexivo existe $\varepsilon > 0$ y una pareja de interpolación (X_0, X_1) de espacios de Köthe tales que $X = [X_0, X_1]_{1/2}$ y el centralizador inducido $\Omega_{1/2}$ es acotadamente equivalente a $\varepsilon\Omega$. Además, si (Y_0, Y_1) es una pareja de interpolación de espacios de Köthe tal que $[Y_0, Y_1]_{1/2} = X$ y cuyo centralizador inducido es acotadamente equivalente a $\varepsilon\Omega$, entonces los espacios X_0 e Y_0 tienen normas equivalentes y los espacios X_1 e Y_1 también tienen normas equivalentes.
- Para todo centralizador Ω (real o no) en un espacio de Köthe X separable y superreflexivo existe $\varepsilon > 0$ y tres espacios de Köthe $X(j)$, $j = 1, 2, 3$ tales que si formamos la familia de esos tres espacios distribuidos en tres arcos de igual longitud en \mathbb{T} , entonces $X = X_0$ y $\varepsilon\Omega$ y Ω_0 son acotadamente equivalentes.

3.3. Factorización

Sean X, Y dos espacios de Köthe sobre el mismo espacio de medida y L_0 el correspondiente espacio de funciones medibles. Dado $0 < \theta < 1$, podemos formar los siguientes espacios:

- $X^\theta = \{f \in L_0 : |f|^\theta \in X\}$, con la norma $\|f\| = \||f|^{1/\theta}\|_X^\theta$.
- $XY = \{f \in L_0 : |f| = |x||y| \text{ para algunos } x \in X, y \in Y\}$, con la quasinorma $\|f\| = \inf\{\|x\|_X \|y\|_Y : |f| = |x||y|, x \in X, y \in Y\}$.
- $X^{1-\theta}Y^\theta = \{f \in L_0 : |f| = |x|^{1-\theta}|y|^\theta \text{ para algunos } x \in X, y \in Y\}$, con la norma $\|f\| = \inf\{\|x\|_X^{1-\theta} \|y\|_Y^\theta : |f| = |x|^{1-\theta}|y|^\theta, x \in X, y \in Y\}$.

Dada una pareja (X_0, X_1) de espacios de Köthe sobre el mismo espacio de medida, Calderón [7] probó que $[X_0, X_1]_\theta \hookrightarrow X_0^{1-\theta} X_1^\theta$, y posteriormente, Shestakov [42] demostró que $[X_0, X_1]_\theta = \overline{X_0 \cap X_1} \subset X_0^{1-\theta} X_1^\theta$ y que existen parejas de espacios de Köthe para las que $X_0 \cap X_1$ no es denso en $X_0^{1-\theta} X_1^\theta$, y por lo tanto $[X_0, X_1]_\theta \neq X_0^{1-\theta} X_1^\theta$ en general. Diremos que la pareja (X_0, X_1) es *regular* si $X_0 \cap X_1$ es denso en X_0 y en X_1 . Esta factorización facilita el cálculo de los espacios interpolados, pero además también nos facilita la obtención de la derivación. Cuando calculamos $\|x\| = \inf\{\|x_0\|_{X_0}^{1-\theta} \|x_1\|_{X_1}^\theta\}$ tal que $|x| = |x_0|^{1-\theta} |x_1|^\theta$, podemos suponer que $\|x_0\|_{X_0} = \|x_1\|_{X_1}$, por la homogeneidad de las normas. Diremos que $|x| = |x_0|^{1-\theta} |x_1|^\theta$ es una *factorización K -óptima de x* si $\|x_0\|_{X_0} = \|x_1\|_{X_1} \leq K\|x\|$. Si no especificamos la K , diremos que es una *factorización casi óptima*. Para K fijo, y dada una factorización K -óptima $|x| = |x_0|^{1-\theta} |x_1|^\theta$, construimos la aplicación homogénea

$$\mathfrak{U}_\theta(x) = x \log \frac{|x_1|}{|x_0|}. \quad (3.b)$$

En la Proposición 1 de [4] se demuestra que \mathfrak{U}_θ es un centralizador en el producto $X_0^{1-\theta} X_1^\theta$. Además, \mathfrak{U}_θ se puede ver como la derivación asociada Ω_θ , porque

$$B_\theta(x)(z) = |x_0|^{1-z} |x_1|^z$$

es una selección acotada, y por tanto la derivación queda

$$\Omega_\theta(x) = \delta'_\theta B_\theta(x) = |x_0|^{1-\theta} |x_1|^\theta \log \frac{|x_1|}{|x_0|} = |x| \log \frac{|x_1|}{|x_0|}.$$

Cuando podemos escribir un espacio X como un producto, pongamos $X = YZ$, podemos obtener un centralizador en X como acabamos de ver. Si consideramos la identidad obvia $X = L_\infty X$, y la factorización $f = u|f|$ de un elemento normalizado $f \in X$ obtenemos el *centralizador de Kalton y Peck en X*

$$\mathcal{KP}_X(f) = f \log |f|.$$

Por la homogeneidad de \mathcal{KP}_X tenemos para cualquier $f \in X$ que

$$\mathcal{KP}_X(f) = f \log \frac{|f|}{\|f\|_X}.$$

Sea X un espacio de Köthe. Lozanovskii [34] probó que $L_1 = XX^*$, y que dado $f \in L_1$, hay una única factorización $f = x \cdot x^*$ con $\|x\|_X = 1$, $x \geq 0$, $\|x^*\|_{X^*} = \|f\|_1$ y los soportes de x , x^* y f coinciden. Nos referiremos a esta factorización como

la *factorización de Lozanovskii* de f . Además, dado un centralizador Ω en X , su *levantamiento* a L_1 se define en el Teorema 5.1 de [26] como $\Omega^{[1]}(f) = \Omega(x)x^*$. El Teorema 7.2 de [27] establece que si X_0, X_1 son espacios de Köthe y $X = [X_0, X_1]_\theta$ con centralizador inducido Ω_θ entonces dado $f \in L_1$ se tiene que

$$\Omega^{[1]}(f) = f(\log x_1 - \log x_0),$$

siendo $|f| = x_0 \cdot x_0^* = x_1 \cdot x_1^*$ las factorizaciones de Lozanovskii de $|f|$ con respecto a X_0 y a X_1 respectivamente (obsérvese que el centralizador $\Omega^{[1]}$ no depende de θ). Podemos dar una demostración sencilla de este resultado, pues si ponemos $f = xx^*$ como la factorización de Lozanovskii en $L_1 = XX^*$ se tiene que $f = xx^* = x_0^{1-\theta} x_1^\theta x_0^{*\theta} x_1^{*1-\theta}$ y por tanto

$$\begin{aligned} \Omega^{[1]}(f) &= \Omega_\theta (x_0^{1-\theta} x_1^\theta) (x_0^*)^{1-\theta} (x_1^*)^\theta \\ &= x \log \frac{x_1}{x_0} (x_0^*)^{1-\theta} (x_1^*)^\theta \\ &= f(\log x_1 - \log x_0). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.7. [Escalas de espacios de Lorentz]

Consideremos la pareja de interpolación de los espacios de Lorentz L_{p_0, q_0} y L_{p_1, q_1} . En [4] se muestra que el espacio interpolado en $0 < \theta < 1$ es $[L_{p_0, q_0}, L_{p_1, q_1}]_\theta = L_{p, q}$, con $(p, q)^{-1} = (1 - \theta)(p_0, q_0)^{-1} + \theta(p_1, q_1)^{-1}$, y que la derivación asociada es

$$\Omega_\theta(x) = q \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right) \mathcal{K}\mathcal{P}_\theta(x) + \left(\frac{q}{p} \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right) - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} \right) \right) \mathcal{K}_\theta(x),$$

donde $\mathcal{K}_\theta(x) = x \log r_x$, con $r_x(t) = m\{s : |x(s)| > |x(t)| \text{ o } |x(s)| = |x(t)| \text{ y } s \leq t\}$, es el centralizador de Kalton en el espacio $L_{p, q}$ (véase [4]). Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{q}{p} \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1} \right) - \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right) = 0 \\ \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \\ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \end{array} \right.$$

se obtiene que los centralizadores asociados a las escalas que cumplen $q_0/p_0 = q_1/p_1$ son proyectivamente equivalentes a $\mathcal{K}\mathcal{P}_\theta$. Las escalas que cumplen $q_0 = q_1$ tienen

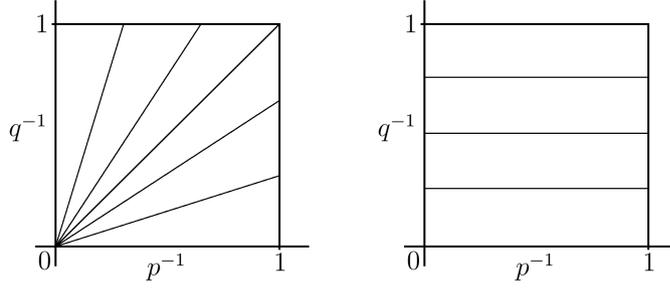


Figura 3.1: A la izquierda, algunas escalas con centralizador proporcional a \mathcal{KP}_θ , y a la derecha algunas escalas con centralizador proporcional a \mathcal{K}_θ .

centralizadores asociados proyectivamente equivalentes a \mathcal{K}_θ . Los centralizadores asociados al resto de escalas son combinaciones lineales de \mathcal{KP}_θ y \mathcal{K}_θ . Véase la Figura 3.1.

Vamos a ver ahora los centralizadores que se generan de la interpolación de familias finitas distribuidas en arcos de \mathbb{T} . Esta idea aparece en [11].

Dado un arco A de \mathbb{T} y un punto $z_0 \in \mathbb{D}$ se define la medida armónica de A con polo en z_0 como

$$\mu_{z_0}(A) = \int_A \frac{1 - |z_0|^2}{|z_0 - \xi|^2} \frac{dm(\xi)}{2\pi},$$

siendo m la medida de longitud en \mathbb{T} . Cuando el polo es el origen, la medida armónica de un arco coincide con su longitud de arco dividida por 2π .

Sea $z_0 \in \mathbb{D}$ y sea $X(1), \dots, X(n)$ una familia de espacios de Köthe sobre el mismo espacio de medida distribuida en n arcos A_1, \dots, A_n disjuntos de \mathbb{T} tales que $\overline{\bigcup_{j=1}^n A_j} = \mathbb{T}$, es decir, $X_\xi = X(j)$ cuando $\xi \in A_j$. Denotaremos por φ_j a una función analítica en \mathbb{D} tal que $\operatorname{Re} \varphi_j = \chi_{A_j}$ en \mathbb{T} , siendo χ_{A_j} la función indicadora de A_j . Se cumple que $\operatorname{Re} \varphi_j(z_0) = \mu_{z_0}(A_j)$ y se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.8. *El espacio interpolado en $z_0 \in \mathbb{D}$ es*

$$X_{z_0} = X(1)^{\mu_{z_0}(A_1)} \cdot X(2)^{\mu_{z_0}(A_2)} \cdot \dots \cdot X(n)^{\mu_{z_0}(A_n)},$$

y la derivación asociada es

$$\Omega_{z_0}(x) = x(\varphi'_1(z_0) \log x_1 + \dots + \varphi'_n(z_0) \log x_n),$$

siendo $x = x_1^{\mu_{z_0}(A_1)} \cdot \dots \cdot x_n^{\mu_{z_0}(A_n)}$ una factorización casi óptima de $x \in X_{z_0}$.

Demostración. Si fijamos K y $x = x_1^{\mu_{z_0}(A_1)} \cdot \dots \cdot x_n^{\mu_{z_0}(A_n)}$ es una factorización K -óptima de x , entonces la aplicación $B(x)(z) = x_1^{\varphi_1(z)} \cdot \dots \cdot x_n^{\varphi_n(z)}$ es un K -extremal para x en z_0 , y por tanto

$$\Omega_{z_0}(x) = \delta'_{z_0} B(x) = x(\varphi'_1(z_0) \log x_1 + \dots + \varphi'_n(z_0) \log x_n). \quad \square$$

Aunque el resultado está enunciado para cualquier $z_0 \in \mathbb{D}$, se puede reducir al caso en el que $z_0 = 0$, a través de una aplicación conforme, así que estaremos pensando en el espacio interpolado en el origen. En el ejemplo 3.5 veíamos cómo influye en la derivación el sentido en el que recorremos la escala de interpolación. En el resultado que sigue veremos que las rotaciones de la misma familia en la circunferencia dan lugar a centralizadores proyectivamente equivalentes.

Proposición 3.9. *Sea $X(1), \dots, X(n)$ una familia de espacios de Köthe distribuida en n arcos A_1, \dots, A_n , y sea Ω la derivación asociada en $z = 0$. Si rotamos la distribución un ángulo α , es decir, colocamos los espacios $X(1), \dots, X(n)$ en los arcos $\overline{A}_j = e^{\alpha i} A_j$, para $1 \leq j \leq n$, entonces la derivación asociada en $z = 0$ es $\overline{\Omega} = e^{-\alpha i} \Omega$.*

Demostración. Sea A un arco de \mathbb{T} y sea φ una función analítica en \mathbb{D} tal que $\operatorname{Re} \varphi = \chi_A$ en \mathbb{T} , siendo χ_A la función indicadora de A . Como φ es analítica, $\operatorname{Re} \varphi$ es una función armónica en \mathbb{D} . La condición $\operatorname{Re} \varphi = \chi_A$ en \mathbb{T} hace que la función $\operatorname{Re} \varphi$ sea única por el comportamiento de las funciones armónicas. Además por las ecuaciones de Cauchy-Riemann sabemos que la derivada de φ solo depende de las derivadas direccionales de su parte real. Concretamente, si vemos \mathbb{C} como \mathbb{R}^2 y tenemos el punto $z_0 = (x_0, y_0)$, entonces

$$\varphi'(z_0) = \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) - i \cdot \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Si $\overline{\varphi}$ es una función analítica en \mathbb{D} tal que $\operatorname{Re} \overline{\varphi} = \chi_{\overline{A}}$, con $\overline{A} = e^{\alpha i} A$, entonces por la unicidad de las funciones armónicas tenemos que $(\operatorname{Re} \overline{\varphi})(z) = (\operatorname{Re} \varphi)(e^{-\alpha i} z)$, es decir, que la gráfica de la función $\operatorname{Re} \overline{\varphi}$ es la gráfica de la función $\operatorname{Re} \varphi$ rotada. A partir de aquí es fácil comprobar que $\overline{\varphi}'(0) = e^{-\alpha i} \varphi'(0)$. Si rotamos toda la familia se obtiene directamente que $\overline{\Omega} = e^{-\alpha i} \Omega$. \square

3.3.1. Lema de la Mariposa

Lema 3.10. (Lema de la Mariposa) *Sean (X_0, X_1) y (Y_0, Y_1) dos parejas regulares de espacios de Köthe sobre el mismo espacio de medida y sean $0 <$*

$\eta, \theta < 1$ fijos. Supongamos que $[X_0, Y_0]_\theta = [X_1, Y_1]_\theta$ y sean Ω_0 y Ω_1 las respectivas derivaciones asociadas. La derivación asociada a la pareja $([X_0, X_1]_\eta, [Y_0, Y_1]_\eta)$ en θ es $(1 - \eta)\Omega_0 + \eta\Omega_1$.

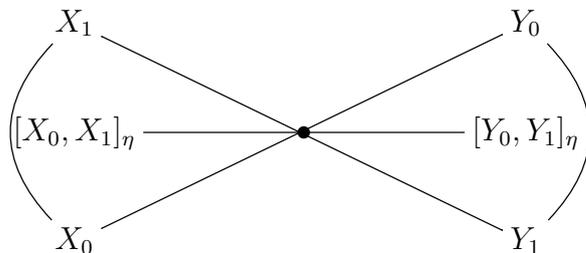
Demostración. Aplicando la fórmula 3.b sabemos que el espacio interpolado es

$$[[X_0, Y_0]_\theta, [X_1, Y_1]_\theta]_\eta = X_0^{(1-\theta)(1-\eta)} X_1^{(1-\theta)\eta} Y_0^{\theta(1-\eta)} Y_1^{\theta\eta} = [[X_0, X_1]_\eta, [Y_0, Y_1]_\eta]_\theta.$$

Una factorización óptima de una función f del espacio interpolado es $f = f_{X_0}^{(1-\theta)(1-\eta)} f_{X_1}^{(1-\theta)\eta} f_{Y_0}^{(1-\eta)\theta} f_{Y_1}^{\eta\theta}$. Como $[X_0, Y_0]_\theta = [X_1, Y_1]_\theta$, podemos calcular el centralizador Ω asociado a $[[X_0, X_1]_\eta, [Y_0, Y_1]_\eta]_\theta$ usando la fórmula 3.b y obtenemos:

$$\begin{aligned} \Omega(f) &= f \log \frac{f_{Y_0}^{(1-\eta)} f_{Y_1}^\eta}{f_{X_0}^{(1-\eta)} f_{X_1}^\eta} \\ &= f \left(\log \frac{f_{Y_0}^{(1-\eta)}}{f_{X_0}^{(1-\eta)}} + \log \frac{f_{Y_1}^\eta}{f_{X_1}^\eta} \right) \\ &= f \left((1 - \eta) \log \frac{f_{Y_0}}{f_{X_0}} + \eta \log \frac{f_{Y_1}}{f_{X_1}} \right) \\ &= (1 - \eta)\Omega_0(f) + \eta\Omega_1(f). \end{aligned} \quad \square$$

El lema de la Mariposa se podría considerar un resultado de reiteración para las derivaciones. Su nombre se debe al siguiente dibujo, que da una idea de cómo se obtiene Ω :



Corolario 3.11. Sean (X_0, X_1) y (Y_0, Y_1) dos parejas regulares de espacios de Köthe tales que $[X_0, X_1]_{1/2} = [Y_0, Y_1]_{1/2}$, con centralizadores asociados Ω_X y Ω_Y . Se tiene que $\Omega_X + \Omega_Y$ es proyectivamente equivalente al centralizador asociado en $1/2$ a la pareja $([X_0, Y_0]_{1/2}, [X_1, Y_1]_{1/2})$.

Ejemplo 3.12. Sea $1 < p < \infty$ y sea p^* tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Consideremos las parejas de interpolación (L_p, L_{p^*}) y $(L_{p,2}, L_{p^*,2})$. Ambas parejas tienen como espacio interpolado en $1/2$ al espacio L_2 , y los centralizadores asociados son $u\mathcal{K}\mathcal{P}_2$ y $v\mathcal{K}_2$

respectivamente, siendo u, v dos constantes (véase el Ejemplo 3.7). Por el Lema de la Mariposa, el centralizador asociado a $([L_p, L_{p,2}]_{1/2}, [L_{p^*}, L_{p^*,2}]_{1/2})$ en $1/2$ es $\frac{u\mathcal{K}\mathcal{P}_2 + v\mathcal{K}_2}{2}$.

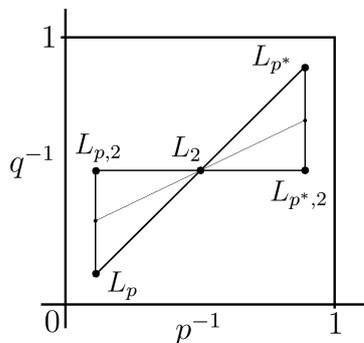


Figura 3.2: La mariposa del Ejemplo 3.12.

En cuanto a las familias, el caso que más nos interesa es el que distribuye los espacios $X(1), \dots, X(n)$ en los n arcos $A_j = \{e^{it} : \frac{2\pi(j-1)}{n} < t < \frac{2\pi j}{n}\}$ de la misma longitud. El espacio interpolado en $z = 0$ es $X(1)^{1/n} \cdot X(2)^{1/n} \cdot \dots \cdot X(n)^{1/n}$, y la derivación es

$$\Omega(x) = x(\varphi'_1(0) \log x_1 + \dots + \varphi'_n(0) \log x_n).$$

Si llamamos $\omega_j = e^{\frac{2\pi j}{n}i}$, con $j = 1, \dots, n-1$, a las raíces n -ésimas de la unidad, entonces $\varphi_1(z) = \varphi_2(\omega_1 z) = \varphi_3(\omega_2 z) = \dots = \varphi_n(\omega_{n-1} z)$ y por tanto Ω se puede escribir como

$$\Omega(x) = \varphi'_n(0)x \left(\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{n-j} \log x_j \right).$$

Proposición 3.13. Sean (X_0, X_1) y (Y_0, Y_1) dos parejas regulares de espacios de Köthe tales que $[X_0, X_1]_{1/2} = [Y_0, Y_1]_{1/2}$, con centralizadores asociados Ω_X y Ω_Y respectivamente. Consideremos los cuatro arcos $A_1 = \{e^{i\theta} : 0 < \theta < \pi/2\}$, $A_2 = \{e^{i\theta} : \pi/2 < \theta < \pi\}$, $A_3 = \{e^{i\theta} : \pi < \theta < 3\pi/2\}$, $A_4 = \{e^{i\theta} : 3\pi/2 < \theta < 2\pi\}$. Coloquemos la siguiente configuración: Y_0 en A_1 , X_0 en A_2 , Y_1 en A_3 y X_1 en A_4 (véase la Figura 3.3). El centralizador asociado en $z = 0$ es $\varphi'_4(0)(\Omega_X + i\Omega_Y)$.

Demostración. Sea $x \in X_0^{1/2} X_1^{1/2} = Y_0^{1/2} Y_1^{1/2}$ y supongamos que $x = x_0^{1/2} x_1^{1/2} = y_0^{1/2} y_1^{1/2}$ son factorizaciones casi óptimas. El espacio interpolado en $z = 0$ es $X =$

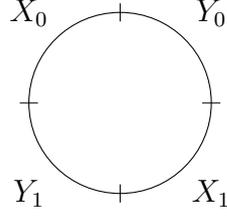


Figura 3.3

$X_0^{1/4} X_1^{1/4} Y_0^{1/4} Y_1^{1/4}$ y $x = x_0^{1/4} x_1^{1/4} y_0^{1/4} y_1^{1/4}$ es una factorización casi óptima. Tenemos

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \varphi'_{A_4}(0)x(-i \log y_0 - \log x_0 + i \log y_1 + \log x_1) \\ &= \varphi'_{A_4}(0)x \left(\log \frac{x_1}{x_0} + i \log \frac{y_1}{y_0} \right) = \varphi'_{A_4}(0) (\Omega_X + i\Omega_Y). \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 3.14. *Intercambiando de lugar los espacios Y_0 e Y_1 generamos un centralizador proyectivamente equivalente a $\Omega_X - i\Omega_Y$. Los centralizadores $-\Omega_X + i\Omega_Y$, $-\Omega_X - i\Omega_Y$, $\Omega_Y + i\Omega_X$, $\Omega_Y - i\Omega_X$, $-\Omega_Y + i\Omega_X$ y $-\Omega_Y - i\Omega_X$ se pueden obtener rotando las familias que generan $\Omega_X + i\Omega_Y$ y $\Omega_X - i\Omega_Y$.*

En la Sección 4 de [27] se define la función indicadora de X como $\Phi_X(f) = f \log x$, siendo $f = x \cdot x^*$ la factorización de Lozanovskii de f en $L_1 = X \cdot X^*$. Después, en la Sección 7 se define el indicador de un centralizador Ω como $\Phi^\Omega(f) = \int \Omega^{[1]}(f) d\mu$.

Supongamos que tenemos una familia de cuatro espacios A, B, C, D distribuidos en los arcos A_1, A_2, A_3 y A_4 de la Proposición 3.13. El espacio interpolado en $z = 0$ es $X = A^{1/4} B^{1/4} C^{1/4} D^{1/4}$, y por la Proposición 7.4 de [27] es inmediato que

$$\begin{aligned} \Phi^\Omega(f) &= \int_0^{2\pi} e^{-it} \Phi_{X_{e^{it}}}(f) \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-it} \Phi_A(f) \frac{dt}{2\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-it} \Phi_B(f) \frac{dt}{2\pi} + \\ &\quad + \int_{\pi}^{3\pi/2} e^{-it} \Phi_C(f) \frac{dt}{2\pi} + \int_{3\pi/2}^{2\pi} e^{-it} \Phi_D(f) \frac{dt}{2\pi} \\ &= \frac{i}{2\pi} ((-i-1)\Phi_A(f) + (-1+i)\Phi_B(f) + \\ &\quad + (i+1)\Phi_C(f) + (1-i)\Phi_D(f)) \\ &= \frac{1+i}{2\pi} (-i\Phi_A(f) - 1\Phi_B(f) + i\Phi_C(f) + \Phi_D(f)). \end{aligned}$$

Si consideramos las parejas (B, D) y (A, C) con centralizadores Ω_B^D y Ω_A^C , entonces $\Phi^{\Omega_B^D} = \Phi_D - \Phi_B$ y $\Phi^{\Omega_A^C} = \Phi_C - \Phi_A$ y por tanto

$$\Phi^\Omega(f) = \frac{1+i}{2\pi} (\Phi^{\Omega_B^D}(f) + i\Phi^{\Omega_A^C}(f)).$$

Por el Lema 7.1 de [27], dado un centralizador Ω en un espacio de Köthe X , existen dos centralizadores reales Ω_X, Ω_Y tales que $\Omega_X + i\Omega_Y$ es acotadamente equivalente a Ω . Por el Teorema de Kalton, existen dos parejas de interpolación (X_0, X_1) y (Y_0, Y_1) tales que $[X_0, X_1]_{1/2} = [Y_0, Y_1]_{1/2}$ y con centralizadores asociados Ω_X y Ω_Y respectivamente. La Proposición 3.13 da una distribución para obtener un centralizador proyectivamente equivalente a $\Omega_X + i\Omega_Y$. Así, podemos escribir el apartado del Teorema de Kalton para centralizadores complejos de la siguiente forma:

- Dado un centralizador Ω en un espacio de Köthe X , existen cuatro espacios de Köthe X_0, X_1, Y_0, Y_1 tales que Ω es proyectivamente equivalente al centralizador generado en $z = 0$ por la familia X_0, X_1, Y_0, Y_1 distribuida en cuatro arcos de la misma longitud.

A continuación veremos un ejemplo de centralizador que no puede obtenerse interpolando dos espacios. Esta idea fue de Félix Cabello y puede encontrarse en [20] (Teorema 3.2). Willian Corrêa advertía de que “en la búsqueda de un ejemplo así uno está tentado a usar las escalas de los espacios ℓ_p o de los espacios $\ell_{p,q}$. Sin embargo, el resultado de reiteración de [11] muestra que esta búsqueda fracasaría”. En la Sección 5 de [20] puede verse un ejemplo bastante sofisticado que construyó usando tres espacios de Orlicz. Veamos que usando cuatro espacios la búsqueda se hace mucho más sencilla y además lo haremos con espacios de Lorentz. Necesitaremos los siguientes hechos:

- (Lema 3.1 de [20]) Si dos centralizadores reales no triviales Φ y Ψ no son proyectivamente equivalentes, entonces $\Phi + i\Psi$ no es proyectivamente equivalente a un centralizador real.
- El centralizador asociado a la pareja $(L_{p,2}, L_{p^*,2})$ es proyectivamente equivalente a \mathcal{K}_2 (véase el Ejemplo 3.7).
- El centralizador asociado a la pareja (L_p, L_{p^*}) es proyectivamente equivalente a \mathcal{KP}_2 (véase el Ejemplo 3.7).
- (Proposición 2 de [4]) \mathcal{KP}_2 y \mathcal{K}_2 no son proyectivamente equivalentes.

Ejemplo 3.15. Sea $1 < p < \infty$ y consideremos los cuatro arcos A_1, A_2, A_3, A_4 de la Proposición 3.13. Pongamos $X_\xi = L_{p,2}$ para $\xi \in A_1$, $X_\xi = L_p$ para $\xi \in A_2$, $X_\xi = L_{p^*,2}$ para $\xi \in A_3$ y $X_\xi = L_{p^*}$ para $\xi \in A_4$ (véase la Figura 3.4). El espacio interpolado en $z = 0$ es

$$L_2 = L_2^{\frac{1}{2}} L_2^{\frac{1}{2}} = L_p^{\frac{1}{4}} L_{p^*}^{\frac{1}{4}} L_{p,2}^{\frac{1}{4}} L_{p^*,2}^{\frac{1}{4}}$$

y el centralizador asociado Ω es proyectivamente equivalente a $u\mathcal{K}\mathcal{P}_2 + iv\mathcal{K}_2$, siendo u, v dos constantes positivas. Como $\mathcal{K}\mathcal{P}_2$ y \mathcal{K}_2 no son triviales y no son proyectivamente equivalentes, Ω no es proyectivamente equivalente a un centralizador real y por tanto no puede obtenerse a partir de la interpolación de dos espacios.

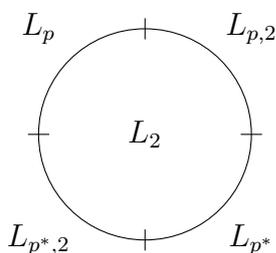


Figura 3.4: Configuración del Ejemplo 3.15.

3.4. Fragmentación y amalgama de escalas de interpolación

Sea L un espacio de sucesiones tal que L y L^* tienen una base incondicional común. Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ finito, definimos el espacio de dimensión finita $L(A)$ como el subespacio de L formado por todos los elementos con soporte contenido en A dotado con la norma $\|x\|_{L(A)} = \|1_A x\|_L$.

Lema 3.16. $[L(A), L^*(A)]_\theta = [L, L^*]_\theta(A)$ con derivación asociada $\Omega_A(x) = 1_A \Omega(1_A x)$.

Demostración. Obtenemos que $[L(A), L^*(A)]_\theta = L(A)^{1-\theta} L^*(A)^\theta$ con igualdad de

normas porque $[L, L^*]_\theta = L^{1-\theta}L^{*\theta}$:

$$\begin{aligned} \|x\|_{[L(A), L(A)^*]_\theta} &= \inf\{\|y\|_{L(A)}^{1-\theta} \|z\|_{L(A)^*}^\theta\} \\ &= \inf\{\|1_A y\|_L^{1-\theta} \|1_A z\|_{L^*}^\theta\} \\ &= \|1_A x\|_{[L, L^*]_\theta} \\ &= \|x\|_{[L, L^*]_\theta(A)}. \end{aligned}$$

Para calcular la derivación, si B es una selección acotada y homogénea de la evaluación $\delta_\theta : \mathcal{C}(L, L^*) \rightarrow [L, L^*]_\theta$, entonces $B_A(x) = 1_A B(1_A x)$ es una selección acotada y homogénea de $\delta_\theta : \mathcal{C}(L(A), L^*(A)) \rightarrow [L, L^*]_\theta(A)$. Por tanto la derivación asociada es $\Omega_A(x) = \delta'_\theta B_A(x) = 1_A \delta'_\theta B(1_A x) = 1_A \Omega(1_A x)$. \square

Sea Λ un espacio de sucesiones con base 1-incondicional (e_n) . Dada una sucesión de espacios de Banach $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se puede construir el espacio de Banach

$$\Lambda(X_n, \mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in X_n, \|(x_n)_n\| = \left\| \sum \|x_n\|_{X_n} e_n \right\|_\Lambda < +\infty \right\},$$

y denotaremos $\Lambda(X)$ si $X_n = X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si X tiene base incondicional, entonces $\Lambda(X)$ también tiene base incondicional. Sin embargo, esto es falso si consideramos una sucesión arbitraria de espacios de Banach (X_n) . Se puede encontrar un contraejemplo en la página 27 de [33]; $\ell_2(L_{p_n}, \mathbb{N})$ no tiene base incondicional cuando $\lim p_n = 1$. En la Sección 5.1 de [2], se demuestra que $[\ell_{p_0}(X_0), \ell_{p_1}(X_1)]_\theta = \ell_p([X_0, X_1]_\theta)$ para $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Vamos a ver una generalización de este resultado y a calcular la derivación asociada.

Sea Λ un espacio de Köthe definido en un espacio de medida S . Dado un espacio de Banach X podemos construir el espacio de Banach $\Lambda(X)$ formado por las funciones medibles $f : S \rightarrow X$ tales que la función $\widehat{f}(\cdot) = \|f(\cdot)\|_X : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $t \rightarrow \|f(t)\|_X$ pertenece a Λ , dotado con la norma $\| \|f(\cdot)\|_X \|_\Lambda$.

Teorema 3.17. *Sea $0 < \theta < 1$ fijo. Sea (Λ_0, Λ_1) una pareja de interpolación de espacios de sucesiones sobre el mismo espacio de medida para la que $[\Lambda_0, \Lambda_1]_\theta = \Lambda_0^{1-\theta} \Lambda_1^\theta$ con derivación asociada ω_θ . Sea (X_0, X_1) una pareja de espacios de Banach con derivación Ω_θ en θ . Supongamos que $\Lambda_0(X_0)$ es reflexivo. Entonces*

$$[\Lambda_0(X_0), \Lambda_1(X_1)]_\theta = \Lambda_0^{1-\theta} \Lambda_1^\theta ([X_0, X_1]_\theta)$$

y la derivación asociada Φ_θ está definida en un subespacio denso de funciones simples como sigue: dada $f = \sum_{n=1}^N a_n 1_{A_n}$ entonces

$$\Phi_\theta(f) = \omega_\theta(\widehat{f}(\cdot)) \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\|a_n\|} 1_{A_n} + \sum_{n=1}^N \Omega_\theta(a_n) 1_{A_n}.$$

Demostración. El cálculo del espacio interpolado puede verse en la sección 13.6 de [7]. Para obtener la derivación sean $b_\theta(\nu)$ y $B_\theta(x)$ extremales para $\nu \in [\Lambda_0, \Lambda_1]_\theta$ y $x \in [X_0, X_1]_\theta$ respectivamente, así que $b_\theta(\nu)'(\theta) = \omega_\theta(\nu)$ y $B_\theta(x)'(\theta) = \Omega_\theta(x)$. Entonces la fórmula (5) de la sección 33.6 de [7] establece que

$$Fx = b_\theta(\hat{f}) \sum B_\theta \left(\frac{a_n}{\|a_n\|} \right) 1_{A_n}$$

es un extremal para $f \in [\Lambda_0(X_0), \Lambda_1(X_1)]_\theta$. Por tanto

$$\begin{aligned} \Phi_\theta(f) &= (Fx)'(\theta) \\ &= b_\theta(\hat{f})'(\theta) \sum B_\theta \left(\frac{a_n}{\|a_n\|} \right) (\theta) 1_{A_n} + b_\theta(\hat{f})(\theta) \sum B_\theta \left(\frac{a_n}{\|a_n\|} \right)' (\theta) 1_{A_n} \\ &= \omega(\hat{f}) \sum \frac{a_n}{\|a_n\|} 1_{A_n} + \hat{f} \sum \Omega_\theta \left(\frac{a_n}{\|a_n\|} \right) 1_{A_n} \\ &= \omega(\hat{f}) \sum \frac{a_n}{\|a_n\|} 1_{A_n} + \sum \Omega_\theta(a_n) 1_{A_n} \end{aligned}$$

por la homogeneidad de Ω_θ . □

Dado un espacio de sucesiones Λ con una base 1-incondicional (e_n) y dado $1 \leq p < +\infty$, se define su p -convexificación Λ_p como la completación del espacio de sucesiones de soporte finito dotado con la norma

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n e_n \right\|_{\Lambda_p} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |\Lambda_n|^p e_n \right\|_{\Lambda}^{1/p}.$$

Un caso interesante se da cuando los espacios Λ_j , $j = 0, 1$, del Teorema 3.17 son p_j -convexificaciones del mismo espacio Λ con base incondicional.

Lema 3.18. *Sea Λ un espacio de Banach con una base K -incondicional (e_n) y sea $0 < \theta < 1$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Se tiene*

$$\left\| \sum |a_n|^{1-\theta} |b_n|^\theta e_n \right\|_{\Lambda_p} \leq K^{1/p} \left\| \sum |a_n| e_n \right\|_{\Lambda_{p_0}}^{1-\theta} \left\| \sum |b_n| e_n \right\|_{\Lambda_{p_1}}^\theta.$$

La demostración es rutinaria. Con este resultado podemos obtener la siguiente versión del Teorema 3.17 sin la hipótesis de que $\Lambda_0(X_0)$ tenga que ser reflexivo.

Teorema 3.19. *Sea Λ un espacio de sucesiones con base 1-incondicional y sean $0 < \theta < 1$, p_0 , p_1 y p tales que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Si (X_0, X_1) es una pareja de interpolación de espacios de Banach con derivación asociada Ω_θ en θ , entonces*

$$(\Lambda_{p_0}(X_0), \Lambda_{p_1}(X_1))_\theta = \Lambda_p(X_\theta)$$

con igualdad de normas y la derivación asociada Φ_θ definida en los elementos de soporte finito $a = \sum_{n=1}^N a_n e_n \in \Lambda_p(X_\theta)$ es

$$\Phi_\theta(a) = \left(\frac{p}{p_1} - \frac{p}{p_0} \right) \sum_{n=1}^N a_n \log \frac{\|a_n\|}{\|a\|} e_n + \sum_{n=1}^N \Omega_\theta(a_n) e_n.$$

Demostración. Para la parte del espacio interpolado basta tener en cuenta el Lema 3.18. En cuanto a la derivación, dado $a = \sum_{n=1}^N a_n e_n$ con $a_n \in X_\theta$, tomando extremales g_n con respecto a la pareja (X_0, X_1) , tales que $g_n(\theta) = a_n$ y $\|g_n\| \leq (1 + \varepsilon)\|a_n\|_{X_\theta}$ se obtiene que

$$f_n(z) = g_n(z) \left(\frac{\|a_n\|_{X_\theta}}{\|a\|_{\Lambda_p(X_\theta)}} \right)^{p\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)(\theta - z)}$$

es un extremal con respecto a la pareja $(\Lambda_{p_0}(X_0), \Lambda_{p_1}(X_1))$, y por tanto la derivación asociada es

$$\Phi_\theta(a) = f'(\theta) = \left(\frac{p}{p_1} - \frac{p}{p_0} \right) \sum_{n=1}^N g_n(\theta) \log \left(\frac{\|a_n\|_{X_\theta}}{\|a\|_{\Lambda_p(X_\theta)}} \right) e_n + \sum_{n=1}^N g'_n(\theta) e_n.$$

Como podemos suponer que $g'_n(\theta) = \Omega_\theta(a_n)$, hemos acabado. \square

En el caso particular en el que Λ_0, Λ_1 son espacios de sucesiones con base incondicional y $1_{A_n} = e_n$, si además Λ_{p_j} es la p_j -convexificación de Λ , $j = 0, 1$, entonces ω es la aplicación de *Kalton y Peck vectorial* $\left(\frac{p}{p_1} - \frac{p}{p_0} \right) \sum_{n=1}^N a_n \log \frac{\|a_n\|}{\|a\|} e_n$, y la derivación asociada es

$$\begin{aligned} \Phi_\theta(f) &= \omega\left(\widehat{f}(\cdot)\right) \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\|a_n\|} e_n + \sum_{n=1}^N \Omega_\theta(a_n) e_n \\ &= \left(\frac{p}{p_1} - \frac{p}{p_0} \right) \sum_{n=1}^N \|a_n\| \log \frac{\|a_n\|}{\|a\|} e_n \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\|a_n\|} e_n + \sum_{n=1}^N \Omega_\theta(a_n) 1_{A_n} \\ &= \left(\frac{p}{p_1} - \frac{p}{p_0} \right) \sum_{n=1}^N a_n \log \frac{\|a_n\|}{\|a\|} e_n + \sum_{n=1}^N \Omega_\theta(a_n) 1_{A_n}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.20. Tomemos las parejas (ℓ_p, ℓ_{p^*}) y (ℓ_{p^*}, ℓ_p) (en orden contrario) y calculemos la derivación asociada en $\ell_2(\ell_2)$, que es el espacio interpolado en $1/2$ por el Teorema 3.17. Para la primera pareja, la derivación en $1/2$ es

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \mathcal{K}\mathcal{P}_2(x) = \left(\frac{2}{p} - \frac{2}{p^*} \right) \sum_k x_k \log \frac{|x_k|}{\|x\|} u_k,$$

donde (u_k) denota la base canónica de ℓ_2 , mientras que para la segunda pareja, la derivación en $1/2$ es

$$-\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \mathcal{K}\mathcal{P}_2(x) = -\left(\frac{2}{p} - \frac{2}{p^*}\right) \sum_k x_k \log \frac{|x_k|}{\|x\|} e_k.$$

Así, la derivación asociada en $a = \sum_{k=1}^N a_k u_k$ con $a_k \in \ell_2$ es

$$\Phi(a) = \left(\frac{2}{p} - \frac{2}{p^*}\right) \sum_{k=1}^N \left(a_k \log \frac{\|a_k\|}{\|a\|} - \sum_n a_k(n) \log \frac{|a_k(n)|}{\|a_k\|} e_n \right) u_k.$$

Fijemos el espacio Λ y sea (X_0, X_1) una pareja de interpolación con derivación Ω_θ en θ . Si Σ es el espacio ambiente de la pareja (X_0, X_1) , podemos asumir que el de la pareja (X_0^N, X_1^N) es Σ^N y el de $(\Lambda(X_0), \Lambda(X_1))$ es Σ^N . Así, la derivación asociada a $[X_0^N, X_1^N]_\theta = [X_0, X_1]_\theta^N$ es Ω_θ^N y por tanto la derivación de $[\Lambda(X_0), \Lambda(X_1)]_\theta = \Lambda([X_0, X_1]_\theta)$ se puede escribir como $\Lambda(\Omega_\theta)$ con el significado de que para todo elemento de soporte finito $x = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \in \Lambda([X_0, X_1]_\theta) = [\Lambda(X_0), \Lambda(X_1)]_\theta$ se tiene

$$\Lambda(\Omega_\theta)(x) = (\Omega_\theta(x_1), \dots, \Omega_\theta(x_N), 0, \dots).$$

Ejemplo 3.21. Consideremos los espacios de dimensión finita ℓ_p^k y sea la sucesión de parejas de interpolación $(\ell_{p_n}^{k_n}, \ell_{p_n^*}^{k_n})$. Podemos formar la pareja de interpolación $(\ell_2(\ell_{p_n}^{k_n}, \mathbb{N}), \ell_2(\ell_{p_n^*}^{k_n}, \mathbb{N}))$. El espacio interpolado en $1/2$ es $\ell_2(\ell_2^{k_n}, \mathbb{N})$ y la derivación asociada es

$$\left(\sum_{j=1}^{k_n} x_j^n u_j^n \right)_n \mapsto \ell_2 \left(\left(\frac{2}{p_n} - \frac{2}{p_n^*} \right) \sum_{j=1}^{k_n} x_j^n \log \frac{|x_j^n|}{\|\sum_{j=1}^{k_n} x_j^n u_j^n\|_2} u_j^n \right).$$

Capítulo 4

Espacios twisted Hilbert

¡No lleva carne!

Decimos que un espacio de Banach X es un espacio *twisted Hilbert* cuando X tiene un subespacio H isomorfo a un espacio de Hilbert de tal manera que el cociente X/H también es isomorfo a un espacio de Hilbert, o equivalentemente, si es una suma torcida de dos espacios de Hilbert. Existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow H \rightarrow X \rightarrow X/H \rightarrow 0,$$

y decimos que el twisted Hilbert X es *trivial* si la sucesión exacta es trivial. El espacio X es trivial si y sólo si es un espacio de Hilbert.

El primer ejemplo de twisted Hilbert no trivial lo construyeron Enflo, Lindenstrauss y Pisier [22], lo denotaremos ELP y tiene la forma

$$\ell_2(F_n, \mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in F_n, \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{F_n}^2 \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

siendo $(F_n)_n$ una sucesión de espacios de Banach de dimensión finita. Posteriormente, Kalton y Peck [30] construyeron otro ejemplo diferente que denotaremos Z_2 .

Una forma de obtener espacios twisted Hilbert es a través de interpolación compleja. Dada una pareja de interpolación (X_0, X_1) que cumpla $X_\theta = \ell_2$, el espacio derivado dX_θ es un espacio twisted Hilbert. En este capítulo veremos cuatro ejemplos obtenidos a través de interpolación compleja.

Dada una pareja (X, X^*) tal que $[X, X^*]_{1/2} = \ell_2$, denotaremos al espacio derivado en $1/2$ por $Z(X)$ para poder distinguir con qué pareja de interpolación se ha obtenido. Si denotamos por Ω a la derivación asociada, la norma de $Z(X)$ es equivalente a la quasinorma

$$\|(x, y)\| = \|x - \Omega(y)\| + \|y\|. \quad (4.a)$$

Vamos a enunciar dos resultados que usaremos sobre $Z(X)$. El primero es que $Z(X)$ es isomorfo a su dual, véase el Corolario 4 de [3]. El segundo es la Proposición 2 de [43] que podemos ver a continuación.

Proposición 4.1. *Sea $(e_j)_{j=1}^\infty$ la base canónica e incondicional de ℓ_2 y consideremos $v_{2j-1} = (e_j, 0), v_{2j} = (0, e_j)$ para $j \in \mathbb{N}$. Entonces*

(i) *La sucesión $(v_j)_{j=1}^\infty$ es una base de $Z(X)$.*

(ii) *La sucesión $(v_{2j})_{j=1}^\infty$ es incondicional.*

Corolario 4.2. *Sean X y X^* espacios con base incondicional común tales que $(X, X^*)_{1/2} = \ell_2$. Son equivalentes las siguientes condiciones.*

1. *Los espacios X y ℓ_2 tienen normas equivalentes.*
2. *El espacio twisted Hilbert $Z(X)$ es isomorfo a ℓ_2 .*
3. *El espacio $[v_{2j}]_{j=1}^\infty$ es isomorfo a ℓ_2 .*

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Si la norma de X es equivalente a la de ℓ_2 , entonces también lo es la norma de X^* . Por tanto, para cada $x \in \ell_2$, la aplicación constante $B(x)(z) = x$ es una selección acotada y la derivación $\Omega_X = 0$.

(2) \Rightarrow (3) Obvio.

(3) \Rightarrow (1) Si $[v_{2j}]_{j=1}^\infty$ es isomorfo a ℓ_2 , existe $C > 0$ tal que

$$\left\| \left(0, \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j a_j e_j \right) \right\| \leq C \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \right)^{1/2},$$

para cada $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2$. Como la base $\{(0, e_j)\}_{j=1}^\infty$ es K -incondicional por la Proposición 4.1(ii), obtenemos que

$$\left\| \left(0, \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \right) \right\| \leq KC \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \right)^{1/2}, \quad (a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2.$$

Usando la expresión 4.a, se sigue que

$$\left\| \Omega_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \right) \right\| \leq (KC - 1) \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \right)^{1/2}, \quad (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2,$$

es decir, la aplicación Ω_X es acotada y el Teorema de Kalton implica que X y ℓ_2 tienen normas equivalentes. \square

4.1. El espacio de Kalton y Peck fragmentado

Un operador $q : X \rightarrow Z$ es *estrictamente singular* si para todo subespacio S cerrado y de dimensión infinita de X , su restricción $q|_S : S \rightarrow q(S)$ no es un isomorfismo. Una sucesión exacta

$$0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow 0$$

se dice que es *singular* cuando el operador $X \rightarrow Z$ es estrictamente singular. Se dice que un centralizador es *singular* si su restricción a cualquier subespacio cerrado de dimensión infinita no es trivial. Una sucesión exacta inducida por un centralizador es singular si y solo si el centralizador es singular (véase el Lema 1 de [15]). Para todo $0 < p < \infty$ el centralizador \mathcal{KP}_p en ℓ_p es singular (véase [30] y [5]).

Definición 4.3. *Un centralizador Ω en X se dice que es estrictamente no singular si todo subespacio $A \subset X$ de dimensión infinita contiene otro subespacio $B \subset A$ de dimensión infinita tal que $\Omega|_B$ es trivial.*

Una sucesión exacta inducida por un centralizador se dice *estrictamente no singular* si el centralizador asociado es estrictamente no singular. Una aplicación cociente $q : X \rightarrow Z$ se dice que es *estrictamente no singular* si la sucesión exacta $0 \rightarrow \ker q \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow 0$ es estrictamente no singular.

Una sucesión (x_n) en X se dice que es *débilmente p -sumable*, con $1 < p < \infty$, si $(x^*(x_n))_n \in \ell_p$ para todo $x^* \in X^*$. Se dice que un espacio de Banach tiene la propiedad \mathcal{W}_p si es reflexivo y toda sucesión débilmente convergente a 0 admite una subsucesión débilmente p -sumable. Es fácil ver que el espacio ℓ_p tiene la propiedad \mathcal{W}_{p^*} , para todo $1 < p < \infty$. Se dice que un espacio de Banach es *ℓ_p -saturado* cuando todo subespacio cerrado de dimensión infinita contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p .

Lema 4.4. *Una sucesión exacta $0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow 0$ en la que Z es ℓ_p -saturado y X tiene la propiedad \mathcal{W}_{p^*} es estrictamente no singular.*

Demostración. Sea H un subespacio de dimensión infinita de Z y sea (h_n) una sucesión en H equivalente a la base canónica de ℓ_p dentro de H . Como q es una aplicación abierta, existe una constante $C > 0$ tal que para cada h_n podemos elegir $x_n \in X$ con $\|x_n\| \leq C$ y tal que $qx_n = h_n$. Como X es reflexivo podemos suponer que (x_n) es débilmente convergente, denotemos x al límite. Nótese que $qx = 0$, pues h_n es débilmente convergente a 0. Por la propiedad \mathcal{W}_{p^*} de X , existe una subsucesión $(x_k - x)$ débilmente p^* -sumable. Por tanto, la aplicación lineal $h_k \rightarrow x_k - x$ es una selección continua de $q|_{[x_k]}$. \square

En el Teorema 1 de [16] se puede ver que si Λ es un espacio de Banach con base incondicional con la propiedad \mathcal{W}_p y X es un espacio de Banach con la propiedad \mathcal{W}_p , entonces $\Lambda(X)$ también tiene la propiedad \mathcal{W}_p . Es falso que se cumpla para $\ell_p(X_n, \mathbb{N})$, siendo $(X_n)_n$ una sucesión arbitraria de espacios con la propiedad \mathcal{W}_p , sin embargo, si los espacios X_n son de dimensión finita, el resultado sí es cierto. Los argumentos que necesitamos están esencialmente contenidos en la prueba del Teorema 1 de [16].

Lema 4.5. *Dada una sucesión (F_n) de espacios de dimensión finita, $\ell_p(F_n, \mathbb{N})$ tiene la propiedad \mathcal{W}_{p^*} .*

Sea (A_n) una partición de \mathbb{N} , Λ un espacio de Banach con base 1-incondicional y L un espacio de Banach tal que L y L^* tienen una base incondicional común. Supongamos que $\Omega_{A_n, \theta}$ es el centralizador asociado a la escala $(L(A_n), L^*(A_n))$ en θ . Se sigue del Teorema 3.19 que

$$[\Lambda(L(A_n), \mathbb{N}), \Lambda(L^*(A_n), \mathbb{N})]_{\theta} = \Lambda([L(A_n), L^*(A_n)]_{\theta}, \mathbb{N}) = \Lambda([L, L^*]_{\theta}(A_n), \mathbb{N})$$

con centralizador asociado $\Lambda(\Omega_{A_n, \theta}, \mathbb{N})$, con el significado de que para todo elemento de soporte finito $x = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \in \Lambda([L, L^*]_{\theta}(A_n), \mathbb{N})$ se tiene que $\Lambda(\Omega_{A_n, \theta}, \mathbb{N})(x) = (\Omega_{A_n, \theta}(x_n))$.

Consideremos la escala (ℓ_{∞}, ℓ_1) . El espacio interpolado en $1/2$ es ℓ_2 y el centralizador asociado es \mathcal{KP} . Sea (A_n) una partición de \mathbb{N} y consideremos la sucesión de escalas $(\ell_{\infty}(A_n), \ell_1(A_n))$ cuyos espacios interpolados en $1/2$ son $\ell_2(A_n)$, y cuyos centralizadores son $\mathcal{KP}|_{\ell_2(A_n)}$. Entonces, la escala $(\ell_2(\ell_{\infty}(A_n), \mathbb{N}), \ell_2(\ell_1(A_n), \mathbb{N}))$ tiene como espacio interpolado en $1/2$ a $\ell_2(\ell_2(A_n), \mathbb{N})$ y el centralizador asociado es $\ell_2(\mathcal{KP}|_{\ell_2(A_n)}, \mathbb{N})$. El centralizador \mathcal{KP} es simétrico, lo que significa que su restricción

a cualquier espacio $\ell_2(A)$ de dimensión finita solo depende del tamaño del conjunto A . Esto implica que cuando $\sup |A_n| < +\infty$ las restricciones $\mathcal{KP}|_{\ell_2(A)}$ son uniformemente triviales y por tanto $\ell_2(\mathcal{KP}|_{\ell_2(A_n)}, \mathbb{N})$ es trivial. En el caso $\sup |A_n| = +\infty$ tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.6. *Si $\sup |A_n| = \infty$ entonces $\ell_2(\mathcal{KP}|_{\ell_2(A_n)}, \mathbb{N})$ no es trivial y es estrictamente no singular.*

Demostración. Que no es trivial se puede deducir del Teorema 6.3 de [30], y por el Lema 4.4 y el Lema 4.5 obtenemos que es estrictamente no singular. \square

4.2. Otros twisted Hilbert

Dado un espacio de dimensión finita E , escribiremos

$$d_E = d(E, \ell_2^{\dim E}),$$

siendo d la distancia de Banach-Mazur. Sea X un espacio de Banach. Definimos

$$d_n(X) = \sup d_E,$$

donde el supremo se toma sobre todos los subespacios E de X de dimensión n . El número $a_{n,p}(X)$ se define como la menor constante a tal que

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right\| \leq a \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right)^{1/p},$$

para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in X$ y donde la media \mathbb{E} se toma sobre $(\varepsilon_j)_{j=1}^n \in \{-1, 1\}^n$. El espacio X tiene *tipo p* si $a_p(X) := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_{n,p}(X) < \infty$. La constante $c_{n,p}(X)$ de *cotipo p* se define como la menor constante c tal que

$$\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right)^{1/p} \leq c \cdot \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right\|,$$

para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in X$ y X tiene *cotipo p* si $c_p(X) := \sup_{n \in \mathbb{N}} c_{n,p}(X) < \infty$. El espacio ℓ_p tiene tipo $\min\{p, 2\}$ y cotipo $\max\{p, 2\}$ (véase [36]). Un resultado de Kwapien [32] es que

$$d_E \leq a_2(E) \cdot c_2(E).$$

Los espacios twisted Hilbert son parecidos a los espacios de Hilbert en varios sentidos, por ejemplo, son ℓ_2 -saturados, superreflexivos, y tienen tipo $2 - \varepsilon$ y cotype $2 + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ [22], sin embargo, los twisted Hilbert no triviales no pueden tener tipo 2 ni cotype 2 [35]. También se sabe que no pueden tener base incondicional [28]. En [43] Jesús Suárez construye el espacio $Z(\mathcal{T}_2)$, siendo \mathcal{T}_2 la 2-convexificación del espacio de Tsirelson, véase [10] para los detalles de este espacio. El espacio $Z(\mathcal{T}_2)$ es un espacio débil Hilbert, una propiedad que intuitivamente hablando “está cerca” de ser un espacio de Hilbert. En los tres ejemplos que construiremos, consideraremos otras propiedades que también “están cerca” de ser un espacio de Hilbert, como ser asintóticamente Hilbert, la propiedad (H) , diferentes formas de propiedades $E(n, n, K)$ y la propiedad de aproximación hereditaria.

- Decimos que un espacio de Banach X es *débil Hilbert* si existen $0 < \delta_0 < 1$ y una constante C con la siguiente propiedad: todo subespacio E de X de dimensión finita contiene un subespacio $F \subseteq E$ con $\dim F \geq \delta_0 \dim E$ tal que $d_F \leq C$ y existe una proyección $P : X \rightarrow F$ con $\|P\| \leq C$.
- Decimos que X es *asintóticamente Hilbert* si existe $C > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un subespacio X_n de X de codimensión finita tal que todo subespacio E de X_n de dimensión n cumple que $d_E \leq C$.
- Decimos que X tiene la *propiedad (H)* si para cada $\lambda > 1$ existe $K(\lambda)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualquier sucesión básica λ -incondicional normalizada $(u_j)_{j=1}^n \in X$, se tiene

$$K(\lambda)^{-1}\sqrt{n} \leq \left\| \sum_{j=1}^n u_j \right\| \leq K(\lambda)\sqrt{n}.$$

- Sea X un espacio de Banach con una base $(e_j)_{j=1}^\infty$ y sean $K \geq 1$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Decimos que $(e_j)_{j=1}^\infty$ es (m, K) -euclídea, si para cada subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ con $|A| \leq m$, $(e_j)_{j \in A}$ es K -equivalente a la base unitaria de $\ell_2^{|A|}$. Decimos que $(e_j)_{j=1}^\infty$ tiene la propiedad $E(n, m, K)$ si existe un subconjunto $I \subseteq \mathbb{N}$ con $|I| = n$ tal que

$$\{e_j : j \in \mathbb{N} \setminus I\}$$

es (m, K) -euclídea. Decimos que $(e_j)_{j=1}^\infty$ tiene la propiedad $E_t(n, m, K)$ si $\{e_j : j \geq n + 1\}$ es (m, K) -euclídea.

- Decimos que un espacio de Banach X tiene la *propiedad de aproximación* si para todo conjunto compacto $K \subset X$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un operador $T : X \rightarrow X$ cuya imagen es de dimensión finita tal que $\|T(x) - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$. Decimos que X tiene la *propiedad de aproximación hereditaria*, o que es un espacio *HAPpy*, si todos los subespacios de X tienen la propiedad de aproximación.

Se puede probar que los espacios débil Hilbert tienen la propiedad (H) , y los espacios con la propiedad (H) son asintóticamente Hilbert, véanse la Proposición 14.2 y el Teorema 14.4 de [40]. Para cada base incondicional $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ con la propiedad (H) existe $K > 0$ tal que $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ tiene la propiedad $E(n, n, K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, véase la Proposición 3.8 de [38].

4.3. Espacio asintóticamente Hilbert y no débil Hilbert

Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ los números $k_n = 2^{n+1}$ y p_n, p_n^* tales que

$$\frac{1}{p_n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p_n^*},$$

y construyamos los espacios $\mathcal{J} = \ell_2(\ell_{p_n}^{k_n}, \mathbb{N})$ y $\mathcal{J}^* = \ell_2(\ell_{p_n^*}^{k_n}, \mathbb{N})$, que cumplen que

$$(\mathcal{J}, \mathcal{J}^*)_{1/2} = \ell_2.$$

Teorema 4.7. *El espacio $Z(\mathcal{J})$ es asintóticamente Hilbert y no tiene la propiedad $E(n, n, K)$. En particular, no tiene la propiedad (H) y no es un espacio débil Hilbert.*

Demostración. Haremos la demostración en tres pasos.

Paso 1) Los espacios \mathcal{J} y \mathcal{J}^* son asintóticamente Hilbert y no son de Hilbert.

Para ver que \mathcal{J} no es un espacio de Hilbert basta observar que

$$d(\ell_{p_n}^{k_n}, \ell_2^{k_n}) = k_n^{\frac{1}{p_n} - \frac{1}{2}} = 2^{\sqrt{n}} \cdot 2^{1/\sqrt{n}} \rightarrow \infty,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Como \mathcal{J} no es de Hilbert, \mathcal{J}^* tampoco lo es. Comprobemos que \mathcal{J} es asintóticamente Hilbert. Para $m \geq n^2$, se tiene:

$$\begin{aligned} a_{k_n,2}(\ell_{p_m}^{k_m}) &\leq k_n^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{2}} \\ &\leq k_n^{\frac{1}{p_{n^2}} - \frac{1}{2}} \\ &= 2^{1/n} \cdot 2 \\ &\leq 4, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se obtiene de la prueba del Ejemplo de la sección 9.3 de [36] y de la desigualdad de Kahane (véase la sección 9.2 de [36]). Tenemos que

$$a_{k_n,2} \left(\bigoplus_{m=n^2}^{\infty} \ell_{p_m}^{k_m} \right)_2 \leq 4. \quad (4.b)$$

Vamos a denotar $\mathcal{J}_{n^2} = \left(\bigoplus_{m=n^2}^{\infty} \ell_{p_m}^{k_m} \right)_2$. Si $E \subseteq \mathcal{J}_{n^2}$ con $\dim E \leq k_n$, entonces

$$\begin{aligned} d_E &\leq a_2(E) \cdot c_2(E) \\ &\leq 2\sqrt{2\pi} \cdot a_{k_n,2}(\mathcal{J}_{n^2}) \cdot c_{k_n,2}(\mathcal{J}_{n^2}) \\ &\leq 8\sqrt{2\pi} \cdot c_{k_n,2}(\mathcal{J}_{n^2}) \\ &\leq 8\sqrt{2\pi} \cdot c_2, \end{aligned}$$

para algún $c_2 > 0$ porque \mathcal{J} (y por tanto \mathcal{J}_{n^2}) tiene cotipo 2. La segunda desigualdad se obtiene del Teorema 2 de [38]. Por último, el subespacio \mathcal{J}_{n^2} tiene codimensión $\sum_{m=1}^{n^2-1} k_m = 2(2^{n^2} - 2)$, así que terminamos para \mathcal{J} . Intercambiando los papeles del tipo y el cotipo, nos sirve un argumento similar para \mathcal{J}^* . De hecho tenemos

$$a_{k_n,2} \left(\bigoplus_{m=n^2}^{\infty} \ell_{p_m^*}^{k_m} \right)_2 \leq a_2, \quad (4.c)$$

para algún $a_2 > 0$ porque \mathcal{J}^* tiene tipo 2.

Paso 2) El espacio $Z(\mathcal{J})$ es asintóticamente Hilbert.

Consideremos el subespacio \mathcal{J}_{n^2} . Aplicando la Proposición 3 de [43] y las desigualdades (4.b) y (4.c) obtenemos que

$$a_{k_n,2}(Z(\mathcal{J}_{n^2})) \leq C, \quad (4.d)$$

para algún $C > 0$. El espacio $Z(\mathcal{J}_{n^2})$ es λ -isomorfo a su dual para alguna constante $\lambda > 0$ independiente de n , por lo que obtenemos

$$c_{k_n,2}(Z(\mathcal{J}_{n^2})) \leq \lambda \cdot C, \quad (4.e)$$

usando un argumento de la Proposición 3.2 de [39]. Por tanto, si $E \subseteq Z(\mathcal{J}_{n^2})$ es un subespacio con $\dim E \leq k_n$, tenemos por (4.d) y (4.e) que

$$\begin{aligned} d_E &\leq a_2(E) \cdot c_2(E) \\ &\leq 2\sqrt{2\pi} \cdot a_{k_n,2}(Z(\mathcal{J}_{n^2})) \cdot c_{k_n,2}(Z(\mathcal{J}_{n^2})) \\ &\leq 2\sqrt{2\pi} \cdot \lambda \cdot C^2. \end{aligned}$$

Para terminar, obsérvese que $Z(\mathcal{J}_{n^2})$ es un subespacio de $Z(\mathcal{J})$ de codimensión $2 \cdot \sum_{m=1}^{n^2-1} k_m = 2^2(2^{n^2} - 2)$.

Paso 3) Si $Z(\mathcal{J})$ tiene la propiedad $E(2^n, 2^n, K)$, entonces $2K \geq \sqrt{n}$.

Consideremos $Z(\ell_{p_n}^{k_n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $Z(\mathcal{J}) = \ell_2(Z(\ell_{p_n}^{k_n}), \mathbb{N})$ y supongamos que $Z(\mathcal{J})$ tiene la propiedad $E(n, n, K)$. Entonces la sucesión incondicional

$$U = \{(0, e_j) \in Z(\ell_{p_n}^{k_n}) : j = 1, \dots, k_n; n \in \mathbb{N}\}$$

tendría la propiedad $E(2^n, 2^n, K)$ para algún $K > 0$. Fijemos n y tomemos cualquier conjunto A de 2^n vectores en U . Obsérvese que el número de vectores $(0, e_j)$ en cada $Z(\ell_{p_m}^{k_m})$ es exactamente $k_m = 2 \cdot 2^m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Así, podemos tomar un conjunto B , disjunto con A , de 2^n vectores de la forma $(0, e_j)$ en $Z(\ell_{p_n}^{k_n})$. Por definición de la propiedad $E(2^n, 2^n, K)$, el conjunto B es K -equivalente a la base de $\ell_2^{|B|}$. El centralizador en $Z(\ell_{p_n}^{k_n})$ es

$$\mathcal{K}\mathcal{P}_n = \left(\frac{2}{p_n^*} - \frac{2}{p_n} \right) \mathcal{K}\mathcal{P} : \ell_2^{k_n} \longrightarrow \omega,$$

y se obtendría por tanto que

$$\left\| \mathcal{K}\mathcal{P}_n \left(\sum_{j \in B} e_j \right) \right\| \leq (K - 1) \left\| \sum_{j \in B} e_j \right\| = (K - 1) \sqrt{2^n}. \quad (4.f)$$

Pero por otro lado, hemos elegido

$$\frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_n^*} = \frac{1}{p_n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_n^*} = \frac{2}{\sqrt{n}},$$

y se obtendría que

$$\left\| \mathcal{K}\mathcal{P}_n \left(\sum_{j \in B} e_j \right) \right\| = \frac{2^2}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{2^n} \log \sqrt{2^n} = 2 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{2^n} \log 2. \quad (4.g)$$

Juntando las expresiones (4.g) y (4.f) llegaríamos a la contradicción

$$\sqrt{n} \cdot 2 \log 2 \leq K - 1.$$

□

4.4. Espacio con la propiedad $E(n, n, K)$ y que no es asintóticamente Hilbert

Un subconjunto finito $A = \{n_1 < \dots < n_k\}$ de \mathbb{N} es *admisibile* si $k \leq n_1$, y denotaremos por \mathcal{A} el conjunto de subconjuntos admisibles. El espacio de Schreier \mathcal{S} se define como la completación del espacio c_{00} de sucesiones de soporte finito con la norma

$$\|x\|_{\mathcal{S}} = \sup_{A \in \mathcal{A}} \sum_{j \in A} |x_j|.$$

Denotaremos por \mathcal{S}^2 a la 2-convexificación de \mathcal{S} . Tenemos que $[\mathcal{S}^2, (\mathcal{S}^2)^*]_{1/2}$ y ℓ_2 tienen normas equivalentes por el Corolario 4.3 de [17]. El espacio derivado $Z(\mathcal{S}^2)$ es un espacio twisted Hilbert cuya base tiene la propiedad $E(n, n, K)$.

Proposición 4.8. *Existe $K > 0$ tal que la base $(v_j)_{j=1}^{\infty}$ de $Z(\mathcal{S}^2)$ tiene la propiedad $E(n, n, K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Probaremos primero que existe $K > 0$ tal que la subsucesión $(v_{2j})_{j=1}^{\infty}$ tiene la propiedad $E_t(n, n, K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $y \in c_{00}$ con $\text{sop}(y) \in \mathcal{A}$, obtenemos que

$$\max(\|y\|_{\mathcal{S}^2}, \|y\|_{(\mathcal{S}^2)^*}) = \|y\|_{\ell_2},$$

y consideremos la aplicación constante

$$B(y)(z) = y \in \mathcal{C}(\mathcal{S}^2, (\mathcal{S}^2)^*).$$

La aplicación $B(y)$ es una selección acotada para y , así que el centralizador $\Omega(y) = \delta'_{1/2} B(y)$ debe ser cero. Por tanto, para $y \in c_{00}$ con $\text{sop}(y) \in \mathcal{A}$, tenemos que

$$\|\Omega(y)\| + \|y\| = \|y\|.$$

De la expresión anterior se sigue que $(v_{2j})_{j \in A}$ es equivalente a la base de $\ell_2^{|A|}$. Esta equivalencia se obtiene en la quasinorma inducida por Ω , que es equivalente a la norma de $Z(\mathcal{S}^2)$ (Proposición 7.2 de [8]).

Para el caso general, dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos el subconjunto $A \subseteq \mathbb{N} \setminus \{2, \dots, 2n\}$ con $|A| = n$ y consideremos $\{v_j\}_{j \in A}$. Sea $E = \{j : 2j \in A\}$. Si $E = \emptyset$, tenemos que cualquier elemento del espacio $[v_j]_{j \in A}$ es de la forma $(x, 0)$ y terminamos. De otra forma, E es admisible y por tanto $\Omega(y) = 0$ si $\text{sop}(y) \subseteq E$. Si tomamos $(x, y) \in [v_j]_{j \in A}$, se sigue que $\text{sop}(y) \subseteq E$ y entonces

$$\|(x, y)\| = \|x - \Omega(y)\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|.$$

□

Lema 4.9. *El espacio $Z(\mathcal{S}^2)$ contiene una copia isomorfa a Z_2 .*

Demostración. Los bloques $u_n = 2^{\frac{1-n}{2}} \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} e_j$, con $n \in \mathbb{N}$, generan una copia isométrica de c_0 en \mathcal{S}^2 , véase la Proposición 0.7 de [10]. Estos bloques generan una copia de ℓ_1 en $(\mathcal{S}^2)^*$. De hecho, como el soporte de u_n es un conjunto admisible, se tiene que $\|u_n\|_{(\mathcal{S}^2)^*} = 1$, y entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n u_n \right\|_{(\mathcal{S}^2)^*} &= \left\| \sum_{n=1}^N |\lambda_n| u_n \right\|_{(\mathcal{S}^2)^*} \\ &= \sup_{\|x\|_{\mathcal{S}^2} \leq 1} \sum_{n=1}^N |\lambda_n| \langle u_n, x \rangle \\ &\geq \sum_{n=1}^N |\lambda_n|, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene al tomar el vector $x = u_1 + \dots + u_N$ de norma uno. Dado $(\lambda_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}$ con $\|(\lambda_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell_2} = 1$ y escribiendo $\lambda = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n u_n$, la aplicación

$$B(\lambda)(z) := \sum_{n=1}^\infty \lambda_n |\lambda_n|^{2z-1} u_n \in \mathcal{C}(\mathcal{S}^2, (\mathcal{S}^2)^*)$$

está bien definida y es una selección acotada para λ , así que obtenemos que

$$\delta'_{1/2} B(\lambda) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \log |\lambda_n| u_n.$$

Este centralizador induce la quasinorma en el espacio de Kalton y Peck (véase [30]), por lo que $[(u_n, 0), (0, u_n)]_{n=1}^\infty$ genera una copia de Z_2 . \square

Una base $(e_n)_{n=1}^\infty$ de un espacio de Banach se dice que es *simétrica* si es equivalente a $(e_{\pi(n)})_{n=1}^\infty$ para toda permutación π de \mathbb{N} , es decir, si y solo si las aplicaciones $e_n \mapsto e_{\pi(n)}$ son isomorfismos.

Proposición 4.10. *El espacio Z_2 no es asintóticamente Hilbert.*

Demostración. El espacio Z_2 contiene el subespacio $\ell_M = [(0, e_j)]_{j=1}^\infty$. Se puede ver que la base de ℓ_M es simétrica por la Proposición 4.1 y por la forma del centralizador

$$\mathcal{KP}(x) = \sum_{j=1}^\infty x_j \log \frac{|x_j|}{\|x\|_2} e_j.$$

Si Z_2 fuese asintóticamente Hilbert, el espacio ℓ_M también lo sería. Sea X un subespacio de codimensión finita en Z_2 , entonces $X \cap \ell_M$ también es de codimensión finita en ℓ_M . Pero los espacios asintóticamente Hilbert no pueden tener una base simétrica a menos que sean isomorfos a ℓ_2 , véase la página 11 de [23]. Y llegamos a contradicción porque el espacio ℓ_M no es isomorfo a ℓ_2 por el Corolario 4.2. \square

Proposición 4.11. *El espacio $Z(\mathcal{S}^2)$ no es asintóticamente Hilbert.*

Demostración. La propiedad de ser asintóticamente Hilbert es hereditaria, y el enunciado se obtiene del Lema 4.9 y la Proposición 4.10. En particular, ningún espacio que contenga una copia de Z_2 es asintóticamente Hilbert. \square

Veamos que $Z(\mathcal{S}^2)$ no es isomorfo a ningún subespacio de Z_2 ni a ningún subespacio de ELP .

Lema 4.12. *Existe $K > 0$ tal que para cada subconjunto finito $B \subseteq \mathbb{N}$, hay un subconjunto $A \subseteq B$ con $|A| \geq 2^{-1}|B|$ para el que $(v_j)_{j \in A}$ es K -equivalente a $\ell_2^{|A|}$.*

Demostración. Sea $E = \{n : 2n \in B\}$ y supongamos que $|E|$ es par. Entonces, los últimos $2^{-1}|E|$ elementos de E forman un subconjunto admisible que denotaremos por E' . Para cada $y \in c_{00}$ con $\text{sop}(y) \subseteq E'$ se tiene que

$$\max(\|y\|_{\mathcal{S}^2}, \|y\|_{(\mathcal{S}^2)^*}) = \|y\|_{\ell_2}.$$

El conjunto $A := \{2n - 1 \in B\} \cup \{2n : n \in E'\}$ cumple el enunciado del lema. Por la Proposición 4.8, dado $y \in c_{00}$ tenemos $\Omega(y) = 0$, y por tanto dado $x \in \ell_2$ y $y \in c_{00}$ con $\text{sop}(y) \subseteq E'$, obtenemos

$$\|x - \Omega(y)\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Esta expresión muestra que $(v_j)_{j \in A}$ es equivalente a la base de $\ell_2^{|A|}$. Para terminar, obsérvese que

$$|A| = |\{2n - 1 \in B\}| + |\{2n : n \in E'\}| \geq |\{2n - 1 \in B\}| + 2^{-1}|E| \geq 2^{-1}|B|.$$

Si $|E|$ es impar, entonces los últimos $(|E| + 1)/2$ elementos forman un subconjunto admisible y razonamos con el mismo argumento. \square

Proposición 4.13. *1. El espacio $Z(\mathcal{S}^2)$ no es isomorfo a ningún subespacio ni a ningún cociente de Z_2 .*

2. El espacio $Z(\mathcal{S}^2)$ no es isomorfo a ningún subespacio ni a ningún cociente de $\ell_2(F_n, \mathbb{N})$ con $\dim F_n < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Las afirmaciones para los cocientes se siguen de la dualidad, véase el Corolario 4 de [3]. La demostración es similar a la de la Proposición 4 de [43]. Es suficiente mostrar que ninguna subsucesión de $(v_{2j})_{j=1}^{\infty}$ en $Z(\mathcal{S}^2)$ es equivalente a ℓ_2 o al espacio ℓ_M de Z_2 (véase el Lema 5.3 de [30]). Si $(v_{2n_j})_{j=1}^{\infty}$ es equivalente a ℓ_2 entonces $(e_{2n_j})_{j=1}^{\infty}$ en \mathcal{S}^2 también es equivalente a ℓ_2 por el Teorema de Kalton, y así obtendríamos una copia de ℓ_1 en \mathcal{S} , pero esto no es posible por el Teorema 0.5 de [10]. Como la única base simétrica que cumple el Lema 4.12 es ℓ_2 , el caso de ℓ_M se reduce al anterior. \square

Hemos visto que $Z(\mathcal{S}^2)$ no es isomorfo a $Z(\mathcal{J})$ ni a los anteriores ejemplos de espacios twisted Hilbert: ELP , Z_2 y $Z(\mathcal{T}^2)$. También hemos visto que $Z(\mathcal{J})$ no es isomorfo a $Z(\mathcal{T}^2)$. Y como Z_2 no es asintóticamente Hilbert, sabemos que $Z(\mathcal{J})$ tampoco es isomorfo a Z_2 . Falta comprobar que $Z(\mathcal{J})$ es diferente de ELP . Veamos que ELP no es asintóticamente Hilbert.

Una sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de subespacios de dimensión finita de un espacio de Banach X se dice que es una *descomposición finito dimensional de X* si todo $x \in X$ tiene una única representación de la forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ con $x_n \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada una descomposición finito dimensional de X se definen las proyecciones $P_n(\sum_{i=1}^{\infty} x_i) = \sum_{i=1}^n x_i$. Una descomposición finito dimensional $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de X se dice *contractiva* si las proyecciones asociadas cumplen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n^* x^* - x^*\| = 0$$

para todo $x^* \in X^*$.

Lema 4.14. *Sea X un espacio de Banach con una descomposición finito dimensional contractiva $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, y sea F un subespacio de X de codimensión m . Dado $\varepsilon > 0$, existe $M = M(m, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que F contiene una copia $(1 + \varepsilon)$ -isomorfa de $[F_n]_{n=M}^{\infty}$.*

Demostración. El espacio $(X/F)^*$ tiene dimensión m . Dado $\delta > 0$, podemos encontrar un δ -recubrimiento finito $\{y_j^*\}_{j=1}^N$ de su bola unidad por compacidad, es decir, para cada $x^* \in B_{X^*}$ existe $j \leq N$ tal que $\|x^* - y_j^*\| \leq \delta$.

Para cada $j \leq N$, como $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es contractiva, podemos tomar $m_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|y_j^* \circ Q_{|[F_n]_{n=m_j}^{\infty}}\| \leq \frac{\varepsilon}{4m},$$

siendo $Q : X \rightarrow X/F$ la aplicación cociente natural. Tomando $M = \max_{j \leq N} m_j$, veamos que

$$\|Q(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2m} \|x\|, \quad x \in [F_n]_{n=M}^{\infty}. \quad (4.h)$$

Tomemos $x \in [F_n]_{n=M}^\infty$ con $\|x\| = 1$. Entonces $\|Qx\| \leq 1$ y podemos elegir $x^* \in (X/F)^*$ también con $\|x^*\| = 1$ tal que $\|Q(x)\| = |x^*(Q(x))|$. Para x^* existe $j_0 \leq N$ tal que $\|x^* - y_{j_0}^*\| \leq \delta$. Por tanto

$$\begin{aligned}\|Q(x)\| &= |x^*(Q(x))| \\ &\leq |(x^* - y_{j_0}^*)(Q(x))| + |y_{j_0}^*(Q(x))| \\ &\leq \delta + \frac{\varepsilon}{4m}.\end{aligned}$$

Si ponemos $\delta = \frac{\varepsilon}{4m}$, se obtiene la acotación (4.h).

Vamos a usar la expresión (4.h) para la acotación de una proyección de X sobre F . Sea $\{z_1, \dots, z_m\}$ una base de X/F , con funcionales biortogonales $\{z_1^*, \dots, z_m^*\}$ tales que $z_i^*(z_j) = \delta_{ij}$ y $\|z_j\| = \|z_j^*\| = 1$ para $j \leq m$. Para cada z_j tomemos $x_j \in X$ tal que $Q(x_j) = z_j$ y $\|x_j\| \leq 2$ para todo $j \leq m$. Entonces, la aplicación

$$P : X \longrightarrow \ker Q = F,$$

dada por

$$P(x) = x - \sum_{j=1}^m \langle z_j^*, Q(x) \rangle x_j$$

está bien definida ya que

$$Q\left(\sum_{j=1}^m \langle z_j^*, Q(x) \rangle x_j\right) = \sum_{j=1}^m \langle z_j^*, Q(x) \rangle z_j = Q(x).$$

Y está acotada porque

$$\begin{aligned}\|P(x)\| &= \left\| x - \sum_{j=1}^m \langle z_j^*, Q(x) \rangle x_j \right\| \\ &\leq \|x\| + \sum_{j=1}^m |\langle z_j^*, Q(x) \rangle| \|x_j\| \\ &\leq \|x\| + \|Q(x)\| 2m \\ &\leq (1 + 2m)\|x\|.\end{aligned}$$

Por la expresión (4.h) se obtiene para $x \in [F_n]_{n=M}^\infty$ que

$$\|P(x)\| \leq (1 + \varepsilon)\|x\|,$$

y también

$$\|P(x)\| \geq \|x\| - 2m\|Q(x)\| \geq (1 - \varepsilon)\|x\|,$$

es decir, que P restringida a $[F_n]_{n=M}^\infty$ es un $(1 + \varepsilon)$ -isomorfismo. \square

Proposición 4.15. *El espacio ELP no es asintóticamente Hilbert.*

Demostración. El espacio ELP tiene la forma $\ell_2(\mathcal{E}_n, \mathbb{N})$, con $\mathcal{E}_n = \ell_2^{n^2} \oplus_{f_n} \ell_2^n$, siendo f_n unas ciertas funciones no lineales definidas recursivamente de tal manera que dada f_n se construye f_{2n} , véase [22]. Usando esto y la expresión (12) del Lema 1 de [22], se tiene que

$$\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{E}_{2n} \tag{4.i}$$

isométricamente para cada $n \in \mathbb{N}$. Del Corolario en [22] se obtiene que

$$d_{\mathcal{E}_n} \geq c\sqrt{\log n}, \tag{4.j}$$

para algún $c > 0$.

Supongamos que ELP es asintóticamente Hilbert. Fijemos la dimensión $n^2 + n$ y tomemos un subespacio F de $\ell_2(\mathcal{E}_n, \mathbb{N})$ de codimensión finita tal que todo subespacio de F de dimensión $(n^2 + n)$ es C -isomorfo al espacio de Hilbert. Por el Lema 4.14, como $(\mathcal{E}_n)_{n=1}^\infty$ es una descomposición finito dimensional contractiva de $\ell_2(\mathcal{E}_n, \mathbb{N})$, el subespacio F contiene una cola 2-isomorfa de la descomposición, pongamos $(\oplus_{j=g(n)}^\infty \mathcal{E}_j)_2$. Así que podemos afirmar lo mismo de esta cola pero con constante $2C$. Es claro, por (4.i), que existe $m \geq g(n)$ suficientemente grande tal que

$$\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{E}_m,$$

con $\dim \mathcal{E}_n = n^2 + n$. Pero usando (4.j) llegamos a que $c\sqrt{\log n} \leq d_{\mathcal{E}_n} \leq 2C$, lo cual es absurdo si n es suficientemente grande. \square

4.5. Espacio HAPpy sin la propiedad $E(n, n, K)$.

Dadas dos funciones f y g , se dice que g es *cota superior asintótica* de f si existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y una constante $c > 0$ tales que para todo $x \geq x_0$ se cumple que $f(x) \leq c \cdot g(x)$, y se denota por $O(g(x))$ al conjunto de funciones para las que g es cota superior asintótica.

La *jerarquía de crecimiento rápido* (véase Capítulo 4b de [10]) es una familia de funciones de \mathbb{N} en \mathbb{N} definida inductivamente para $k \geq 1$ como

$$\begin{cases} g_0(k) = k + 1, \\ g_{n+1}(k) = g_n^{(k)}(k), \text{ para } n \geq 0, \end{cases}$$

donde $g_n^{(k)}$ denota la k -ésima iteración de g_n , es decir, $g_n^{(i+1)}(k) = g_n(g_n^{(i)}(k))$. Se puede comprobar fácilmente que

$$\begin{cases} g_1(k) = 2k, \\ g_2(k) = k2^k, \end{cases}$$

La función de Ackermann es

$$n \mapsto g_n(n),$$

y la inversa de la aplicación

$$n \mapsto g_n(2),$$

tiene el mismo comportamiento asintótico que la inversa de la función de Ackermann, véase [24]. Denotaremos por $\alpha(n)$ al único número entero i tal que

$$g_i(2) \leq n < g_{i+1}(2).$$

La jerarquía de crecimiento rápido aparece en resultados como el que sigue de [10].

Proposición 4.16. *Existe $C > 0$ tal que todo subespacio de $[t_j]_{j=k}^\infty$ en \mathcal{T}^2 de dimensión $g_n(k)$ es C^n -isomorfo al espacio de Hilbert.*

En particular, se pueden describir las distancias de Banach-Mazur de los subespacios de dimensión n de \mathcal{T}^2 al espacio de Hilbert en términos de la inversa de la función de Ackermann.

Corolario 4.17. *Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, todo subespacio de \mathcal{T}^2 de dimensión $g_{\alpha(n)+1}(2)$ (y por tanto también de dimensión n) es $2^{O(\alpha(n))}$ -isomorfo al espacio de Hilbert.*

Vamos a construir un espacio twisted Hilbert que es HAPpy. Para comprobar que es HAPpy usaremos el Teorema 2.1 de [25] de Johnson y Szankowski, que establece que si $d_n(X) \rightarrow \infty$ y $d_n(X) \in O(\alpha(n))$, entonces X es HAPpy.

Vamos a considerar una versión con base simétrica de \mathcal{T}^2 , que denotaremos por \mathcal{T}_s^2 . Se pueden encontrar todos los detalles de este espacio en [9] de Casazza y Nielsen, donde se denota al espacio por $S(\mathcal{T}^2)$. Utilizaremos la Proposición 3.9 de [9] que establece que $d_n(\mathcal{T}_s^2) \rightarrow \infty$ y que $d_n(\mathcal{T}_s^2) \in O(\log^{(i)}(n))$ para cualquier iteración $i \in \mathbb{N}$ del logaritmo.

Proposición 4.18. *Para todo subespacio E de \mathcal{T}_s^2 de dimensión finita suficientemente grande se tiene que*

$$d_E \leq 2^{O(\alpha(\dim E))}. \tag{4.k}$$

Demostración. Sea $n = \dim E$ y supongamos que E está contenido en el espacio generado por n^n vectores con soportes disjuntos. Entonces, razonando exactamente como en la Proposición 3.9 de [9], y usando el Corolario 4.17 con la estimación $2^{c\alpha(n)}$ para los subespacios de dimensión n , siendo $c > 0$ una constante fija, llegamos a que

$$d_E \leq K \cdot 2^{2c\alpha(n^n)},$$

para algún $K > 0$. Solo queda comprobar que

$$\alpha(n^n) \leq \alpha(n) + 2,$$

pero esto se sigue de

$$\begin{aligned} g_{\alpha(n^n)}(2) \leq n^n &\leq g_3(n) \\ &\leq g_3(g_{\alpha(n)+1}(2)) \\ &\leq g_{\alpha(n)+1}(g_{\alpha(n)+1}(2)) \\ &= g_{\alpha(n)+2}(2), \end{aligned}$$

asumiendo que $2 \leq \alpha(n)$ en la cuarta desigualdad. \square

Se obtiene una estimación similar para $(\mathcal{T}_s^2)^*$.

Corolario 4.19. *Para todo subespacio E de $(\mathcal{T}_s^2)^*$ de dimensión finita suficientemente grande, se tiene que*

$$d_E \leq 2^{O(\alpha(\dim E))}. \quad (4.1)$$

Demostración. Fijemos E y tomemos F en \mathcal{T}_s^2 que sea 2^{-1} -normante sobre E , es decir,

$$\|e\| \leq \frac{1}{2} \sup\{e(f) : f \in B_F\}$$

para todo $e \in E$. Se puede tomar F con $\dim F \leq 5^{\dim E}$, véase el Lema de la página 7 de [36]. Entonces la aplicación $B : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $B(e, f) = e(f)$ define un 2-isomorfismo de E en F^* . Por tanto,

$$d_E \leq 2d_{F^*} = 2d_F \leq 2 \cdot 2^{c\alpha(5^{\dim E})} \leq 2^{c_1\alpha(\dim E)}.$$

Para la última desigualdad hemos razonado como en la prueba de la Proposición 4.18 para $\dim E$ suficientemente grande, y para la desigualdad anterior hemos usado la estimación (4.k). \square

El espacio \mathcal{T}_s^2 es reflexivo [9], y por tanto $[\mathcal{T}_s^2, (\mathcal{T}_s^2)^*]_{1/2} = \ell_2$, véase [44].

Proposición 4.20. *Para todo subespacio E de $Z(\mathcal{T}_s^2)$ de dimensión finita suficientemente grande, se tiene que*

$$d_E \leq 2^{O(\alpha(\dim E))}. \quad (4.m)$$

Demostración. Obsérvese que $a_{n,2}(X) \leq d_n(X)$. Por tanto, usando las estimaciones (4.k) y (4.1), tenemos que para algún $c > 0$ se cumple que

$$\max\{a_{n,2}(\mathcal{T}_s^2), a_{n,2}((\mathcal{T}_s^2)^*)\} \leq 2^{c\alpha(n)},$$

si n es suficientemente grande. Por la Proposición 3 de [43] se tiene

$$a_{n,2}(Z(\mathcal{T}_s^2)) \leq c_1 \cdot 2^{c\alpha(n)},$$

para algún $c_1 > 0$. Si E es un subespacio de dimensión n , entonces, razonando como en el Teorema 4.7, obtenemos que

$$\begin{aligned} d_E &\leq a_2(E) \cdot c_2(E) \\ &\leq 2\sqrt{2\pi} \cdot a_{n,2}(Z(\mathcal{T}_s^2)) \cdot c_{n,2}(Z(\mathcal{T}_s^2)) \\ &\leq 2\sqrt{2\pi} \cdot \lambda \cdot a_{n,2}(Z(\mathcal{T}_s^2))^2 \\ &\leq 2\sqrt{2\pi} \cdot \lambda \cdot c_1^2 2^{2c\alpha(n)}, \end{aligned}$$

siendo λ la constante del isomorfismo entre $Z(\mathcal{T}_s^2)$ y su dual (véase el Corolario 4 de [3]). \square

Corolario 4.21. *Los espacios $Z_2, \ell_2(\mathcal{E}_n, \mathbb{N})$ y $Z(\mathcal{S}^2)$ no son isomorfos a ningún subespacio ni a ningún cociente de $Z(\mathcal{T}_s^2)$.*

Del Teorema 2.1 de [25] y de la estimación (4.m) se sigue que

Corolario 4.22. *El espacio twisted Hilbert $Z(\mathcal{T}_s^2)$ es HAPpy.*

Solo queda distinguir el espacio $Z(\mathcal{T}_s^2)$ de los que son asintóticamente Hilbert.

Proposición 4.23. *El espacio $Z(\mathcal{T}_s^2)$ no es asintóticamente Hilbert y su base $(v_j)_{j=1}^\infty$ no tiene la propiedad $E(n, n, K)$.*

Demostración. Supongamos que $Z(\mathcal{T}_s^2)$ es asintóticamente Hilbert. Como las bases de \mathcal{T}_s^2 y de su dual son simétricas, podemos suponer que el centralizador asociado

Ω es simétrico. Entonces, debe existir $C > 0$ tal que para cada permutación σ de \mathbb{N} , se tiene que

$$\|T_\sigma \circ \Omega(x) - \Omega \circ T_\sigma(x)\| \leq C\|x\|, \quad x \in c_{00}, \quad (4.n)$$

siendo $T_\sigma(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_{\sigma(n)}$. Para verlo, sea B un selector 2-acotado tal que $\delta'_{1/2} B = \Omega$, la linealidad de T_σ implica que

$$T_\sigma \circ \delta'_{1/2} B = \delta'_{1/2} T_\sigma \circ B.$$

Por tanto,

$$T_\sigma \circ \Omega - \Omega \circ T_\sigma = \delta'_{1/2}(T_\sigma \circ B - B \circ T_\sigma).$$

Como $T_\sigma \circ B(x) - B \circ T_\sigma(x) \in \ker \delta'_{1/2}$ podemos aplicar el Teorema 4.1 de [8], y obtenemos que

$$\|\delta'_{1/2}(T_\sigma \circ B(x) - B \circ T_\sigma(x))\|_2 \leq C\|T_\sigma \circ B(x) - B \circ T_\sigma(x)\|_C,$$

para algún $C > 0$. Es fácil acotar $B \circ T_\sigma$. Para acotar $T_\sigma \circ B$ usaremos que los operadores T_σ están acotados (uniformemente) cuando actúan sobre \mathcal{T}_s^2 y su dual porque sus bases son simétricas.

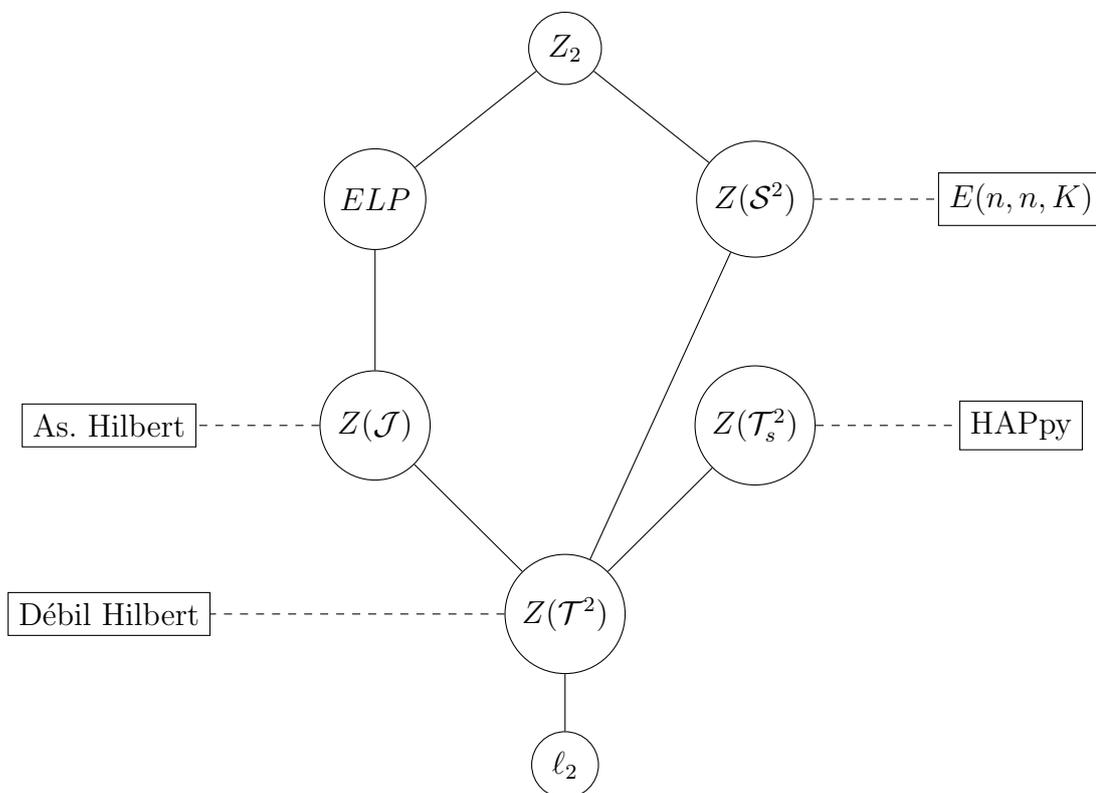
De la expresión (4.n) se sigue que la base $(v_{2j})_{j=1}^{\infty}$ es simétrica. El único espacio asintóticamente Hilbert con base simétrica es ℓ_2 pero si $[v_{2j}]_{j=1}^{\infty} \approx \ell_2$ entonces el Teorema de Kalton implicaría que \mathcal{T}_s^2 y ℓ_2 tienen normas equivalentes. Con un argumento similar se prueba la parte de la propiedad $E(n, n, K)$. \square

Corolario 4.24. *Se cumple lo siguiente:*

1. $Z(\mathcal{T}_s^2)$ no es isomorfo a ningún subespacio ni a ningún cociente de $Z(\mathcal{T}^2)$.
2. $Z(\mathcal{T}_s^2)$ no es isomorfo a ningún subespacio ni a ningún cociente de $Z(\mathcal{J})$.

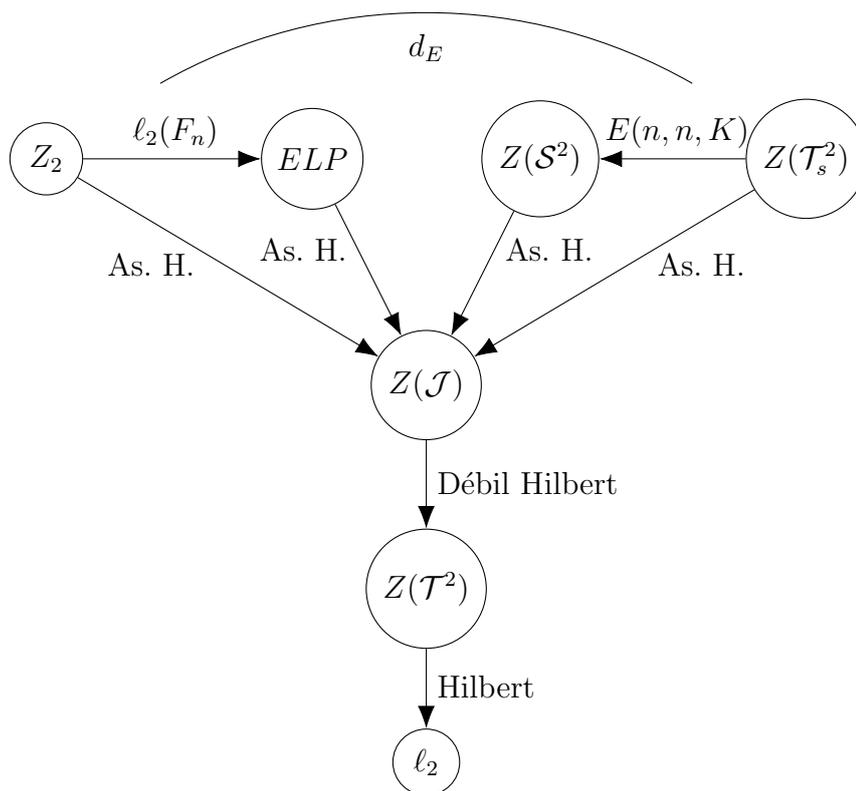
4.6. Mapas

Para terminar el capítulo, vamos a ver un par de diagramas que podrían ser útiles a la hora de entender las relaciones entre los espacios twisted Hilbert presentes en este trabajo. El primer mapa conecta dos espacios que son similares de algún modo. Por ejemplo, Z_2 está conectado con ELP porque las distancias de sus subespacios de dimensión n al Hilbert son extremas, del orden $O(\log n)$. Los espacios $Z(\mathcal{J})$ y ELP están conectados porque ambos son ℓ_2 -amalgamas de espacios de dimensión finita. La conexión entre $Z(\mathcal{J})$ y $Z(\mathcal{T}^2)$ se debe a que son espacios asintóticamente Hilbert, mientras que $Z(\mathcal{T}^2)$ y ℓ_2 son espacios débil Hilbert. Por otro lado, $Z(\mathcal{T}^2)$ y $Z(\mathcal{T}_s^2)$ son espacios HAPpy, y tanto $Z(\mathcal{T}^2)$ como $Z(\mathcal{S}^2)$ tienen la propiedad $E(n, n, K)$. Por último, Z_2 está conectado con $Z(\mathcal{S}^2)$ porque Z_2 es subespacio de $Z(\mathcal{S}^2)$.



Mientras que el primer mapa muestra similitudes entre los espacios twisted Hilbert, el segundo es un resumen de las propiedades que los diferencian. El nombre de cada flecha indica la propiedad que diferencia a los espacios que conecta, y apunta hacia el espacio que tiene dicha propiedad. Por ejemplo, el espacio $Z(\mathcal{T}^2)$

es débil Hilbert, mientras que $Z(\mathcal{J})$ no lo es. Ser asintóticamente Hilbert diferencia a los espacios Z_2 , ELP , $Z(\mathcal{S}^2)$ y $Z(\mathcal{T}_s^2)$ del espacio $Z(\mathcal{J})$, y por tanto de $Z(\mathcal{T}^2)$ y de ℓ_2 , pues ser débil Hilbert implica ser asintóticamente Hilbert. Lo que diferencia a los espacios $Z(\mathcal{T}_s^2)$ y $Z(\mathcal{S}^2)$, es que este último tiene la propiedad $E(n, n, K)$. Por otro lado, el espacio Z_2 no es una ℓ_2 -amalgama como el espacio ELP , y a su vez, estos dos espacios se pueden diferenciar de $Z(\mathcal{T}_s^2)$ y $Z(\mathcal{S}^2)$ por las distancias de sus subespacios de dimensión finita al espacio de Hilbert.



Bibliografía

- [1] BAG, T., AND SAMANTA, S. K. Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *J. Fuzzy Math.* 11 (2003), 687–706.
- [2] BERGH, J., AND LÖFSTRÖM, J. Interpolation spaces: An introduction. *Grund. der math. Wissenschaften, 223, Springer-Verlag* (1976).
- [3] CABELLO SÁNCHEZ, F. Nonlinear centralizers in homology. *Math. Annalen* 358 (2014), 779–798.
- [4] CABELLO SÁNCHEZ, F. Factorization in Lorentz spaces, with an application to centralizers. *J. Math. Anal. Appl.* 446 (2017), 1372–1392.
- [5] CABELLO SÁNCHEZ, F., CASTILLO, J. M. F., AND SUÁREZ DE LA FUENTE, J. On strictly singular nonlinear centralizers. *Nonlinear Anal.* 75 (2012), 3313–3321.
- [6] CABELLO SÁNCHEZ, J., AND MORALES, D. The Banach space of quasinorms on a finite-dimensional space. *J. Geom. Anal.* 31 (2021), 11338–11356.
- [7] CALDERÓN, A. P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Math.* 24 (1964), 113–190.
- [8] CARRO, M. J., CERDÀ, J., AND SORIA, J. Commutators and interpolation methods. *Ark. Mat.* 33 (1995), 199–216.
- [9] CASAZZA, P., AND NIELSEN, N. A Banach space with a symmetric basis which is of weak cotype 2 but not of cotype 2. *Studia Math.* 157 (2003), 1–16.
- [10] CASAZZA, P., AND SHURA, T. J. Tsirelson’s space. *Lecture Notes in Math., 1363, Springer-Verlag* (1989).

- [11] CASTILLO, J. M. F., CORRÊA, W. H. G., FERENCZI, V., AND GONZÁLEZ, M. On the stability of the differential process generated by complex interpolation. *J. Inst. Math. Jussieu* (2020), 1–32.
- [12] CASTILLO, J. M. F., FERENCZI, V., AND GONZÁLEZ, M. Singular exact sequences generated by complex interpolation. *Trans. Amer. Math. Soc.* *369* (2017), 4671–4708.
- [13] CASTILLO, J. M. F., AND MORALES, D. The Butterfly lemma. *Nonlinear Anal.* *215* (2022), 112630, 9 pp.
- [14] CASTILLO, J. M. F., MORALES, D., AND SUÁREZ DE LA FUENTE, J. Derivation of vector valued complex interpolation scales. *J. Math. Anal. Appl.* *468* (2018), 461–472.
- [15] CASTILLO, J. M. F., AND MORENO, Y. Strictly singular quasi-linear maps. *Nonlinear Anal.* *49* (2002), 897–904.
- [16] CASTILLO, J. M. F., AND SÁNCHEZ, F. Upper ℓ_p -estimates in vector sequence spaces, with some applications. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* *113* (1993), 256–261.
- [17] COBOS, F., AND SCHONBEK, T. P. On a theorem by Lions and Peetre about interpolation between a Banach space and its dual. *Houston J. Math.* *24* (1998), 325–344.
- [18] COIFMAN, R. R., CWIKEL, M., ROCHBERG, R., SAGHER, Y., AND WEISS, G. A theory of complex interpolation for families of Banach spaces. *Adv. Math.* *43* (1982), 203–229.
- [19] COIFMAN, R. R., AND SEMMES, S. Interpolation of Banach spaces, Perron processes, and Yang-Mills. *Amer. J. Math.* *115* (1993), 243–278.
- [20] CORRÊA, W. H. G. Complex interpolation of families of Orlicz sequence spaces. *Israel J. Math.* *240* (2020), 603–624.
- [21] DUREN, P. L. Theory of H^p spaces. *Dover Publications* (2000).
- [22] ENFLO, P., LINDENSTRAUSS, J., AND PISIER, G. On the “three space problem”. *Math. Scand.* *36* (1975), 199–210.

- [23] JOHNSON, W. B. Banach spaces all of whose subspaces have the approximation property. *Séminaire d'Analyse fonctionnelle (1979-1980)*, 1–11. Exp n°16.
- [24] JOHNSON, W. B., AND NAOR, A. The Johnson–Lindenstrauss lemma almost characterizes Hilbert space, but not quite. *Discrete Comput. Geom.* *43* (2010), 542–553.
- [25] JOHNSON, W. B., AND SZANKOWSKI, A. Hereditary approximation property. *Ann. of Math.* *176* (2012), 1987–2001.
- [26] KALTON, N. J. Nonlinear commutators in interpolation theory. *Mem. Amer. Math. Soc.* *385* (1988).
- [27] KALTON, N. J. Differentials of complex interpolation processes for Köthe function spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* *333* (1992), 479–529.
- [28] KALTON, N. J. Twisted Hilbert spaces and unconditional structure. *J. Inst. Math. Jussieu* *2* (2003), 401–408.
- [29] KALTON, N. J., AND MONTGOMERY-SMITH, S. Interpolation of Banach spaces. *North-Holland* (2003), 1131–1175.
- [30] KALTON, N. J., AND PECK, N. T. Twisted sums of sequence spaces and the three space problem. *Trans. Amer. Math. Soc.* *255* (1979), 1–30.
- [31] KHARE, A. The non-compact normed space of norms on a finite-dimensional Banach space. *Disponible en <https://arxiv.org/abs/1810.06188>* (2018).
- [32] KWAPIEŃ, S. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients. *Studia Math.* *44* (1972), 583–595.
- [33] LINDENSTRAUSS, J., AND TZAFRIRI, L. Classical Banach spaces I. *Springer-Verlag* (1977).
- [34] LOZANOVSKII, G. Y. On some Banach lattices. *Siberian Math. J.* *10* (1969), 584–599.
- [35] MAUREY, B. Un théorème de prolongement. *C.R. Acad. Sci. Paris A279* (1974), 329–332.

- [36] MILMAN, V. D., AND SCHECHTMAN, G. Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces. *Lecture Notes in Math., Springer-Verlag* (1986).
- [37] MORALES, D., AND SUÁREZ DE LA FUENTE, J. Some more twisted Hilbert spaces. *Ann. Fennici Math.* 46 (2021), 819–837.
- [38] NIELSEN, N. J., AND TOMCZAK-JAEGERMANN, N. Banach lattices with property (H) and weak Hilbert spaces. *Illinois J. Math.* 36 (1992), 345–371.
- [39] PISIER, G. Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics* 60 (1986).
- [40] PISIER, G. The volume of convex bodies and Banach space geometry. *Cambridge Tracts in Math.* (1989).
- [41] SEMMES, S. Interpolation of Banach spaces, differential geometry and differential equations. *Rev. Mat. Iberoam.* 4 (1988), 155–176.
- [42] SHESTAKOV, V. A. On complex interpolation of Banach spaces of measurable functions. *Vestn. Leningr. Univ.* 7 (1979).
- [43] SUÁREZ DE LA FUENTE, J. A weak Hilbert space that is a twisted Hilbert space. *J. Inst. Math. Jussieu* 19 (2020), 855–867.
- [44] WATBLED, F. Complex interpolation of a Banach space with its dual. *Math. Scand.* 87 (2000), 200–210.