UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

Memoria del Trabajo Fin de Grado

Inversas generalizadas

AUTOR: Ana Isabel Ruedas Frías

TUTOR:Ignacio Ojeda Martínez de Castilla

19 de Julio de 2023

Ignacio Ojeda Martínez de Castilla.
Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias.
Universidad de Extremadura
Avda. de Elvas s/n
Badajoz (SPAIN)
Tel. 924 289300 ext. 86824
e-mail: ojedamc@unex.es

Ignacio Ojeda Martínez de Castilla, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura.

INFORMA:

Que Dña. Ana Isabel Ruedas Frías ha realizado bajo su dirección el Trabajo de Fin de Grado titulado Inversas generalizadas y que considera que la memoria reúne los requisitos necesarios para su evaluación.

Badajoz, 19 de Julio de 2023

Fdo. Ignacio Ojeda Martínez de Castilla

Índice general

Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado trata de conocer la inversa de Moore-Penrose de una matriz con coeficientes reales.

En el primer capítulo, se introducen una serie de resultados relacionados con la ortogonalidad y las matrices simétricas, estos resultados serán necesarios para poder continuar con los demás capítulos del presente TFG.

En el siguiente capítulo se mostrarán algunas propiedades que cumplen las matrices $AA^{\mathbf{t}}$ y $A^{\mathbf{t}}A$ donde A es una matriz real de orden $m \times n$. Además, se realizará una descomposición de la matriz A en función de los autovalores no nulos de las matrices anteriormente mencionadas.

En el último capítulo se tratan varios aspectos, entre ellos, se expone la definición de inversas generalizadas, aunque me centraré en una en concreto, en la inversa de Moore-Penrose. También hablaremos de la resolución exacta y aproximada de sistemas de ecuaciones lineales compatibles e incompatibles. Y, por último, se presenta una aplicación de las inversas generalizadas en Estadística.

Palabras clave: matrices simétricas, valores singulares, inversa de Moore-Penrose.

Abstract

This Bachelor's Thesis aims to explore the Moore-Penrose inverse of a matrix with real coefficients.

In the first chapter, a series of results related to orthogonality and symmetric matrices are introduced. These results will be necessary to proceed with the rest if the chapters in this thesis.

The following will present some properties satisfaced by the matrices $AA^{\mathbf{t}}$ and $A^{\mathbf{t}}A$, where A is a real matrix od size $m \times n$. Additionally, a decomposition of matrix A will be performed based on the non-zero eigenvalues of the aforementioned matrices.

The last chapter adrdresses several aspects. Among them, the definition of generalized inverses is presented, although I will focus on one in particular: the Moore-Penrose inverse. We will also dicuss the exact and approximate resolution of compatible and incompatible systems of linear equations. Finally, an application of general inverses in Statistics is presented.

Keywords: symmetric matrices, singular values, Moore-Penrose inverse.

Introducción

El principal objetivo de este trabajo es conocer la inversa de Moore-Penrose de una matriz con coeficientes reales y mostrar su uso para resolver problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales, no necesariamente compatibles, en diversos contextos.

Este trabajo comienza con un primer capítulo dedicado a resultados relacionados con la ortogonalidad y las matrices simétricas que necesitaremos en los siguientes capítulos; así conseguimos que el trabajo sea autónomo.

En el segundo capítulo comenzamos viendo algunas propiedades que cumplen las matrices $AA^{\mathbf{t}}$ y $A^{\mathbf{t}}A$ donde A es un matriz real de orden $m \times n$. Demostraremos que dichas matrices son semidefinidas positivas, simétricas y tienen el mismo rango que A, para concluir que tienen los mismos autovalores no nulos con idéntica multiplicidad. Estos son los valores singulares de A y son fundamentales para la construcción de su descomposición en valores singulares. Para un mejor entendimiento de esta construcción, mostramos su interpretación geométrica y vemos un ejemplo donde calculamos la descomposición en valores singulares de una matriz mediante el programa R [8]. Para finalizar este capítulo, comentamos brevemente cómo se puede usar la descomposición en valores singulares de una matriz para la compresión de imágenes.

El último capítulo está dividido a su vez en cuatro secciones.

En la primera sección nos centramos principalmente en la definición de inversa de Moore-Penrose, demostrando su existencia y unicidad. También damos su interpretación geométrica, utilizando la interpretación geométrica de la descomposición en valores singulares vista en el capítulo anterior. A continuación se enuncian y demuestran algunas propiedades de la inversa de Moore-Penrose y usamos el programa R para dar un ejemplo no trivial de inversa de Moore-Penrose. Cabe destacar la estrecha relación de inversa de Moore-Penrose de una matriz con la proyección ortogonal sobre el espacio vectorial generado por las filas o por las columnas de matriz.

La segunda sección trata de la resolución exacta y aproximada de sistemas de ecuaciones lineales compatibles e incompatibles, respectivamente. Se aportan resultados donde las soluciones del sistema se expresan en relación con la inversa de Moore-Penrose, en el caso compatible y se introduce la definición de soluciones aproximadas mínimo cuadráticas, para cuando nuestra sistema de ecuaciones sea incompatible. Además, damos un ejemplo de aplicación de la resolución aproximada mínimo cuadrática que consiste en calcular el polinomio que mejor se ajusta a una serie puntos dados.

Con la tercera sección queremos destacar que la inversa de Moore-Penrose es tan solo una inversa generalizada, es decir, que existen multitud de inversas generalizadas de una matriz. Si bien la inversa de Moore-Penrose garantiza una propiedad de unicidad, su cálculo es computacionalmente costoso; por lo que, dependiendo del propósito o en situaciones particulares, puede ser más interesante considerar definiciones más débiles de inversa generalizada, a costa de la perdida de ciertas propiedades, como puede ser la mencionada unicidad.

Por último, en la cuarta sección, vemos una aplicación de las inversas generalizadas en Estadística. Se realizan dos hipótesis lineales para las que se estiman los parámetros que las forman y se calcula cómo de buena ha sido dicha estimación. Dichas hipótesis son el modelo lineal y el modelo de regresión lineal, y la estimación viene dada por la inversa de Moore-Penrose debido a su relación con la proyección ortogonal.

Para la elaboración de este trabajo se ha seguido principalmente [3] y [7].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo vamos a repasar brevemente algunos conceptos elementales relacionados principalmente con el producto escalar sobre un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión finita. Recordemos que se llama **espacio vectorial euclídeo** a un espacio vectorial real de dimensión finita dotado de producto escalar.

Sobre $\mathbb{R}^n$ consideramos la aplicación $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \mathbf{u}^{\mathbf{t}}\mathbf{v} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

para todo $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathbf{t}}$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que esta aplicación es bilineal, simétrica y definida positiva, es decir, se trata de un producto escalar sobre $\mathbb{R}^n$; y, por tanto, que el par $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ es un espacio vectorial euclídeo. Este producto escalar recibe el nombre de producto escalar usual.

A lo largo de este trabajo vamos a considerar $\mathbb{R}^n$ con la estructura de espacio vectorial euclídeo dada por el producto escalar usual.

1.1. Ortogonalidad

Dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, existe un único número real no negativo $\|\mathbf{u}\|$ que cumple $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$; dicho número real $\|\mathbf{u}\|$ se denomina **norma**, o **módulo**, **del vector u**. Así mismo, se define la **distancia entre u y v** $\in \mathbb{R}^n$ como el número real $\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

Definición 1.1.1. Un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es **unitario** si $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Definición 1.1.2. Dados dos **vectores** $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se dice que son **ortogonales** cuando $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Es claro que el vector nulo es ortogonal a cualquier otro vector.

Definición 1.1.3. Diremos que un conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell\}$ no nulos de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales entre sí cuando $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para todo $i \neq j$. En este caso diremos que $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell\}$ es un **conjunto ortogonal**.

Proposición 1.1.4. *Todo conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente.*

Demostración. Sea $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell\}$ un conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \mathbf{u}_i$ para ciertos $\lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, \ell$. Veamos que $\lambda_j = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Como

$$0 = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u}_j = \left(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \mathbf{u}_i \right) \cdot \mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j) = \lambda_j \|\mathbf{u}_j\|^2,\ j = 1, \ldots, \ell,$$

entonces $\lambda_j = 0$, para todo $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Por tanto, el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell\}$ es linealmente independiente. □

Definición 1.1.5. Diremos que un conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell\}$ es una **base ortogonal** de un subespacio vectorial L de $\mathbb{R}^n$ si es conjunto ortogonal que genera a L, y diremos que es una **base ortonormal** si es una base ortogonal formada por vectores unitarios.

Todo subespacio vectorial de un espacio vectorial euclídeo, posee bases ortonormales. Es más, dada un base cualquiera de un subespacio de un espacio vectorial euclídeo, existe un método algorítmico para calcular una base ortonormal a partir de la primera. Este algoritmo se conoce como **método de Gram-Schmidt**.

Teorema 1.1.6 (Gram-Schmidt). *Sea $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell\}$ una base de subespacio vectorial L de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{v}_1 := \mathbf{w}_1$ y*

$$\mathbf{v}_i := \mathbf{w}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_j}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \mathbf{v}_j,\ i = 2, \ldots, \ell,$$

entonces $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ es una base ortogonal de L y $\left\{ \mathbf{u}_i := \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|} \ \middle|\ i = 1, \ldots, \ell \right\}$ es una base ortonormal de L.

Idea de la demostración. Los $\mathbf{v}_i$ son combinación lineal de los $\mathbf{w}_i$, luego generan un subespacio de L. Como, por construcción, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ es un conjunto ortogonal, por la Proposición 1.1.4, se tiene que es un conjunto linealmente independiente; de donde se sigue que, por una cuestión de dimensiones, genera a L y por lo tanto que es una base ortogonal de L. Ahora, que $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell\}$ es una base ortonormal de L es evidente. □

En [3, Capítulo IX] y en [7, Capítulo V], se pueden encontrar demostraciones más detalladas del teorema anterior.

Proposición 1.1.7. *Sea L un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El conjunto*

$$L^\perp := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \ \mid \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \ \textit{para todo } \mathbf{v} \in L\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, llamado ***ortogonal de*** *L.*

Demostración. Nos basta comprobar que $L^\perp$ es cerrado frente a combinaciones lineales. Como el producto escalar es una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^n$, tenemos que $(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) = 0$, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in L^\perp, \mathbf{v} \in L$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. □

Veamos ahora un par de propiedades del ortogonal de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ (véase [7, Proposición V.4.2] para una lista más completa de propiedades).

Proposición 1.1.8. *Para todo subespacio vectorial L de $\mathbb{R}^n$ se cumplen que*

(a) $\dim(L) + \dim(L^\perp) = \dim(\mathbb{R}^n)$.

(b) $\mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp$

Demostración. (a) Consideremos una base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ de L y definamos la aplicación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^\ell; \mathbf{u} \longmapsto (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_\ell)$, que es lineal por la bilinealidad del producto escalar. El núcleo de f es $L^\perp$, en efecto,

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \ \mid \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 = \ldots = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_\ell = 0\} \\ &= \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \ \mid \ \mathbf{u} \cdot \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \mathbf{v}_i = 0 \text{ para todo } \lambda_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, \ell\} = L^\perp. \end{aligned}$$

Como, por el Teorema de isomorfía, $\mathbb{R}^n/L^\perp = \mathbb{R}^n/\ker(f) \cong \operatorname{Im}(f) = L$, concluimos que $\dim(L) + \dim(L^\perp) = \dim(\mathbb{R}^n)$.

(b) Como $L \cap L^\perp = \{\mathbf{0}\}$, porque $\mathbf{0}$ es el único vector ortogonal a sí mismo, por el apartado (a) concluimos que $\mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp$. □

Dado un subespacio vectorial L de $\mathbb{R}^n$, por el apartado (b) de la proposición anterior tenemos que, para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, existe unos únicos $\mathbf{u}_1 \in L$ y $\mathbf{u}_2 \in L^\perp$ tales que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

Definición 1.1.9. Sea L un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, se llama **proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre** L al único vector $\mathbf{u}_1 \in L$ tal que $\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \in L^\perp$.

Teorema 1.1.10. *Sea L un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{u}_1$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre L, entonces*

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

para todo $\mathbf{v} \in L$. Y se da la iguladad si, y sólo si, $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$.

Demostración. Si $\mathbf{v} \in L$ entonces $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}$, con $\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \in L^\perp$ y $\mathbf{u}_1 - \mathbf{v} \in L$, es decir, $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}) = 0$. Luego, por el Teorema de Pitágoras,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}\|^2,$$

y se sigue que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1\|$ y se da la igualdad si, y sólo si, $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$. Por tanto, $d(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, para todo $\mathbf{v} \in L$. □

Definición 1.1.11. Dado un subespacio vectorial L de $\mathbb{R}^n$, se define la **proyección ortogonal sobre** L como la aplicación

$$\pi_L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n; \mathbf{u} \longmapsto \mathbf{u}_1 \in L$$

donde $\mathbf{u}_1$ es el único vector de L tal que $\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \in L^\perp$.

Comprobemos que π_L es una aplicación lineal: consideremos dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, como $\mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp$ tenemos $\alpha\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2$ y $\beta\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ donde $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in L$ y $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in L^\perp$. Luego $\pi_L(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{v}_1 = \alpha\pi_L(\mathbf{u}) + \beta\pi_L(\mathbf{v})$.

Proposición 1.1.12. *Sean L un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$ y $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{R}^m$ una base ortonormal de L. Si A es la matriz cuya columna $j-$ésima es $\mathbf{v}_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces la matriz de la proyección ortogonal sobre L respecto de la base usual de $\mathbb{R}^m$ es $AA^{\mathbf{t}}$.*

Demostración. Dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, sea $\mathbf{u}_1 \in L$ el único vector tal que $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \in L^\perp$. Como las filas de $A^{\mathbf{t}}$ forman una base de L, se cumple que $A^{\mathbf{t}}\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ y, por lo tanto, que $A^{\mathbf{t}}\mathbf{u} = A^{\mathbf{t}}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = A^{\mathbf{t}}\mathbf{u}_1$. Luego $AA^{\mathbf{t}}\mathbf{u} = AA^{\mathbf{t}}\mathbf{u}_1$. Veamos que $\mathbf{u} - AA^{\mathbf{t}}\mathbf{u}_1 \in L^\perp$, en cuyo caso tendremos que $AA^{\mathbf{t}}\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1$ y habremos terminado.

Como $A^{\mathbf{t}}(\mathbf{u} - AA^{\mathbf{t}}\mathbf{u}_1) = A^{\mathbf{t}}\mathbf{u} - A^{\mathbf{t}}AA^{\mathbf{t}}\mathbf{u}_1$ y tenemos que $A^{\mathbf{t}}A = I_n$, concluimos que $A^{\mathbf{t}}\mathbf{u} - A^{\mathbf{t}}AA^{\mathbf{t}}\mathbf{u}_1 = A^{\mathbf{t}}\mathbf{u}_1 - A^{\mathbf{t}}\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Luego $\mathbf{u} - AA^{\mathbf{t}}\mathbf{u}_1 \in L^\perp$ como queríamos probar. □

Nótese que $B := AA^{\mathbf{t}}$ es una matriz simétrica; en efecto,

$$B^{\mathbf{t}} = (AA^{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}} = (A^{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}} A^{\mathbf{t}} = AA^{\mathbf{t}} = B.$$

En la siguiente sección repasaremos algunos resultados elementales relacionados con las matrices simétricas reales.

1.2. Matrices simétricas

De manera similar a la sección anterior, trabajaremos en el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual. De este modo, una matriz simétrica real de orden $n, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, es la matriz respecto de la base usual de $\mathbb{R}^n$ del endomorfismo simétrico[1] de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{u} \mapsto B\mathbf{u}$, que también denotaremos B siempre que no haya confusión.

Proposición 1.2.1. *Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, los autovalores de B son reales.*

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de B y $\mathbf{v}$ un autovector de B asociado a λ. Por una parte tenemos que

$$\overline{\mathbf{v}}^{\mathbf{t}} B\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}^{\mathbf{t}} \lambda \mathbf{v} = \lambda\, \overline{\mathbf{v}}^{\mathbf{t}} \mathbf{v},$$

donde la barra superior indica conjugación compleja, y por otra tenemos que

$$\overline{\mathbf{v}}^{\mathbf{t}} B\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}^{\mathbf{t}} B^{\mathbf{t}} \mathbf{v} = (B\overline{\mathbf{v}})^{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} = (\overline{\lambda \mathbf{v}})^{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} = \overline{\lambda}\, \overline{\mathbf{v}}^{\mathbf{t}} \mathbf{v}$$

Luego, como $\overline{\mathbf{v}}^{\mathbf{t}}\mathbf{v}$ es una cantidad positiva, concluimos que $\lambda = \overline{\lambda}$, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposición 1.2.2. *Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces dos autovectores asociados a autovalores distintos de B son ortogonales.*

Demostración. Consideremos λ y μ dos autovalores distintos de B y $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ autovectores asociados a λ y μ de B, respectivamente. Entonces,

$$\lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (B\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (B\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mu \mathbf{w}) = \mu(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}),$$

como, por hipótesis, λ y μ son dos autovalores distintos, entonces se obtiene que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. □

[1] Un endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo V es simétrico si su matriz respecto de una base ortonormal de V es simétrica.

Teorema 1.2.3. *Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que $P^{\mathbf{t}}BP$ es diagonal.*

La demostración detallada de este resultado se puede consultar en [7, Teorema V.5.3.]

Idea de la demostración. Por la Proposición 1.2.1, tenemos que los autovalores de B son reales. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de B de multiplicidad m y $\mathbf{v} \in \ker(B - \lambda I_n)^2$. Como $\mathbf{0} = (B - \lambda I_n)^2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (B - \lambda I_n)\mathbf{v} \cdot (B - \lambda I_n)\mathbf{v}$, concluimos que $(B - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, es decir, $\mathbf{v} \in \ker(B - \lambda I_n)$. De donde se sigue, por un resultado de Álgebra Lineal (véase, por ejemplo, [7, Teorema III.5.10(a)]), que $\dim(\ker(B - \lambda I_n)) = m$. Luego, $\mathbb{R}^n = \ker(B - \lambda_1 I_n) \oplus \ldots \oplus \ker(B - \lambda_r I_n)$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son los (distintos) autovalores de B, es decir, B es diagonalizable. Tomando ahora una unión de bases ortonormales de cada subespacio propio $\ker(B - \lambda_i I_n)$, $i = 1, \ldots, r$, obtenenos, por la Proposición 1.2.2, una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ respecto de la cual la matriz de la aplicación lineal que define B es diagonal. Dicho de otro modo, si P es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base $\mathcal{B}$, se cumple que $P^{\mathbf{t}}BP$ es diagonal. □

Finalizamos esta sección recordando la noción de (semi)definida positiva para matrices(simétricas).

Definición 1.2.4. Se dice que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es **semidefinida positiva**, si $\mathbf{v}^{\mathbf{t}}A\mathbf{v} \geq 0$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Además, se dice que A es **definida positiva**, si $\mathbf{v}^{\mathbf{t}}A\mathbf{v} > 0$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ no nulo.

Proposición 1.2.5. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A es semidefinida positiva, entonces todos sus autovalores reales son no negativos. Si A es definida positiva, entonces todos sus autovalores reales son positivos.*

Demostración. Consideremos $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de A y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un autovector asociado a λ de A. Entonces,

$$\mathbf{v}^{\mathbf{t}}A\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathbf{t}}(A\mathbf{v}) = \mathbf{v}^{\mathbf{t}}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{v}^{\mathbf{t}}\mathbf{v}) = \lambda\|\mathbf{v}\|^2;$$

como $\|\mathbf{v}\|^2$ es una cantidad positiva y, por hipótesis, $\mathbf{v}^{\mathbf{t}}A\mathbf{v} \geq 0$, entonces $\lambda \geq 0$ si A es semidefinida positiva y $\lambda > 0$ si A es definida positiva. □

Corolario 1.2.6. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. A es semidefinida positiva si, y sólo si, todos sus autovalores son no negativos. A es definida positiva si, y solo si, todos sus autovalores son positivos.*

Demostración. Como A es simétrica, por el Teorema 1.2.3, sabemos que existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que $P^{\mathbf{t}}AP$ es diagonal; en particular, todos sus autovalores son reales

Luego, por la Proposición 1.2.5, podemos concluir con que si A es semidefinida positiva, entonces todos los autovalores de A son no negativos y si A es definida positiva, entonces todos los autovalores son positivos.

Recíprocamente, supongamos que todos los autovalores de A son no negativos (positivos, resp.). Como P es invertible, dado $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^n$, existe un único $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)^{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^n$ tal que $P\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Luego,

$$\mathbf{v}^{\mathbf{t}}A\mathbf{v} = (P\mathbf{w})^{\mathbf{t}}A(P\mathbf{w}) = \mathbf{w}^{\mathbf{t}}(P^{\mathbf{t}}AP)\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{\mathbf{n}} \lambda_i w_i^2,$$

donde $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$, son los autovalores de A repetidos tantas veces como indica su multiplicidad. Por tanto, si $\lambda_i \geq 0$ $(\lambda_i > 0,$ resp.$), i = 1, \ldots, n$, tenemos que $\mathbf{v}^{\mathbf{t}}A\mathbf{v}$ es no negativo (positivo, resp.), es decir, A es semidefinida positiva (definida positiva, resp.). $\square$

Capítulo 2

Descomposición en valores singulares

En este capítulo vamos a construir una descomposición de una matriz real A de orden $m \times n$ en función de los autovalores no nulos de $AA^{\mathbf{t}}$ (o $A^{\mathbf{t}}A$, pues veremos que son los mismos).

2.1. Las matrices $AA^{\mathbf{t}}$ y $A^{\mathbf{t}}A$

Proposición 2.1.1. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se cumple que:*

(a) $\ker(A) = \ker(A^{\mathbf{t}}A)$ *y* $\ker(A^{\mathbf{t}}) = \ker(A\,A^{\mathbf{t}})$. *En particular,* $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^{\mathbf{t}}A) = \operatorname{rg}(A\,A^{\mathbf{t}})$.

(b) $A^{\mathbf{t}}A$ y $A\,A^{\mathbf{t}}$ son simétricas y semidefinidas positivas. En particular, $A^{\mathbf{t}}A$ es definida positiva si, y sólo si, $\operatorname{rg}(A) = n$, *y $A\,A^{\mathbf{t}}$ es definida positiva si, y sólo si,* $\operatorname{rg}(A) = m$.

Demostración. (a) Vamos a probar que $\ker(A) = \ker(A^{\mathbf{t}}A)$ por doble inclusión. Por una parte, si $\mathbf{v} \in \ker(A)$, entonces $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, de modo que $A^{\mathbf{t}}(A\mathbf{v}) = A^{\mathbf{t}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, es decir, $\mathbf{v} \in ker(A^{\mathbf{t}}A)$. Por otra parte, si $\mathbf{v} \in \ker(A^{\mathbf{t}}A)$, entonces $A^{\mathbf{t}}A\mathbf{v} = 0$, de modo que

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}^{\mathbf{t}}\mathbf{0} = \mathbf{v}^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}}A\mathbf{v} = (\mathbf{v}^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}})A\mathbf{v} = (A\mathbf{v})^{\mathbf{t}}(A\mathbf{v}) = \|A\mathbf{v}\|^2.$$

Luego $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, es decir, $\mathbf{v} \in \ker(A)$.

La demostración de la igualdad $\ker(A^{\mathbf{t}}) = \ker(A\,A^{\mathbf{t}})$ se hace de forma análoga.

Por último, comprobemos que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^{\mathbf{t}}A) = \operatorname{rg}(AA^{\mathbf{t}})$. Por el Teorema del rango, tenemos que $\operatorname{rg}(A) = n - \dim(\ker(A))$ y que $n - \dim(\ker(A^{\mathbf{t}}\,A)) = \operatorname{rg}(A^{\mathbf{t}}A)$. Luego, de la igualdad, $\ker(A) = \ker(A^{\mathbf{t}}\, A)$ se sigue que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^{\mathbf{t}} A)$. Del mismo modo, se tiene que

$$\mathrm{rg}(A^{\mathbf{t}}) = m - \dim(\ker(A^{\mathbf{t}})) = m - \dim(\ker(AA^{\mathbf{t}})) = \mathrm{rg}(AA^{\mathbf{t}}).$$

Usando ahora que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^{\mathbf{t}})$ obtenemos el resultado buscado.

(b) Las matrices $A^{\mathbf{t}}A$ y $AA^{\mathbf{t}}$ son claramente simétricas. En efecto, $(A^{\mathbf{t}}A)^{\mathbf{t}} = A^{\mathbf{t}}(A^{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}} = A^{\mathbf{t}}A$ y $(AA^{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}} = (A^{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}} = AA^{\mathbf{t}}$. Ahora, por la Proposición 1.2.1, podemos garantizar que todos los autovalores de $A^{\mathbf{t}}A$ y $AA^{\mathbf{t}}$ son reales. De hecho, por el Corolario 1.2.6, para probar que $A^{\mathbf{t}}A$ y $AA^{\mathbf{t}}$ son semidefinidas positivas nos bastará probar que todos sus autovalores son mayores o iguales que cero.

Consideremos un autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de $A^{\mathbf{t}}A$ y un autovector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de $A^{\mathbf{t}}A$. asociado a λ. Entonces

$$0 \leq \|A\mathbf{v}\|^2 = (A\mathbf{v})^{\mathbf{t}}A\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathbf{t}}\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}^{\mathbf{t}}\mathbf{v} = \lambda\|\mathbf{v}\|^2.$$

Así, como $\|\mathbf{v}\|^2$ es una cantidad positiva, concluimos que $\lambda \geq 0$.

Por último, como por el Corolario 1.2.6, $A^{\mathbf{t}}A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es definida positiva si, y sólo si, todos sus autovalores son mayores que cero. Esto es equivalente a que el determinante de $A^{\mathbf{t}}A$ sea distinto de cero, es decir, a que $A^{\mathbf{t}}A$ sea invertible. Equivalentemente, por el apartado (a), $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^{\mathbf{t}}A) = n$.

La demostración para $AA^{\mathbf{t}}$ es completamente análoga, sin más que intercambiar, los papeles de las matrices A y $A^{\mathbf{t}}$. $\square$

El resultado anterior no es cierto si, en lugar de $\mathbb{R}$, consideramos el cuerpo de los complejos, $\mathbb{C}$. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

tiene rango 1, y sin embargo $A^{\mathbf{t}}A = A\,A^{\mathbf{t}} = A^2$ es una matriz nula.

Como consecuencia de la Proposición 2.1.1 y del Teorema 1.2.3, tenemos que las matrices $A^{\mathbf{t}}A$ y $AA^{\mathbf{t}}$ diagonalizan a través de una matriz ortogonal y que tienen $rg(A)$ autovalores mayores que cero (no tienen porque ser distintos) y el resto, si hay, nulos.

Proposición 2.1.2. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se cumple que:*

(a) Si λ es un autovalor no nulo de $A^{\mathbf{t}}A$ y $\mathbf{v}$ es un autovector de $A^{\mathbf{t}}A$ asociado a λ, entonces λ es un autovalor de $A\,A^{\mathbf{t}}$ y $A\mathbf{v}$ es un autovector de $A\,A^{\mathbf{t}}$ asociado a λ.

(b) Si μ es un autovalor no nulo de $AA^{\mathbf{t}}$ y $\mathbf{u}$ es un autovector de $AA^{\mathbf{t}}$ asociado a μ, entonces μ es un autovalor de $A^{\mathbf{t}}A$ y $A^{\mathbf{t}}\mathbf{u}$ es un autovector de $A^{\mathbf{t}}A$ asociado a μ.

(c) Las matrices $A^{\mathbf{t}}A$ y $A\,A^{\mathbf{t}}$ tienen los mismos autovalores no nulos con idéntica multiplicidad.

Demostración. (a) Si $A\mathbf{v} = 0$, entonces $\lambda\mathbf{v} = A^{\mathbf{t}}A\mathbf{v} = 0$, es decir, $\lambda = 0$; y esto no puede ocurrir por hipótesis. Luego, $A\mathbf{v} \neq 0$, y por lo tanto de

$$(AA^{\mathbf{t}})A\mathbf{v} = A(A^{\mathbf{t}}A)\mathbf{v} = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v})$$

se sigue que λ es autovalor de $AA^{\mathbf{t}}$ y que $A\mathbf{v}$ es un autovector de $AA^{\mathbf{t}}$ asociado a λ.

(b) Es análoga a (a).

(c) Que matrices $A^{\mathbf{t}}A$ y $A\,A^{\mathbf{t}}$ tienen los mismos autovalores no nulos es consecuencia inmediata de (a) y (b). Si λ es un autovalor no nulo de $A^{\mathbf{t}}A$ y $A\,A^{\mathbf{t}}$, veamos que tiene la misma multiplicidad.

Veamos en primer lugar que se cumple que

$$\dim(\ker(A^{\mathbf{t}}A - \lambda I_n)) = \dim(\ker(AA^{\mathbf{t}} - \lambda I_m)).$$

Para ello, vamos a escoger s autovectores linealmente independientes de $A^{\mathbf{t}}A$ asociados a λ, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s$. Por apartado (a), $A\mathbf{u}_1, \ldots, A\mathbf{u}_s$ son también autovectores de $AA^{\mathbf{t}}$ asociados a λ. Veamos que $A\mathbf{u}_1, \ldots, A\mathbf{u}_s$ son linealmente independientes. Si $\alpha_1 A\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_s A\mathbf{u}_s = 0, \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, s$, entonces

$$0 = A^{\mathbf{t}}\left(\sum_{i=1}^{\mathbf{s}} \alpha_i A\mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{\mathbf{s}} \alpha_i (A^{\mathbf{t}}A)\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{\mathbf{s}} \alpha_i \lambda \mathbf{u}_i = \lambda \sum_{i=1}^{\mathbf{s}} \alpha_i \mathbf{u}_i,$$

y como $\lambda \neq 0$, se sigue que $0 = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_s\mathbf{u}_s$ y, por tanto $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0$. De donde se sigue que $\dim(\ker(A^{\mathbf{t}}A - \lambda I_n)) \leq \dim(\ker(AA^{\mathbf{t}} - \lambda I_m))$. La desigualdad contraria se demuestra de forma similar usando el apartado (b).

Por último, como $A^{\mathbf{t}}A$ y $AA^{\mathbf{t}}$ son diagonalizables por el Teorema 1.2.3, tenemos que la multiplicidad del autovalor λ coincide con $\dim(\ker(A^{\mathbf{t}}A - \lambda I_n)) = \dim(\ker(AA^{\mathbf{t}} - \lambda I_m))$ y, por lo tanto, concluimos que λ tiene la misma multiplicidad como autovalor de $A^{\mathbf{t}}A$ que como autovalor de $AA^{\mathbf{t}}$. $\square$

2.2. Descomposición en valores singulares

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rango $r > 0$. Por la Proposición 2.1.2, tenemos que las matrices $A^{\mathbf{t}}A$ y $AA^{\mathbf{t}}$ son simétricas, semidefinidas positivas y que tienen los mismos autovalores positivos con idéntica multiplicidad. Estos hechos dotan de sentido a la siguiente definición.

Definición 2.2.1. Llamaremos **valores singulares de** $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ a las raíces cuadradas positivas de los autovalores de $A^{\mathbf{t}}A$ (y de $AA^{\mathbf{t}}$) repetidos tantas veces como su multiplicidad.

Teorema 2.2.2. *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tiene rango $r > 0$ y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ son sus valores singulares, entonces existen $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonales, tales que*

$$P^{\mathbf{t}}AQ = \left(\begin{array}{c|c} \Delta & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

y $\Delta = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.

Demostración. Como $A^{\mathbf{t}}A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, por el Teorema 1.2.3, existe una matriz ortogonal $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cuyas columnas son autovectores de $A^{\mathbf{t}}A$ tal que

$$Q^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}}AQ = \left(\begin{array}{c|c} \Delta^2 & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(n-r)\times r} & \mathbf{0}_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right).$$

Si partimos Q como $(Q_1|Q_2)$, donde $Q_1 \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{R})$ y $Q_2 \in \mathcal{M}_{n\times(n-r)}(\mathbb{R})$, se tiene que

$$Q_1^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}}AQ_1 = \Delta^2 \tag{2.1}$$

y que

$$Q_2^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}}AQ_2 = (AQ_2)^{\mathbf{t}}AQ_2 = \mathbf{0}_{(n-r)\times(n-r)}, \tag{2.2}$$

de donde se sigue, por tratarse de matrices reales, que

$$AQ_2 = \mathbf{0}_{m\times(n-r)}. \tag{2.3}$$

Sea $P_1 = AQ_1\Delta^{-1} \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{R})$, como las columnas de P_1 son ortogonales entre sí; en efecto,

$$P_1^{\mathbf{t}}P_1 = (AQ_1\Delta^{-1})^{\mathbf{t}}(AQ_1\Delta^{-1}) = (\Delta^{-1})^{\mathbf{t}}Q_1^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}}AQ_1\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\Delta^2\Delta^{-1} = I_r,$$

existe una matriz $P_2 \in \mathcal{M}_{m\times(m-r)}(\mathbb{R})$ tal que la matriz $P = (P_1|P_2) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ sea ortogonal. Nótese que $\mathbf{0}_{(m-r)\times r} = P_2^{\mathbf{t}} P_1 = P_2^{\mathbf{t}} A Q_1 \Delta^{-1}$, de donde se sigue que

$$P_2^{\mathbf{t}} A Q_1 = \mathbf{0}_{(m-r)\times r}. \tag{2.4}$$

Usando ahora (2.1),(2.3) y (2.4) concluimos que

$$P^{\mathbf{t}} A Q = \left(\begin{array}{c|c} P_1^{\mathbf{t}} A Q_1 & P_1^{\mathbf{t}} A Q_2 \\ \hline P_2^{\mathbf{t}} A Q_1 & P_2^{\mathbf{t}} A Q_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} (AQ_1\Delta^{-1})^{\mathbf{t}} A Q_1 & (AQ_1\Delta^{-1})^{\mathbf{t}} A Q_2 \\ \hline P_2^{\mathbf{t}} A Q_1 & P_2^{\mathbf{t}} A Q_2 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \Delta^{-1} Q_1^{\mathbf{t}} A^{\mathbf{t}} A Q_1 & \Delta^{-1} Q_1^{\mathbf{t}} A^{\mathbf{t}} A Q_2 \\ \hline P_2^{\mathbf{t}} A Q_1 & P_2^{\mathbf{t}} A Q_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Delta^{-1} Q_1^{\mathbf{t}} A^{\mathbf{t}} A Q_1 & \Delta^{-1} Q_1^{\mathbf{t}} A^{\mathbf{t}} A Q_2 \\ \hline P_2^{\mathbf{t}} A Q_1 & P_2^{\mathbf{t}} A Q_2 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \Delta^{-1}\Delta^2 & \Delta^{-1} Q_1^{\mathbf{t}} A^{\mathbf{t}} \mathbf{0}_{m\times(n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & P_2^{\mathbf{t}} \mathbf{0}_{n\times(n-r)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Delta & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right).$$

$\square$

La descomposición $A = PDQ^{\mathbf{t}}$ dada en el teorema anterior se llama **descomposición en valores singulares**, o **SVD** (por sus siglas en inglés), **de** A.

Teorema 2.2.3. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de las bases usuales es A. Los autovalores del isomorfismo*

$$\phi = T_{|_{\ker(T)^\perp}} : \ker(T)^\perp \to \operatorname{Im}(T)$$

son los valores singulares de la matriz de T respecto de cualesquiera bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

Demostración. En primer lugar observamos que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, entonces existen dos matrices ortogonales P y Q tales que la matriz de A respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es $PAQ^{\mathbf{t}}$. De donde se sigue $(PAQ^{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}}(PAQ^{\mathbf{t}}) = QA^{\mathbf{t}}P^{\mathbf{t}}PAQ^{\mathbf{t}} = QA^{\mathbf{t}}AQ^{\mathbf{t}} = QA^{\mathbf{t}}AQ^{-\mathbf{1}}$, y por lo tanto que A y $PAQ^{\mathbf{t}}$ tienen los mismos valores singulares.

Si $A = PDQ^{\mathbf{t}}$ con

$$D = \left(\begin{array}{c|c} \Delta & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

es la descomposición en valores singulares de A, entonces las matrices Q y P definen cambios de bases en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^m$, respectivamente, tal que la matriz de T respecto de estas nuevas bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, es D. Como $AQ = PD$, las r primeras columnas de Q son las coordenadas respecto $\mathcal{B}$ de una base, $\mathcal{B}_1$, de $\ker(T)^\perp$ y las r primeras columnas de P forman una base, $\mathcal{B}'_1$, de $\mathrm{Im}(T)$. Por tanto, la matriz de $T_{|_{\ker(T)^\perp}}$ respecto de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}'_1$ es Δ, de donde se sigue que los autovalores de $T_{|_{\ker(T)^\perp}}$ son los valores singulares de A. $\square$

El siguiente resultado se deduce inmediatamente de la demostración del Teorema 2.2.2.

Corolario 2.2.4. *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tiene rango $r > 0$ y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ son sus valores singulares, entonces existen $P_1 \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{R})$ y $Q_1 \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{R})$, con $P_1^{\mathbf{t}} P_1 = Q_1^{\mathbf{t}} Q_1 = I_r$, tales que*

$$A = P_1 \Delta Q_1^{\mathbf{t}}, \tag{2.5}$$

donde $\Delta = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.

La expresión (2.5) se conoce como **descomposición en valores singulares corta** o **SVD corta de** $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.2.5. El programa R [8], cuenta con la función `svd()` para calcular la descomposición de valores singulares corta de una matriz. Para ilustrar el procedimiento, vamos a calcular la descomposición en valores singulares de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Los siguientes comandos se pueden ejecutar en `https://rdrr.io/snippets/`, por ejemplo.

```
# Introducimos la matriz A
   A = as.matrix(data.frame(c(4,7,-1,8), c(-5,-2,4,2), c(-1,3,-3,6)))
# Ahora aplicamos la función SVD a la matriz A
   A.svd <- svd(A)
   A.svd
```

El resultado, en este caso, es el siguiente:

```
$d
[1] 13.161210  6.999892  3.432793


$u
           [,1]       [,2]        [,3]
[1,] -0.2816569  0.7303849 -0.42412326
[2,] -0.5912537  0.1463017 -0.18371213
[3,]  0.2247823 -0.4040717 -0.88586638
[4,] -0.7214994 -0.5309048  0.04012567


$v
           [,1]        [,2]       [,3]
[1,] -0.8557101  0.01464091 -0.5172483
[2,]  0.1555269 -0.94610374 -0.2840759
[3,] -0.4935297 -0.32353262  0.8073135
```

donde `d` son los valores singulares de A, mientras que `u` y `v` son las matrices que nosotros hemos llamado P_1 y Q_1 en el Corolario 2.2.4. Este ejemplo ha sido tomado de `https://rpubs.com/aaronsc32/singular-value-decomposition-r`

Vamos a finalizar este capítulo mostrando una aplicación de la descomposición en valores singulares para la compresión de imágenes.

Ejemplo 2.2.6. La compresión de imágenes es una técnica que se utiliza para disminuir la cantidad de datos necesarios para almacenar una imagen digital sin perder demasiada calidad visual.

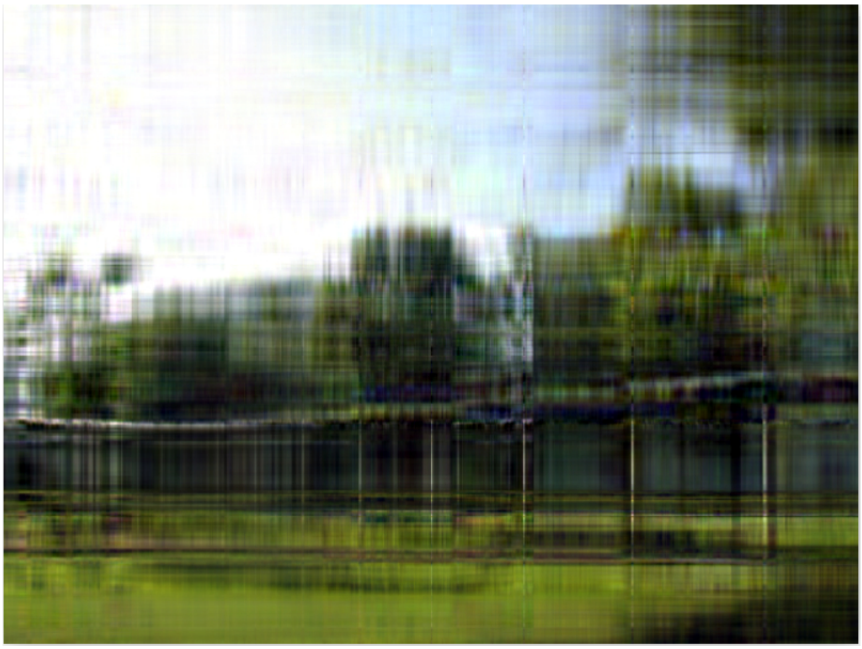
Una fotografía de $m \times n$ píxeles puede ser codificada mediante varias matrices de enteros de orden $m \times n$. Por ejemplo, una imagen a color se puede codificar en tres matrices, una para el color rojo, otra para el verde y otra para el azul. Las entradas de cada matriz son números entre entre 0 y 255, dependiendo de la intensidad del color, donde 0 significa que el color en cuestión no interviene en la mezcla.

Sean A la matriz que codifica uno de los colores de una imagen de $m \times n$ píxeles y $A = P_1 \Delta Q_1^{\mathbf{t}}$ su descomposición en valores singulares corta. Como los valores singulares de A están ordenados en Δ de mayor a menor, las primeras columnas de P_1 y Q_1 contienen la información más relevante sobre el color correspondiente en los píxeles de la imagen. De este modo, si las matrices $\widetilde{P}_1$ y $\widetilde{Q}_1$ son las matrices formadas por las $k \leq r = \mathrm{rg}(A)$ primeras columnas de P_1 y Q_1, respectivamente, el producto $\widetilde{P}_1 \widetilde{\Delta} \widetilde{Q}_1^{\mathbf{t}}$ donde $\widetilde{\Delta} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, nos dará una aproximación bastante buena de A cuyo tamaño comprimido es $n \times k + k + m \times k = (m + n + 1) \times k$.

Este método está descrito con mayor detalle en la página web `https://timbaumann.info/svd-image-compression-demo/`. En esta web se puede experimentar, además, con la compresión de imágenes usando la SVD corta. Por ejemplo, la siguiente imagen del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura

tiene $640 \times 480 = 307200$ píxeles.

Si usamos los 10 primeros valores singulares de cada componente de color obtenemos la siguiente imagen



que tiene un tamaño comprimido del orden de 11210 píxeles. Mientras que si usamos los 100 primeros valores singulares de cada componente de color obtenemos la siguiente imagen

que tiene un tamaño comprimido del orden de 112100 píxeles.

Capítulo 3

Inversas generalizadas

3.1. La inversa de Moore-Penrose

Definición 3.1.1. Una **inversa generalizada de un matriz** $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz de orden $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ que verifica alguna de las siguientes propiedades:

(G1) $A\,B\,A = A$,

(G2) $B\,A\,B = B$,

(G3) $A\,B$ es simétrica,

(G4) $B\,A$ es simétrica.

Solamente hay una matriz que verifica las cuatros propiedades anteriores.

Teorema 3.1.2. *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Existe una única matriz $A^+ \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ verificando las condiciones (G1)-(G4) de la definición 3.1.1*

Demostración. Veamos primero la existencia de A^+. Si A es la matriz nula, entonces $A^+ = \mathbf{0}_{n\times m}$, ya que las cuatro condiciones de la definición 3.1.1 se cumplen trivialmente. Si A no es nula, por el Corolario 2.2.4, existe descomposiciones en valores singulares cortas: $A = P_1\Delta Q_1^{\mathbf{t}}$. Sea $A^+ = Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}}$, veamos que cumple (G1)-(G4):

$$AA^+A = (P_1\Delta Q_1^{\mathbf{t}})(Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}})(P_1\Delta Q_1^{\mathbf{t}}) = P_1\Delta\Delta^{-1}\Delta Q_1^{\mathbf{t}} = P_1\Delta Q_1^{\mathbf{t}} = A$$

$$A^+AA^+ = (Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}})(P_1\Delta Q_1^{\mathbf{t}})(Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}}) = Q_1\Delta^{-1}\Delta\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}} = Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}} = A^+$$

$$AA^+ = (P_1\Delta Q_1^{\mathbf{t}})(Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}}) = P_1P_1^{\mathbf{t}} \text{ es simétrica}$$

$$A^+A = (Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}})(P_1\Delta Q_1^{\mathbf{t}}) = Q_1Q_1^{\mathbf{t}} \text{ es simétrica}$$

Consideremos B y C dos matrices de orden $n \times m$ que verifican las condiciones de la definición 3.1.1. Entonces, por (G3),

$$AB = (AB)^{\mathbf{t}} = B^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}}$$

Además por (G1), $A = ACA$; luego

$$B^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}} = B^{\mathbf{t}}(ACA)^{\mathbf{t}} = B^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}}C^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}} = (AB)^{\mathbf{t}}(AC)^{\mathbf{t}}$$

Finalmente usando (G3) y (G1) de nuevo obtenemos que

$$(AB)^{\mathbf{t}}(AC)^{\mathbf{t}} = ABAC = AC,$$

y concluimos que $AB = AC$.

Siguiendo el mismo procedimiento pero utilizando las propiedades (G1) y (G4) obtenemos

$$BA = (BA)^{\mathbf{t}} = A^{\mathbf{t}}B^{\mathbf{t}} = (ACA)^{\mathbf{t}}B^{\mathbf{t}} = A^{\mathbf{t}}C^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}}B^{\mathbf{t}} = (CA)^{\mathbf{t}}(BA)^{\mathbf{t}} = CABA = CA.$$

De modo que usando las igualdades $AB = AC$ y $BA = CA$, y la condición (G2), obtenemos que

$$B = BAB = BAC = CAC = C.$$

De donde se sigue la unidad de A^+. $\square$

La matriz A^+ del teorema anterior se denomina **inversa de Moore-Penrose de** A.

Proposición 3.1.3. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rango $r > 0$. Si $P_1\Delta Q_1^{\mathbf{t}}$ es una descomposición en valores singulares corta de A, entonces $Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}}$ es una descomposición en valores singulares corta de A^+.*

Demostración. Según la demostración del Teorema 3.1.2, $A^+ = Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}}$. Luego, basta demostrar que los valores singulares de A^+ son los inversos de los de A.

Los valores singulares de A^+ son las raíces cuadradas de los autovalores de $A^+(A^+)^{\mathbf{t}}$ y se cumple que

$$A^+(A^+)^{\mathbf{t}} = (Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}})(Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}} = (Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}})(P_1\Delta^{-1}Q_1^{\mathbf{t}}) = Q_1\Delta^{-2}Q_1^{\mathbf{t}}.$$

Por tanto, tomando $Q_2 \in \mathcal{M}_{n\times(n-r)}(\mathbb{R})$ tal que $Q = (Q_1|Q_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sea ortogonal, obtenemos que

$$A^+(A^+)^{\mathbf{t}} = Q \left(\begin{array}{c|c} \Delta^{-2} & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(n-r)\times r} & \mathbf{0}_{(n-r)\times(n-r)} \end{array} \right) Q^{\mathbf{t}}$$

y, por lo tanto, concluimos que los valores singulares de A^+ son los inversos de los de A. □

Teorema 3.1.4. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rango $r > 0$. La inversa de Moore-Penrose de A es la única matriz $A^+ \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que*

(a) $A\,A^+$ es la matriz de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^m$ sobre $\operatorname{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ respecto de la base usual de $\mathbb{R}^m$.

(b) A^+A es la matriz de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre $\operatorname{Im}(A^+) \subseteq \mathbb{R}^n$ respecto de la base usual de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $A = P_1\Delta Q_1^{\mathbf{t}}$ una descomposición en valores singulares corta de A tal que $P_1 = AQ_1\Delta^{-1}$ (véase la demostración del Teorema 2.2.2). Por la Proposición 3.1.3, $A^+ = Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}}$ es una descomposición en valores singulares corta de A^+. Probemos que A^+ cumple (a) y (b).

Como $P_1^{\mathbf{t}}P_1 = I_r$, las matrices P_1 y A tienen el mismo rango e $\operatorname{Im}(P_1) \subseteq \operatorname{Im}(A)$, las columnas de P_1 forman una base ortonormal de $\operatorname{Im}(P_1) = \operatorname{Im}(A)$. Luego, por la Proposición 1.1.12, concluimos que

$$P_1P_1^{\mathbf{t}} = P_1(\Delta Q_1^{\mathbf{t}}Q_1\Delta^{-1})P_1^{\mathbf{t}} = (P_1\Delta Q_1^{\mathbf{t}})(Q_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}}) = AA^+$$

es la matriz de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^m$ sobre $\operatorname{Im}(A)$. La demostración de que se cumple (b) es totalmente análoga.

Probemos ahora que si B es una matriz que cumple (a) y (b), entonces verifica las propiedades (G1)-(G4) de la definición 3.1.1. Por la Proposición 1.1.12, las matrices AB y BA son simétricas, de modo que se cumplen las condiciones (G3) y (G4). Por otra parte, como las columnas de A están en $\operatorname{Im}(A)$, se tiene que

$$ABA = (AB)A = A,$$

es decir, B se cumple (G1). De un modo análogo, como las columnas de B están en $\operatorname{Im}(B)$, tenemos que

$$BAB = (BA)B = B,$$

es decir, B cumple $(G2)$. Luego, $B = A^+$ y hemos terminado. $\square$

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz de rango r y $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de las bases usuales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es A. Por el Teorema 2.2.3, $T_{|_{\ker(T)^\perp}}$ es un isomorfismo de $\ker(T)^\perp$ en $\mathrm{Im}(T)$. Si $\phi^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to \ker(T)^\perp$ es isomorfismo inverso de $T_{|_{\ker(T)^\perp}}$, definimos $T^+ = i \circ \phi^{-1} \circ \pi_{\mathrm{Im}(T)}$.

Proposición 3.1.5. *Con la notación anterior, la matriz de T^+ respecto de las bases usuales de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ es A^+.*

Demostración. Veamos $T \circ T^+$ es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^m$. Si $\mathbf{u}_1$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathrm{Im}(T)$, tenemos que

$$T \circ T^+(\mathbf{u}) = T(i(\phi^{-1}(\mathbf{u}_1))) = T(\phi^{-1}(\mathbf{u}_1)) = \phi(\phi^{-1}(\mathbf{u}_1)) = \mathbf{u}_1,$$

pues $\phi^{-1}(\mathbf{u}_1) \in \ker(T)^\perp$ y $\phi = T_{|\ker(T)^\perp}$. Veamos ahora que $T^+ \circ T$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sobre $\mathrm{Im}(T^+) \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{v}_1$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sobre $\mathrm{Im}(T^+)$ tenemos que

$$T^+ \circ T(\mathbf{v}) = i(\phi^{-1}(T(\mathbf{v}))) = \phi^{-1}(T(\mathbf{v})) = \mathbf{v}_1.$$

Si B es la matriz de T^+ respecto de las bases usuales, entonces la matriz de $T \circ T^+$ respecto de las bases usuales es AB y la matriz de $T^+ \circ T$ respecto de las bases usuales es BA. Luego, por el Teorema 3.1.4, concluimos que $A^+ = B$. $\square$

El siguiente resultado recopila algunas propiedades de la inversa de Moore-Penrose.

Proposición 3.1.6. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces,*

(a) $(\alpha A)^+ = \alpha^{-1}A^+$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, *no nulo.*

(b) $(A^+)^{\mathbf{t}} = (A^{\mathbf{t}})^+$.

(c) $(A^+)^+ = A$.

(d) Si A es cuadrada e invertible, entonces $A^+ = A^{-1}$,

(e) $(A^{\mathbf{t}}A)^+ = A^+(A^+)^{\mathbf{t}}$ *y* $(A\,A^{\mathbf{t}})^+ = (A^+)^{\mathbf{t}}A^+$.

(f) $(A\,A^+)^+ = A\,A^+$ *y* $(A^+A)^+ = A^+A$.

(g) $A^+ = (A^{\mathbf{t}}A)^+A^{\mathbf{t}} = A^{\mathbf{t}}(A\,A^{\mathbf{t}})^+$.

(h) $A^+A = I_n$ *si, y sólo si,* $\mathrm{rg}(A) = n$. *En cuyo caso,* $A^+ = (A^{\mathbf{t}}A)^{-1}A^{\mathbf{t}}$.

(i) $A\,A^+ = I_m$ *si, y sólo si,* $\mathrm{rg}(A) = m$. *En cuyo caso,* $A^+ = A^{\mathbf{t}}(A\,A^{\mathbf{t}})^{-1}$.

(j) Si las columnas (filas, resp.) de A *son ortogonales, es decir,* $A^{\mathbf{t}}A = I_n$ *(*$AA^{\mathbf{t}} = I_m$*, resp.), entonces* $A^+ = A^{\mathbf{t}}$.

Demostración. (a) Comprobemos que se cumplen las cuatro condiciones de la definición 3.1.1:

$$\begin{array}{ll}
(G1) & (\alpha A)\alpha^{-1}A^+(\alpha A) = \alpha\alpha^{-1}\alpha AA^+A = \alpha AA^+A = \alpha A. \\
(G2) & \alpha^{-1}A^+(\alpha A)\alpha^{-1}A^+ = \alpha^{-1}\alpha\alpha^{-1}A^+AA^+ = \alpha^{-1}A^+AA^+ = \alpha^{-1}A^+. \\
(G3) & ((\alpha A)\alpha^{-1}A^+)^{\mathbf{t}} = (\alpha\alpha^{-1}AA^+)^{\mathbf{t}} = (AA^+)^{\mathbf{t}} = AA^+ = \alpha\alpha^{-1}AA^+ = \alpha A\alpha^{-1}A^+. \\
(G4) & (\alpha^{-1}A^+(\alpha A))^{\mathbf{t}} = (\alpha^{-1}A^+\alpha A)^{\mathbf{t}} = (A^+A)^{\mathbf{t}} = A^+A = \alpha^{-1}\alpha A^+A = \alpha^{-1}A^+\alpha A.
\end{array}$$

(b) Comprobemos que se cumplen las cuatro propiedades de la definición 3.1.1:

$$\begin{array}{ll}
(G1) & A^{\mathbf{t}}(A^+)^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}} = (AA^+A)^{\mathbf{t}} = A^{\mathbf{t}}. \\
(G2) & (A^+)^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}}(A^+)^{\mathbf{t}} = (A^+AA^+)^{\mathbf{t}} = (A^+)^{\mathbf{t}}. \\
(G3) & ((A^+)^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}} = AA^+ = (AA^+)^{\mathbf{t}} = (A^+)^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}}. \\
(G4) & (A^{\mathbf{t}}(A^+)^{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}} = A^+A = (A^+A)^{\mathbf{t}} = A^{\mathbf{t}}(A^+)^{\mathbf{t}}.
\end{array}$$

(c) La demostración es trivial.

(d) Si A es una matriz cuadrada e invertible, entonces existe A^{-1}. Como A^{-1} verifica las cuatro propiedades de la definición 3.1.1, la unicidad de A^+ implica que $A^+ = A^{-1}$.

(e) Comprobemos que se cumplen las cuatro propiedades de la definición 3.1.1:

$$\begin{array}{ll}
(G1) & (A^{\mathbf{t}}A)A^+(A^+)^{\mathbf{t}}(A^{\mathbf{t}}A) = (A^{\mathbf{t}}AA^+)(AA^+)^{\mathbf{t}}A = A^{\mathbf{t}}AA^+AA^+A \\
& = A^{\mathbf{t}}AA^+A = A^{\mathbf{t}}A. \\
(G2) & A^+(A^+)^{\mathbf{t}}(A^{\mathbf{t}}A)A^+(A^+)^{\mathbf{t}} = A^+(AA^+)^{\mathbf{t}}AA^+(A^+)^{\mathbf{t}} \\
& = A^+AA^+AA^+(A^+)^{\mathbf{t}} = A^+AA^+(A^+)^{\mathbf{t}} = A^+(A^+)^{\mathbf{t}} \\
(G3) & (A^{\mathbf{t}}A)(A^+(A^+)^{\mathbf{t}}) = A^{\mathbf{t}}AA^+(A^+)^{\mathbf{t}} = A^{\mathbf{t}}(A^+(AA^+)^{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}} \\
& = A^{\mathbf{t}}(A^+AA^+)^{\mathbf{t}} = A^{\mathbf{t}}(A^+)^{\mathbf{t}} = (A^+A)^{\mathbf{t}} \text{ que ya es simétrica.} \\
(G4) & (A^+(A^+)^{\mathbf{t}})(A^{\mathbf{t}}A) = A^+(A^+)^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}}A = A^+(AA^+)^{\mathbf{t}}A \\
& = A^+AA^+A = A^+A \text{ que ya es simétrica.}
\end{array}$$

Para probar $(AA^{\mathbf{t}})^{+} = (A^{+})^{\mathbf{t}} A^{+}$ se procede de forma similar.

(f) Comprobemos que cumplen las cuatro condiciones de la definición 3.1.1:

$$(G1 - G2) \quad (AA^{+})AA^{+}(AA^{+}) = AA^{+}AA^{+}AA^{+} = AA^{+}AA^{+} = AA^{+}$$

$$(G3 - G4) \quad (AA^{+})AA^{+} = AA^{+}(AA^{+}) = AA^{+} \text{ que ya es simétrica.}$$

Para probar $(A^{+}A)^{+} = A^{+}A$ se procede de forma similar

(g) Usando el apartado (e) obtenemos que

$$(A^{\mathbf{t}}A)^{+}A^{\mathbf{t}} = A^{+}(A^{+})^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}} = A^{+}(AA^{+})^{\mathbf{t}} = A^{+}AA^{+} = A^{+}$$

y que

$$A^{\mathbf{t}}(AA^{\mathbf{t}})^{+} = A^{\mathbf{t}}(A^{+})^{\mathbf{t}}A^{+} = (A^{+}A)^{\mathbf{t}}A^{+} = A^{+}AA^{+} = A^{+}$$

(h) Por el Teorema 3.1.4(b), tenemos $r = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^{+}A)$. Luego, si $A^{+}A = I_n$, entonces $\mathrm{rg}(A) = n$. Recíprocamente, si $\mathrm{rg}(A) = n$, entonces $A^{+}A$ es invertible. Por tanto, $A^{+}A = A^{+}AA^{+}A$ se sigue que $A^{+}A = I_n$. Ahora, por el apartado (d), $(A^{\mathbf{t}}A)^{+} = (A^{\mathbf{t}}A)^{-1}$ y, por el apartado (g), concluimos que

$$A^{+} = (A^{\mathbf{t}}A)^{+}A^{\mathbf{t}} = (A^{\mathbf{t}}A)^{-1}A^{\mathbf{t}}.$$

(i) Se procede de forma similar al apartado (h).

(j) Si $A^{\mathbf{t}}A = I_n$, entonces, por la Proposición 2.1.1, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^{\mathbf{t}}A) = n$. Luego, por el apartado (h), $A^{+} = (A^{\mathbf{t}}A)^{-1}A^{\mathbf{t}} = A^{\mathbf{t}}$. La demostración para $AA^{\mathbf{t}} = I_m$ es completamente análoga. □

Podemos usar el programa R (véase [8]) para calcular la inversa de Moore-Penrose de una matriz dada.

Ejemplo 3.1.7. La función `MoorePenrose()` de la biblioteca `matlib` de R nos permite calcular la inversa de Moore-Penrose de una la matriz dada. Consideremos, por ejemplo, la matriz A del Ejemplo 2.2.5 y calculemos A^{+}.

Al igual que en el Ejemplo 2.2.5, los siguientes comandos se pueden ejecutar, por ejemplo, en `https://rdrr.io/snippets/`.

```
# Introducimos la matriz A
  A = as.matrix(data.frame(c(4,7,-1,8), c(-5,-2,4,2), c(-1,3,-3,6)))
# Cargamos la biblioteca matlib
```

```
  library(matlib)
# Ahora aplicamos la función MoorePenrose a la matriz A
  B <- MoorePenrose(A)
  B
```

Así, obtenemos que la inversa de Moore-Penrose de A es

```
             [,1]        [,2]       [,3]       [,4]
[1,]  0.08374660  0.06642937  0.1180211 0.03975364
[2,] -0.06694929 -0.01155815  0.1305791 0.05991041
[3,] -0.12294033 -0.02779555 -0.1980883 0.06103024
```

Ahora podríamos comprobar que la matriz obtenida cumple las propiedades (G1)-(G4) de la definición 3.1.1 con los siguiente comandos:

```
# A B A = A
   round(A %*% B %*% A - A, 8)
# A B A = B
   round(B %*% A %*% B - B, 8)
# A B es simétrica
   round(A %*% B - t(A %*% B), 8)
# B A es simétrica
   round(B %*% A - t(B %*% A), 8)
```

3.2. Soluciones aproximadas mínimo cuadráticas

Antes de introducir la noción de solución aproximada mínimo cuadrática, revisitemos algunos resultados básicos desde el punto de vista de la inversa de Moore-Penrose.

Elementalmente, un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es solución de un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ cuando $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$. Por lo que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible si, y sólo si, $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(A)$.

Proposición 3.2.1. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible si, y sólo si, $AA^+\mathbf{b} = \mathbf{b}$. En cuyo caso, $\mathbf{u} = A^+\mathbf{b}$ es una solución particular del sistema.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.4, AA^+ es la matriz de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathrm{Im}(A)$ respecto de la base usual de $\mathbb{R}^m$. Luego, $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(A)$ si y sólo si $AA^+\mathbf{b} = \mathbf{b}$.

La segunda afirma es una simple comprobación. $\square$

Teorema 3.2.2. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible, entonces $\mathbf{u}$ es una solución del sistema si, y sólo si, existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\mathbf{u} = A^+\mathbf{b} + (I_n - A^+A)\mathbf{v}. \tag{3.1}$$

Demostración. Si $\mathbf{u}$ es una solución del sistema, entonces $A^+A\mathbf{u} = A^+\mathbf{b}$; de modo que $A^+\mathbf{b} + (I_n - A^+A)\mathbf{u} = A^+\mathbf{b} + \mathbf{u} - A^+A\mathbf{u} = A^+\mathbf{b} + \mathbf{u} - A^+\mathbf{b} = \mathbf{u}$. Recíprocamente, dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\begin{aligned} A(A^+\mathbf{b} + (I_n - A^+A)\mathbf{v}) &= AA^+\mathbf{b} + A(I_n - A^+A)\mathbf{v} = \mathbf{b} + A(I_n - A^+A)\mathbf{v} \\ &= \mathbf{b} + (A - AA^+A)\mathbf{v} = \mathbf{b} + (A - A)\mathbf{v} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Luego, (3.1) es una solución del sistema. □

Corolario 3.2.3. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible determinado si, y sólo si, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible y $A^+A = I_n$.*

Demostración. Si el sistema es compatible determinado, entonces su única solución es $A^+\mathbf{b}$. Luego, del Teorema 3.2.2, se sigue que $A^+A = I_n$. Recíprocamente, si el sistema es compatible y $A^+A = I_n$, por el Teorema 3.2.2, tenemos que su única solución es $A^+\mathbf{b}$. □

Introduzcamos ya la noción de solución aproximada mínimo cuadrática de un sistema de ecuaciones lineales.

Definición 3.2.4. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Se dice que $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es **solución aproximada mínimo cuadrática del sistema** $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si $A\mathbf{u}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Im}(A)$. Equivalentemente, si $\mathbf{u}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, donde $\mathbf{b}_1$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Im}(A)$.

Proposición 3.2.5. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Entonces $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es una solución aproximada mínimo cuadrática del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si, y sólo si,*

$$\|A\mathbf{u} - \mathbf{b}\|^2 \leq \|A\mathbf{v} - \mathbf{b}\|^2,$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{u}$ es una solución aproximada mínimo cuadrática del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Es decir, $A\mathbf{u} = \mathbf{b}_1$ donde $\mathbf{b}_1$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre

$\mathrm{Im}(A)$. Luego, por el Teorema 1.1.10, $d(A\mathbf{u},\mathbf{b}) = d(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}) \leq d(A\mathbf{v},\mathbf{b})$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. De donde se sigue que $\|A\mathbf{u} - \mathbf{b}\|^2 \leq \|A\mathbf{v} - \mathbf{b}\|^2$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Recíprocamente,$\|A\mathbf{u} - \mathbf{b}\|^2 \leq \|A\mathbf{v} - \mathbf{b}\|^2$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces $d(A\mathbf{u},\mathbf{b}) \leq d(A\mathbf{v},\mathbf{b})$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Luego, por el Teorema 1.1.10, $A\mathbf{u}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\mathrm{Im}(A)$. □

Corolario 3.2.6. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Las soluciones aproximadas mínimo cuadráticas del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ son las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = AA^+\mathbf{b}$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que, por el Teorema 3.1.4, AA^+ es la matriz de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathrm{Im}(A)$. □

Corolario 3.2.7. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Entonces $\mathbf{u} = A^+\mathbf{b}$ es una solución aproximada mínimo cuadrática del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.*

Demostración. Si $\mathbf{u} = A^+\mathbf{b}$, entonces $A\mathbf{u} = AA^+\mathbf{b}$ y por el Corolario 3.2.6 concluimos con que $\mathbf{u}$ es solución aproximada mínimo cuadrática del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. □

Veamos ahora cómo son todas las soluciones aproximadas mínimo cuadráticas de sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Proposición 3.2.8. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Entonces, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es una solución aproximada mínimo cuadrática del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si, sólo si, existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\mathbf{u} = A^+\mathbf{b} + (I_n - A^+A)\mathbf{v} \tag{3.2}$$

Demostración. Por el Corolario 3.2.6, las soluciones aproximadas mínimo cuadráticas del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ son las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = AA^+\mathbf{b}$. Como, por el Corolario 3.2.7, el sistema $A\mathbf{x} = AA^+\mathbf{b}$ es compatible, del Teorema 3.2.2 se sigue que sus soluciones precisamente aquellas de la forma

$$A^+AA^+\mathbf{b} + (I_n - A^+A)\mathbf{v} = A^+\mathbf{b} + (I_n - A^+A)\mathbf{v},$$

para algún $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, lo que demuestra el resultado deseado. □

Corolario 3.2.9. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución aproximada mínimo cuadrática si, y sólo si $\mathrm{rg}(A) = n$. En este caso, tal solución es $(A^{\mathbf{t}}A)^{-1}A^{\mathbf{t}}\mathbf{b}$.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.8, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución aproximada mínimo cuadrática si, y sólo si, $I_n = A^+A$. Lo que equivale, por el apartado (h) de la Proposición 3.1.6, a $\mathrm{rg}(A) = n$. En cuyo caso, además, $A^+ = (A^{\mathbf{t}}A)^{-1}A^{\mathbf{t}}$. □

Definición 3.2.10. Se dice que una **solución mínimo cuadrática** de un sistema de ecuaciones lineales es **óptima** si tiene norma mínima en el conjunto de soluciones mínimo cuadráticas del sistema.

Corolario 3.2.11. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. La única solución óptima mínimo cuadrática del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $A^+\mathbf{b}$.*

Demostración. Sea $\mathbf{u}$ una solución aproximada mínimo cuadrática del sistema. Por la Proposición 3.2.8 que las soluciones mínimo cuadráticas de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ son precisamente las de la forma $\mathbf{u} = A^+\mathbf{b} + (I_n - A^+A)\mathbf{v}$ para algún $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Como $A^+\mathbf{b}$ es ortogonal a $(I_n - A^+A)\mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v}$; en efecto, usando las propiedades de la inversa generalizada, se obtiene

$$\begin{aligned}(A^+\mathbf{b})^{\mathbf{t}}(I_n - A^+A)\mathbf{v} &= \mathbf{b}^{\mathbf{t}}(A^+)^{\mathbf{t}}\mathbf{v} - \mathbf{b}^{\mathbf{t}}(A^+)^{\mathbf{t}}A^+A\mathbf{v} \\ &= \mathbf{b}^{\mathbf{t}}(A^{\mathbf{t}})^+\mathbf{v} - \mathbf{b}^{\mathbf{t}}(AA^{\mathbf{t}})^+A\mathbf{v} = \mathbf{b}^{\mathbf{t}}(A^{\mathbf{t}})^+\mathbf{v} - \mathbf{b}^{\mathbf{t}}(A^{\mathbf{t}})^+\mathbf{v} = 0,\end{aligned}$$

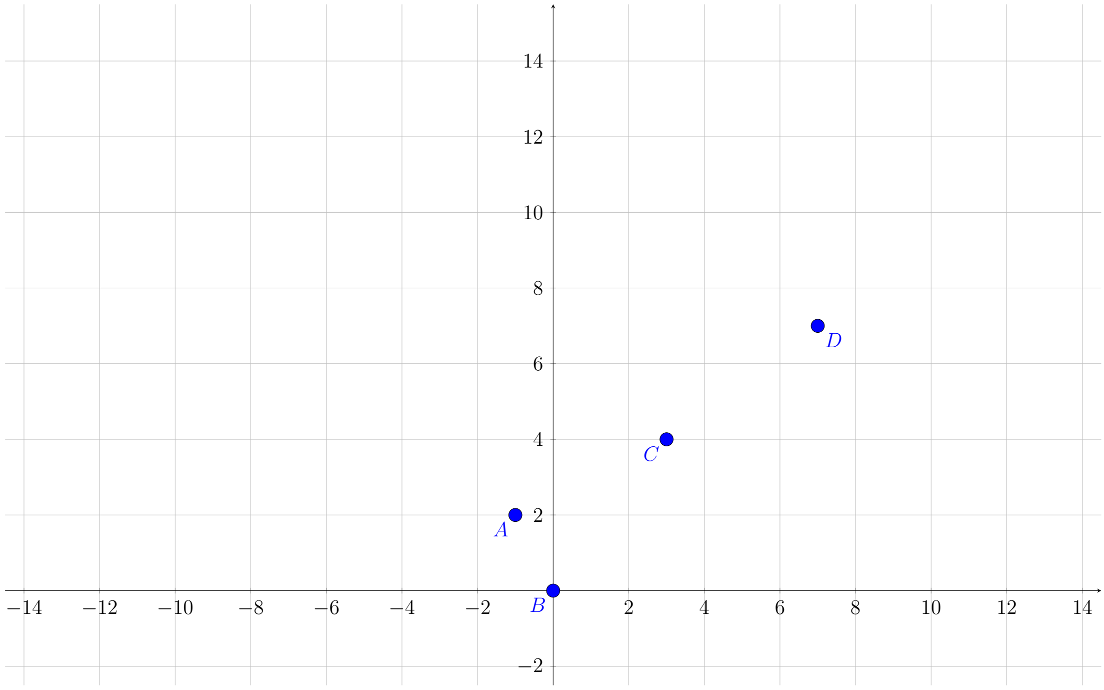
del Teorema de Pitágoras se sigue que

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \|A^+\mathbf{b}\|^2 + \|(I_n - A^+A)\mathbf{v}\|^2 \geq \|A^+\mathbf{b}\|^2.$$

y se da la igualdad si, y sólo si, $(I_n - A^+A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, es decir, $\mathbf{u} = A^+\mathbf{b}$. □

Mostremos el uso de la inversa de Moore-Penrose para resolver un problema regresión polinomial.

Ejemplo 3.2.12. Supongamos que tenemos los siguientes puntos del plano $(-1, 2), (0, 0)$, $(3, 4)$ y $(7, 7)$.



Queremos calcular la parábola que mejor se ajuste a estos puntos. Supongamos que tal parábola existe y es igual a $ax^2 + bx + c = y$. De tal forma que, sustituyendo cada uno de los puntos en esta ecuación y escribiendo el resultado en forma matricial, obtenemos que el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Sean A y $\mathbf{b}$ la matriz y el vector de términos independientes de (3.3).

Como $\mathrm{rg}(A) = 3$, la inversa de Moore-Penrose de A es, apartado (h) de la Proposición 3.1.6, igual a $(A^{\mathbf{t}}A)^{-1}A^{\mathbf{t}}$. Luego,

$$A^{+} = \frac{1}{6680} \begin{pmatrix} 235 & -40 & -400 & 205 \\ -1993 & -144 & 2568 & -431 \\ 2688 & 2584 & 1792 & -384 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Usando la Proposición 3.2.1, podemos determinar si nuestro sistema es compatible o incompatible, sin más que calcular $AA^{+}\mathbf{b}$. Como

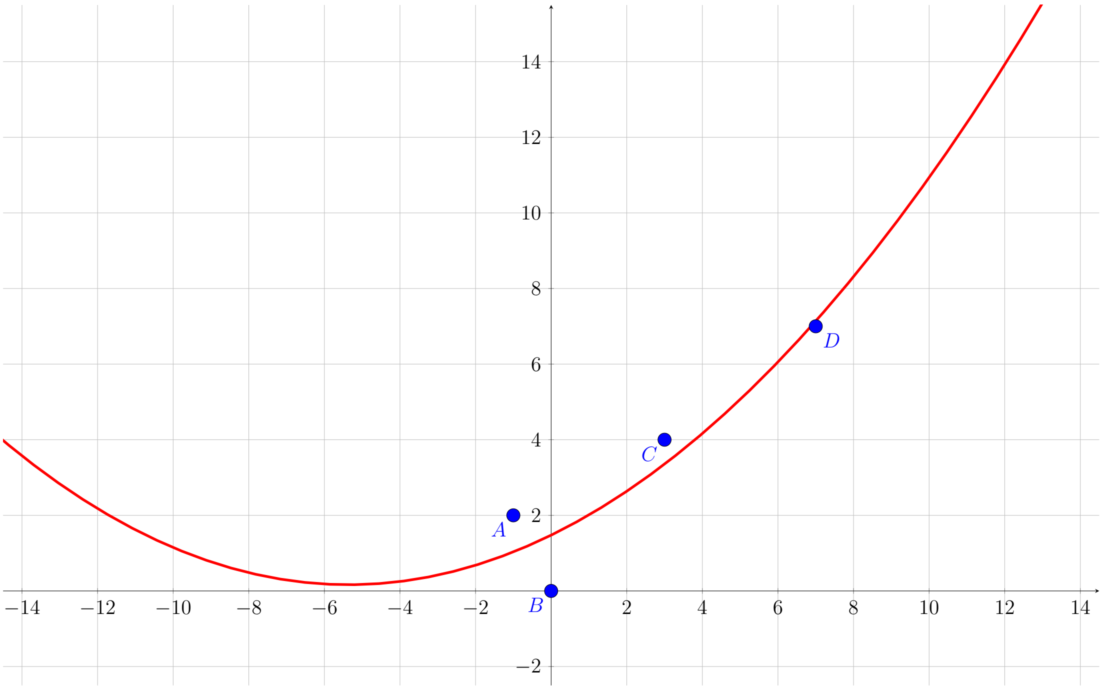
$$AA^{+}\mathbf{b} = \frac{1}{1670} \begin{pmatrix} 1723 \\ 2464 \\ 5602 \\ 11921 \end{pmatrix} \neq \mathbf{b},$$

tenemos que el sistema es incompatible, es decir, nuestro problema no tiene solución. Nos conformaremos por tanto con una solución aproximada mínimo cuadrática. En este caso, al ser A una matriz cuyo rango coincide con su número de columnas, por la Corolario 3.2.9, existe una única solución aproximada mínimo cuadrática; a saber, $\mathbf{u} = A^+\mathbf{b}$. En nuestro caso,

$$A^+\mathbf{b} = \frac{1}{6680}\begin{pmatrix} 305 \\ 3269 \\ 9856 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la parábola que mejor se ajusta a los puntos es

$$6680y = 305x^2 + 3269x + 9856.$$



Finalizamos esta sección con una observación, a modo de conclusión, que será de utilidad en la última sección.

Observación 3.2.13. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rango $r < n$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Consideremos la descomposición en valores singulares corta $A = P_1\Delta Q_1^{\mathbf{t}}$ y definamos $B = AQ_1 = P_1\Delta \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{R})$.

Como B tiene rango r, por el apartado (h) de la Proposición 3.1.6, se tiene que

$$B^+ = (B^{\mathbf{t}}B)^{-1}B^{\mathbf{t}} = (\Delta P_1^{\mathbf{t}} P_1 \Delta)^{-1}\Delta P_1^{\mathbf{t}} = \Delta^{-1}P_1^t,$$

y, como $A^+ = Q_1\Delta^{-1}P_1^t$, concluimos que $B^+ = Q_1^{\mathbf{t}}A^+$ y que

$$AA^+ = AQ_1\Delta^{-1}P_1^{\mathbf{t}} = BB^+.$$

De donde se sigue que, si $\mathbf{v}$ es la solución aproximada mínimo cuadrática de $B\mathbf{y} = \mathbf{b}$ (es decir, la solución de $B\mathbf{y} = BB^+\mathbf{b}$), entonces $\mathbf{u} = Q_1\mathbf{v}$ es una solución mínimo cuadrática de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (es decir, una solución de $A\mathbf{x} = AA^+\mathbf{b}$).

Además, como $Q_1B^+ = Q_1Q_1^{\mathbf{t}}A^+ = Q_1Q_1^{\mathbf{t}}Q_1\Delta^{-1}P_1^t = Q_1\Delta^{-1}P_1^t = A^+$, se tiene que $Q_1B^+\mathbf{b} = A^+\mathbf{b}$, es decir, la (única) solución mínimo cuadrática del sistema $B\mathbf{y} = \mathbf{b}$, se corresponde, vía Q_1, con la solución óptima mínimo cuadrática del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

En resumen, el cambio de variable $\mathbf{x} = Q_1\mathbf{y}$ permite reducir el cálculo de la solución óptima mínimo cuadrática de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ al cálculo de la solución mínimo cuadrática de $B\mathbf{y} = \mathbf{b}$, con la ventaja de que B tiene orden $m \times r$ y rango completo por columnas.

3.3. Otras inversas generalizadas

En esta breve sección queremos destacar la existencia de multitud de inversas generalizadas de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

La inversa de Moore-Penrose de A sólo es una de las muchas inversas generalizadas de A. Podemos definir diferentes clases de inversas generalizadas, según el subconjunto de las condiciones (G1)-(G4) que la inversa generalizada ha de cumplir.

Definición 3.3.1. Dado $\{i_1 < \ldots < i_r\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Se dice que una matriz de orden $n \times m$ es una **$\{i_1, \ldots, i_r\}$-inversa de** A si cumple las condiciones (Gi_1), ..., (Gi_r). Se suele denotar por $A^{\{i_1,\ldots,i_r\}}$.

Según la definición anterior, la inversa de Moore-Penrose de A es una $\{1, 2, 3, 4\}$-inversa de A; es decir, $A^+ = A^{\{1,2,3,4\}}$. Nótese que para cualquier subconjunto propio $\{i_1 < \ldots < i_r\}$ de $\{1, 2, 3, 4\}$, A^+ también será una $\{i_1, \ldots, i_r\}$-inversa de A, pero no será la única. Normalmente, como hay muchas $\{i_1, \ldots, i_r\}$-inversas de A, suele ser más fácil calcular una $\{i_1, \ldots, i_r\}$-inversa de A que la inversa de Moore-Penrose.

Si analizamos detalladamente el conjunto de propiedades (G1)-(G4) que hemos usado en la sección anterior, podemos concluir que es suficiente considerar $\{1\}-$inversas para estudiar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales, ya que solo usamos la propiedad (G1), y $\{1, 3\}-$inversas para las soluciones aproximadas mínimo cuadráticas, ya que $AA^{\{1,3\}}$ es la matriz de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ respecto de la base usual de $\mathbb{R}^m$, para cualquier $\{1,3\}-$inversa $A^{\{1,3\}}$. En efecto,

$$\begin{aligned} AA^{\{1,3\}} &= AA^+AA^{\{1,3\}} = (AA^+)^{\mathbf{t}}(AA^{\{1,3\}})^{\mathbf{t}} = (A^+)^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}}(A^{\{1,3\}})^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}} \\ &= (A^+)^{\mathbf{t}}(AA^{\{1,3\}}A)^{\mathbf{t}} = (A^+)^{\mathbf{t}}A^{\mathbf{t}} = (AA^+)^{\mathbf{t}} = AA^+, \end{aligned}$$

que, por el Teorema 1.1.12, es la matriz de la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Im}(A)$ respecto de la base usual de $\mathbb{R}^m$. Luego, en realidad, solamente la solución óptima mínimo cuadrática (ver Corolario 3.2.11) requiere realmente el uso de A^+.

Para un desarrollo detallado de las otras inversas generalizadas se puede consultar [10, Sección 5.8], [2, Capítulo 6] o, con mayor profundidad, la monografía [9].

3.4. El teorema de Gauss-Markov

Un **modelo lineal** consiste en un subespacio vectorial propio L de $\mathbb{R}^m$ y Y un vector aleatorio con m coordenadas tal que $\mathrm{E}[Y] \in L$ y las coordenadas de $Y - \mathrm{E}[Y]$ son independientes e idénticamente distribuidas según un modelo de probabilidad real P_ε con varianza finita.

Así, si denotamos por μ a la esperanza del vector aleatorio Y y por σ^2 a la varianza de cada una de sus coordenadas, podemos escribir

$$Y = \mu + \varepsilon, \text{ con } \mu = \mathrm{E}[Y] \in L$$

y

$$\varepsilon \sim \mathrm{P}_\varepsilon^m, \text{ con } \mathrm{E}[\mathrm{P}_\varepsilon] = 0 \text{ y } \operatorname{var}[\mathrm{P}_\varepsilon] = \sigma^2 > 0.$$

Como, por hipótesis, $\mu = \mathrm{E}[Y] \in L$, vamos a considerar como estimador, $\hat{\mu}$, de μ a la proyección ortogonal de Y sobre L, es decir, $\hat{\mu} = \pi_L(Y)$; ya que, por el Teorema 1.1.10, se tiene que

$$\|Y - \hat{\mu}\|^2 \leq \|Y - \mu\|^2,$$

para cualquiera que sea $\mu \in L$. Además, por la unicidad de la proyección ortogonal, se tiene que

$$\mathrm{E}[Y - \hat{\mu}] = \mathrm{E}[Y] - \mathrm{E}[\pi_L(Y)] = \mathrm{E}[Y] - \pi_L(\mathrm{E}[Y]) = \mathbf{0},$$

es decir, $\hat{\mu}$ es insesgado[1].

[1] Sin demasiado rigor, diremos que un **estimador** es **insesgado** cuando su valor esperado coincida con el valor verdadero. Una definición rigurosa se puede consultar en [4, Sección III.2].

Proposición 3.4.1. *Con la notación anterior, el siguiente estadístico es un estimador insesgado de* σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m - \dim(L)} \|Y - \hat{\mu}\|^2.$$

Demostración. Sea $X = Y - \hat{\mu}$. Como $X \in L^{\perp}$ y

$$\begin{aligned}(m - \dim(L))\ \mathrm{E}[\hat{\sigma}^2] &= \mathrm{E}[\|X\|^2] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{m} X_i^2\right] = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}\left[X_i^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}[X_i]^2 + \mathrm{var}[X_i] = \|\mathrm{E}[X]\|^2 + \mathrm{tr}(\mathrm{Cov}[X]) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{Cov}[X]) = \sum_{i=1}^{\dim(L^{\perp})} \mathrm{var}[X_i] = (m - \dim(L))\sigma^2,\end{aligned}$$

concluimos que $\mathrm{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2$ y, por lo tanto, que $\hat{\sigma}$ es insesgado. □

Se puede comprobar que la relación $A \geq B$ si, y sólo si, $A - B$ es semidefinida positiva es un orden parcial en el conjunto de las matrices cuadradas del mismo orden, lo que nos permite hablar de estimadores óptimos: un **estimador** es **óptimo** si su matriz de varianza es un mínimo para el orden parcial anterior.

En general, no podemos afirmar que $\hat{\mu}$ sea el mejor estimador insesgado; sin embargo, sí lo es, en cierto sentido, cuando nos restringimos a los familia de estimadores lineales insesgados.

Definición 3.4.2. Sea T un endomorfismo $\mathbb{R}^m$. Con la notación anterior, decimos que $T(Y)$ es un **estimador lineal insesgado** de μ, si $\mathrm{E}[T(Y)] = \mu$.

Obsérvese que si $A \geq B$, entonces $\mathrm{tr}(A) \geq \mathrm{tr}(B)$, aunque no al contrario. De este modo, si no podemos comparar varianzas, podemos tratar de comparar estimadores conforme a la traza de su covarianza.

Teorema 3.4.3 (Gauss-Markov)**.** *Con la notación anterior, $\hat{\mu}$ es el estimador lineal insesgado con varianza de mínima traza de μ.*

Demostración. Com π_L es un endomorfismo de $\mathbb{R}^m$, tenemos que $\pi_L(Y) = \hat{\mu}$ es un estimador lineal insesgado de μ.

Sean T un endomorfismo de $\mathbb{R}^m$ y B la matriz de T respecto de la base usual de $\mathbb{R}^m$, de tal forma que la coordenada $i-$ésima de $T(Y)$ es igual a $\mathbf{b}_i^{\mathbf{t}} Y$, siendo $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^m$ el vector cuyas coordenadas respecto de la base usual de $\mathbb{R}^m$ son los de la fila $i-$ésima de

B, $i = 1, \ldots, m$. Si $T(Y)$ es estimador lineal insesgado de μ, es decir, $\mathrm{E}[T(Y)] = \mu$, se tiene que $\mathrm{E}[\mathbf{b}_i^{\mathbf{t}} Y] = \mathbf{e}_i^{\mathbf{t}}\mu$, donde $\mathbf{e}_i$ es el $i-$ésimo vector de la base usual de $\mathbb{R}^m$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. De donde se sigue que $\mathbf{b}_i^{\mathbf{t}}\mu = \mathrm{E}[\mathbf{b}_i^{\mathbf{t}} Y] = \mathbf{e}_i^{\mathbf{t}}\mu$, es decir, $(\mathbf{b}_i - \mathbf{e}_i)^{\mathbf{t}}\mu = 0$, para todo $\mu \in L$ e $i \in \{1, \ldots, m\}$. Luego $\mathbf{b}_i - \mathbf{e}_i \in L^{\perp}$, es decir, $\pi_L(\mathbf{b}_i) = \pi_L(\mathbf{e}_i)$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Por lo tanto, usando el Teorema de Pitágoras $(*)$ y que π_L es un endomorfismo simétrico $(**)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}[\mathbf{b}_i^{\mathbf{t}} Y] &= \mathbf{b}_i^{\mathbf{t}} \operatorname{cov}[Y]\mathbf{b}_i = \sigma^2\|\mathbf{b}_i\|^2 = \sigma^2\|\mathbf{b}_i - \pi_L(\mathbf{b}_i) + \pi_L(\mathbf{b}_i)\|^2 \\
&\overset{(*)}{=} \sigma^2\left(\|\mathbf{b}_i - \pi_L(\mathbf{b}_i)\|^2 + \|\pi_L(\mathbf{b}_i)\|^2\right) \geq \sigma^2\|\pi_L(\mathbf{b}_i)\|^2 = \sigma^2\|\pi_L(\mathbf{e}_i)\|^2 \\
&= \sigma^2\pi_L(\mathbf{e}_i)^{\mathbf{t}}\pi_L(\mathbf{e}_i) = \pi_L(\mathbf{e}_i)^{\mathbf{t}} \operatorname{cov}[Y]\pi_L(\mathbf{e}_i) = \mathrm{var}[\pi_L(\mathbf{e}_i)^{\mathbf{t}} Y] \\
&\overset{(**)}{=} \mathrm{var}[\mathbf{e}_i^{\mathbf{t}}\pi_L(Y)] = \mathrm{var}[\mathbf{e}_i^{\mathbf{t}}\hat{\mu}],
\end{aligned}$$

verificándose la igualdad si y sólo si $\mathbf{b}_i = \pi_L(\mathbf{b}_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. De donde se sigue que

$$\mathrm{tr}(\operatorname{cov}[T(Y)]) = \mathrm{tr}(\operatorname{cov}[BY]) = \sum_{i=1}^m \mathrm{var}[\mathbf{b}_i^{\mathrm{t}} Y] \geq \sum_{i=1}^m \mathrm{var}[\mathbf{e}_i^{\mathrm{t}}\hat{\mu}] = \mathrm{tr}(\operatorname{cov}[\hat{\mu}]).$$

Para demostrar la unicidad basta tener en cuenta que si $\mathbf{b}_i = \pi_L(\mathbf{b}_i)$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces $\pi_L(\mathbf{e}_i) = \pi_L(\mathbf{e}_i - \mathbf{b}_i + \mathbf{b}_i) = \mathbf{b}_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. De donde se sigue que $B^{\mathbf{t}}$ es la matriz de la proyección ortogonal respecto de la base usual de $\mathbb{R}^m$ y, por lo tanto, que $T = \pi_L$, pues $B^{\mathbf{t}}$ es simétrica (véase el Teorema 1.1.12). □

Consideremos ahora el modelo de regresión lineal

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

siendo $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ un vector aleatorio de componentes incorreladas con media 0 y varianza finita común $\sigma^2 > 0$, X una matriz real de orden $m \times n$ conocida y $\beta \in \mathbb{R}^n$ los coeficientes de regresión que se suponen fijos pero desconocidos. El problema que nos ocupa ahora es el de estimar β en función del vector de observaciones Y.

Nótese que $\mu := \mathrm{E}[Y] \in L := \mathrm{Im}(X) \subseteq \mathbb{R}^m$. Sin perdida de generalidad (teórica, al menos), podemos suponer que X tiene rango $n < m$ (véase la Observación 3.2.13).

Sea $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal. Con la notación anterior, decimos que $T(Y)$ es un estimador lineal insesgado de β, si $\mathrm{E}[T(Y)] = \beta$.

El siguiente resultado también suele denominar teorema de Gauss-Markov.

Corolario 3.4.4. *Con la notación anterior, el único estimador lineal insesgado óptimo de β es*

$$\hat{\beta} = (X^{\mathbf{t}}X)^{-1}X^{\mathbf{t}}Y$$

con matriz de covarianza $\sigma^2(X^{\mathbf{t}}X)^{-1}$.

Demostración. Como el rango de X es n, por el corolario 3.2.9, tenemos que la única solución aproximada mínimo cuadrática de $X\beta = Y$ es $\hat{\beta}$ y, por lo tanto, $\operatorname{cov}[\hat{\beta}] = (X^{\mathbf{t}}X)^{-1}X^{\mathbf{t}} \operatorname{cov}[Y]X(X^{\mathbf{t}}X)^{-1} = \sigma^2(X^{\mathbf{t}}X)^{-1}$.

Claramente, $(X^{\mathbf{t}}X)^{-1}X^{\mathbf{t}}$ define una aplicación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ y, como $\beta = (X^{\mathbf{t}}X)^{-1}X^{\mathbf{t}}\hat{\mu}$, se tiene que

$$E[\hat{\beta}] = (X^{\mathbf{t}}X)^{-1}X^{\mathbf{t}}E[Y] = (X^{\mathbf{t}}X)^{-1}X^{\mathbf{t}}\,\mathrm{E}[\hat{\mu}] = \mathrm{E}[(X^{\mathbf{t}}X)^{-1}X^{\mathbf{t}}\hat{\mu}] = \mathrm{E}[\beta] = \beta.$$

Luego β es un estimador linear insesgado.

Consideremos ahora otro estimador linear insesgado $\tilde{\beta}$, que podemos escribir $\tilde{\beta} = \hat{\beta} + CY$ para alguna matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que $CX = \mathbf{0}$, pues al ser $\tilde{\beta}$ insesegado se tiene que

$$\beta = \mathrm{E}[\tilde{\beta}] = \mathrm{E}[\hat{\beta} + CY] = \beta + C\,\mathrm{E}[Y] = \beta + C\,\mathrm{E}[\hat{\mu}] = \beta + CX\,\mathrm{E}[\hat{\beta}] = \beta + CX\beta,$$

para todo $\beta \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}[\tilde{\beta}] &= \operatorname{cov}[\hat{\beta} + CY] = \sigma^2((X^{\mathrm{t}}X)^{-1}X^{\mathbf{t}} + C)(X(X^{\mathrm{t}}X)^{-1} + C^{\mathbf{t}}) \\ &= \sigma^2(X^{\mathbf{t}}X)^{-1} + \sigma^2CC^{\mathrm{t}} = \operatorname{cov}[\hat{\beta}] + \sigma^2CC^{\mathrm{t}}. \end{aligned}$$

y, como σ^2CC^{t} es semidefinida positiva (véase la Proposición 2.1.1(b)), concluimos que $\operatorname{cov}[\tilde{\beta}] \geq \operatorname{cov}[\hat{\beta}]$ y que se da la igualdad si, y sólo si, $C = \mathbf{0}$. □

Bibliografía

[1] Arnold, S.F. The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis. Wiley. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1981.

[2] Basilevsky, A. *Applied matrix algebra in the statistical sciences*, North-Holland, New York, 1983.

[3] Bolós Lacave, V.; Cayetano, J.; Requejo, B. *Álgebra Lineal y Geometría.* Manuales UEx 50. Universidad de Extremadura, 2007.

[4] García-Nogales, A. Estadística Matemática. Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones, 1998.

[5] Magnus, J. R.; Neudecker, H. Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics. 3ª edición, 2007

[6] Montanero Fernández, J. *Modelos lineales.* Manuales UEx 56. Universidad de Extremadura, 2008.

[7] Ojeda Martínez de Castilla, I.; Gago Vargas, J. *Métodos Matemáticos para Estadística.* Manuales UEx 58. Universidad de Extremadura, 2008.

[8] R Core Team (2018). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL `https://www.R-project.org/` (último acceso 16 de septiembre de 2023).

[9] Rao C.R.; Mitra S.K. *Generalized inverse of matrices and its applications*, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1971.

[10] Schott, J.R. *Matrix analysis for statistics*, second ed., Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2005.