EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **19**, Núm. 3, 313 – 316 (2004)

Les Topologies σ-Lebesgue sur $C(X)$

Belmesnaoui Aqzzouz, Redouane Nouira

Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatique, Equipe d'Analyse Fonctionnelle, B.P. 133 *Kénitra, Maroc*
e-mail: baqzzouz@hotmail.com, rnouira@hotmail.com

(Presented by José Pedro Moreno)

AMS *Subject Class.* (2000): 46A40, 46B40, 46B42 *Received November* 1, 2003

Il est bien connu que la relation entre l'ordre et la convergence topologique est donnée par les topologies localement solides qui sont de Lebesgue. L'attribution de ce nom est justifié par le célèbre théorème de la convergence dominé de Lebesgue de la théorie d'intégration. Nous savons aussi que toutes les topologies définies par les normes classiques sur le treillis vectoriel $C([0,1])$ ne sont pas de Lebesgue. Plus précisément, Luxemburg et Zaanen ont montré dans [2, Exemple 8.2], qu'il n'existe aucune topologie localement convexe solide et séparée qui est σ-Lebesgue sur le treillis vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$.

L'objectif de ce papier est de montrer que si X est un espace topologique compact métrisable contenant une composante connexe non triviale et ouverte, alors le treillis vectoriel $C(X)$ n'admet aucune topologie localement solide qui est σ-Lebesgue.

Rappelons ci-dessous quelques définitions dont nous aurons besoin dans la suite. Un treillis vectoriel est un espace vectoriel ordonné E dans lequel $\sup(x,y)$ (qu'on note aussi par $x \vee y$) existe pour tous $x, y \in E$.

Un treillis vectoriel E muni d'une topologie vectorielle τ est dit localement solide si 0 admet un système fondamental de voisinages solides.

Soit (E,τ) un treillis vectoriel localement convexe et solide. La topologie τ est dite σ-Lebesgue si pour toute suite (x_n) telle que $x_n \downarrow 0$ dans E, la suite (x_n) converge vers 0 pour la topologie τ, où la notation $x_n \downarrow 0$ signifie que la suite (x_n) est décroissante et $\inf(x_n) = 0$.

Pour plus de détails sur les treillis vectoriels localement convexes et solides, nous renvoyons le lecteur au livre d'Aliprantis et Burkinshaw [1].

La preuve de notre théorème utilisera le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit* (X, d) *un espace métrique connexe, et* x, y *deux éléments différents de* X. *Soient* $s, x_1, \dots, x_n$ *des éléments de* X *et* $r_1, \dots, r_n$ *des réels strictement positifs tels que* $r_1 + \cdots + r_n = p < r = \frac{1}{2}d(x, y)$. *Alors il existe* $s_0 \in X$ *tel que* $d(s, s_0) \leq 2p$ *et* $s_0 \notin B(x_i, r_i)$ *pour tout* $i = 1, \dots, n$, *où* $B(x_i, r_i)$ *est la boule ouverte de centre* x_i *et de rayon* r_i.

Preuve. Si $s \notin \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_i)$, alors on prend $s_0 = s$. Supposons maintenant que $s \in B(x_1, r_1)$. Si $\overline{B(x_1, r_1)} \cap \left(\bigcup_{i=2}^n B(x_i, r_i)\right)$ est vide, alors tout élément $s_0 \in X$ vérifiant $d(x_1, s_0) = r_1$ répond à la question. Sinon, il existe $i_1 \in \{2, \dots, n\}$ tel que $\overline{B(x_1, r_1)} \cap B(x_{i_1}, r_{i_1})$ est non vide. Dans ce cas, on a $B(x_1, r_1) \cup B(x_{i_1}, r_{i_1}) \subset B(x_1, r_1 + 2r_{i_1})$. Soit m le plus grand entier non nul pour lequel il existe m éléments tels que

$$B(x_1, r_1) \cup B(x_{i_1}, r_{i_1}) \cup \cdots \cup B(x_{i_m}, r_{i_m}) \subset B\left(x_1, r_1 + 2\sum_{j=1}^m r_{i_j}\right).$$

Alors tout élément $s_0 \in X$ vérifiant $d(x_1, s_0) = r_1 + 2\sum_{j=1}^m r_{i_j}$ répond à la question. ∎

Nous établissons maintenant notre résultat principal.

Théorème 2. *Soit* X *un espace topologique compact métrisable contenant une composante connexe non triviale et ouverte. Alors le treillis vectoriel* $C(X)$ *n'admet aucune topologie localement solide qui est* σ*-Lebesgue.*

Preuve. Soit F une composante connexe non triviale et ouverte de l'espace X. Soient x et y deux éléments différents de F. Posons $r = d(x, y)$ et soit (x_n) une suite dense dans la boule ouverte $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$. On peut supposer que $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ est contenue dans F. Soit $f \in C(X)$ telle que $0 \leq f \leq 1$ sur X, $f(x) = 1$ et f s'annulle en dehors de $B(x, \frac{r}{2})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $g_{m,n} \in C(X)$ telle que

$$0 \leq g_{m,n} \leq 1\,, \qquad g_{m,n}(x_n) = 1$$

et $g_{m,n}$ s'annulle en dehors de $B\left(x_n, \frac{2^{-n-1}}{m}\, r\right)$. Posons $f_{m,n} = f \cdot g_{m,n}$ et $h_{m,n} = \bigvee_{k=1}^n f_{m,k}$. Il est clair que la suite $(h_{m,n})$ est contenue dans $C(X)$, de plus on a $h_{m,n} \uparrow_n f$, où l'indice n de $\uparrow_n$ signifie que m est fixe et n varie.

Si τ est une topologie localement solide qui est σ-Lebesgue sur le treillis vectoriel $C(X)$, alors la suite $(h_{m,n})$ converge vers f pour cette topologie. Fixons une suite de voisinages (V_m) de 0 pour la topologie τ dans $C(X)$ telle que $V_{m+1} + V_{m+1} \subset V_m$ pour tout m. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ il existe $n_m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f - h_{m,n_m} \in V_{m+2}$.

Considérons maintenant la suite décroissante de fonctions (t_m) définie par $t_m = \bigwedge_{k=1}^{m} h_{k,n_k}$. Montrons que $t_m \downarrow 0$.

Supposons qu'il existe $t \in C(X)$ tel que $t \leq t_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $s \in F$, montrons que $t(s) \leq 0$, et par suite $t_m \downarrow 0$. Pour cela, il suffit de construire une suite (s_k) dans F qui converge vers s et telle que $h_{k,n_k}(s_k) = 0$.

Fixons $k \in \mathbb{N}$, pour $r_1 = \frac{2^{-2}}{k}\, r, \ldots, r_{n_k} = \frac{2^{-n_k-1}}{k}\, r$, il résulte du lemme 1 qu'il existe s_k dans F telle que

$$d(s, s_k) = 2 \sum_{j=1}^{n_k} r_j \leq \frac{r}{k}$$

et

$$s_k \notin \bigcup_{i=1}^{n_k} B\left(x, \frac{2^{-i-1}}{k}\, r\right).$$

Il s'ensuit que $h_{k,n_k}(s_k) = 0$.

Or

$$0 \leq f - t_m = \bigvee_{k=1}^{m} (f - h_{k,n_k}) \leq \sum_{k=1}^{m} (f - h_{k,n_k})$$

et

$$\sum_{k=1}^{m} (f - h_{k,n_k}) \in V_{m+2} + V_{m+1} + \cdots + V_3 \subset V_2\,,$$

donc

$$f - t_m \in V_2\,.$$

D'autre part, comme la suite (t_m) converge vers 0 pour la topologie τ, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $t_{m_0} \in V_2$, et par conséquent

$$f \in V_2 + V_2 \subset V_1\,.$$

Ce qui est en contradiction avec le fait que $f \neq 0$. ∎

Remarque 3. Le théorème 2 n'est plus vrai si aucune composante connexe non triviale de l'espace topologique compact métrisable X n'est ouverte, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4. Soit X le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ définit par $X = \{a_{n,k} \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}^* \text{ et } k = 0, \ldots, 2^n\} \cup F$, où $F = [0,1] \times \{0\}$ et les $a_{n,k}$ sont des éléments isolés de $\mathbb{R}^2$ définis par $a_{n,k} = \left(\frac{k}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k = 0, \ldots, 2^n$. Il est clair que F est contenu dans l'adhérence de $\{a_{n,k} \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}^* \text{ et } k = 0, \ldots, 2^n\}$, et que F est la seule composante connexe non triviale de X.

Soit τ la topologie localement solide sur le treillis vectoriel $C(X)$ définie comme suit : une suite généralisée (f_i) converge vers 0 dans $C(X)$ si, et seulement si, la suite $\left(f_i(a_{n,k})\right)$ converge vers 0 pour tout $a_{n,k}$.

Comme les points $a_{n,k}$ sont isolés dans X, la topologie τ est de Lebesgue sur $C(X)$. Cependant la composante connexe F n'est pas ouverte dans X.

Remerciements

Nous remercions le (la) referé(e) pour ses suggestions.

Références

[1] Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., "Locally Solid Riesz Spaces", Academic Press, New York-London, 1978.

[2] Luxemburg, W.A.J., Zaanen, A.C., Notes on Banach functions spaces VII, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.* A **66** (= *Indag. Math.* **25**) (1963), 669 – 681.