Un geómetra extremeño del siglo XIX
Ventura Reyes Prósper

José Cobos Bueno
Universidad de Extremadura

A C. Benítez y A. Navarro de quienes tanto he aprendido.

Ventura Reyes Prósper nace en Castuera (Badajoz) el 31 de mayo de 1863 y muere en Toledo el 27 de noviembre de 1922, licenciado y doctor en Ciencias Naturales, publica diversos trabajos en este campo, pero es por sus publicaciones matemáticas, —ciencia en la que, posiblemente, fue autodidacta— por lo que diversos autores le reconocen un lugar destacado como científico del siglo XIX.

En un viaje[1] que realiza a Alemania acompañando a su hermano Eduardo (1860-1921) (Catedrático de Botánica de la Universidad Complutense) en 1887 trabó amistad con Félix Klein (1849-1925), Ferdinand Lindemann (1852-1939) y otros revolucionarios geómetras que se dedicaban al poco productivo juego de las geometrías no-euclídeas, así como a la lógica.

Aunque nuestro autor escribió también sobre Lógica[2], en estas notas vamos a relacionarlo con las Geometrías no-Euclídeas, para lo cual, previamente, vamos a situarnos en el contexto en que debió moverse.

Los *Elementos* de Euclides (hacia 365-300 a.C.)[3] constituyen, como es sabido, el primer tratado de geometría racional, que expone sistemáticamente el trabajo realizado por los geómetras griegos durante tres siglos.

(1) Recientemente, PÉREZ GONZALEZ y COBO, han publicado excelentes Biografías de nuestro personaje. El primer autor lo hace muy sucintamente, mientras que el segundo profundiza más en él.

(2) REYES PROSPER como investigador en Lógica Matemática está estudiado en dos buenos trabajos de VAL.

(3) in ENRIQUES pp. 5-6.

El libro I puede considerarse como la parte fundamental del tratado, y contiene dos teoremas verdaderamente notables y expresivos, esto es, "la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos", y la "relación entre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo", que Plutarco, Diógenes, Laercio y Ateneo atribuyen unánimemente a Pitágoras. Estos teoremas, que a diferencia de otras más obvias proposiciones presentan el conocimiento de hechos nuevos e inesperados, aparecen como los "focos" respecto a los cuales está ordenada la serie de proposiciones del primer libro euclídeo, cuyo contenido se puede resumir:

1º. Proposiciones constructivas, empezando por las construcciones elementales para transportar segmentos y ángulos.

2º. Criterios de igualdad (congruencia) de triángulos.

3º. Propiedades de la perpendicular y las relaciones entre los ángulos formados por dos rectas que se cortan.

4º. Relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo.

5º. Teoría del paralelismo, que comprende en particular la existencia de la paralela única por un punto a una recta dada.

6º. Teoremas principales relativos a la igualdad de superficies.

En este libro I se formulan los cinco postulados, que dan lugar a la llamada Geometría Euclídea. Estos son:

1.- Se puede trazar una recta desde un punto a otro cualquiera.

2.- Se puede prolongar una línea recta finita de manera continua a otra línea recta.

3.- Se puede describir un círculo con cualquier centro y cualquier radio.

4.- Todos los ángulos rectos son iguales.

5.- Si una línea recta corta a otras dos líneas rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, entonces las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

Una interpretación de estos postulados[4] sería: El primer postulado convierte a la recta en distancia entre dos puntos; el segundo introduce el "demonio del infinito" y permite sumar segmentos rectilíneos; el tercero establece la existencia del círculo; el cuarto parece superfluo después de haber definido al ángulo recto como el igual a su adyacente, pero hay que ver en tal postulado, además, la admisión de la libre movilidad de las figuras, lo que equivale a pedir que el espacio no ejerce acción deformante sobre ellas, y, por tanto, todos los ángulos rectos son iguales aunque presenten escorzos cuando están colocados en cierta posición respecto del observador que los mira con ojos griegos.

El quinto se enuncia: Por un punto se puede trazar una paralela y una sola a cualquier recta dada. (Así lo conoceremos y a él nos referiremos, al hablar del Quinto Postulado).

Es conocido[5], que desde tiempos remotos, se han realizado intentos de demostrar el Quinto Postulado, "Postulado de Euclides", a partir de los otros cuatro. Todos los Comentaristas, cuyas informaciones poseemos, del Libro I de los *Elementos* de Euclides llegaron a la conclusión de que el Quinto Postulado no era lo bastante evidente como para aceptarlo sin demostración. De los primeros intentos, de demostración, destaquemos los referentes a sustituir la definición euclídea de las paralelas de forma gramatical negativa, con otras definiciones que no presentasen dicha forma, supuesta defectuosa.

Proclo Diadoco (Comentarista, 410-485), en su *Comentario al Libro I de Euclides*[6], transmite noticias acerca de la primeras tentativas a este respecto. Así, Posidonio (133-41 a.C.) había propuesto que se llamasen rectas paralelas a dos rectas coplanarias y equidistantes. Ahora bien esta definición y la euclídea corresponde a dos hechos que pueden presentarse por separado y Proclo tomando como base un tratado de Gemino (siglo I a.C.), toma los ejemplos de la hipérbola y de la concoide y su posición respecto a sus asíntotas, para

(4) Debido a que los postulados se enuncian en "lenguaje" griego, se puede ver una interpretación de ellos, más exhaustiva, in VERA, *Breve Historia de la Matemática.*

(5) Son numerosos los autores que han tratado a lo largo de la Historia el Quinto Postulado. De los que se han utilizado en este trabajo se destacan, BOYER, COLLETTE, VERA, BONOLA, WUSSING, COXETER Y ROUCHE.

(6) Esta información aparece en la Historia gracias al libro de FRIEDLEN, G. *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii.* Teubner. Leipzig. 1873, in BONOLA, p. 8.

demostrar que pueden existir líneas paralelas en el sentido euclídeo, es decir, líneas que prolongadas hasta el infinito no se encuentran, y, sin embargo, no son paralelas en el sentido de Posidonio, esto es, no equidistantes.

Tal hecho, según Proclo, es calificado por Gemino, como el más paradójico (παραδοξότατον) de toda la Geometría.

Si se quiere concordar la definición euclídea con la de Posidonio, se necesita demostrar que dos rectas que no se encuentran son equidistantes, o bien que el lugar de los puntos equidistantes de una recta es una recta. Para esta demostración Euclides se apoya precisamente en su postulado.

Proclo, se niega a considerarlo entre los postulados, observando, para reafirmarse en su opinión, que su inversa (la suma de dos ángulos de un triángulo es menor que dos rectos) es un teorema demostrado por Euclides (Proposición XVII), pareciéndole imposible que una proposición cuya inversa es demostrable no sea a su vez demostrable. Al hilo de esta reflexión, advierte también sobre el peligro de las abusivas referencias a la evidencia e insiste sobre la posible (hipotética) existencia de rectas asintóticas.

Ptolomeo (hacia 85-165), según Proclo, intenta resolver la cuestión con un curioso razonamiento, del cual se deduce fácilmente el Quinto Postulado.

Proclo, después de criticar el razonamiento de Ptolomeo, intentó conseguir lo mismo por otro camino. La demostración de Proclo se basa en la siguiente proposición, que él considera evidente: La distancia entre dos puntos situados sobre dos rectas que se cortan puede hacerse tan grande como se quiera, prolongando suficientemente las dos rectas. De esta proposición se deduce, inmediatamente, el lema:

Una recta que encuentra a una de dos paralelas encuentra necesariamente también a la otra.

En la demostración de este lema, Proclo, introduce la hipótesis de que la distancia de dos paralelas se mantiene finita, hipótesis de la que lógicamente se deduce la de Euclides.

También se justifica el que los griegos discutieran e investigaran el Quinto Postulado, según Proclo, si se considera el siguiente argumento paradójico: Se pretendía demostrar que dos rectas cortadas por una tercera no se encuentran, aunque la suma de los ángulos internos de un mismo lado sea menor que dos ángulos rectos.

El error principal de la argumentación estriba en la utilización del infinito. El autor de la paradoja emplea el mismo principio, con el que Zenón (495-435 a.C.) pretendía demostrar que Aquiles no alcanzaría a la tortuga, aún moviéndose con una velocidad doble de la velocidad de esta última.

Esto fue observado, bajo otro aspecto, por Proclo, asegurando que lo que así se demuestra es que, con el susodicho proceso, no se puede alcanzar el punto de encuentro (determinar: ὁρίζειν), no que éste no exista.

Proclo observó además que teniendo en cuenta que Euclides (Proposición XVII) afirma que la suma de dos ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos, entonces, *existen rectas que, cortadas por una tercera, se encuentran hacia el lado en que la suma de los ángulos internos es menor que dos ángulos rectos; así, a quien afirme que para una diferencia cualquiera entre dicha suma y dos ángulos rectos las dos rectas no se encuentran, se puede responder que para diferencias menores las rectas se encuentran.*

Pero si para algún par de rectas formando con una tercera ángulos internos de un mismo lado, cuya suma es menor que dos ángulos rectos, existe un punto de encuentro, falta por ver si esto ocurre para todos los pares. Puesto que alguien pudiera observar que acaso hubiese una cierta diferencia [a dos ángulos rectos], para la cual aquellas [las rectas] no se encuentren, encontrándose en cambio todas las demás para las cuales tal diferencia fuese distinta.

Otra demostración bastante antigua del Quinto Postulado, aparece en el Comentario árabe de T̠ābit ibn Qurra[7] (hacia 826-901), que nos ha llegado a través de la traducción latina de Gerardo de Cremona (siglo XII, de la Escuela de Traductores de Toledo)[8]. Esta demostración se le atribuye a Aganis (hay que observar que Curtze y Heiberg identifican a Aganis con Gemino, en cambio P. Tannery, rechaza tal identificación)[9].

(7) ABŪ-L-ḤASAN T̠ĀBIT IBN QURRA IBN MARWĀN AL-ḤARRĀNĪ.

(8) in VERA, *La Matemática en el Occidente Latio-Medieval*, hace un tratamiento exhaustivo sobre los matemáticos de la Escuela de Traductores de Toledo.

(9) TANNERY, P., deshace el equívoco que se había mantenido algún tiempo cuando publica, "Le philosophe Aganis est-il identique à Geminus?. *Biblioteca Math.* (3). T. II. pp. 9-11. 1901, in BONOLA, p. 13.

En este comentario, cuando hace referencias a definiciones, postulados y axiomas continuamente aparece el nombre de Sambelichius, que se identifica con Simplicius (siglo VI), el célebre comentarista de Aristóteles (384-322 a.C.). Simplicius escribe una *Introducción al libro I de Euclides*, expresando en ellas ideas similares a las de Gemino y Posidonio, afirmando que el Quinto Postulado no es evidente y reproduce la demostración de Aganis.

Esta demostración está fundada en la hipótesis de que existen rectas equidistantes, que, análogamente a como hace Aganis y Posidonio, llama paralelas. De tal hipótesis deduce que la mínima distancia entre dos paralelas es un segmento perpendicular a las dos rectas; que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí; que dos paralelas cortadas por una tercera recta forman ángulos internos de un mismo lado suplementarios, y recíprocamente.

Los árabes, como es suficientemente conocido, suceden a los griegos en la supremacía de las Matemáticas, y como estos, también se ocuparon del Quinto Postulado. Algunos, como el citado Ṯābit ibn Qurra, no aportan nada sino que recogen lo hecho hasta su momento. Otros, sin embargo, aportaron originalidad a la cuestión. Destaquemos por la influencia que ejercieron en investigadores posteriores a ᶜUmar Jayyām[10] (hacia 1050-hacia 1122) y a Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (1201-1274).

ᶜUmar Jayyām es a la vez que un gran poeta iraní, un gran algebrista y el reformador del antiguo calendario persa. Critica las tentativas de otros autores árabes en sus intentos de demostrar el Quinto Postulado, puesto que contenían la idea de movimiento que había sido rechazada por Aristóteles. En sus *Comentarios* sobre las dificultades de los postulados de Euclides, empieza su argumentación con un cuadrilátero que tiene dos lados semejantes y perpendiculares a la base —este tipo de cuadrilátero en la literatura Matemática recibe el nombre de cuadrilátero de Saccheri, autor que veremos más adelante—.

Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, aunque sus contribuciones fueron fundamentalmente en Trigonometría y Astronomía, continuó los esfuerzos de ᶜUmar Jayyām para demostrar el Quinto Postulado, y a pesar de que lo demuestra adaptándose al criterio seguido por Aganis, merece ser nombrado por la idea original de

(10) ABŪ-L-FATḤ ᶜUMAR IBN IBRĀHĪ AL-JAYYĀMĪ GIYAT AL-DĪN

anteponer explícitamente el teorema sobre la suma de los ángulos de un triángulo y por la forma acabada de su razonamiento.

Tanto las primeras versiones de los *Elementos*, hechas en los siglos XII y XIII sobre los textos árabes, como las sucesivas, redactadas sobre los textos griegos a finales del siglo XV y en la primera mitad del siglo XVI, no llevan en general, ninguna observación crítica al Quinto Postulado. La crítica renace después de 1550, debido a que aparece impreso el *Comentario* de Proclo (el texto original en Basilea en 1533, después en Padua en 1560 aparece una traducción latina).

Repasamos brevemente los trabajos de los geómetras más representativos de los siglos XVI y XVII.

F. Commadino (1509-1575) añade, sin justificación, a la definición euclídea de las paralelas el concepto de equidistancia; respecto al Quinto Postulado, repite el juicio y la demostración de Proclo.

C. Clavio (1537-1612), en su traducción latina del texto euclídeo, expone y critica la demostración de Proclo. Presenta una nueva demostración de la hipótesis euclídea basándose en el teorema: La línea equidistante de una recta es una recta. La demostración de Clavio tiene mucho de Naṣīr al-Dīn.

P. A. Cataldi (1552-1626), es el primer geómetra moderno que publica un trabajo exclusivamente dedicado a la cuestión de las paralelas. Parte del concepto de rectas equidistantes y no equidistantes; pero para probar la existencia efectiva de rectas equidistantes recurre a la hipótesis de que rectas no equidistantes son convergentes en una región, y en la otra divergentes (sigue a Naṣīr al-Dīn).

G. A. Borelli (1608-1679) admite, tratando de justificarlo, el siguiente axioma: Si una línea recta [segmento rectilíneo] transportada lateralmente en el mismo plano sobre otra línea recta la toca siempre con su punto extremo, y en todo su curso es perpendicular a aquélla, su otro punto extremo describirá en su movimiento una línea recta.

Giordano Vitale (1633-1711), vuelve al concepto de equidistancia formulado por Posidonio, admite como Proclo la necesidad de rechazar que las paralelas de Euclides puedan comportarse de un modo asintótico. Con este fin define las paralelas como dos rectas equidistantes, y trata de probar que el lugar de los puntos equidistantes de una recta es una recta.

Aunque, hubo otros geómetras, en los siglos XVI y XVII, con los que se han enumerado es suficiente para darse idea de como evoluciona nuestra cuestión y quizás sería importante analizar el lugar que ocupa en el cuerpo geométrico la hipótesis euclídea entre los diferentes comentaristas de los *Elementos*.

En la edición latina de los *Elementos* (aparecida en 1482), atribuida a Campano (siglo XIII), —realmente realizada[11] por Athelard de Bath (siglo XII), de la Escuela de Traductores de Toledo— sobre los textos árabes, la hipótesis en cuestión figura entre los postulados. Igual ocurre en la traducción latina hecha del griego por B. Zamberti (1505), en las ediciones de Luca Pacioli (1509), de N. Tartaglia (1543), de F. Commadino (1572), de A. Borelli (1658), de Iacobi Peletarii (1610)[12] y la versión castellana de Pérez de Moya (1573)[13].

Por contra, la primera impresión de los *Elementos* en lengua griega (Basilea, 1533) contiene la hipótesis entre los axiomas.

---

(11) in CHASLES p. 511: *Campanus traduisit, sur un texte arabe, et accompagna de Commentaires les treize livres des Eléments d'Euclide et les deux qu'on a attribués a Hypsicles. C'est ouvrage qui a servi a répandre en Europa la connaissance de la Géométrie. Il a été imprimé pour la première fois en 1482, et a eu plusieurs autres éditions. Pendant longtemps encore, après la renaissance des sciences, il a joui d'une grande estime, et les Commentaires de Campanus ont été consultés par les géomètres qui ont écrit sur les éléments de la Géométrie. Y a pie de página dice: Quelques historiens ont pensé que cet ouvrage de Campanus n'était autre que la traduction d'Adhélard, à laquelle Campanus avait joint des Commentaires. Voici comment s'exprime Andrès à ce sujet: Sei [Campano] non tradusse come si dice comunemente; certo illustró con comenti l'Euclide, tradotto primo dell'Arabo in Latino dall'Inglese Atelardo Gotho, come ha fatto vedere il Tiraboschi (Dell'origine, de progressi, e dello stato attuale d'ogni litteratura. Parte 1, cap. IX). Le titre suivant, d'un exemplaire manuscrit de l'Euclide de Campanus, qui se trouve à la Biblioteca royale de Paris, sous le nº 7213, vient confirmer cette opinion: Euclidis philosophi socratici liber Elementorum artis geometriae translatus ab Arabico in Latinum per Adelardum Gothum Bathoniensem, sub commento Magistri Campani Novarriensis (MS. du XIV siècle).*

(12) *Quum in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores & in eadem parte angulos duobos recti minores fecerit: rectas lineas productas tandem concurrere ad eam partem in qua anguli duobos rectis minoris existunt*, in IACOBI PELETARII p. 17.

(13) *La quinta peticion [postulado] dize, que si sobre dos lineas rectas cayereuna otra lenia recta, y causare angulos menores que rectos hazia launa parte, alargadas las lineas hazia aquella parte de los menores angulos, de necessidad se juntaran, y al contrario alargandolas por la otra parte, por do se causaron los angulos mayores, aunq se estiendan en infinito no se juntaran, antes mientras mas las alargaré, mas se ensancharan*, in PEREZ DE MOYA p. 19. Este libro, que se encuentra en la Biblioteca del Seminario San Atón de Badajoz, carece de portada pero creemos se trata del Tratado de Geometría Práctica y Speculativa, Alcalá 1573, por Juan Gracian, in PICATOSTE p. 249.

También la colocan como axioma F. Candalla (1556), Forcadel de Bezies (1564)[14], C. Clavio (1574), Giordano Vitale (1680) y también Gregory (1703), en su versión latina de las obras de Euclides, y la versión castellana de Roberto Simson (1774)[15].

Estas diferencias no son imputables a los autores anteriores, sino a los códices transmitidos de los griegos, por lo que es importante analizar el significado que estos últimos dieron a las palabras postulado (αἰτήματα) y axiomas (ἀξιώματα). Notemos, previamente, que la palabra axioma aquí significa lo que Euclides, en su texto, llama nociones comunes (κοιναὶ ἔννοιαι).

En Proclo se indican tres formas distintas de entender la diferencia que existe entre los axiomas y los postulados.

La primera se relaciona con la diferencia que existe entre problema y teorema. El postulado difiere del axioma, como el problema difiere del teorema. Con esto se debe entender que el postulado afirma la posibilidad de una construcción.

La segunda consiste en decir que el postulado es una proposición de contenido geométrico, mientras que el axioma es una proposición común lo mismo a la Geometría que a la Aritmética.

Finalmente, el tercer modo de entender la diferencia entre las dos palabras referido por Proclo, se apoya en la autoridad de Aristóteles. Las palabras axioma y postulado en Aristóteles no parecen usadas en sentido estrictamente matemático. Axioma es lo que es verdadero por sí mismo, en virtud del significado de las palabras que contiene; postulado es lo que, aun no siendo un axioma, en el sentido anterior, se admite sin demostración.

(14) *Si dessus deux lignes droictes, tombant vne ligne droicte, faict les angles dedans d'une mesme part, plus petits que deux droicte, icelles estat tousiours menées se rencontreront de la part en laquelle sont les angles petits que deux droicts.* in FORCADEL p. 8 vta.

(15) *Si una recta cayendo sobre otras dos forma los ángulos internos á la misma parte menores que dos rectos; prolongadas concurrirán ácia aquella parte, donde los ángulos menores que dos rectos,* in SIMSON p. 6 y en p. 299 dice: *La Proposición llamada vulgarmente Postulado V, ó Axîoma XI, y por algunos XII, de la qual pende principalmente esta XXIX, ha dado no poco que hacer á los Geómetras, así antiguos, como modernos, y á la verdad no parece que debia colocarse entre las sentencias comunes, ó Axîomas, no siendo por sí manifiesta; pero tampoco hablando en rigor admite demostración, lo que necesita es alguna explicación, que la aclare mas, y esta procuraremos darla á los principiantes con el método mas facil, que nos sea posible.*

La palabra axioma como mejor se interpreta es tomando un ejemplo de Aristóteles, quitando cosas iguales de cosas iguales los restos son iguales, que se aproxima a lo que Euclides llama nociones comunes, mientras que la palabra postulado tiene en Aristóteles un sentido diferente de cada uno de los anteriores.

En el pasaje que se transcribe, bastante oscuro, de la obra de Aristóteles, *Analytica Posteriora*, I, 10, es donde el filósofo habla del postulado:

"Οσα μὲν ὄυν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει ἀυτὸς μὴ δείξας, ταῦτα ἐὰν μὲν δοκοῦντα λαμβάνη τῶ μανθάνοντι ὑποτίθεται. Καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπὸθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον. Ἐὰ ν δέ ἤ μηδεμίας ἐνούσης δόξης ἡ καὶ ἐναντίως ἐνούσης λαμβάνη, τὸ αυτὸ αἰτεῖται. Καὶ τούτω διαφέρει ὑηόθεοις καὶ αἰτῆμα. ἔοτι λὰρ αἰτῆμα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῆ δοξη."

Cuya traducción literal es[16]:

Efectivamente cuanto siendo demostrable lo acepta él (el maestro?) no habiéndolo demostrado, esto, si lo acepta pareciéndole bien al alumno, es una hipótesis. Y sencillamente no es una hipótesis salvo para aquél solo. Pero si lo acepta sin mediar ninguna opinión e incluso mediando una contraria, eso mismo es un postulado. Y en esto está la diferencia entre hipótesis y postulado; pues el postulado es lo contrario a la opinión del discípulo.

Y una traducción libre:

Cuanto pudiendo ser demostrado él lo acepta sin demostrarlo, si al discípulo le parece bien y lo acepta es una hipótesis. Pero si lo acepta no teniendo ninguna opinión o incluso teniendo una opinión contraria, la misma suposición es un postulado. Y en esto se diferencian hipótesis y postulados. Pues el postulado es contrario a la opinión del discípulo.

Es fácil de entender las controversias a que conduce esta "definición".

Volviendo a nuestra cuestión, como se ha visto, los progresos hasta bien entrado el siglo XVII son "nulos"; pero en su segunda mitad el inglés Wallis (1616-1703) da dos conferencias en la Universidad de Oxford en las que expone las ideas de Naṣīr al-Dīn, con la originalidad de sustituir el Quinto Postulado

(16) Quiero agradecer a la Profesora BARROSO CANAL su ayuda.

por otro que admite la existencia de un triángulo semejante a uno dado y de magnitud arbitraria —basándose en la noción común: De toda figura existe una semejante de magnitud arbitraria—, que no es, desde luego, más evidente que el Postulado de Euclides, puesto que envuelve la idea un poco complicada de forma independiente de la extensión, pero tiene interés histórico porque el desarrollo ulterior de las Geometrías no-Euclídeas establece la equivalencia de las proposiciones de Wallis y de Euclides al demostrarse que la magnitud de una figura está íntimamente relacionada a la de sus ángulos. [Forma de la figura íntimamente relacionada con la magnitud de sus ángulos].

Después de Wallis transcurre casi un siglo sin que se aporte ninguna contribución importante al estado de la cuestión, hasta que Saccheri (1667-1733), da un nuevo impulso.

El jesuita italiano Saccheri estuvo muy cerca de fundar una geometría no-Euclídea con su intento de demostrar que el Quinto Postulado es independiente de los otros.

La obra de Saccheri, publicada poco antes de morir, *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia* (Milán, 1733) está dedicada en su mayor parte a la demostración del Quinto Postulado. La idea central de las investigaciones geométricas de Saccheri se encuentran en su *Logica demonstrativa* (Turín, 1697), aunque el razonamiento no es original pues ya fue utilizado por Euclides (libro IX, proposición XII). Este razonamiento es una sutil variedad de reducción al absurdo, consistente en suponer falsa la proposición que se quiere demostrar para llegar, tomando aquella hipótesis como punto de partida, a una conclusión que es falsa.

Teniendo en cuenta esta idea, Saccheri toma como datos las veintiséis primeras proposiciones de Euclides, y, supuesta como hipótesis la falsedad del Quinto Postulado, busca, entre las consecuencias de esta hipótesis, una contradicción cualquiera que le autorice a afirmar la verdad del postulado mismo.

Parece que conocía bien la historia de las diversas tentativas realizadas desde Ptolomeo. Decidió aplicar el método de reducción al absurdo para intentar demostrar que Euclides tenía razón al enunciar su postulado de las paralelas en lugar de hacer de él un teorema.

Comienza su demostración sirviéndose de un cuadrilátero birrectangular, "cuadrilátero de Saccheri", en el que los lados AC y BD son iguales y perpendiculares a la base AB[17]. Teniendo en cuenta los cuatro primeros postulados, demuestra que los ángulos ACD y BDC son iguales, y distingue para estos ángulos tres posibilidades: son rectos, obtusos o agudos. Demuestra entonces que el Quinto Postulado es una consecuencia de que los ángulos sean rectos. No le faltaba a Saccheri más que demostrar la incoherencia de las otras dos hipótesis. Tomando como cierto que una recta es infinitamente larga, demostró que la hipótesis de los ángulos obtusos es contradictoria. Finalmente, demostrando un teorema tras otro, no consigue demostrar que la hipótesis de los ángulos agudos es contradictoria. Rechazó intuitivamente esta última hipótesis, con el pretexto de que repugnaba a la naturaleza de la línea recta, pero ésta, como se verá un siglo después, era la vía nueva, la vía de las geometrías no-Euclídeas, que Saccheri no llegó a vislumbrar, pues estaba probablemente demasiado convencido de que la geometría euclídea era la única.

No es fácil precisar la influencia que ejerció la obra de Saccheri sobre los geómetras del siglo XVIII; pero es probable que el suizo Juan Enrique Lambert (1728-1777) la conociese, puesto que en su *Theorie der Parallellinien* (1766) cita una disertación de G.S. Klügel (1739-1812), donde se analiza la obra de Saccheri.

La *Theorie der Parallellinien,* publicada, en 1786, después de la muerte del autor, está dividida en tres partes. En la primera, de naturaleza crítica y filosófica, expone los dos puntos de vista que ha tenido el tratamiento del Quinto Postulado, es decir, si puede demostrarse con solo la ayuda de los anteriores, o si, por el contrario, se exige el empleo de alguna otra hipótesis.

En la segunda parte expone varias tentativas, en las que el postulado euclídeo se reduce a proposiciones sencillas, las cuales, sin embargo, tienen que ser demostradas. La tercera parte, la más importante, contiene una serie de investigaciones análogas a las de Saccheri.

Lambert, consciente de no haber demostrado el Quinto Postulado, dejó la cuestión en suspenso; ahora bien, el no haber publicado sus investigaciones hace sospechar que había vislumbrado algún horizonte nuevo.

(17) El enunciado original de la proposición es: *Si duae aequales rectae AC, BD, perpendiculariter insistant cuivis rectae AB: Dico junctam CD aequalem fore, aut minorem, aut majorem ipsa AB, prout anguli ad eadem CD, fuesint aut recti, aut obtsi, aut acuti,* in SACCHERI'S p. 20.

En fecha reciente se ha encontrado un manuscrito[18] en el Archivo Catedralicio de Badajoz, que figura a nombre de Santistevan —autor hasta ahora desconocido— datado en 1743 y titulado *Tratado de Geometría Especulativa.* Pues bien, en este manuscrito, el Quinto Postulado no figura de ninguna forma ni como postulado ni como axioma (nociones comunes). Esto nos permite plantear la "conjetura", de que nuestro autor conocía la dificultad de tal postulado y optó por no incluirlo.

Otro ilustre extremeño, Juan Justo García (1752-1830)[19], tampoco incluye el Quinto Postulado, en ninguna de las dos ediciones que conocemos de su obra de Geometría.

Hacia la mitad del siglo XVIII, ante la evidente falta de respuesta a la cuestión planteada, comienza a tomar cuerpo la convicción de que fuese necesario admitir sin demostración el Quinto Postulado o su sustitución por otro postulado equivalente.

Es en Alemania, donde este planteamiento había adoptado una forma precisa. Se encuentra en A.G. Kaestner (1719-1800), gran cultivador de las investigaciones sobre las paralelas, y en su discípulo G.S. Klügel, ya citado, autor de una apreciable crítica sobre las más célebres tentativas de la demostración del Quinto Postulado. En este trabajo, Klügel, observa la insuficiencia de las demostraciones propuestas, admitiendo la posibilidad de que rectas que no se encuentran sean divergentes, y añade que el aparente contrasentido que esto presenta no es el resultado de una prueba rigurosa ni una consecuencia de los determinados conceptos de las líneas rectas o curvas, sino más bien algo que se deduce de la experiencia y del juicio de nuestros sentidos.

La gran importancia de aventurarse en este último campo, sin la preocupación Saccheriana de descubrir en él contradicciones, constituye, en la historia, el paso decisivo para conquistar la indemostrabilidad del Quinto Postulado y descubrir las Geometrías no-Euclídeas.

(18) Actualmente nos encontramos haciendo un estudio más exhaustivo de este manuscrito.

(19) in GARCIA, JUAN JUSTO, 2ª ed., solo define, rectas paralelas (p. 224) y la forma de trazar una paralela desde un punto a una recta dada (p. 227), donde al final dice "será la paralela que se busca", y no dice que sea la única.

La crítica sobre las paralelas, que en Italia y Alemania había conducido a interesantes resultados, tuvo también en Francia, a finales del siglo XVIII y principios del XIX, un impulso muy notable.

D'Alembert (1717-1783), en un artículo sobre Geometría declara que: *"La definition et les propiétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de Géométrie"*. Ambas dificultades, sostiene, se deberían evitar con una buena definición de línea recta. Por ello propone llamar paralela a una recta dada, a cualquier otra recta coplanaria que une dos puntos equidistantes y situados en una misma región de aquélla. Con esta definición se construyen inmediatamente las paralelas; sin embargo, sería necesario demostrar que son equidistantes. Como era bastante usual en la época, D'Alembert propuso este teorema, como desafío, a sus contemporáneos.

De Morgan (1806-1871), en su colección de paradojas, relata que Lagrange (1736-1813), hacia el fin de su vida, escribió una Memoria sobre las paralelas. Cuando la presentó en la Academia francesa, interrumpió su lectura exclamando: *Il faut que j'y songe encore!*, y retiró el manuscrito.

Por otro lado, Hoüel (1823-1862) refiere que Lagrange en una conversación con Biot (1774-1862), afirmó la independencia de la trigonometría esférica del Quinto Postulado. Esta referencia tiene visos de ser cierta, puesto que Lagrange se ocupó con especial interés de la trigonometría esférica y además fue el inspirador, si no autor, de una Memoria *Sur les principes fondamentaux de la Mécanique*, en la cual D. de Foncenex (1734-1799) desarrolla una cuestión de independencia análoga a la citada de trigonometría esférica. Para mayor precisión, Foncenex demuestra que la ley analítica para la composición de las fuerzas concurrentes no depende ni del Quinto Postulado ni de cualquier otro equivalente.

Laplace (1749-1827), observa que la ley de Newton (ley de atracción universal), por su sencillez, por su generalidad, y por la correspondencia que encuentra en los fenómenos físicos, debe mirarse como rigurosa. Observa que una de sus propiedades más notables es que si las dimensiones de todos los cuerpos del universo, sus distancias mutuas y sus velocidades decrecieran proporcionalmente, los cuerpos celestes describirían líneas enteramente semejantes a las que describen, de modo que el universo, reducido sucesivamente hasta el espacio más pequeño imaginable, ofrecería siempre las mismas apariencias a sus observadores. Estas apariencias, continúa, son, pues, independientes de las dimensiones del universo, de modo que la sencillez de las leyes naturales no permite al observador más que conocer relaciones. Refiriéndose a esta concepción astronómica del espacio, añade en una nota: *"Las tentativas de los geómetras para demostrar el postulado de Euclides sobre las paralelas han sido hasta ahora inútiles. Sin embargo, nadie pone en duda este postulado y los teoremas que Euclides deduce. La percepción del espacio encierra, pues, una propiedad especial, evidente por sí misma, sin la cual no se puede rigurosamente establecer las propiedades de las paralelas. La idea de la extensión limitada, por ejemplo, del círculo, no contiene nada que dependa de su magnitud absoluta. Pero si nosotros disminuimos con el pensamiento su radio, nos vemos llevados invenciblemente a disminuir en la misma relación su circunferencia y los lados de todas las figuras inscritas. Esta proporcionalidad me parece ser un postulado más natural que el de Euclides, y es notable volver a encontrarlo en los resultados de la gravitación universal".*

Junto a los anteriores geómetras, se suele nombrar también a J.B. Fourier (1768-1830), por una discusión sobre la línea recta mantenida con Monge (1746-1818).

Fourier, considerando como primitivo el concepto de distancia entre dos puntos, propone definir primero la esfera; luego, el plano, como lugar de los puntos equidistantes de dos puntos dados (esta definición fue dada un siglo antes por Leibnitz (1646-1716)); después, la recta, como lugar de los puntos equidistantes de tres puntos dados. Este modo de presentar el problema de los fundamentos de la Geometría lo recogen posteriormente otros geómetras (W. Bolyai, N. Lobachefski, De Tilly). Esta discusión entre Fourier y Monge tiene su puesto entre los primeros documentos que se refieren a la Geometría no-Euclídea. (Hay que añadir que investigaciones posteriores demostraron que tampoco la definición de Fourier permite crear la teoría euclídea de las paralelas sin el auxilio del Quinto Postulado o de cualquier otro equivalente).

Adriano María Legendre (1752-1833), intentó cambiar el postulado por un teorema, cuyas investigaciones, esparcidas en las diferentes ediciones de sus *Eléments de Géométrie* (1794-1823), están resumidas en las *Réflexions sur différentes maniéres de démostrer la théorie des paralléles ou le théoreme sur la somme des trois angles du triangle* (Mémoires Academie Sciences, Paris, T. XIII, 1833).

El teorema central de sus investigaciones lo enuncia:

"Existe un triángulo en el cual la suma de los ángulos es igual a dos rectos".

El siglo XIX, siglo de las luces, va a dar cumplida respuesta a la cuestión que durante tantos siglos se habían planteado tantos ilustres geómetras[20].

Por no desviar nuestra atención del tema que nos ocupa no queremos profundizar en los avances tan espectaculares que hubo en todos los campos de la Matemática y sólo nos referiremos a la Geometría. Ahora bien gran parte de la "culpa" de que la Geometría avanzara en muchas direcciones la tuvo el Análisis, e investigadores que sin destacar en Geometría, hicieron una gran labor en pro de ella.

Así el Análisis del siglo XVIII, que se creyó perfecto, estaba fundado en la noción intuitiva de "continuidad espacial" y, por consiguiente, corría el peligro de una falta de correspondencia con la complejidad de los fenómenos naturales; pero la especulación desinteresada del espacio sin los estímulos de la Física, inspiran a Poncelet (1788-1867) la audacia de sustituir la *"discontinuidad real"* de ciertas imágenes espaciales por el nuevo concepto de *"continuidad real"* y en una carta a O. Terquem, fechada el 3 de noviembre de 1818, le comunica la génesis de su axioma. *"El axioma examinado hasta ahora* —dice— *no es en el fondo, cuando se le considera desde un cierto punto de vista, más que el principio de permanencia o continuidad indefinida de las leyes matemáticas de las magnitudes variables por sucesión insensible, continuidad que, para ciertos estados de un mismo sistema, solo subsisten frecuentemente de una manera abstracta e ideal".*

Este "principio de continuidad" o "principio de permanencia de las relaciones matemáticas", lo enunció de la manera siguiente:

"Las propiedades métricas descubiertas para una figura primitiva siguen siendo aplicables, sin otras modificaciones que cambios de signos, a todas las figuras correlativas que puedan considerarse como surgiendo de la primera".

(20) A pesar de los avances que hubo, se debe decir que seguían apareciendo libros en que demostraban el Quinto Postulado. Como testimonio de los muchos que se pueden enumerar, se van a dar dos; un autor francés y un español, que aunque no fueran matemáticos que destacaran, lo que si es cierto es que sus libros se estudiaban en los Centros correspondientes. Además el testimonio que nos deja el autor español es clarividente, sus fuentes de información estaban mas próximas al pensamiento científico de su momento.
in MARAY p. 13 se enuncia y demuestra: *Par un point donné quelconque M extérieur à une droite donnée quelconque AB, on peut toujours mener une parallèle à cette droite, et une seule.*
in LASALA p. 17 se dice: *Una perpendicular CD y una oblicua EF á una misma recta AB, prolongadas suficientemente se encuentran, y el encuentro se verifica hacia el lado del ángulo agudo FGB que forma la oblicua con la recta.* Y continúa: *Esta proposición no se puede demostrar rigurosamente, pero tiene cierto grado de evidencia que permite admitirla desde luego como cierta.*

El Álgebra pura se apoya en el axioma de continuidad de Poncelet, la Geometría descriptiva de Monge se ensancha con la nueva Geometría proyectiva, las relaciones geométricas van más allá de la intuición y las fórmulas abstractas coinciden con las representaciones concretas, hasta que aparece Agustín-Louis Cauchy (1789-1857), que desconfía de la evidencia intuitiva, y, con su concepto de continuidad, independiza de ésta el de función y proclama la autonomía del Análisis matemático. Todas las ramas de la Matemática le deben algo a Cauchy.

Coetáneo suyo es Karl Frederik Gauss, el genio, del cual se hablará más adelante.

Otros ilustres analistas o algebristas que influyeron en el devenir de las nuevas geometrías son: Jacobi (1804-1851), Abel (1802-1829), Galois (1811-1832), Cayley (1821-1899), Sturm (1803-1855), Hamilton (1805-1865), Dirichlet (1805-1859), Dedekind (1831-1859).

En Geometría se dibujan en el siglo XIX cuatro direcciones perfectamente definidas: la de los puristas que, por oposición a Descartes (1596-1650), preconizan la vuelta a los métodos antiguos; la de los que, por el contrario, amplían las bases del pensamiento cartesiano utilizando los recursos del Cálculo infinitesimal; la de los que se apartan de estas dos tendencias, y, finalmente los que adoptan el punto de vista crítico.

Los representantes de la primera dirección son Miquel Chasles (1793-1880) y Jacobo Steiner (1796-1863). La segunda tendencia geométrica viene representada por Gabriel Lamé (1795-1870) y Julio Plücker (1801-1868).

Entre las dos direcciones Chasles-Steiner y Lamé-Plücker, están los epígonos de Poncelet, que separan las propiedades gráficas de las métricas y sistematizan la Geometría proyectiva de aquél, y, por último, la posición crítica de otros matemáticos, da origen a las Geometrías no-Euclídeas.

Llegado a este punto, cabe preguntarse que ocurría en España:

Pues bien, siguiendo a Vera[21], las luchas políticas del siglo XIX, empezando por la guerra de la Independencia, que dió al traste con el renacimiento científico iniciado en la época de Carlos III, y terminando con las agitaciones

(21) in VERA, *Historia de la Ciencia.*

de la restauración borbónica, [tuvieron como consecuencia que] nuestro país vivió un período —pronunciamientos, guerras carlistas, sangría de Ultramar— nada adecuado a la serena meditación que exige la más abstracta de las ciencias: la Matemática, que solo vive en la región del pensamiento puro.

Sin embargo, podemos citar algunos nombres, cuya labor fundamental —que no es poca— consistió en divulgar e introducir la Matemática de su momento. Entre ellos[22] destaquemos:

José Chaix (1766-1811). En 1801 publica *Instituciones de Cálculo diferencial e Integral con sus aplicaciones principales a las Matemáticas* (hace una discusión de las teorías de Newton, Leibniz y D'Alembert). En 1807 da a la imprenta una *Memoria sobre un nuevo método general para transformar en series las funciones transcendentes, precedido de otro método particular para las funciones logarítmicas y exponenciales.* (Dedicada al "Príncipe de la Paz", Manuel Godoy).

José Mariano Vallejo (1779-1846). En 1806 publica *Adiciones a la Geometría de D. Benito Bails.* En 1807, *La Memoria sobre la curvatura de las líneas.* El *Tratado elemental de Matemáticas* (1813)[23], en cinco tomos, abarca: aritmética, álgebra, geometría, secciones cónicas, trigonometría rectilínea y esférica, aplicaciones del álgebra a la geometría, teoría general de ecuaciones, funciones, series, cálculo diferencial e integral, mecánica de sólidos y fluidos. La última obra que publica en 1819 lleva por título *Compendio de Matemáticas,* está compuesta, según propia declaración, con el fin de formar matemáticos y es una recopilación de todos sus textos anteriores.

Eduardo Torroja Caballé (1847-1918). En 1893 ingresa en la Real Academia de Ciencias con un discurso titulado *Reseña de los medios empleados por la Geometría pura actual para alcanzar el grado de generalidad y de simplificación que la distingue de la antigua.* Entre sus primeras publicaciones destaca el artículo, "Demostraciones de las relaciones más importantes entre los elementos de un

(22) Para un estudio más completo sobre estos autores puede verse a LOPEZ PIÑERO y otros, *Diccionario de la Ciencia Moderna.*

(23) Respecto al Quinto Postulado dice: "*Si una recta forma con otras dos, dos ángulos internos á un mismo lado, tales que su suma sea menor que dos rectos, estas líneas, prolongadas suficientemente, se llegaran á encontrar hácia aquel parage por donde los ángulos juntos son menores que dos rectos*", y añade, *esta proposición está muy distante de ser un axioma; y así es que desde el tiempo de Proclo se ha estado tratando de demostrar sin dexar ningun hueco que le equivalga, y aun no sabemos si se habrá conseguido.* in VALLEJO p. 45.

triángulo esférico" (1876). En 1879 publicó, *Axonometría o perspectiva axonométrica.* En 1880, *Resumen de algunas lecciones de Geometría descriptiva.* En 1888, introduce en España la geometría proyectiva de Christian von Staudt con el *Programa y resumen de las lecciones de Geometría descriptiva.* Por esta época publica en *El Progreso Matemático* algunos artículos como, "Nota relativa a la perpendicularidad de rectas y planos". En 1894 aparece otro artículo, de gran interés, "Curvatura de las líneas en sus puntos del infinito". En 1904 publicó la *Teoría geométrica de las líneas alabeadas y superficies desarrollables.* Su *Tratado de Geometría de la posición y sus aplicaciones a la Geometría de la medida* (1899), fue la primera obra que incluyó la geometría métrica dentro de la geometría proyectiva, lo que hizo con ayuda de Miguel Vegas. Los últimos trabajos de Torroja fueron una comunicación en 1908, al Congreso de la Asociación Española para el Progreso de la Ciencia, sobre la "Aplicación de la homografía y la correlación al estudio de las superficies" y unos artículos sobre "Superficies helicoidales", publicados en la *Revista de la Sociedad Matemática Española* en 1912 y 1913.

José Echegaray y Eizaguirre (1832-1916). En 1858 publica el *Cálculo de Variaciones.* En 1865 publicó dos colecciones de problemas, *Problemas de Geometría Plana y Problemas de Geometría Analítica.* En 1866, su discurso de ingreso a la Academia de Ciencias Exactas, Física y Naturales: "Historia de las matemáticas puras en nuestra España", originó varias protestas e incluso respuestas muy duras[24]. En 1867 publicó *Introducción a la Geometría Superior,* donde se resume, especialmente, la geometría de Michel Chasles. Este mismo año publica las *Teorías modernas de la Física.* En 1868, *Memoria sobre la teoría de determinantes* y publicó también un *Tratado elemental de Termodinámica.*

Zoel García de Galdeano (1846-1924). Fue el primer autor español que escribió sobre la teoría de funciones de variable compleja de Agustín-Louis Cauchy, de grupos de sustitución y de la Geometría n-dimensional. Publicó, *Tratado de Álgebra con arreglo a las teorías modernas* (dos volúmenes) en 1866;

---

(24) En la edición de SANCHEZ RON, *José Echegaray,* se publica como apéndice la conferencia dada por VERA, F. en el Ateneo de Madrid el 15 de Febrero de 1935, publicada en la *Biblioteca Española de Divulgación Científica,* titulada: "Los historiadores de la matemática española", donde rebate a ECHEGARAY la afirmación de que en España no había habido matemáticos ni Matemática en los siglos XII y XIII.
También puede verse un análisis de esta cuestión en el trabajo, del cual soy autor, "Un matemático Extremeño: Francisco Vera Fernández de Córdoba", apud *Revista de Extremadura.*

Crítica y Síntesis del Álgebra en 1888. Tratado de *Análisis Matemático* (cinco volúmenes), entre 1905 y 1906. Fundó, sin medios, el periódico matemático *El Progreso Matemático* en 1891, que llegó a lanzar 92 números, y que sirvió como vehículo de propagación de la Matemática de su momento.

Otros autores que merecen ser destacados son: José María Rey Heredia (1818-1861)[25] y Eulogio Martínez (1834-1884).

Y desde luego, Ventura Reyes Prósper, que además de divulgar las nuevas teorías en Geometría, publica trabajos en las prestigiosas revistas: *Mathematischen Annalen* (Alemana), uno en 1897 y otro al año siguiente. También publica un trabajo en la revista de la Universidad de Kasan (Rusia), *Bulletin de la Societé physico-mathematique de Kasan* y otro en la revista inglesa *The Educational Time* (hasta el momento no nos ha sido posible hacernos de él). Además de publicar en los periódicos matemáticos *El Progreso Matemático* de Zaragoza y en los *Archivos de matemáticas puras y aplicadas* de Valencia.

Aunque algunos autores han expresado que fue García de Galdeano el introductor de las Geometrías no-Euclídeas en España, nosotros nos inclinamos por la opinión de San Juan[26], el cual afirma que fue Reyes Prósper tal introductor.

Retomando de nuevo el tema, decíamos que la tendencia crítica da lugar a las Geometrías no-Euclídeas. Para seguir su evolución nos vamos a basar en un trabajo publicado por Ventura Reyes Prósper en 1894 en *El Progreso Matemático*, periódico matemático dirigido en Zaragoza por el profesor García de Galdeano. Este trabajo lleva por título:

"Breve reseña histórica de la geometría no-Euclídea, especialmente de dos y tres dimensiones".

En este trabajo, siendo fiel al título, hace un repaso de todos los intentos contemporáneos de demostrar el Quinto Postulado. Así destaca a los siguientes

---

(25) D. Felipe Monlau publica su obra postuma, *Teoría trascendental de las cantidades imaginarias* (1865), precedida de un prólogo biográfico.

(26) Esta opinión también se basa en que GARCIA DE GALDEANO publica en 1896 el trabajo "Las modernas generalizaciones expresadas en el Algebra simbólica, las geometrías no-euclídeas y el concepto de hiperespacio", según se deduce del trabajo M. HORMIGON apud *El Basilisco*, mientras que REYES PROSPER publica en 1894 el trabajo "Breve reseña histórica de la geometría no-Euclídea especialmente de dos y tres dimensiones", apud *El Progreso Matemático*.

investigadores: Matías Meternich (*Vollständige Theorie des Parallellinien,* Mainz, 1815), Schwab (*Commentatio in primum Euclidis Elementorum librum,* Stuttgart, 1814), Schumacher (*Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, herausgegeben von Peters,* Altona, 1860-1865), Bertrán de Ginebra (*Developpement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques,* Genève, 1774) y, como el más ilustre, Legendre, ya citado.

Quizás, el que puso las cosas en su sitio fue Gauss (1777-1855), pues debió comprender que el postulado en cuestión ni puede demostrarse ni podría serlo nunca, esta afirmación queda avalada porque, aunque nunca publicó nada sobre esto, lo que sí se ha conservado en sus obras (Werke, Band IV, Göttingen, 1877), y en su correspondencia (*Briefwchsel zwischen Gauss und Schumacher*) son las acertadas críticas de muchas de las pretendidas demostraciones, probando que los autores, al querer resolver una dificultad, la sustituían por otra equivalente, aunque de forma distinta.

Además el genio entre los genios debió ser de los primeros en extraer la conclusión de que dicho Postulado debería ser independiente de los otros cuatro y que, por consiguiente, debería ser posible construir una Geometría completamente distinta. Sin embargo, Gauss, tuvo reparos (¿miedo?) de publicarlo (¿temor a los beocianos?), tal vez a la vista del predominio fuertemente arraigado de la filosofía kantiana, en cuyo sistema, la geometría de Euclides era considerada como absolutamente imprescindible desde el punto de vista conceptual. De cualquier forma su postura ante este tema la deja clara en el análisis que hace sobre los trabajos de J. Bolyai, que más adelante se verá.

En estos años, 1826, Lobachefski (1792-1856)[27], profesor de la Universidad Imperial de Kasan, imparte unas conferencias en su Facultad, exponiendo sus ideas al respecto. Según el matemático eslavo, tanto los trabajos de Legendre como todos los que perseguían la demostración del Quinto Postulado Euclídeo iban tras un fantasma, puesto que no pudiéndose demostrar tal proposición, habría que ponerse en la hipótesis de que fuera falsa, o mejor aún, con independencia de cualquier opinión, situarse en un caso general que pudiera abarcar ambas como casos particulares. Esto es lo que hizo Lobachefski, en lo que denominó Pangeometría, Geometría imaginaria y que posteriormente recibiría los nombres de Geometría astral y Geometría no-Euclídea.

---

(27) En 1893, REYES PROSPER, en *El Progreso Matemático,* le dedica una reseña biográfica-bibliográfica.

Lobachefski publica las siguientes obras:

Los principios de la Geometría (en ruso). Kasan, 1829-30.
Geometría imaginaria (en ruso). Kasan, 1835.
Nuevos principios de Geometría, con una teoría completa de las paralelas (en ruso), 1836-1838.
Geometrischen Untersunchugen zur Theorie der Parallellinien. Berlín, 1840.
Pangeometría (en ruso). Kasan, 1855.

Sin conocer estas investigaciones, y paralelamente a ellas, dos geómetras húngaros, Wolfgang (1775-1856) y Janos Bolyai (1802-1860)[28], padre e hijo llegaron a las mismas conclusiones (*Tentamen juventutem studios am in elementa Matheseos introducendi. Appendix, Scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.* Auctore Johanne Bolyai. Maros Vasarhely, 1832). (Kurzer Grundriss enes Versuches... Maros Vasarhely, 1851).

La opinión de Gauss, sobre los trabajos de Lobachefski, (tomo VIII, pág. 232 de "Werke". 12 volúmenes. Leipzig. Berlín, 1863-1933), se resume en la frase:

"deseoso de leer más de este ingenioso matemático".

Asimismo sobre J. Bolyai, en un carta dirigida a su padre, W. Bolyai, de quien fue gran amigo, le dice:

"Si digo que soy incapaz de elogiar este estudio, quizá le extrañe: Pero no puede ser de otra manera, porque ello equivaldría a alabar mis propios trabajos. En efecto, el enfoque preconizado por vuestro hijo y los resultados que ha obtenido coinciden casi enteramente con las ideas que han ocupado mi espíritu desde hace 30 ó 35 años. No tengo la intención de publicar estas meditaciones durante mi vida, pero he decidido escribirlas para que puedan conservarse. Es, en consecuencia, una sorpresa agradable para mí ahorrarme este trabajo, y me llena de alegría el pensamiento de que es precisamente el hijo de mi gran amigo de siempre el que me ha suplantado de forma tan notable.....".

(28) En 1894, REYES PROSPER, en *El Progreso Matemático*, les dedica al padre y al hijo una reseña bio-bibliográfica, donde se queja del poco interés que les presta a estos investigadores su pueblo natal, Hungría.

Esta misiva debió sentar bastante mal a J. Bolyai, puesto que no volvió a publicar nada más.

Transcurren algunos años en los que permanecen en el olvido tales investigaciones, pero Bernhard Riemann (1826-1866), profesor de Göttingen, y gran discípulo de Gauss, publica en 1854 una Memoria (*Ueber die Hypothesen welche der geometrie zu grunde liegen.* Gotting. Abh. 1854, *Sur les espaces de courbure constante.* Milán, 1868), —es el fundamento de la dirección métrico-diferencial— en la que descubre una nueva fase de la cuestión y sostiene que los axiomas y postulados de Euclides no son una necesidad lógica. Este trabajo coincide en parte con otro del físico Hermann Helmholtz (1821-1894) (*Ueber die Thatsache welche der geometrie zu grunde liegen.* Gotting. Nacchr. 1868), publicado casi simultáneamente. Aunque los dos trabajos son sólo para iniciados (Reyes Prósper, dice que sólo para sabios), Helmholtz continuó el camino, logrando introducir la geometría no-Euclídea en Alemania (según Reyes Prósper, haciéndola popular(?)).

Pero, realmente, lo que da el triunfo a esta nueva visión de la Geometría es quizás el haber demostrado el geómetra Beltrami (1835-1900) (*Saggio di interpretazione della geometria Non-Euclidea.* Napoli, 1868), que aún dentro de las ideas antiguas cabe dar una interpretación de la Geometría Lobachefskiana y que sus teoremas son aplicables a las superficies de curvatura constante negativa —demuestra realmente que el quinto postulado es independiente de los otros cuatro, puesto que en el caso de superficies de curvatura constante negativa se verifican los cuatro primeros postulados y no el quinto, mientras que si nos movemos en la Geometría de Lobachefski, sus resultados son aplicables a este tipo de superficies—, de modo que este estudio no es nunca estéril.

Félix Klein, publica en los *Mahematische Annalen de Leipzig* unas Memorias ("Ueber die Sogennante Nicht-Euklidische Geometrie". *Math. Ann.* Ban IV y ss.), donde, apoyándose en los trabajos de Cayley sobre propiedades proyectivas, llega a establecer, haciendo un exhaustivo estudio, las tres clases de geometrías posibles con respecto al postulado Euclídeo: Geometría parabólica o Euclídea (la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, o por un punto se puede trazar una recta paralela a la dada y solo una); Geometría hiperbólica o Lobachefskiana (la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos, o por un punto se pueden trazar a una recta dos paralelas) —aquí encajarían también los Bolyai— y Geometría elíptica o de Riemann (la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos o por un punto no se puede trazar una recta paralela a otra).

Termina, Reyes Prósper, esta reseña histórica, dándonos la relación de los introductores de esta nueva ciencia en los países más desarrollados científicamente. Así, además de Klein, en Alemania destacan De Tilly (1837-1906) (*Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique.* Mémoires de l'Académie de Bordeaux, 1879), Pasch (1843-1930) (*Vorlesungen über neuere Geometrie.* Leipzig, 1882), Killing (1847-1932) (*Die Nicth. Euklidische, Raumformen.* Leipzig, 1885) Schlegel (1843-1905), Schur, Frischauf (*Absolute Geometrie (Elemente der)*. Leipzig, 1876) y Erdmann; en Italia, Battaglini, Genocchi (*Dei primi principi della Meccanica e della Geometria.* Firenza, 1869), Paolis, D'Ovidio; en Francia, fundamentalmente Poincaré (1854-1912), Flye S. Marie (*Etudes analytiques sur la théorie des Paralléles.* París, 1871), Rouché y Comberousse y Hoüel; en Inglaterra, Clifford (1845-1879); en Estados Unidos, George-Bruce Halstedt (1853-1912) (*American Journal of Mathematics.* Vol. I y II; *Geometrie Rationelle. Traité élémentaire de la science de l'espace.* Gauthier-Villars. Paría. 1911. (Traducción de Paul Barbarin)), Story y Strigham; en Rusia, además de Lobachefski, Vassilief (1853-1929), Smirnoff, Souvoroff y Sanichefski.

Breve análisis en orden cronológico de los trabajos de Geometría publicados por Ventura Reyes Prósper

"Sur la géométrie non-Euclidienne".

En este trabajo, después de una introducción sobre las investigaciones del profesor Klein en las que demuestra que la construcción del cuarto punto armónico no depende más que de los tres puntos fijos dados, incluso cuando no se hace ninguna hipótesis sobre los puntos del infinito, el punto cuyo conjugado buscado se toma fuera del intervalo de los otros dos; nuestro ilustre investigador simplifica la demostración en menos líneas que lo que le ocupa la explicación de lo que hace Klein. (Por los datos que poseemos, éste es el primer trabajo matemático de un español que aparece en una revista extranjera).

“Sur les propiétés graphiques des figures centriques”.
(Extrait d’une lettre adressée a Mr. Pasch).

La mejor crítica de este trabajo es contar que está extraído de una carta que envió a Mr. Pasch, el cual se preocupó de extractarla para su publicación, además de dedicarle un apéndice, donde dice que le parece la demostración más sencilla. Añadiendo[29]: Las consideraciones mediante las cuales he introducido las rectas y planos impropios en mi libro “*Vorlesungen über neure Geometrie*” (de la segunda edición se hizo una traducción castellana en 1913 por J.G. Álvarez Ude y Rey Pastor con el título *Lecciones de Geometría Moderna*), se simplifican notablemente cuando se introduce previamente su demostración [se refiere al resultado de Reyes Prósper].

El problema que resuelve lo vuelve a publicar en 1892 en *El Progreso Matemático* y es el siguiente:

Así como toda la geometría proyectiva del plano se deduce de la proposición (y propiedades) referente a diez rectas, conocida vulgarmente por Teorema de Desargues, del mismo modo la de las figuras radiadas es consecuencia del Teorema correspondiente al anterior y relativo a diez planos que desde un punto común proyectan el mencionado sistemas de rectas.

Realmente demuestra el Teorema de Desargues, para figuras radiadas, a partir de las propiedades elementales de la incidencia en el espacio, a pesar de que es conocido que en el plano el mencionado Teorema no es consecuencia de las propiedades elementales de la incidencia en el plano. (Si un plano se puede “meter” en un espacio de dimensión 3, entonces ya si vale el Teorema de Desargues).

Se puede considerar que es uno de los investigadores, si no el primero, en inaugurar dos apartados de la Revista *Mathematical Reviews* (American Mathematical Society), Planos Arguesianos y no-Arguesianos.

Este trabajo es también importante para los fundamentos de la Geometría, al demostrar, sin necesidad de utilizar elementos ideales, el teorema de Desargues de los triedros perspectivos. Según San Juan, sin la demostración de este teorema Schur no hubiera podido desarrollar su teoría de los elementos

---

(29) Quiero testimoniar mi consideración al Profesor DIAZ BEJARANO, por su ayuda.

ideales, además de cerrar definitivamente la fundamentación de la geometría proyectiva, iniciada por Klein y trabajosamente desarrollada por Pasch.

Entre 1892 y 1919 publica diez trabajos del tema que nos ocupa, de los cuales cinco están en *El Progreso Matemático,* dos en *Archivos de Matemáticas,* uno en *Bulletin de la Societé physico-mathematique de Kasan,* otro en la revista *The Educacional Time,* y el último en la *Revista Matemática Hispano-Americana.*

Después de haber comentado el publicado en 1894 en *El Progreso Matemático* sobre historia de la geometría no-Euclídea, otros trabajos publicados en el mismo medio son:

"Nota acerca de la Geometría proyectiva sobre la superficie esférica"

En este trabajo reproduce la demostración que da en 1888 de un resultado que resume así:

La esfera, superficie que tiene en campo finito sus puntos, no exige consideraciones de puntos en el infinito para establecer su geometría proyectiva, tampoco exige relaciones métricas y, por último, no hace falta para ello más que echar mano de las más elementales proposiciones referentes a rectas y planos.

"Resolución de un problema propuesto por Jacobo Steiner"

Resuelve un problema que, según él, aparece en la colección de las obras completas de Jacobo Steiner (1796-1863), publicadas bajo los auspicios de la Academia de Ciencias de Berlín, en el año 1881.

Dice Reyes Prósper que se refiere a un lindo teorema correspondiente a la circunferencia y atribuído universalmente a Robert Simson (1687-1768), profesor de Matemáticas en la Universidad de Glasgow y que falleció en dicha ciudad el año 1768. Este teorema es:

Si desde un punto w, situado sobre una circunferencia se trazan perpendiculares a los tres lados de un triángulo inscrito en ella, los tres pies de dichas perpendiculares están en línea recta.

Conocido este teorema, el problema que plantea Steiner y que resuelve nuestro autor es:

Dados una circunferencia y un triángulo inscrito en la misma, hallar sobre la circunferencia un punto tal que los tres pies de las perpendiculares trazadas a los tres lados del triángulo, están sobre una recta paralela a otra recta dada de antemano.

"Dodgson-Curiosa Mathematica. Parte I. A new theory of parallels. London 1890. Tercera edición".

Después de asegurar que es un librito sumamente curioso, y exponer que su principal mérito estriba en hacer ver la mutua dependencia existente entre el Postulado Euclídeo referente a las paralelas y ciertas proposiciones sobre áreas. Reyes Prósper muestra que ofrecen las mismas dificultades para ser admitidas.

Supone, Dodgson (1832-1898), como base de su trabajo que: En todo círculo, el tetrágono regular inscrito tiene área mayor que la de cualquier segmento de los del círculo, que cae fuera de él.

Esta proposición es comprobable, sigue diciendo Reyes Prósper, experimentalmente y de un modo sencillísimo para los círculos que en la práctica se nos presentan. Pero prolongando indefinidamente el radio del círculo trazando siempre círculos concéntricos; entonces, bajo el punto de vista no-Euclídeo, los ángulos de los tetrágonos regulares irían sucesivamente disminuyendo a medida que sus lados aumentasen. La relación del área del tetrágono a la de su segmento iría disminuyendo indefinidamente también. Llegaría un momento en que el área del tetrágono sería menor que la del segmento.

"Algunas propiedades referentes a los sistemas de círculos, demostradas sin el auxilio de relaciones métricas ni del postulado Euclídeo".

Siguiendo la línea marcada por Poncelet, Monge y Hankel de simultanear el estudio de la Geometría del espacio con el de la Geometría del plano, en este trabajo establece algunas propiedades vulgares referentes al círculo, con independencia de medidas y paralelismo.

Previamente demuestra el

Lema: "Suponiendo dos rectas ao ao' que se cortan en el punto común a, si levantamos a dichas dos rectas en el plano que las contiene a ambas y en los puntos o y o' respectivamente, las perpendiculares correspondientes, digo que será siempre posible hallar un ángulo oao' tal, que conservando ao y ao' sus longitudes, se corten las dos perpendiculares en un punto w".

Es claro que en la Geometría Euclídea esta proposición es obvia. Este lema le permite demostrar la siguiente proposición, conocida desde hacía mucho tiempo, pero demostrada siempre dentro de la Geometría Euclídea y de las relaciones métricas. Reyes Prósper la demuestra independientemente de relaciones de medida y de paralelismo.

Dados dos círculos en un plano, existe sobre la recta que une sus centros un punto tal que levantando en él una perpendicular a la línea de los centros, goza dicha perpendicular de la propiedad de que trazando desde cualquiera de sus puntos las dos tangentes a los dos círculos, estas tangentes son iguales para cada punto.

Esta recta perpendicular es la que se ha llamado recta de potencia igual (según Jacob Steiner) o eje radical (según Gaulthier de Tours).

En la demostración distingue dos casos:

1.— Las dos circunferencias se cortan en dos puntos;

2.— Las dos circunferencias no se cortan.

"Nueva demostración de las fórmulas trigonométricas de un ángulo igual a la suma o diferencia de dos dados".

En una corta nota (tres páginas), deduce por medio de consideraciones estereométricas (parte de la geometría que trata de la medida de los sólidos), las fórmulas que expresan el valor del seno (sen) y coseno (cos) de $\alpha \pm \beta$. Justifica este trabajo por su intento de buscar un cierto enlace entre la Geometría plana y la del espacio.

Se basa en lo que el geómetra alemán Christian von Staudt (1798-1867), denomina seno de un triedro de caras α, β, γ; que es la raíz cuadrada del determinante de tercer orden

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

cuyo valor es susceptible de tomar todos los valores comprendidos entre —1 y +1.

A partir de esta expresión es fácil dar el volumen de un tetraedro que resulta de tomar, a partir del vértice del triedro y sobre cada una de sus aristas, una longitud igual a la unidad.

Supone que $\gamma = \alpha \pm \beta$. Entonces, en este caso las tres aristas que forman el triedro vienen a colocarse en un plano y el seno del triedro debe valer cero, pues el volumen que entonces se obtiene es nulo.

Después de un desarrollo matemático muy simple, obtiene

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \pm \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

De esta expresión, de forma inmediata, se obtiene que

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

"Nota sobre un punto de Geometría no-Euclídea"

En esta breve nota plantea el problema, por otro lado resuelto en la Geometría Euclídea, de la longitud de un arco de curva, cuando se enfoca desde el punto de vista de la Geometría no-Euclídea.

Era, y es conocido, que el problema en la Geometría elemental, de la longitud de un arco de curva se resuelve como el límite común hacia el que tienden los perímetros poligonales inscritos y circunscritos a este arco, a medida que sus lados tienden a cero. En esencia el procedimiento consiste en aproximar un arco de curva por medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, que al tender los lados a cero, la hipotenusa tiende a la longitud del arco (siempre desde el punto de vista infinitesimal).

Cuando esta técnica quiere aplicarse a la Geometría no-Euclídea, colocándose en el punto de vista de Lobachefski, hay que hacer imprescindiblemente algunas modificaciones. Como en la Geometría de Lobatchefski no existen figuras semejante (según Wallis había adivinado) el giro de la demostración tiene que ser diferente.

Reyes Prósper, lo demuestra a partir de los axiomas, aunque por un comentario final, da la impresión que conocía la Geometría Riemanniana, pero por la fecha que es, no debía estar suficientemente asentada y por lo tanto no utiliza el cálculo infinitesimal.

Debido a que en la Geometría de Lobachefski la suma de los tres ángulos de un triángulo —como ya se ha dicho en páginas anteriores— es menor que 180 grados, para hacer este hecho más patente nuestro autor utiliza un dibujo, que según parece había sido utilizado por primera vez por Gauss, sustituyendo los triángulos rectilíneos (euclídeos), por triángulos con un lado curvo (triángulos rectilíneos lobachefskianos).

De tal dibujo no hace uso en la demostración.

"Note sur le théoréme de Pythagore et la Geometrie non-Euclidienne"

En una breve nota demuestra que en la Geometría no-Euclídea el teorema de Pitágoras es falso. Para ello, por medios elementales, demuestra la dependencia mutua entre el teorema de Pitágoras y el Quinto Postulado de Euclides; concluyendo que al no verificarse el Quinto Postulado en la Geometría no-Euclídea, no puede verificarse el teorema de Pitágoras.

Este trabajo[30] se enmarca en lo que Lobachefski llamó Pangeometría.

"Restitución de una de las obras perdidas de Euclides".

En este trabajo, que se podría encajar como bibliográfico, después de criticar la labor del Imperio romano, que permitió la desaparición de obras geniales de excelsos geómetras griegos, nos introduce en los intentos que ha habido de reconstruir algunas de estas obras, muchas veces a partir de las versiones árabes y otras a partir de manuscritos incompletos.

(30) Según opinión de SAN JUAN.

Así Vieta, en su *Apollonius Gallus,* trató de adivinar la obra de Apolonio de Perga sobre los *Contactos* y Viviani se ocupó de restituir el tratado del mismo Apolonio sobre los *Lugares sólidos,* asunto en el que se dice trabajó durante cuarenta años.

Michel Chasles y Robert Simson intentaron rehacer el tratado de los *Porismas* de Euclides, y consiguieron, cuando menos, dotar a la Ciencia matemática de dos obras de mérito indiscutible[31].

Desgraciadamente otras obras de Euclides se han perdido, con pocas esperanzas de restitución, como sucede con la *Pseudaria,* colección de proposiciones falsas, demostradas falsamente, trabajo muy adecuado para adiestrar a jóvenes estudiantes en buscar el defecto que una demostración pueda tener.

Perdido también hasta hace muy poco el libro de Euclides sobre la *División de las figuras,* del cual sólo se sabía la existencia por Proclo, y que trataba de la división de un área en partes semejantes o no semejantes a ella, que cumpliesen con determinadas condiciones y que guardasen entre ellas una razón dada.

El Dr. Raymond Clare Archibald, continúa diciendo Reyes Prósper, emprendió el trabajo para, basándose principalmente en traducciones del árabe y en un libro de Leonardo de Pisa, devolvernos esta joya extraviada, y fruto de su concienzuda labor es la obrita titulada *Euclid's books on division of figures, with a restoration based on Woepcke's text and the practica geometriae of Leonardo pisano.*

Sobre la valía de Ventura Reyes Prósper destacar dos opiniones de reconocida solvencia. L.A. Santaló[32] (1911), dice:

A finales del siglo XIX y principios del XX existieron en España tres matemáticos que de manera más o menos directa influyeron en la formación de Rey Pastor (1888-1962), a saber: Zoel García de Galdeano, Ventura Reyes Prósper y Eduardo Torroja.

Y continúa, diciendo:

Ventura Reyes Prósper, profesor del Instituto de Segunda Enseñanza de Toledo, era más exclusivamente geómetra, siendo posiblemente el primer matemático español que

(31) CHASLES, M. op. cit.; SIMSON, R. op. cit.

(32) in RIOS y otros, *Julio Rey Pastor, Selecta.*

publicó trabajos en una revista internacional del primer nivel. No hay duda de que este camino de "publicar afuera" influyó mucho sobre el futuro de Rey Pastor.

Más expresivas son las palabras que le dedica Rey Pastor en su discurso en el acto de recepción como académico del profesor San Juan (1908-1969) en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. El profesor San Juan fue alumno de Ventura Reyes Prósper en el Instituto de Toledo. Dice el profesor Rey Pastor:

"Porque si bien era nula para todo párvulo inscrito en el bachillerato de cualquier Instituto español la probabilidad de oir de algún profesor una frase de encomio de la investigación o, al menos, una alusión a la posibilidad de que en esta tierra de místicos, dramaturgos y pintores, un rebelde a esta ley que parecía racial se pusiera a ser creador matemático, esta probabilidad existía estudiando en Toledo, donde tenía cátedra el único matemático español de aquella época no comulgante en la filosofía carlyleana, que asignaba a pocos semidioses el divino don de la creación; con la fatalidad de que esos héroes o semidioses nacían siempre al norte del Pirineo, como si nuestra Península estuviera dejada de la mano de Dios, a pesar de su religiosidad inveterada.

D. Ventura Reyes y Prósper, hombre de vastísima cultura idiomática, naturalista y arqueológica, conocedor como nadie de su Toledo, casi piedra a piedra, y autor de importantes investigaciones sobre moluscos, sobre pájaros y sobre fósiles, que le valieron prestigio europeo, no era ciertamente el único matemático español de su tiempo que tenía ideas originales; pero D. Eduardo Torroja y D. Miguel Vegas las intercalaban en sus textos impresos; y el mejor de mis maestros, que aquí goza oyéndonos las ocultaba tímidamente entre sus papeles; por el contrario, D. Ventura tenía la inmodestia y el coraje de comunicarlas a sabios alemanes y rusos, con quienes correspondía, de viajar para consultarles, y hasta de publicar algunas en exóticas revistas; porque había vencido el complejo de inferioridad que acobardaba a casi todos los españoles, y porque, además, tenía cosas interesantes que decir en los variados sectores de su sabiduría.

La generosa exuberancia hispánica, disculpable por la patriótica sed que todos sufrimos de compatriotas famosos, se apresuraron a calificar de **genio** *a este matemático precursor; calificativo que haría sonreír a cualquier profesor ultrapirenaico al medir fríamente el valor absoluto de las ingeniosas notas elementales firmadas por nuestro colega toledano; pero mal juez será siempre el que interprete en abstracto los hechos del frío sumario escrito, sin interesarse por el caso concreto del encausado, con todo su entorno de circunstancias vitales; y así resulta en este caso: que quien sería fríamente calificado* *como profesor corriente y **normal**, juzgado fuera de aquí, es en verdad **genial**, precisamente por ser **normal afuera** y por tanto excepcional aquí **dentro**; por ser distinto de todos sus colegas; y por parecerse a los hombres de otro mundo más que a los del propio".*

En esos términos tan magníficos como clarividentes —han pasado, desde entonces, algunos años— hablaba Rey Pastor de Reyes Prósper.

Estos méritos no debieron ser suficientes para llegar a una cátedra de Universidad, e incluso para acceder a Catedrático de Instituto de Madrid, a pesar de su consideración en el extranjero, así sus trabajos y biografía aparecen en el Diccionario de Poggendorff's J.C.: *Biographisch-Literaris-chenschafften,* Vieter Bd., II Abtheilung M-Z. Leipzig. Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1904, p. 1238, 1 col.

Algunos científicos extranjeros como Gino Loria, Schur, Burkhardt, Bonola, Pasch, etc. hacen referencia a sus trabajos o reproducen demostraciones suyas. Schröder le cita en el último tomo de sus *Vorlesungen.* También aparece citado en el libro de Max Simon, *Entwicklung der Elementar Geometrie in XIX Jahrhundert, en el Index operum ad geometriam absoltam expectatium* de Bonola, en la bibliografía de C.I. Lewis, en la *Formale Logik de Bochenski,* etc., siendo en todos los casos uno de los poquísimos, si no el único, español citado.

Relación de trabajos publicados por Ventura Reyes Prósper sobre Geometría

"Sur la géométrie non-Euclidienne", *Math. Ann.,* 1887, T. XXIX, pp. 154-156.

"Sur les propiétés graphiques des figures centriques (Extrait d'une lettre adressé a Mr. Pasch)", *Math. Ann.,* 1888, T. XXXII. pp. 157-158.

"Nota acerca de la geometría proyectiva sobre la superficie esférica". *El Progreso Matemático II,* 1892, n. 13, pp. 7-10.

"Resolución de un problema propuesto por Jacobo Steiner". *El Progreso Matemático II,* 1892, n. 17, pp. 147-148.

"Recensión de Dodgson [Lewis Carroll]. Curiosa mathematica. Parte I. A new Theory of Parallels. London, 1890, tercera edición". *El Progreso Matemático II,* 1892, n. 21, pp. 265-266.

"Breve reseña histórica de la Geometría no-Euclídea, especialmente de dos y tres dimensiones". *El Progreso Matemático IV*, 1894, n. 37, pp. 13-16.

"Algunas propiedades referentes a los sistemas de círculos, demostradas sin el auxilio de relaciones métricas ni del postulado euclídeo". *El Progreso Matemático, segundo semestre*, 1895. pp. 205-208.

"Nueva demostración de las fórmulas trigonométricas de un ángulo igual a la suma o diferencia de dos dados". *Archivos de Matemáticas Puras y Aplicadas, I*, 5, 1896, Valencia, 89-91.

"Nota sobre un punto de geometría no-euclídea". *Archivos de Matemáticas Puras y Aplicadas, II*, 3, 1897, Valencia, 44-47

"Note sur le théoréme de Pythagore et la géométrie non-Euclidienne". *Bull. de la Societé physico-mathematique de Kasan*, 1897, Deuxiéme Série, T. I, pp. 67-68.

"Nota con dos demostraciones nuevas de proposiciones trigonométricas". *The Educacional Times*, n. 1, 1910.

"Restitución de una de las obras perdidas de Euclides". *Revista Matemática Hispano-Americana, I*, 10. 1919. pp. 323-325.

ABSTRACT

The diverse attempts to demonstrate he Fifth Postulate of Euclid led to the creation of several types of Non-Euclidean Geometry in the XIXth century. In this study, we travel the historical itinerary of these attempts, from the first document by the commentator Proctus Diadocus until the appearance of our distinguished compatriot Ventura Reyes Prósper in the XIXth century. The last part of this study is an analysis of Ventura Reyes Prósper's publications on Geometry.

Bibliografía

BONOLA, ROBERTO. *Geometrías no euclidianas.* Calpe. Madrid. 1923.

BOYER, CARL B.. *Historia de la Matemática.* Alianza Universidad Textos. Madrid. 1986.

COBO, JESÚS. *Reyes Prósper.* Biografías Extremeñas. Dpto. Publicaciones Diputación de Badajoz. Badajoz. 1991.

COBOS BUENO J. "Un matemático extremeño: Francisco Vera Fernández de Córdoba". *"Revista de Extremadura".* Núm. 5. Segunda época. Mayo-Agosto 1991. pp. 53-58.

COLLETTE, J.P.. *Historia de las Matemáticas.* T. I. Siglo XXI de España Editores. Madrid. 1985.

COXETER, F.R.S. *Non-Euclidean geometry.* Fifh edition. University of Toronto-press. Toronto. 1978.

CHASLES, M. *Aperçu Historique sur l'origine et le developpement des Methodes en Geometrie.* 3ª ed. Gauthier-Villars et Fils. París. 1889.

ENRIQUES, FEDERICO. *Conferencias de Geometría no-Euclídea del profesor Federico Enriques recogidas y ordenadas por el Dr. Olegario Fernández Baños.* Imprenta Castellana. Valladolid. 1918.

EUCLIDES, ELEMENTOS. Libros I-IV. Editorial Gredos. 1991.

FORCADEL DE BEZIES, P. *Les six premiers livres des elements d'Euclides.* Chez Hierofme de Marnef. París. 1564.

GARCÍA, JUAN JUSTO. *Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría.* 2ª ed. Francisco de Toxar. Salamanca. 1794.

GARCÍA, JUAN JUSTO. *Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría.* 3ª ed. vol. II. Francisco de Toxar. Salamanca. 1801.

HEATH, Sir THOMAS L. *The Thirteen Books of Euclid's elements.* Segunda edición. vol. I. Dover, New York, 1956.

HORMIGON, MARIANO. *"Una Aproximación a la Biografía científica de García Galdeano".* "El Basilisco" n. 16. 1984. pp. 38-47.

HIEMYNIANO RONDELLO. *Sex priora Evclidis elementa.* 12ª ed. Typis Longi. Bononiae. 1719.

IACOBO PELETARII. *Cenom in Evclidis elementa Geometrica.* 2ª ed. Apud Ioann Tornaesium. Genevae. 1610.

LASALA MARTINEZ, ATANASIO. *Elementos de Matemáticas. T. II. Geometría y Trigonometría.* La Propaganda Gallega. Orense. 1876.

LÓPEZ PIÑERO, J.; GLICK, THOMAS F.; NAVARRO BROTÓNS, V.; PORTELA MARCO, E. *Diccionario Histórico de la Ciencia moderna en España.* Península. Barcelona. 1983.

MÉRAY, CHARLES. *Nouveaux Éléments de Géométrie.* F. Savy. París. 1874.

MILLÁS VALLICROSA, J.M. *Nuevos estudios sobre historia de la Ciencia Española.* C.S.I.C. Madrid. 1991.

PÉREZ DE MOYA, JUAN. *Tratado de Geometría.* s.p., s.i. ¿1573?.

PÉREZ GONZÁLEZ, F.T. *Tres filósofos en el cajón.* Ed. regional de Extremadura. Colección la Centena. Mérida (Badajoz). 1991.

REYES PRÓSPER, V. "Nicolás Ivanovich Lobachefski, reseña biográfico-bibliográfica". *El Progreso Matemático,* 36. 1893. pp. 321-324.

REYES PRÓSPER, V. "Wolfang y Juan Bolyai, reseña bio-bibliográfica". *El Progreso Matemático,* 38. 1894. pp. 37-40.

RIOS, S.; SANTALÓ, L. A.; BALANZAT, M. *Julio Rey Pastor: matemático.* Instituto de España. Madrid. 1979.

RIOS, S.; SANTALÓ, L.M.; GARCIA CAMARERO, E. *Julio Rey Pastor, Selecta.* Edición preparada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Fundación Banco Exterior de España. Madrid, 1988.

ROUCHÉ, E. et COMBEROUSSE, Ch. de. *Traité de Géométrie.* Nouveau Tirage. Deuxiéme partie. *Géométrie dans l'espace.* Gauthier-Villars. París. 1931.

ROBINSON, G. de B. *The foundations of Geometry.* 4ª ed. University of Toronto Press. Toronto. 1963.

SACCHERI'S GIROLAMO. *Euclides Vindicatus.* 2ª ed. Chelsea. New York. 1986. (Edición bilingüe: latín e inglés).

SAN JUAN, R. "La obra científica del matemático español D. Ventura de los Reyes Prósper". *Gaceta Matemática II* (1950), n. 2, pp. 39-41.

SÁNCHEZ RON, J.M. ed. *José Echegaray.* Fundación Banco Exterior de España. Madrid. 1990.

SIMSON, ROBERTO. *Los seis primeros libros y el undecimo, y duodecimo de los Elementos de Euclides.* Joachin Ibarra, Impresor de Cámara de S.M. Madrid. 1774.

VAL, J.A. del. "Los escritos lógicos de Ventura Reyes y Prósper. (1863-1922)". *Teorema III* (1973) pp. 315-354.

VAL, J.A. del. "Un lógico y matemático español del siglo XIX: Ventura Reyes y Prósper". *Revista de Occidente.* Tomo XII (Segunda época). Enero-Febrero-Marzo. 1966. pp. 252-261.

VALLEJO, JOSEF MARIANO. *Tratado elemental de Matemáticas escrito de orden de S.M. para uso de los caballeros seminaristas del Real Seminario de Nobles de Madrid y demas casas de educación del reyno.* T. 1, parte 2ª, 2ª ed. Catalina Piñuela. Madrid. 1815.

VERA FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA, F. *Breve Historia de la Matemática.* Losada. 2ª ed. Buenos Aires. 1961.

VERA FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA, F. *Breve Historia de la Geometría.* Losada. 2ª ed. Buenos Aires. 1963.

VERA FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA, F. *Historia de la Ciencia.* Joaquín Gil. Barcelona. 1937.

VERA FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA, F. *Evolución del pensamiento científico.* Editorial Sudamericana. Buenos Aires. 1945.

VERA FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA, F. *Historia de la Cultura científica.* Ediar. Buenos Aires. 5 tomos. 1956-1969.

VERA FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA, F. *La matemática en el Occidente Latino-Medieval.* José Cobos Bueno y Dpto. Publicaciones Diputación de Badajoz. Badajoz. 1991.

VERNET GINES, J. *Historia de la Ciencia Española.* Instituto de España. Madrid, 1975.

WUSSING, H.; ARNOLD, W. *Biografías de grandes matemáticos.* Universidad de Zaragoza. Primera edición. 1989.

Apéndice

Facsímil de las obras publicadas por Reyes Prósper sobre Geometría en Revistas extranjeras.

Sur la géométrie non-Euclidienne.

Par

VENTURA REYES Y PRÓSPER à Madrid.

Christian von Staudt a prouvé le prémier que la géometrie de position est indépendante de toute idée de mesure et Mr. Félix Klein est le premier geomètre qui ait porté son attention sur ce fait, qu'elle est aussi indépendante de toute hypothèse sur la théorie des parallèles.*) En effet ce professeur démontre dans ses intéressantes recherches que la construction du quatrième point harmonique ne dépend pas que des trois points fixes donnés, même lorsque nous n'avons pas fait quelque supposition sur les points à l'infini, le point dont le conjugué est cherché étant pris en dehors de l'intervalle des deux autres.

Je rappelle en peu de mots son procédé. Supposons trois points en ligne droite dans l'ordre a, b, c et formons un quadrilatère, dont deux côtés opposés se coupent en a, les deux autres en b, et une diagonale df passe par c, nous avons à prouver, que le point d'intersection de ab avec l'autre diagonale eg est le même pour tous les quadrilatères construits avec les mêmes suppositions, bien que ces quadrilatères soient dans un même plan ou bien dans des plans différents.

Soient $d\,f\,g\,e$ et $d'\,f'\,g'\,e'$ deux des quadrilatères considérés, lesquels ne sont pas situés dans un même plan. Alors si deux quelconques des droites dd', ee', ff', gg' se coupent, toutes se devront couper dans un même point O, d'où découle que les droites ab, eg et $e'g'$ doivent se couper dans un même point.

Mais si les droites dd', ee', ff', gg' ne se coupent pas en dedans de notre espace d'observation, prenons un autre quadrilatère avec les mêmes suppositions, que les deux premiers, mais ne tombant pas dans

---

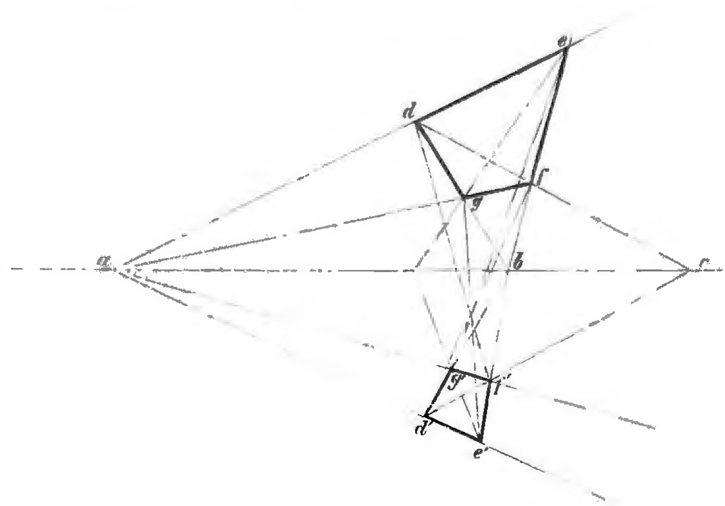
*) t. 4 et 6 des Mathematische Annalen.

aucun des plans des quadrilatères originaires. S'il est d'une telle nature que les droites joignant les vertices du premier avec ses homologues du troisième se coupent dans un point O' et les droites joignant les vertices du second avec ses homologues du troisième se coupent dans un autre point O'', alors notre proposition est évidente, car le théorème proposé étant vrai pour le premier et le troisième quadrilatère de même que pour le second et le troisième, il sera vrai pour le premier et le second. Mais si les dites conditions ne sont pas satisfaites, nous prenons un quatrième quadrilatère, et si nous n'arrivons pas au but désiré avec ce quatrième quadrilatère nous suivrons ce procédé jusq'à y parvenir.

Dans le cas où les deux quadrilatères originaires sont dans un même plan, nous formons un troisième quadrilatère avec les suppositions antérieures, et situé dans un plan différent. Puisque la proposition est vraie pour les deux premiers quadrilatères et le troisième, elle sera vraie aussi pour le premier et le second.

Je crois qu'on peut simplifier beaucoup le procédé indiqué, comme il suit.

Soient $d\,e\,f\,g$ et $d'\,e'\,f'\,g'$ les deux quadrilatères considérés et situés dans des plans différents; alors si les droites dd', ee', ff', gg' ne se



coupent pas en dedans de notre espace, ce sera parceque les deux quadrilatères considérés ont toutes leurs droites homologues directement homologiques et que le centre d'homologie ne tombe pas sous nos yeux. Mais au lieu de recourir aux triangles homologiques $d\,e\,f$ et

$d'e'f'$, nous aurions pu nous servir des triangles def et $f'g'd'$ aussi homologiques et avec un centre d'homologie visible. Car si les droites dd' et ff' ne se coupent pas dans notre espace, alors par cette raison même les droites df' et fd' devront se couper et par son point d'intersection doivent passer les eg' et ge'.

Nous voyons que les deux quadrilatères peuvent être considérés homologiques de deux manières diverses. *Donc nous n'avons pas besoin de recourir à un autre quadrilatère auxiliaire.*

Dans le cas où les deux quadrilatères originaires sont dans un même plan, d'après la même méthode nous pouvons nous servir d'un quadrilatère unique quelconque, situé dans un autre plan.

Madrid, au mois de décembre 1886.

Berichtigungen:

Seite 62 und 63 ist $\mathfrak{C}_4(4)$ und $\mathfrak{C}_5(4)$ zu vertauschen.
„ 70 und 71 sind die Figuren 45 und 46 zu vertauschen.
„ 77, Zeile 12 lies a, c' statt a', c.
„ 78, „ 6 „ 10 statt 9.
„ 78, „ 8 „ k_1', k_1 statt k_1.

Sur les propriétés graphiques des figures centriques.

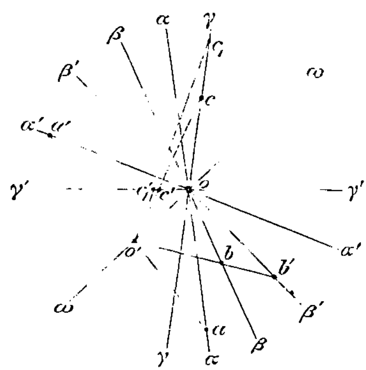
(Extrait d'une lettre adressée à Mr. Pasch.)

Par

Ventura Reyes y Prosper à Madrid.

. . . .

Je crois que les propriétés graphiques des figures centriques dont le centre est un point propre peuvent être demontrées sans le secours de la section par un plan et en conséquence sans se servir de la belle



théorie des points et droites impropres. Il suffit de démontrer pour ces figures le théorème qui corresponde à la proposition connue de Desargues sur les triangles perspectifs dans le plan.

Or, on y parvient comme il suit.

Soient

$$o\alpha \cdot o\alpha',$$
$$o\beta \cdot o\beta',$$
$$o\gamma \cdot o\gamma'$$

trois couples de droites, chaque couple étant située dans un même plan avec la droite $o\omega$. On suppose que les droites $o\alpha$, $o\beta$, $o\gamma$, de même que les $o\alpha'$, $o\beta'$, $o\gamma'$ ne tombent pas sur un même plan.

Prenons

sur $o\alpha$ le point a,

sur $o\alpha'$ le point a'

d'une telle façon que la droite aa' coupe $o\omega$ en o', les points o', a et a' étant arrangés dans l'ordre $ao'a'$ (ce que est toujours possible).

Par le point o' menons une droite telle qui coupant $o\beta$ et $o\beta'$ en b et b' les points o', b, b' soient arrangés dans l'ordre $o'bb'$ (ce que l'on peut faire toujours).

Menons enfin par o' une droite telle que coupant $o\gamma$ et $o\gamma'$ en c et c' les points o', c, c' soient arrangés dans l'ordre $o'c'c$ (ce que est de même toujours possible).

Les droites $ao'a'$, $o'bb'$ et $o'cc'$ peuvent être supposées comme non situées dans un même plan.*)

Alors les droites

ab et $a'b'$ se couperont en C,

bc et $b'c'$ se couperont en A

et ac et $a'c'$ se couperont en B.

D'après la situation perspective des triangles abc et $a'b'c'$ (non situés sur un même plan) les points A, B, C seront placés sur une droite et les droites oA, oB, oC tomberont dans un même plan. Cela démontre le théorème en question. Je suppose que tous les points, dont je me suis servi pour la démonstration antérieure, sont toujours des points propres.

Madrid, 1888.

---

*) Car si les droites $ao'a'$, $o'bb'$ et $o'c'c$ tombent sur le même plan, par le point o' on mène la droite $o'c_1'c$ qui est à considérer alors au lieu de la droite $o'c'c$.

Ueber die uneigentlichen Geraden und Ebenen.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn V. Reyes y Prosper).

Von

M. Pasch in Giessen.

Sie beweisen*) auf denkbar einfachste Art den Satz: Wenn die Strahlen $\alpha\,\beta\,\gamma\,\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ durch einen eigentlichen Punkt laufen und die Ebenen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sich in einer Geraden schneiden, so sind die Schnittlinien der Ebenen $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$, $\gamma\alpha$ und $\gamma'\alpha'$, $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ in einer Ebene enthalten.

Die Betrachtungen, mittels deren ich in meinen „Vorlesungen über neuere Geometrie“ die uneigentlichen Geraden und Ebenen eingeführt habe, werden nun erheblich vereinfacht, wenn man Ihren Beweis vorausschickt.

Nachdem nämlich in § 6 die uneigentlichen Punkte eingeführt sind, werden in § 7 behufs Einführung der uneigentlichen Geraden drei beliebige, zu zwei Ebenen P und Q zugleich gehörige Punkte A, B, C und ein eigentlicher, zu keiner dieser beiden Ebenen gehöriger Punkt F angenommen. Es soll bewiesen werden, dass die Punkte $ABCF$ in einer Ebene liegen.

Construirt man Figur 13, wie in dem Buche angegeben, wobei man jetzt den Punkt K ausserhalb der Ebenen $F\beta\gamma$, $F\gamma\alpha$, $F\alpha\beta$ wählen wird, so liegen auf der Ebene P die Punkte abc und auf der Ebene Q die Punkte $\alpha\beta\gamma$ derart, dass sich die Geraden $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ in dem Punkte K, die Geraden bc und $\beta\gamma$ in A, ca und $\gamma\alpha$ in B, ab und $\alpha\beta$ in C begegnen. Betrachtet man also das Bündel der Strahlen Fa, Fb, Fc, $F\alpha$, $F\beta$, $F\gamma$, so schneiden sich die Ebenen $Fa\alpha$, $Fb\beta$, $Fc\gamma$ in der Geraden FK, die Ebenen Fbc und $F\beta\gamma$ in FA, Fca und $F\gamma\alpha$ in FB, Fab und $F\alpha\beta$ in FC, und mithin fallen die Strahlen FA, FB, FC in eine Ebene.

Nachdem hierdurch der Begriff der uneigentlichen Geraden gewonnen ist, werden behufs Einführung der uneigentlichen Ebene in § 8 vier Punkte $BCDE$, von denen keine drei in gerader Linie liegen, so angenommen, dass die Geraden BD und CE sich in einem Punkte A

*) Vergl. die voranstehende Note des Herrn Reyes y Prosper.

begegnen. Es ist zu beweisen, dass auch die Geraden BC und DE einen Punkt gemein haben.

Zu dem Ende benutze ich irgend eine Ebene P, welche keinen der Punkte $ABCDE$ enthält, und einen eigentlichen Punkt K ausserhalb P; der Fall, wo die Punkte $ABCK$ in einer Ebene liegen, bleibt ausser Betracht. Die Ebene P trifft die Strahlen KA, KB, KC, KD, KE bezw. in Punkten a, b, c, d, e derart, dass von den Punkten $bcde$ keine drei in gerader Linie liegen, aber die Geraden bd und ce sich in a begegnen; den Schnittpunkt der Geraden bc und de nenne ich f. Ich nehme ferner ausserhalb der Ebenen P, KAB, KAC, KBC, KDE irgend einen eigentlichen Punkt L; von dem Falle, wo die Punkte $ABCL$ einer Ebene angehören, ist wieder abzusehen. Den Schnittpunkt der Geraden BC mit der Ebene LDE nenne ich F und betrachte nunmehr das Bündel der Strahlen, welche L mit A, B, C, D, E, F, a, b, c, d, e, f verbinden.

Die Ebenen LaA, LbB, LcC gehen durch die Gerade LK, ebenso die Ebenen LaA, LdD, LeE. Folglich schneiden sich die Ebenen Lbc und LBC, Lca und LCA, Lab und LAB in drei Strahlen eines Büschels, ebenso die Ebenen Lad (Lab) und LAD (LAB), Lae (Lac) und LAE (LAC), Lde und LDE. Begegnet also die Gerade bc der Ebene LBC etwa in g, die Gerade de der Ebene LDE etwa in h, so schneiden sich die Ebenen Lab (Lbd) und LAB (LBD) auf der Ebene Lgh, d. h. die Ebenen Lgh, Lbd, LBD laufen durch eine Gerade. Daraus folgt aber weiter, dass die Schnitte der Ebenen LbB und LdD, LgB (LBF) und LhD (LDF), Lgb (Lbf) und Lhd (Ldf), also die Strahlen LK, LF, Lf in eine Ebene fallen, d. h. dass die Strahlen Kf, LF und mithin die Ebenen KBC, KDE, LBC, LDE einen Punkt (F) gemein haben. Durch diesen Punkt laufen die Geraden BC und DE.

Giessen, 4. April 1888.

Note sur le théorème de Pythagore et la Géométrie Non-Euclidienne.

Je me propose dans cette courte note, de montrer que dans la géométrie Non-Euclidienne le théorème de Pythagore est faux. Et cela par les moyens les plus élémentaires. Car on peut prouver que si le théorème: *Dans tout triangle rectangle la deuxième puissance de l'hypothenuse est égale à la somme des deuxièmes puissances des deux autres cotés,* était vrai, alors cela entrainerait la verité du postulat Euclidien des parallèles; donc, si ce postulat est faux, alors le théorème pythagoricien est faux aussi. On sait qu'on ne peut pas prouver le postulat d'Euclide sans s'appuyer sur un autre postūlat equivalent.

Pour démontrer la dépendence mutuelle entre le théorème de Pythagore et le postulat d'Euclide qui j'ai enoncé, je procède ainsi.

Soit ABC un triangle rectangle en A et isocèle. Du point A abaissons la perpendiculaire AD sur BC. Nous aurons:

$$\angle BAC = 90^{\circ}, \quad AB = AC = b.$$

$$\angle BAD = \angle DAC = 45^{\circ} = {}^1/_2 \angle ABC$$

$$BD = DC = \frac{1}{2} BC.$$

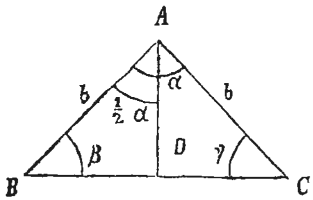
Si le théorème de Pythagore est vrai, nous aurons aussi:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2b^2, \; BC = b\sqrt{2}.$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \left[\frac{1}{2} BC \right]^2 + \overline{AD}^2.$$

Mais on a:

$$\frac{1}{2}BC = BD = \frac{b\sqrt{2}}{2}, \quad \overline{BD}^2 = \frac{2b^2}{4}$$



donc

$$\overline{AB}^2 = \frac{2b^2}{4} + \overline{AD}^2; \quad \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \frac{2b^2}{4} = b^2 - \frac{2b^2}{4} = \frac{2b^2}{4}$$

AD sera égal en consequence à $\sqrt{\frac{2b^2}{4}} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$; et l'on aura:

$$AD = DB.$$

Le triangle rectangle ABD sera donc isocèle, et l'on aura:

$$\angle ABD = \beta = \angle BAD = \frac{1}{2}\alpha = 45^0.$$

La somme des angles du triangle ABD vaudra donc:

$$S = \angle ABD + \angle BAD + \angle ADB = 45^0 + 45^0 + 90^0 = 180^0.$$

Or, la somme des angles du triangle ABD étant 180^0, ce sera de même pour tout autre triangle, ce qui entraine la verité du postulat d'Euclide. Si donc ce postulat n'est pas vrai, le théorème de Pythagore sera faux. Il y a une dépendence mutuelle entre les deux propositions.

Cuenca
Novembre. 1896.

Dr. **Ventura Reyes Prosper.**
