EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **18**, Núm. 3, 273 – 288 (2003)

Estudio de las Variedades de Contacto Compactas que Admiten una Acción Foliante

Rafael María Rubio Ruiz

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba, Campus de Rabanales, Edificio C-2, 14071 *Cordoba, Spain*

e-mail: ma1rurur@uco.es

(Presented by L.A. Ibort)

AMS *Subject Class.* (2000): 53C15, 58E40 *Received March* 6, 2002

Introducción

El estudio de las acciones del grupo de Lie de $\mathbb{R}^n$ sobre una variedad diferenciable es ya un problema clásico. En particular, son numerosos los autores que se han interesado por la dimensión minimal de las órbitas de estas acciones, desde el conocido teorema de Lima (véase [7]), hasta generalizaciones y nuevos resultados mas recientes (véase [9], [10]).

Para obtener resultados mas precisos es razonable estudiar acciones que respeten algún tensor (véase [12], [13], [14]): formas simplécticas, de volumen, de contacto, etc. Si, por añadidura, la acción del grupo de Lie de $\mathbb{R}^n$ es foliante (todas sus órbitas son de igual dimensión), esto permite un mayor control de la estructura transversa a las órbitas, pudiéndose, en algunos casos, obtener información sobre la estructura de la propia variedad.

En este trabajo estudiaremos, como continuación de un trabajo anterior del autor (véase [12]), la estructura de una variedad de contacto M^{2m+1} sobre la que actúa el grupo de Lie de $\mathbb{R}^n$ de forma foliante y conservando la estructura de contacto. Bajo estas condiciones el autor probó (véase [12]) que la dimensión de las órbitas será a lo sumo el *span* de la variedad y de forma general, en cualquier caso, menor o igual que $m+1$.

El estudio que sigue se limita a dos casos:

a) Con órbitas de dimensión $m+1$.

b) Con órbitas de dimensión m.

En el primer caso se analizará de forma precisa la estructura de la variedad; mientras que en el segundo daremos resultados parciales y algunos ejemplos que muestran que no es posible un resultado análogo al caso primero.

Todas las variedades consideradas son sin borde y de clase C^∞.

1. Preliminares

Consideremos una variedad diferenciable real M de dimensión impar $2m+1$.

Recordemos que una 1-forma diferenciable ρ sobre M se dice que es una *forma de contacto* si ρ es de clase constante $2m+1$, es decir, $\rho \wedge (d\rho)^m$ es una forma de volumen.

De forma mas general llamamos *estructura de contacto* de una variedad diferenciable M a un subfibrado ξ de TM, de codimensión 1, tal que en torno a cada punto existe una forma de contacto ρ, cuyo núcleo $ker\rho$ coincide con dicho subfibrado. Además dicha estructura se dice orientable si la elección de ρ se puede hacer de forma global.

Escribiremos en lo que sigue (M, ξ) para denotar la estructura de contacto sobre M, que siempre consideraremos orientable.

Por otro lado, se dice que un campo de vectores X sobre M es un *automorfismo infinitesimal de la estructura de contacto* si $L_X\rho = f\rho$ para un representante ρ de la estructura, siendo $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.

Análogamente, un campo de vectores X sobre M se dice que es un *automorfismo infinitesimal de una forma de contacto* ρ sobre M si $L_X\rho = 0$.

Obsérvese que los campos de vectores Y, tales que $L_Y\rho$ es proporcional a ρ, están en correspondencia biunívoca con las funciones $C^\infty(M, \mathbb{R})$, es decir, para cada función $h : M \to \mathbb{R}$ existe un solo campo Y, denominado hamiltoniano o gradiente de contacto, tal que $L_Y\rho$ es proporcional a ρ y $\rho(Y) = h$.

Recordemos que si ρ es una forma de contacto sobre M, existe un único campo de vectores $\mathcal{T}$, llamado sistema dinámico asociado, tal que $\rho(\mathcal{T}) = 1$ y $i_{\mathcal{T}}(d\rho) = 0$

Si tenemos definida una accion de $\mathbb{R}^n$ sobre M, cuya álgebra de Lie denotaremos por V, existe un homomorfismo de álgebras de Lie que a cada elemento $v \in V$ le asocia el campo de vectores X_v correspondiente por la acción infinitesimal, también denominado campo fundamental de la acción (véase [11]).

Recordemos que la acción conserva la estructura de contacto si $L_X\rho = g\rho$ para todo campo X de la acción infinitesimal, donde ρ es un representante de dicha estructura y $g : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Análogamente la acción conservará una forma de contacto ρ si $L_X\rho = 0$.

Si X es un automorfismo infinitesimal de la estructura de contacto con $\rho(X) = f$, utilizando el Teorema de Darboux (véase [5]) se puede encontrar para todo punto $p \in M$ un sistema de coordenadas centradas en p tal que $\rho = dx_0 + \sum_{j=1}^m x_{2j-1}dx_{2j}$ y

$$X = \left(f - \sum_{j=1}^{m} x_{2j-1}\frac{\partial f}{\partial x_{2j-1}}\right)\frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{j=1}^{m}\left[\left(x_{2j-1}\frac{\partial f}{\partial x_0} - \frac{\partial f}{\partial x_{2j}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} + \frac{\partial f}{\partial x_{2j-1}}\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\right].$$

LEMA 1. *Sea X un automorfismo infinitesimal de la estructura de contacto (M,ξ). Supongamos que $X(p) \neq 0$ y $X(p) \in \xi(p)$. Entonces existe en torno a p una forma de contacto ρ', que representa a ξ, tal que $X(\rho'(X)) = 0$.*

Demostración. Sea $f = \rho(X)$, se tiene que $df(p) \neq 0$ ya que $X(p) \neq 0$. Por otra parte, $X(f)(p) = 0$, pues $X(f) = X\rho(X) = (L_X\rho)(X) = h\rho(X)$, $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$.

La existencia de una función g, tal que $\rho' = e^g\rho$ verifique que $X(\rho'(X)) = 0$, es equivalente a que $X(g)f + X(f) = X(g)f + hf = 0$, o así mismo, que $X(g) + h = 0$ en un entorno de p, lo cual es claro pues $X(p) \neq 0$. ∎

LEMA 2. *Sea X un automorfismo infinitesimal de la estructura de contacto (M,ξ). Supongamos que $X(p) \neq 0$, y que $X(\rho(X)) = 0$ para un cierto representante ρ de ξ, en torno a p. Entonces $L_X\rho = 0$ en un entorno de p.*

Demostración. Como $L_X\rho = h\rho$ con $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ y

$$X(f) = (L_X\rho)(X) = X\rho(X) = hf = 0,$$

es claro que $h = 0$ en un entorno de p, pues el conjunto de ceros de f cerca de p es de interior vacío. ∎

LEMA 3. *Sean $X_1 \dots X_r$, r automorfismos infinitesimales de la estructura de contacto (M,ξ), linealmente independientes en un punto p. Supongamos que:*

(a) $X_i(p) \in \xi(p), \quad i = 1, \dots, r,$

(b) $[X_i, X_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, r,$

(c) *Existe un representante local ρ de la estructura en torno a p, tal que $X_i(\rho(X_i)) = 0, \quad i = 1, \dots, r-1.$*

Entonces existe un representante local ρ' de la estructura en torno a p, cumpliendo que $X_i(\rho'(X_i)) = 0, \quad i = 1, \dots, r.$

Demostración. Sea $f_r = \rho(X_r)$. Así $X_j(f_r) = L_{X_j}(\rho(X_r)) = (L_{X_j}\rho)(X_r) - \rho([X_j, X_r]) = 0$, pues $L_{X_j}\rho = 0$ en un entorno de p, para $j = 1, \dots, r-1$.

Bastará elegir una función g tal que $\rho' = e^g \rho$ verifique que $X_r(\rho'(X_r)) = 0$ y mantenga la misma condición con los campos precedentes. Es decir resolver

$$\begin{cases} X_r(g) f_r + X_r(f_r) = 0, \\ dg(X_j) = 0, \ j = 1, \dots, r-1, \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} X_r(g) + \tilde{h} = 0, \\ dg(X_j) = 0, \ j = 1, \dots, r-1, \end{cases}$$

para $\tilde{h} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que $L_{X_r}\rho = \tilde{h}\rho$.

Tomando coordenadas $(y_0, y_1, \dots, y_{2m})$ en torno a p, tales que $\frac{\partial}{\partial y_0}$ coincida con el sistema dinámico $\mathcal{T}$ de ρ y $\frac{\partial}{\partial y_i} = X_i$, $i = 1, \dots, r-1$, es claro que $h = df_r(\mathcal{T}) = \frac{\partial f_r}{\partial y_0}$ no dependerá de las variables $y_1, \dots, y_{r-1}$. ∎

Proposición 1. *Sean $X_1, \dots, X_r$ automorfismos infinitesimales conmutantes de la estructura de contacto (M, ξ). Supongamos que $X_1, \dots, X_r$ son linealmente independientes en un punto $p \in M$ y que $X_i(p) \in \xi(p)$, $i = 1, \dots, r$. Entonces existe un representante ρ de la estructura en torno a p, y unas coordenadas (U, x), centradas en p, tales que:*

$$\rho = dx_0 + \sum_{j=1}^{m} x_{2j-1} dx_{2j} \, ,$$

con

$$x_{2j-1} = \rho(X_j), \quad X_j = \frac{\partial}{\partial x_{2j}}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Además, en el caso que el campo reordenado como X_1*,* $\rho(X_1(p)) \neq 0$*, el modelo local será el mismo para* ρ *con* $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_0}$*,* $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$*, ...*

El mismo resultado es cierto para una forma de contacto fijada ρ'*, si los campos* $X_1, \ldots, X_r$ *son automorfismos infinitesimales de dicha forma.*

Demostración. Consideremos un representante ρ de la estructura, definido en un entorno del punto p tal que $X_i(\rho(X_i)) = 0$, $i = 0, \ldots, r$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es posible realizar sobre U el cociente $\tilde{U}$ por el sistema dinámico $\mathcal{T}$ de ρ. Como $\mathcal{T}(\rho(X_i)) = 0$ y $[X_i, \mathcal{T}] = 0$, $i = 0, \ldots, r$, podemos proyectar $d\rho, X_1, \ldots, X_r$ sobre $\tilde{U}$. De esta forma tendremos una estructura simpléctica $(\tilde{U}, d\rho)$ y existirán coordenadas $(x_1, \ldots, x_{2m})$, nulas en la proyección de p, tales que

$$d\rho = \sum_{i=1}^{m} dx_{2j-1} \wedge dx_{2j},$$

donde $\frac{\partial}{\partial x_{2j}} = \operatorname{proy} X_j$ para $j = 1, \ldots, r$ y $x_{2j-1} = f_j$ para $j = 1, \ldots, r$ (véase [5], [14]).

Para terminar, consideremos las funciones $x_1, \ldots, x_{2m}$ definidas en el entorno U y tomemos la forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^{2m} x_{2j-1} dx_{2j},$$

ahora bastará aplicar el Lema de Poincaré a $\rho - \alpha$.

Por otra parte, si $\rho(X_1(p)) \neq 0$, elegiremos ρ tal que $\rho(X_1) = 1$, o bién tal que $\sum_{i=1}^{r} \rho(X_j)^2 = 1$. ∎

2. Sobre la estabilidad de las órbitas

En este apartado $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ denotará una variedad diferenciable real y conexa de dimensión m, dotada de una foliación $\mathcal{F}$ de dimensión k.

Se dirá que una trasversal a $\mathcal{F}$ es *unisecante* si corta una vez a lo sumo a cada órbita. Sea $U(\mathcal{F})$ el conjunto de todas las trasversales unisecantes, entonces $U(\mathcal{F})$ es un abierto saturado de $\mathcal{S}$ eventualmente vacío.

Supongamos, en lo que sigue, que hay una acción de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathcal{S}$ en la cual todas las órbitas son exactamente las hojas de $\mathcal{F}$. Sabemos que $k \leq m$, pero en general la igualdad no se dará. Las hojas de $\mathcal{F}$ serán cilindros $C_r = T^r \times \mathbb{R}^{k-r}$ donde $r = 0, \ldots, k$. Al número r lo denominaremos *tipo de la hoja*.

Asignando a cada punto p de $\mathcal{S}$ el tipo de la hoja que pasa por ese punto, se define una función t constante sobre las hojas de $\mathcal{F}$.

Lema 4. *El conjunto de puntos $p \in U(\mathcal{F})$ tales que t sea constante en un entorno de p, es un abierto denso y saturado de $U(\mathcal{F})$.*

Demostración. Bastará ver que t es localmente creciente.

Sea $p \in U(\mathcal{F})$, entonces existe un subgrupo $\mathbb{R}^k$ de $\mathbb{R}^n$ que engendra las mismas órbitas que $\mathbb{R}^n$ en un entorno de p.

Por otra parte, podemos elegir un entorno abierto $A_1 \times A_2$ en p, tal que cada placa $\{y\} \times A_2$ pertenezca a una hoja diferente.

Sea $a \in \mathbb{R}^k - \{0\}$, tal que $a \cdot p = p$ si q es suficientemente próximo a p. Entonces q y $a \cdot q$ pertenecen a la misma placa de $A_1 \times A_2$. Por tanto, existirá un elemento $a' \in \mathbb{R}^k$, suficientemente próximo a a, tal que $a' \cdot q = q$.

Esto prueba que la dimensión del grupo fundamental de una hoja como **Z**-*módulo* solo puede crecer en un entorno de p. ∎

Denotemos por H_p la hoja que pasa por p.

Teorema 1. *Supongamos que en un entorno de $p \in U(\mathcal{F})$ la función t es constante. Entonces existe un abierto de $\mathcal{S}$ de la forma $\mathcal{D} \times C_r$, donde $\mathcal{D}$ es un disco de $\mathbb{R}^{m-k}$ tal que:*

(i) *$\mathcal{D} \times C_r$ es saturado, cada $\{x\} \times C_r$ es una hoja de $\mathcal{F}$ y $\{0\} \times C_r = H_p$.*

(ii) *Se pueden elegir unas coordenadas (x, θ) sobre $\mathcal{D} \times C_r$ en las cuales los campos fundamentales de la acción se escriban de la forma:*

$$X = \sum_{j=1}^{k} f_j(x) \frac{\partial}{\partial \theta_j}.$$

Demostración. Basta considerar el caso $k = n$. Sea $\mathcal{D}$ un disco suficientemente pequeño de $\mathbb{R}^{m-k}$ inmerso en M como una trasversal unisecante. Supongamos que p está identificado al origen y que t es constante sobre $\mathcal{D}$. Un razonamiento análogo al de la demostración del lema 4 nos permite encontrar una familia diferenciable $\{a_1(x), \ldots, a_r(x)\}$, donde $x \in \mathcal{D}$, de elementos de $\mathbb{R}^k$ contenidos en la isotropía de x, tales que $\{a_1(0), \ldots, a_r(0)\}$ sea una base de la isotropía en ese punto. Reduciendo el tamaño de $\mathcal{D}$ si es preciso podemos suponer que $\{a_1(x), \ldots, a_r(x)\}$ son también una base de la isotropía de x.

A su vez, se puede elegir una familia diferenciable $\zeta(x)$ de automorfismos de $\mathbb{R}^k$, tal que $\zeta(x)(e_j) = a_j(x)$, donde $j = 1, \ldots, r$ y donde $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^k$. Por tanto, la aplicación

$$F : (x, a) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \zeta(x)(a) \cdot x \in M$$

induce un difeomorfismo entre $\mathcal{D} \times C_r$ y un abierto saturado de $\mathcal{S}$ conteniendo a p.

Ahora basta tomar las coordenadas canónicas de C_r. ∎

3. Variedades de contacto compactas que admiten una acción foliante

En este apartado consideraremos una variedad diferenciable (M, ξ) real y compacta, de dimensión $2m + 1$, con una estructura de contacto orientable ξ, sobre la cual hay definida una acción de $\mathbb{R}^n$ que es foliante y cuya álgebra de Lie seguimos denotando por V. En estas circunstancias, estudiaremos la estructura de la variedad cuando las órbitas de la misma tienen dimensión $m+1$, y daremos algunos ejemplos y resultados parciales en el caso de órbitas de dimensión m.

3.1. Caso en que la dimensión de las órbitas es $m + 1$. La situación, en este caso, es la análoga a la de las estructuras de contacto de una fibración lagrangiana simpléctica (via el correspondiente “teorema de Arnold-Liouville” de contacto). Véase el trabajo de R. Luzt [8], del cual se pueden extraer, en forma equivalente, las dos siguientes proposiciones.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad en este caso, que existe un representante global ρ de ξ, que es invariante por la acción y cuyo sistema dinámico, $\mathcal{T}$, es un campo fundamental de la misma. Recordemos que este campo conmuta con la acción. En efecto:

Tomemos una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de V y un representante global cualquiera ρ de la estructura de contacto. Consideremos la función $f = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \rho\left(X_{u_j}\right)^2}$ y sea $\mathcal{T}$ el único campo de vectores sobre M tal que $\rho(\mathcal{T}) = f$ y $L_{\mathcal{T}}\rho$ sea proporcional a ρ. Tomemos en M la forma de contacto $\rho' = \frac{1}{f}\rho$ y observemos que $\mathcal{T}$ es el sistema dinámico de ρ'. Además la forma ρ' es invariante por la acción. En efecto:

Como V es abeliana, $\varphi_a^*(X_v) = X_v$. Luego

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\varphi_a^*\rho'\right)^2 \left(X_{u_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \rho' \left(\varphi_a^*\left(X_{u_j}\right)\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \rho' \left(X_{u_j}\right)^2 = 1,$$

de donde $\varphi_a^*\rho' = \rho'$.

Por tanto $[X_v, \mathcal{T}]= 0$ para todo $v \in V$ y $L_{\mathcal{T}}\rho' = L_{X_{v_j}}\rho' = 0$.

Como M es compacta, basta modificar la acción de forma que $\mathcal{T}$ sea un campo fundamental de la misma y mantenga las mismas órbitas.

Además, dado $p \in M$ podemos elegir coordenadas $(U, (x, y))$ centradas en p, tales que $\rho = dy_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i dy_i$, donde $\mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial y_0}$ y para $i = 1, \ldots, m$, $\frac{\partial}{\partial y_i}$ son campos de la acción infinitesimal, es decir, existirán elementos del álgebra de Lie, $v_0, \ldots, v_m \in V$, tales que $X_{v_0} = \mathcal{T}$ y $X_{v_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}$ para $i =1, \ldots, m$. A estos sistemas de coordenadas los llamaremos adaptados a la acción (véase [12]).

Proposición 2. *Las órbitas de la acción de $\mathbb{R}^n$ son compactas.*

Demostración. Consideremos un punto $p \in M$ y elijamos coordenadas en torno a dicho punto como las anteriormente descritas. Si $f_i = \rho(X_{v_i})$, $i = 1, \ldots, m$, son las funciones características asociadas a los campos X_{v_i}, $i = 1, \ldots, m$, basta tomar un entorno saturado de p y reducir su tamaño, si es preciso, para ver que la órbita de p viene descrita por las ecuaciones $f_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$. ∎

Proposición 3. *Por cada punto $p \in M$ pasa una trasversal unisecante a las órbitas.*

Demostración. Tomando de nuevo un sistema de coordenadas adaptadas entorno a p, basta considerar la subvariedad regular de U definida por las ecuaciones $\{y_i = 0,\ i = 0, \ldots, m\}$. ∎

Observemos que, en el caso que nos ocupa, todas las órbitas de la acción, al ser compactas, son isomorfas al toro T^{m+1}, es decir, el tipo de las hojas es constante. Haciendo uso del teorema 1, dado un punto $p \in M$, tomemos una carta $(\mathcal{U} = T^{m+1} \times \mathcal{D}, (\theta, z))$, donde $\mathcal{U}$ es saturado de órbitas y $\mathcal{D}$ es un disco de $\mathbb{R}^m$.

En estas condiciones, podemos dar una acción local del toro T^{m+1} sobre $\mathcal{U}$

$$\Upsilon : T^{m+1} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$$

$$(\gamma_0, \ldots, \gamma_m) \cdot (\theta_0, \ldots, \theta_{m+1}, z_1, \ldots, z_m) = (\theta_0 + \gamma_0, \ldots, \theta_m + \gamma_m, z_1, \ldots, z_m)$$

Esta nueva acción tiene las mismas órbitas y conserva además los campos fundamentales de la acción de $\mathbb{R}^n$. En efecto, si $\gamma_0 = (\gamma_0^0, \ldots, \gamma_m^0) \in T^{m+1}$, y $(\theta, z) \in T^{m+1} \times \mathcal{D}$, entonces $\Upsilon_{\gamma_0}(\theta, z) = (\theta + \gamma_0, z)$ y $X_v(\gamma_0 \cdot (\theta, z)) = \sum_{j=0}^m g_j(z) \frac{\partial}{\partial \theta_j}$ y, por otra parte, $d\Upsilon_{\gamma_0}(X_v) = Id(X_v) = X_v$.

PROPOSICIÓN 4. *Dada una órbita, $Orb(p)$, de la acción de $\mathbb{R}^n$, existe un abierto saturado $p \in \mathcal{U}$ de M y una acción de T^{m+1} sobre $\mathcal{U}$, respetando la forma de contacto ρ y los campos fundamentales de la acción de $\mathbb{R}^n$, que tiene las mismas órbitas sobre $\mathcal{U}$.*

Demostración. Tomemos un abierto coordenado $\mathcal{U} = T^{m+1} \times \mathcal{D}$, tal como describe el teorema 1 y en el cual la acción del toro vendrá dada por las traslaciones sobre el primer factor.

Sean $(\theta_0, \ldots, \theta_m, z_1, \ldots, z_m)$ las coordenadas en $\mathcal{U}$. Entonces podemos escribir $\rho = \sum_{i=0}^m \alpha_i(\theta, z) d\theta_i + \sum_{j=1}^m \beta_j(\theta, z) dz_j$.

Consideremos el espacio vectorial de funciones dado por $\mathcal{A} = \{\rho(X_v)/v \in V\}$. Localmente $\mathcal{A}$ está generado por las funciones $1, z_1, \ldots, z_m$, ya que las funciones características de los campos de la acción infinitesimal son constantes en las órbitas. Los gradientes de contacto correspondientes, $\mathcal{T}, X_{z_1}, \ldots, X_{z_m}$, se escriben $\mathcal{T} = \sum_{i=0}^m \mathcal{T}^i(z_1, \ldots, z_m) \frac{\partial}{\partial \theta_i}$, $X_{z_j} = \sum_{i=0}^m {X_j}^i(z_1, \ldots, z_m) \frac{\partial}{\partial \theta_i}$. De $\rho(\mathcal{T}) = 1$ y $\rho(X_{z_j}) = z_j$, tenemos que $\frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_k} = 0$, $i = 0, \ldots, m$.

Por otra parte, de $i_{\mathcal{T}} d\rho = 0$ y $i_{X_{z_j}} d\rho = -dz_j$, se deduce que las funciones β_j son afines respecto de las variables θ_i y por tanto independientes de éstas. ∎

TEOREMA 2. *Sobre el anterior abierto $\mathcal{U} = T^{m+1} \times \mathcal{D}$ existen coordenadas $(\theta_0, \ldots, \theta_m, q_1, \ldots, q_m)$, cumpliendo que:*

(i) *Las funciones características de los campos fundamentales de la acción de $\mathbb{R}^n$ son únicamente funciones de $q = (q_1, \ldots, q_m)$.*

(ii) *La forma de contacto se expresa $\rho = \sum_{i=0}^m q_i d\theta_i$, donde q_0 es una función diferenciable en las variables $q_1, \ldots, q_m$.*

Demostración. Definamos $q_i = \rho(\frac{\partial}{\partial \theta_i})$ para $i = 0, \ldots, m$.

Tenemos pues que $i_{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} d\rho = -dq_i$, bastará si es preciso, restringir $\mathcal{U}$ y reordenar los θ_i, para poder suponer que junto con $q_1, \ldots, q_m$, forman un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{U}$. De esta forma, siempre podremos escribir $\rho = \sum_{i=0}^m q_i d\theta_i + \beta$. Como $i_{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} \beta = i_{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} d\beta = 0$, entonces $\beta = \sum_{i=1}^m \beta_i(q) dq_i$, es decir, β se expresará exclusivamente en términos de las variables $q_1, \ldots, q_m$.

Efectuemos un cambio diferenciable del origen de ángulos y escribamos $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \beta_i$. De esto se deduce que $\rho = \sum_{i=0}^m q_i d\tilde{\theta}_i + dh$, donde $h = \sum_{i=0}^m q_i \beta_i$, siendo h una integral primera del sistema dinámico de ρ. Por tanto estamos en el caso en que $\rho = \rho_0 + dh$, donde $\rho_0 = \sum_{i=0}^m q_i d\tilde{\theta}_i$.

Consideremos $\rho_t = \rho_0 + t dh$. Es claro que ρ_t es una forma de contacto para cada valor de t, cuyo sistema dinámico sigue siendo $\mathcal{T}$.

Tomemos el campo de vectores $X = -h\mathcal{T}$ y sea φ_t su flujo global. Como h es una integral primera de $\mathcal{T}$, φ_t conmuta con la acción de T^{m+1}, ya que X conmuta con los campos fundamentales de la misma.

Se tiene entonces que

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t)^* \rho_t = (\varphi_t)^* \left(L_X \rho_t + \frac{d\rho_t}{dt} \right) = (\varphi_t)^* \left(-dh + dh \right) = 0.$$

Por tanto $(\varphi_1)^* \rho = \rho_0$, lo que permite obtener las coordenadas buscadas. ∎

Obsérvese que con estas nuevas coordenadas aparece, igualmente de forma natural, una acción del toro T^{m+1} sobre $\mathcal{U}$, que respeta los campos de la acción de $\mathbb{R}^n$, la forma de contacto ρ y que tiene las mismas órbitas.

3.2. La estructura de variedad diferenciable del espacio de órbitas. Denotemos por $\mathcal{O}$ al espacio de óbitas de la acción de $\mathbb{R}^n$ y sea $\pi : M \longrightarrow \mathcal{O}$ la proyección canónica. Dotemos a $\mathcal{O}$ de la topología cociente. De esta forma, gracias a las proposiciones anteriores, $\mathcal{O}$ será un espacio separado y compacto, ya que M lo es.

Consideremos $m_0 \in M$ y $o_0 = \pi(m_0)$. La órbita de la acción de $\mathbb{R}^n$ que pasa por m_0 vendrá dada por $Orb(m_0) = \pi^{-1}(o_0)$.

Tomemos un entorno abierto $(\mathcal{U}, (\theta_i, q_i))$ de la órbita con las coordenadas antes descritas y denotemos $\tilde{\mathcal{U}} = \pi(\mathcal{U})$.

Las funciones características, $q_1, \ldots, q_m$, son π-proyectables y definen entonces un homeomorfismo $\Pi_{\tilde{\mathcal{U}}} : \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \tilde{\Omega}$, donde $\tilde{\Omega}$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$.

En las coordenadas elegidas sobre $\mathcal{U}$, el sistema dinámico de ρ se escribirá $\mathcal{T} = \sum_{i=0}^m \mathcal{T}^i(q) \frac{\partial}{\partial \theta_i}$. Recordemos que $\rho = \sum_{i=0}^m q_i d\theta_i$ y como $\rho(\mathcal{T}) = 1$, se tiene que $\sum_{i=0}^m \mathcal{T}^i(q) q_i = 1$. Al ser $dq_1, \ldots, dq_m$ linealmente independientes sobre $\mathcal{U}$ y $i_{\mathcal{T}} d\rho = 0$ entonces $\mathcal{T}^0 \neq 0$ en $\mathcal{U}$, lo cual permite despejar q_0 de la última expresión: $q_0 = \frac{1}{\mathcal{T}^0(q)} - \sum_{i=1}^m \frac{\mathcal{T}^i(q)}{\mathcal{T}^0(q)} q_i$.

3.3. Transformaciones de coordenadas en el espacio de órbitas. Los cambios de coordenadas θ_i permitidos en $\mathcal{U}$ se corresponderán con los cambios de base en el álgebra de Lie de T^{m+1}, por tanto deberán ser de la forma $\frac{\partial}{\partial\theta'_{i_1}} = \sum_{i=0}^m {N_i}^{i_1} \frac{\partial}{\partial\theta_i}$, donde ${N_i}^{i_1} \in \mathbf{Z}$. Tomando ρ a ambos lados de la igualdad tenemos los cambios de coordenadas q, que serán $q'_{i_1} = \sum_{i=0}^m {N_i}^{i_1} q_i$. Si queremos eliminar en el cambio la función q_0, la expresión quedaría de la forma $q'_{i_1} = \frac{{N_0}^{i_1}}{\mathcal{T}^0} + \sum_{i=1}^m \left({N_i}^{i_1} - {N_0}^{i_1} \frac{\mathcal{T}^i}{\mathcal{T}^0}\right) q_i$.

Estas expresiones de cambio de coordenadas definen sobre $\mathcal{O}$ una estructura de variedad diferenciable.

3.4. La red de Legendre de la variedad diferenciable $\mathcal{O}$. Hemos visto que $\mathcal{O}$ tiene estructura de variedad diferenciable. Sea $\mathcal{U} = \pi^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$ un abierto de M, dotado de coordenadas (θ, q) según el teorema 2. Las funciones $q_i = \rho(\frac{\partial}{\partial\theta_i})$ son π-proyectables y pueden considerarse definidas sobre $\tilde{\mathcal{U}}$.

Consideremos la variedad de los 1-jets $J^1(\mathcal{O}, R)$ con su forma de contacto canónica α y la proyección natural $\pi_1 : J^1\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$.

Llamamos red de Legendre sobre $\mathcal{O}$ a una subvariedad de Legendre $\mathcal{R}_1$ de $(J^1\mathcal{O}, \alpha)$ tal que:

(i) $\pi : \mathcal{R}_1 \longrightarrow \mathcal{O}$ *sea un recubrimiento.*

(ii) *La traza de $\mathcal{R}_1$ sobre cada fibra de $J^1\mathcal{O}$ sea una red de dicha fibra.*

Una base local de $\mathcal{R}_1$ vendrá dada en un abierto A de $\mathcal{O}$ por $m+1$ funciones $\tilde{f}_0, \ldots, \tilde{f}_m : A \longrightarrow R$. Si además las funciones $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m$ forman un sistema de coordenadas en A, la carta local correspondiente se dirá que es adaptada a $\mathcal{R}_1$.

Considerando ahora nuestras coordenadas sobre $\mathcal{U}$, sus 1-jets $j^1q_0, \ldots, j^1q_m$, engendran sobre $\mathbf{Z}$ una red de Legendre $\mathcal{R}_1$, canónica sobre $\mathcal{O}$.

Sea $P^1 = J^1\mathcal{O}/\mathcal{R}_1$ y $\tilde{\pi}_1 : P^1 \longrightarrow \mathcal{O}$ la proyección del cociente. Así $\tilde{\pi}_1$ es una fibración en toros de dimensión $m+1$. Además P^1 está dotado, a partir de α, de una forma de contacto, que seguiremos denotando por α.

Podemos dar una carta local de P^1 como sigue:

Todo elemento de $J^1\tilde{\mathcal{U}}$ sobre un elemento $o \in \mathcal{O}$ de coordenadas $(q_1, \ldots, q_m)$ se escribe de la forma $\sum_{i=0}^m p_i j^1 q_i$. Se obtiene así sobre $J^1\mathcal{U}$ un sistema de coordenadas $(q_1, \ldots, q_m, p_0, \ldots, p_m)$.

La aplicación $(q_1, \ldots, q_m, p_0, \ldots, p_m) \longmapsto (e^{2i\pi p_0}, \ldots, e^{2i\pi p_m}, q_1, \ldots, q_m)$ se factoriza en una carta local de P^1 con valores en $T^{m+1} \times \mathbb{R}^m$.

Las cartas locales así definidas determinan sobre P^1 una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2m+1$.

La proyección $\tilde{\pi}_1 : P^1 \longrightarrow \mathcal{O}$ es, por tanto, una fibración en toros de dimensión $m+1$; los elementos neutros de las fibras provienen de la proyección $J^1\mathcal{O} \longrightarrow P^1$ de los 1-jets de la función nula. Además, la 1-forma de contacto canónica sobre $J^1\mathcal{O}$ define una 1-forma α sobre P^1.

Podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente teorema, análogo al de Arnold-Liouville (véase [1], [2]).

Teorema 3. *Sea (M,ξ) una variedad diferenciable real y compacta de dimensión $2m+1$, con una estructura de contacto ξ. Supongamos que sobre M hay definida una acción de $\mathbb{R}^n$, que es foliante de dimensión $m+1$ y conserva la estructura de contacto.*

Si denotamos por $\pi : M \longrightarrow \mathcal{O}$ a la proyección canónica sobre el espacio de órbitas, entonces:

(i) *El espacio de órbitas $\mathcal{O}$ está dotado de una estructura natural de variedad diferenciable de forma que las funciones características de los campos de la acción son π-proyectables.*
(ii) *La variedad $\mathcal{O}$ está dotada canónicamente de una red de Legendre $\mathcal{R}_1$.*
(iii) *Para cada abierto $\mathcal{U} = \pi^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$ de M, dotado de coordenadas $(\theta_0,\dots,\theta_{m+1},q_1,\dots,q_m)$, con $q_i = \rho(\frac{\partial}{\partial\theta_i})$ para $i=0,\dots,m$, los 1-jets de las funciones $q_0,\dots,q_m$ sobre $\tilde{\mathcal{U}}$ forman una base local de $\mathcal{R}_1$.*

Se dirá que $(\mathcal{O},\mathcal{R}_1)$ es la base de la fibración en toros $\pi : M \longrightarrow \mathcal{O}$ definida por la forma de contacto ρ.

3.5. Caso en que la dimensión de las órbitas es m. Para comenzar esta sección describiremos una construcción que nos permitirá encontrar algunos ejemplos.

Sea S una variedad diferenciable orientable y compacta de dimensión m. Denotemos por $\pi : T^*S \to S$ la proyección canónica del fibrado cotangente sobre S y definamos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto $T^*S \setminus \{0\}$: $\alpha\mathcal{R}\beta$ si $\pi\alpha = \pi\beta$ y $\beta = \lambda\alpha$, donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Consideremos el fibrado en esferas $M = \frac{T^*S\setminus\{0\}}{\mathcal{R}}$. La proyección canónica $p : T^*S \setminus \{0\} \to M$ nos permite dotar a M de una estructura de contacto a partir de la 1-forma de Liouvielle $\tilde{\rho}$ de T^*S.

Por otro lado, si X es un campo de vectores sobre S y si $\tilde{X}$ es su elevación en T^*S ($d\pi(\tilde{X}) = X$ y $L_{\tilde{X}}\tilde{\rho} = 0$), entonces $\tilde{X}$ se proyecta sobre M como un automorfismo infinitesimal X' de la estructura de contacto. Además, si X, Y conmutan sobre S, entonces $[X', Y'] = 0$. De esta forma, toda acción de $\mathbb{R}^n$ sobre S induce una acción sobre M que respeta la estructura de contacto.

En particular, si sobre una variedad compacta de dimensión m y rango $m-1$ consideramos $m-1$ campos de vectores conmutantes y linealmente independientes en todo punto, sus proyecciones definen una acción foliante sobre M.

PROPOSICIÓN 5. *Supongamos que la acción m-foliante definida sobre la variedad diferenciable M^{2m+1} deja invariante una forma de contacto ρ. Si la subvariedad regular invariante por la acción $M_0 = \{p \in M : \rho(X_v(p)) = 0, \forall v \in V\} \neq \emptyset$, y las órbitas de la acción son cerradas, entonces cada componente conexa de M_0 fibra sobre S^1 y sus fibras son precisamente las órbitas de la acción de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Obsérvese en primer lugar que la restrinción a M_0 de ρ es una 1-forma cerrada no singular, cuyo núcleo coincide con el tangente a las órbitas de los puntos de M_0. En efecto, dado $p \in M_0$, podemos tomar m campos fundamentales de la acción, $X_1, \ldots, X_m$, que generan el tangente en p a la órbita de p. Usando ahora los modelos locales adaptados a la acción, podemos encontrar coordenadas (U, x) entorno a p, de forma que en dicho entorno M_0 viene dado por $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, …, $x_{2m-1} = 0$.

Sea M' una componente conexa de M_0. Ahora las hojas de la foliación definida por ρ sobre M' son cerradas, por tanto $\rho_{|M'}$ es racional y por tanto existe una función $g : M \longrightarrow S^1$, tal que $g^*(d\theta) = a\rho_{|M'}$, donde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, siendo θ una coordenada ángular sobre S^1 (véase [3], [6]). ∎

Sigamos considerando una acción foliante de $\mathbb{R}^n$, con órbitas de dimensión m, sobre una variedad compacta M^{2m+1} que respeta una estructura de contacto orientable. Nótese que, en ese caso, M_0 es una subvariedad cerrada de dimensión $m+1$.

PROPOSICIÓN 6. *Si el fibrado tangente a las órbitas es orientable, entonces cada componente conexa de M_0 es un fibrado en toros T^r sobre el toro T^{m+1-r} (la r podrá variar de componente a componente).*

Demostración. Sea M' una componente conexa de M_0. Entonces $\xi \cap TM'$ es un subfibrado orientable de TM', cuyo suplementario es isomorfo a $\mathbb{R} \times M'$ ya que viene dado en cada punto de M' por los múltiplos del sistema dinámico de ρ. Por tanto M' es orientable.

Por otro lado, sobre M' actúa $\mathbb{R}^n$ con órbitas de dimensión m, luego $rang(M') \geq m$ (véase [8]). Un conocido resultado de Chatelet y Rosenberg (véase [4]) implica que M' es un fibrado en toros T^r sobre el toro T^{m+1-r}. ∎

Cerraremos este trabajo con algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Tomemos $M = T^3$ con las coordenadas angulares $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Consideremos la forma de contacto $\rho = \cos\alpha_1 d\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_1 d\alpha_3$ y sea $f : T^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \cos\alpha_1$.

El gradiente de contacto de f será el campo $\frac{\partial}{\partial\alpha_2}$. Al ser T^3 compacta, podemos considerar la acción dada por el flujo global de $\frac{\partial}{\partial\alpha_2}$. Dicha acción será 1-foliante y las órbitas de la misma son difeomorfas a S^1; en realidad para cada valor constante de α_1 y α_3 dichas órbitas son $\{\alpha_1^0\} \times S^1 \times \{\alpha_3^0\}$. Concluimos por tanto que T^3 es una fibración en toros T^1 y que el espacio de órbitas será T^2.

Obsérvese que $M_0 \neq \emptyset$, $M_0 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \cos\alpha_1 = 0\} = \{(e^{i\pi n}, S^1 \times S^1)\}$.

Ejemplo 2. Consideremos $M = T^3$ con las coordenadas angulares $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y la misma forma de contacto del ejemplo anterior, $\rho = \cos\alpha_1 d\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_1 d\alpha_3$. Su sistema dinámico será $\mathcal{T} = \cos\alpha_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + \operatorname{sen}\alpha_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_3}$.

Podemos considerar la 1-acción dada sobre T^3 por el flujo global de $\mathcal{T}$. Ahora bien, dependiendo del valor de α_1, las órbitas de la acción serán unas compactas y otras no. Por tanto, en este caso no tendremos una fibración en toros.

Ejemplo 3. Sea $M = S^3$ con la forma de contacto inducida por la contracción de la forma simpléctica $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ de $\mathbb{R}^4$, es decir $\rho = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 - x_4 dx_3 + x_3 dx_4$.

Consideremos la acción definida sobre S^3 por el flujo global $\phi(t,p)$ del campo $X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$, opuesto del sistema dinámico de ρ.

Es claro a la vista de su expresión, $\phi(t,p) = (x_1\cos t + x_2 \sin t, -x_1 \sin t + x_2 \cos t, x_3 \cos t + x_4 \sin t, -x_3 \sin t + x_4 \cos t)$, que las órbitas son cerradas.

Ejemplo 4. Tomemos la variedad diferenciable $W = T^3$ con coordenadas angulares $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$. En $T^*W \setminus \{0\}$ se define la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ dada por: $\alpha\mathcal{R}\beta$ si $\pi\alpha = \pi\beta$ y $\beta = \lambda\alpha$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$, donde $\pi : T^*W \longrightarrow W$ es la proyección canónica del fibrado cotangente sobre W.

El conjunto $M = \frac{T^*W\setminus\{0\}}{\mathcal{R}}$ puede dotarse de una estructura de variedad diferenciable de forma que la proyección canónica $p : T^*W \setminus \{0\} \to M$ sea una submersión. Además dicha proyección permite dotar a M de una estructura de contacto ξ a partir de la 1-forma de Liouville de T^*W, siendo $M \simeq T^3 \times S^2$. Si tomamos coordenadas $[(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \times (x_1, x_2, x_3)]$ en M, un representante de dicha estructura sería $\rho = \sum_{j=1}^{3} x_j d\alpha_{j-1}$.

Para los campos de vectores $X_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha_0}$ y $X_2 = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + a\frac{\partial}{\partial \alpha_2}$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, consideremos sus respectivas elevaciones $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ en T^*W y las proyecciones de estos sobre M, X_1' y X_2', que son, como ya hemos señalado, automorfismos de la estructura de contacto ξ.

De esta forma, con las coordenadas dadas $\tilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha_0}$, $\tilde{X}_2 = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + a\frac{\partial}{\partial \alpha_2}$, teniendo X_1' y X_2' igual expresión sobre M. Los flujos globales de X_1', X_2', inducen sobre M una acción 2-foliante, que conserva la estructura de contacto. Cada órbita de dicha acción tiene como cierre topológico una copia de T^3, es decir, las órbitas no son cerradas y por tanto no son toros.

Por otro lado, $M_0 \neq \emptyset$, siendo

$$\begin{aligned} M_0 &= \{[(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \times (x_1, x_2, x_3)] : x_1 = 0, x_2 + ax_3 = 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \\ &= \left(T^3 \times \left(0, -a\sqrt{\tfrac{1}{a^2+1}}, \sqrt{\tfrac{1}{a^2+1}}\right)\right) \cup \left(T^3 \times \left(0, a\sqrt{\tfrac{1}{a^2+1}}, -\sqrt{\tfrac{1}{a^2+1}}\right)\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 5. Sea N una variedad compacta, conexa y orientable de rango $\geq \dim N - 1 = m$ (un fibrado en toros sobre un toro). Consideremos una acción de $\mathbb{R}^m$ en N con órbitas de dimensión m.

Esta acción pasa al fibrado en esferas sobre N como una acción con órbitas de dimensión m que respeta una estructura de contacto inducida por la 1-forma de Liouville.

Tomemos un modelo local $(x_1, \ldots, x_{m+1})$ en N tal que la acción esté generada por $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$. Entonces si elegimos las coordenadas (x, y) asociadas al fibrado T^*N, "la parte de M_0" sobre el dominio de coordenadas viene dada por $y_1 = \cdots = y_m = 0$. Así, es claro que M_0 es un revestimiento de dos hojas de N.

Nótese que, al ser la variedad N orientable y también el fibrado tangente a las órbitas, se tiene que el fibrado anterior no puede ser conexo, pues se puede distinguir la parte positiva y la negativa. En consecuencia, M_0 es difeomorfo a $N \times \{0, 1\}$. Este ejemplo muestra que en la proposición 6 se pueden encontrar como componentes conexas de M_0 cualquier fibrado en toros sobre un toro.

Referencias

[1] Abraham, R. Marsden, J.E., "Foundations of Mechanics", Second edition, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, 1978.

[2] Arnol'd, V.I., "Mathematical Methods of Classical Mechanics", Second edition, Graduate Texts in Mathematics **60**, Springer-Verlag, New York 1989.

[3] Camacho, C.,Lins Neto, A., "Geometric Theory of Foliations", Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[4] Chatelet, G., Rosemberg, H., Manifolds which admits $\mathbb{R}^n$ actions, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.,* **43** (1974), 245 – 260.

[5] Godbillon, C., "Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique", Herman, Paris, 1969.

[6] Godbillon, C., "Feuilletages. Études Géométriques", Progress in Mathematics 98, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.

[7] Lima, E., Common singularities of commuting vector fields on 2-manifolds, *Comment. Math. Helv.,* **39** (1964), 97 – 110.

[8] Lutz, R., Sur la géométrie des structures de contact invariantes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble),* **29** (1) (1979), 283 – 306.

[9] Molino, P., Turiel, F.J., Une observation sur les actions de $\mathbb{R}^p$ sur les variétés compactes de caractéristique non nulle, *Comment. Math. Helv.,* **61** (1986), 370 – 375.

[10] Molino, P., Turiel, F.J., Dimension des orbites d'une action de $\mathbb{R}^p$ sur une variété compacte, *Comment, Math. Helv.,* **63** (1988), 253 – 258.

[11] Palais, R., "A Global Formulation of the Lie Theory of Transformation Groups", Mem. Amer. Math. Soc. **22**, Provindence, Rhode Island, USA, 1957.

[12] Rubio, R.M., Dimension minimale des orbites d'une action de $\mathbb{R}^n$ sur une variété de contact, *Manuscripta Math.,* **105** (2001), 323 – 342.

[13] Turiel, F.J., Dimension minimal des orbites d'une action de $\mathbb{R}^n$ par symplectomorphismes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.,* **305** (1987), 131 – 133.

[14] Turiel, F.J., Dimension minimal des orbites d'une action symplectique de $\mathbb{R}^n$, in "Géométrie symplectique et mécanique (La Grande Motte, 1988)", *Lecture Notes in Math.* **1416**, Springer, Berlin, 1990, 268 – 289.