

## Caractérisations des b-Espaces Libres

BELMESNAOUI AQZZOUZ

*Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et  
Informatique, Equipe d'Analyse Fonctionnelle, B.P. 133 Kénitra, Maroc  
e-mail: baqzzouz@hotmail.com*

(Presented by Jesús M.F. Castillo)

AMS Subject Class. (2000): 46M05, 46M15, 46M40

Received December 5, 2002

### 1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Les espaces de Banach libres et les b-espaces libres ont été utilisés par L. Waelbroeck dans la construction de ces catégories abéliennes [4] et [5]. Le but principal de ce papier est d'étudier quelques propriétés de cette classe d'espaces et d'établir les liens entre cette classe et le théorème de Bartle-Graves dans le cadre des b-espaces de Waelbroeck [3] qui est une classe plus générale que celle des espaces bornologiques (localement convexes) de Bourbaki [2]. Rappelons que le théorème de Bartle-Graves [1] dit que toute surjection linéaire bornée entre des espaces de Banach admet un inverse à droite continu (non nécessairement linéaire) borné sur les bornés.

Nous montrerons que si  $X$  est un ensemble et  $u: E \rightarrow F$  une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des b-espaces, alors l'application linéaire bornée  $\beta(X, u): \beta(X, E) \rightarrow \beta(X, F)$ ,  $f \mapsto u \circ f$  est bornologiquement surjective, et nous établirons que pour tout ensemble  $X$  et pour tout espace de Banach  $E$ , l'espace de Banach  $\mathbf{Ban}(l_1(X), E)$  est isomorphe à  $\beta(X, E)$ . Après, nous montrerons qu'un b-espace  $G$  est libre si, et seulement si, l'application linéaire bornée  $\mathbf{b}(G, u): \mathbf{b}(G, E) \rightarrow \mathbf{b}(G, F)$ ,  $f \mapsto u \circ f$  est bornologiquement surjective dès que  $u: E \rightarrow F$  est une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des b-espaces. Ensuite, si  $E$  est un b-espace, nous établirons qu'il existe un ensemble  $I$  tel que pour tout  $i \in I$ , il existe un ensemble  $X_i$  et une application linéaire bornée et bornologiquement surjective  $u: \bigoplus_{i \in I} l_1(X_i) \rightarrow E$ . Enfin, si  $E$  est un b-espace libre et  $F_1, F_2$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = F_1 \oplus F_2$  (en tant que b-espaces), nous montrerons que l'application linéaire bornée

$\mathbf{b}(G, u): \mathbf{b}(G, H_1) \rightarrow \mathbf{b}(G, H_2)$ ,  $f \mapsto u \circ f$  est bornologiquement surjective dès que  $u: H_1 \rightarrow H_2$  est une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des b-espaces, où  $G = F_1, F_2$ .

Nous terminons ce paragraphe en fixant les notations dont nous aurons besoin tout au long de ce papier. On désigne par **Ban** la catégorie des espaces de Banach et des applications linéaires bornées. Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux espaces de Banach, on désigne par  $\mathbf{Ban}(E_1, E_2)$  l'espace de Banach de toutes les applications linéaires bornées  $E_1 \rightarrow E_2$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel. Si  $B$  est un disque (i.e. un ensemble convexe équilibré) de  $E$ , on note  $E_B$  l'espace vectoriel engendré par  $B$  muni de la semi-norme  $\|x\|_B = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : x \in \alpha B\}$ . Le disque  $B$  est dit complétant si  $(E_B, \|\cdot\|_B)$  est un espace de Banach.

On appelle bornologie de b-espace sur  $E$ , toute famille  $\beta$  de parties de  $E$  vérifiant les axiomes suivants:

- (1) toute partie finie de  $E$  appartient à  $\beta$ .
- (2) si  $A \in \beta$  et  $B \subset A$ , alors  $B \in \beta$ .
- (3)  $\beta$  est stable pour la réunion finie.
- (4) l'homothétique de tout élément de  $\beta$  est un élément de  $\beta$ .
- (5) si  $A \in \beta$ , alors il existe un disque borné complétant  $B$  de  $\beta$  tel que  $A \subset B$ .

Le couple  $(E, \beta)$  est appelé un b-espace. Un sous-espace vectoriel  $F$  d'un b-espace  $E$  est bornologiquement fermé, si pour tout borné complétant  $B$  de  $E$ , le sous-espace vectoriel  $F \cap E_B$  est fermé dans l'espace de Banach  $E_B$ .

Sur tout espace vectoriel topologique localement convexe  $E$ , l'ensemble des parties absorbées par tout voisinage de 0 forme une bornologie appelée la bornologie de von Neumann,  $E$  muni de cette bornologie sera noté  $E_b$ . Si dans  $E$  tout disque borné fermé est complétant, alors  $E_b$  est un b-espace.

Si  $(E_1, \beta_1)$  et  $(E_2, \beta_2)$  sont deux b-espaces, une application linéaire  $u: E_1 \rightarrow E_2$  est dite bornée si pour tout  $A \in \beta_1$  on a  $u(A) \in \beta_2$ ;  $u$  est dite bornologiquement surjective si pour tout  $B \in \beta_2$ , il existe  $A \in \beta_1$  tel que  $u(A) \supseteq B$ . Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux b-espaces, on désigne par  $\mathbf{b}(E_1, E_2)$  l'espace de toutes les applications linéaires bornées  $E_1 \rightarrow E_2$  muni de la bornologie de b-espace suivante: une partie  $B$  de  $\mathbf{b}(E_1, E_2)$  est dite bornée si l'ensemble  $\{u(x) : u \in B, x \in B'\}$  est un borné de  $E_2$ , quelque soit la partie bornée  $B'$  de  $E_1$ . On désigne aussi par  $\mathbf{b}$ , la catégorie des b-espaces et des applications linéaires bornées. Nous renvoyons le lecteur à [3] pour plus de détails à ce sujet.

2. RÉSULTATS

Si  $X$  est un ensemble et  $E$  un b-espace, on note par  $\beta(X, E)$  l'espace des applications  $f: X \rightarrow E$  telle que  $f(X)$  est borné dans  $E$ . Cet espace sera muni de la bornologie équilibrée i.e., une partie  $B$  de  $\beta(X, E)$  est bornée si l'ensemble  $\{f(x): f \in B, x \in X\}$  est borné dans  $E$ .

PROPOSITION 2.1. *Si  $X$  est un ensemble et  $u: E \rightarrow F$  une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des b-espaces, alors l'application linéaire bornée  $\beta(X, u): \beta(X, E) \rightarrow \beta(X, F)$ ,  $f \mapsto u \circ f$  est bornologiquement surjective*

*Preuve.* Soit  $A$  un borné de  $\beta(X, F)$ . L'ensemble  $D = \{f(x): f \in A, x \in X\}$  est borné dans  $F$ . Comme l'application  $u: E \rightarrow F$  est bornologiquement surjective, il existe un borné  $C$  de  $E$  tel que  $u(C) = D$ . Par l'axiome du choix, il existe une application  $v: D \rightarrow C$  tel que  $u \circ v = 1_D$ , où  $1_D$  est l'application identité de  $D$ . Posons  $B = \{g = v \circ f: f \in A\}$ , alors  $B$  est un borné de  $\beta(X, E)$  et  $A = u \circ B = \{u \circ g: g \in B\}$ . Par suite, l'application  $\beta(X, u)$  est bornologiquement surjective. ■

On déduit alors,

COROLLAIRE 2.2. *Soient  $X$  un ensemble,  $E$  un b-espace et  $F$  un sous-espace vectoriel bornologiquement fermé de  $E$ , alors  $\beta(X, E/F) = \beta(X, E) / \beta(X, F)$ .*

Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille de b-espaces. Sur le produit direct  $\prod_{i \in I} E_i$ , on définit la bornologie suivante: une partie  $B$  de  $\prod_{i \in I} E_i$  est bornée si pour tout  $i \in I$ , l'ensemble  $p_i(B) = \{p_i(x): x \in B\}$  est borné dans  $E_i$ , où  $p_j: \prod_{i \in I} E_i \rightarrow E_j$  est la projection canonique.

Il est clair que les projections canoniques  $p_j: \prod_{i \in I} E_i \rightarrow E_j$  sont bornées lorsque nous munissons  $\prod_{i \in I} E_i$  de la bornologie ci-dessus.

Le produit direct d'une famille de b-espaces  $(E_i)_{i \in I}$  est un b-espace. Mais le coproduit d'une famille de b-espaces n'est pas un b-espace.

On définit aussi la somme directe de b-espaces. Soit  $I$  un ensemble et pour tout  $i \in I$ , soit  $E_i$  un b-espace. Alors  $(x_i)_{i \in I} \in \oplus_{i \in I} E_i$  si  $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$  et s'il existe un ensemble fini  $I_0$  de  $I$  tel que  $x_i = 0$  pour tout  $i \notin I_0$ . Une partie  $B$  de  $\oplus_{i \in I} E_i$  est bornée si elle est bornée dans  $\prod_{i \in I} E_i$  et s'il existe une partie finie  $I_0$  de  $I$  tels que pour tout  $i \notin I_0$ ,  $p_i(B) = \{0\}$ . Le b-espace  $\oplus_{i \in I} E_i$  est la somme directe de la famille des b-espaces  $(E_i)_i$ .

Il est clair que le produit direct  $\prod_{i \in I} C_i$  de bornés complétants est un borné complétant. Même chose pour  $\oplus_{i \in I} C_i$ .

Un espace de Banach  $E$  est libre si  $E$  est isomorphe à  $l_1(X)$  pour un certain ensemble  $X$ . Un b-espace  $G$  est libre s'il existe un ensemble  $I$ , tel que pour tout  $i \in I$ , il existe un ensemble  $X_i : G$  est isomorphe (bornologiquement) au b-espace  $\oplus_{i \in I} l_1(X_i)$ .

**PROPOSITION 2.3.** *Pour tout espace de Banach  $E$  et pour tout ensemble  $X$ , l'espace de Banach  $\mathbf{Ban}(l_1(X), E)$  est isomorphe à  $\beta(X, E)$ .*

*Preuve.* Considérons le plongement de  $X$  dans  $l_1(X)$  défini comme suit: pour tout  $x \in X$ , on a une application

$$i_x: X \rightarrow C, \quad y \mapsto i_x(y)$$

telle que  $i_x(y) = 1$  si  $x = y$  et  $i_x(y) = 0$  si  $x \neq y$ .

Soit l'application linéaire bornée  $u: l_1(X) \rightarrow E$  définie par ces restrictions à l'ensemble  $\{i_x: x \in X\}$ . Un élément  $\lambda$  de  $l_1(X)$  est la série absolument convergente  $\sum_{x \in X} \lambda(x)u(i_x)$ . On a alors

$$u(\lambda) = \sum_{x \in X} \lambda(x)u(i_x).$$

Soit  $u_1: X \rightarrow E$  l'application définie par  $u_1(x) = u(i_x)$ . Il est clair que l'application linéaire bornée  $\mathbf{Ban}(l_1(X), E) \rightarrow \beta(X, E)$ ,  $u \mapsto u_1$  est un isomorphisme. ■

Comme conséquence, nous obtenons le résultat suivant:

**COROLLAIRE 2.4.** *Soient  $X$  un ensemble,  $E$  un espace de Banach et  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ , alors*

$$\mathbf{Ban}(l_1(X), E/F) = \mathbf{Ban}(l_1(X), E) / \mathbf{Ban}(l_1(X), F).$$

Les b-espaces libres nous permettent d'avoir une version du théorème de Bartle-Graves pour les applications linéaires bornées.

**PROPOSITION 2.5.** *Si  $G$  est un b-espace libre alors, l'application linéaire bornée  $\mathbf{b}(G, u): \mathbf{b}(G, E) \rightarrow \mathbf{b}(G, F)$ ,  $f \mapsto u \circ f$  est bornologiquement surjective dès que  $u: E \rightarrow F$  est une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des b-espaces.*

*Preuve.* Comme l'application  $u: G \rightarrow F$  est bornologiquement surjective, pour tout disque borné complétant  $C$  de  $F$ , il existe un disque borné complétant  $B$  de  $E$  tel que  $u(B) = A$ . Par hypothèse  $G = \bigoplus_{i \in I} l_1(X_i)$ , et donc l'application  $u$  est déterminée par ces restrictions aux b-espaces intervenant dans la somme directe bornologique. Appelons  $u_i: l_1(X_i) \rightarrow E$  la restriction de  $u$  à  $l_1(X_i)$ . Si  $C'$  est un borné dans le b-espace  $\mathbf{b}(\bigoplus_{i \in I} l_1(X_i), F)$ , on pose

$$C'_i = \{u_i: u \in C'\}$$

$C'$  est un borné de  $\mathbf{b}(l_1(X_i), F)$ , et donc un borné d'un certain  $\mathbf{b}(l_1(X_i), F_{C_i})$ , où  $C_i$  est borné complétant de  $F$ . Comme l'espace  $l_1(X_i)$  est libre dans la catégorie **Ban**, alors pour tout borné  $C'_i$  dans  $\mathbf{b}(l_1(X_i), F_{C_i})$ , il existe un borné  $B'_i$  dans  $\mathbf{b}(l_1(X_i), E_{B_i})$  tel que  $u(B'_i) = C'_i$ . Notons que la partie  $B'_i$  est aussi bornée dans  $\mathbf{b}(l_1(X_i), E)$ . Il s'ensuit que l'ensemble borné  $\bigoplus_{i \in I} B'_i$  relève le borné  $\bigoplus_{i \in I} C'_i$ , et vu que  $C' \subset \bigoplus_{i \in I} C'_i$ , alors  $C'$  peut être relevé en une partie de  $\bigoplus_{i \in I} B'_i$ . ■

Comme conséquence du résultat ci-dessus nous obtenons la caractérisation suivante:

**COROLLAIRE 2.6.** *Soient  $G$  un b-espace libre,  $E$  un b-espace et  $F$  un sous-espace vectoriel bornologiquement fermé de  $E$ , alors  $\mathbf{b}(G, E/F) = \mathbf{b}(G, E)/\mathbf{b}(G, F)$ .*

Si  $E$  est un espace de Banach, nous savons qu'il existe un ensemble  $X$  et une application linéaire bornée surjective  $u: l_1(X) \rightarrow E$ . Dans le cas bornologique nous obtenons un résultat de même nature. En effet:

**PROPOSITION 2.7.** *Soit  $E$  un b-espace, alors il existe un ensemble  $I$  tel que pour tout  $i \in I$ , il existe un ensemble  $X_i$  et une application linéaire bornée et bornologiquement surjective  $u: \bigoplus_{i \in I} l_1(X_i) \rightarrow E$ .*

*Preuve.* Soit  $E$  un b-espace et soit  $(B_i)_{i \in I}$  une base de la bornologie de  $E$ . On peut supposer les bornés  $B_i$  complétants. Pour tout  $i \in I$ , on choisit un ensemble  $X_i$ , contenu et dense dans  $B_i$  (la boule unité fermée de l'espace de Banach  $E_{B_i}$ ). Or on sait que pour tout  $i \in I$ , il existe une application linéaire bornée et surjective  $u_i: l_1(X_i) \rightarrow E$ . La famille de ses applications  $u_i$  définissent une application linéaire bornée et bornologiquement surjective  $u: \bigoplus_{i \in I} l_1(X_i) \rightarrow E$ . ■

PROPOSITION 2.8. Soient  $E$  un  $b$ -espace libre et  $F_1, F_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = F_1 \oplus F_2$  (bornologiquement). Alors, l'application linéaire bornée  $\mathbf{b}(G, u): \mathbf{b}(G, H_1) \rightarrow \mathbf{b}(G, H_2)$ ,  $f \mapsto u \circ f$  est bornologiquement surjective dès que  $u: H_1 \rightarrow H_2$  est une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des  $b$ -espaces, où  $G = F_1, F_2$ .

*Preuve.* Supposons que  $E$  est un  $b$ -espace libre tel que  $E = F_1 \oplus F_2$  (bornologiquement). Soit  $u: H_1 \rightarrow H_2$  une application linéaire bornée et bornologiquement surjective. Nous remarquons que

$$\mathbf{b}(E, H_1) = \mathbf{b}(F_1, H_1) \times \mathbf{b}(F_2, H_1) \quad \text{et} \quad \mathbf{b}(E, H_2) = \mathbf{b}(F_1, H_2) \times \mathbf{b}(F_2, H_2).$$

Comme l'application  $\mathbf{b}(G, u): \mathbf{b}(G, H_1) \rightarrow \mathbf{b}(G, H_2)$ ,  $f \mapsto u \circ f$  est bornologiquement surjective, les deux projections  $\mathbf{b}(F_1, u): \mathbf{b}(F_1, H_1) \rightarrow \mathbf{b}(F_1, H_2)$ ,  $f \mapsto u \circ f$  et  $\mathbf{b}(F_2, u): \mathbf{b}(F_2, H_1) \rightarrow \mathbf{b}(F_2, H_2)$ ,  $f \mapsto u \circ f$  sont bornologiquement surjectives. ■

COROLLAIRE 2.9. Si  $G$  est un  $b$ -espace libre et  $G_1$  un sous-espaces vectoriel de  $G$  qui admet un complémentaire bornologique. Si  $E$  est un  $b$ -espace et  $F$  un sous-espace vectoriel bornologiquement fermé de  $E$ , alors  $\mathbf{b}(G_1, E/F) = \mathbf{b}(G_1, E)/\mathbf{b}(G_1, F)$ .

Enfin, nous donnons la réciproque de la proposition 2.5.

PROPOSITION 2.10. Soit  $E$  un  $b$ -espace tel que l'application linéaire bornée  $\mathbf{b}(E, u): \mathbf{b}(E, H_1) \rightarrow \mathbf{b}(E, H_2)$ ,  $f \mapsto u \circ f$  est bornologiquement surjective dès que  $u: H_1 \rightarrow H_2$  est une application linéaire bornée et bornologiquement surjective entre des  $b$ -espaces, alors  $E$  est libre.

*Preuve.* Si  $E$  est un  $b$ -espace, d'après la proposition 2.7, pour tout  $i \in I$ , il existe un ensemble  $X_i$  et une application linéaire bornée  $u: \bigoplus_{i \in I} l_1(X_i) \rightarrow E$  qui est bornologiquement surjective. Par hypothèse, l'application linéaire bornée  $\mathbf{b}(E, u)$  prend ces valeurs dans l'espace  $\mathbf{b}(E, E)$  et de plus elle est surjective. Dans le  $b$ -espace  $\mathbf{b}(E, E)$  on trouve l'élément  $\text{Id}_E$ , donc il existe une application linéaire bornée  $v: E \rightarrow \bigoplus_{i \in I} l_1(X_i)$  telle que  $\text{Id}_E = u \circ v$ . Ceci montre que le  $b$ -espace  $E$  est isomorphe à une somme directe bornologique d'espaces de Banach libres. ■

## RÉFÉRENCES

- [1] AQZZOUZ, B., Généralisations du théorème de Bartle-Graves, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **333**, **10** (2001), 925–930.
- [2] BOURBAKI, N., “Espaces Vectoriels Topologique. Chapitre 1 à 5”, Masson, Paris, 1981.
- [3] WAELBROECK, L., “Topological Vector Spaces and Algebras”, Lectures Notes in Math. 230, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [4] WAELBROECK, L., Quotient Banach spaces, in “Spectral Theory”, Banach Center Publ. 8, (1982), 553–562.
- [5] WAELBROECK, L., The category of quotient bornological spaces, in “Aspects of Mathematics and its Applications”, J.A. Barosso (ed.), Elsevier Sciences Publishers B.V., 1986, 873–894.