EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **17**, Núm. 1, 59 – 68 (2002)

Domaine Numérique de l'Opérateur Produit $M_{2,A,B}$ et de la Dérivation Généralisée $\delta_{2,A,B}$

Mohamed Chraibi Kaadoud

Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia,
Département des Mathématiques, Marrakech, Maroc
e-mail: chraibik@hotmail.com

(Research paper presented by M. González)

AMS *Subject Class.* (2000): 47A12 *Received February* 22, 2000

1. Introduction

Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, $B(H)$ l'ensemble de opérateurs bornés sur H et $\sigma(A)$ le spectre de A, $A \in B(H)$. Le domaine numérique de A est

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle\,,\ \ \|x\| = 1\ \}\,,$$

et le rayon numérique de A est

$$w(A) = \sup\{|z|\,,\ z \in W(A)\}\,.$$

L'étude du domaine numérique est importante, elle permet entre autre de repérer $\sigma(A)$ puisque $\operatorname{co}\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$ (voir [7, théorème 1-2-1]) où $\operatorname{co}(K)$ désigne l'enveloppe convexe de K, $K \subset \mathbb{C}$. Si A est sous normal ou hypnormal alors la dérnière inclusion devient une égalité (voir [8, problème 172] pour le cas sous normal). Dans certains cas, l'application domaine numérique possède plus de propriétés que l'application spectre. Par exemple la première est continue au sens de Hausdorff, alors que la deuxième n'est que semi-continue supérieurement (voir [2, théorème 3.4.2]). De plus, le domaine numérique est toujours un convexe borné du plan complexe $\mathbb{C}$ (voir [11]).

On note par $C_2\,(H)$ l'espace de Hilbert-Schmidt muni du produit scalaire

$$\langle X, Y\rangle_2 = \operatorname{tr}\ (XY^*)\ \text{ pour } X, Y \in C_2\,(H)\,,$$

où tr désigne la trace. On rappel que pour $X \in C_2\,(H)$ et $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système maximal de vecteurs orthonormés de H, $\operatorname{tr}(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle Xx_i, x_i\rangle$. Cette expression est indépendante du choix du système maximal de H (voir [13, III, lemme 1]).

Pour A et B dans $B(H)$, la dérivation généralisée $\delta_{2,A,B}$ et l'opérateur produit $M_{2,A,B}$ (ou bimultiplication) sont deux opérateurs définis sur $C_2(H)$ par

$$\delta_{2,A,B}(X) = AX - XB \text{ et } M_{2,A,B}(X) = AXB, \ \forall X \in C_2(H).$$

La détermination du domaine numérique de l'opérateur $M_{2,A,B}$ est une question difficile qui a etait posée par L. Fialkow dans [5]. Pour étudier cette question et pour déterminer $W(\delta_{2,A,B})$ nous montrons au paragraphe suivant que tout convexe C de $\mathbb{C}$ est fermé pour les séries convexes (on dira que C est c.s. fermé) c'est à dire pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C et pour toute suite de réels positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ est convergente alors elle converge dans C.

Bouldin [4] a démontré que si A et B commutent, et si A est positif alors $W(AB) \subset W(A)W(B)$. Ceci nous permet de conclure rapidement que dans ce cas $W(M_{2,A,B}) = W(A)W(B)$, mais le cas général n'est pas encore résolu. Dans le paragraphe 3 nous montrons que

$$W(M_{2,A,B}) \subset \operatorname{co} W(A)W(B) + \overline{S(A)S(B)},$$

où

$$S(A) = \{\langle Ax, y\rangle, \|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Il s'ensuit que

$$w(M_{2,A,B}) \leq w(A)w(B) + d(A)d(B), \tag{1}$$

et que

$$\|AB\| \leq 2w(A)w(B) + 2d(A)d(B), \tag{2}$$

avec $d(A) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|A - \lambda\|$. Holbrook [9] a démontré que si A commute avec B et B^* alors $w(AB) \leq w(A)\|B\|$, ceci nous donne

$$w(M_{2,A,B}) \leq w(A)\|B\|. \tag{3}$$

On rappele l'inégalité classique suivante :

$$\|A\| \leq 2w(A), \tag{4}$$

(voir [7, théorème 1-3-1]. D'où

$$\|AB\| \leq 4w(A)w(B). \tag{5}$$

Il est clair que l'inégalité (2) est une généralisation de (4). Nous montrons par des exemples que dans certains cas, l'inégalité (1) est meilleur que (3) et que (2) est mieux que (5).

C.K. Fong [6] et S.Y. Shaw [14] ont montré que $\overline{W(\delta_{2,A,B})} = \overline{W(A)} - \overline{W(B)}$. Nous montrons au paragraphe 4 que $W(\delta_{2,A,B}\ ) = W(A) - W(B)$.

2. Convexes c.s. fermés de $\mathbb{C}$

Dans ce paragraphe, nous étudions des parties de $\mathbb{C}$ qui sont fermés pour les séries convexes.

Définition 1. ([10]) Une partie C de $\mathbb{C}$ est dite compact pour les séries convexes, (respectivement c.s. fermée) si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C et $\mathring{C}$ pour toute suite de réels positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$, nous avons $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ est un élément de C (respectivement si la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n x_n$ converge alors elle converge dans C).

Dans la suite de ce paragraphe, $\mathring{C}$ désignera l'intérieur de C, et pour simplifier les démonstrations on prendra les a_n strictement positifs pour tout n de $\mathbb{N}$.

Lemme 2. *Soient C un convexe de $\mathbb{C}$, $x \in \mathring{C}$ et $y \in \overline{C}$. Alors le ségment $[x, y[\subset \mathring{C}$.*

Preuve. Pour la démonstration, voir [15, théorème T. 2, XIX, 2 ; 4]. ∎

Remarque 3. Il est facile de démontrer que tout convexe fermé borné d'un espace vectoriel normé est compact pour les séries convexes.

Lemme 4. *Tous ségment et toute demi-droite de $\mathbb{C}$ sont c.s. fermés.*

Preuve. Considérons le cas d'un segment de la forme $]z, z'[$. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]z, z'[$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$. D'après la remarque précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ est dans $[z, z']$. D'autre part les vecteurs $x_n - z_n$ sont alignés et de même sens et $|x_n - z| > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$\left|\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right) - z\right| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n - \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\,|x_n - z| > 0.$$

De même, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n |x_n - z'| > 0$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ est dans $]z, z'[$. On fait un raisonnement analogue pour les autres types de ségments et pour la demi-droite. ∎

Théorème 5. *Soit C un convexe de $\mathbb{C}$ alors C est c.s. fermé.*

Preuve. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ convergente. Nous avons deux cas à déscuter. Le premier c'est celui où les x_n sont tous alignés, alors le plus petit convexe I contenant tous les x_n est une demi droite ou un ségment de C et d'après la remarque et le lemme précédents, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ est dans I. Le second cas est celui où ils existent i, j et k dans $\mathbb{N}$ tels que x_i, x_j, x_k forment un triangle T. Alors le point

$$z' = \frac{1}{a_i + a_j + a_k}(a_i x_i + a_j x_j + a_k x_k),$$

est dans $\mathring{C}$. En effet, soit $z = \frac{1}{a_i + a_j}(a_i x_i + a_j x_j)$ alors $z \in]x_i, xj[$. Or

$$z' = \frac{(a_i + a_j)z}{a_i + a_j + a_k} + \frac{a_k x_k}{a_i + a_j + a_k}$$

est dans $]z, x_k[$ qui est inclus dans $\mathring{T}$ et nous avons $\mathring{T} \subset \mathring{C}$.

Soit $t = \sum_{n\notin\{i,j,k\}} a'_n x_n$ avec $a'_n = \left(\sum_{m\notin\{i,j,k\}} a_m\right)^{-1} a_n$.

Comme $\sum_{n\notin\{i,j,k\}} a'_n = 1$, par la remarque précédente, on conclue que $t \in \overline{C}$. D'autre part,

$$\sum_{n\notin\mathbb{N}} a_n x_n = (a_i + a_j + a_k)z' + \left(\sum_{n\notin\{i,j,k\}} a_n\right) t \in]z', t[,$$

et le lemme 2 permettent de voir que $]z', t[\subset \mathring{C}$ et par suite $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \in \mathring{C}$. ∎

3. Domaine numérique de l'opérateur produit $M_{2,A,B}$

Les deux lemmes suivants nous seront utiles pour démontrer le théorème 8.

Lemme 6. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ de dimension deux et $A \in B(H)$ alors $S(A)$ est un disque centré à l'origine et de rayon $d(A)$.*

Preuve. Ando (voir [1] ou [3]) a démontré que $\sup\{|z|\,,\, z \in S(A)\} = d(A)$. Pour démontrer le lemme, vu la symétrie circulaire de $S(A)$, il suffit de vérifier que l'un des deux seguements $[0, d(A)[$ ou $]-d(A), 0]$ est dans $S(A)$. Or tout opérateur sur H admet un trasformé affine pour lequel la matrice dans une base orthonormée est de la forme

$$(1) : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3) : \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} = T_a$$

où $a \geq 1$. Soient $(e_1,\, e_2)$ une base orthonormée de H et

$$B = \{(x, y) \in H,\ x = \cos\theta.e_1 + \sin\theta.e_2,\ y = \sin\theta.e_1 + \cos\theta.e_2,\ \theta \in [0, 2\pi[\}\,.$$

Si A est de la forme (1), le lemme 5 est évident.

Si A est de la forme (2), $d(A) = \|A\| = 1$ et pour $(x, y) \in B$, $\langle Ax, y\rangle = \cos^2\theta$. Donc $]0, d(A)[$ est dans $S(A)$.

Si A est de la forme (3) alors $\|A\| = a$. Quand (x, y) parcoure B, $\langle Ax, y\rangle = -a\sin^2\theta + a^{-1}\cos^2\theta$ fait de même dans $[-a, a^{-1}]$. D'où $]-d(A), 0] \subset S(A)$.

L'opérateur A admet un transformé affine $\alpha A + \beta I$ de la forme (1), (2) ou (3) et $S(\alpha A + \beta I) = \alpha S(A)$ est un disque centré à l'origine et de rayon $|\alpha|\, d(A)$. Donc $S(A)$ est le disque centré à l'origine et de rayon $d(A)$. ∎

Lemme 7. *Le lemme précédent réste valable lorsque H est un éspace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.*

Preuve. Soient F un sous espace de H et A/F la compréssion de A à F i.e. pour tout x de F, $A/F(x) = PA(x)$ où P est la projection orthogonale sur F, nous avons $S(A/F) \subset S(A)$. En effet, pour x, y deux vecteurs orthonormés de F, nous avons

$$\langle PAx, y\rangle = \langle Ax, Py\rangle = \langle Ax, y\rangle \in S(A).$$

Considérons $F = \operatorname{vect}(x, y)$ et $F' = \operatorname{vect}(x', y')$ où $\{x', y'\}\,,\, \{x, y\}$ sont deux systèmes de vecteurs orthonormés de H. Or $S(A/F) \subset S(A)$ et $S(A/F') \subset S(A)$ alors les disques de centre 0, de rayons repectivement $|\langle Ax, y\rangle|$ et $|\langle Ax', y'\rangle|$ sont dans $S(A)$; d'où le ségment $[\langle Ax, y\rangle\,, \langle Ax', y'\rangle]$ est dans $S(A)$. Ainsi $S(A)$ est convexe, de rayon $d(A)$ et admet la symétrie cerculaire, par suite c'est le disque centré à l'origine et de rayon $d(A)$. ∎

Lemme 8. *Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $A, B \in B(H)$. Pour une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs orthonormés de H, Considérons U_i et V_i deux éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définis par*

$$\begin{aligned} U_i &= (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \quad \text{avec } \alpha_j = |\langle Ax_i, x_j\rangle| \text{ si } j \neq i \quad \text{et } \alpha_i = 0. \\ V_i &= (\beta_j)_{j\in\mathbb{N}} \quad \text{avec } \beta_j = |\langle Bx_j, x_i\rangle| \text{ si } j \neq i \quad \text{et } \beta_i = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\|U_i\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j^2 \leq d^2(A) \quad \text{et} \quad \|V_i\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_j^2 \leq d^2(B).$$

Preuve. D'après Ando (voir [1] ou [3]), $d(A) = \sup \|AP - PAP\|$, où le suprémum est pris sur toutes les projections orthogonales P de rang 1. Soit P la projection orthogonale sur vect(x_i), nous avons

$$\|(AP - PAP)(x_i)\| \leq d(A) \quad \text{et} \quad |(AP - PAP)(x_i)| \leq |U_i|.$$

Pour V_i, on considère la projection orthgonale P sur vect(x_i) et par suite

$$\|(B^*P - PB^*P)(x_i)\| \leq d(B^*) = d(B) \quad \text{et} \quad (B^*P - PB^*P)(x_i) = V_i.$$

D'où le résultat. ∎

Théorème 9. *Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et A, B deux éléments de $B(H)$ alors*

$$W(M_{2,A,B}) \subset \operatorname{co} W(A)W(B) + \overline{S(A)S(B)}.$$

Preuve. Soit $X \in C_2(H)$, d'après [11, II, theorème 3], il existe deux suites $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments orthonormés de H et une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telles que $X = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x_i \otimes y_i$. Si $\|X\| = 1$ on a $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2 = 1$. Dans le développement du calcul qui suit, la trosième égalité s'obtient par [13, I, lemme 2] et la quatrième par [13, III, lemme 9].

$$\begin{aligned}
\langle M_{2,A,B}X, X\rangle &= \operatorname{tr}(AXBX^*) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_ia_jAx_i\otimes y_i.By_j\otimes x_j\right)\\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_ia_j\operatorname{tr}(Ax_i\otimes(x_j\otimes y_jB^*)y_i)\\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_ia_j\left\langle Ax_i, x_j\otimes y_j(B^*y_i)\right\rangle\\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_ia_j\left\langle Ax_i, \overline{\langle By_j, y_i\rangle}x_j\right\rangle\\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_ia_j\left\langle Ax_i, x_j\right\rangle\left\langle By_j, y_i\right\rangle\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2\left\langle Ax_i, x_i\right\rangle\left\langle By_i, y_i\right\rangle + \sum_{i,j,i\neq j} a_ia_j\left\langle Ax_i, x_j\right\rangle\left\langle By_j, y_i\right\rangle.
\end{aligned}$$

D'après le théorème 4,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2\left\langle Ax_i, x_i\right\rangle\left\langle By_i, y_i\right\rangle \in \operatorname{co}W(A)W(B).$$

Par le lemme 6, $\overline{S(A)S(B)} = \overline{D(0, d(A)d(B))}$; il reste à montrer que

$$\left|\sum_{i,j,i\neq j} a_ia_j\left\langle Ax_i, x_j\right\rangle\left\langle By_j, y_i\right\rangle\right| \leq d(A)d(B).$$

En effet :

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i,j} a_ia_j\left\langle Ax_i, x_j\right\rangle\left\langle By_j, y_i\right\rangle\right| \leq \sum_{i,j,i\neq j} a_ia_j\left|\left\langle Ax_i, x_j\right\rangle\right|\left|\left\langle By_j, y_i\right\rangle\right|\\
&= \sum_{i,j,i\neq j}\left[a_i\left(\left|\left\langle Ax_i, x_j\right\rangle\right|\left|\left\langle By_j, y_i\right\rangle\right|\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[a_j\left(\left|\left\langle Ax_i, x_j\right\rangle\right|\left|\left\langle By_j, y_i\right\rangle\right|\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i,j,i\neq j} a_i^2\left|\left\langle Ax_i, x_j\right\rangle\right|\left|\left\langle By_j, y_i\right\rangle\right| + \sum_{i,j,i\neq j} a_j^2\left|\left\langle Ax_i, x_j\right\rangle\right|\left|\left\langle By_j, y_i\right\rangle\right|\\
&\leq \frac{1}{2}\sum_i a_i^2\sum_{j\neq i}\left|\left\langle Ax_i, x_j\right\rangle\right|\left|\left\langle By_j, y_i\right\rangle\right| + \frac{1}{2}\sum_j a_j^2\sum_{i\neq j}\left|\left\langle Ax_i, x_j\right\rangle\right|\left|\left\langle By_j, y_i\right\rangle\right|\\
&= \frac{1}{2}\sum_i a_i^2\left\langle U_i, V_i\right\rangle + \frac{1}{2}\sum_j a_j^2\left\langle U_j, V_j\right\rangle,
\end{aligned}$$

où U_i et V_i sont ceux définis dans le lemme 7 qui permet aussi de conclure que

$$\left|\sum_{i,j} a_i a_j \langle Ax_i, x_j\rangle \langle By_j, y_i\rangle\right| \leq \sum_i a_i^2 \|U_i\| \|V_i\| = d(A)d(B).$$

∎

Remarques 10. 1) En dimension finie, la compacité de l'ensemble

$$\{(x,y) \in H \times H,\ \|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } \langle x,y\rangle = 0\},$$

et la continuité de l'application $(x,y) \to \langle Ax, y\rangle$ impliquent facilement que $S(A)$ est férmé.

2) La majoration de $\left|\sum_{i,j,i\neq j} a_i a_j \langle Ax_i, x_j\rangle \langle By_j, y_i\rangle\right|$ par $d(A)d(B)$ est optimale. En effet, si $A = B$ et d'après [12], nous avons

$$\begin{aligned}
&\{\langle Au,u\rangle - \langle Av,v\rangle,\ \|u\| = \|v\| = 1\}\\
&= \{\langle Au,v\rangle + \langle Av,u\rangle,\ \|u\| = \|v\| = 1,\ \langle u,v\rangle = 0\}.
\end{aligned}$$

Si le diametre de $W(A)$ est $2d(A)$ alors il existe deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de H telles que $\|u_n\| = \|v_n\| = 1$, $\langle u_n, v_n\rangle = 0$ et $\lim_n |\langle Au_n, v_n\rangle| = \lim_n |\langle Av_n, u_n\rangle| = d(A)$. Soient a_1 et a_2 dans $\mathbb{C}$ tels que $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, On pose $x_{1,n} = u_n$, $x_{2,n} = v_n$, $y_{1,n} = u_n$ et $y_{2,n} = v_n$ alors

$$\begin{aligned}
&\lim_n \left|\sum_{i,j,i\neq j} a_i a_j \langle Ax_{i,n}, x_{j,n}\rangle \langle Ay_{j,n}, y_{i,n}\rangle\right|\\
&= \lim_n |\langle Au_n, v_n\rangle \langle Av_n, u_n\rangle| = d^2(A).
\end{aligned}$$

Corollaire 11. *Soient A et B deux opérateurs de $B(H)$ alors*

$$\begin{aligned}
w(M_{2,A,B}) &\leq w(A)w(B) + d(A)d(B).\\
\|A\|\,\|B\| &\leq 2w(A)w(B) + 2d(A)d(B)
\end{aligned}$$

Preuve. L'inégalité (1) découle facilement du théorème précédent. Puisque $\|M_{2,A,B}\| = \|A\|\,\|B\|$ et $\|M_{2,A,B}\| \leq 2w(M_{2,A,B})$, d'où (2). ∎

Remarques 12. 1) L'inégalité (3) est dans certains cas moins optimale que (1) ; en effet, si par exemple

$$A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors $w(A)w(B) + d(A)d(B) = \frac{n+2}{2}$ et $w(A)\|B\| = n + 1$. De plus (1) est optimale puisque si nous prenons $B = I$ et A quelconque dans $B(H)$, nous avons $w(M_{2,A,B}) = w(A)w(B) + d(A)d(B) = w(A)$.

2) L'inégalité (2) est optimale, en effet si nous prenons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = I,$$

alors $\|AB\| = \|A\|\|B\| = 2w(A)w(B) + 2d(A)d(B) = 2w(A) = 1$. Généralement nous avons $\|A\|\|B\| \leq 4w(A)w(B)$, cette inégalité dans le cas de l'exemple précédent est moins optimale que (2).

3) Nous savons que $\|A\| \leq 2w(A)$, cette inégalité est un cas particulier de (2) si on prend $B = I$.

4. Domaine numérique de la dérivation généralisée $\delta_{2,A,B}$

Soient A et B deux éléments de $B(H)$, dans ce paragraphe, nous déterminons à quoi est égale exactement l'image numérique de la dérivation généralisée $\delta_{2,A,B}$.

Théorème 13. *Soient A et B deux éléments de $B(H)$, alors $W(\delta_{2,A,B}) = W(A) - W(B)$.*

Preuve. Soit X un élément unitaire de $C_2(H)$, d'après [13, II, théorème 3], il existe une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ et deux suites $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments orthonormés de H telles que

$$X = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x_i \otimes y_i \quad \text{et} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2 = 1.$$

Nous avons

$$\langle \delta_{2,A,B}X, X\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2 \langle Ax_i, x_i\rangle - \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2 \langle Bx_i, x_i\rangle .$$

D'après Toeplitz-Hausdorff (voir [11]), $W(A)$ et $W(B)$ sont deux convexes de $\mathbb{C}$ et par le théorème 5 nous avons

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2 \langle Ax_i, x_i\rangle \in W(A) \quad \text{et} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2 \langle Bx_i, x_i\rangle \in W(B)$$

et, par suite, $W(\delta_{2,A,B}) \subset W(A) - W(B)$.

Soit $z \in W(A) - W(B)$, $z = \langle Ax, x\rangle - \langle By, y\rangle$ avec x et y deux éléments unitaires de H. Posons $X = x \otimes y$, c'est un élément unitaire de $C_2(H)$ et facilement on peut verifier que $z = \langle \delta_{2,A,B} X, X\rangle$. Par suite $W(A) - W(B) \subset W(\delta_{2,A,B}\ )$, d'où l'égalité. ∎

Références

[1] Ando, T., Distance to the set of thin operators, preprint, 1972.
[2] Aupetit, B., "A Primer on Spectral Theory", Springer-Verlag, New Work, 1991.
[3] Apostol, C., Fialkow, L., Herrero, D., Voiculescu, D., "Approximation of Hilbert Space Operators", Volume II, Research Notes in Math. 102, Pitman, 1984.
[4] Bouldin, The numerical range of a product, *J. Math. Anal. Appl.*, **32** (1970), 459 – 467.
[5] Fialkow, L., "Elementary operators and applications", Proceedings of the International Workshop, 9-12 june 1991.
[6] Fong, C.K., "Some Aspects of Derivation on $B(H)$", Seminar notes, University of Toronto, 1978.
[7] Gustafson, K., Rao, D., "Numerical Range", Springer, 1996.
[8] Halmos, P.R., "A Hilbert Space Problem Book", Van Nostrand, Princeton, N.J., (1967).
[9] Holbrook, J., Multiplicative properties of the numerical radius in operator theory, *J. Reine Angew. Math.,* **237** (1969), 166 – 174.
[10] Jameson, G.J.O., Convex series, *Proc. Cambridge Philos. Soc.,* Vol. **72** (6) (1972), 37 – 47.
[11] Li, C.K., C-Numerical range and C-Numerical radij, *Linear and multilinear algebra,* **31**, 51 – 82.
[12] Tsing, N.K., Diameter and minimal width of the numerical range, *Linear and multilinear algebra*, Vol. **14** (1983), 179 – 185.
[13] Schatten, R., "Norme Ideals of Completely Continuous Operators", Ergeb. Math. Grenzgeb., Band 27, Springer-Verlag, Berling, 1970.
[14] Shaw, S.Y., On numerical ranges of generalized derivations and related properties, *J. Austral. Math. Soc.*, Ser. A 36 (1984), 134 – 142.
[15] Schwartz, L., "Analyse, Topologie Génerale et Analyse Fonctionelle", Hermann, 1970.