EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **18**, Núm. 2, 187 – 200 (2003)

FK-Espaces Contenant c_0 en Analyse Non-Archimédienne

R. Ameziane Hassani, M. Babahmed, J. El youssefi

Faculté des Sciences Dhar-Mehraz, Université S.M. Ben Abdellah
B.P. 1796-*Fès Atlas, Fès, Maroc*
e-mail: ramezianehassani@Hotmail.com, jamilaelyoussfi@Hotmail.com

(Presented by Susanne Dierolf)

AMS *Subject Class.* (2000): 26E30 *Received October* 24, 2002

1. Introduction

Le fait que le domaine de convergence d'une matrice infinie à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ainsi que la plupart des espaces rencontrés dans la théorie de sommation ne sont pas des espaces normés en général, était à l'origine de l'introduction par K. Zeller [16] des FK-espaces.

Beaucoup de mathématiciens se sont interessés aux théorèmes de type Mazur-Orlicz et à ceux de la consistance bornée [2], [3], [9], [11], ... Dans [2] et [3], G. Bennett et N.J. Kalton, J. Boos et T. Leiger, ont établi les théorèmes en question dans la classe des FK-espaces contenant l'ensemble c_0 des suites convergentes vers 0.

L'étude des espaces de suites et des matrices infinies à éléments dans les corps valués non-archimédiens, d'une manière analogue au cas classique, fut l'objet de travaux de plusieurs auteurs [6], [8], [12], [13], ... Dans ce travail, nous étudions les analogues des FK-espaces contenant c_0 et nous établissons un théorème de type Mazur-Orlicz et un théorème de la consistance bornée.

Dans la section 2, nous rappelons des notations et des résultats concernant les espaces localement K-convexes ($\mathbb{K}$ un corps valué non-archimédien), les espaces de suites à éléments dans $\mathbb{K}$. Nous introduisons ensuite les espaces localement K-convexes de Saks et leurs topologies mixtes associées (définition 3).

La section 3 apporte un théorème de structure des FK-espaces (définition 1) contenant c_0 (théorème 2) et un théorème de complétion séquentielle faible de l'espace m des suites bornées (théorème 7).

Dans la section 4, en appliquant les résultats de la troisième section aux domaines de convergence des matrices infinies à coefficients dans $\mathbb{K}$, nous établissons un théorème de type Mazur-Orlicz (théorème 11) et un théorème de la consistance bornée (théorème 12).

2. Notations et résultats préliminaires

$\mathbb{K}$ désigne un corps valué non archimédien (n.a) sphériquement complet (c'est-à-dire, toute famille de boules de $\mathbb{K}$, telle que deux quelconques de ces boules aient une intersection non vide a une intersection non vide) et ω est l'espace de toutes les suites d'éléments de $\mathbb{K}$. Un sous-espace vectoriel de ω est dit espace de suites. Pour tout ce qui concerne les espaces localement K-convexes, nous référons à [6], [10], [13] et [14].

Définition 1. Un espace de suites E muni d'une topologie localement K-convexe τ est dit K-espace si l'injection $i : (E, \tau) \to \omega$ est continue ; ω étant muni de la topologie produit τ_p. Si de plus τ est complète et métrisable, (E, τ) sera dit FK-espace.

Un BK-espace est un FK-espace dont la topologie peut être définie par une norme n.a.

Les BK-espaces suivants seront importants par la suite :
m : l'espace des suites bornées ;
c : l'espace des suites convergentes ;
c_0 : l'espace des suites convergentes vers 0 ;
on les munit tous de la norme n.a $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$ où $x = (x_i)_i$.

Soient $e = (1, 1, \dots)$, $e^j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ avec 1 à la $j^{\text{ème}}$ position , et ϕ l'espace vectoriel engendré par les e^j. Pour tout $x \in \omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{[n]}$ désignera la suite $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$, dite la $n^{\text{ème}}$ section de x.

Définition 2. Si (E, τ) est un K-espace contenant ϕ, un point x de E est dit un S.A.K (respectivement A.K) élément de E si $x^{[n]}$ converge vers x pour $\sigma(E, E')$ (respectivement pour τ). On note par W_E (respectivement S_E) l'ensemble des S.A.K (respectivement A.K) éléments de E.

Dans toute la suite $\langle E, F\rangle$ désignera un couple d'espaces vectoriels en dualité sur $\mathbb{K}$, $\sigma(E, F)$ la topologie faible sur E et $\tau_c(E, F)$ la topologie de la convergence uniforme sur les parties K-convexes, faiblement c-compactes et faiblement bornées de F.

Pour toute partie X d'un FK-espace (E,τ), $\bar{X}^{\tau}$ désigne l'adhérence de X dans (E,τ) et $\tau|_X$ désigne la topologie induite par τ sur X. Le β-dual X^{β} de X est donné par $X^{\beta} = \{y \in \omega : \sum_k x_k y_k \text{ est convergente } \forall x \in X\}$.

Nous énnonçons des résultats préliminaires dont les démonstrations sont analogues au cas classique :

Proposition 1. *Soient $\langle E,F\rangle$ et $\langle G,H\rangle$ deux couples d'espaces vectoriels en dualité sur $\mathbb{K}$. Une application linéaire $T : E \to G$ est $(\sigma(E,F),\sigma(G,H))$-continue si, et seulement si, T est $(\tau_c(E,F),\tau_c(G,H))$-continue.*

Preuve. Analogue au cas classique où la topologie de Mackey est remplacée par $\tau_c(E,F)$ ([5], chapitre 21.4(6)). ∎

Proposition 2. *Soient E un espace localement K-convexe de dual topologique E', A une partie K-convexe de E et τ_1,τ_2 deux topologies sur E compatibles avec la dualité.*

(1) *Si la valuation de $\mathbb{K}$ est discrète, A est τ_1-fermée si, et seulement si, A est τ_2-fermée.*

(2) *Si la valuation de $\mathbb{K}$ est dense, $\bar{A}^{\tau_1} \subset \alpha\bar{A}^{\tau_2}$ pour tout $|\alpha| > 1$.*

Preuve. [14], théorème 4.20. ∎

Proposition 3. *Si (E,τ_E) et (F,τ_F) sont deux FK-espaces vérifiant $F \subset E$, alors l'injection canonique $i : (F,\tau_F) \to (E,\tau_E)$ est continue.*

Preuve. Analogue au cas classique ([15], corollaire 5.5.8). ∎

Définitiones 3. Soient (G,τ) un espace localement K-convexe et $\|\ \|$ une norme n.a sur G.

(1) Pour tout $x \in G$ et toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de G on note $x_n \to x([\|\ \|,\tau])$ si $x_n \to x(\tau)$ et $\sup_n \|x_n\| < \infty$.

(2) $(G,\|\ \|,\tau)$ est dit espace de Saks si $B = \{x \in G : \|x\| \le 1\}$ est τ-fermée et τ-bornée.

(3) On appelle topologie mixte sur un espace de Saks $(G,\|\ \|,\tau)$, notée $\bar{\gamma}$, la plus fine parmi les topologies localement K-convexes qui coïncident avec τ sur B.

(4) On dit qu'un espace de Saks $(G,\|\ \|,\tau)$ vérifie la condition (Σ_1) si : pour tous $x \in B$ et $U \in \vartheta_\tau(0)$, il existe $V \in \vartheta_\tau(0)$ tel que

$$V \cap B \subseteq ((x_0 + U) \cap B) - ((x_0 + U) \cap B)\,,$$

où $\vartheta_\tau(0)$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie τ.

Proposition 4. *Soit* $(G, \| \|, \tau)$ *un espace de Saks. On a :*
(a) $\tau \preceq \bar{\gamma} \preceq \tau_{\| \|}$, *où* $\tau_{\| \|}$ *est la topologie définie par* $\| \|$.
(b) *Pour tout* $x \in G$ *et toute suite* $(x_n)_n$ *d'éléments de* G *on a :*

$$x_n \to x(\bar{\gamma}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \to x([\| \ \|, \tau])\,.$$

(c) *Si* $(B, \tau|_B)$ *est complet, alors* $(G, \bar{\gamma})$ *est complet.*

Preuve. Analogue au cas classique ([4], section I). ∎

Théorème 1. *Soit* $(G, \| \|, \tau)$ *un espace de Saks satisfaisant la condition* (Σ_1). *Si* $(B, \tau|_B)$ *est un espace de Baire, alors* $(G, \bar{\gamma})$ *satisfait la propriété de Banach-Steinhauss suivante : pour tout espace localement K-convexe* F *et toute suite* $(T_n)_n$ *d'applications linéaires* $\bar{\gamma}$*-continues de* G *dans* F*, l'application linéaire* $T : G \to F$ *définie par* $Tx := \lim_n T_n x$ *est* $\bar{\gamma}$*-continue.*

Preuve. Semblable au cas classique ([4], proposition I.4.8). ∎

Corollaire 1. *Sous les mêmes hypothèses du théorème* 1*, le dual topologique* G' *de* $(G, \bar{\gamma})$ *muni de la topologie faible* $\sigma(G', G)$ *est séquentiellement complet.*

3. Théorème de structure des FK-espaces contenant c_0.

Proposition 5. *Les topologies* $\sigma(c_0, \phi)$ *et* $\sigma(c_0, m)$ *sont identiques.*

Preuve. Puisque $\phi \subset m$, la topologie $\sigma(c_0, \phi)$ est moins fine que la topologie $\sigma(c_0, m)$. Montrons que l'application identité $id : (c_0, \sigma(c_0, \phi)) \to (c_0, \sigma(c_0, m))$ est continue. Soit le voisinage U de 0 dans $(c_0, \sigma(c_0, m))$; $U = \{x \in c_0 : \sup_{i=1}^n |\langle x, y_i\rangle| < \epsilon\}$ où $y_i \in m$, $i = 1, 2, \ldots, n$, et $\epsilon > 0$. Comme $y_i \in m$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et $x \in c_0$, il existe $M > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\sup_{i=1}^n \|y_i\|_\infty < M$ et $|x_n| < \frac{\epsilon}{M}$ pour tout $n > N$.

Considérons les suites $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de ϕ définies par : $z_i = y_i^{[N]}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Soit $V = \{x \in c_0 : \sup_{i=1}^n |\langle x, z_i\rangle| < \epsilon\}$ un voisinage de 0 dans $(c_0, \sigma(c_0, \phi))$. Montrons que $V \subset U$. Soit $x \in V$ on a

$$|\langle x, y_i\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{i_k}\right| \leq \max\left(\left|\sum_{k=1}^{N} x_k y_{i_k}\right|, \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} x_k y_{i_k}\right|\right) \leq \max(S_1, S_2)$$

avec

$$S_1 = \left|\sum_{k=1}^{N} x_k y_{i_k}\right| = |\langle x, z_i\rangle| < \epsilon$$

et

$$S_2 = \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} x_k y_{i_k}\right| \leq \max_{k>N} |x_k||y_{i_k}| < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon\,.$$

Il s'ensuit que $|\langle x, y_i\rangle| < \epsilon$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, d'où $x \in U$. Donc U est un voisinage de 0 dans $(c_0, \sigma(c_0, \phi))$. ∎

Théorème 2. *Soit E un FK-espace contenant ϕ, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) $c_0 \subset E$;

(2) $(f(e^k))_k \in c_0$ *pour tout* $f \in E'$.

Preuve. (1) ⇒ (2) Soit $f \in E'$, montrons que $\lim_{k\to\infty} f(e^k) = 0$. Puisque $f(e^k) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^k f(e^j) = \langle e^k, (f(e^j))_j\rangle$ et $e^k \in c_0$, il suffit, d'après la proposition 5, de montrer $(f(e^j))_j \in m$ et $\lim_{k\to\infty} e^k = 0$ dans $(c_0, \sigma(c_0, \phi))$. En effet, l'injection canonique $i : (c_0, \|\ \|_\infty) \to (E, \tau)$ est continue (proposition 3) donc $f : (c_0, \|\ \|_\infty) \to \mathbb{K}$ est linéaire et continue pour tout $f \in E'$. Or $(c_0, \|\ \|_\infty)' \simeq m$ ([6], page 65), d'où $(f(e^j))j \in m$. Soit maintenant $x \in \phi$; $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$, on a $\lim_{k\to\infty}\langle e^k, x\rangle = 0$, ce qui implique que $\lim_{k\to\infty} e^k = 0$ $(\sigma(c_0, \phi))$. On en déduit que $(f(e^k))_k \in c_0$ car $\sigma(c_0, \phi) = \sigma(c_0, m)$.

(2) ⇒ (1) Montrons d'abord que l'injection $j : (\phi, \sigma(\phi, m)) \to (E, \sigma(E, E'))$ est continue. Il suffit de montrer que $j'(E') \subset m$ où j' est la transposée de j. Soit $f \in E'$, $\sup_k |j'(f)(e^k)| = \sup_k |f \circ j(e^k)| = \sup_k |f(e^k)| < \infty$. D'après la proposition 1, $j : (\phi, \tau_c(\phi, m)) \to (E, \tau_c(E, E'))$ est continue. τ étant métrisable et complète, donc $\tau = \tau_c(E, E')$ ([14], théorème 4.22). Par le théorème de complétion, on prolonge j de façon unique en une application uniformément continue $\hat{j} : \widehat{\phi} \to E$ telle que $\hat{j}|_\phi = j$. Comme $\bar{\phi}^{\|\ \|_\infty} = c_0$, $(\phi, \|\ \|_\infty)$ et $(c_0, \|\ \|_\infty)$ ont le même dual topologique m, et par suite $\tau_c(\phi, m) = \tau_c(c_0, m) = \|\ \|_\infty$ ([14], théorème 4.22). D'où le completé de $(\phi, \tau_c(\phi, m))$ est $(c_0, \|\ \|_\infty)$ et le prolongement $\hat{j} : (c_0, \|\ \|_\infty) \to E$ n'est autre que l'injection canonique . Il en résulte que $c_0 \subset E$. ∎

Définition 4. Soient E un FK-espace contenant c_0 et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $E \cap m$. On dit que $x_n \to x([\|\ \|_\infty, \tau])$ si $x_n \to x(\tau)$ et $\sup_n \|x_n\|_\infty < \infty$.

Lemme 1. *Soit* $(x^n)_n$ *une suite d'éléments de* c_0. *Si* $x^n \to x([\| \|_\infty, \tau])$ *alors* $x^n \to x(\sigma(c_0, m))$.

Preuve. $x^n \to x([\| \|_\infty, \tau]) \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} x^n = x(\tau)$ et $\sup_n \|x^n\|_\infty < \infty$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = x\ (\omega, \tau_p)\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i\ (\mathbb{K}, |\ |) \quad \forall\, i\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} x_i^n y_i = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \quad \forall\, k,\ \forall\, y_i \in \mathbb{K}\ \ (i = 1, 2, \dots, k)\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle x^n, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall\, y \in \phi\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = x\ (\sigma(c_0, m)) \quad \text{(proposition 5).} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposition 6. *Si E est un FK-espace contenant c_0, alors*

$$c_0 \subset S_E \subset W_E\,.$$

Preuve. On a, d'après la définition, $S_E \subset W_E$. Comme l'injection canonique $i : (c_0, \| \|_\infty) \to (E, \tau)$ est continue (proposition 3) et tout élément de c_0 est un A.K élément de c_0, $c_0 \subset S_E$. $\blacksquare$

Théorème 3. *Soit E un FK-espace contenant c_0. Pour tout élément x de $m \cap E$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $x \in W_E \cap m$;

(2) *il existe une suite $(X^n)_n$ d'éléments de ϕ telle que $X^n \to x(\tau)$ et $\|X^n\|_\infty \le \|x\|_\infty$ pour tout n ;*

(3) *il existe une suite $(X^n)_n$ d'éléments de c_0 telle que $X^n \to x([\| \|_\infty, \tau])$.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Si $x \in W_E \cap m$ alors $x^{[n]} \to x\,(\sigma(E, E'))$ et on a $x \in \overline{C(\{x^{[n]} : n \in \mathbb{N}\})}^{\sigma(E,E')}$, où C($A$) est l'envellope K-convexe de A. On rappelle que $C(A) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{K}, |\lambda_i| \le 1, x_i \in A, n \in \mathbb{N}^*\}$ ([6], p. 28).

Si La valuation de $\mathbb{K}$ est discrète : La proposition 2 implique que $x \in \overline{C(\{x^{[n]} : n \in \mathbb{N}\})}^{\tau}$; il existe donc une suite $(X^n)_n$ d'éléments de $C(\{x^{[n]} : n \in \mathbb{N}\})$ telle que $X^n \to x(\tau)$; avec $(X^n) \subset \phi$ et $\|X^n\|_\infty \le \|x\|_\infty$ pour tout n.

Si La valuation de $\mathbb{K}$ est dense : $x \in \alpha\overline{C(\{x^{[n]} : n \in \mathbb{N}\})}^{\tau}$ pour tout $|\alpha| > 1$ (proposition 2), ce qui entraîne que $\alpha^{-1}x \in \overline{C(\{x^{[n]} : n \in \mathbb{N}\})}^{\tau}$ pour tout $|\alpha| > 1$. On en déduit l'existence d'une suite $(X^n)_n$ d'éléments de $C(\{x^{[n]} : n \in \mathbb{N}\})$ telle que $X^n \to \alpha^{-1}x(\tau)$; avec $(\alpha X^n) \subset \phi$ et $\alpha X^n \to x(\tau)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Evidente.

(3) $\Rightarrow$ (1) Soit $(X^n)_n$ une suite d'éléments de c_0 telle que $X^n \to x([\| \|_\infty, \tau])$. Il est clair que x est borné, montrons que $x \in W_E$; $f(x) = \lim_n f(X^n)$ pour tout $f \in E'$; d'après la proposition 6, $f(X^n) = \sum_k X_k^n f(e^k)$, le lemme 1 et le théorème 2 impliquent que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(X^n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_k X_k^n f(e^k) = \lim_{n\to\infty} \langle X^n, (f(e^k))_k \rangle \\ &= \langle x, (f(e^k))_k \rangle = \sum_k x_k f(e^k)\,,\end{aligned}$$

donc $f(x) = \sum_k x_k f(e^k)$ pour tout $f \in E'$. ∎

Théorème 4. *Soit E un FK-espace contenant c_0. On a les propositions suivantes :*

(1) $(W_E \cap m, \| \|_\infty, \tau)$ *est un espace de Saks ;*

(2) $(W_E \cap m, \| \|_\infty, \tau)$ *vérifie la condition* (Σ_1).

Preuve. (1) $(W_E \cap m, \| \|_\infty, \tau)$ est un espace de Saks. Soit $B = \{x \in W_E \cap m : \|x\|_\infty \leq 1\}$, montrons que B est τ-bornée et τ-fermée. $i : (c_0, \| \|_\infty) \to (E, \tau)$ est continue car $c_0 \subset E$ (proposition 3), donc pour toute semi-norme n.a τ-continue p il existe $M > 0$ telle que $p(x) \leq M\|x\|_\infty$ pour tout $x \in c_0$. Soit $x \in W_E \cap m$, d'après le théorème 3, il existe $(x_n) \subset \phi$ telle que $x_n \to x(\tau)$ et $\|x_n\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ pour tout n. On a $p(x) = \lim_n p(x_n) \leq M \sup_n \|x_n\|_\infty \leq M\|x\|_\infty$, donc l'application identité $id : (W_E \cap m, \| \|_\infty) \to (W_E \cap m, \tau)$ est continue et par suite B est τ-bornée. Soit $(x^n)_n$ une suite d'éléments de B τ-convergente vers un élément x de $W_E \cap m$; $(x_k^n)_n$ converge vers x_k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $|x_k| \leq max(|x_k^n - x_k|, |x_k^n|) \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et n suffisamment grand. On en déduit que B est τ-fermée.

(2) Montrons que $(W_E \cap m, \| \|_\infty, \tau)$ vérifie la condition (Σ_1). Soit $\vartheta = \{U_j^\epsilon \ : j \in J, \epsilon > 0\}$ un système fondamental de voisinages de 0 pour $(W_E \cap m, \tau|_{W_E \cap m})$, où $U_j^\epsilon = \{x \in W_E \cap m : p_j(x) \leq \epsilon\}$, $(p_j)_j$ une famille de semi-normes n.a définissant la topologie τ, et J l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrons donc que

$$U_j^\epsilon \cap B \subset ((x + U_j^\epsilon) \cap B) - ((x + U_j^\epsilon) \cap B)$$

pour tout $x \in B$ et tout U_j^ϵ. Soit $x \in B$, x est un élément de $W_E \cap m$ on a donc pour tous $j \in J$ et $0 < \epsilon < 1$, il existe $v \in \phi$ tel que $p_j(v - x) < \epsilon$ et

$\|v\|_\infty \leq \|x\|_\infty \leq 1$ (théorème 3). Soient ensuite $y \in U_j^\epsilon \cap B$ et $z := v + y$; y s'écrit alors

$$y = (x + (z - x)) - (x + (v - x))$$

avec $v - x \in U_j^\epsilon$, $v \in B$, $z \in B$, $z - x \in U_j^\epsilon$ car on a $p_j(v - x) < \epsilon$, $\|v\|_\infty \leq \|x\|_\infty \leq 1$, $\|z\|_\infty = \|y + v\|_\infty \leq \max\big(\|y\|_\infty, \|v\|_\infty\big) \leq 1$, $p_j(z - x) = p_j(y + v - x) \leq \max\big(p_j(y), p_j(v - x)\big) \leq \epsilon$. ∎

Dans toute la suite, $\bar{\gamma}$ désigne la topologie mixte sur l'espace de Saks $(W_E \cap m, \| \ \|_\infty, \tau)$.

Théorème 5. *Pour tout FK-espace E contenant c_0, $(W_E \cap m, \bar{\gamma})$ est complet.*

Preuve. Il suffit de montrer que B est τ-complète (proposition 4 (c)) ; E est un FK-espace donc τ-complet et B est τ-fermée (théorème 4) donc τ-complète. ∎

Remarque 1. Soit E est un FK-espace contenant c_0.

(1) $\bar{c_0}^{\bar{\gamma}} = W_E \cap m$ (proposition 4 (b) et théorème 3 (3)) ;

(2) les duals topologiques de $(c_0, \bar{\gamma})$ et $(W_E \cap m, \bar{\gamma})$ coïncident (remarque 1 (1) et théorème 5).

Théorème 6. *Si E est un FK-espace contenant c_0, alors $m \simeq (W_E \cap m, \bar{\gamma})'$ (isomorphisme algébrique).*

Preuve. D'après la remarque 1 (2), il suffit de montrer que $m \simeq (c_0, \bar{\gamma})'$. Soit T l'application

$$\begin{array}{rccccl} T: & m & \longrightarrow & (c_0, \bar{\gamma})' & & \\ & y = (y_k) & \longmapsto & y: \ c_0 & \to & \mathbb{K} \\ & & & x & \mapsto & y(x) = \sum_k x_k y_k \,. \end{array}$$

Soit $y \in m$, l'application y est bien définie car $m^\beta = c_0$ ([1], remarque 3.5) y est aussi $\bar{\gamma}$-continue, soit $(x_\alpha)_\alpha$ une suite généralisée $\bar{\gamma}$-convergente de c_0, donc $(x_\alpha)_\alpha$ est $[\| \ \|_\infty, \tau]$-convergente, d'où $(x_\alpha)_\alpha$ est $\sigma(c_0, m)$-convergente (lemme 1) et comme $y \in m \simeq (c_0, \sigma(c_0, m))'$, y est $\sigma(c_0, m)$-continue et par suite $y(x_\alpha)$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Montrons que T est un isomorphisme ; T est linéaire : évident ; T est injective : soient $y, z \in m$ tels que $T(y) = T(z)$; pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $y_k = y(e^k) = z(e^k) = z_k$ donc $y = z$; T est surjective : soit $g \in (c_0, \bar{\gamma})'$, donc g

est un élément de $(c_0, \| \|_\infty)'$ (proposition 4 (a)), il existe donc $y \in m$ tel que $g(x) = \sum_k x_k y_k$ pour tout $x \in c_0$ car $(c_0, \| \|_\infty)' \simeq m$ ([6], page 65). ∎

Théorème 7. *Si E est un FK-espace contenant c_0, alors $(m, \sigma(m, W_E \cap m))$ est séquentiellement complet.*

Preuve. $(W_E \cap m, \| \|_\infty, \tau)$ est un espace de Saks satisfaisant la condition (Σ_1) et $(B, \tau|_B)$ est complet donc un espace de Baire, d'où $((W_E \cap m)', \sigma((W_E \cap m)', W_E \cap m))$ est séquentiellement complet avec $(W_E \cap m)' = (W_E \cap m, \bar{\gamma})'$ (corollaire 1), donc $(m, \sigma(m, W_E \cap m))$ est séquentiellement complet car $m \simeq (W_E \cap m, \bar{\gamma})'$ (théorème 6). ∎

4. Applications aux domaines des matrices infinies à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Soient $A = (a_{nk})_{n,k}$ une matrice infinie à coefficients dans $\mathbb{K}$, $y = (y_k)_k$ et $x = (x_k)_k$ deux éléments de ω ; $y = Ax$ si, et seulement si, $y_i = (Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ pour tout $i = 1, 2, \dots$. Les espaces $\omega_A = \{x \in \omega : Ax \text{ existe}\}$, $(c_0)_A = \{x \in \omega_A : Ax \in c_0\}$ et $c_A = \{x \in \omega_A : Ax \in c\}$ désignent respectivement le domaine de A, le domaine de la convergence nulle de A et le domaine de convergence de A. On définit l'application

$$\begin{aligned} \lim_A : c_A &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \lim_A(x) = \lim_n (Ax)_n . \end{aligned}$$

Dans toute la suite, A et B désignent deux matrices infinies à coefficients dans $\mathbb{K}$, et pour $A = (a_{nk})_{n,k}$ on note $a_k = \lim_A(e^k) = \lim_n a_{nk}$.

Théorème 8. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) $\|A\| = \sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty$ *et* a_k *existe pour tout* $k \in \mathbb{N}$;
(2) $c_0 \subset c_A$.

Preuve. [7], page 127. ∎

Théorème 9. *On a les propositions suivantes :*
(1) c_A *est un FK-espace ;*
(2) $f \in c'_A$ *si, et seulement si,* $f(x) = \mu \lim_A x + \sum_i t_i \big((Ax)_i - \lim_A x\big) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ *avec* $\mu \in \mathbb{K}$, $t = (t_i)_i \in m$, $\alpha = (\alpha_i)_i \in \omega_A^\beta$ *et* $x \in c_A$.

Preuve. [1], proposition III.1.4 et corollaire III.2.2. ∎

Proposition 7. *Si* $c_0 \subset c_A$ *alors on a :*
(1) $(a_k)_k \in c_0$;
(2) $(a_{nk})_k \in c_0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. (1) On a $\lim_A \in c'_A$ (théorème 9), donc $(\lim_A(e^k))_k = (a_k)_k \in c_0$ (théorème 2).

(2) Soient $n \geq 1$ et f l'application linéaire de c_A dans $\mathbb{K}$ définie par $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$; d'après le théorème de Banach-Steinhauss f est continue et par suite $(f(e^k))_k = (a_{nk})_k \in c_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (théorème 2). ∎

Dans toute la suite, nous supposons $c_0 \subset c_A$ et nous notons par W_A l'ensemble des S.A.K éléments de c_A.

Théorème 10. *Pour tout élément* x *de* m *on a :* $x \in W_A$ *si, et seulement si,* $\lim_A x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que la condition $c_0 \subset c_A$ et le fait que $m^\beta = c_0$ ([1], remarque 3.5) entraînent, d'après la proposition 7 (2), que $m \subset \omega_A$ et par suite $\omega_A^\beta \subset m^\beta = c_0$. Supposons que $x \in W_A$, puisque $\lim_A \in c'_A$ (théorème 9) $\lim_A(x^{[m]}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k$ et $\lim_A x = \lim_{m\to\infty} \lim_A(x^{[m]}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$. Soient $x \in c_A \cap m$ et $f \in c'_A$, d'après la définition de W_A, il suffit de montrer que $f(x^{[m]})$ converge vers $f(x)$; f s'écrit sous la forme $f(x) = \mu \lim_A x + \sum_i t_i\big((Ax)_i - \lim_A x\big) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ avec $\mu \in \mathbb{K}$, $t \in m$, $\alpha \in \omega_A^\beta$ (théorème 9). Donc

$$\begin{aligned}
\big|f(x^{[m]}) - f(x)\big| = \Bigg|&\mu \lim_A(x^{[m]}) + \sum_i t_i\Big((Ax^{[m]})_i - \lim_A(x^{[m]})\Big) \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (x^{[m]})_i - \mu \lim_A x \\
&+ \sum_i t_i\Big((Ax)_i - \lim_A x\Big) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\Bigg| \\
= \Bigg|&\mu\Big(\lim_A(x^{[m]}) - \lim_A x\Big) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\big[(x^{[m]})_i - x_i\big] \\
&+ \sum_i t_i\Big[(Ax^{[m]})_i - \lim_A(x^{[m]}) - (Ax)_i + \lim_A x\Big]\Bigg|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \max\left(\left|\mu\Big(\lim_A(x^{[m]}) - \lim_A x\Big)\right|, \left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\Big[(x^{[m]})_i - x_i\Big]\right|,\right.\\
&\qquad \left.\left|\sum_i t_i\Big[(Ax^{[m]})_i - \lim_A(x^{[m]}) - (Ax)_i + \lim_A x\Big]\right|\right)\\
&\le \max\big(S_{1m}, S_{2m}, S_{3m}\big),
\end{aligned}
$$

où $S_{1m} = \big|\mu\big(\lim_A(x^{[m]}) - \lim_A x\big)\big|$, $S_{2m} = \big|\sum_i t_i\big[(Ax^{[m]})_i - \lim_A(x^{[m]}) - (Ax)_i + \lim_A x\big]\big|$ et $S_{3m} = \big|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\big[(x^{[m]})_i - x_i\big]\big|$. On a

$$
S_{1m} = \left|\mu\left(\sum_{i=1}^{m} a_k x_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right)\right| = \left|\mu\left(\sum_{k>m} a_k x_k\right)\right| \le \epsilon
$$

pour m assez grand, car $x \in m$ et $(a_k)_k \in c_0 = m^\beta$ (proposition 7).

$$
\begin{aligned}
S_{2m} &= \left|\sum_i t_i\Big[(Ax^{[m]})_i - \lim_A(x^{[m]}) - (Ax)_i + \lim_A x\Big]\right|\\
&= \left|\Big\langle Ax^{[m]} - \lim_A(x^{[m]}) - Ax + \lim_A x, t\Big\rangle\right|.
\end{aligned}
$$

La suite $\big((Ax^{[m]})_i - \lim_A(x^{[m]}) - (Ax)_i + \lim_A x\big)_i$ appartient à c_0, il suffit de considérer t appartenant à ϕ (proposition 5). Soit alors $t \in \phi$, $t = (t_i)_{i=1}^n$ on a

$$
\begin{aligned}
S_{2m} &= \left|\Big\langle (Ax^{[m]}) - \lim_A(x^{[m]}) - (Ax) + \lim_A x, t\Big\rangle\right|\\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} t_i\Big[(Ax^{[m]})_i - \lim_A(x^{[m]}) - (Ax)_i + \lim_A x\Big]\right|\\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} t_i\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_k - \sum_{k=1}^{m} a_k x_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right]\right|\\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} t_i\left[\sum_{k>m}(a_{ik} - a_k)x_k\right]\right|.
\end{aligned}
$$

Donc pour m assez grand, $S_{2m} \le \epsilon$ car $x \in m$ et $(a_{ik} - a_k)_k \in c_0 = m^\beta$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ (proposition 7).

$$
S_{3m} = \left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\big[(x^{[m]})_i - x_i\big]\right| = \left|\sum_{i>m}\alpha_i x_i\right|.
$$

Donc pour m assez grand, $S_{3m} \leq \epsilon$ puisque $x \in m$ et $\alpha \in c_0 = m^\beta$ (remarque ci-dessus). D'où $|f(x^{[m]}) - f(x)| \leq \epsilon$ pour m suffisamment grand. ∎

Théorème 11. (Théorème de type Mazur-Orlicz) *Si A et B vérifient $W_A \cap m \subseteq c_B$, alors on a :*
(1) $\lim_B$ *est* $\sigma(m \cap W_A, m)$*-continue sur* $m \cap W_A$ *;*
(2) $\lim_B x = \sum_{k=1}^\infty b_k x_k$ *pour tour* $x \in m \cap W_A$ *;*
(3) $W_A \cap m \subseteq W_B$.

Preuve. (1) Notons par $\rho^i = (b_{ij})_{j=1}^\infty$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de B. La proposition 6 et les hypothèses du théorème impliquent que $c_0 \subset c_B$ et donc $\rho^i \in c_0 \subset m$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$ (proposition 7). Montrons que la suite $(\rho^i)_i$ est $\sigma(m, W_A \cap m)$ de Cauchy soit $y \in W_A \cap m \subset c_B$, donc la suite By est convergente. Comme $By = \big(\sum_{j=1}^\infty b_{ij} y_j\big)_i = \big(\langle \rho^i, y\rangle\big)_i$, la suite $\big(\langle \rho^i, y\rangle\big)_i$ est convergente, elle est donc de Cauchy, ce qui implique que la suite $(\rho^i)_i$ est $\sigma(m, m \cap W_A)$ de Cauchy, il existe donc un élément ρ de m tel que $\lim_{i\to\infty} \rho^i = \rho$ pour la topologie $\sigma(m, m \cap W_A)$ (théorème 7). Soit $x \in W_A \cap m$, on a : $\lim_B x = \lim_{i\to\infty} (Bx)_i = \lim_{i\to\infty} \langle \rho^i, x\rangle = \langle \rho, x\rangle = \sum_{k=1}^\infty \rho_k x_k$, d'où le résultat.

(2) Soit b_k la limite de la $k^{\text{ème}}$ colonne de B. On a $b_k = \lim_B e^k = \langle \rho, e^k\rangle = \sum_{i=1}^\infty \rho_i e_i^k = \rho_k$, pour tout k ; d'où $\lim_B x = \sum_{k=1}^\infty \rho_k x_k = \sum_{k=1}^\infty b_k x_k$.

(3) En appliquant (2) et le théorème 10, on a $W_A \cap m \subset W_B$. ∎

Théorème 12. (Théorème de la consistance bornée) *Si A et B vérifient $W_A \cap m \subseteq c_B$ et $\lim_A(x) = \lim_B(x)$ pour tout élément x de ϕ, alors $\lim_A(x) = \lim_B(x)$ pour tout x appartenant à $W_A \cap m$.*

Preuve. L'hypothèse $\lim_A(x) = \lim_B(x)$ pour tout x appartenant à ϕ entraîne que $a_k = b_k$ quelque soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in W_A \cap m$, d'après le théorème 11 (3), $x \in W_B$ et par suite $\lim_A(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k x_k = \sum_{k=1}^\infty b_k x_k = \lim_B(x)$ (théorème 10). D'où le résultat. ∎

Théorème 13. *Si A et B vérifient $A(c_0) \subset c_0$ et $B(c_0) \subset c_0$, alors on a $(c_0)_A \cap m \subset c_B$ si, et seulement si, $(c_0)_A \cap m \subset (c_0)_B$.*

Preuve. On a $\lim_A e^k = a_k = \lim_B e^k = b_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car $A(c_0) \subset c_0$ et $B(c_0) \subset c_0$ donc $(c_0)_A \cap m = W_A \cap m$ et $(c_0)_B \cap m = W_B \cap m$ (théorème 10), et d'après le théorème 11 (3), on a $(c_0)_A \cap m = W_A \cap m \subseteq W_B \cap m = (c_0)_B \cap m \subseteq (c_0)_B$. ∎

Définition 5. On dit qu'une matrice A est conulle si, $e \in W_A$.

Théorème 14. *Si A est conulle et $c_A \cap m \subseteq c_B$ alors B est conulle.*

Preuve. On a $e \in W_A \cap m \subseteq c_A \cap m \subseteq c_B$, et le théorème 11 (3) donne le résultat. ∎

Références

[1] Babahmed, M., "Dualité dans les FK(X)-espaces. Applications Matrices et Théorème de type Mazur-Orlicz en Analyse n.a", Thèse Univ. Faculté des sciences Dhar El Mahraz Fès, 1995.

[2] Bennett, G., Kalton, N.J., FK-spaces containing c_0, *Duke Math. J.* **39**, (1972), 561 – 582.

[3] Boos, J., Leiger, T., FK(X)-spaces over a Banach space containing the null sequences, Seminarberichte des Fachbereichs Mathematik und Informatik der Fernuniversität Hagen 30 (1988), 47 – 68.

[4] Cooper, J.B., "Saks Spaces and Applications to Functional Analysis" (second edition), North-Holland, Amsterdam, 1987.

[5] Köthe, G., "Topological Vector Spaces I", Springer-Verlag, Heidelberg, 1969.

[6] Monna, A.F., "Analyse Non-archimédienne", Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[7] Monna, A.F., Sur le théorème de Banach-Steinhaus, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 66* (= *Indag. Math.* **25**) (1963), 121 – 131.

[8] Rangachari, M.S., Srinivasan, V.K., Matrix transformations in non-archimedean fields, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 67* (= *Indag. Math.* **26**) (1964), 422 – 429.

[9] Ruckle, W.H., The bounded consistency theorem, *Amer. Math. Monthly* **86** (7) (1979), 566 – 571.

[10] Schikhof, W.H., Locally convex spaces over non-spherically complete valued fields I-II, *Bull. Soc. Math. Belgique* (Ser. B) **XXXVIII** (1986), 187 – 224.

[11] Snyder, A.K., Wilansky, A., The Mazur-Orlicz bounded consistency theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **80** (1980), 374 – 376.

[12] Somasundaram, D., Matrix transformations over non-archimedean fields, *Indian J. Pure Appli. Math.* **16** (6) (1985), 643 – 648.

[13] van Rooij, A.C.M., "Non-archimedean Functional Analysis", Marcel Dekker, New York, 1978.

[14] van Tiel, J., Espaces localement K-convexes (I-III), *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 68* (= *Indag. Math.* **27**) (1965), 249 – 289.

[15] WILANSKY, A., "Modern Methods in Topological Vector Spaces", Mc Graw-Hill, New York, 1978.

[16] ZELLER, K., Allegemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren, *Math. Z.* **53** (1951), 463–487.