EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **18**, Núm. 1, 13 – 21 (2003)

Unicité des Solutions Stationnaires des Modèles Dérive-Diffusion avec Génération d'Avalanche

Abdellatif Ellabib, Abdeljalil Nachaoui

*CNRS UMR*6629 *Université de Nantes,* 2, *rue de la Houssinière,*
BP 92208, F-44322 *Nantes, France*
e-mail: nachaoui@math.univ-nantes.fr

(Presented by W. Okrasinski)

AMS *Subject Class.* (2000): 35J65, 35M10, 35Q99 *Received February* 6, 2002

1. Introduction et hypothèse

Pour les équations de semi-conducteur à l'état stationnaire, les paramètres physiques comme les lois de mobilités, le terme de génération d'avalanche et le dopage sont des sources potentielles pour l'existence de solutions multiples, voir par exemple [6]. Ce travail est une continuation de notre résultat d'existence de solutions du système [2]

$$
\begin{cases}
-\nabla\cdot(\varepsilon\nabla u) + q\, n_i \left(e^{\frac{u}{U_T}}\eta - e^{-\frac{u}{U_T}}\rho \right) = q\, N \quad \text{dans } \Omega, \\
-\nabla\cdot\left(\mu_n U_T e^{\frac{u}{U_T}} \nabla\eta \right) = -Q(u,\eta,\rho)(\eta\rho - 1) + g(u,\eta,\rho) \quad \text{dans } \Omega, \\
-\nabla\cdot\left(\mu_p U_T e^{-\frac{u}{U_T}} \nabla\rho \right) = -Q(u,\eta,\rho)(\eta\rho - 1) + g(u,\eta,\rho) \quad \text{dans } \Omega, \\
u = u_d,\ \eta = \eta_d,\ \rho = \rho_d \text{ sur } \Gamma_D,\ \nu\cdot\nabla u = \nu\cdot\nabla\rho = \nu\cdot\nabla\eta = 0 \text{ sur } \Gamma_N
\end{cases} \tag{1}
$$

où $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ et $\mathrm{mes}(\Gamma_D) > 0$. Voir [6, 5, 3] pour la signification physique des paramètres.

Nous apportons, ici, une contribution à l'analyse de l'unicité de solutions du système (1) dans le cas où certains changements de conditions aux limites se font à angles plats et en tenant compte du terme d'avalanche noté g. Sous certaines conditions, nous démontrons que le système (1) admet une solution unique. Dans toute la suite, nous supposons vérifiées les conditions suivantes.

- (H_1) : il existe $\underline{\varepsilon} > 0$ tel que $0 < \underline{\varepsilon} \le \varepsilon(x)\ \ \forall x \in \Omega$. Les constantes q, n_i et U_T sont positives,

– (H_2) : il existe $\underline{\mu}, \overline{\mu} > 0$ tels que $0 < \underline{\mu} \leq \mu_n(x), \mu_p(x) \leq \overline{\mu} \;\; \forall\, x \in \Omega$,
– (H_3) : il existe $L_Q, C_Q > 0$ tel que pour tout $(r,s,t), (r',s',t')$ dans un borné de $\mathbb{R}^3$ on a
$$|Q(r,s,t) - Q(r',s',t')| \leq L_Q\,(|r-r'| + |t-t'| + |s-s'|) \text{ et}$$
$$|Q(r,s,t)| \leq C_Q,$$
– (H_4) : g est de la forme
$$g(u,\eta,\rho) = \alpha(\nabla u)\mu_n U_T e^{\frac{u}{U_T}}|\nabla \eta| + \beta(\nabla u)\mu_p U_T e^{-\frac{u}{U_T}}|\nabla \rho|,$$
où α et β sont deux fonctions positives vérifiant
  – il existe C_α, $C_\beta > 0$ tels que pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^2$, $|\alpha(\zeta)| \leq C_\alpha$, $|\beta(\zeta)| \leq C_\beta$
  – il existe L_α, $L_\beta > 0$ tels que pour tout ζ_1, $\zeta_2 \in \mathbb{R}^2$, $|\alpha(\zeta_1) - \alpha(\zeta_2)| \leq L_\alpha|\zeta_1 - \zeta_2|$, $|\beta(\zeta_1) - \beta(\zeta_2)| \leq L_\beta|\zeta_1 - \zeta_2|$.

Considérons Ω un ouvert polygonal borné connexe de $\mathbb{R}^2$. Nous adoptons les notations usuelles suivantes : $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ représentent respectivement la norme de $L^p(\Omega)$, $p \geq 2$ et de $L^\infty(\Omega)$. Nous posons $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denote le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. Rappelons deux inégalités utiles par la suite [4].

$$\forall\, v \in W_D^{1,p}(\Omega),\ 1 < p < \infty \;\; \|v\|_p \leq b_{(p)}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_p \tag{2}$$
$$\forall\, v \in H_D^1(\Omega),\ \|v\|_{\frac{2p}{p-2}} \leq c_{(p)}|\Omega|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|\nabla v\| \text{ où } p > 2 \tag{3}$$

où $W_D^{1,p}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega),\;\; v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ et $H_D^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega),\;\; v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$. Notons que le potentiel électrostatique u vérifie, voir [2], l'estimation $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ où $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont deux constantes réelles.

2. Étude de l'unicité

Avant de présenter notre résultat d'unicité, nous commençons par exposer quelques résultats préliminaires.

Lemme 1. *Supposons satisfaites les hypothèses* (H_1), (H_2), (H_3) *et* (H_4). *Si* (u_1,η_1,ρ_1) *et* (u_2,η_2,ρ_2) *sont deux solutions faibles du système* (1) *alors*

$$\underline{\varepsilon}\|\nabla(u_2 - u_1)\| \leq q\, n_i b_{(2)}^2|\Omega|\{e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}}\|\nabla(\rho_2 - \rho_1)\| + e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}\|\nabla(\eta_2 - \eta_1)\|\} \tag{4}$$
$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)}|\Omega|\{e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}}\|\nabla(\rho_2 - \rho_1)\| + e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}\|\nabla(\eta_2 - \eta_1)\|\} \tag{5}$$

où $b_{(2)}$ *et* $c_{(3)}$ *sont les constantes données dans* (2) *et* (3).

Preuve. Soient (u_1, η_1, ρ_1) et (u_2, η_2, ρ_2) deux solutions faibles du système (1), nous avons alors pour tout $\psi \in H^1_D(\Omega)$ $\quad\langle \varepsilon \nabla u_j, \nabla\psi\rangle = \langle q\, n_i e^{-\frac{u_j}{U_T}}\rho_j - q\, n_i e^{\frac{u_j}{U_T}}\eta_j + q\, N, \psi\rangle \quad j = 1, 2$.
Nous en déduisons que

$$\langle \varepsilon \nabla (u_1 - u_2), \nabla\psi\rangle = \langle q\, n_i \left(e^{-\frac{u_1}{U_T}}\rho_1 - e^{-\frac{u_2}{U_T}}\rho_2 - e^{\frac{u_1}{U_T}}\eta_1 + e^{\frac{u_2}{U_T}}\eta_2 \right), \psi\rangle \tag{6}$$

Posons $\psi = (u_1 - u_2)/U_T$, en utilisant la convexité de la fonction e^u et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\|\sqrt{\varepsilon}\, \nabla(u_2 - u_1)\|^2 \leq q\, n_i \left\{ e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \|\eta_1 - \eta_2\| + e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \|\rho_1 - \rho_2\| \right\} \|u_1 - u_2\|.$$

L'hypothèse (H_1) et l'inégalité (2) entraînent alors l'inégalité (4). Pour montrer l'inégalité (5), nous montrons d'abord le résultat suivant.

Lemme 2. *Soient $\varphi \in H^1_D(\Omega)$ et $a_0 \in \mathbb{R}$ telle que $(\varphi - a_0)^+ \in H^1_D(\Omega)$. Si $h \in L^2(\Omega)$ est telle que*

$$\forall a \geq a_0 \qquad \|\nabla(\varphi - a)^+\|^2 \leq \int_\Omega h(x)(\varphi - a)^+(x)\, dx, \tag{7}$$

alors

$$\|\varphi\|_\infty \leq a_0 + 2^{\frac{4}{3}} c^2_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|h\| \tag{8}$$

où $c_{(3)}$ est la constante donnée dans (3).

Preuve. Soient $\varphi \in H^1_D(\Omega)$, $a_0 \in \mathbb{R}$ telle que $(\varphi - a_0)^+ \in H^1_D(\Omega)$, soit $h \in L^2(\Omega)$ vérifiant (7). Pour $a \geq a_0$, posons $\Omega_a = \{x \in \Omega;\ \varphi(x) > a\}$, nous avons alors

$$\int_\Omega h(x)(\varphi - a)^+(x)\, dx \leq \|h\| \|(\varphi - a)^+\|_6 |\Omega_a|^{\frac{1}{3}}.$$

De l'inégalité (3) avec $v = (\varphi - a)^+$ et $p = 3$, l'inégalité (7), et la dernière inégalité, nous obtenons

$$\|(\varphi - a)^+\|_6 \leq c^2_{(3)} |\Omega_a|^{\frac{2}{3}} \|h\|. \tag{9}$$

D'autre part, pour $\hat{a} > a$, nous avons $\|(\varphi - a)^+\|_6^6 \geq \int_{\Omega_{\hat{a}}} (\varphi(x) - a)^6\, dx \geq (\hat{a} - a)^6 |\Omega_{\hat{a}}|$. Alors en utilisant (9), nous obtenons $|\Omega_{\hat{a}}| \leq c^{12}_{(3)} \|h\|^6 (\hat{a} - a)^{-6} |\Omega_a|^4$. Considérons la fonction f définie, pour tout $a \geq a_0$, par $f(a) = |\Omega_a|$. D'après la dernière inégalité, f vérifie l'hypothèse du Lemme 2.9 [8], donc $f(s_0) = 0$ avec $s_0 = a_0 + 2^{\frac{4}{3}} c^2_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|h\|$, d'où l'inégalité (8). ∎

Nous pouvons maintenant montrer l'inégalité (5). Soit $c \geq 0$, prenons $\psi = ((u_1 - u_2 - c)/U_T)^+ \in H^1_D(\Omega)$ dans (6). La convexité de la fonction exponentielle, comme dans la démonstration de l'inégalité (4), entraîne

$$\langle \varepsilon U_T \nabla\psi, \nabla\psi\rangle \leq \langle q\, n_i \left(e^{-\frac{u_1}{U_T}}(\rho_1 - \rho_2) - e^{\frac{u_1}{U_T}}(\eta_1 - \eta_2)\right), \psi\rangle. \tag{10}$$

Il est clair, en prenant dans (10) $\varphi = (u_1 - u_2)/U_T$, $a_0 = 0$ et

$$h = \frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}\, U_T}\left[e^{-\frac{u_1}{U_T}}(\rho_1 - \rho_2) - e^{\frac{u_1}{U_T}}(\eta_1 - \eta_2)\right],$$

que

$$\|\nabla(\varphi - a)^+\|^2 \leq \int_\Omega h(x)\,(\varphi - a)^+(x)\,dx$$

avec $a = c/U_T$. Nous obtenons alors, du Lemme 2,

$$\|\varphi\|_\infty \leq \frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}\, U_T} 2^{\frac{4}{3}} c^2_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|e^{-\frac{u_1}{U_T}}(\rho_1 - \rho_2) - e^{\frac{u_1}{U_T}}(\eta_1 - \eta_2)\|.$$

L'inégalité triangulaire et l'application de l'inégalité (2) avec $v = \rho_1 - \rho_2$ et $v = \eta_1 - \eta_2$ entraînent (5), ce qui achève la démonstration du Lemme 1. ∎

Lemme 3. *Sous les hypothèses du Lemme* 1, *si* (u_1, η_1, ρ_1) *et* (u_2, η_2, ρ_2) *sont deux solutions faibles du système* (1) *alors*

$$\begin{aligned}
\underline{\mu} e^{\frac{\underline{u}}{U_T}} U_T \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\| \leq \Big\{ & b^2_{(2)} |\Omega| L_Q \|\eta_1\rho_1 - 1\|_\infty \\
& + \overline{\mu}\, U_T c_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{6}} \left(L_\alpha e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \|\nabla\eta_1\|_3 + L_\beta e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \|\nabla\rho_1\|_3 \right) \Big\} \\
\|\nabla(u_1 - u_2)\| + \Big\{ & \overline{\mu}\, e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c^2_{(3)} b_{(2)} |\Omega| \left[\left(1 + C_\alpha b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}}\right) e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \right. \\
& \left. \times \|\nabla\eta_1\| + C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla\rho_1\| \right] + \overline{\mu} U_T C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\
& + b^2_{(2)} |\Omega| L_Q \|\eta_1\rho_1 - 1\|_\infty + b^2_{(2)} |\Omega| C_Q \|\rho_1\|_\infty \Big\} \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\| \\
+ \Big\{ & \overline{\mu} e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c^2_{(3)} b_{(2)} |\Omega| \left[\left(1 + C_\alpha b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}}\right) e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \right. \\
& \left. \times \|\nabla\eta_1\| + C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla\rho_1\| \right] \\
& + \overline{\mu} U_T C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} + b^2_{(2)} |\Omega| L_Q \|\eta_1\rho_1 - 1\|_\infty \\
& + b^2_{(2)} |\Omega| C_Q \|\eta_2\|_\infty \Big\} \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\|
\end{aligned}$$

où $b_{(2)}$, $c_{(3)}$ *sont les constantes définies respectivement dans* (2) *et* (3).

Preuve. Soit $\varphi \in H^1_D(\Omega)$, de la deuxième équation du système (1), nous obtenons, pour $i = 1, 2$, $\langle \mu_n U_T e^{\frac{u_i}{U_T}} \nabla \eta_i, \nabla \varphi\rangle + \langle Q(u_i, \eta_i, \rho_i)(\eta_i\rho_i - 1), \varphi\rangle = \langle g_i, \varphi\rangle$ avec $g_i = g(u_i, \eta_i, \rho_i)$, nous en déduisons

$$
\begin{aligned}
&\langle \mu_n U_T (e^{\frac{u_1}{U_T}} \nabla \eta_1 - e^{\frac{u_2}{U_T}} \nabla \eta_2), \nabla \varphi\rangle \\
&\quad = \langle Q(u_2, \eta_2, \rho_2)(\eta_2\rho_2 - 1) - Q(u_1, \eta_1, \rho_1)(\eta_1\rho_1 - 1), \varphi\rangle \\
&\qquad + \langle g_1 - g_2, \varphi\rangle.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Posons $\varphi = \eta_1 - \eta_2$ dans (11), nous obtenons

$$
\langle \mu_n U_T e^{\frac{u_2}{U_T}} \nabla(\eta_1 - \eta_2), \nabla(\eta_1 - \eta_2)\rangle = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \tag{12}
$$

où

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left\langle \mu_n U_T \left(e^{\frac{u_2}{U_T}} - e^{\frac{u_1}{U_T}} \right) \nabla \eta_1, \nabla(\eta_1 - \eta_2) \right\rangle, \\
I_2 &= \langle [Q(u_2, \eta_2, \rho_2) - Q(u_1, \eta_1, \rho_1)] (\eta_1\rho_1 - 1), \eta_1 - \eta_2\rangle, \\
I_3 &= \langle Q(u_2, \eta_2, \rho_2)(\eta_2\rho_2 - \eta_1\rho_1), \eta_1 - \eta_2\rangle \text{ et} \\
I_4 &= \langle g_1 - g_2, \eta_1 - \eta_2\rangle.
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que $I_1 \leq \overline{\mu} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \|u_2 - u_1\|_\infty \|\nabla \eta_1\| \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|$. Alors, d'après (5), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
I_1 \leq\ & \overline{\mu} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c^2_{(3)} b_{(2)} |\Omega| \\
& \times \left\{ e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \|\nabla(\eta_2 - \eta_1)\| + e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \|\nabla(\rho_2 - \rho_1)\| \right\} \|\nabla \eta_1\| \, \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|.
\end{aligned} \tag{13}
$$

D'après l'hypothèse (H_3), $I_2 \leq L_Q \langle (|u_1 - u_2| + |\eta_1 - \eta_2| + |\rho_1 - \rho_2|)(\eta_1\rho_1 - 1), \eta_1 - \eta_2\rangle$. En utilisant (2), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
I_2 \leq\ & b^2_{(2)} |\Omega| L_Q \|\eta_1\rho_1 - 1\|_\infty \\
& \times (\|\nabla(u_1 - u_2)\| + \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\| + \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\|) \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|.
\end{aligned} \tag{14}
$$

L'hypothèse (H_3) entraîne $I_3 \leq C_Q \langle (\eta_2 - \eta_1)\rho_1 + \eta_2(\rho_2 - \rho_1), \eta_1 - \eta_2\rangle$. Nous déduisons de (2) que

$$
\begin{aligned}
I_3 \leq\ & b^2_{(2)} |\Omega| C_Q \\
& \times \{ \|\rho_1\|_\infty \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\| + \|\eta_2\|_\infty \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\| \} \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Nous avons aussi $\langle g_1 - g_2, \eta_1 - \eta_2 \rangle = I_5 + I_6$ avec

$$I_5 = \langle \mu_n U_T \left(\alpha(\nabla u_1) e^{\frac{u_1}{U_T}} |\nabla \eta_1| - \alpha(\nabla u_2) e^{\frac{u_2}{U_T}} |\nabla \eta_2| \right), \eta_1 - \eta_2 \rangle$$
$$I_6 = \langle \mu_p U_T \left(\beta(\nabla u_1) e^{-\frac{u_1}{U_T}} |\nabla \rho_1| - \beta(\nabla u_2) e^{-\frac{u_2}{U_T}} |\nabla \rho_2| \right), \eta_1 - \eta_2 \rangle.$$

Le terme I_5 se décompose de la façon suivante $I_5 = I_{51} + I_{52} + I_{53}$ où

$$I_{51} = \langle \mu_n U_T \left(\alpha(\nabla u_1) - \alpha(\nabla u_2) \right) e^{\frac{u_1}{U_T}} |\nabla \eta_1|, \eta_1 - \eta_2 \rangle,$$
$$I_{52} = \langle \mu_n U_T \alpha(\nabla u_2) \left(e^{\frac{u_1}{U_T}} - e^{\frac{u_2}{U_T}} \right) |\nabla \eta_1|, \eta_1 - \eta_2 \rangle,$$
$$I_{53} = \langle \mu_n U_T \alpha(\nabla u_2) e^{\frac{u_2}{U_T}} \left(|\nabla \eta_1| - |\nabla \eta_2| \right), \eta_1 - \eta_2 \rangle.$$

En utilisant (H_2), (H_4), l'inégalité de Hölder et l'inégalité (3) avec $p = 3$, nous obtenons

$$I_{51} \leq \overline{\mu} U_T L_\alpha e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} c_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{6}} \|\nabla(u_1 - u_2)\| \, \|\nabla \eta_1\|_3 \, \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|. \tag{16}$$

Les hypothèses (H_2) et (H_4) entraînent

$$I_{52} \leq \overline{\mu} C_\alpha e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \|u_1 - u_2\|_\infty \, \|\nabla \eta_1\| \, \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

En utilisant les inégalités (2) et (5), nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{52} \leq \overline{\mu} C_\alpha e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)}^2 |\Omega|^{\frac{3}{2}} & \\ \cdot \left\{ e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \|\nabla(\rho_2 - \rho_1)\| + e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \|\nabla(\eta_2 - \eta_1)\| \right\} \|\nabla \eta_1\| \, \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|. \end{aligned} \tag{17}$$

Les hypothèses (H_2), (H_4) et l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à I_{53} impliquent

$$\begin{aligned} I_{53} &\leq \overline{\mu} U_T C_\alpha e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \| \, |\nabla \eta_1| - |\nabla \eta_2| \, \| \, \|\eta_1 - \eta_2\| \\ &\leq \overline{\mu} U_T C_\alpha e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|^2. \end{aligned} \tag{18}$$

La combinaison de (16), (17) et (18) nous donne

$$
\begin{aligned}
I_5 \leq\ & \overline{\mu} U_T L_\alpha e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} c_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{6}} \|\nabla(u_1 - u_2)\| \, \|\nabla \eta_1\|_3 \, \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\| \\
& + \overline{\mu} U_T C_\alpha e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|^2 + \overline{\mu} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}} b_{(2)}^2 c_{(3)}^2 C_\alpha 2^{\frac{4}{3}} |\Omega|^{\frac{3}{2}} \\
& \cdot \left\{ e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \|\nabla(\rho_2 - \rho_1)\| + e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \|\nabla(\eta_2 - \eta_1)\| \right\} \|\nabla \eta_1\| \, \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|.
\end{aligned} \tag{19}
$$

D'une façon similaire, nous obtenons une estimation de I_6. Finalement, en introduisant les estimations (13), (14), (15), (19) et celle de I_6 dans (12), en minorant le terme de gauche de l'inégalité obtenue par

$$
\underline{\mu} e^{\frac{\underline{u}}{U_T}} U_T \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|^2
$$

et en simplifiant le résultat par $\|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|$ alors l'inégalité du Lemme 3 s'obtient en regroupant les termes en $\|\nabla(u_1 - u_2)\|$, $\|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\|$ et $\|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\|$. ∎

Par un argument similaire appliqué à la deuxième équation de continuité, nous obtenons aussi le résultat suivant.

LEMME 4. *Sous les hypothèses du Lemme* 1, *si* (u_1, η_1, ρ_1) *et* (u_2, η_2, ρ_2) *sont deux solutions faibles du système* (1) *alors*

$$
\begin{aligned}
& \underline{\mu} e^{-\frac{\overline{u}}{U_T}} U_T \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\| \leq \Big\{ b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty + \overline{\mu} U_T c_{(3)} |\Omega|^{\frac{1}{6}} \\
& \cdot (L_\alpha e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \|\nabla \eta_1\|_3 + L_\beta e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \|\nabla \rho_1\|_3) \Big\} \, \|\nabla(u_1 - u_2)\| \\
& + \Big\{ \overline{\mu} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} \frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)} |\Omega| \Big[\Big(1 + C_\beta b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}}\Big) \times e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \|\nabla \rho_1\| \\
& + C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \eta_1\| \Big] + \overline{\mu} U_T C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} + b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty \\
& + b_{(2)}^2 |\Omega| C_Q \|\rho_1\|_\infty \Big\} \, \|\nabla(\eta_1 - \eta_2)\| + \Big\{ \overline{\mu} e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)} |\Omega| \\
& \cdot \Big[\Big(1 + C_\beta b_{(2)} |\Omega|^{\frac{1}{2}}\Big) \times e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \|\nabla \rho_1\| + C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \eta_1\| \Big] \\
& + \overline{\mu} U_T C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} + b_{(2)}^2 |\Omega| L_Q \|\eta_1 \rho_1 - 1\|_\infty + b_{(2)}^2 |\Omega| C_Q \|\eta_2\|_\infty \Big\} \\
& \cdot \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\|
\end{aligned}
$$

où $b_{(2)}$, $c_{(3)}$ *sont les constantes données respectivement dans* (2) *et* (3).

Théorème. *Supposons satisfaites les hypothèses* (H_1), (H_2), (H_3) *et* (H_4). *Soient* (u_1, η_1, ρ_1) *et* (u_2, η_2, ρ_2) *deux solutions faibles du système* (1). *Nous définissons la matrice* A, *d'ordre* 3 *dont les cœfficients* a_{ij} *sont définis par*

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \sqrt{\underline{\varepsilon}}, \qquad a_{12} = -\frac{q\, n_i b_{(2)}^2 e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}|\Omega|}{\sqrt{\underline{\varepsilon}}}, \qquad a_{13} = -\frac{q\, n_i b_{(2)}^2 e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}}|\Omega|}{\sqrt{\underline{\varepsilon}}},\\
a_{21} &= -b_{(2)}^2|\Omega|L_Q\|\eta_1\rho_1 - 1\|_\infty - \overline{\mu}\, U_T c_{(3)}|\Omega|^{\frac{1}{6}}(L_\alpha e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}\|\nabla\eta_1\|_3\\
&\quad + L_\beta e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}}\|\nabla\rho_1\|_3),\\
a_{22} &= \underline{\mu} U_T e^{\frac{\underline{u}}{U_T}} - \overline{\mu} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}\frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)}|\Omega|\left[\left(1 + C_\alpha b_{(2)}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\right) e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}\|\nabla\eta_1\|\right.\\
&\quad \left. + C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}} \times |\Omega|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\rho_1\|\right] - \overline{\mu} U_T C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\\
&\quad - b_{(2)}^2|\Omega|L_Q\|\eta_1\rho_1 - 1\|_\infty - b_{(2)}^2|\Omega|C_Q\|\rho_1\|_\infty,\\
a_{23} &= -\overline{\mu} e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}}\frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)}|\Omega|\left[\left(1 + C_\alpha b_{(2)}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\right) e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}\|\nabla\eta_1\|\right.\\
&\quad \left. + C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\rho_1\|\right] - \overline{\mu} U_T C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\\
&\quad - b_{(2)}^2|\Omega|L_Q\|\eta_1\rho_1 - 1\|_\infty - b_{(2)}^2|\Omega|C_Q\|\eta_2\|_\infty,\\
a_{31} &= -b_{(2)}^2|\Omega|L_Q\|\eta_1\rho_1 - 1\|_\infty - \overline{\mu} U_T c_{(3)}|\Omega|^{\frac{1}{6}}(L_\alpha e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}\|\nabla\eta_1\|_3\\
&\quad + L_\beta e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}}\|\nabla\rho_1\|_3),\\
a_{32} &= -\overline{\mu} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}\frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)}|\Omega|\left[\left(1 + C_\beta b_{(2)}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}}\|\nabla\rho_1\|\right.\\
&\quad \left. + C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\eta_1\|\right] - \overline{\mu} U_T C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\\
&\quad - b_{(2)}^2|\Omega|L_Q\|\eta_1\rho_1 - 1\|_\infty - b_{(2)}^2|\Omega|C_Q\|\rho_1\|_\infty,\\
a_{33} &= \underline{\mu} U_T e^{-\frac{\overline{u}}{U_T}} - \overline{\mu} e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}}\frac{q\, n_i}{\underline{\varepsilon}} 2^{\frac{4}{3}} c_{(3)}^2 b_{(2)}|\Omega|\left[\left(1 + C_\beta b_{(2)}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}}\|\nabla\rho_1\|\right.\\
&\quad \left. + C_\alpha b_{(2)} e^{\frac{\overline{u}}{U_T}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\eta_1\|\right] - \overline{\mu} U_T C_\beta b_{(2)} e^{-\frac{\underline{u}}{U_T}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\\
&\quad - b_{(2)}^2|\Omega|L_Q\|\eta_1\rho_1 - 1\|_\infty - b_{(2)}^2|\Omega|C_Q\|\eta_2\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Si la matrice A *est définie positive alors* $u_1 = u_2$, $\eta_1 = \eta_2$ *et* $\rho_1 = \rho_2$.

Preuve. On considère $\zeta = (\|\nabla(u_1 - u_2)\|, \|\nabla(\eta_1 - \eta_2), \|\nabla(\rho_1 - \rho_2)\|)^T \in \mathbb{R}^3$. En utilisant l'inégalité (4) et les Lemmes 3 et 4, on montre que $(A\,\zeta, \zeta) \leq 0$ et comme A est supposée définie positive alors $\zeta = 0$. ∎

Remarque. En absence de recombinaison-génération i.e. $g = 0$ et $Q = 0$, on montre que la matrice A, définie dans le Théorème, est définie positive pour $\underline{\varepsilon}$ suffisamment grand ou $|\Omega|$ suffisamment petit. On prouve ainsi, en utilisant le même cadre, les résultats d'unicité obtenus par des méthodes différentes dans [7] et [9]. Voir [3] pour plus de détails.

Références

[1] Alabau, F., On the existence of multiple steady-state solutions in the theory of electro-diffusion, *Trans. Am. Math. Soc.,* **350** (12) (1998), 4709 – 4756.

[2] Ellabib, A., Nachaoui, A., Existence de solutions pour le modèle dérive-diffusion avec terme d'avalanche, *C. R. Acad. Sci. Paris,* Série I **332** (4) (2001), 305 – 310.

[3] Ellabib, A., "Analyse Mathématique d'Équations de Semi-Conducteurs avec Mobilités non-Constantes et Identification des Frontières Libres dans les Jonctions *PN*", Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes, 2000. http : www.math.sciences.univ-nantes.fr/DEA/THESES/ellabib20000620.html

[4] Ladyzhenskaya, O.A., Ural'tseva, N.N., "Linear and Quasilinear Elliptic Equations", Academic Press, 1968.

[5] Markowich, P.A., "The Stationary Semiconductor Device Equations", Springer Verlag, Wien-New york, 1986.

[6] Mock, M.S., An example of nonuniqueness of stationary solutions in semiconductor device models, *COMPEL,* **1** (3) (1982), 165 – 174.

[7] Nachaoui, A., Nassif, N.R., On the uniqueness of the solution to the drift-diffusion model in semiconductor analysis, *COMPEL,* **2** (3) (1992), 377 – 390.

[8] Troianiello, G.M., "Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems", Plenum Press, New York, 1987.

[9] Wang, Y., Fan, J., On existence, uniqueness and regularity of steady state solutions to the basic semiconductor equations, *Acta Mathematica Scientia,* **15** (2) (1995), 180 – 188.