

Espaces Parfaits dans une Dualité Séparante sur un Corps Valué Non-Archimédien

R. AMEZIANE HASSANI, M. BABAHMED

*Faculté des Sciences Dhar El Mehraz, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
B.P. 1796 Fès, Maroc*

*Dépt. de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tétouan, Université Abdelmalek Essaâdi
B.P. 2121 Tétouan, Maroc*

e-mail: ramezianehassani@hotmail.com, babahmedmohammed@hotmail.com

(Research paper presented by Susanne Dierolf)

AMS Subject Class. (2000): 46A45

Received November 22, 2000

INTRODUCTION

La dualité dans les espaces de suites scalaires a été introduite et étudiée par Köthe et Toeplitz [7]. Ensuite, Maddax [3] a généralisé cette théorie aux espaces de suites sur un espace de Banach. Dans [1] on a généralisé et étudié les duals de Köthe-Toeplitz dans les espaces de suites sur un espace de Fréchet non-archimédien (n.a.).

Dans ce travail, on s'intéresse aux duals de Köthe-Toeplitz définis à partir d'une dualité séparante d'espaces de Banach n.a. ; on généralise la notion d'espaces parfaits et on établit des résultats généralisant des théorèmes concernant ces espaces [4].

Soit $(K, |\cdot|)$ un corps valué n.a. On considère les ensembles suivants : $N_K = \{|\alpha| : \alpha \in K\}$ (ensemble des valeurs de $|\cdot|$) ; $G_K = N_K \setminus \{0\}$ (groupe des valeurs de $|\cdot|$) ; G_K est un sous-groupe multiplicatif de \mathbb{R}_+^* . Dans toute la suite $\rho > 1$ désigne : 1° le générateur de G_K , si G_K est cyclique ; 2° le nombre positif tel qu'il existe $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dans K vérifiant $|\lambda_n| = \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si G_K est dense dans \mathbb{R}_+^* .

1. DUALS DE KÖTHER-TOEPLITZ DANS UNE DUALITÉ SÉPARANTE

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach n.a. mis en dualité séparante $\langle X, Y \rangle$. On note $\omega(X)$ l'ensemble de toutes les suites d'éléments de

X . On appelle espace de suites sur X tout sous-espace vectoriel de $\omega(X)$. On définit les espaces de suites sur X suivants :

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= \{(x_k) \in \omega(X) : \exists k_0 \in \mathbb{N} / x_k = 0 \ \forall k \geq k_0\}, \\ c_0(X) &= \{(x_k) \in \omega(X) : (x_k) \text{ converge vers } 0 \text{ dans } X\}, \\ c(X) &= \{(x_k) \in \omega(X) : (x_k) \text{ converge dans } X\}, \\ m(X) &= \{(x_k) \in \omega(X) : (x_k) \text{ est bornée dans } X\}.\end{aligned}$$

Soit $x = (x_k) \in \omega(X)$; pour tout $n \geq 1$ la suite $x^{[n]} = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ est appelée la $n^{\text{ième}}$ section de x . Pour tout $y \in Y$, on pose :

$$\|y\|^* = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle x, y \rangle|.$$

Si $\|y\|^* < +\infty$ pour tout $y \in Y$, $\|\cdot\|^*$ définit une norme n.a. sur Y , et si de plus $N_{\|\cdot\|_X} = \{\|x\|_X : x \in X\} \subset N_K$, on a : $\|y\|^* = \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|_X}$.

Dorénavant on suppose que $N_{\|\cdot\|_X} \subset N_K$.

DÉFINITION 1.1. Soit E un sous-ensemble de $\omega(X)$.

(a) On appelle α -dual de E l'ensemble :

$$E^\alpha = \left\{ (y_k) \in \omega(Y) : \sum_k |\langle x_k, y_k \rangle| < +\infty \ \forall (x_k) \in E \right\}.$$

(b) On appelle β -dual de E l'ensemble :

$$E^\beta = \left\{ (y_k) \in \omega(Y) : \sum_k \langle x_k, y_k \rangle \text{ converge dans } K \ \forall (x_k) \in E \right\}.$$

(c) On appelle γ -dual de E l'ensemble :

$$E^\gamma = \left\{ (y_k) \in \omega(Y) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n \langle x_k, y_k \rangle \right| < +\infty \ \forall (x_k) \in E \right\}.$$

Pour tout sous-ensemble E de $\omega(X)$ on a : $E^\alpha \subseteq E^\beta \subseteq E^\gamma$; $\varphi(X)^\alpha = \varphi(X)^\beta = \varphi(X)^\gamma = \omega(Y)$; $\omega(X)^\alpha = \omega(X)^\beta = \omega(X)^\gamma = \varphi(Y)$. Si s désigne α , β ou γ , on a : $E \subset E^{ss}$; $E^s = E^{sss}$; $E \subset F \Rightarrow F^s \subset E^s$; E^s est un sous-espace vectoriel de $\omega(Y)$.

Des techniques analogues à celles utilisées dans [1] nous permettent d'établir les résultats suivants :

PROPOSITION 1.1. Soit $(y_k) \in \omega(Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) $(y_k) \in c_0(X)^\alpha$;
- (ii) $(y_k) \in c(X)^\alpha$;
- (iii) $(y_k) \in m(X)^\alpha$;
- (iv) $\sum_k \|y_k\|^* < +\infty$.

PROPOSITION 1.2. Soit $(y_k) \in \omega(Y)$; $(y_k) \in c_0(X)^\beta$ si, et seulement si, $\sup_k \|y_k\|^* < +\infty$.

PROPOSITION 1.3. Soit $(y_k) \in \omega(Y)$; $(y_k) \in c(X)^\beta$ si, et seulement si, $\sup_k \|y_k\|^* < +\infty$ et $y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ dans $(Y, \sigma(Y, X))$.

PROPOSITION 1.4. Soit $(y_k) \in \omega(Y)$; $(y_k) \in m(X)^\beta$ si, et seulement si, $\lim_k \|y_k\|^* = 0$.

PROPOSITION 1.5. Soit $(y_k) \in \omega(Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) $(y_k) \in c_0(X)^\gamma$;
- (ii) $(y_k) \in c(X)^\gamma$;
- (iii) $(y_k) \in m(X)^\gamma$;
- (iv) $\sup_k \|y_k\|^* < +\infty$.

Remarque 1.1. Dans le cas particulier $X = Y = K$, on a : $c_0(K)^\alpha = c(K)^\alpha = m(K)^\alpha = l_1(K)$; $c_0(K)^\beta = m(K)$; $c(K)^\beta = m(K)^\beta = c_0(K)$; $c_0(K)^\gamma = c(K)^\gamma = m(K)^\gamma = m(K)$.

2. ESPACES s -PARFAITS ET ESPACES s -COMPLETS

Dorénavant s désignera α , β ou γ . Si E est un sous-ensemble de $\omega(X)$ on a $E \subset E^{ss}$, et on dit que E est s -parfait si $E = E^{ss}$. $\varphi(K)$, $m(K)$ et $\omega(K)$ sont s -parfaits ; $c_0(K)$ est β -parfait, mais il n'est ni α -parfait ni γ -parfait ; $c(K)$ n'est pas s -parfait.

Pour tout $x = (x_k) \in E$, on pose :

$$u_y(x) = \sum_k |\langle x_k, y_k \rangle| \quad \forall y = (y_k) \in E^\alpha,$$

$$v_y(x) = \left| \sum_k \langle x_k, y_k \rangle \right| \quad \forall y = (y_k) \in E^\beta,$$

$$w_y(x) = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n \langle x_k, y_k \rangle \right| \quad \forall y = (y_k) \in E^\gamma.$$

Si E est un espace de suites sur X , v_y et w_y sont des semi-normes n.a. sur E , et u_y est une semi-norme sur E .

DÉFINITION 2.1. Soit (x^n) une suite d'éléments de E . On dit que (x^n) est α -Cauchy si, pour tout $y \in E^\alpha$, (x^n) est de Cauchy dans (E, u_y) , et on dit que (x^n) est α -convergente vers $x \in E$ si $\lim_n u_y(x^n - x) = 0$ pour tout $y \in E^\alpha$.

On définit de la même façon une suite β -Cauchy, β -convergente, γ -Cauchy et γ -convergente.

Pour tout $y \in E^\alpha$ on a $v_y \leq w_y \leq u_y$; on en déduit que toute suite γ -Cauchy (resp. γ -convergente vers x) est β -Cauchy (resp. β -convergente vers x). Si (x^n) est s -convergente vers x , on note : $x = s\text{-}\lim_n x^n$.

EXEMPLES. ([1], EXAMPLES 2.1) Soit $e = (1, 1, 1, \dots)$.

1. Si $E = c(K)$, on a $E^\beta = c_0(K)$, $E^\gamma = m(K)$ et $E^\alpha = l_1(K)$; $e = \alpha\text{-}\lim_n e^{[n]} = \beta\text{-}\lim_n e^{[n]}$, mais $(e^{[n]})_n$ n'est pas γ -Cauchy.
2. Si $E = c_0(K)$, on a $E^\beta = E^\gamma = m(K)$ et $E^\alpha = l_1(K)$; $e = \alpha\text{-}\lim_n e^{[n]}$ et $(e^{[n]})$ n'est pas β -Cauchy et donc n'est pas γ -Cauchy.
3. Si $E = \omega(K)$, on a $E^\gamma = \varphi(K)$, et $e = \gamma\text{-}\lim_n e^{[n]}$.

DÉFINITION 2.2. Si toute suite s -Cauchy dans E est s -convergente vers un élément de E , on dit que E est s -complet.

L'espace $l_1(K)$ est α -complet, $c_0(K)$ est β -complet et $m(K)$ est γ -complet. Avant de montrer que tout espace s -parfait est s -complet, on va établir quelques lemmes.

LEMME 2.1. Soient $\lambda_0 \in K \setminus \{0\}$, $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. Il existe $t_0 \in Y$ tel que :

$$\begin{cases} |\langle x, t_0 \rangle| \leq |\langle x, y_0 \rangle| & \forall x \in X, \\ |\langle x_0, t_0 \rangle| < |\lambda_0|. \end{cases}$$

Preuve. Soit $|\lambda| \geq 1$ tel que $|\langle x_0, y_0 \rangle| < |\lambda \lambda_0|$ et posons $t_0 = y_0/\lambda$. Pour tout $x \in X$, $|\langle x, t_0 \rangle| = |\langle x, y_0 \rangle|/|\lambda| \leq |\langle x, y_0 \rangle|$ et $|\langle x_0, t_0 \rangle| = |\langle x_0, y_0 \rangle|/|\lambda| < |\lambda_0|$. ■

LEMME 2.2. *Pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$ et $y_1, \dots, y_n \in Y$, il existe $t_1, \dots, t_n \in Y$ tels que :*

- (i) $|\langle x, t_i \rangle| \leq |\langle x, y_i \rangle| \quad \forall x \in X \text{ et } \forall i = 1, \dots, n;$
- (ii) $\left| \sum_{i=1}^n \langle x_i, t_i \rangle \right| = \max_{1 \leq i \leq n} |\langle x_i, y_i \rangle|.$

Preuve. Par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$ il suffit de prendre $t_1 = y_1$. Supposons que l'hypothèse de récurrence soit vraie jusqu'à l'ordre $n-1$. Soient $x_1, \dots, x_n \in X$ et $y_1, \dots, y_n \in Y$; on distingue deux cas.

1^{er} cas : $|\langle x_n, y_n \rangle| \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} |\langle x_i, y_i \rangle|$. Soient $t_1, \dots, t_{n-1} \in Y$ tels que :

$$\begin{aligned} |\langle x, t_i \rangle| &\leq |\langle x, y_i \rangle| \quad \forall x \in X \text{ et } \forall i = 1, \dots, n-1, \\ \left| \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_i, t_i \rangle \right| &= \max_{1 \leq i \leq n-1} |\langle x_i, y_i \rangle|. \end{aligned}$$

Soit $t_n \in Y$ tel que $|\langle x, t_n \rangle| \leq |\langle x, y_n \rangle|$ pour tout $x \in X$ et $|\langle x_n, t_n \rangle| < \left| \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_i, t_i \rangle \right|$ (lemme 2.1). On a :

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle x_i, t_i \rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_i, t_i \rangle \right| = \max_{1 \leq i \leq n-1} |\langle x_i, y_i \rangle| = \max_{1 \leq i \leq n} |\langle x_i, y_i \rangle|.$$

2^{ème} cas : $|\langle x_n, y_n \rangle| > \max_{1 \leq i \leq n-1} |\langle x_i, y_i \rangle|$. Posons $t_i = y_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$; on a :

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle x_i, t_i \rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle \right| = |\langle x_n, y_n \rangle| = \max_{1 \leq i \leq n} |\langle x_i, y_i \rangle|. \quad \blacksquare$$

LEMME 2.3. *Soit E un espace de suites sur X . Si (x^n) est une suite s -Cauchy dans E , alors pour tout $j \geq 1$ la suite $(x_j^n)_n$ est convergente dans $(X, \sigma(X, Y))$.*

LEMME 2.4. Soient E un espace de suites sur X et (x^n) une suite dans E . Si (x^n) est β -Cauchy, on a :

$$\forall (y_i) \in E^\beta \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq p_0 \sup_i |\langle x_i^p - x_i^q, y_i \rangle| \leq \varepsilon.$$

Preuve. Supposons par l'absurde que ce résultat ne soit pas vrai ; alors il existe $(y_i) \in E^\beta$, $\varepsilon > 0$ et deux suites d'indices (p_i) et (q_i) tels que :

$$\sup_i |\langle x_i^{p_j} - x_i^{q_j}, y_i \rangle| > \varepsilon \quad \forall j \geq 1;$$

$\sum_i \langle x_i^{p_1} - x_i^{q_1}, y_i \rangle$ converge dans K , il existe $N_1 \geq 1$ tel que $\sup_{i > N_1} |\langle x_i^{p_1} - x_i^{q_1}, y_i \rangle| \leq \varepsilon$. Alors on a $\max_{1 \leq i \leq N_1} |\langle x_i^{p_1} - x_i^{q_1}, y_i \rangle| > \varepsilon$.

Soient $z_1, \dots, z_{N_1} \in Y$ tels que : $|\langle x, z_i \rangle| \leq |\langle x, y_i \rangle|$ pour tout $x \in X$ et pour tout $i = 1, \dots, N_1$, $|\sum_{i=1}^{N_1} \langle x_i^{p_1} - x_i^{q_1}, z_i \rangle| = \max_{1 \leq i \leq N_1} |\langle x_i^{p_1} - x_i^{q_1}, y_i \rangle|$ (lemme 2.2). On a donc :

$$\left| \sum_{i=1}^{N_1} \langle x_i^{p_1} - x_i^{q_1}, z_i \rangle \right| > \varepsilon.$$

Soit $j_2 > j_1 = 1$ tel que $\max_{1 \leq i \leq N_1} |\langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, y_i \rangle| \leq \varepsilon$. Soit $N_2 > N_1$ tel que $\sup_{i > N_2} |\langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, y_i \rangle| \leq \varepsilon$. On a alors :

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq N_2} \left| \langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, y_i \rangle \right| &> \varepsilon, \\ \max_{N_1 \leq i \leq N_2} \left| \langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, y_i \rangle \right| &> \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit $z_{N_1+1}, z_{N_1+2}, \dots, z_{N_2} \in Y$ tels que : $|\langle x, z_i \rangle| \leq |\langle x, y_i \rangle|$ pour tout $i = N_1 + 1, \dots, N_2$ et pour tout $x \in X$, $|\sum_{i=N_1+1}^{N_2} \langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, z_i \rangle| = \max_{N_1 < i \leq N_2} |\langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, y_i \rangle|$. Alors on a :

$$\left| \sum_{i=N_1+1}^{N_2} \langle x_i^{p_{j_2}} - x_i^{q_{j_2}}, z_i \rangle \right| > \varepsilon.$$

Par induction, on construit une suite d'indices (j_k) , une suite d'indices

(N_k) et $z_{N_{k-1}+1}, z_{N_{k-1}+2}, \dots, z_{N_k} \in Y$ tels que :

$$|\langle x, z_i \rangle| \leq |\langle x, y_i \rangle| \quad \forall x \in X \text{ et } \forall i = N_{k-1} + 1, \dots, N_k,$$

$$\left| \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} \langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i \rangle \right| = \max_{N_{k-1} < i \leq N_k} \left| \langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, y_i \rangle \right| > \varepsilon,$$

$$\sup_{i > N_k} \left| \langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i \rangle \right| \leq \varepsilon, \quad \max_{1 \leq i \leq N_{k-1}} \left| \langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i \rangle \right| \leq \varepsilon.$$

Pour $k \geq 1$ on a :

$$\left| \sum_i \langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i \rangle \right| = \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^{N_{k-1}} \langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i \rangle \right|, \left| \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} \langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i \rangle \right|, \left| \sum_{i > N_k} \langle x_i^{p_{j_k}} - x_i^{q_{j_k}}, z_i \rangle \right| \right\} > \varepsilon.$$

Et comme on a $|\langle x, z_i \rangle| \leq |\langle x, y_i \rangle|$ pour tout $i \geq 1$ et pour tout $x \in X$, $(z_i) \in E^\beta$; cela contredit le fait que (x^n) est β -Cauchy. ■

THÉORÈME 2.1. *Tout espace s -parfait est s -complet.*

Preuve. Soit E un espace de suites sur X β -parfait, et soit (x^p) une suite β -Cauchy dans E ; d'après le lemme 2.4, on a : $\forall (y_i) \in E^\beta$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_i |\langle x_i^p - x_i^q, y_i \rangle| \leq \varepsilon \quad \forall p, q \geq p_0. \quad (*)$$

Pour tout $i \geq 1$ soit $x_i \in X$ tel que $x_i = \lim_p x_i^p$ dans $(X, \sigma(X, Y))$; $x = (x_i) \in E^{\beta\beta}$, donc $(x_i) \in E$ (E est β -parfait). En faisant tendre q vers $+\infty$ dans (*) on aura :

$$\forall (y_i) \in E^\beta \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq p_0 \sup_i |\langle x_i^p - x_i, y_i \rangle| \leq \varepsilon.$$

Donc $x = \beta\text{-lim}_p x^p$.

Pour les deux autres la preuve se fait d'une façon directe. ■

3. ESPACES FORTEMENT s -COMPLETS

DÉFINITION 3.1. Soit E un espace de suites sur X . Un sous-ensemble B de E est dit α -borné (resp. β -borné; resp. γ -borné) si pour tout $y \in E^\alpha$ (resp. E^β ; resp. E^γ), il existe $\rho \geq 0$ tel que $\sup_{(x_i) \in B} \sum_i |\langle x_i, y_i \rangle| \leq \rho$ (resp. $\sup_{(x_i) \in B} \sup_{i \geq 1} |\langle x_i, y_i \rangle| \leq \rho$; resp. $\sup_{(x_i) \in B} \sup_{n \geq 1} |\sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle| \leq \rho$).

Remarques 3.1. (i) Tout sous-ensemble fini de E est s -borné. (ii) Si $E^\alpha = E^\beta$, tout sous-ensemble α -borné de E est β -borné. (iii) Si $E^\beta = E^\gamma$, tout sous-ensemble β -borné de E est γ -borné.

Si B est un sous-ensemble α -borné de E , on pose :

$$\alpha_B(y) = \sup_{(x_i) \in B} \sum_i |\langle x_i, y_i \rangle| \quad \forall y = (y_i) \in E^\alpha;$$

si B est un sous-ensemble β -borné de E , on pose :

$$\beta_B(y) = \sup_{(x_i) \in B} \left| \sum_i \langle x_i, y_i \rangle \right| \quad \forall y = (y_i) \in E^\beta;$$

si B est un sous-ensemble γ -borné de E , on pose :

$$\gamma_B(y) = \sup_{(x_i) \in B} \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle \right| \quad \forall y = (y_i) \in E^\gamma;$$

α_B , β_B et γ_B sont des semi-normes sur E^α , E^β et E^γ respectivement; si B est un sous-ensemble α -borné de E , on a :

$$\beta_B(y) \leq \gamma_B(y) \leq \alpha_B(y) \quad \forall y \in E^\alpha.$$

DÉFINITION 3.2. Soit (y^n) une suite dans E^s . On dit que (y^n) est fortement- s -Cauchy si, pour tout sous-ensemble B s -borné, (y^n) est de Cauchy dans (E^s, s_B) , et on dit que (y^n) est fortement- s -convergente vers $y \in E^s$ si, pour tout sous-ensemble s -borné B de E , on a $\lim_n s_B(y^n - y) = 0$, et on note $y = fs\text{-}\lim_n y^n$.

PROPOSITION 3.1. Soit (y^n) une suite dans E^s ; si (y^n) est fortement- s -Cauchy, alors $(y_j^n)_n$ est $\sigma(Y, X)$ -convergente dans Y pour tout $j \geq 1$.

Preuve. Soient $j \geq 1$, et $a \in X$; $\{\delta_j(a)\}$ est s -borné, donc $(\langle a, y_j^n \rangle)_n$ est une suite de cauchy dans K , et alors elle converge. ■

DÉFINITION 3.3. Si toute suite fortement- s -Cauchy dans E^s est fortement- s -convergente vers un élément de E^s , on dit que E est fortement- s -complet.

LEMME 3.1. Soit (y^p) une suite fortement- β -Cauchy dans E^β . Pour tout B β -borné et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_i |\langle x_i, y_i^p - y_i^q \rangle| \leq \varepsilon \quad \forall p, q \geq p_0 \text{ et } \forall (x_i) \in B.$$

Preuve. Sinon, il existe B β -borné et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \geq 1$, il existe $p_k, q_k > k$ et $(x_i^k) \in B$ tels que $\sup_i |\langle x_i^k, y_i^{p_k} - y_i^{q_k} \rangle| > \varepsilon$ pour tout $k \geq 1$.

Soient $p_1, q_1 > 1$ et $(x_i^1) \in B$ tels que : $\sup_i |\langle x_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle| > \varepsilon$; $\sum_i \langle x_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle$ converge dans K , soit $N_1 > 1$ tel que : $\sup_{i > N_1} |\langle x_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle| \leq \varepsilon$. On a donc :

$$\max_{1 \leq i \leq N_1} |\langle x_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle| > \varepsilon.$$

Soient $z_1^1, z_2^1, \dots, z_{N_1}^1 \in X$ tels que : $|\langle z_i^1, y \rangle| \leq |\langle x_i^1, y \rangle|$ pour tout $y \in Y$ et pour tout $i = 1, \dots, N_1$, $|\sum_{i=1}^{N_1} \langle z_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle| = \max_{1 \leq i \leq N_1} |\langle x_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle|$ (lemme 2.2). Posons $z^1 = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_{N_1}^1, x_{N_1+1}^1, x_{N_1+2}^1, \dots)$; alors

$$\left| \sum_i \langle z_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle \right| = \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^{N_1} \langle z_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle \right|, \left| \sum_{i > N_1} \langle x_i^1, y_i^{p_1} - y_i^{q_1} \rangle \right| \right\} > \varepsilon.$$

Soient $p_2 > p_1$ et $q_2 > q_1$, et soit $(x_i^2)_i \in B$ tels que : $\sup_i |\langle x_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \rangle| > \varepsilon$. Soit $N_2 > N_1$ tel que : $\sup_{i > N_2} |\langle x_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \rangle| \leq \varepsilon$. Alors on a :

$$\max_{1 \leq i \leq N_2} |\langle x_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \rangle| > \varepsilon.$$

Soient $z_1^2, z_2^2, \dots, z_{N_2}^2 \in X$ tels que : $|\langle z_i^2, y \rangle| \leq |\langle x_i^2, y \rangle|$ pour tout $y \in Y$ et pour tout $i = 1, \dots, N_2$, $|\sum_{i=1}^{N_2} \langle z_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \rangle| = \max_{1 \leq i \leq N_2} |\langle x_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \rangle|$. Posons : $z^2 = (z_1^2, z_2^2, \dots, z_{N_2}^2, x_{N_2+1}^2, x_{N_2+2}^2, \dots)$; alors

$$\left| \sum_i \langle z_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \rangle \right| = \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^{N_2} \langle z_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \rangle \right|, \left| \sum_{i > N_2} \langle x_i^2, y_i^{p_2} - y_i^{q_2} \rangle \right| \right\} > \varepsilon.$$

Et ainsi, par induction, il existe $p_k > p_{k-1}$, $q_k > q_{k-1}$, $(x_i^k)_i \in B$, $N_k > N_{k-1}$ et $z^k = (z_1^k, z_2^k, \dots, z_{N_k}^k, x_{N_k+1}^k, x_{N_k+2}^k, \dots) \in \omega(X)$ tels que :

$$\left| \sum_i \langle z_i^k, y_i^{p_k} - y_i^{q_k} \rangle \right| > \varepsilon.$$

Posons : $B' = \{z^1, z^2, \dots\}$; B' est β -borné et on a :

$$\beta_{B'}(y^{p_k} - y^{q_k}) = \sup_{r \geq 1} \left| \sum_i \langle z_i^r, y_i^{p_k} - y_i^{q_k} \rangle \right| > \varepsilon \quad \forall k \geq 1,$$

ce qui contredit le fait que (y^p) est β -Cauchy. ■

THÉORÈME 3.1. *Tout espace β -parfait est fortement- β -complet.*

Preuve. Soient E un espace β -parfait et $(y^p)_p$ une suite β -Cauchy dans E^β ; d'après le lemme 3.1, on a : pour tout sous-ensemble β -borné B de E et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_i |\langle x_i, y_i^p - y_i^q \rangle| \leq \varepsilon \quad \forall (x_i) \in B \text{ et } \forall p, q \geq p_0. \quad (*)$$

Pour tout $i \geq 1$ soit $y_i \in Y$ tel que $y_i = \lim_p y_i^p$ dans $(Y, \sigma(Y, X))$; $(y_i) \in E^{\beta\beta} = E$, et en faisant q vers $+\infty$ dans (*), on aura $(y_i) = f\beta\text{-lim}_p y^p$. ■

D'une façon analogue, on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. *Tout espace α -parfait (resp. γ -parfait) est fortement α -complet (resp. fortement- γ -complet).*

RÉFÉRENCES

- [1] AMEZIANE HASSANI, R., BABAHMED, M., Duals de Köthe-Toeplitz généralisés, espaces s -complets et espaces fortement- s -complets en analyse non-archimédienne, *Rend. Sem. Mat. Messina Ser. II* **4** (1996/97).
- [2] LORENTZ, G.G., MACPHAIL, M.S., Unbounded operators and a theorem of A. Robinson, *Trans. Roy. Soc. of Canada* **XLVI** (1952), 33–37.
- [3] MADDOX, I.J., "Infinite Matrices of Operators", L.N.M. 786, Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [4] MONNA, A.F., Espaces linéaires à une infinité dénombrable de coordonnées, *Proc. Kond. Akad. V. Wetensch.* **53** (1950), 1548–1559.
- [5] MONNA, A.F., "Analyse Non-Archimédienne", Springer Verlag, Band 56, Berlin, 1970.

- [6] ROBINSON, A., On functional transformations and summability, *Proc. London Math. Soc.* **52** (1950), 132–160.
- [7] TOEPLITZ, O., KÖTHER, G., Lineare räume mit unendlichvielen Koordinaten and ringe unendlicher matrizen, *J. Reine Angew. Math.* **171** (1934), 193–226.
- [8] VAN TIEL, J., Espaces localement K -convexes I, *Indag. Math.* **27** (1965), 249–258.
- [9] VAN TIEL, J., Espaces localement K -convexes II, *Indag. Math.* **27** (1965), 259–272.
- [10] VAN TIEL, J., Espaces localement K -convexes III, *Indag. Math.* **27** (1965), 273–289.