



UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

FACULTAD DE CIENCIAS

Grado en Matemáticas

MEMORIA DEL TRABAJO FIN DE GRADO

ESTUDIO DE LA DINÁMICA NO LINEAL DE UNA EDO
PARA ONDAS SUPERFICIALES EN AGUAS POCO
PROFUNDAS

ALBERTO MEGÍAS FERNÁNDEZ
ENERO, 2024

JOSÉ LUIS BRAVO TRINIDAD, profesor del Departamento de MATEMÁTICAS de la Universidad de Extremadura.

INFORMA:

Que D. ALBERTO MEGÍAS FERNÁNDEZ ha realizado bajo mi dirección el Trabajo Fin de Grado *Estudio de la dinámica no lineal de una EDO para ondas superficiales en aguas poco profundas*. Considero que la memoria reúne los requisitos necesarios para su evaluación.

Badajoz, 23 de enero de 2024

Fdo. José Luis Bravo Trinidad

Índice

Resumen	3
Introducción	4
1. La ecuación de Camassa–Holm	7
1.1. Formulación Hamiltoniana	9
1.2. Existencia de soluciones para ondas viajeras acotadas	12
1.2.1. Soluciones débiles	20
1.2.2. Ondas solitarias que decaen a $u = 0$	21
2. La ecuación de Constantin–Lannes	23
2.1. Formulación Hamiltoniana	24
2.2. Existencia de soluciones para ondas viajeras acotadas	26
2.2.1. Introducción del nivel del perfil de onda del solitón como constante del problema	30
2.2.2. Raíces del polinomio $F'(u)$	32
2.3. Soluciones débiles de la ecuación de Constantin–Lannes	37
2.3.1. Solitones débiles de soporte compacto	38
2.3.2. Soluciones periódicas picudas	41
2.4. Algunas propiedades de los solitones	45
2.4.1. Dependencia de la amplitud con la velocidad	45
2.4.2. Monotonía del solitón	51
2.5. Teorema final	55
Apéndices	59
A. Ecuaciones diferenciales	61
A.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias	61
A.1.1. Existencia, unicidad y dependencia continua de las condiciones iniciales	62
A.2. Resultados para sistemas de ED lineales	64
A.2.1. Sistemas de ED lineales planos	66

A.3. Resultados para sistemas de ED no lineales	68
A.3.1. Resultados locales	69
A.3.2. Algunas definiciones y resultados sobre estabilidad	71
A.3.3. Teoremas globales de existencia y unicidad de soluciones	73
A.3.4. Conjuntos límite y atractores	73
A.3.5. Órbitas periódicas, ciclos límite y separatrices	74
A.3.6. Teoremas de Poincaré–Bendixon para sistemas planos	75
A.3.7. Sistemas Hamiltonianos	76
A.4. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales	78
A.4.1. Condiciones iniciales, de frontera, soluciones y problemas bien definidos en EDPs	79
B. Conceptos básicos sobre espacios de Sobolev	83
B.1. Resultados y definiciones previos	83
B.2. Espacios de Sobolev	84
C. Algunos resultados útiles sobre polinomios	87
C.1. Resultantes y Discriminantes	87
C.2. Continuidad de las raíces por un parámetro	89
C.3. Método de Sturm	92
Bibliografía	93

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado se detalla el estudio de soluciones de tipo ondas viajeras acotadas para dos ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan el comportamiento del perfil de una superficie acuosa en el límite de bajas profundidades, las ecuaciones de Camassa–Holm y Costantin–Lannes. Para ello, se trata de escribir las ecuaciones como un sistema Hamiltoniano plano bajo ciertos cambios de variables. Las soluciones compatibles con el *ansatz* introducido se resumen en ondas solitarias (o solitones) y ondas periódicas. Con el objetivo de fundamentar estos desarrollos se introduce la teoría necesaria sobre ecuaciones diferenciales y sistemas Hamiltonianos planos, así como algunos resultados relacionados con la búsqueda y propiedades de las raíces de polinomios con coeficientes reales. Además, la presencia de singularidades implica la existencia de soluciones débiles.

Abstract

In this Bachelor's Thesis, the study about bounded traveling wave solutions of two ordinary differential equations, Camassa–Holm and Constantin–Lannes equations, which model the behavior of the surface of shallow water is detailed. With that aim, the differential equations are written as Hamiltonian planar systems after the corresponding changes of variables. The solutions fulfilling this *ansatz* can be summarized as solitary waves (or solitons) and periodic waves. The carried description is founded by the introduction of the basic results about differential equations and Hamiltonian planar systems, as well as some others about the finding and properties of the roots of polynomials with real coefficients. Furthermore, the presence of singularities implies the existence of weak solutions.

Introducción

Life is all dynamics

Life is all... dynamics

There's life in all dynamics.

Devin Townsend, *Infinity*, 1998

La vida es dinámica. Pero no son solo unos versos de un rockero transgresivo, sino que esta oración podría ser propia de un sociólogo moderno, por ejemplo. Sin embargo, que la vida sea dinámica y cambiante es una realidad de la cual todos los pensadores a lo largo de la historia se han percatado. Pero no fue hasta la introducción del *Cálculo* por parte de Sir Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz en el que se introdujo la *derivada*, ese concepto novedoso para la época que ha permitido estudiar y comprender todo lo que nos rodea. Por supuesto, la introducción de la derivada implicó inmediatamente la aparición de las ecuaciones diferenciales, tal y como aparece en la obra de Newton, *Método de las fluxiones y series infinitas* (*Methodus fluxionum et serierum infinitorum*) [25]. Estos nuevos métodos para la fecha permitieron resolver problemas tan importantes como el problema de dos cuerpos, que explica las leyes de Kepler del movimiento planetario.

Al igual que ocurre con cualquier ecuación algebraica usual, a la hora de resolver ecuaciones diferenciales, el caso lineal es el más sencillo, pudiéndose decir que es incluso *trivial*. Sin embargo, las ecuaciones diferenciales no lineales constituyen un fascinante y desafiante campo de estudio en matemáticas. La presencia de términos no lineales hacen que la resolución de éstas no sea directa e implican, usualmente, comportamientos mucho más complejos y difíciles de analizar.

Este carácter no lineal puede conducir a fenómenos fascinantes como el caos y las bifurcaciones, entre otros ejemplos [27, 30]. El caos es un fenómeno impredecible y altamente sensible a las condiciones iniciales, donde pequeñas variaciones pueden dar lugar a resultados completamente diferentes, como se observa en las ecuaciones de Lorenz [21]. Las bifurcaciones ocurren cuando cambian las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial no lineal debido a cambios en los parámetros del sistema.

El estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales tiene aplicaciones en diversas áreas, como la física teórica, la biología, la ingeniería y la economía. En la física

teórica, las ecuaciones no lineales aparecen en la descripción de sistemas complejos como los fluidos, los campos electromagnéticos y la mecánica cuántica. En biología, se utilizan para modelar y comprender el comportamiento de sistemas biológicos como poblaciones, dinámica de enfermedades y reacciones químicas en sistemas vivos. En ingeniería, las ecuaciones no lineales se aplican al análisis y diseño de sistemas de control, circuitos eléctricos y estructuras mecánicas. En economía, por ejemplo, se utilizan para modelar el comportamiento de los mercados financieros y las interacciones entre agentes económicos.

En este trabajo, se estudiarán las soluciones para ecuaciones que describen el comportamiento de la superficie de un fluido acuoso cuando éste tiene poca profundidad. No se describirá la deducción de estas ecuaciones, pero sí cómo buscar un tipo de soluciones denominadas de “ondas viajeras”, del inglés *travelling waves*, haciendo uso de los trabajos de Anna Geyer y Armengol Gasull [11, 12]. Concretamente, se tratará de buscar un tipo especial de soluciones denominadas solitones.

El trabajo sigue la siguiente estructura. En el Capítulo 1 se estudiará la ecuación de Camassa–Holm que intenta describir la superficie de un medio acuoso a baja profundidad, introduciendo el cambio de variable que nos permite buscar soluciones del tipo ondas viajeras y reduciendo el problema desde una ecuación en derivadas parciales a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. El estudio de las soluciones de esta EDO se basará en demostrar que dicha ecuación es topológicamente equivalente a un sistema Hamiltoniano plano. Además, en dicho sistema existe un punto singular, que dará pie al estudio de soluciones débiles de este.

Por otro lado, en el Capítulo 2 se desarrollará un estudio equivalente al anterior pero para otra ecuación que describe el mismo fenómeno, la ecuación de Constantin–Lannes.

Finalmente, se introducen Apéndices con resultados teóricos útiles y necesarios para entender algunos desarrollos de los capítulos principales del trabajo. Concretamente, en el Apéndice A se introducen resultados básicos sobre la teoría de Ecuaciones Diferenciales, en el Apéndice B se definen el concepto de derivada débil y espacios de Sobolev, y en el Apéndice C se enuncian algunas definiciones y resultados sobre polinomios de variable real.

Capítulo 1

La ecuación de Camassa–Holm

El intento de describir la formación y evolución de ondas en agua ha derivado en la propuesta de un gran número de ecuaciones con términos no lineales, que pueden capturar ciertos efectos que no aparecen en los modelos lineales. En este capítulo, se trabajará con uno de los ejemplos más conocidos, la ecuación en derivadas parciales conocida como ecuación de Camassa–Holm [2], que introduciremos a continuación.

Consideremos una onda de agua unidimensional. Sea $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ el perfil de dicha onda, es decir, la componente de la velocidad del agua en la única dirección espacial o, equivalentemente (en el límite de bajas profundidades [6, 18]), la altura de la superficie libre del agua desde el suelo. Por tanto, u es una función de dos variables que dependerá de la posición $x \in \mathbb{R}$ y del instante de tiempo $t \in \mathbb{R}^+$ en los que observemos dicho perfil. Una representación de la dependencia espacio-temporal de u puede verse en la Figura 1.1.

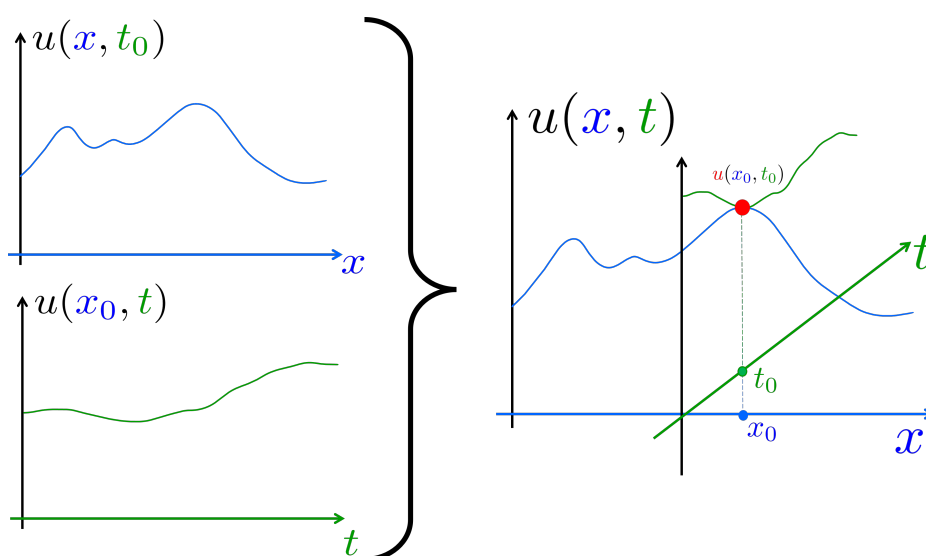


Figura 1.1: Representación de la dependencia espacio-temporal del perfil de ondas u , siendo $x_0 \in \mathbb{R}$ y $t_0 \in \mathbb{R}^+$ una posición y un tiempo de referencia.

Tras usar diferentes aproximaciones en las ecuaciones de Euler para un fluido incompresible [20], que pueden verse más detalladamente en [2], R. Camassa

y D. D. Holm propusieron la ecuación

$$u_t + 2\kappa u_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \quad (1.1)$$

con el objetivo de describir la dinámica del perfil de onda unidimensional para aguas poco profundas, donde $\kappa \in \mathbb{R}$ es una constante relacionada con la velocidad crítica superficial en este sistema [2] y $u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxt}$ denotan diferentes derivadas parciales del perfil de ondas $u(x, t)$. Es decir, dado un punto $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$,

$$\frac{\partial^n}{\partial y_1 \cdots \partial y_n} u(x_0, y_0) \stackrel{\text{NOT.}}{\equiv} \partial_{y_1 \cdots y_n} u(x_0, y_0), \quad y_i \in \{x, t\}, i \in \{1, \dots, m\}.$$

Esta ecuación parece describir bien el comportamiento de las ondas superficiales en aguas poco profundas para amplitudes moderadas [5, 17]. Además, la ecuación de Camassa–Holm es la más común y destacada debido a sus propiedades y toda la fenomenología inmersa en sus soluciones. Una discusión sobre la buena definición de la ecuación de Camassa–Holm como problema de Cauchy (Definición A.4.9) puede encontrarse en [24].

En este capítulo, estudiaremos las soluciones para ondas viajeras de (1.1) y, después, utilizaremos técnicas similares para estudiar ese mismo tipo de soluciones en otra ecuación que intenta caracterizar el mismo sistema físico.

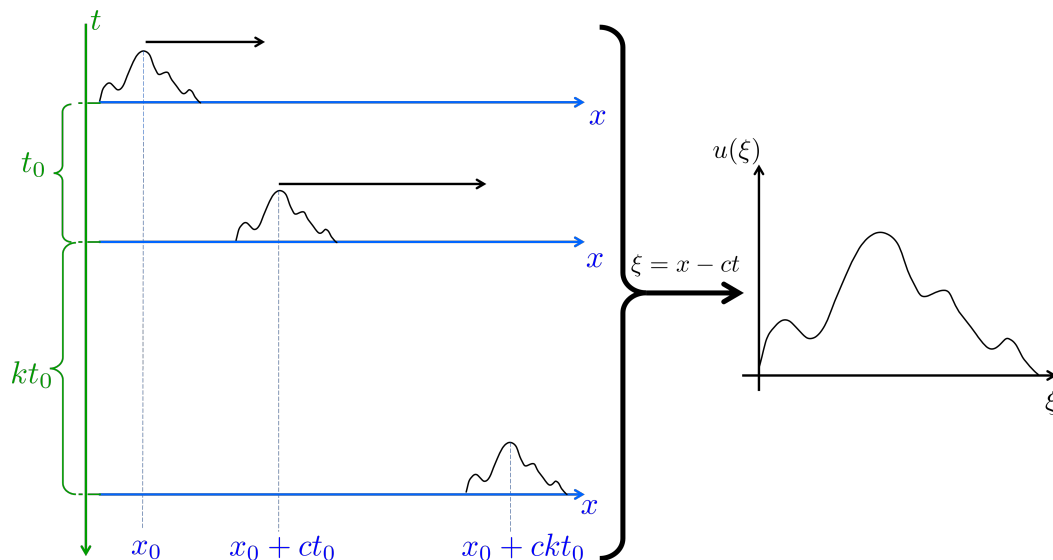


Figura 1.2: Esquema: transformación de onda viajera

En este trabajo, se analizan las soluciones para ondas viajeras, es decir, soluciones tales que el perfil de ondas se mueve a velocidad constante en una dirección, $c \in \mathbb{R}$, sin alterar su forma, tal y como se representa en la Figura 1.2. Por tanto, se buscarán

soluciones de (1.1) tal que

$$u(x, t) \equiv u(\xi), \quad \xi = x - ct. \quad (1.2)$$

Imponiendo en (1.1) que la solución sea de esta forma, se obtiene la siguiente EDO de segundo orden no lineal

$$(c - 2\kappa)\dot{u} + (2\ddot{u} - 3)\dot{u} + (u - c)\ddot{u} = 0, \quad (1.3)$$

donde se ha introducido la notación

$$\frac{du}{d\xi} \equiv \dot{u}, \quad \frac{d^2u}{d\xi^2} \equiv \ddot{u}, \quad \frac{d^3u}{d\xi^3} \equiv \dddot{u}. \quad (1.4)$$

La ecuación (1.3) puede reescribirse como

$$\frac{d}{d\xi} \left[(c - 2\kappa)u + (u - c)\ddot{u} - \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}\dot{u}^2 \right] = 0,$$

que tras una primera integración, se obtiene

$$\ddot{u}(u - c) + K + (c - 2\kappa)u - \frac{3}{2}u^2 + \frac{(\dot{u})^2}{2} = 0, \quad (1.5)$$

donde $K \in \mathbb{R}$ es una constante de integración. Por conveniencia, haremos el siguiente cambio de variables,

$$w = u - c, \quad (1.6)$$

de tal forma que la ecuación (1.5) se puede reescribir como

$$\ddot{w}w + F'(w) + \frac{(\dot{w})^2}{2} = 0, \quad (1.7)$$

donde la función F se define como

$$F(w) = Aw - Bw^2 - \frac{w^3}{2}, \quad A = K - 2\kappa c - \frac{c^2}{2} \in \mathbb{R}, \quad B = c + \kappa \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Al ser $F'(w)$ un polinomio, (1.7) cumple el Teorema de existencia y unicidad global de soluciones (Teorema A.1.11). Probaremos a continuación que (1.7) es equivalente a un sistema Hamiltoniano plano (ver Apéndice A.3.7).

1.1. Formulación Hamiltoniana

Veamos que la ecuación (1.7) es topológicamente equivalente a un sistema Hamiltoniano plano para ciertos valores de los parámetros y, por tanto, permite su

resolución directa.

Proposición 1.1.1. *La ecuación (1.7) es topológicamente equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden,*

$$\begin{cases} \frac{dw}{d\tau} = vw, \\ \frac{dv}{d\tau} = -F'(w) - \frac{1}{2}v^2, \end{cases} \quad \text{tal que} \quad \frac{d\xi}{d\tau} = w, \quad (1.9)$$

en cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \{w = 0\}$, preservando la orientación en el semiplano $\{w > 0\}$ y revirtiendo la orientación en el otro semiplano $\{w < 0\}$. Además, el sistema (1.9) es un sistema Hamiltoniano, y sus órbitas son las curvas de nivel

$$h = F(w) + \frac{1}{2}v^2w \quad (1.10)$$

con $h \in \mathbb{R}$ una constante.

Demostración. Se va a demostrar la proposición por construcción. Es decir, construiremos el sistema (1.9) e iremos identificando los elementos necesarios.

Primero, trataremos de transformar la EDO de segundo orden (1.7) en un sistema de dos EDOs de primer orden. Tal y como es usual, la forma de proceder para ello es definir una nueva variable, v , tal que se identificará con la primera derivada de w . Es decir,

$$\dot{w} + F'(w) + \frac{v^2}{2} = 0, \quad \text{con } \dot{w} = v.$$

Por tanto,

$$\begin{cases} \dot{w} = v \\ \dot{v} = \frac{-F'(w) - \frac{1}{2}v^2}{w}, \end{cases} \quad (1.11)$$

es efectivamente topológicamente equivalente a (1.7) en $\mathbb{R} \setminus \{w = 0\}$ y preserva la orientación, también, en todo $\mathbb{R} \setminus \{w = 0\}$. Además, si definimos un cambio de variable $\xi \rightarrow \tau$ tal que $\frac{d\xi}{d\tau} = w$ en $\mathbb{R} \setminus \{w = 0\}$, el sistema (2.5) se escribe en esta nueva variable como (1.9), siendo, a su vez, topológicamente equivalente a (1.11) y, por ende, a (1.7), en $\mathbb{R} \setminus \{w = 0\}$, preservando la orientación en el semiplano $\{w > 0\}$ y revirtiéndola en $\{w < 0\}$.

Veamos, a continuación, que (1.9) es un sistema Hamiltoniano con un grado de libertad. Para ello, debemos encontrar una función Hamiltoniana $H(w, v) : (\mathbb{R} \setminus \{w = 0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, al menos, H sea \mathcal{C}^2 , y que $\frac{dv}{d\tau} = -H_w$ y $\frac{dw}{d\tau} = H_v$. Por tanto, identificando las relaciones anteriores con el sistema (1.9), se deduce que (1.9) posee la siguiente función Hamiltoniana,

$$H(w, v) = F(w) + \frac{1}{2}v^2w, \quad (1.12)$$

que es por tanto constante a lo largo de las soluciones de (1.9), i.e., $H(w, v) = h \in \mathbb{R}$ para (w, v) una curva solución del sistema (1.9) (véase el Teorema A.3.30). Cada curva solución vendrá dada por un valor de la constante $h \in \mathbb{R}$ concreta, y resolviendo la ecuación $H(w, v) = h$ obtenemos las curvas de nivel (1.10). \square

Como consecuencia del resultado anterior, cada solución (w, v) puede expresarse de la forma $v(w)$ resolviendo cada curva de nivel en (1.10), que tras despejar se obtiene

$$v = \pm \sqrt{2 \frac{h - F(w)}{w}}. \quad (1.13)$$

Una vez probada la formulación Hamiltoniana de la ecuación de Camassa–Holm bajo el ansatz de soluciones de ondas viajeras (1.9), así como la ecuación de sus trayectorias (1.13), se llevará a cabo a continuación un estudio cualitativo sobre las propiedades de dichas soluciones.

Un ejemplo de curvas de nivel de la función Hamiltoniana (1.12) puede visualizarse en la Figura 1.3.

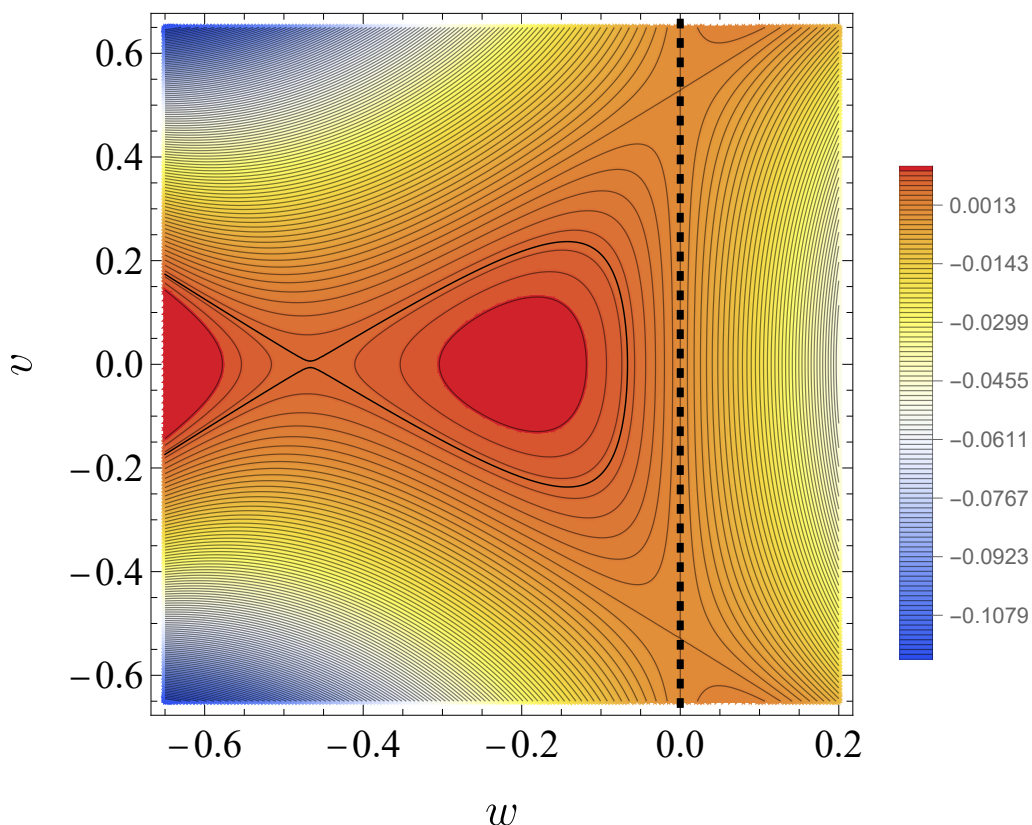


Figura 1.3: Curvas de nivel de la función Hamiltoniana (1.12) para $K, c, \kappa \in \mathbb{R}$ tales que $A = -0.14$ y $B = 1/2$. La recta negra gruesa y discontinua representa la recta $w = 0$.

1.2. Existencia de soluciones para ondas viajeras acotadas

Gracias a la Proposición 1.1.1, hemos conseguido reducir la discusión de la existencia de ondas viajeras al estudio de la existencia de órbitas de la forma (1.13). Para ello, estudiaremos los puntos críticos de (1.9) y su linealización entorno a dichos puntos, cuyos autovalores nos darán información (en general) sobre el comportamiento local de las trayectorias en entornos de los puntos críticos haciendo uso de los resultados de la Subsección A.3.1.

Lema 1.2.1. *El polinomio $F'(w)$ tiene, como mucho, dos raíces reales distintas. Además, se verifica*

- (i) *si $-\frac{2}{3}B^2 > A$, entonces $F'(w)$ no tiene raíces reales.*
- (ii) *si $-\frac{2}{3}B^2 = A$, entonces $F'(w)$ tiene una raíz real doble, $w^* = -2B/3$, que coincide con $w^* = 0$ si $A = B = 0$.*
- (iii) *si $-\frac{2}{3}B^2 < A$, entonces $F'(w)$ tiene dos raíces reales. Si una raíz es $w_1^* = 0$, entonces $A = 0 \neq B$ y $w_2^* = -4B/3$.*

Demostración. La primera afirmación es inmediata pues está claro que, usando (1.8),

$$F'(w) = A - 2Bw - \frac{3w^2}{2},$$

es un polinomio de segundo grado con coeficientes reales. Por tanto, tendrá a lo sumo dos raíces reales. Para probar (i), (ii) y (iii), basta con atender al discriminante,

$$\text{Dis}(F'(w), w) = 4B^2 + 6A.$$

Sabiendo que si $\text{Dis}(F'(w), w) < 0$, entonces F' no tiene raíces reales; si $\text{Dis}(F'(w), w) = 0$, entonces F' tiene una raíz real; y que si $\text{Dis}(F'(w), w) > 0$, entonces F' tiene dos raíces reales. Por tanto, obtenemos (i) y la multiplicidad de soluciones de F' de (ii) y (iii).

En el caso que $-\frac{2}{3}B^2 = A$ y, por ende, $F'(w)$ solo tiene una raíz real doble, esta es $w^* = -2B/3$. En el caso de que $B = 0$, se tiene que necesariamente $A = B = 0$ y $w^* = 0$, obteniendo (ii).

Si $-\frac{2}{3}B^2 < A$, hemos probado que $F'(w)$ tiene dos raíces reales. Supongamos que una de ellas es $w_1^* = 0$. Entonces, necesariamente, $A = 0$. Para que se cumpla la desigualdad, $B \neq 0$, y resolviendo, $w_2^* = -4B/3$. \square

Proposición 1.2.2. *El sistema (1.9) tiene a lo sumo dos puntos críticos. Además, si existe algún punto crítico (w_0, v_0) , necesariamente $v_0 = 0$ y w_0 es raíz no nula de F' .*

Demostración. Los puntos críticos de (1.9) se corresponden con los pares $(w_0, v_0) \in (\mathbb{R} \setminus \{w = 0\}) \times \mathbb{R}$ tales que hacen $H_w(w_0, v_0) = H_v(w_0, v_0) = 0$ con H la función Hamiltoniana (1.12). Por ende, necesariamente $v_0 = 0$ para cumplir la condición $H_v(w_0, v_0) = 0$. Además, de la condición $0 = H_w(w_0, 0) = F'(w_0)$ y en virtud del Lema 1.2.1, el sistema (1.9) tiene a lo sumo dos puntos críticos. \square

Nota 1.2.3. Buscaremos soluciones acotadas de (1.7) atendiendo a las diferentes órbitas del sistema Hamiltoniano (1.9). Haciendo uso de que el sistema (1.9) es un sistema Hamiltoniano plano y del teorema de Poincaré–Bendixon A.3.26 y su generalización A.3.27 limitaremos los posibles escenarios. Primero, determinemos el número de puntos críticos del sistema (1.9) para poder estudiar en cada caso la existencia de soluciones acotadas para ondas viajeras. A partir de la determinación de los puntos críticos, se estudiarán los posibles conjuntos ω -límite (ver Definición A.3.20).

Como consecuencia de la Proposición 1.2.2 las raíces no nulas de $F'(w_0)$ determinan los puntos críticos del sistema Hamiltoniano (1.9). En concreto, según el número puntos críticos del sistema (o raíces no nulas de F'), podemos encontrar tres casos de acuerdo con la Proposición 1.2.2:

- (i) El polinomio, $F'(w)$ no tiene ninguna raíz, entonces el sistema (1.9) no tiene puntos críticos. Esto va a implicar que no existan soluciones acotadas.

Por el teorema de Poincaré–Bendixon A.3.26, solo tendríamos la posibilidad de que existieran soluciones acotadas asociadas a órbitas periódicas, es decir, soluciones cerradas en el espacio de fases.

Atendiendo a las ecuaciones de las trayectorias (1.13), para que éstas sean cerradas, deben coincidir las ramas positiva y negativa al menos en dos ocasiones en $v = 0$. Es decir, la ecuación $h - F(w) = 0$ debería tener dos soluciones. Sin embargo, si eso fuera así, por el Teorema de Rolle, F' , debería tener una raíz en un punto intermedio, contradiciendo la hipótesis. Por tanto, necesariamente, $h - F(w) = 0$ solo tiene una posible solución en una de las componentes conexas de $\mathbb{R} \setminus \{w = 0\}$. Concluimos así que, en este caso, las soluciones no son acotadas.

Además, podríamos haber concluido antes. Como las soluciones un sistema Hamiltoniano plano son las curvas de nivel de la función Hamiltoniana (1.10). Si existen curvas de nivel cerradas, implica que debe encerrar al menos un punto de equilibrio (ver el Teorema A.3.28). Podemos concluir que como no existen puntos de equilibrio, no existen soluciones acotadas.

- (ii) El polinomio, $F'(w)$ tiene una raíz doble, que puede ser $w^* = -2B/3$ si $B \neq 0$ o $w^* = 0$ si $A = B = 0$.

(a) En el primer caso, el punto crítico del sistema caería en una de las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \{w = 0\}$. Como $F(w)$ es un polinomio de grado 3 con una raíz real doble, sabemos que en w^* hay un punto de inflexión. La trayectoria que habría que discutir sería la que pasa por el punto de inflexión $(w^*, 0)$. En ese caso, la trayectoria es compatible con $h^* = 4B^3/27$.

A la vista de las ecuaciones de las trayectorias solución (1.13), las órbitas divergen cuando se acercan a la recta $w = 0$. Por tanto, no habría órbitas acotadas en el espacio de fases bajo estas condiciones, a excepción del propio punto crítico.

(b) En el caso de que $w^* = 0$, sabemos que $A = B = 0$. Por tanto, las trayectorias cumplen

$$v = \pm \sqrt{2 \frac{h + \frac{w^3}{2}}{w}},$$

siendo todas las órbitas no acotadas. Incluso, para aquella que “cruza” la recta $w = 0$ (que sería compatible con $h = 0$), las órbitas posibles coinciden con la imagen de la curva $v^2 = w$, que no son acotadas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{w = 0\}$.

(iii) Supongamos que estamos bajo las condiciones en las que $F'(w)$ tiene dos raíces reales simples, w_1^* y w_2^* . Si ninguna de ellas coincide con la recta $w = 0$, entonces $A \neq 0$, y en virtud del Teorema A.3.32, los puntos críticos del espacio de fases son $(w_1^*, 0)$ y $(w_2^*, 0)$ y coinciden, cada uno de ellos, o bien con un centro o bien con un punto de silla. En caso de que uno de ellos, por ejemplo, $w_1^* = 0$, el espacio de fases asociado al sistema (1.9) solo tendría un punto crítico simple, $(w_2^*, 0)$ que sería bien un centro o un punto de silla según afirma el Teorema A.3.32. La naturaleza de estos puntos fijos dependerá del signo asociado a $\det J(w_i^*, 0) = F''(w_i^*)w_i^*$ para $i \in \{1, 2\}$, siendo J la matriz Jacobiana del sistema (1.9),

$$J(w, v) = \begin{pmatrix} v & w \\ -F''(w) & -v \end{pmatrix}.$$

Hemos reducido el estudio de las órbitas acotadas, a la determinación del signo de

$$\det J(w_i^*, 0) = F''(w_i^*)w_i^*, \quad (1.14)$$

para $i \in \{1, 2\}$. Concretamente si $\det J(w_i^*, 0) < 0$, el punto crítico $(w_i^*, 0)$ es un punto de silla, y si $\det J(w_i^*, 0) > 0$, el punto crítico $(w_i^*, 0)$ es un centro (véase los Teoremas A.2.10 y A.3.32). Por tanto, solo cuando F tiene dos raíces reales simples, existe la posibilidad que haya soluciones acotadas distintas a los propios puntos fijos. La región concreta del espacio de parámetros donde esto ocurre se enuncia en la Proposición 1.2.4.

Proposición 1.2.4. *El sistema (1.9) solo tiene órbitas acotadas distintas a los puntos críticos para $-\frac{2}{3}B^2 < A < 0$.*

Demostración. A la vista del Lema 1.2.1 y el análisis de la Nota 1.2.3, el sistema (1.9) solo puede tener órbitas acotadas para $-\frac{2}{3}B^2 < A$.

En este caso, si $A \neq 0$, las dos raíces reales de $F'(w)$ son

$$w_1^* = -\frac{2}{3} \left(B + \sqrt{B^2 + \frac{3}{2}A} \right), \quad w_2^* = -\frac{2}{3} \left(B - \sqrt{B^2 + \frac{3}{2}A} \right).$$

Por tanto, si $A > 0$, las raíces w_1^* y w_2^* tienen signos opuestos, concretamente, $w_1^* < 0 < w_2^*$ pues $\sqrt{B^2 + 3A/2} > |B|$. Entonces, cada punto crítico $(w_1^*, 0)$ y $(w_2^*, 0)$ pertenece a una componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \{w = 0\}$.

Como consecuencia de lo anterior, teniendo en cuenta que $\det J(w_i^*, 0) = F''(w_i^*)w_i^*$ (véase (1.14)) y que

$$F''(w_i^*) = (-1)^{i-1} 2\sqrt{B^2 + \frac{3}{2}A}, \quad (1.15)$$

es fácil ver que $\det J(w_i^*, 0) < 0$ para $i = 1, 2$. Por tanto, ambos puntos críticos son puntos de silla y se concluye que no existen órbitas acotadas diferentes a los propios puntos fijos.

Por otro lado, si $A < 0$, ambos puntos críticos pertenecen a la misma componente conexa, es decir, w_1^* y w_2^* tienen el mismo signo. Teniendo en cuenta (1.15), es decir, que $F''(w_2^*) < 0 < F''(w_1^*)$, claramente un punto crítico se corresponde con un centro y el otro con un punto de silla, pues $\det J(w_1^*, 0)$ y $\det J(w_2^*, 0)$ tienen necesariamente signos opuestos a la vista de (1.14). Por tanto, por ejemplo, un centro como punto crítico implica la existencia de órbitas cerradas y, entonces, acotadas.

Por otro lado, si $A = 0$, las dos raíces reales de $F'(w)$ son

$$w_1^* = 0, \quad w_2^* = -\frac{4}{3}B,$$

existiendo solo un punto crítico no degenerado del sistema (1.9) en una de las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \{w = 0\}$, y cumpliendo que $\det J(w_2^*, 0) = -8B^2/3 < 0$, coincidiendo con un punto de silla. Así pues, es claro que en ninguna de las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \{w = 0\}$ existen órbitas acotadas. \square

Una vez se ha identificado la región del espacio de parámetros en la cual el sistema (1.9) tiene órbitas acotadas, el objetivo es buscar si existe alguna órbita que pueda identificarse con una onda viajera solitaria. Es decir, necesitaríamos una solución que no se corresponda con una onda viajera periódica, sino que tenga un único extremo relativo y que evolucione en sus extremos a una cierta constante. Esta propiedad nos la va a dar la existencia de una conexión homoclínica, es decir, una

órbita que une un punto de silla consigo mismo (ver Definición A.3.24 para más detalles). En ese caso, el punto de silla “rompe la periodicidad” pues la trayectoria solución que se identifica con ella, se “aleja” y “acerca” al punto de silla solo al comienzo y final de la trayectoria de manera asintótica, lo que no implica oscilaciones perpetuas.

Además, este tipo de curva es candidata a existir. Primero, el Teorema de Poincaré-Bendixson A.3.27 la contempla como una posibilidad. Más aún, en la región del espacio de parámetros definida en la Proposición anterior, sabemos que el sistema (1.9) presenta dos puntos críticos distintos en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \{w = 0\}$, tal que uno se corresponde con un punto de silla y el otro con un centro. Por tanto, la curva homoclínica será la consecuencia de una órbita cerrada entorno al centro que contenga al punto de silla.

Lema 1.2.5. *Bajo las condiciones de la proposición anterior, existe una curva homoclínica para cierta constante $h = h_s$ y*

$$-\frac{2}{3}B^2 < A < -\frac{1}{2}B^2, \quad (1.16)$$

que contiene a un punto de silla del sistema (1.9), s , tal que $h_s = F(s)$ y s es solución de

$$F'(y) = 0, \quad \begin{cases} F''(y) < 0 & \text{si } y > 0 \\ F''(y) > 0 & \text{si } y < 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Demostración. Supongamos que $-\frac{2}{3}B^2 < A < 0$, entonces el sistema (1.9) tiene dos puntos críticos distintos, uno, $(s, 0)$, será un punto de silla cumpliendo (1.17), y otro, $(c, 0)$, que será un centro y cumple

$$F'(c) = 0, \quad (1.18a)$$

por ser un punto de equilibrio y,

$$\begin{cases} F''(c) < 0 & \text{si } c < 0 \\ F''(c) > 0 & \text{si } c > 0 \end{cases}, \quad (1.18b)$$

por ser un centro.

Las condiciones (1.17) y (1.18a)–(1.18b) son consecuencia directa de (1.14).

Sea $h = h_s$ la constante asociada a la trayectoria que pasa por el punto de silla $(s, 0)$. En ese caso, necesariamente, $h_s = F(s)$. Para que la gráfica de $v^2 = 2(h_s - F(w))/w$ se corresponda con una curva homoclínica, es necesario que el sistema presente en la misma componente conexa un punto de silla y un centro, y que dicha conexión no corte a la singularidad determinada por la recta $w = 0$. Es decir, para

obtener una conexión homoclínica, necesitamos encontrar una curva cerrada que una al punto de silla consigo mismo. Es por ello, que necesitamos que el centro se encuentre en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \{w = 0\}$ que el punto de silla, pues el centro garantizará órbitas cerradas entorno a él. Además, para garantizar la continuidad es necesario que la órbita cerrada entorno al centro que pase por el punto de silla no corte con la singularidad. Lo que es lo mismo, la ecuación $h_s = F(w)$ tiene dos soluciones distintas, una es s y la otra, w_0 , define otro punto $(w_0, 0)$ del plano de fases. Si ese punto se encuentra en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \{w = 0\}$ que el punto de silla y que el centro, garantizará la existencia de la curva homoclínica. Como $s < c < w_0$ o $s > c > w_0$, basta probar bajo qué condiciones $(s, 0)$ y $(w_0, 0)$ están en la misma componente conexa. El resto de la demostración se basará en desarrollar lo comentado en este párrafo.

Primero, como estamos trabajando bajo las condiciones de la Proposición 1.2.4, el sistema (1.9) tiene un punto de silla, $(s, 0)$ y un centro, $(c, 0)$, soluciones de (1.17) y (1.18), respectivamente. Por tanto, falta determinar el rango de parámetros compatibles con la existencia de dicha conexión homoclínica. La condición límite se da cuando el otro punto de corte de dicha conexión coincida con la singularidad. Es decir, cuando $0 = F(0) = F(s) = h_s$, que se satisface para $A = -\frac{1}{2}B^2$. Además, sea w_0 otra raíz del polinomio $F(w) - h_s$, esta cumple que $(w_0, 0)$ está en la misma componente conexa que $(s, 0)$ si $A < -\frac{1}{2}B^2$, y concluimos.

Una representación visual de esta prueba puede verse en las Figura 1.4. \square

Definición 1.2.6. Denominaremos *solitones* del sistema Hamiltoniano (1.9) a aquellas soluciones (distintas a los puntos de equilibrio) del sistema que son acotadas y no periódicas.

Es por tanto que la conexión homoclínica implica soluciones de tipo solitón, y además estas soluciones se corresponden con ondas viajeras solitarias de (1.7).

Teorema 1.2.7. *Existen soluciones para ondas viajeras solitarias (que decaen a $u \rightarrow c + s$) y periódicas de la ecuación de Camassa–Holm (1.1) para cada c, κ y K que satisfacen (1.16)*

$$-\frac{2}{3}B^2 < A < -\frac{1}{2}B^2.$$

con las constantes A y B definidas anteriormente. Además, soluciones para ondas viajeras periódicas también existen para

$$-\frac{1}{2}B^2 \leq A < 0. \quad (1.19)$$

Demostración. Debido al resultado de la Proposición 1.2.4, solo existen curvas de nivel 1.10 acotadas para $-\frac{2}{3}B^2 < A < 0$ como consecuencia de la existencia de un

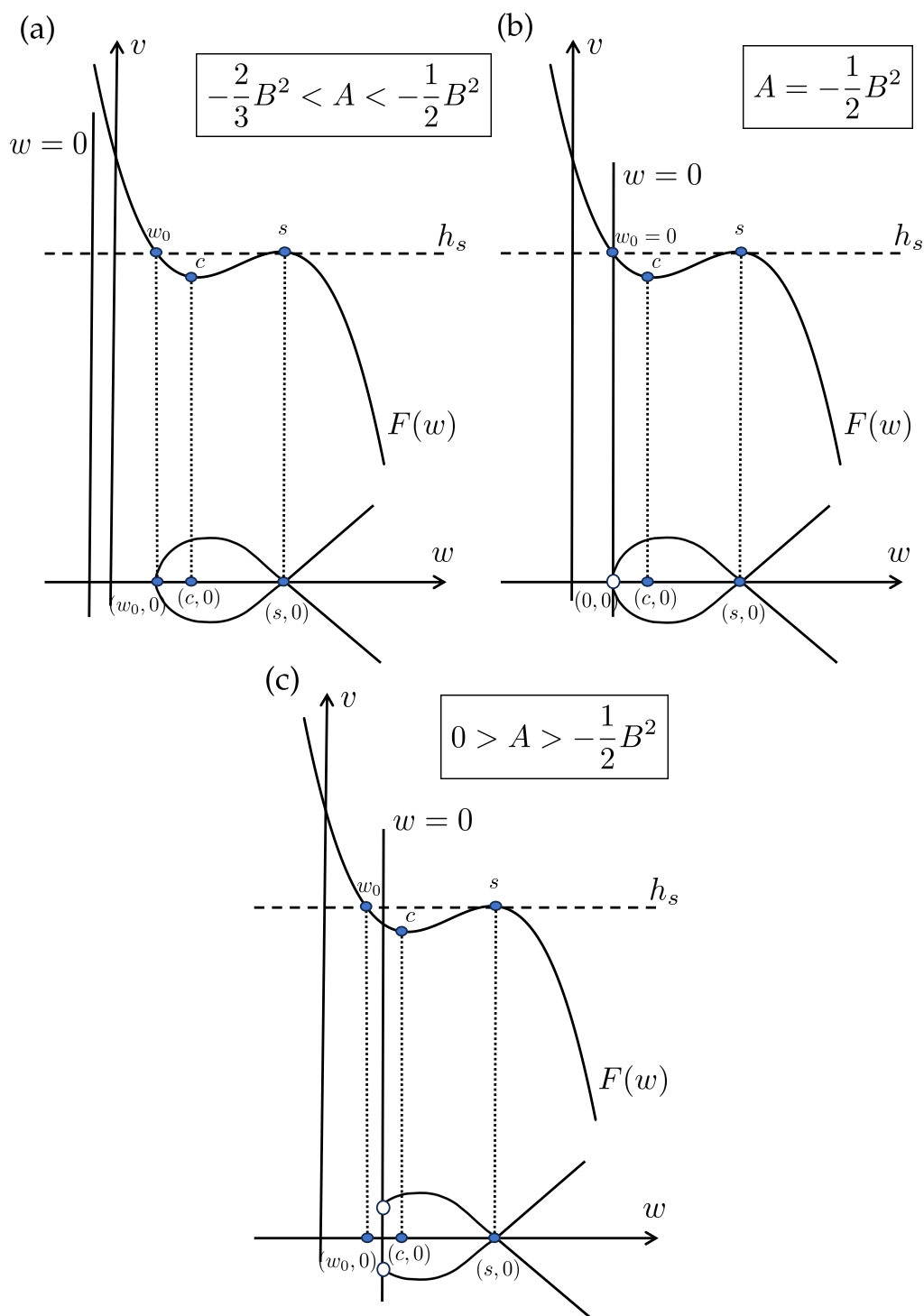


Figura 1.4: Esquema sobre la prueba del Lema 1.2.5 sobre la existencia de la conexión homoclínica.

centro como punto de equilibrio. Existirán, entorno al centro, órbitas cerradas correspondientes a curvas periódicas de (1.5), para los valores de c , κ y K que cumplen la condición anterior.

Por otro lado, como consecuencia del Lema 1.2.5, en la subregión $-\frac{2}{3}B^2 < A < -\frac{1}{2}B^2$ existe una conexión homoclínica basada en el punto de silla $(s, 0)$ del siste-

ma Hamiltoniano (1.9). Esta conexión homoclínica se corresponde con una solución de la ecuación de Camassa–Holm (1.1), siendo una onda que viaja una velocidad constante c , con un único extremo relativo coincidente con el punto $(w_0, 0)$ de la curva homoclínica de la prueba del Lema 1.2.5, y que $w \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} s$ (o equivalentemente, $u \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} c + s$) de forma exponencial, a cada lado del extremo relativo, por el Teorema de Hartman–Grobman A.3.7 cuya tasa de decaimiento viene dada por el correspondiente autovalor de la matriz Jacobiana asociada al punto de silla. \square

En la Figura 1.5 se representan las curvas de nivel de la función Hamiltoniana (1.12) para las diferentes condiciones de la Figura 1.4 representando los resultados del Teorema 1.2.7.

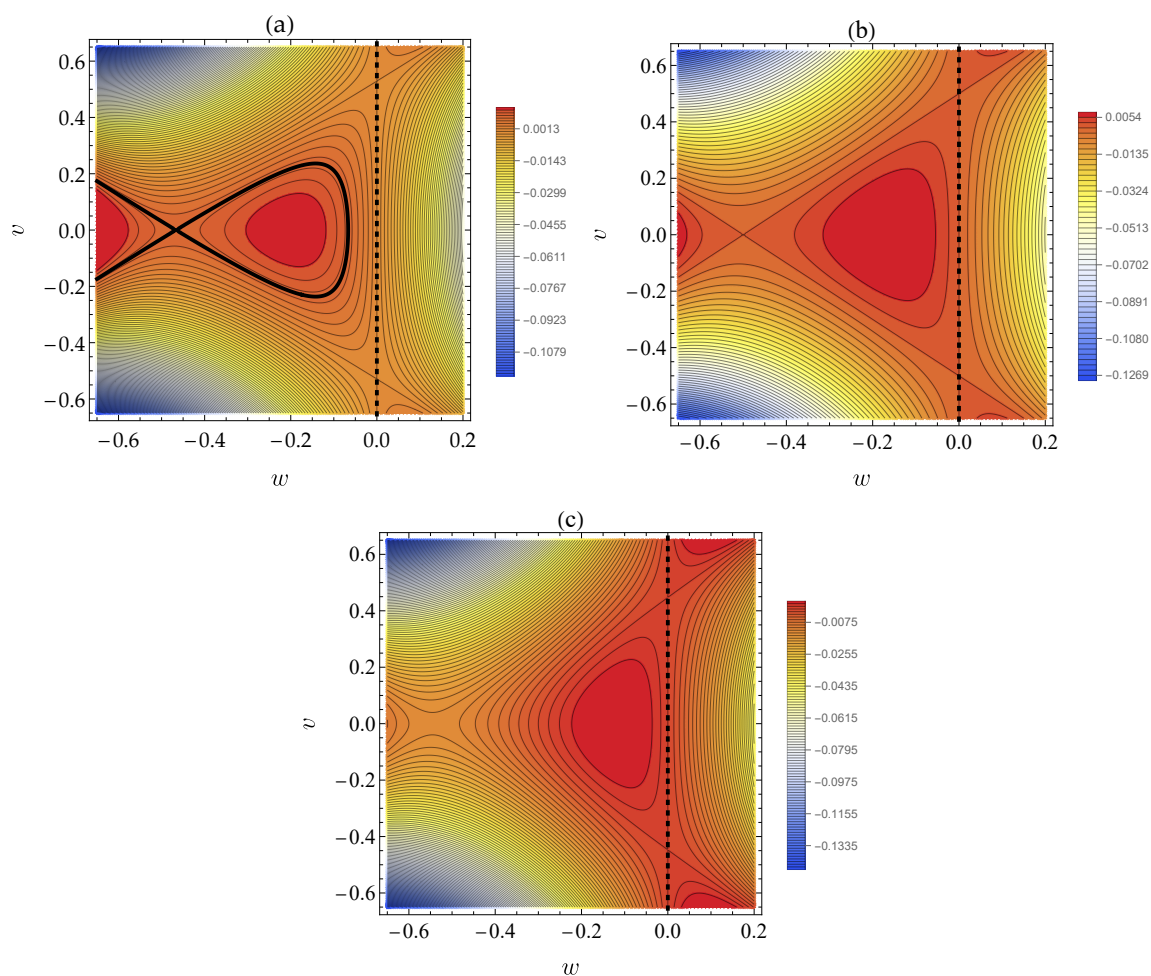


Figura 1.5: Curvas de nivel correspondiente a ejemplos para las diferentes situaciones representadas en la Figura 1.4. Se han escogido constantes $K, c, \kappa \in \mathbb{R}$ tales que (a) $A = -0.14$ y $B = 1/2$, (b) $A = -1/8$ y $B = 1/2$, (c) $A = -0.1$ y $B = 1/2$. En todas las representaciones, la línea negra gruesa y discontinua representa la recta $w = 0$, mientras que en (a) la línea negra gruesa y continua representa la curva de nivel asociada a la conexión homoclínica. Podemos observar que en (a) se cumple la condición (1.16), mientras que (b) y (c) no. Pero, (b) y (c) sí cumplen (1.19) y por eso observamos curvas de nivel cerradas.

1.2.1. Soluciones débiles

A lo largo de la sección anterior se ha tenido en cuenta que $w = 0$ (equivalentemente $u = c$ (1.6)), es un punto singular de la segunda derivada (véase (1.11)) y hemos tratado de evitar que las soluciones crucen dicho punto. Es decir, hemos buscado soluciones $w \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Sin embargo, uno puede tratar de relajar la condición de que la segunda derivada sea continua en todo punto y buscar soluciones incorporando el punto singular mencionado. Para ello, usaremos el concepto de funciones test y derivadas débiles que pueden verse en el Apéndice B.

Deshaciendo el cambio (1.6), es directo reescribir (1.7) como

$$\frac{d^2}{d\xi^2} ((u - c)^2) + F'(u) - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\xi} u \right)^2 = 0, \quad (1.20)$$

tal que la singularidad en $u = c$ de la segunda derivada se hace explícita.

Entonces, diremos que $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ es solución débil para ondas viajeras de la ecuación de Camassa–Holm (1.1) si cumple (1.20) en el sentido de las distribuciones. Es decir, para cada función test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ se debe cumplir que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d^2}{d\xi^2} ((u - c)^2) \varphi \, d\xi + \int_{\mathbb{R}} F'(u) \varphi \, d\xi - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{d\xi} u \right)^2 \varphi \, d\xi = 0.$$

En términos de las derivadas débiles B.1.3, las soluciones débiles se corresponderán con las soluciones de la ecuación

$$D_\xi^2(u - c)^2 + F'(u) - \frac{1}{2} \dot{u}^2 = 0, \quad (1.21)$$

donde D_ξ^2 denota la derivada débil segunda.

Definición 1.2.8. Diremos que $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ es una solución débil (para más detalle ver el Apéndice B) para ondas viajeras de la ecuación de Camassa–Holm (1.1), si cumple (1.21).

Sea u una solución débil de la ecuación de Camassa–Holm, si $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ es dos veces diferenciable en todo punto excepto para $u = c$, satisfará (1.7) en todo punto salvo para $w = 0$. Es decir, como u cumple (1.21), si es dos veces diferenciable en todo punto excepto para $u = c$, por construcción cumple (1.20) en todo punto salvo para $u = c$.

Proposición 1.2.9. Existen soluciones débiles continuas de la ecuación de Camassa–Holm (1.1) para cada c, κ y K que satisfacen $A = -\frac{1}{2}B^2$.

Demostración. Cuando $A = -\frac{1}{2}B^2 < 0$, $s = -B$ y la órbita homoclínica cumple la ecuación

$$\dot{w} = v = \pm |w - s|, \quad \text{y} \quad \ddot{w} = \pm 1,$$

existiendo una discontinuidad para \dot{w} en $(0, \pm|s|)$, que coincide con el que sería el extremo relativo de la onda viajera solitaria. En particular, vemos que esta solución sigue cumpliendo (1.7), siendo una solución débil de la ecuación de Camassa–Holm (1.1) en virtud de la Definición 1.2.8. \square

Definición 1.2.10. Aquellas soluciones débiles compatibles con el resultado de la Proposición 1.2.9 se llamarán *solitones picudos* (u ondas viajeras puntiagudas en términos de soluciones de (1.7)) en lo que sigue.

1.2.2. Ondas solitarias que decaen a $u = 0$

En este caso, buscamos soluciones para ondas solitarias tales que $u \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0$. Necesariamente, también sus derivadas deben anularse en estos límites, $u' \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0$ y $u'' \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0$. Este caso coincide con asumir que $K = 0$, que se deduce al imponer los límites anteriores a la igualdad (1.5). Téngase en cuenta que si $K = 0$, entonces $A = -c(2\kappa + c/2) \in \mathbb{R}$, mientras que $B = c + \kappa \in \mathbb{R}$ mantiene su expresión.

A la vista de los resultados anteriores podremos enunciar los siguientes.

Corolario 1.2.11. *Existen ondas viajeras solitarias que decaen a una altura nula si $0 < \frac{\kappa}{2} < c < 2\kappa$ y $c > 2\kappa$.*

Demostración. Es consecuencia directa de la condición (1.16) para $K = 0$. \square

Corolario 1.2.12. *Existen ondas viajeras solitarias puntiagudas que decaen a una altura nula si $\kappa = 0$ o $2c = \kappa$.*

Demostración. Es consecuencia directa de la condición $A = -B^2/2$ (véase la Proposición 1.2.9) para $K = 0$. \square

Nótese que con este análisis, A. Geyer y A. Gasull [11] recuperan las condiciones para encontrar solitones para $c > 2\kappa$ y solitones picudos para $K = 0$, obtenidas por R. Camassa, D. D. Holm y J. M. Hyman en [3] y por A. Constantin y W. A. Strauss [7], respectivamente.

Capítulo 2

La ecuación de Constantin–Lannes

La ecuación de Camassa–Holm (1.1) no es la única propuesta para explicar la evolución del perfil de una masa de agua con poca profundidad. En 2009, A. Constantin y D. Lannes propusieron la siguiente ecuación en derivadas parciales [6]

$$u_t + u_x + 6uu_x - 6u^2u_x + 12u^3u_x + u_{xxx} - u_{xxt} + 14uu_{xxx} + 28u_xu_{xx} = 0, \quad (2.1)$$

obtenida tras aproximar hasta el mismo orden que Camassa–Holm las ecuaciones involucradas en la descripción de un fluido no viscoso, incompresible y homogéneo en el límite de poca profundidad, pero utilizando diferentes estrategias en su desarrollo. Recordemos del capítulo anterior que u describe el perfil de onda unidimensional, siendo $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ una función de la posición $x \in \mathbb{R}$ y del tiempo $t \in \mathbb{R}^+$. Tal y como se discutió en el Capítulo 1, el perfil de onda u está asociado con la altura de la superficie libre del agua desde el suelo.

Además, la ecuación de Constantin–Lannes (2.1) está bien definida localmente [6], donde una discusión más elaborada sobre este hecho puede encontrarse en [22].

En este capítulo nos vamos a centrar en estudiar el análisis propuesto en los trabajos [9, 11, 12], que consiste en una extensión a la ecuación de Constantin–Lannes de la descripción llevada a cabo en el Capítulo 1 para el estudio de ondas viajeras solitarias, ondas viajeras periódicas e incluso algunas soluciones débiles en la ecuación de Camassa–Holm. En el Capítulo 1 ya se introdujo el concepto de soluciones para ondas viajes, y es que, en [11], se analizan éstas. Para recordar al lector el concepto de ondas viajeras, estas son soluciones tales que el perfil de ondas se mueve a velocidad constante en una dirección, $c \in \mathbb{R}$, sin alterar su imagen. Por tanto, se buscarán soluciones para el campo u , tras la transformación propuesta en (1.2).

Entonces, la ecuación en derivadas parciales originalmente propuesta por Constantin y Lannes (2.1), tras introducir el *ansatz* (1.2) y la notación (1.4), se escribe como

$$(1 - c)\dot{u} + 6u\dot{u} - 6u^2\dot{u} + 12u^3\dot{u} + (1 + c + 14u)\ddot{u} + 28\dot{u}\ddot{u} = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d}{d\xi} \left(\ddot{u}(14u + c + 1) + 7\dot{u}^2 + 3u^4 - 2u^3 + 3u^2 + (1 - c)u \right) = 0.$$

Tras una primera integración, la ecuación anterior se reescribe como

$$\ddot{u}(14u + c + 1) + 7\dot{u}^2 + 3u^4 - 2u^3 + 3u^2 + (1 - c)u = E, \quad (2.2)$$

donde $E \in \mathbb{R}$ es una constante de integración.

Por conveniencia, a lo largo del trabajo, al igual que se hace en [11], definiremos, sin pérdida de generalidad, $E \equiv -14K$, con $K \in \mathbb{R}$. Hemos conseguido pasar de esta forma, de una ecuación en derivadas parciales, a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal.

Primero, se probó en [12] la existencia de soluciones de la ecuación (2.2) para ondas solitarias que decaen a cero en el infinito (caso $K = 0$), así como su estabilidad orbital en [9]. En este trabajo, se seguirá el análisis de [11], relajando la condición de [12], y buscando solitones a una altura $s \in \mathbb{R}$, similar al estudio llevado a cabo en el Capítulo 1 para la ecuación de Camassa–Holm. Para ello, se probará primero que la ecuación diferencial (2.2) va a poder escribirse como un sistema Hamiltoniano plano (ver Apéndice A.3.7), lo que nos facilitará el estudio de las soluciones buscadas.

2.1. Formulación Hamiltoniana

Veremos primero que, efectivamente, la EDO (2.2) es topológicamente equivalente a un sistema Hamiltoniano plano.

Proposición 2.1.1. *La ecuación (2.2) es topológicamente equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden,*

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = (u - \bar{u})v \\ \frac{dv}{d\tau} = -F'(u) - \frac{1}{2}v^2, \end{cases} \quad (2.3)$$

en cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \{u = \bar{u}\}$, preservando la orientación en el semiplano $\{u > \bar{u}\}$ y revirtiendo la orientación en el otro semiplano $\{u < \bar{u}\}$, tal que $\frac{d\xi}{d\tau} = u - \bar{u}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$ una constante y $F \in C^\infty(\mathbb{R})$. Además, el sistema (2.3) es un sistema Hamiltoniano y sus órbitas se corresponden con las curvas de nivel

$$h = F(u) + \frac{1}{2}v^2(u - \bar{u}), \quad (2.4)$$

con $h \in \mathbb{R}$ una constante.

Demostración. Se va a demostrar la proposición por construcción. Es decir, construiremos el sistema (2.3) e iremos identificando los elementos necesarios.

Primero, introduciendo la nueva variable $v = \dot{u}$, es directo comprobar que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden,

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = \frac{-F'(u) - \frac{1}{2}v^2}{u - \bar{u}}, \end{cases} \quad (2.5)$$

es topológicamente equivalente a (2.2) y conserva la orientación en todo el dominio de u , con

$$\bar{u} = -\frac{1+c}{14}, \quad F'(u) = K + \frac{1-c}{14}u + \frac{3}{14}u^2 - \frac{1}{7}u^3 + \frac{3}{14}u^4. \quad (2.6)$$

Así pues, tras integrar la expresión para $F'(u)$ se tiene que

$$F(u) = Ku + \frac{1-c}{28}u^2 + \frac{1}{14}u^3 - \frac{1}{28}u^4 + \frac{3}{70}u^5 + K_1,$$

con $K_1 \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria y, claramente, $F \in C^\infty(\mathbb{R})$. Además, si definimos un cambio de variable $\xi \rightarrow \tau$ tal que $\frac{d\xi}{d\tau} = u - \bar{u}$ en $\mathbb{R} \setminus \{u - \bar{u}\}$, el sistema (2.5) se escribe en esta nueva variable como (2.3), siendo, a su vez, topológicamente equivalente a (2.5) y, por ende, con (2.2), en $\mathbb{R} \setminus \{u - \bar{u}\}$, preservando la orientación en el semiplano $\{u > \bar{u}\}$ y revirtiéndola en $\{u < \bar{u}\}$.

Veamos, a continuación, que (2.3) es un sistema Hamiltoniano con 1 grado de libertad, es decir, un sistema Hamiltoniano plano. Como, si el sistema es Hamiltoniano, la dimensionalidad es clara, debemos encontrar una función Hamiltoniana $H(u, v) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, al menos, $H \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{u - \bar{u}\})$, y que $\frac{dv}{d\tau} = -H_u$ y $\frac{du}{d\tau} = H_v$. Por tanto, identificando las relaciones anteriores con el sistema (2.3), se deduce que (2.3) posee la siguiente función Hamiltoniana,

$$H(u, v) = F(u) + \frac{1}{2}v^2(u - \bar{u}),$$

que es por tanto constante a lo largo de las soluciones de (2.3), i.e., $H(u, v) = h \in \mathbb{R}$ para (u, v) una curva solución del sistema (2.3), tal que dos curvas solución distintas vendrán definidas por diferentes valores de la constante $h \in \mathbb{R}$. Así, se obtiene (2.4) y concluimos. \square

En la Figura 2.1 podemos encontrar una representación de las curvas de nivel (2.4) que representan las soluciones del sistema Hamiltoniano plano (2.3) para los valores $K = 0$ y $c = 2$.

Usando (2.4), si (u, v) es una solución del sistema anterior, uno puede expresar

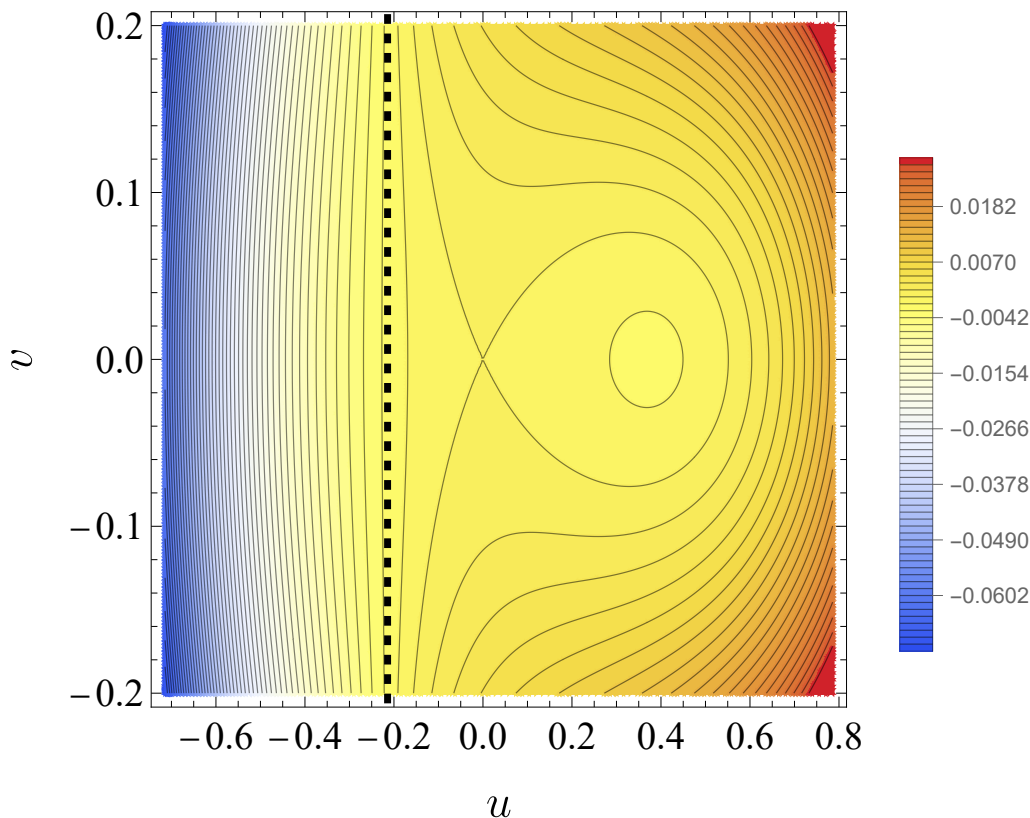


Figura 2.1: Curvas de nivel (2.4) para $K = 0$, $c = 2$. La recta negra gruesa y discontinua representa la curva $u = \bar{u}$.

las soluciones como funciones $v(u)$ de la forma

$$v = \pm \sqrt{2 \frac{h - F(u)}{u - \bar{u}}}. \quad (2.7)$$

Así pues, las órbitas de las soluciones contienen las curvas conexas definidas por (2.7).

A partir de ahora, y sin pérdida de generalidad, consideraremos $K_1 = 0$. Es decir,

$$F(u) = Ku + \frac{1-c}{28}u^2 + \frac{1}{14}u^3 - \frac{1}{28}u^4 + \frac{3}{70}u^5. \quad (2.8)$$

2.2. Existencia de soluciones para ondas viajeras acotadas

Gracias a la Proposición 2.1.1 se ha conseguido reducir la discusión de la existencia de soluciones para ondas viajeras al análisis de las curvas de nivel (2.4). Para ello, estudiaremos los puntos críticos de (2.3) y su linealización entorno a dichos puntos, cuyos autovalores nos darán (en general) información, a partir del Teorema de Hartman–Grobman A.3.7, del comportamiento local de las trayectorias en

entornos de los puntos críticos.

Lema 2.2.1. *El polinomio $F'(u)$ (véase en (2.6)) tiene a lo sumo dos raíces reales distintas.*

Demostración. Debido a la signatura del término de mayor grado, $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que $F'(u) > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$ con $|u| > M$. Además, tomando la primera derivada de F' ,

$$F''(u) = \frac{1}{7} \left(\frac{1-c}{2} + 3u - 3u^2 + 6u^3 \right),$$

solo tiene una raíz real, pues, el discriminante del polinomio cúbico $F''(u) = 0$ cumple que

$$\text{Dis}(F''(u), u) = -\frac{27}{2401}(46 - 34c + 9c^2) < 0, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Podemos, además, concluir que u^* tal que $F''(u^*) = 0$, es un mínimo de F' , pues $F'''(u) = \frac{3}{7}(1 - 3u + 6u^2) > 0 \forall u \in \mathbb{R}$, y en particular $F'''(u^*) > 0$. Además, u^* es la única raíz real de F'' , cuya expresión depende de forma continua del valor de c de la forma

$$u^* = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{5}{g(c)} + g(c) \right), \quad g(c) = \left(-17 + 9c + 3\sqrt{46 - 34c + 9c^2} \right)^{1/3}, \quad (2.9)$$

tal que $u^* > 0 \Leftrightarrow c > 1$ y que $u^* = 0 \Leftrightarrow c = 1$. Así pues, llegamos a que si $F'(u^*) < 0$, entonces el polinomio F' tiene dos raíces reales distintas, si $F'(u^*) = 0$ tiene una raíz doble en u^* , y si $F'(u^*) > 0$, no tiene raíces reales. \square

Proposición 2.2.2. *El sistema (2.3) tiene a lo sumo dos puntos críticos. Además, si existe algún punto crítico (u_0, v_0) , necesariamente $v_0 = 0$ y los valores posibles de u_0 coinciden con las raíces de F' diferentes a \bar{u} .*

Demostración. Los puntos críticos de (2.3) se corresponden con los puntos $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{u = \bar{u}\}$ tales que hacen $H_u(u_0, v_0) = H_v(u_0, v_0) = 0$. Necesariamente, $v_0 = 0$ para cualquier punto fijo, pues es la única condición que se cumple para $H_u(u_0, v_0) = 0$ en $\mathbb{R} \setminus \{\bar{u}\}$. Por tanto, la otra coordenada del punto crítico viene determinada por la condición $F'(u_0) = 0$. Es decir, el número de puntos críticos coincide con el número de raíces del polinomio F' (véase en (2.6)). Por tanto, por el Lema 2.2.1, sabemos que F' tiene a lo sumo dos raíces, y concluimos. \square

Proposición 2.2.3. *El sistema (2.3) solo posee soluciones acotadas cuando tiene algún punto de equilibrio. Además, existen soluciones acotadas diferentes a los propios puntos de equilibrio cuando el sistema presenta dos. Finalmente, en este último caso, existe una curva homoclínica cuando ambos puntos de equilibrio pertenecen a la misma componentes conexa de $\mathbb{R} \setminus \{u = \bar{u}\}$.*

Demostración. Para probar el resultado, necesitamos estudiar la naturaleza de los puntos de equilibrio. Como el sistema (2.3) es un sistema Hamiltoniano plano, cada

punto crítico no degenerado del mismo es o bien un punto de silla o bien un centro (véase el Teorema A.3.32). Debido a la Proposición 2.2.2, reducimos el estudio de las soluciones en tres casos: si el sistema (2.3) (i) no tuviera puntos críticos, (ii) tuviera solo uno y degenerado, o (iii) tuviera dos diferentes aislados. Es evidente que la determinación de soluciones acotadas en estos casos depende de la existencia de curvas de nivel cerradas que cumplan (2.4).

- (i) En este caso, las trayectorias posibles no pueden ser acotadas. Como las trayectorias solución del sistema se corresponden con las curvas de nivel de la función Hamiltoniana correspondiente dadas por (2.4), que como no hay puntos de equilibrio, por el Teorema de Poincaré-Bendixon A.3.27, estas deben ser curvas cerradas (órbitas periódicas). Pero, eso indicaría que estas curvas encierran un punto de equilibrio (ver el Teorema A.3.28), lo que contradice la hipótesis inicial.
- (ii) Si el sistema (2.3) tiene un punto de equilibrio degenerado, no podemos hacer uso del Teorema A.3.32 para determinar su naturaleza. Sin embargo, en este caso, F es una función monótona creciente, con un cero que coincide con u^* , cuya expresión viene dada por (2.9), calculada en la prueba del Lema 2.2.1. Es decir, u^* es un punto de inflexión. Además, $F(u) < 0 \forall u < u^*$, y $F(u) > 0 \forall u > u^*$. De nuevo, como las trayectorias solución son las curvas de nivel 2.4, debemos buscar soluciones cerradas, que además sabemos que deben encerrar al punto de equilibrio, $(u^*, 0)$. Así, dado un $h \in \mathbb{R}$ y fijado $v = 0$, la ecuación $h = F(u_0)$ tiene a lo sumo una posible solución $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\bar{u}\}$ por ser monótona creciente y no existen curvas de nivel cerradas. Por tanto, en este caso, las soluciones distintas al propio punto de equilibrio tampoco son acotadas.
- (iii) En caso de que el sistema (2.3) presentara dos puntos críticos, éstos serían no degenerados, y por tanto, cada uno un punto de silla o un centro. Para determinar con qué tipo de punto fijo se correspondería, basta con observar el determinante de la matriz Jacobiana asociada al sistema no lineal (2.3). En concreto, la matriz Jacobiana, en un punto $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{u = \bar{u}\}$, es

$$J(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} v_0 & u_0 - \bar{u} \\ -F''(u_0) & -v_0 \end{pmatrix}.$$

Luego para un punto crítico $(u_0, 0)$, el determinante vendría dado por

$$\det J(u_0, 0) = F''(u_0)(u_0 - \bar{u}). \quad (2.10)$$

Como $u_0 \neq \bar{u}$, entonces (2.10) no se anula para ningún punto crítico. Además,

- si $\det J(u_0, 0) > 0$, el punto crítico se correspondería con un centro.
- Si $\det J(u_0, 0) < 0$, el punto crítico sería un punto de silla.

Asimismo, el signo del monomio $u - \bar{u}$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \{u = \bar{u}\}$, por lo que la clasificación del punto fijo se reduce a estudiar el signo de $F''(u)$.

Sean $(u_1, 0)$ y $(u_2, 0)$ los dos puntos críticos, con $u_1 < u_2$. A partir de la demostración del Lema 2.2.1, podemos deducir que $u_1 < u^* < u_2$ y que $F''(u_1) < F''(u^*) = 0 < F''(u_2)$. Es por ello que, si ambos pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \{u = \bar{u}\}$, necesariamente uno es un punto de silla y otro un centro. Por otro lado, u_1 y u_2 se corresponden con un máximo y un mínimo relativo de $F(u)$, respectivamente. Entonces, existe una conexión homoclínica para $h = h_s$ en la curva definida por (2.7), tal que pasa por el punto de silla, i.e., $F(u_1) = h_s$, que renombraremos, en ese caso, $u_1 = s$. Además, $\exists m \in \mathbb{R} \setminus \{\bar{u}\}$ con $(m, 0)$ en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \{u = \bar{u}\}$ que $(s, 0)$ tal que $F(m) = h_s$, es decir, la curva homoclínica corta al punto $(m, 0)$. Por tanto, s es solución de

$$F(y) = h_s \wedge F'(y) = 0 \wedge \begin{cases} F''(y) < 0 & \text{cuando } y > \bar{u} \\ F''(y) > 0 & \text{cuando } y < \bar{u} \end{cases}. \quad (2.11)$$

En este caso, las únicas soluciones acotadas se corresponden con aquellas trayectorias del espacio de fases que siguen la curva homoclínica, y las curvas cerradas entorno al centro $(u_2, 0)$ encerradas por la curva homoclínica. Finalmente, la trayectoria que pasa por el punto $(u_2, 0)$ se corresponde con una solución constante, $u \equiv u_2$.

Por otro lado, $(u_2, 0)$ es un centro si y solo si es solución de

$$F'(y) = 0 \wedge \begin{cases} F''(y) > 0 & \text{cuando } y > \bar{u} \\ F''(y) < 0 & \text{cuando } y < \bar{u} \end{cases}. \quad (2.12)$$

Finalmente, en el caso de que cada punto crítico esté en una componente conexa, i.e., $u_1 < \bar{u} < u_2$, ambos puntos críticos se corresponderían con un centro. Efectivamente, se tendría que $\det J(u_1, 0) > 0$ y que $\det J(u_2, 0) > 0$, es decir, serían solución de (2.12), existiendo curvas cerradas que encierran a los centros. Este caso es un poco particular, aparecerán dos curvas heteroclínicas tal y como veremos más adelante.

□

A partir de ahora, se intentarán buscar soluciones del sistema (2.3) de tipo solitón, que se definen del mismo modo que se hizo en la Definición 1.2.6 del capítulo anterior.

Definición 2.2.4. Denominaremos *solitones* del sistema Hamiltoniano (2.3) a aquellas soluciones distintas a los puntos de equilibrio del sistema que son acotadas y no periódicas.

Veremos, a continuación, que al igual que ocurría en el sistema asociado a la ecuación de Camassa–Holm, existirán solitones para sistema (2.3) e irán asociados a la existencia de la conexión homoclínica.

2.2.1. Introducción del nivel del perfil de onda del solitón como constante del problema

La intención de esta sección es el estudio de soluciones para ondas viajeras acotadas. En concreto, nuestro interés principal es probar la existencia de solitones soluciones de la ecuación de Constantin–Lannes, es decir, soluciones para ondas viajeras acotadas solitarias, no periódicas.

Además, se intentará generalizar la búsqueda de solitones que representarán ondas solitarias en la superficie del agua a una altura $s \in \mathbb{R}$ con respecto a la superficie libre plana del fluido, véase la Figura 2.2.

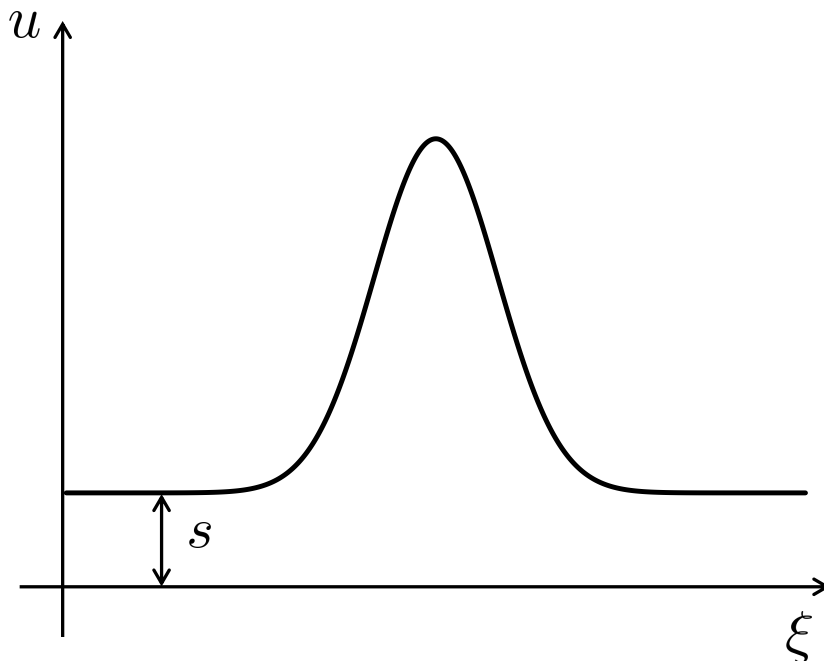


Figura 2.2: Gráfica de un solitón con un nivel s sobre la superficie libre plana del fluido.

Como consecuencia del estudio anterior para la ecuación de Camassa–Holm, sabemos que s estará asociado a un punto de silla (del sistema (2.7) para la ecuación de

Constantin–Lannes), $(s, 0)$, y a la existencia de una conexión homoclínica en dicho punto crítico. Sabemos que este caso, hasta ahora, es posible en virtud de la Proposición 2.2.2. Siguiendo el apartado (iii) de la prueba de la Proposición 2.2.3, además, sabemos que $s \in \mathbb{R} \setminus \{\bar{u}\}$ debe ser solución de (2.11).

Definición 2.2.5. Definiremos el nivel de un solitón sobre la superficie libre del fluido como aquella constante s tal que cumple $F'(s) = 0$.

Esta constante s sustituye a K en (2.3) (y (2.2)) mediante el cambio de parámetro biyectivo:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (c, s) &\mapsto (c, K) := (c, \varphi(c, s)), \end{aligned}$$

tal que

$$\varphi(c, s) = \frac{1}{14}s(-3s^3 + 2s^2 - 3s + c - 1), \quad (2.13)$$

limitado a la región de \mathbb{R} en la que s cumpla

$$\begin{cases} F''(s) < 0 & \text{si } s > \bar{u} \\ F''(s) > 0 & \text{si } s < \bar{u} \end{cases}. \quad (2.14)$$

Es importante notar que la condición (2.14) es necesaria para que la transformación definida por (2.13) sea biyectiva en \mathbb{R}^2 . Si no se introdujera, habría regiones de parámetros donde podría definir simultáneamente dos valores para la constante, s_1 y s_2 , donde uno se correspondería con el punto de silla, y el otro con el centro (véase el apartado (iii) de la prueba de la Proposición 2.2.3).

A partir de ahora, tras el cambio de constantes propuesto por la Definición 2.2.5, la función F se reescribe

$$F(u) = \frac{1-c}{14} \left(\frac{u^2}{2} - su \right) + \frac{3}{14} \left(\frac{u^3}{3} - s^2u \right) - \frac{1}{7} \left(\frac{u^4}{4} - s^3u \right) + \frac{3}{14} \left(\frac{u^5}{5} - s^4u \right). \quad (2.15)$$

Nota 2.2.6. Mediante el cambio de variables introducido en (2.13), hemos transformado el estudio de las raíces reales del polinomio $F'(u)$ de ser dependiente del par de constantes (c, K) a (c, s) . Además, debemos tener en cuenta que el punto de silla $(s, 0)$ del sistema plano (2.3) aparecerá si (véase el comentario (iii) de la prueba de la Proposición 2.2.3):

- (i) F tiene dos extremos distintos, y
- (ii) ambos extremos están a un mismo lado de la recta invariante $u = \bar{u}$. Es decir, en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \{u = \bar{u}\}$.

Para poder asegurar ambas condiciones, debemos estudiar las raíces reales de $F'(u)$. Por el Lema 2.2.1 sabemos que, como mucho, tiene dos raíces reales distintas.

2.2.2. Raíces del polinomio $F'(u)$

El polinomio $F'(u) = 0$ dado por la ecuación (2.6) es de cuarto grado que, por el Lema 2.2.1, tiene, como mucho, dos raíces reales distintas. Para poder restringir la región de parámetros en la que esto ocurre y así asegurar la condición (i) de la Nota 2.2.6, estudiaremos el signo de su discriminante.

Proposición 2.2.7. *El discriminante del polinomio $F'(u)$ viene dado por*

$$\text{Dis}(F'(u), u) = -\frac{1}{38416} F''(s)^2 M(c, s), \quad (2.16)$$

con $M(c, s)$ un polinomio definido por

$$\begin{aligned} M(c, s) = & 243c^2 + (-900s - 778 + 540s^2 - 1080s^3)c \\ & + 823 + 1284s + 480s^2 + 480s^3 + 2700s^4 - 1296s^5 + 1296s^6. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Demostración. Para obtener (2.16) con M dado por (2.17), basta aplicar la Definición C.1.5 al polinomio $F'(u)$ definido en (2.6), que tras el cambio introducido en la Definición 2.2.5, se puede reescribir como

$$F'(u) = \frac{1-c}{14}(u-s) + \frac{3}{14}(u^2-s^2) - \frac{1}{7}(u^3-s^3) + \frac{3}{14}(u^4-s^4). \quad (2.18)$$

□

Corolario 2.2.8. *Definido el polinomio de cuarto grado $F'(u)$ en (2.6), y dados $c, s \in \mathbb{R}$, se tiene que $\text{Dis}(F'(u), u) = 0 \Leftrightarrow F''(s) = 0$ ó $M(c, s) = 0$. Además, si dado un par (c, s) tales que $F''(s), M(c, s) \neq 0$, entonces $\text{sgn}(\text{Dis}(F'(u), u)) = -\text{sgn}(M(c, s))$.*

Demostración. Se obtiene directamente de la Proposición 2.2.7. □

Notemos que al introducir s bajo el cambio de parámetro biyectivo expuesto en la Definición 2.2.5, $F''(s) \neq 0$ en la región de definición. Es por tanto que, a consecuencia del Corolario 2.2.8, los ceros de $M(c, s)$ coinciden con los ceros de $\text{Dis}(F'(u), u)$. Además, $M(c, s) \equiv M_s(c)$ define una familia de polinomios en $\mathbb{R}[c]$ cuyos coeficientes dependen de forma continua en s . Para estudiar el número de raíces de este polinomio se hará uso del Lema C.2.3.

Proposición 2.2.9. *El polinomio $M(c, s) \equiv M_s(c) \in \mathbb{R}[c]$ definido en (2.17) no tiene raíces reales.*

Demostración. Usando (C.1) para (2.17) se concluye que

$$\text{Dis}(M_s(c), c) = -16(18s^2 - 6s + 23)^3.$$

Se puede ver fácilmente que $18s^2 - 6s + 23 > 0$, para cualquier valor $s \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\text{Dis}(M_s(c), c) < 0 \forall s \in \mathbb{R}$. Además, el coeficiente de mayor grado de $M_s(c)$ es 243 y, por tanto, siempre es positivo $\forall s \in \mathbb{R}$. Finalmente, por ejemplo, para $s = 0$, se tiene que

$$M_0(c) = 243c^2 - 778c + 823 > 0.$$

Aplicando el Lema C.2.3 se concluye. \square

Hasta ahora se ha probado que, efectivamente, se cumple el punto (i) de la Nota 2.2.6 para cualquier valor de s en su dominio de definición. Finalmente, para probar el punto (ii) se necesitan estudiar las raíces de $F'(\bar{u})$ con el objetivo de identificar las regiones de valores de los pares (c, s) para los cuales los diferentes extremos de F (ya probada, en (i), su existencia) están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \{u = \bar{u}\}$.

Proposición 2.2.10. *El polinomio $F'(\bar{u})$ puede reescribirse como,*

$$F'(\bar{u}) = \frac{1}{38416}(s - \bar{u})N(c, s),$$

tal que

$$N(c, s) = 3c^3 + (-42s + 37)c^2 + (-476s + 588s^2 + 3397)c + 6076s^2 - 8232s^3 - 8666s - 2125. \quad (2.19)$$

Demostración. Por la definición de s y atendiendo a (2.18) se concluye que s es una raíz de $F'(\bar{u})$. Por tanto, usando el algoritmo de la división de polinomios concluimos. \square

Proposición 2.2.11. *Para cada $s \in \mathbb{R}$ existe solo un $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que es raíz del polinomio de tercer grado $N(c, s) \equiv N_s(c) \in \mathbb{R}[c]$, i.e., $N_s(c_0)$. Además, $c_0(s)$ viene dada por*

$$c_0(s) = \frac{1}{9} \left\{ 42s - 37 + 14 \left[g_0(s) - \frac{18s^2 - 6s + 149}{g_0(s)} \right] \right\}, \quad (2.20a)$$

$$g_0(s) = \left[694 - 342s - 135s^2 + 270s^3 + 9\sqrt{3P_0(s)} \right]^{1/3},$$

$$P_0(s) = 15595 - 3598s + 4710s^2 + 1524s^3 - 81s^4 - 324s^5 + 324s^6 > 0. \quad (2.20b)$$

Demostración. Calculando el discriminante de $N_s(c)$, se obtiene que

$$\text{Dis}(N_s(c), c) = -30118144P_0(s),$$

tal que $P_0(s)$ viene dado por (2.20b) y $P_0(s) > 0 \forall s \in \mathbb{R}$, que se puede comprobar sabiendo que $\text{Dis}(P_0(s), s) = \alpha < 0$, con α una constante negativa, y mediante el método de Sturm descrito en la Sección C.3. Por tanto, $\text{Dis}(N_s(c), c) < 0 \forall s \in \mathbb{R}$. Además, para $s = 1$ obtenemos que

$$N_1(c) = (3c - 11)(c^2 + 2c + 1177),$$

tal que solo posee una raíz real simple. Así pues, como a la vista de (2.19) el coeficiente que acompaña al término de mayor grado es una constante no nula, concluimos que solo tiene una raíz real simple en virtud del Lema C.2.3.

Sustituyendo $c_0(s)$ dado por (2.20a) en la expresión del polinomio N_s en (2.19), concluimos que efectivamente cumple que $N(c_0(s), s) = 0$ y es la expresión buscada. \square

Como consecuencia del desarrollo teórico y resultados derivados hasta el momento, se definirán tres curvas

$$A_0 := N(c, s) = 0, \quad A_1 := F'''(s) = 0, \quad A_2 := s = \bar{u}, \quad (2.21)$$

tales que determinarán diferentes regiones del espacio de parámetros definido por los puntos del tipo (c, s) , donde se identificarán las regiones en las que aparecen soluciones tipo solitón y sus diferentes propiedades.

Primero, veamos que estas tres curvas se cruzan en un punto común.

Proposición 2.2.12. *Las curvas A_0 , A_1 y A_2 se cruzan en un único punto (c^*, s^*) , donde s^* es la única raíz real del polinomio*

$$P_1^*(s) = 12s^3 - 6s^2 + 20s + 2, \quad (2.22)$$

y c^* es la única raíz real de

$$P_2^*(c) = 3c^3 + 30c^2 + 1031c - 368. \quad (2.23)$$

Demostración. Primero, notemos que podemos escribir el polinomio $F'''(u)$ como

$$F'''(u) = \frac{1}{14} (12u^3 - 6u^2 + 6u + 14\bar{u} + 2).$$

Por la condición de la recta A_2 , tenemos que $s = \bar{u}$. Por tanto, sea s^* el valor de s para el cual las curvas A_1 y A_2 se cruzan. Entonces, como

$$F'''(\bar{u}) = \frac{1}{14} P_1^*(\bar{u}) = 0,$$

con P_1^* dado por (2.22), se debe cumplir necesariamente que, aplicando la condición de la recta A_2 ,

$$F''(\bar{u}) = F''(s^*) = \frac{1}{14}P_1^*(s^*) = 0.$$

Llegando a que, efectivamente, s^* es la única raíz real de P_1^* , pues $\text{Dis}(P_1^*(x), x) = -435264 < 0$ y basta aplicar la Proposición C.1.6. Además, usando que $\bar{u} = -(1 + c)/14$, se tiene que

$$F''(\bar{u}) \equiv F''(c) = \frac{1}{638}P_2^*(c),$$

con P_2^* dado por (2.23). Entonces, imponiendo las condiciones de las curvas A_1 y A_2 , se obtiene que c^* es la única raíz real de P_2^* , pues $\text{Dis}(P_2^*(x), x) = -12802093584 < 0$.

Finalmente, basta ver que (c^*, s^*) es un punto de la curva A_0 , es decir, $N(c^*, s^*) = 0$. Para ello, se usa que

$$\text{res}(N_s(c), P_2^*(c)) = \frac{(P_2^*(c))^3}{322828856},$$

y se concluye gracias a la Proposición C.1.4. □

Nota 2.2.13. A la vista de la Proposición 2.2.12, en el espacio de parámetros formados por los puntos (c, s) se definirán seis regiones distintas que se pueden clasificar según la Tabla 2.1 y que vienen representadas en la Figura 2.3.

Tabla 2.1: Regiones del espacio de parámetros formado por los pares $(c, s) \in \mathbb{R}^2$ separadas por las curvas $A_i, i = 1, 2$.

$s > \bar{u}$	$s < \bar{u}$
$R_1: F''(s) < 0$ y $N(c, s) > 0$	$R_4: F''(s) > 0$ y $N(c, s) < 0$
$R_2: F''(s) > 0$ y $N(c, s) > 0$	$R_5: F''(s) < 0$ y $N(c, s) < 0$
$R_3: F''(s) > 0$ y $N(c, s) < 0$	$R_6: F''(s) < 0$ y $N(c, s) > 0$

Discutamos, a continuación, lo que ocurre en cada región del espacio de parámetros. Lo primero que debemos notar es que hay una correspondencia entre las regiones R_1 y R_4 ; R_2 y R_5 ; y R_3 y R_6 en la que al diferenciarse por las desigualdades $s < \bar{u}$ y $s > \bar{u}$ solo diferenciará la orientación de la curva con respecto al nivel s . Es por ello, que bastará con comentar las regiones a un lado u otro de la curva A_2 . Por lo que se describirá lo que sucede en las regiones asociadas a $s > \bar{u}$.

- R_1 : para cada $(c, s) \in R_1$ se tiene que F tiene dos extremos distintos ambos a la derecha de \bar{u} pues $F'(\bar{u}) > 0$ (una representación cualitativa de $F(\bar{u})$ puede verse en la Figura 2.4). Por tanto, se garantiza la existencia de la curva homoclínica que pasa por el punto de silla $(s, 0)$ del espacio de fases. Además, F tiene un máximo local en s pues $F''(s) < 0$. Por tanto, dicha curva homoclínica da lugar a la existencia de un solitón de elevación que viaja a una velocidad c y que decae al nivel s .

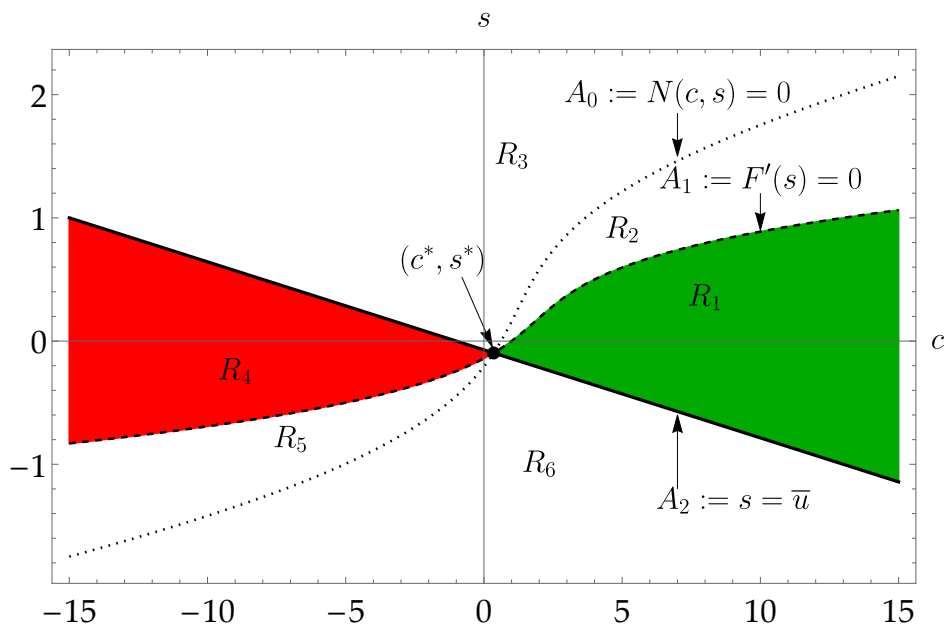


Figura 2.3: Representación de las diferentes regiones R_i con $i = 1, \dots, 6$ en el espacio de parámetros formado por los puntos (c, s) definidas en la Tabla 2.1.

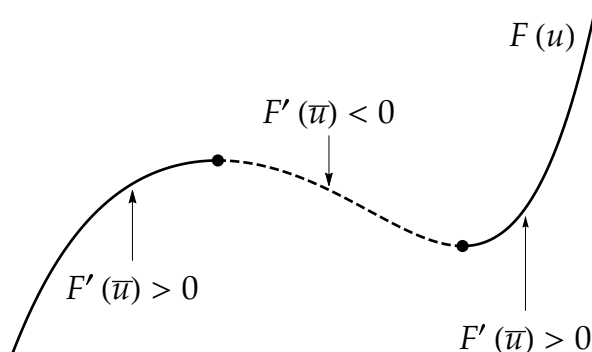


Figura 2.4: Esquema del comportamiento de la función F para valores representativos de $u = \bar{u}$.

- R_2 : para cada $(c, s) \in R_2$ se viola la condición para $F''(s)$ expuesta en la Definición 2.2.5 que garantiza la existencia de s .
- R_3 : para cada $(c, s) \in R_3$ se obtiene que F tiene dos extremos, uno a cada lado de \bar{u} , negando así la existencia de la curva homoclínica. En esta región, al igual que es R_6 se encontrarán órbitas periódicas, tal y como se comentará más adelante.

Es evidente, que $\forall (c, s) \in R_5$ (al igual que $\forall (c, s) \in R_2$) se viola la condición para $F''(s)$ en la Definición 2.2.5. Además, para cada $(c, s) \in R_4$, por los mismos motivos que en la región R_1 del espacio de parámetros, se garantiza la existencia de la curva homoclínica. Sin embargo, como $F''(s) > 0$, F tendrá un mínimo local en s y, por ende, los pares de parámetros contenidos en esta región garantizan la existencia de un solitón de depresión que viaja a una velocidad c , que presenta un mínimo, y que

crece al nivel s . Concretamente, cuando $(c, s) \in R_1 \cup R_4$, la ecuación $v_s(u) = 0$ tiene dos soluciones. Por definición, una es $u = s$, que se corresponde con aquella que resuelve el problema (2.11). Sin embargo, la otra solución en $u = m$ es aquella que cumple $v_s(m) = 0$, pero no (2.11). Cuando la solución $u(\xi)$ correspondiente al solitón alcanza este punto, está alcanzando la cresta del solitón si $(c, s) \in R_1$, o la depresión si $(c, s) \in R_4$. Además, la simetría con respecto a su cresta/depresión es clara debido a la ecuación de las trayectorias (2.7).

En la Proposición 2.2.14 se resume el resultado comentado en esta Nota.

Proposición 2.2.14. *Existen solitones soluciones de la ecuación de Constantin–Lannes (2.1) que se propagan a una velocidad $c \in \mathbb{R}$ y decaen a un nivel de agua constante $s \in \mathbb{R}$ en el infinito si y solo si $(c, s) \in \mathcal{A} = R_1 \cup R_4$, que es la región del espacio de parámetros encerrada por las curvas A_1 y A_2 . Además, los pares $(c, s) \in R_1$ conllevan a solitones de elevación y $(c, s) \in R_4$ a solitones de depresión.*

Nótese que el conjunto \mathcal{A} definido en la Proposición 2.2.14 es un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 , i.e., $\mathcal{A} = \mathring{\mathcal{A}}$, pues es la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos R_1 y R_4 definidos en la Tabla 2.1. Para completar la descripción de la Nota 2.2.13 sobre las diferentes regiones R_i del espacio de parámetros, es interesante preguntarse qué ocurre en la frontera de \mathcal{A} , $\partial\mathcal{A}$. Se tratará de responder a esta cuestión en la Sección 2.3.

2.3. Soluciones débiles de la ecuación de Constantin–Lannes

A la vista del sistema (2.3), la recta $u = \bar{u}$ es una singularidad de la segunda derivada. Es por ello que es interesante buscar soluciones *débiles* de la ecuación de Constantin–Lannes que impliquen a esta discontinuidad del sistema.

Uno puede reformular (2.2) de la siguiente forma

$$\frac{1}{28} \frac{d^2}{d\xi^2} \left((1 + c + 14u)^2 \right) - 7 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 + 3u^4 - 2u^3 + 3u^2 + (1 - c)u + 14K = 0,$$

donde la singularidad en $u = \bar{u}$ en la segunda derivada se hace explícita.

Entonces, diremos que $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ es solución débil de (2.2) si cumple (1.20) en el sentido de las distribuciones. Es decir, para cada función test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ se debe cumplir que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{28} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^2}{d\xi^2} \left((1 + c + 14u)^2 \right) \varphi \, d\xi \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left(14K - 7 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 + 3u^4 - 2u^3 + 3u^2 + (1 - c)u \right) \varphi \, d\xi. \end{aligned}$$

Introduciendo el concepto de derivada débil B.1.3, las soluciones débiles de (2.2) se corresponderán con las soluciones de la ecuación

$$\frac{1}{28}D_\xi^2 \left((1+c+14u)^2 \right) - 7 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 + 3u^4 - 2u^3 + 3u^2 + (1-c)u + 14K = 0, \quad (2.24)$$

donde D_ξ^2 denota la derivada débil segunda.

Definición 2.3.1. Diremos que $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ es una solución débil para ondas viajeras de la ecuación de Constantin–Lannes (2.1) si u satisface (2.24).

2.3.1. Solitones débiles de soporte compacto

Mientras que se ha demostrado la existencia de solitones tal que su perfil de ondas, $u(\xi)$ es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ en el conjunto abierto \mathcal{A} , veamos qué ocurre en la frontera de éste, $\partial\mathcal{A} = A_1 \cup A_2$. Por la definición de la curva A_1 en 2.21 y las condiciones ante las cuales aparece un punto de silla (véase la Nota 2.2.6), los puntos del espacio de parámetros perteneciente a la curva A_1 no se corresponden con trayectorias en la conexión homoclínica. Por tanto, estos últimos no hacen referencia a una solución de onda viajera solitaria o solitón. Sin embargo, veremos que los puntos de $A_2 \setminus \{(c^*, s^*)\}$ sí harán referencia a soluciones de tipo solitón en el sentido débil.

En A_2 , definida por la curva $s = \bar{u}$ en el espacio de parámetros, se tiene que, $h_s = F(\bar{u})$ y $F'(\bar{u}) = 0$. Así pues, la ecuación de las trayectorias para h_s se simplifica a

$$v = \pm \sqrt{2 \frac{F(\bar{u}) - F(u)}{\bar{u} - u}} = \pm \sqrt{(u - \bar{u}) \tilde{p}_c(u)}, \quad (2.25)$$

siendo

$$\begin{aligned} \tilde{p}_c(u) &= -F''(\bar{u}) - \frac{2}{3!}F^{(3)}(\bar{u})(u - \bar{u}) - \frac{2}{4!}F^{(4)}(\bar{u})(u - \bar{u})^2 - \frac{2}{5!}F^{(5)}(\bar{u})(u - \bar{u})^3 \\ &= \frac{3c^3 + 30c^2 + 1031c - 368}{9604} - \frac{3c^2 + 20c + 115}{686}(u - \bar{u}) + \frac{3c + 10}{98}(u - \bar{u})^2 \\ &\quad - \frac{3}{35}(u - \bar{u})^3, \end{aligned} \quad (2.26)$$

un polinomio de tercer grado en u . Definiremos la existencia de estas curvas homoclínicas determinadas por (2.25) mediante la finitud de la siguiente cantidad.

Definición 2.3.2. Definiremos el tiempo de recorrido desde u_0 hasta u por la curva homoclínica determinada por 2.25, como la siguiente integral

$$T(u, u_0) := \int_{u_0}^u \frac{dr}{\sqrt{(r - \bar{u}) \tilde{p}_c(r)}}, \quad (2.27)$$

para $c \in \mathbb{R} \setminus \{c^*\}$.

La definición anterior viene realmente justificada por la parametrización de las soluciones u . Consideremos $u(T)$ y su inversa $T(u)$ (estamos utilizando indistintamente ξ y T). Entonces, por el teorema de la función inversa $\dot{u}(T(u))T'(u) = 1$. Usando que $\dot{u} = v$ (véase 2.3), entonces, $T'(u) = 1/v(u)$. Integrando e introduciendo (2.25) se obtiene (2.27).

Definición 2.3.3. Se dirá que un solitón débil de soporte compacto existe si el tiempo de recorrido desde su cresta/depresión hasta \bar{u} es finito.

Lema 2.3.4. El polinomio \tilde{p}_c no tiene como raíz a \bar{u} en $c \in \mathbb{R} \setminus \{c^*\}$.

Demostración. Si \bar{u} fuera una raíz de \tilde{p}_c , entonces, a la vista de (2.26), $F''(\bar{u}) = 0$, pero eso solo es posible si $c = c^*$. \square

Lema 2.3.5. El polinomio \tilde{p}_c solo tiene una raíz real simple $\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{c^*\}$.

Demostración. Sea $c = 1 \neq c^*$. En ese caso, \tilde{p}_1 tiene solo una raíz real pues $\text{Dis}(\tilde{p}_1(u), u) = -22986987/28247524900 < 0$. Además,

$$\begin{aligned} \text{Dis}(\tilde{p}_c(u), u) = & \tilde{\alpha}(139107266 - 175747044c + 81009604c^2 + 1435038c^3 + 167409c^4 \\ & + 1620c^5 + 81c^6) < 0, \quad \tilde{\alpha} < 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

que puede demostrarse, por ejemplo, utilizando el método de Sturm (Sección C.3) para ver que el polinomio anterior no tiene raíces reales. \square

Definición 2.3.6. Denominaremos integral elíptica a la función real de variable real definida como sigue

$$\begin{aligned} I_E : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow I_E(x) := \int_{x_0}^x R(r, \sqrt{P(r)}) dr, \end{aligned}$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}$ es una constante, R es una función racional de dos argumentos y $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ es un polinomio de tercer o cuarto grado sin raíces repetidas.

Para una discusión sobre finitud y puntos singulares de las integrales elípticas se hace referencia a [34]. La finitud de la integral estará garantizada a lo largo de este trabajo.

Proposición 2.3.7. El tiempo $T := T(u(\xi), \bar{u}) - T(u(\xi), m)$ recorrido en la curva homoclínica definida por la trayectoria (2.25) de \bar{u} a m es finito, siendo m la solución no trivial de $F(\bar{u}) = F(m)$.

Demostración. Sea $u(\xi)$ una solución de $\dot{u}(\xi) = \sqrt{(u - \bar{u})\tilde{p}_c(u)}$ para $c \in \mathbb{R} \setminus \{c^*\}$. Por tanto, si $u_0 = u(\xi_0)$ es una condición inicial, tenemos que

$$T(u(\xi), u(\xi_0)) = \int_{u_0}^u \frac{dr}{\sqrt{(u - \bar{u})\tilde{p}_c(u)}} = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\sqrt{(u - \bar{u})\tilde{p}_c(u)}}{\sqrt{(u - \bar{u})\tilde{p}_c(u)}} d\xi = \xi - \xi_0 < \infty.$$

Por tanto,

$$T = T(u(\xi), \bar{u}) - T(u(\xi), m) = \int_{\bar{u}}^m \frac{dr}{\sqrt{(u - \bar{u})\tilde{p}_c(u)}} < \infty,$$

donde la finitud del tiempo $T(u, \bar{u})$ está garantizado (véase [34]). \square

Corolario 2.3.8. *Los solitones débiles de soporte compacto definidos por las trayectorias (2.25) existen.*

Sea T el tiempo definido en la Proposición 2.3.7. Los solitones débiles anteriores están definidos en $\xi \in (-T, T)$ por simetría del mismo. Podemos extender de forma continua estas soluciones a la recta $u = \bar{u}$ para $\xi \in \mathbb{R} \setminus (-T, T)$. Además, esto es posible pues $u = \bar{u}$ es una solución constante de la ecuación de Constantin–Lannes para el ansatz de ondas viajeras (2.2) cuando $s = \bar{u}$. Además, esta solución, u_K ,

$$u_K(\xi) = \begin{cases} u(\xi) & \text{para } \xi \in (-T, T), \\ \bar{u} & \text{para } \xi \in \mathbb{R} \setminus (-T, T), \end{cases} \quad (2.28)$$

cumple que $u_K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ pues, $\exists \lim_{\xi \rightarrow \pm T} u_K(\xi) = \bar{u} < \infty$ y vemos que también $\exists \lim_{\xi \rightarrow \pm T} u_K(\xi) = 0 < \infty$. Escogiendo $\xi \in (-T, T)$, como $\dot{u} = v$,

$$\dot{u} = v(u) \stackrel{(2.25)}{=} \pm \sqrt{(u - \bar{u})\bar{p}_c(u)}.$$

Así, usando que $\lim_{\xi \rightarrow \pm T} u_K(\xi) = \bar{u}$, tomando límites en la expresión anterior concluimos que, efectivamente,

$$\exists \lim_{\xi \rightarrow \pm T} \dot{u}_K(\xi) = 0.$$

Por otro lado, escogiendo $\xi \in (-T, T)$,

$$\ddot{u} = \frac{d}{d\xi} \dot{u} = \frac{d}{d\xi} v(u) \stackrel{(2.25)}{=} \frac{1}{2} (\bar{p}_c(u) + (u - \bar{u})\bar{p}'_c(u)).$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm T} \frac{1}{2} (\bar{p}_c(u) + (u - \bar{u})\bar{p}'_c(u)) = -\frac{1}{2} F''(\bar{u}) \neq 0,$$

podemos concluir que $\nexists \lim_{\xi \rightarrow \pm T} \ddot{u}_K(\xi)$, pues no sería único. Así, $u_K \notin \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Para una visualización gráfica del comportamiento de estas soluciones, se puede observar la Figura 2.5.

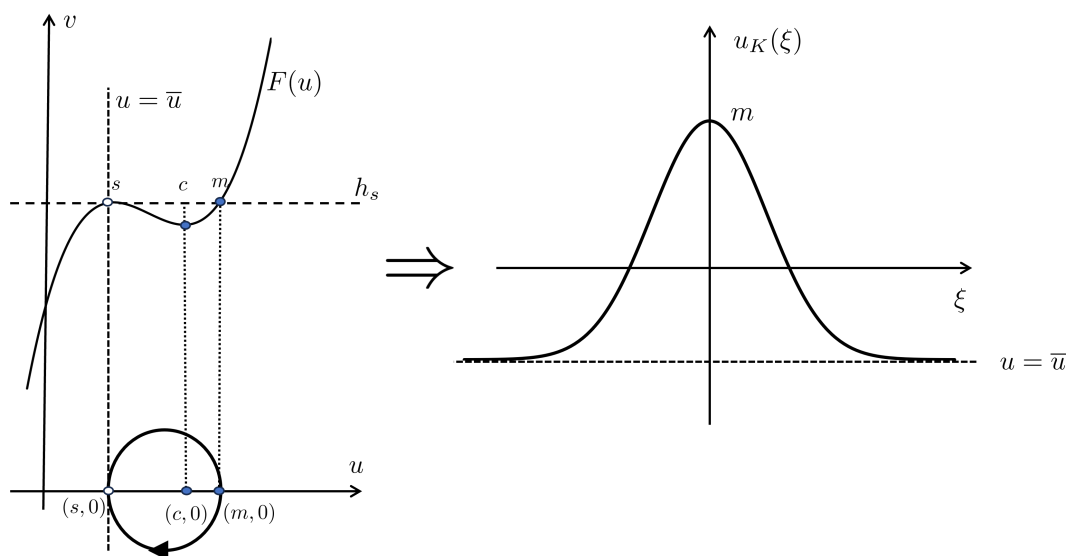


Figura 2.5: Representación del comportamiento de los solitones débiles ($s = \bar{u}$) y su extensión continua de clase 1, u_K , dada por (2.28), de la ecuación de Constantin–Lannes.

2.3.2. Soluciones periódicas picudas

Recordemos que en la prueba de la Proposición 2.2.3 se discutió el caso en el que el sistema Hamiltoniano (2.3) contempla la existencia de dos puntos críticos distintos, pero que estos, a su vez, están en componentes conexas distintas de $\mathbb{R}^2 \setminus \{u = \bar{u}\}$. Por ende, bajo estas circunstancias, los puntos críticos se identificaron como centros de dicho sistema y se negó la existencia de una curva homoclínica. La región de parámetros (c, s) en la que se da esta circunstancia ocurre en las regiones R_3 y R_6 a la vista de sus definiciones en la Tabla 2.1.

Proposición 2.3.9. *Para cada $(c, s) \in R_3 \cup R_6$ el sistema (2.3) tiene dos centros $(u_1, 0)$ y $(u_2, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{u = \bar{u}\}$. Además, para estas regiones, existen trayectorias periódicas (cerradas) que cumplen (2.7) para valores de $h = h_p \in (h_1, h_2)$, con $h_i = F(u_i)$ para $i = 1, 2$, tal que $h_p \neq F(\bar{u})$.*

Demostración. La primera parte de la proposición ha sido demostrada en la Proposición 2.2.3 y la Nota 2.2.13. Es decir, como en esas regiones aparecen dos extremos en cada una de las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \{u = \bar{u}\}$, estos son cada uno de ellos un centro.

Para la segunda parte, tengamos en cuenta que $(c, s) \in R_3 \cup R_6$, y supongamos, sin pérdida de generalidad que $u_1 < \bar{u} < u_2$. Por definición de los centros (véase la

condición en (2.12)), sabemos que en u_1 , F presenta un máximo, mientras que en u_2 presenta un mínimo. Por tanto, efectivamente, toda trayectoria correspondiente con $h_p \in (h_1, h_2)$ y $h_p \neq F(\bar{u})$ dará lugar a una trayectoria periódica. \square

Nótese que se ha excluido el caso $h_p = F(\bar{u})$, pues daría lugar a trayectorias que cortan a la singularidad y que deben ser tratadas como soluciones débiles en el sentido de la Definición 2.3.1.

Proposición 2.3.10. *En la región de parámetros tal que $(c, s) \in R_3 \cup R_6$, se puede reescribir el polinomio F definido en (2.8) como*

$$F(u) = F(\bar{u}) + F'(\bar{u})(u - \bar{u}) = F(\bar{u}) - (u - \bar{u})(u - m_1)(u - m_2)q_{c,s}(u), \quad (2.29)$$

con $q_{c,s}$ un polinomio de segundo grado e irreducible $\forall (c, s) \in R_3 \cup R_6$.

Demostración. Denotemos $h_p = F(\bar{u})$. Sabemos que $\forall (c, s) \in R_3 \cup R_6$, se tiene que $h_1 < h_p < h_2$ con $h_i = F(u_i)$ para $i = 1, 2$ siendo $u_1 < \bar{u}$ el punto en el que F alcanza su único máximo relativo y $u_2 > \bar{u}$ el punto en el que F alcanza su único mínimo relativo. Por tanto, el polinomio F y la constante h_p tienen tres puntos de corte, donde uno es evidente que coincide con $u = \bar{u}$ y los otros dos, m_1 y m_2 , necesariamente cumplen $m_1 < u_1 < \bar{u} < u_2 < m_2$. Donde las desigualdades son necesariamente estrictas y concluimos. \square

Tal y como adelantamos al final de la prueba de la Proposición 2.2.3, para valores de los parámetros $(c, s) \in R_3 \cup R_6$ emergen dos curvas heteroclínicas que en este caso salen y vuelven de la recta singular $u = \bar{u}$ siguiendo dos trayectorias de la forma

$$v_i(u) = \pm \sqrt{2(u - m_1)(u - m_2)q_{c,s}(u)}, \quad i = 1, 2,$$

tal que v_1 se corresponde al recorrido de la trayectoria para $u \in [m_1, \bar{u})$ y v_2 para $u \in (\bar{u}, m_2]$. Es decir, las dos órbitas correspondientes están cada una en una componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \{u = \bar{u}\}$. La existencia de las trayectorias heteroclínicas se probará, al igual que en el caso anterior, mediante la finitud de sus tiempos de recorrido.

Definición 2.3.11. Definiremos el tiempo de recorrido de las trayectorias $v_i(u)$ para $i = 1, 2$, como las siguientes integrales

$$T_i := (-1)^i \int_{\bar{u}}^{m_i} \frac{du}{\sqrt{2(u - m_1)(u - m_2)q_{c,s}(u)}}, \quad i = 1, 2.$$

Proposición 2.3.12. *Los tiempos T_i para $i = 1, 2$ definidos anteriormente son finitos.*

Demostración. Usando los mismos argumentos que en la Proposición 2.3.7 se prueba la finitud. \square

Al contrario que ocurría en la Sección 2.3.1, estas soluciones débiles no son solitones de soporte compacto. Para tener una visión inicial de lo que sucede, se recomienda al lector visualizar la Figura 2.6.

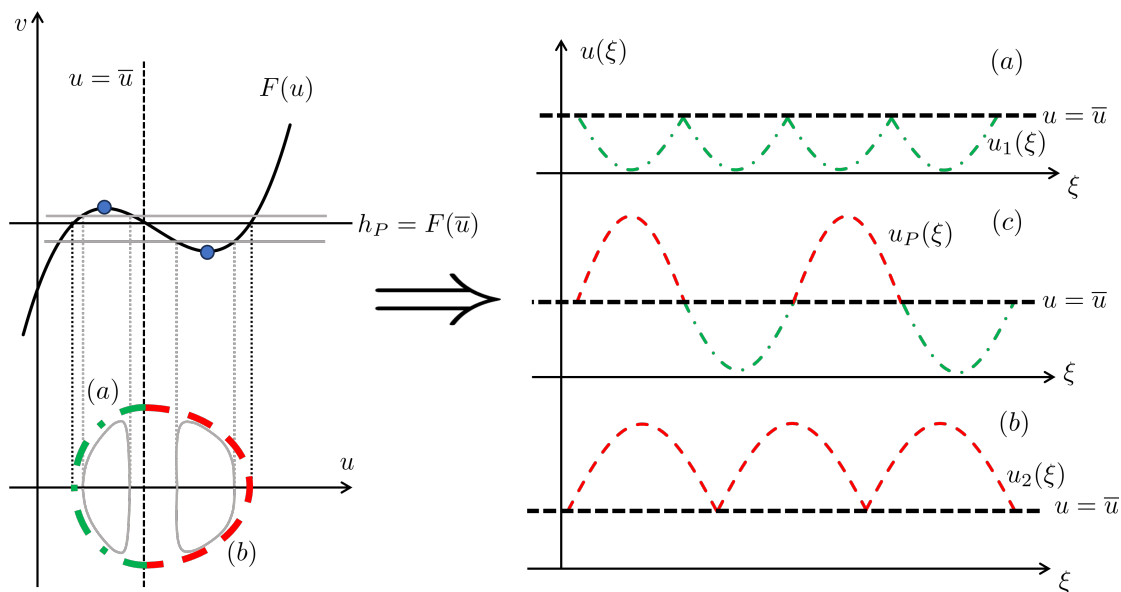


Figura 2.6: Representación de las soluciones periódicas picudas (a) u_1 y (b) u_2 , así como su extensión continua de clase 2 (c) u_P (2.30) en el caso en que $T_1 = T_2$.

En este caso, el perfil de onda no se corresponde con un único pico, si no que aparecerán un número infinito de ellos, pues se corresponde con la extensión continua a soluciones débiles de las trayectorias periódicas correspondientes a soluciones fuertes que se prueban en la Proposición 2.3.9. Estas dos soluciones débiles, $u_1(\xi)$ y $u_2(\xi)$, se denominarán soluciones (u ondas) periódicas picudas, debido a que no son derivables cuando $u \rightarrow \bar{u}$ como veremos más adelante. Comentarios sobre estas soluciones seguirán un lenguaje más cualitativo usando la discusión que puede encontrarse en [11].

Como dichas trayectorias “salen y vuelven” de la discontinuidad presente en $u = \bar{u}$, el período de estas ondas periódicas picudas sería por tanto $2T_i$ para $i = 1, 2$. Tienen tantos puntos de discontinuidad como crestas o depresiones picudas para $\xi = (2k + 1)T_i$ donde $k \in \mathbb{Z}$, para $i = 1, 2$, respectivamente, que se puede salvar añadiendo el punto $u = \bar{u}$. Veamos además que en cada $\xi = (2k + 1)T_i$ con $k \in \mathbb{Z}$, u_1 (respectivamente u_2) no es derivable, pues sus límites a izquierda y derecha no coinciden,

$$\lim_{\xi \nearrow (2k+1)T_1} \dot{u}_1(\xi) \stackrel{\dot{u}=v \& (2.29)}{=} \sqrt{-F'(\bar{u})} \neq -\sqrt{-F'(\bar{u})} \stackrel{\dot{u}=v \& (2.29)}{=} \lim_{\xi \searrow (2k+1)T_1} \dot{u}_1(\xi).$$

En el caso particular en el que $T_1 = T_2$, podemos construir una onda periódica de clase 2, u_P con período $4T_1$, representado en el caso (c) de la Figura 2.6. En este caso,

la onda periódica oscila entorno a \bar{u} . De hecho, por continuidad del polinomio F sobre los parámetros c y s , podemos encontrar parámetros $(c, s) \in R_3 \cup R_6$ tales que $\bar{u} - m_1 = m_2 - \bar{u}$ que garantizan la condición buscada. Dicha trayectoria u_P consiste esencialmente en la unión en los puntos de discontinuidad, $\xi = (2k+1)T_1$ con $k \in \mathbb{Z}$ de ambas soluciones, entendiéndolo como una alternancia de semiperiodos de las curvas u_1 y u_2 . Es decir,

$$u_P(\xi) = \begin{cases} u_1(\xi), & \text{para } \xi \in \bigcup_{k=2\ell+1, \ell \in \mathbb{Z}} [(2k-1)T_1, (2k+1)T_1], \\ u_2(\xi), & \text{para } \xi \in \bigcup_{k=2\ell, \ell \in \mathbb{Z}} [(2k-1)T_1, (2k+1)T_1]. \end{cases} \quad (2.30)$$

Efectivamente, esta continuación u_P es de clase 2 porque existen los siguientes límites

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \nearrow (2k+1)T_1} u_P(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow (2k+1)T_1} u_1(\xi) = \bar{u} < \infty, \\ \lim_{\xi \nearrow (2k+1)T_1} \dot{u}_P(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow (2k+1)T_1} \dot{u}_1(\xi) \stackrel{\dot{u}=v \& (2.29)}{=} \sqrt{-F'(\bar{u})} < \infty, \\ \lim_{\xi \nearrow (2k+1)T_1} \ddot{u}_P(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow (2k+1)T_1} \ddot{u}_1(\xi) = -\frac{F''(\bar{u})}{2} < \infty. \end{aligned}$$

Para calcular el límite de $\ddot{u}_P(\xi)$, se ha hecho uso del siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} \ddot{u}(\xi) &\stackrel{\text{NOT.}}{=} \frac{d}{d\xi} \dot{u}(\xi) \\ &\stackrel{\dot{u}=v}{=} \frac{d}{d\xi} v(u(\xi)) \\ &\stackrel{\text{R.Cadena}}{=} v'(u(\xi)) \dot{u}(\xi) \\ &\stackrel{\text{NOT. \& } \dot{u}=v}{=} v'(u) v(u) \\ &= \pm \sqrt{2 \frac{F(\bar{u}) - F(u)}{(u - \bar{u})}} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2 \frac{F(\bar{u}) - F(u)}{(u - \bar{u})}}} \left(\frac{-F'(u)(u - \bar{u}) - (F(\bar{u}) - F(u))}{(u - \bar{u})^2} \right) \\ &\stackrel{(2.29)}{=} -\frac{1}{2} \frac{F'(u) - F'(\bar{u})}{u - \bar{u}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \searrow (2k-1)T_1} u_P(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow (2k-1)T_1} u_1(\xi) = \bar{u} < \infty, \\ \lim_{\xi \searrow (2k-1)T_1} \dot{u}_P(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow (2k-1)T_1} \dot{u}_1(\xi) \stackrel{\dot{u}=v \& (2.29)}{=} -\sqrt{-F'(\bar{u})} < \infty, \\ \lim_{\xi \searrow (2k-1)T_1} \ddot{u}_P(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow (2k-1)T_1} \ddot{u}_1(\xi) \stackrel{(2.31)}{=} -\frac{F''(\bar{u})}{2} < \infty. \end{aligned}$$

Y que,

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \searrow (2k+1)T_1} u_P(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow (2k+1)T_1} u_2(\xi) = \bar{u} < \infty, \\ \lim_{\xi \searrow (2k+1)T_1} \dot{u}_P(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow (2k+1)T_1} \dot{u}_2(\xi) \stackrel{\dot{u}=v\&(2.29)}{=} \sqrt{-F'(\bar{u})} < \infty, \\ \lim_{\xi \searrow (2k+1)T_1} \ddot{u}_P(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow (2k+1)T_1} \ddot{u}_2(\xi) \stackrel{(2.31)}{=} -\frac{F''(\bar{u})}{2} < \infty. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \nearrow (2k-1)T_1} u_P(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow (2k-1)T_1} u_2(\xi) = \bar{u} < \infty, \\ \lim_{\xi \nearrow (2k-1)T_1} \dot{u}_P(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow (2k-1)T_1} \dot{u}_2(\xi) \stackrel{\dot{u}=v\&(2.29)}{=} -\sqrt{-F'(\bar{u})} < \infty, \\ \lim_{\xi \nearrow (2k-1)T_1} \ddot{u}_P(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow (2k-1)T_1} \ddot{u}_2(\xi) \stackrel{(2.31)}{=} -\frac{F''(\bar{u})}{2} < \infty. \end{aligned}$$

De esta forma se prueba que la solución $u_P \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

2.4. Algunas propiedades de los solitones

Hasta ahora, atendiendo a los solitones (fuertes) de la ecuación de Constantin–Lannes para el ansatz de onda viajera (2.2), sabemos que estas soluciones son simétricas con respecto a la cresta/depresión y que decaen exponencialmente a cada lado de su extremo relativo a un valor constante s (véase Proposición 2.2.14).

En esta sección trataremos de probar algunas propiedades de los solitones obtenidos.

2.4.1. Dependencia de la amplitud con la velocidad

Recordemos que la *altura* del máximo (cresta) o mínimo (depresión) ha sido denotada por $m \in \mathbb{R}$, mientras que el nivel al que decae la onda solitaria viene determinada por la constante $s \in \mathbb{R}$. El valor concreto de estos dos parámetros sabemos que depende de la velocidad de la onda, $c \in \mathbb{R}$.

Definición 2.4.1. Definiremos amplitud con signo de un solitón como $a := m - s$. Por otro lado, llamaremos amplitud absoluta o, simplemente, amplitud a $|a|$.

Lema 2.4.2. Sea F el polinomio definido en (2.8) para un K fijo y sea el par (s, m) solución del problema (que garantiza la onda solitaria)

$$\begin{cases} F'(s) = 0, \\ F(s) - F(m) = 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

con $s \neq \bar{u}$. Entonces, la amplitud con signo del solitón cumple que

$$\frac{\partial a}{\partial c} = -\frac{1/28}{F'(m)F''(s)} \left[(s^2 - m^2)F''(s) + 2sF'(m) \right] \quad (2.33)$$

Demostración. Redefinamos el polinomio F definido en (2.8) como un polinomio en las variables u y c para un valor de $K \in \mathbb{R}$ fijo. Es decir,

$$f(u, c) := F(u) = Ku + \frac{1-c}{28}u^2 + \frac{1}{14}u^3 - \frac{1}{28}u^4 + \frac{3}{70}u^5.$$

La primera ecuación del problema (2.32) se puede reescribir como,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(s, c) = 0. \quad (2.34)$$

Si diferenciamos (implícitamente) la ecuación anterior con respecto a la variable c , teniendo en cuenta que s realmente depende de c , obtendríamos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(s, c) \frac{\partial s}{\partial c}(c) + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial c}(s, c) = F''(s) \frac{\partial s}{\partial c}(c) - \frac{1}{14}s = 0.$$

Nótese que se ha abusado de notación al tratar c como variable y como punto en \mathbb{R} . Por tanto,

$$\frac{\partial s}{\partial c} = \frac{1}{14} \frac{s}{F''(s)}. \quad (2.35)$$

Por otro lado, la segunda ecuación del problema (2.32) se puede reescribir como

$$f(s, c) - f(m, c) = 0,$$

y que tras derivar (implícitamente) con respecto a c , se obtiene que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(s, c) \frac{\partial s}{\partial c}(c) + \frac{\partial f}{\partial c}(s, c) - \frac{\partial f}{\partial u}(m, c) \frac{\partial m}{\partial c}(c) + \frac{\partial f}{\partial c}(m, c) = 0,$$

de donde, utilizando (2.34), se obtiene que

$$\frac{\partial m}{\partial c} = \frac{\frac{\partial f}{\partial c}(s, c) - \frac{\partial f}{\partial c}(m, c)}{\frac{\partial f}{\partial u}(m, c)} = -\frac{1/28}{F'(m)}(s^2 - m^2). \quad (2.36)$$

Finalmente, utilizando la Definición 2.4.1 de la amplitud con signo, a , y derivando con respecto a c sabemos que

$$\frac{\partial a}{\partial c} = \frac{\partial m}{\partial c} - \frac{\partial s}{\partial c}. \quad (2.37)$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones (2.35) y (2.36) en (2.37) se obtiene (2.33). \square

A partir del signo de (2.33), uno puede estudiar el crecimiento o decrecimiento de la amplitud absoluta, $|a|$, de los solitones en la región del espacio de parámetros donde estos existen, \mathcal{A} (véase Proposición 2.2.14).

Lema 2.4.3. *La amplitud con signo se mantiene constante a lo largo de la curva definida por la condición*

$$R(s, c) = 0, \quad (2.38)$$

con R un polinomio con coeficientes reales en dos variables, definido por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} R(s, c) = & 31104s^9 - 10368s^8 + 32832s^7 + (-15552c + 39456)s^6 + (-3816 - 864c)s^5 \\ & + (23472 - 3312c)s^4 + 24(c - 1)(108c - 593)s^3 + 24(33c + 107)(c - 1)s^2 \\ & - 690(c - 1)^2s + 36(c - 1)^3. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Demostración. La amplitud con signo se mantiene constante si y solo si $\frac{\partial a}{\partial c} = 0$. Por tanto, haciendo uso de (2.33), basta estudiar cuándo

$$(s^2 - m^2)F''(s) + 2sF'(m) = 0.$$

Haciendo uso de la expresión 2.18, se obtiene que la condición anterior es equivalente a

$$\frac{1}{14}(s - m)^2Q_{c,s}(m) = 0, \quad Q_{c,s}(m) = 6m^2s - 4sm + 12ms^2 - 2s^2 + 6s^3 - 1 + c. \quad (2.40)$$

Como a su vez, (s, m) deben cumplir (2.32), obtenemos la condición

$$\begin{aligned} \frac{1}{140}(s - m)^2P_{c,s}(m) = 0, \quad P_{c,s}(m) = & 6m^3 - 5m^2 + 12m^2s + 10m + 18ms^2 - 10sm \\ & + 5 - 5c - 15s^2 + 24s^3 + 20s. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Como la existencia de solitones implica que $s \neq m$, es necesario que los polinomios anteriores tengan un punto común, es decir, se debe dar simultáneamente el sistema

$$\begin{cases} Q_{c,s}(m) = 0, \\ P_{c,s}(m) = 0, \end{cases} \quad (2.42)$$

Por tanto, hay que estudiar las condiciones para que los dos polinomios anteriores tengan una raíz común en m . Es decir, que la resultante (ver Definición C.1.2) de ambos polinomios se anule. Primero, para asegurar que el problema (2.42) tiene solución, debemos garantizar la existencia de, al menos, una raíz en estos polinomios extendiéndola de forma continua a los parámetros c y s (aplicando el Lema C.2.3).

Los Lemas 2.4.4 y 2.4.5, que se pueden leer a continuación, garantizan que el punto de corte debe ser único, pues $P_{c,s}(m)$ solo tiene una raíz $\forall (c, s) \in \mathbb{R}^2$. Finalmente, se comprueba que,

$$R(s, c) = \text{res}(Q_{c,s}(m), P_{c,s}(m), m),$$

acabando así la demostración. \square

En la Figura 2.7, se puede observar la gráfica de la curva definida por (2.38).

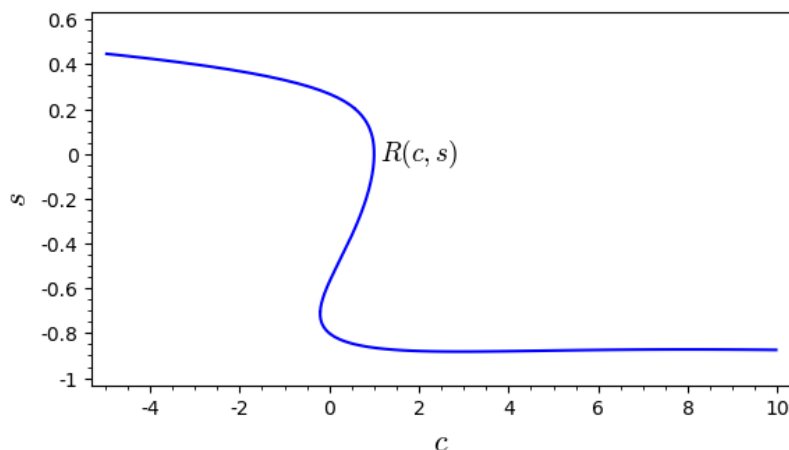


Figura 2.7: Representación de la curva $R(c, s) = 0$.

Lema 2.4.4. El polinomio $P_{c,s}(m)$ definido en (2.41) tiene una sola raíz $\forall (c, s) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. Para $P_{c,s}(m)$ definido en (2.41), se puede obtener que $P_{1,1}(m) = 29 + 18m + 7m^2 + 6m^3$, tal que $\text{Dis}(P_{1,1}(m), m) = -586700 < 0$ y, por tanto, solo tiene una raíz real. Además, se obtiene que

$$D_s(c) := \text{Dis}(P_{c,s}(m), m) = -100(703 - 731c + 243c^2 + 1636s - 1206cs + 962s^2 + 756cs^2 - 24s^3 - 1512cs^3 + 5040s^4 - 2592s^5 + 2592s^6),$$

tal que $D_1(c) = -100(8317 - 2693c + 243c^2)$ y $\text{Dis}(D_1(c), c) = -8318750000 < 0$, por lo que $D_1(c) > 0 \forall c \in \mathbb{R}$, y además, se puede comprobar que $\text{Dis}(D_s(c), c) = -50000(31 - 12s + 36s^2)^3$ y que como $31 - 12s + 36s^2 > 0 \forall s \in \mathbb{R}$ entonces, $\text{Dis}(D_s(c), c) < 0 \forall s \in \mathbb{R}$ y concluimos que $D_s(c) > 0 \forall c, s \in \mathbb{R}$. Aplicando el Lema C.2.3, se concluye que $P_{c,s}(m)$ solo tiene una raíz real $\forall c, s \in \mathbb{R}$. \square

Lema 2.4.5. El polinomio $Q_{c,s}(m)$ definido en (2.40) tiene dos raíces reales si $\forall (c, s) \in \mathbb{R}^2 \cap \{s \neq 0\} \cap \mathcal{S}$, con

$$\mathcal{S} = \left\{ c \geq \frac{19}{18} \wedge s < 0 \right\} \cup \left\{ c < 1 \wedge s < s_- \right\} \cup \left\{ 1 \leq c < \frac{19}{18} \wedge s < 0 \right\} \\ \cup \left\{ c < \frac{19}{18} \wedge 0 < s < s_+ \right\},$$

$$\text{con } s_{+,-} = \frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{19-18c}}{6}.$$

Demostración. Sea $Q_{c,s}(m)$ el polinomio de segundo grado en la variable m definido en (2.40). Su discriminante resulta

$$\text{Dis}(Q_{c,s}(m), m) = -8sD_2(c, s), \quad D_2(c, s) = -3 + 3c - 2s + 6s^2.$$

Por tanto, las hipótesis del Lema C.2.3 fallan para $s = 0$, donde en ese caso, además, $Q_{c,0}(m) = c - 1$ y es un polinomio de grado 0 en la variable m . Por tanto, sabemos que necesariamente $s \neq 0$ para poder tener dos raíces reales. Además, para garantizar que $\text{Dis}(Q_{c,s}(m), m) > 0$, necesitamos las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} D_2(c, s) > 0 & \text{para } s < 0 \\ D_2(c, s) < 0 & \text{para } s > 0. \end{cases}$$

Atendiendo a que $\text{Dis}(D_2(c, s), s) = -4(18c - 19)$, si $c > 19/18$, entonces $D_2(c, s) > 0$. Si $c = 19/18$, entonces $D_2(c, s) > 0$ excepto para $s = 1/6$. Mientras que si $c < 19/18$, entonces $D_2(c, s) > 0$ si $s < s_-$ o si $s > s_+$, pero $D_2(c, s) < 0$ si $s_- < s < s_+$, con $s_{+,-} = \frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{19-18c}}{6}$. Finalmente, usando que $s_- = 0$ cuando $c = 1$, concluimos aplicando el Lema C.2.3. \square

Lema 2.4.6. *La curva $R(s, c) = 0$ intersecta la curva A_2 en 3 puntos ($s_1 = -0.87788\dots$, $s_2 = -0.13647\dots$ y $s_3 = 0.50147\dots$), mientras que a la curva A_1 solo en uno (para $s = 0$), siendo las curvas A_1 y A_2 las definidas en 2.21.*

Demostración. Comencemos probando la condición para la curva $A_1 := F'''(s) = 0$. En este caso, el valor del parámetro c que cumple esta curva será función de s y lo denotaremos por $c_1(s)$, cuya expresión viene dada por,

$$c_1(s) = 1 + 6s - 6s^2 + 12s^3.$$

Sustituyendo esta expresión en el polinomio R (2.39), se obtiene que

$$R_1(s) := R(s, c_1(s)) = 72s^3(1 - 2s + 6s^2)^2(43 + 36s(-1 + 3s)),$$

tal que

$$\text{Dis}(6s^2 - 2s + 1, s) = -20 < 0, \quad \text{Dis}(108s^2 - 36s + 43, s) = -17280 < 0,$$

y, por tanto, R_1 solo tiene una raíz real (triple) para $s = 0$.

Por otro lado, repetamos el procedimiento para la curva A_2 . En este caso, la dependencia del parámetro c con s que resuelve la curva A_2 la denotaremos por $c_2(s)$

y viene dada por

$$c_2(s) = -(1 + 14s).$$

Sustituyendo esta expresión en el polinomio R (2.39), se obtiene que

$$\begin{aligned} R_2(s) := R(s, c_2(s)) = & 24(-12 - 367s - 3522s^2 - 8461s^3 + 20422s^4 + 22977s^5 \\ & + 2796s^6 + 10440s^7 - 432s^8 + 1296s^9), \end{aligned} \quad (2.43)$$

que es un polinomio de grado 9 y que, además, se puede calcular que $\text{Dis}(R_2(s), s) < 0$. Siguiendo la Proposición C.1.6 sabemos que el polinomio R_2 tiene 3 o 7 raíces reales. Concretamente, uno puede demostrar que tiene solamente 3, por ejemplo, mediante el método de Sturm (véase la Nota C.3.3 para el desarrollo del método, y la Figura 2.8 para una demostración gráfica de la existencia de las tres raíces). Además, dos de ellas son negativas y una es positiva, siendo $s_1 = -0.87788\dots$, $s_2 = -0.13647\dots$ y $s_3 = 0.50147\dots$, con $s_1, s_2 < 0$ y $s_3 > 0$. \square

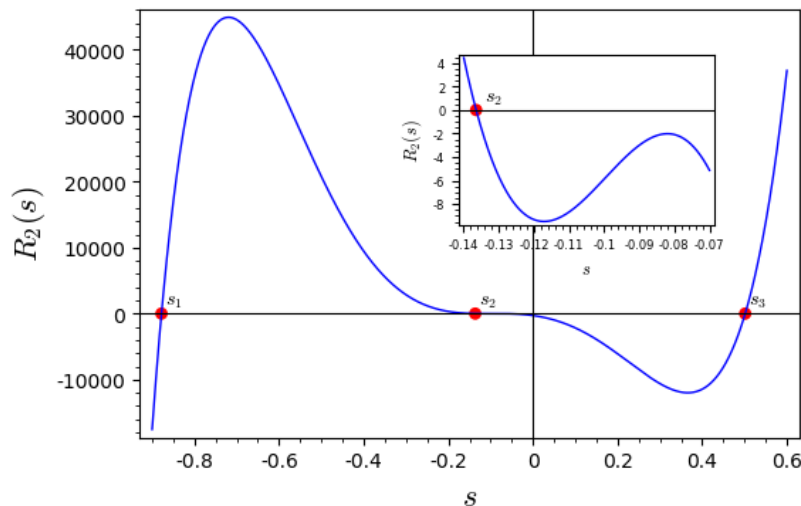


Figura 2.8: Representación del polinomio $R_2(s)$ definido en (2.43) para $s \in [-0.9, 0.6]$. En el *inset* situado en la parte central de la gráfica se observa el comportamiento del polinomio para $s \in [-0.14, -0.07]$.

Los resultados del Lema 2.4.6 hacen distinguir la región del espacio de parámetros donde los solitones están garantizados, $\mathcal{A} = R_1 \cup R_4$, en 5 subregiones diferentes que se definen en la siguiente Tabla 2.2.

Proposición 2.4.7. *Se distinguen los siguientes casos:*

- (i) Para $(s, c) \in R_1$ se obtienen solitones de elevación estrictamente crecientes con respecto a la velocidad, c , en (I), y decrecientes con respecto a la velocidad, c , en (II) y (III) para $K \in \mathbb{R}$ fijo.

Región	Definición
(I)	$\{(c, s) \in \mathbb{R}^2 : R(c, s) > 0 \wedge (c, s) \in R_1\}$
(II)	$\{(c, s) \in \mathbb{R}^2 : R(c, s) < 0 \wedge (c, s) \in R_1 \wedge s < s_1\}$
(III)	$\{(c, s) \in \mathbb{R}^2 : R(c, s) < 0 \wedge (c, s) \in R_1 \wedge s_2 < s < 0\}$
(IV)	$\{(c, s) \in \mathbb{R}^2 : R(c, s) < 0 \wedge (c, s) \in R_4\}$
(V)	$\{(c, s) \in \mathbb{R}^2 : R(c, s) > 0 \wedge (c, s) \in R_4\}$

Cuadro 2.2: Regiones de \mathcal{A} definidas por su intersección de la curva $R(s, c) = 0$

(ii) Para $(s, c) \in R_4$ se obtienen solitones de depresión estrictamente decrecientes con respecto a la velocidad, c , en (IV), y crecientes con respecto a la velocidad, c , en (V) para $K \in \mathbb{R}$ fijo.

Demostración. El signo de la derivada $\frac{\partial a}{\partial c}$ es constante en cada una de las regiones definidas en la Tabla 2.2, así como el signo de a es constante en R_1 y en R_4 , $a > 0$ y $a < 0$, respectivamente. Por lo tanto, basta coger un par de puntos (\bar{c}, \bar{s}) en cada una de las regiones para determinar el signo de $\frac{\partial a}{\partial c}$. Se resumen en la Tabla 2.3 los resultados para puntos representativos de cada región y concluimos. \square

Región	(\bar{c}, \bar{s})	\bar{m}	$\text{sgn}(a)$	$\frac{\partial a}{\partial c}(\bar{c}, \bar{s}, \bar{m})$	$\text{sgn}\left(\frac{\partial a}{\partial c}\right)$
(I)	(5, 0)	1.37847...	$a > 0$	0.00636...	$\frac{\partial a}{\partial c} _{(I)} > 0$
(II)	(14, -1)	3.010165...	$a > 0$	-0.00406...	$\frac{\partial a}{\partial c} _{(II)} < 0$
(III)	(0.7, -0.08)	0.019281...	$a > 0$	-0.598901...	$\frac{\partial a}{\partial c} _{(III)} < 0$
(IV)	(-10, 0)	-1.622296...	$a < 0$	0.004613...	$\frac{\partial a}{\partial c} _{(IV)} > 0$
(V)	(-15, 0.7)	-2.431403...	$a < 0$	-0.007283...	$\frac{\partial a}{\partial c} _{(V)} < 0$

Cuadro 2.3: Resultados numéricos de puntos representativos para la determinación del signo de $\frac{\partial a}{\partial c}$.

2.4.2. Monotonía del solitón

El objetivo de esta subsección es probar que el perfil u del solitón crece (decrece) desde el nivel s hasta la cresta (depresión) a ambos lados de esta con solamente un punto de inflexión, para ello será esencial estudiar el comportamiento de

$$v = \sqrt{D(u)}, \quad D(u) := 2 \frac{F(s) - F(u)}{u - \bar{u}}. \tag{2.44}$$

Para este objetivo bastará estudiar la función D por la monotonía de la raíz cuadrada.

Lema 2.4.8. *Sea D la función real de variable real definida en (2.44). Su derivada, D' , tiene una única raíz en (s, ∞) para el dominio de los solitones (fuertes) y solitones débiles.*

Demostración. Se probará solamente para $u > \bar{u}$, el caso $u < \bar{u}$ es simétrico.

Primero, por construcción, sabemos que $D(s) = 0$ y $D'(s) = 0$. Efectivamente, que $D(s) = 0$ se sigue directamente de (2.44). Por otro lado,

$$D'(u) = 2 \frac{-F'(u)(u - \bar{u}) - (F(s) - F(u))}{(u - \bar{u})^2},$$

que sustituyendo $u = s$ se obtiene

$$D'(s) = -2 \frac{F'(s)}{(s - \bar{u})} = 0,$$

ya que $F'(s) = 0$ por definición del parámetro s (véase la Definición 2.2.5). Por tanto, utilizando esta información, la definición de D en (2.44) y la expresión de F en (2.15), podemos expresar $D'(u)$ como

$$D'(u) = \frac{2}{5}(s - u) \frac{I_{c,s}(u)}{(1 + c + 14u)^2}, \quad (2.45)$$

con

$$\begin{aligned} I_{c,s}(u) = & 168 u^4 + 3(5c + 56s - 30)u^3 + (15(c - 6)s + 168s^2 - 10c + 130)u^2 \\ & + (15(c - 6)s^2 + 168s^3 - 10(c - 13)s - 20c + 50)u + 168s^4 \\ & + 15(c - 6)s^3 - 10(c - 13)s^2 - 10(2c - 5)s + 5(1 - c^2), \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde se ha introducido la definición de \bar{u} en (2.6).

Nos centraremos en estudiar los ceros de $I_{c,s}(u)$ y, finalmente, probaremos que no serán del denominador de (2.45).

El polinomio $I_{c,s}(u)$ es de grado 4 para la variable u , cuyos coeficientes dependen de manera continua en los parámetros s y c , de tal forma que el coeficiente que acompaña al término de mayor grado es una constante que no se anula nunca. Veremos que el número de raíces del polinomio se mantiene constante para $(c, s) \in \mathcal{A}$ y $\Omega_{c,s} = (s, \infty)$. Para ello, aplicaremos el Lema C.2.3, donde la hipótesis (iii) se cumple de manera automática. Para comprobar la hipótesis (iv) del Lema C.2.3, evaluaremos el polinomio (2.46) en $u = s$, obteniendo que

$$I_{c,s}(s) = 980(s - \bar{u})F''(s),$$

que justamente en $(c, s) \in \mathring{\mathcal{A}}$, $I_{c,s}(s)$ no se anula en esta región del espacio de parámetros cumpliendo así la hipótesis (iv) del Lema C.2.3. Por ahora, se desarrollará la demostración para soluciones fuertes correspondientes a solitones y, al final, para las soluciones débiles.

Necesitamos, por tanto, probar Lema C.2.3(ii). El discriminante del polinomio $I_{c,s}(u)$ viene dado por

$$\text{Dis}(I_{c,s}(u), u) = -375D_1(c, s)D_2(c, s),$$

donde

$$\begin{aligned} D_1(c, s) = & -32928s^3 + (22344 + 1764c)s^2 + (-28504 - 1148c - 84c^2)s \\ & - 5842 + 7919c + 44c^2 + 3c^3, \end{aligned} \quad (2.47)$$

y

$$\begin{aligned} D_2(c, s) = & 30375c^5 + 100(931 + 5679s + 675s^2 - 1350s^3)c^4 + (880703 + 408900s \\ & + 2083200s^2 + 1280400s^3 - 3518100s^4 - 162000s^5 + 162000s^6)c^3 \\ & + (-3605574 - 368064s - 8347536s^2 - 11014128s^3 + 6777000s^4 \\ & - 25691040s^5 - 4730400s^6 + 5443200s^7)c^2 + (4400084 - 15110352s \\ & - 22971024s^2 - 17525952s^3 - 58261680s^4 + 23678784s^5 - 9163584s^6 \\ & - 44997120s^7 + 60963840s^8)c + 1062232 + 31667136s + 49720800s^2 \\ & + 71568192s^3 + 187454304s^4 + 54393984s^5 + 152350848s^6 + 301625856s^7 \\ & - 138184704s^8 + 227598336s^9. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Primero,

$$\begin{aligned} \text{Dis}(D_1(c, s), s) = & -4517721600(1236995752 - 1078339968c + 348217638c^2 + 1577906c^3 \\ & + 186633c^4 + 540c^5 + 27c^6). \end{aligned}$$

Se puede comprobar que el anterior discriminante es siempre negativo, pues el polinomio en c que lo define no tiene raíces reales, ya que $\text{Dis}(\text{Dis}(D_1(c, s), s), c) < 0$, acotando sus raíces reales en ninguna o 4. Sin embargo, se puede ver que $\text{Dis}(D_1(c, s), s)$ es negativo para $c \rightarrow \pm\infty$, y que además solo tiene un máximo relativo (y absoluto) cuya imagen es estrictamente negativa. Por tanto, como D_1 es un polinomio de tercer grado en s , tiene una sola raíz real en s . Pero, esas raíces solo cortan a las curvas A_i , $i = 1, 2$ únicamente en (c^*, s^*) , pues $\text{res}(\text{res}(D_1(c, s), P_1^*(s), s), P_2^*(c), c) = 0$ siendo c^* y s^* las únicas raíces de $\text{res}(D_1(c, s), P_1^*(s), s)$ y $\text{res}(D_1(c, s), P_2^*(c), c)$, respectivamente. Para el resto de valores $(c, s) \in \mathbb{R}^2$ puede demostrarse que $D_1(c_1, s) > A_i(c_1, s)$ para $c_1 > c^*$ y que $D_1(c_1, s) < A_i$ para $c_1 < c^*$ para $i = 1, 2$.

Estudiemos ahora la curva D_2 . Su discriminante con respecto a la variable c viene

dado por,

$$\text{Dis}(D_2(c, s), c) = \alpha_0 d_{21}(s) d_{22}^2(s) d_{23}^3(s),$$

con $\alpha_0 = 204877012038451200000 > 0$ y $d_{2i}(s)$, para $i = 1, 2, 3$, polinomios reales de variable real s ,

$$\begin{aligned} d_{21}(s) = & 695918709 + 1328288220s + 1729573411s^2 + 4059678628s^3 + 1280057526s^4 \\ & + 2160459976s^5 + 4960871884s^6 - 2253805200s^7 + 3390049800s^8 \\ & - 487728000s^9 + 367804800s^{10} - 23328000s^{11} + 11664000s^{12}, \end{aligned}$$

un polinomio sin raíces reales,

$$d_{22}(s) = 16767 + 29606s - 12083s^2 - 4040s^3 + 20160s^4,$$

y

$$d_{23}(s) = 16767 + 58822s + 76402s^2 + 22512s^3 + 84672s^4.$$

También es directo comprobar que d_{23} no tiene raíces reales. Estas comprobaciones son directas mediante el método de Sturm (Nota C.3.3). Finalmente, si veremos que d_{22} tiene raíces reales y trataremos de acotarlas, también haciendo uso del método de Sturm para ver que las raíces no están en \mathcal{A} . Primero, se puede probar que $\text{Dis}(d_{22}(s), s) < 0$ y, por tanto, si tiene raíces reales, debe tener 2. En efecto, a partir del método de Sturm se determina que tiene 2 raíces reales. Además, el método nos permite acotar las raíces a los siguientes intervalos:

$$s_1 \in [\underline{s}_1, \bar{s}_1] = \left[-\frac{636}{625}, -\frac{407}{400} \right] := I_1, \quad s_2 \in [\underline{s}_2, \bar{s}_2] = \left[-\frac{2627}{5000}, -\frac{5253}{10000} \right] := I_2.$$

Definamos ahora las siguientes cotas inferiores para la curva A_2 en I_1 e I_2 , respectivamente,

$$M_1 := \min_{s \in I_1} \{c \in \mathbb{R} : A_2(c, s) = 0\} = 3049/200 \in \mathbb{Q},$$

$$M_2 := \min_{s \in I_2} \{c \in \mathbb{R} : A_2(c, s) = 0\} = 41771/5000 \in \mathbb{Q},$$

tal que dichos mínimos se alcanzan en \bar{s}_1 y \bar{s}_2 , respectivamente. Se comprueba que

$$c^* < 6 < \min_{s \in I_1} \{c \in \mathbb{R} : D_2(c, s) = 0\} < \max_{s \in I_1} \{c \in \mathbb{R} : D_2(c, s) = 0\} < 7 < M_1,$$

$$c^* < 1 < \min_{s \in I_2} \{c \in \mathbb{R} : D_2(c, s) = 0\} < \max_{s \in I_2} \{c \in \mathbb{R} : D_2(c, s) = 0\} < 2 < M_2,$$

entonces concluimos que las bifurcaciones no están en \mathcal{A} .

Por otro lado, para los valores de los parámetros en los que el discriminante anterior tiene signo constante, el polinomio $D_2(c, s)$ tiene solo 1 raíz y coincide con las curvas $D_1(c, s) = 0$ y A_i para $i = 1, 2$ solamente en el punto (c^*, s^*) , utilizando los mismos argumentos para la resultantes de $D_1(c, s)$ con los polinomios P_1^* y P_2^* . Además, $D_2(c_1, s) < A_i(c_1, s)$ para $c_1 > c^*$ y que $D_2(c_1, s) < A_i$ para $c_1 > c^*$ para $i = 0, 1, 2$.

Consideremos ahora el caso de solitones débiles, es decir, aquellos puntos del espacio de parámetros que residen en la recta A_2 . En ese caso,

$$D'(u) = \tilde{I}_c(u) = -\frac{12}{35}u^3 + \frac{3}{490}(38 + 3c)u^2 + \frac{1}{3430}(-1018 - 41c - 3c^2)u - \frac{2921}{48020} + \frac{7919c}{96040} + \frac{11c^2}{24010} + \frac{3c^3}{96040}.$$

Probaremos que el polinomio anterior tiene solo una raíz real en (\bar{u}, ∞) . Es un polinomio cúbico tal que

$$\text{Dis}(\tilde{I}_c(u), u) = \alpha_1 \tilde{D}_1(c),$$

tal que $\alpha_1 < 0$ y $\tilde{D}_1(c) > 0 \forall c \in \mathbb{R}$. Por tanto, el signo del discriminante es constante y el coeficiente que acompaña al término de mayor orden no se anula, cumpliendo las hipótesis (ii) y (iii) del Lema C.2.3. Además, $\tilde{I}_c(\bar{u})$ es un polinomio de tercer grado en c , con una sola raíz real que coincide con c^* . Es decir, que se cumple la condición (iv) del Lema C.2.3 para todo el dominio en el que existen solitones débiles. Finalmente, $\tilde{I}_1(u)$ tiene una sola raíz en $(\bar{u}(1), \infty)$ y lo extendemos a $\tilde{I}_{\bar{c}}(u)$ en $(\bar{u}(\bar{c}), \infty)$ para cualquier $\bar{c} \in \mathbb{R} \setminus \{c^*\}$ por el Lema (C.2.3), y concluimos. \square

El resumen del comportamiento de las curvas $D_1(c, s) = 0$ y $D_2(c, s) = 0$ se puede observar en la Figura 2.9

Como resultado directo de este Lema, podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 2.4.9. *Los solitones, como soluciones fuertes y débiles, crecen monótonamente desde el nivel constante s hasta su cresta/depresión con un solo punto de inflexión a cada lado de su cresta/depresión.*

Demostración. Se prueba usando el Lema 2.4.8 y la ecuación de la trayectoria (2.44). \square

2.5. Teorema final

Finalmente, todos los resultados anteriores correspondientes a soluciones de la ecuación de Constantin–Lannes (2.1) correspondientes a ondas viajeras, se resumen

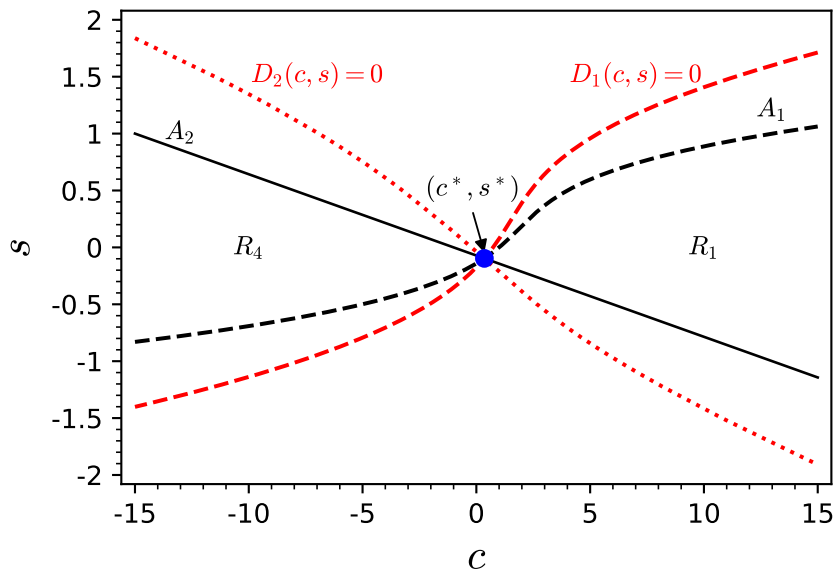


Figura 2.9: Comparación del comportamiento de las curvas $D_i(c, s) = 0$, dadas por (2.47) y (2.48), y A_i , definidas en (2.21), con $i = 1, 2$.

en el siguiente teorema.

Teorema 2.5.1 (Soluciones para ondas viajeras en la ecuación de Constantin–Lannes). *Para cada valor de la velocidad $c \in \mathbb{R} \setminus \{c^*\}$ existen soluciones para ondas viajeras solitarias y periódicas débiles y 2-veces diferenciables de la ecuación (2.1). Pueden obtenerse ondas periódicas también para $c = c^*$, con $c^* \approx 0.35328$ que es la única raíz del polinomio $P_2^*(c) = 3c^3 + 30c^2 + 1031c - 368$.*

Además, las ondas viajeras solitarias como soluciones de (2.2) se caracterizan por dos constantes: la velocidad de la onda c y el nivel de agua sin perturbar s . Esta caracterización nos permite distinguir diferentes regiones del espacio determinado por este par de parámetros $(c, s) \in \mathbb{R}^2$, en las que podemos clasificarlas asociados de la forma siguiente:

- (i) Ondas viajeras solitarias en $C^1(\mathbb{R})$ de soporte compacto en \mathbb{R} a lo largo de la recta $c + 1 + 14s = 0$.
- (ii) Ondas viajeras solitarias en $C^2(\mathbb{R})$ de elevación cuya amplitud (absoluta), para E fijo,
 - crece de manera estricta con c en (I).
 - decrece de manera estricta con c en (II) y (III).
- (iii) Ondas viajeras solitarias en $C^2(\mathbb{R})$ de depresión cuya amplitud (absoluta), para E fijo,
 - crece de manera estricta con c en (V).
 - decrece de manera estricta con c en (IV).

Todas las ondas viajeras solitarias son simétricas con respecto a su cresta/depresión, y a cada lado de esta cresta/depresión son monótonas y “decrecen” exponencialmente hasta s .

El Teorema 2.5.1 puede resumirse en la Fig. 2.10, inspirada en la Figura 1 del artículo original de A. Gasull y A. Geyer [11] en el que se expone el análisis desarrollado en este trabajo.

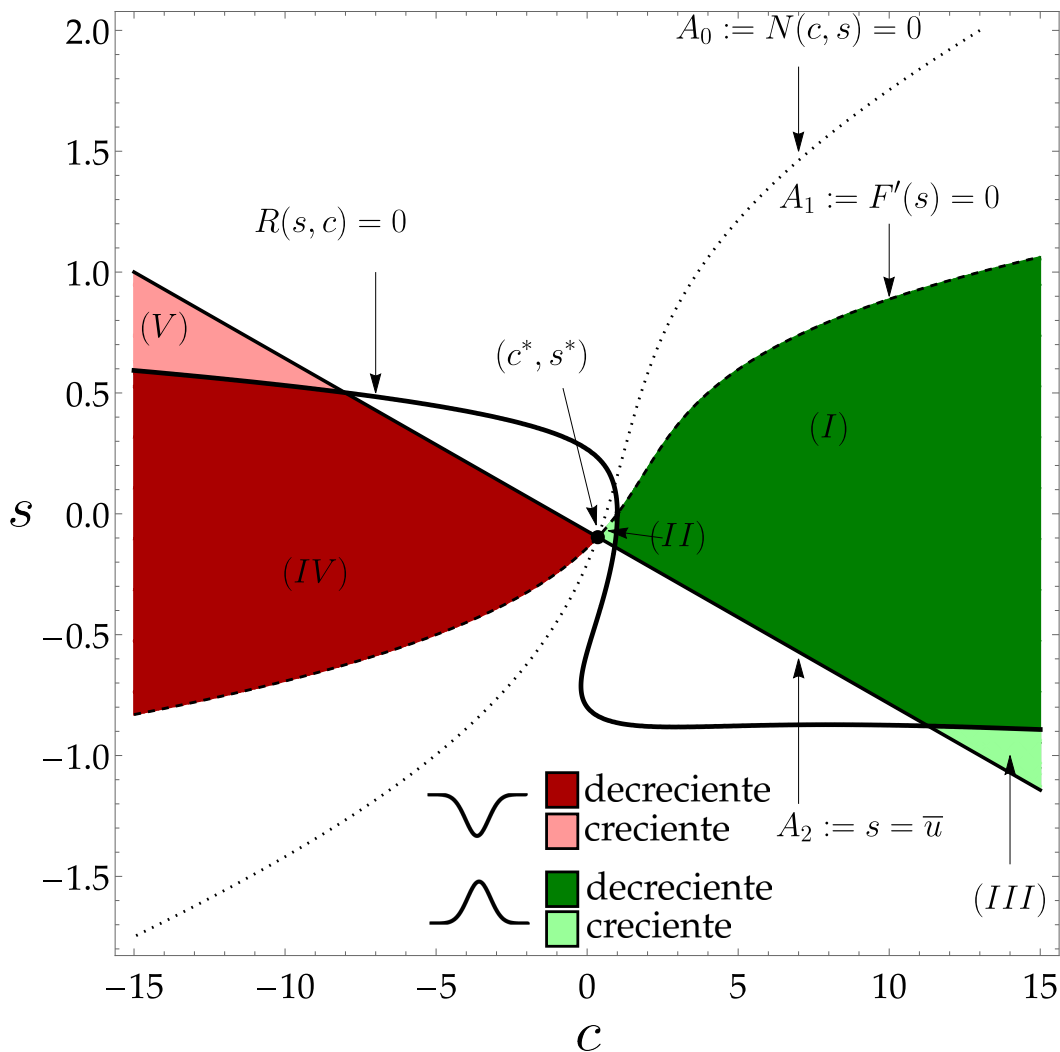


Figura 2.10: Resumen de los resultados del Teorema 2.5.1 en el espacio de parámetros formado por los puntos $(c, s) \in \mathbb{R}^2$.

Apéndices

Apéndice A

Ecuaciones diferenciales

A.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

En este capítulo se recordará el concepto de ecuación diferencial ordinaria, que se ha llamado EDO a lo largo del trabajo, así como las herramientas básicas necesarias que nos permitirán dar contexto al estudio anterior. No se tratará así de detallar un curso sobre ecuaciones diferenciales, sino de dar contexto al estudio llevado a cabo en dos ecuaciones concretas de este tipo.

Para comenzar, recordemos que una ecuación diferencial, o abreviadamente ED, es una ecuación tal que sus incógnitas son funciones, y en ella aparecen explícitamente las derivadas de alguna de ellas. Un ejemplo sencillo sería pensar una función real de variable real, $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, i.e., ella y su primera derivada son continuas, y por ejemplo, proponer la siguiente ecuación,

$$x'(t) = -\lambda x(t), \tag{A.1}$$

donde x' es la primera derivada y $\lambda \in \mathbb{R}^+$ una constante positiva.

La solución de la ecuación (A.1) es muy conocida, y si le damos a la función x la interpretación de número de núcleos radiactivos es una muestra, uno la llamaría como *ley de desintegración radiactiva*. Sin embargo, se ha necesitado mucho trabajo por parte de matemáticos desde el siglo XVII para crear la teoría necesaria para poder conocer la existencia, unicidad, continuidad y otros aspectos esenciales sobre las soluciones de este tipo de ecuaciones. Por supuesto, que no se nos olvide, hay métodos establecidos que a uno le permiten identificar y dar explícitamente las soluciones de una ecuación diferencial si es que es posible. Todo esto (y mucho más) lo aprende un alumno del Grado en Matemáticas en las asignaturas de Ecuaciones Diferenciales, o Ampliación de Ecuaciones Diferenciales. Por lo que se tratará de resumir y escoger los conceptos fundamentales impartidos en estas asignaturas para fundamentar este campo de estudio.

Definición A.1.1. Se denomina ecuación diferencial ordinaria (EDO) a una ecuación del tipo $g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$ con $x \in \mathcal{C}^n(I)$ una función de clase- n en $I \subseteq \mathbb{R}^n$ y $g : A \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice además que n es el orden de la EDO.

Definición A.1.2. Toda función $x \in \mathcal{C}^n(I)$ que cumple la ecuación de la definición anterior se dice que es una solución de la EDO.

Definición A.1.3. Se dice que una EDO de orden n está en forma explícita si está escrita de la forma

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)),$$

con $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, denominado campo de pendientes, tal que $\mathring{D} \neq \emptyset$.

Definición A.1.4. Se dice que una EDO es autónoma si no depende explícitamente de la variable independiente, es decir, es de la forma $h(x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$, con h una función real definida en \mathbb{R}^{n+1} .

La ecuación (A.1) es una EDO de primer orden autónoma en forma explícita.

A.1.1. Existencia, unicidad y dependencia continua de las condiciones iniciales

Definición A.1.5. Sea un sistema de EDOs de primer orden en forma explícita, cuyo campo de pendientes viene determinado por una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $A = (a_1, a_2) \times A_n$ abierto tal que $A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto. Un problema de valor inicial (PVI) viene dado por una ecuación diferencial del tipo anterior, y una condición inicial $(t_0, x_0) \in (t_0 - a, t_0 + a) \times \mathcal{B}(x_0, b) \subseteq A$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Es decir, un PVI es un par del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Definición A.1.6. Toda función $x \in \mathcal{C}^n(I)$ que cumple el PVI (A.2) se dice que es una solución del mismo.

Definición A.1.7. Un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un punto de equilibrio o un punto crítico de un sistema de EDOs autónomo, $x'(t) = f(x(t))$, si anula el campo de pendientes, i.e., $f(x^*) = 0$. Equivalentemente, que $x(t) = x^*$ es solución.

Definición A.1.8 (Homeomorfismos. Equivalencia topológica). Sea X un espacio métrico y sean A y B subconjuntos de X . Un homeomorfismo es una aplicación $h : A \rightarrow B$ continua y biyectiva tal que $h^{-1} : B \rightarrow A$ es continua. Se dice que dos subconjuntos del espacio métrico X , sean A y B son homeomorfos o topológicamente equivalentes, si existe un homeomorfismo entre ambos.

Definición A.1.9 (Equivalencia topológica en sistemas autónomos). Dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (\text{A.3})$$

y

$$x'(t) = g(x(t)), \quad (\text{A.4})$$

se dicen que son *topológicamente equivalentes* en un entorno del origen o que tienen cualitativamente la misma estructura cerca del origen si existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$, con U y V conjuntos abiertos que contienen al origen, y que lleva las trayectorias solución de (A.3) en U a trayectorias solución de (A.4) en V y preserva sus orientaciones, tal que si una trayectoria se dirige de x_1 a x_2 en U , entonces, su correspondiente imagen consiste en una trayectoria que se dirige de $H(x_1)$ a $H(x_2)$ en V . Si, además, H preserva la parametrización por la variable t , entonces los sistemas (A.3) y (A.4) se dice que son *topológicamente conjugados* en un entorno del origen.

Teorema A.1.10 (Picard–Lindelöf–Lipschitz (Existencia y unicidad local de soluciones del PVI)). Consideremos el PVI (A.2), siendo $f : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y lipschitziana respecto de la segunda variable en A . Si definimos $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in B\}$, con $B = [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathcal{B}[x_0, b] \subseteq A$, y $\delta = \min\{a, b/M\}$; existe una única solución para el PVI definida en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Teorema A.1.11 (Existencia y unicidad global de soluciones). Sea f continua y lipschitziana respecto de la segunda variable en $A = [a_1, a_2] \times \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $(t_0, x_0) \in A$, existe una única solución del PVI definida en $[a_1, a_2]$.

Demostraciones de los teoremas anteriores, así como discusiones más detalladas de los mismos, pueden encontrarse en [31]

Para estudiar la dependencia de las soluciones sobre las condiciones iniciales es imprescindible introducir el concepto de solución maximal.

Definición A.1.12. Consideremos dos soluciones x y \tilde{x} del PVI (A.2) en los intervalos $I_1 \subseteq I$ e $I_2 \subseteq I$, respectivamente, tales que $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Entonces, se dice que \tilde{x} prolonga a x por la derecha si,

$$x \equiv \tilde{x} \text{ en } I_1 \cap I_2 \quad \wedge \quad \sup(I_1) \in \overset{\circ}{J}.$$

Equivalentemente, se dice que \tilde{x} es una prolongación por la izquierda de x .

Además, se dirá que \tilde{x} prolonga a x , cuando la prolonga por la izquierda y por la derecha simultáneamente.

Definición A.1.13. Se dice que una solución x es maximal cuando no admite prolongaciones.

Teorema A.1.14 (Dependencia de las condiciones iniciales). Sea $f \in \mathcal{C}(A)$ lipshitziana respecto de la segunda variable. Dado $(t_0, x_0) \in A$, denotemos $x(t; t_0, x_0)$ a la solución (maximal) que pasa por dicho punto y sea $[t_0, T)$ su intervalo de definición a la derecha de t_0 . Entonces, para todo $t_0 < t_1 < T$ y $\varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, t_1)$ tal que $x(t; \tau, \psi)$ está definida en $[t_0, t_1]$ y

$$|x(t; t_0, x_0) - x(t; \tau, \psi)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_1];$$

siempre que

$$|\tau - t_0| < \delta(\varepsilon, t_1), \quad |x_0 - \psi| < \delta(\varepsilon, t_1).$$

En [31] se puede encontrar una prueba para el teorema anterior así como resultados previos para el desarrollo de esta.

A.2. Resultados para sistemas de ED lineales

Antes de comenzar propiamente con los sistemas de ED, recordaremos algunos conceptos básicos sobre operadores lineales que necesitaremos utilizar.

Las pruebas de los resultados siguientes pueden encontrarse, por ejemplo, en [27].

Definición A.2.1. Definiremos la norma de un operador lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ como

$$\|T\| = \max_{|x| \leq 1} |T(x)|,$$

donde, por ejemplo, hemos utilizado la norma euclídea, $|\cdot|$, para los puntos de \mathbb{R}^n (recordemos que en \mathbb{R}^n todas las normas son equivalentes).

Definición A.2.2. Una sucesión de operadores lineales $\{T_k\}_k, T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ se dice que converge a otro operador lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T,$$

esto es, $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, tal que para $k \geq N$ se tiene que $\|T - T_k\| < \varepsilon$.

Teorema A.2.3. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $t_0 > 0$, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

es absoluta y uniformemente convergente para todo $t \in \mathbb{R}^n$ tal que $|t| \leq t_0$.

Definición A.2.4. Definiremos la exponencial de un operador lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ como la siguiente serie absolutamente convergente,

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

Nota A.2.5. Una matriz $n \times n$, A , con coeficientes reales, i.e., $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, define un operador lineal que actúa sobre \mathbb{R}^n . Como consecuencia, utilizando la definición anterior, para $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Además, $e^{At} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La exponencial de operadores lineales tiene algunas propiedades [27]:

- (i) Si $P, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $S = PTP^{-1}$, entonces $e^S = Pe^T P^{-1}$.
- (ii) Se sigue de lo anterior, que si $PAP^{-1} = \text{diag}(\lambda_j)$ con $j = 1, \dots, n$, entonces, $e^{At} = P \text{diag}(e^{\lambda_j t}) P^{-1}$.
- (iii) Si $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ conmutan, i.e., $ST = TS$, entonces $e^{S+T} = e^S e^T = e^T e^S$.
- (iv) Como consecuencia del apartado anterior, si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.
- (v) Si

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

- (vi) Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición A.2.6. Diremos que una EDO de primer orden escrita en forma explícita es lineal si la función f que aparece en la Definición A.1.5 es lineal, y por tanto, $f \equiv A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Teorema A.2.7 (Teorema fundamental de los sistemas lineales). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces el PVI

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

para $t_0, t \in I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in B \subseteq \mathbb{R}^n$, tiene solución maximal única y viene dada por

$$x(t) = x_0 e^{A(t-t_0)}, \quad \forall t \in I. \quad (\text{A.6})$$

La prueba se sigue de demostrar que, efectivamente, (A.6) es solución y la unicidad viene garantizada por los teoremas de la sección anterior, que se cumplen automáticamente por ser lineal el campo de pendientes.

A.2.1. Sistemas de ED lineales planos

Definición A.2.8. Diremos que un sistema de ED lineal $x'(t) = Ax(t)$ es plano si $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y, por tanto, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Es fácil comprobar que el origen es siempre un punto de equilibrio del sistema lineal (A.5). Para calcular la naturaleza de este punto de equilibrio el procedimiento a seguir será estudiar los autovalores y autovectores del endomorfismo definido por la matriz A.

Para clasificar los diferentes puntos de equilibrio de un sistema lineal, se escribirá la matriz A como: $A = PBP^{-1}$, tal que esta matriz B tendrá una de las siguientes formas:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

con $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, a, b \in \mathbb{R}$. Obviaremos el caso trivial en el que la matriz B es idénticamente nula.

Aplicando el Teorema A.2.7 y teniendo en cuenta las diferentes formas de (A.7) y las propiedades de la exponencial de matrices descritas en la Nota A.2.5, las soluciones para los diferentes sistemas lineales $x'(t) = Bx(t)$ vendrán dadas por:

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} x_0, \quad x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0, \quad x(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} x_0, \quad (\text{A.8})$$

respectivamente.

Definición A.2.9. Se dirá que el origen $(0, 0)$ de un sistema lineal y plano de ecuaciones diferenciales es un punto de equilibrio de tipo

- (i) *punto de silla,*
- (ii) *nodo estable,*
- (iii) *nodo inestable,*
- (iv) *foco estable,*
- (v) *foco inestable,*
- (vi) *centro,*

cuando es topológicamente conjugado al sistema $x'(t) = Bx(t)$ con

- (i) $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, con $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.
- (ii) $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$; ó si $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, con $\lambda < 0$.
- (iii) $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, con $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$; ó si $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, con $\lambda > 0$.
- (iv) $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, con $a < 0$.
- (v) $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, con $a > 0$.
- (vi) $B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

El sentido de giro de las trayectorias alrededor de un punto de equilibrio de tipo centro o espiral vendrá dado por el signo de b . De hecho,

- (i) si $b < 0$, las trayectorias entorno al punto de equilibrio giran en el sentido de las agujas del reloj.
- (ii) si $b > 0$, las trayectorias entorno al punto de equilibrio giran en sentido contrario a las agujas del reloj.

Este resultado es consecuencia directa de las trayectorias solución en (A.8).

El centro $(0, 0)$ es un punto de equilibrio no aislado en los casos que no se contemplan en la Definición A.2.9.

Teorema A.2.10 (Clasificación de la naturaleza del punto de equilibrio no aislado de un sistema lineal plano). Consideremos el PVI de un sistema de EDs lineal plano A.5. Sea $\Delta = \det A$ y $\tau = \text{Tr}A$. Entonces,

- (i) Si $\Delta < 0$, el sistema lineal (A.5) tiene un punto de silla en el origen.
- (ii) Si $\Delta > 0$ y $\tau^2 - 4\Delta \geq 0$ entonces el sistema lineal (A.5) tiene un nodo en el origen; que es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.
- (iii) Si $\Delta > 0$ y $\tau^2 - 4\Delta < 0$ y $\tau \neq 0$ entonces el sistema lineal (A.5) tiene un foco en el origen; que es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.
- (iv) Si $\Delta > 0$ y $\tau = 0$ entonces el sistema lineal (A.5) tiene un centro en el origen.

Una prueba de este teorema puede encontrarse en [27].

Definición A.2.11. Un nodo o foco estable del sistema lineal (A.5) se denominará *sumidero*, mientras que un nodo o foco inestable del sistema lineal (A.5) se denominará *fuentes*.

A.3. Resultados para sistemas de ED no lineales

Como consecuencia de la linealidad, se ha visto en el Teorema A.2.7 que el PVI descrito en (A.5) tiene garantizada la existencia y unicidad de soluciones.

Sin embargo, esto no se garantiza, de manera general, cuando el PVI está definido sobre una EDO no lineal. Por ejemplo, sea el PVI para una EDO no lineal autónoma

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

siendo $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función que, a menos que se indique lo contrario, será continua y por lo general, no lineal. En general, el sistema (A.9) no puede resolverse (sabemos que si es lineal sí, pero si no lo es, no está garantizada su resolución). Sin embargo, los resultados principales en este contexto generalizado consisten en que el comportamiento topológico del sistema (A.9) en las vecindades de los puntos de equilibrio, i.e., aquellos puntos x^* tales que $f(x^*) = 0$, generalmente, se comportan como el sistema lineal (A.5) con $A = Df(x^*)$, la matriz Jacobiana en dicho punto. En lo que sigue y en los dos primeros capítulos de este trabajo, se hará y se ha hecho referencia solamente a sistemas autónomos como el definido en (A.9).

Esta sección se desarrollará haciendo uso de la teoría introducida en [27]. Por simplicidad, a partir de ahora consideraremos que $t_0 = 0$.

Definición A.3.1 (Flujo asociado a una EDO autónoma). Sea B un abierto de \mathbb{R}^n y $f \in \mathcal{C}^1(B)$. Para $x_0 \in B$, sea $\phi(t, x_0)$ la solución maximal del PVI (A.9) en el intervalo maximal $I(x_0) \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, para $t \in I(x_0)$, al conjunto de aplicaciones ϕ_t definidas como

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

se le denomina flujo de la ecuación diferencial (A.9), o el flujo definido por la ecuación diferencial (A.9); o el flujo del campo de vectores definido por f . Además, el flujo debe cumplir las siguientes propiedades $\forall x \in B$:

- (i) $\phi_0(x) = x$.
- (ii) $\phi_s \circ \phi_t(x) = \phi_{s+t}(x)$, para todo $t \in I(x_0)$ y $s \in I(\phi_t(x_0))$.

Se sigue directamente de la definición anterior que $\phi_t \circ \phi_{-t}(x) = \phi_{-t} \circ \phi_t(x) = x$ $\forall x \in B$ y $\forall t \in I(x_0)$.

Definición A.3.2. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene a x_0 , sea $f \in \mathcal{C}^1(B)$ y sea $\phi_t : B \rightarrow B$ el flujo del sistema no lineal (A.9) definido $\forall t \in \mathbb{R}$. Entonces, el conjunto $S \subset B$ se dice que es invariante respecto del flujo si $\phi_t(S) \subset S$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Además, se dice que S es positivamente (negativamente) invariante respecto del flujo si $\phi_t(S) \subset S$ $\forall t \geq 0$ ($\forall t \leq 0$).

A.3.1. Resultados locales

Definición A.3.3. Sea $x^* \in \mathbb{R}^n$ un punto de equilibrio del sistema (A.9). Se dice que es hiperbólico si todos los autovalores del sistema lineal (A.5) con $A = Df(x^*)$ tiene parte real no nula. Al sistema lineal (A.5) con $A = Df(x^*)$ se le denomina linealización de (A.9).

Definición A.3.4 (Variedad diferenciable n -dimensional). Una variedad diferenciable n -dimensional (o variedad de clase \mathcal{C}^k), \mathcal{M} , es un espacio métrico conexo con un recubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}$, i.e., $\mathcal{M} = \cup_\alpha U_\alpha$, tal que

- (i) $\forall \alpha, U_\alpha$ es homeomorfo a la bola unidad en \mathbb{R}^n , $\mathcal{B}_n \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.
- (ii) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, y existen homeomorfismos $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathcal{B}_n$ y $h_\beta : U_\beta \rightarrow \mathcal{B}_n$, entonces $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son subconjuntos de \mathbb{R}^n y la aplicación

$$h := h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

es diferenciable (o de clase \mathcal{C}^k) y $\forall x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, el determinante de su matriz Jacobiana en ese punto es no nulo, i.e., $Dh(x) \neq 0$.

Al par (U_α, h_α) se le denomina carta, y al conjunto de todas las cartas se le denomina comúnmente atlas. Además, la variedad diferenciable \mathcal{M} se dice que es orientable si existe un atlas tal que $\det Dh_\alpha \circ h_\beta^{-1}(x) > 0$ para todo α, β y $x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Teorema A.3.5 (Teorema de la variedad estable). *Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto que contenga al origen, sea $f \in C^1(B)$ y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (A.9). Supongamos que $f(0) = 0$ (es decir, el origen es un punto de equilibrio del sistema) y que $Df(0)$ tiene k autovalores con parte real negativa y $n - k$ con parte real positiva. Entonces, existe una variedad diferenciable k -dimensional S tangente al subespacio estable E^s del sistema linealizado (A.5) en 0 tal que $\forall t \geq 0, \phi_t(S) \subset S$ y $\forall x_0 \in S,$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

Además, existe una variedad diferenciable $(n - k)$ -dimensional U tangente al subespacio estable E^u del sistema linealizado (A.5) en 0, tal que $\forall t \leq 0, \phi_t(U) \subset U$ y $\forall x_0 \in U,$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

Una demostración para el Teorema de la variedad estable se puede encontrar en [26, 27].

Definición A.3.6. Sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (A.9). Las variedades globalmente estables e inestables de (A.9) en el origen (suponiendo que es punto de equilibrio), se definen como

$$W^s(0) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(S),$$

y

$$W^u(0) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(U),$$

respectivamente, con S y U las variedades diferenciables locales del teorema anterior.

Se puede demostrar que las variedades $W^s(0)$ y $W^u(0)$ son únicas e invariantes respecto del flujo ϕ_t . Además, $\forall x \in W^s(0)$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = 0$ y que $\forall x \in W^u(0)$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = 0$.

Como los sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales (A.9) y (A.5) son topológicamente equivalentes si cumplen la Definición A.1.9, entonces el siguiente resultado es fundamental.

Teorema A.3.7 (Teorema de Hartman–Grobman). *Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene al origen, sea $f \in C^1(B)$ y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (A.9). Supongamos que*

$f(0) = 0$ (es decir, el origen es un punto de equilibrio del sistema) y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene autovalores con parte real nula. Entonces, existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$ con U y V abiertos de \mathbb{R}^n que contienen al origen, tales que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero, tal que $\forall x_0 \in U$ y $\forall t \in I_0$,

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0).$$

Para una descripción de la demostración del Teorema de Hartman–Grobman el lector puede consultar [27], donde los detalles que no se demuestran se pueden encontrar en el Capítulo IX de [15].

Por tanto, (A.9) y (A.5) son topológicamente conjugados.

Definición A.3.8. Si un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$ es diferenciable (de clase C^k) y también lo es (de clase C^k) $H^{-1} : V \rightarrow U$, se dirá que es un difeomorfismo (de clase C^k).

Si, además de las condiciones del Teorema de Hartman–Grobman A.3.7 tenemos condiciones adicionales de regularidad en f , entonces obtenemos que el homeomorfismo entre el sistema y su linealizado es un difeomorfismo. Esto se recoge en el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en [14].

Teorema A.3.9 (Teorema de Hartman). Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene a x_0 , sea $f \in C^2(B)$ y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (A.9). Supongamos que $f(x_0) = 0$ (es decir, el x_0 es un punto de equilibrio del sistema) y que los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la matriz $A = Df(0)$ no tienen parte real nula. Entonces, existe un difeomorfismo de clase C^1 , $H : U \rightarrow V$ con U un abierto de \mathbb{R}^n que contienen a x_0 y V un abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen, tales que para cada $x \in U$, existe un intervalo abierto $I(x) \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero, tal que $\forall x \in U$ y $\forall t \in I(x)$,

$$H \circ \phi_t(x) = e^{At} H(x).$$

A.3.2. Algunas definiciones y resultados sobre estabilidad

Definición A.3.10. Sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (A.9) definido $\forall t \in \mathbb{R}$, se dice que un punto de equilibrio x^* del sistema no lineal (A.5) es estable si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathcal{B}(x^*, \delta)$ y $t \geq 0$ se tiene que $\phi_t \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$. En caso contrario se dirá que x^* es inestable.

Definición A.3.11. Sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (A.9) definido $\forall t \in \mathbb{R}$, se dice que un punto de equilibrio x^* del sistema no lineal (A.5) es asintóticamente estable si es estable y $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathcal{B}(x^*, \delta)$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x^*.$$

Se sigue del Teorema de la Variedad Estable (A.3.5) y del Teorema de Hartman–Grobman (A.3.7) que cualquier punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal A.9 es asintóticamente estable o inestable. En particular, en los sistemas planos, los sumideros son asintóticamente estables y las fuentes y los puntos de silla son asintóticamente inestables.

Otra consecuencia es que los puntos de equilibrio x^* que pueden ser estables y no asintóticamente estables son aquellos cuya matriz Jacobiana $Df(x^*)$ tiene al menos un autovalor con parte real nula y el resto tienen parte real menor o igual a cero. Este resultado se recoge en el siguiente teorema, donde una demostración formal del mismo puede leerse en [16].

Teorema A.3.12. *Si x^* es un punto de equilibrio estable del sistema no lineal (A.9), entonces ningún autovalor de $Df(x^*)$ tiene parte real positiva.*

Definición A.3.13. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y sean $f \in C^1(B)$ y $V \in C^1(B)$ y ϕ_t el flujo del sistema no lineal (A.9). Entonces, dado $x \in B$, se define la derivada de V a lo largo de la solución $\phi_t(x)$ como

$$V'(x) = \left. \frac{dV}{dx}(\phi_t(x)) \right|_{t=0} = DV(x)f(x).$$

La última igualdad se sigue de la regla de la cadena. Si $V'(x) \leq 0 \forall x \in B$, entonces V decrece a lo largo de la solución $\phi_t(x_0)$ para $x_0 \in B$ en $t = 0$. Además, en \mathbb{R}^2 , si $V'(x) \leq 0$ tal que la igualdad solo se da para el punto de equilibrio aislado $x = 0$, entonces para $C \geq 0$ pequeño, la familia de curvas $V(x) = C$ constituye una familia de curvas cerradas que encierran el origen (en un entorno del mismo) y las trayectorias solución de (A.9) cruzan esas curvas desde su exterior a su interior a medida que crece t , entonces, el origen de (A.9) es asintóticamente estable. Estas propiedades se resumen en el siguiente teorema, demostrado formalmente, por ejemplo, en [27].

Teorema A.3.14. *Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto que contiene a x^* . Sea $f \in C^1(B)$ tal que $f(x^*) = 0$. Además, supongamos que existe una función real $V \in C^1(B)$ que satisface $V(x^*) = 0$ y $V(x) > 0 \forall x \in B \setminus \{x_0\}$. Entonces,*

- (a) *si $V'(x) \leq 0 \forall x \in B$, x^* es estable.*
- (b) *si $V'(x) < 0 \forall x \in B \setminus \{x_0\}$, x^* es asintóticamente estable.*
- (c) *si $V'(x) > 0 \forall x \in B \setminus \{x_0\}$, x^* es inestable.*

Definición A.3.15 (Función de Liapunov). Una función que sigue las hipótesis del teorema anterior se dice que es una función débil de Liapunov si se da (a) pero no (b), y una función fuerte de Liapunov si se dan (a) y (b).

A.3.3. Teoremas globales de existencia y unicidad de soluciones

A continuación, se enunciarán resultados relacionados con la existencia y unicidad de soluciones en el caso no lineal.

Teorema A.3.16 (Teorema de Existencia Global para Sistemas No Lineales). *Para $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el PVI*

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{f(x(t))}{1+|f(x(t))|}, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

tiene solución única $x(t)$ definida $\forall t \in \mathbb{R}$. Además, (A.10) es topológicamente equivalente a (A.5).

Teorema A.3.17. *Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que satisface la condición de Lipschitz de manera global, i.e.,*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el PVI definido en (A.9) tiene una única solución $x(t)$ definida $\forall t \in \mathbb{R}$.

Los desarrollos de demostraciones para estos dos últimos teoremas se pueden leer en [27].

Además, una extensión del Teorema A.3.17 para variedades diferenciables compactas se enuncia en el Teorema siguiente, cuya demostración puede encontrarse en [13].

Teorema A.3.18 (Chillingworth). *Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable compacta y $f \in C^1(\mathcal{M})$. Entonces, para $x_0 \in \mathcal{M}$, el PVI definido por el sistema en (A.9) (extendida su definición a la variedad \mathcal{M}) y $x(0) = x_0$ tiene una única solución $x(t)$ definida $\forall t \in \mathbb{R}$.*

A.3.4. Conjuntos límite y atractores

Definición A.3.19. *Sea ϕ el flujo asociado a una EDO no lineal dada por (A.9). Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se define su órbita como el conjunto siguiente,*

$$O_{x_0} = \{\phi(t, x_0) : \forall t \in I_{x_0}\},$$

con $I_{x_0} \subseteq \mathbb{R}$ el intervalo de definición de la solución maximal. Cuando I_{x_0} no sea acotado superior o interiormente se definen las semiórbitas positivas y negativas como

$$O_{x_0}^+ = \{\phi(t, x_0) : \forall t \geq 0\} \quad \text{y} \quad O_{x_0}^- = \{\phi(t, x_0) : \forall t \leq 0\},$$

respectivamente.

Definición A.3.20. Un punto $p \in B$ es un punto ω -límite de la trayectoria $\phi(\cdot, x)$ del sistema (A.9) si existe una sucesión $\{t_n\}_n$ tal que $t_n \xrightarrow{n \uparrow \infty} \infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = p.$$

Similarmente, si existe una sucesión $\{t_n\}_n$ tal que $t_n \xrightarrow{n \uparrow \infty} -\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = q,$$

si $q \in E$, entonces se dice que el punto q es un punto α -límite de la trayectoria $\phi(\cdot, x)$ del sistema (A.9).

Al conjunto de los puntos ω -límite de una trayectoria Γ se denomina conjunto ω -límite de Γ y se denota por $\omega(\Gamma)$. De la misma forma, al conjunto de los puntos α -límite de una trayectoria Γ se denomina conjunto α -límite de Γ y se denota por $\alpha(\Gamma)$. Finalmente, al conjunto de todos los puntos límite de una trayectoria Γ , $\omega(\Gamma) \cup \alpha(\Gamma)$, se le denomina conjunto límite de Γ .

Los conjuntos $\omega(\Gamma)$ y $\alpha(\Gamma)$ son cerrados de B . Además, si la trayectoria Γ está contenida en un compacto de \mathbb{R}^n , $\omega(\Gamma)$ y $\alpha(\Gamma)$ son no vacíos, conexos y compactos de B . Además, sea $p \in \omega(\Gamma)$ y sea $\Gamma_p \equiv \phi(\cdot, p)$ la trayectoria que pasa por p , entonces $\Gamma_p \subset \omega(\Gamma)$. De igual forma, si $q \in \alpha(\Gamma)$, $\Gamma_q \subset \alpha(\Gamma)$. Además, $\omega(\Gamma)$ y $\alpha(\Gamma)$ son invariantes respecto del flujo ϕ_t .

Definición A.3.21. Un conjunto cerrado invariante $A \subset B$ se dice que es un conjunto atrayente de (A.9) si existe un entorno $U \subset A$ tal que $\forall x \in U, \phi_t(x) \in U \forall t \geq 0$ y $\phi_t(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} A$. Además, se define como atractor de un sistema no lineal autónomo como (A.9) como un conjunto atrayente que tiene una órbita densa.

A.3.5. Órbitas periódicas, ciclos límite y separatrices

Definición A.3.22. Un ciclo u órbita periódica de (A.9) es cualquier curva cerrada solución de (A.9) que no es un punto de equilibrio del sistema. Una órbita periódica Γ se llama estable si para cada $\varepsilon > 0$ existen un entorno U de Γ tal que $\forall x \in U, d(\Gamma_x^+, \Gamma) < \varepsilon$; i.e., si $\forall x \in U$ y $\forall t \geq 0, d(\phi_t(x), \Gamma) < \varepsilon$. Una órbita periódica se dice que es inestable si no es estable; y Γ se dice que es asintóticamente estable si es estable y si $\forall x \in U$, siendo U un entorno de Γ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(x), \Gamma) = 0.$$

Los ciclos u órbitas periódicas, al igual que los puntos de equilibrio, tienen variedades estables e inestables de manera local y global, simplemente generalizando el Teorema A.3.5 y las definiciones A.3.6 (véase Ref. [27]).

Definición A.3.23. Un ciclo límite Γ de un sistema plano no lineal (A.9) es un ciclo de (A.9) que se corresponde con el conjunto ω - o α -límite de alguna trayectoria solución de (A.9) diferente de la propia Γ . Si un ciclo Γ es el conjunto ω -límite (respectivamente, α -límite) de cada trayectoria en un entorno de Γ , se dice que Γ es un ciclo ω -límite (α -límite) o ciclo límite estable (ciclo límite inestable). Además, si Γ es un conjunto ω -límite de una trayectoria diferente a Γ y también un conjunto α -límite de otra trayectoria distinta a Γ , se dice que Γ es un ciclo límite semiestable.

Definición A.3.24. Consideremos un sistema no lineal plano (A.9) con $f \in C^1(B)$, con $B \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto tal que contiene a $x^* \in B$, que es un punto de silla de (A.9). Se llamará curva homoclínica a aquella trayectoria solución, $\Gamma \subset B$, que une x^* consigo mismo. Es decir, x^* es el conjunto α -límite y ω -límite de Γ .

En otras palabras, tendremos que Γ es una curva homoclínica si es solución de (A.9) que contiene al punto de silla $x^* \in B$ y parte de su imagen se corresponde con una curva cerrada simple que contiene a x^* . La unión de dicha curva cerrada simple y el punto de silla x^* se denomina curva separatriz.

Una curva homoclínica Γ cumple que $\Gamma \subset W^s(x^*) \cap W^u(x^*)$ con x^* el punto de silla.

Definición A.3.25. Consideremos un sistema no lineal plano (A.9) con $f \in C^1(B)$, con $B \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto tal que contiene a $x_1^*, x_2^* \in B$, que son puntos de silla de (A.9). Se llamará curva heteroclínica a aquella trayectoria solución, $\Gamma \subset B$, tal que une los puntos de silla, por ejemplo, x_1^* , es el conjunto α -límite de la curva y el otro, x_2^* , es el conjunto ω -límite de la curva.

A.3.6. Teoremas de Poincaré–Bendixon para sistemas planos

La teoría con respecto a los sistemas de ecuaciones diferenciales planos es más completa, de manera general, que en dimensiones superiores. Concretamente, en estos sistemas se pueden clasificar los tipos de conjuntos ω -límite que uno puede encontrar, dados por los Teoremas de Poincaré–Bendixon que se enunciarán a continuación y cuyas demostraciones pueden encontrarse, por ejemplo, en la p.18 de [26].

Teorema A.3.26 (Teorema de Poincaré–Bendixon). *Sea el sistema no lineal (A.9) un sistema plano. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f \in C^1(B)$. Sea Γ una trayectoria solución de (A.9), tal que $\Gamma^+ \subset K$ con $K \subset B$ un conjunto compacto. Entonces, si $\omega(\Gamma)$ no contiene ningún punto de equilibrio, Γ es una órbita periódica.*

Teorema A.3.27 (Teorema de Poincaré–Bendixon generalizado). *Asumamos las hipótesis del Teorema A.3.26 y que el sistema no lineal plano (A.9) tiene un número finito de puntos*

de equilibrio en $K \subset B$, conjunto compacto. Se sigue que $\omega(\Gamma)$ es o bien un punto de equilibrio de (A.9), una órbita periódica de (A.9), o que $\omega(\Gamma)$ es la unión (finita) de algunos de los puntos de equilibrio p_1, \dots, p_m de (A.9) y un número finito de ciclos límite y de conexiones homoclínicas y/o heteroclínicas de (A.9) cuyos conjuntos $\alpha(\Gamma), \omega(\Gamma) \subseteq \{p_1, \dots, p_m\}$.

El Teorema A.3.27 anterior puede generalizarse a variedades diferenciables 2-dimensionales (véase [27]).

Como consecuencia de los Teoremas de Poincaré–Bendixon, tenemos el siguiente resultado, que puede verse en [27] y una demostración suya en [16].

Teorema A.3.28. *Sea $f \in C^1(B)$ con $B \subset \mathbb{R}^2$ un abierto que contiene a una órbita periódica Γ del sistema no lineal (A.9), así como el interior de la misma U . Entonces U contiene al menos a un punto crítico.*

Finalmente, otra consecuencia muy importante del Teorema A.3.27 es que en sistemas planos no existe caos. Para una lectura más profunda sobre esta consecuencia y sobre cómo identificar y definir caos, se propone consultar [30].

A.3.7. Sistemas Hamiltonianos

En muchos sistemas físicos, las ecuaciones de Hamilton se convierten en una herramienta fundamental a la hora de describir su dinámica. En analogía a estas ecuaciones definiremos qué son los sistemas Hamiltonianos y su facilidad a la hora de encontrar soluciones en dichos sistemas de ecuaciones diferenciales, generalmente, no lineales.

Definición A.3.29. *Sea $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ un abierto en la topología usual de \mathbb{R}^{2n} y sea $H \in C^2(B)$ tal que $H = H(x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$. Un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo de la forma*

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (\text{A.11})$$

donde

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^\top, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)^\top,$$

se dice que es un **sistema Hamiltoniano** con n grados de libertad en B .

Bajo el concepto de sistema Hamiltoniano reside un sistema conservativo, es decir, la descripción de la dinámica de un sistema físico que conserva su energía. En este caso, la energía vendrá dada por la función Hamiltoniana, H , definida anteriormente. En concreto, veremos que efectivamente, la función H se mantiene constante a través de las trayectorias de (A.11).

Teorema A.3.30 (Conservación de la energía). Sea $H(x, y)$ la función Hamiltoniana del sistema Hamiltoniano (A.11). Entonces, H se mantiene constante a través de las trayectorias definidas por el sistema (A.11).

Demostración. En efecto, tomemos derivadas con respecto a la variable independiente t , entonces haciendo uso de la regla de la cadena,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} \stackrel{(A.11)}{=} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Es por tanto que H se mantiene constante a través de cualquier curva solución del sistema de ecuaciones diferenciales Hamiltoniano (A.11). \square

Definición A.3.31. Un punto de equilibrio x^* del sistema no lineal (A.9) en el que $Df(x^*)$ no tiene autovalores nulos se dice que es un punto de equilibrio no degenerado. En caso contrario, se dice que es degenerado.

Teorema A.3.32. Todo punto de equilibrio (x^*, y^*) no degenerado de un sistema Hamiltoniano plano (dado por (A.11) para $n = 1$) es (topológicamente) un punto de silla o un centro. Además, (x^*, y^*) es un punto de silla de (A.11) si y solo si es punto de silla de la función Hamiltoniana $H(x, y)$. Por otro lado, un máximo o mínimo estricto local de $H(x, y)$ se corresponde con un centro de (A.11).

La demostración del teorema anterior se basa esencialmente en que la matriz Jacobiana $Df(x^*)$ es esencialmente la matriz Hessiana de la función Hamiltoniana, $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j}\right)_{ij}$ con $z = (x, y)$. Al estudiar los posibles puntos de equilibrio en el caso no degenerado ser un centro o un punto de silla son las únicas posibilidades debido a la correspondencia biunívoca entre los anteriores tipos de puntos de equilibrio y los extremos locales o puntos de silla de H , respectivamente. Véase [27].

Definición A.3.33. Sea un sistema Hamiltoniano asociado a la EDO autónoma de segundo orden $x''(t) = f(x(t))$, tal que $f \in \mathcal{C}^1((a, b))$ con $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Sabemos que dicha EDO autónoma de segundo orden puede escribirse como el siguiente sistema Hamiltoniano correspondiente a un sistema autónomo no lineal plano

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = f(x(t)). \end{cases} \quad (A.12)$$

Supongamos que f es una fuerza conservativa, es decir,

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(s) ds,$$

tal que $U \in \mathcal{C}^2((a, b))$ se le denomina función potencial. Entonces, al sistema (A.12) se le denominará sistema Newtoniano con un grado de libertad y su función Hamil-

toniana vendrá dada por $H(x, y) = T(y) + U(x)$ con $T(y) = y^2/2$ y a T se le denomina función energía cinética.

Usualmente U es una función analítica. Lo asumiremos en adelante a menos que se indique lo contrario.

Teorema A.3.34 (Espacio de fases de un sistema Newtoniano con un grado de libertad). *Sea el sistema Newtoniano con un grado de libertad definido en (A.12). Entonces, un punto $(x^*, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema (A.12) si y solo si x^* es un punto crítico de la energía potencial U , es decir, es un cero de la fuerza conservativa f . Si x^* se corresponde con un máximo local estricto de la función analítica U , entonces $(x^*, 0)$ es un punto de silla de (A.12). Por otro lado, si x^* se corresponde con un mínimo local estricto de la función analítica U , entonces $(x^*, 0)$ es un centro de (A.12). Más aún, si x^* se corresponde con un punto de inflexión de la función analítica U , entonces $(x^*, 0)$ es una cúspide de (A.12). Finalmente, el espacio de fases de (A.12) es simétrico con respecto al eje x .*

En el Teorema A.3.34 se ha introducido la nomenclatura de cúspide. Este término hace referencia a un punto de equilibrio con dominio elíptico, este último consiste en regiones del espacio de fases, \mathbb{R}^2 , que son topológicamente equivalentes a regiones que contienen curvas homoclínicas anidadas o partes de ellas (véase con más detalle en [23, 27]).

A.4. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Se seguirán las definiciones de [10].

Definición A.4.1 (Ecuación diferencial en derivadas parciales). Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) a la ecuación de la forma

$$F(D^m u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad (\text{A.13})$$

tal que $x \in B \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, con $u \in C^m(B)$ la incógnita y $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R} \times B \rightarrow \mathbb{R}$.

Notad que en (A.13) se ha utilizado la notación

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u,$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un índice múltiple, tal que $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Definición A.4.2. Se llama orden de una EDP al orden superior de las derivadas parciales que figuran en la ecuación. En el caso de (A.13) diremos que es una EDP de orden m .

Definición A.4.3. Una EDP de orden m se dice lineal si se puede expresar de la forma,

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x),$$

para ciertas funciones a_α con $|\alpha| \leq m$. Se dice además que es homogénea si $f \equiv 0$. En otras palabras, una EDP de la forma (A.13) es lineal, cuando F es lineal sobre las derivadas parciales de la función incógnita.

Definición A.4.4. Cuando una EDP de orden m no cumple la definición anterior se dice que es no lineal. Además, podemos definir otros tres conceptos:

- (i) Se dice que una EDP de orden m es semilineal si viene definida por una ecuación del tipo

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0,$$

para ciertas funciones a_α definidas en \mathbb{R}^n con $|\alpha| = m$, mientras que a_0 es una función por lo general no lineal en el resto de derivadas.

- (ii) Se dice que una EDP de orden m es casi lineal si es de la forma

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) D^\alpha u(x) \\ + a_0(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \end{aligned}$$

para ciertas funciones a_α ($|\alpha| = m$) y a_0 funciones, por lo general, no lineales en el resto de derivadas.

- (iii) Se dice que una EDP de orden m es completamente no lineal si depende de forma no lineal en las derivadas de orden m .

A.4.1. Condiciones iniciales, de frontera, soluciones y problemas bien definidos en EDPs

Definición A.4.5. Sea una EDP de la forma (A.13) de orden m definida en una región B del espacio real correspondiente. Se denominará solución (fuerte) de la EDP (A.13) en una región B' de \mathbb{R}^n a una función $u \in C^m(B')$ tal que cumple la ecuación (A.13).

Definición A.4.6. Sea una EDP de la forma (A.13) de orden m definida en una región B del espacio real correspondiente sobre las variables $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Un problema

de valor inicial o PVI sobre la EDP (A.13) consiste en encontrar soluciones a

$$\begin{cases} F(D^m u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \\ \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, 0) = f_k(x), \quad 0 \leq k \leq m-1, \end{cases}$$

con f_k funciones arbitrarias definidas en \mathbb{R}^n sobre la variable x .

Definición A.4.7. Sea una EDP de la forma (A.13) de orden m definida en una región B del espacio real correspondiente sobre las variables $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (para las ecuaciones que vamos a tratar es suficiente). Un problema de valores en la frontera o PVF sobre la EDP (A.13) consiste en encontrar soluciones a

$$\begin{cases} F(D^m u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \\ \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(0, t) = g_k(t), \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(L, t) = h_k(t), \quad 0 \leq k \leq m-1, \end{cases}$$

con g_k, h_k funciones arbitrarias definidas en \mathbb{R} sobre la variable t .

Definición A.4.8. Sea una EDP de la forma (A.13) de orden m definida en una región B del espacio real correspondiente sobre las variables $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (para las ecuaciones que vamos a tratar es suficiente). Un problema de valor inicial con valores en la frontera o PVIF sobre la EDP (A.13) consiste en encontrar soluciones a

$$\begin{cases} F(D^m u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \\ \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, 0) = f_k(x), \quad 0 \leq k \leq m-1, \\ \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(0, t) = g_k(t), \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(L, t) = h_k(t), \quad 0 \leq k \leq m-1, \end{cases}$$

con f_k, g_k, h_k funciones arbitrarias.

De manera más general a los problemas anteriores se les engloba en la definición de problema de Cauchy para EDPs [28].

Definición A.4.9. Un problema de Cauchy de EDPs se dice estar bien definido si cumple que:

- (i) El problema tiene solución.
- (ii) La solución es única.
- (iii) La solución depende de manera continua de las condiciones (iniciales o de frontera) del problema.

La definición anterior se puede también extrapolar a las EDOs, a pesar de ser más común en la teoría de EDPs.

Hasta ahora el concepto de solución (fuerte) precisaba que la función solución fuera continua tanto ella misma como sus derivadas hasta el orden de la EDO o de la EDP. Sin embargo, cuando aparecen puntos en los que el problema deja de estar bien definido por alguna razón (usualmente, ausencia de la continuidad de la derivada de orden mayor), suele tratar de solucionarse introduciendo el concepto de *solución débil* (de soporte compacto), de forma que el problema está bien definido para las *derivadas débiles* en el sentido de las distribuciones. Para ello será necesario introducir algunos conceptos sobre espacios de Sobolev en el siguiente capítulo.

Apéndice B

Conceptos básicos sobre espacios de Sobolev

B.1. Resultados y definiciones previos

A lo largo de este capítulo, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ denotará un abierto arbitrario de la topología usual en \mathbb{R}^n .

Cada vez que se hable de “medida”, “medible”, u otros conceptos relacionados con la “Teoría de la Medida”, nos referiremos siempre a la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n con la σ -álgebra de Borel derivada de la topología usual (de las normas) en \mathbb{R}^n .

Además, sea $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces se introducirá la siguiente **notación**:

- Soporte de f : $\text{sop } f = \overline{\{x \in \mathcal{O} : f(x) \neq 0\}}$.
- Conjunto de las funciones de soporte compacto en \mathcal{O} :
 $\mathcal{C}_0(\mathcal{O}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{O}) : \text{sop } f \text{ es un subconjunto compacto de } \mathcal{O}\}$.
- Conjunto de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en \mathcal{O} o *funciones test*: $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) \cup \mathcal{C}_0(\mathcal{O})$.

Proposición B.1.1. $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$ es denso en $\mathcal{L}^p(\mathcal{O})$ para cualquier $1 \leq p < \infty$ [32].

Recordemos que el espacio vectorial $\mathcal{L}^p(\mathcal{O})$ está formado por aquellas funciones medibles tales que cumplen que

$$\int_{\mathcal{O}} |f|^p dx < \infty,$$

donde, en nuestro caso particular, se ha utilizado $\int dx$ para hacer referencia a la integral sobre la medida de Lebesgue.

Definición B.1.2. Sea $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{O})$ y χ_K denota la función característica en un compacto $K \subset \mathcal{O}$. Se dice que f es *localmente p -integrable* (para $p = 1$, simplemente *localmente integrable*) en \mathcal{O} si $f\chi_K \in \mathcal{L}^p(\mathcal{O})$ para todo compacto $K \subset \mathcal{O}$. La colección de funciones localmente p -integrables en \mathcal{O} se denota como $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\mathcal{O})$, $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_{\text{loc}}^p$.

Definición B.1.3. Sea $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$ y sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un índice múltiple. Entonces, se dirá que $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$ es la *derivada débil* α -ésima de u , si

$$\int_{\mathcal{O}} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathcal{O}} v \varphi \, dx, \quad (\text{B.1})$$

para cualquier función test $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$, tal que

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi.$$

Lema B.1.4. La derivada débil α -ésima de una función $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$, si existe, es única casi siempre (salvo un conjunto de medida nula).

Demostración. Supongamos que existen $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$ tales que son derivadas α -ésimas de $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$. Es decir, cumplen (B.1). Por tanto, esto implica que

$$\int_{\mathcal{O}} (v - \tilde{v}) \varphi \, dx = 0, \quad \text{para cada } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}),$$

y por tanto, haciendo uso de la Proposición B.1.1 y del teorema de convergencia dominada, se concluye que $v = \tilde{v}$ casi siempre en \mathcal{O} . \square

Corolario B.1.5 (Lema fundamental del cálculo de variaciones). Si $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$ y satisface

$$\int f \varphi \, dx = 0, \quad \text{para cada } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}),$$

entonces $f = 0$ casi siempre en \mathcal{O} .

Debido a la unicidad de la derivada débil α -ésima, se denotará indistinguiblemente de la derivada usual como D^α , siempre que no haya cabida a ambigüedad.

B.2. Espacios de Sobolev

Definición B.2.1. Se define el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathcal{O})$ como aquel conjunto de funciones $u \in \mathcal{L}^p(\mathcal{O})$ tales que para cualquier índice múltiple α con $|\alpha| \leq k$, la derivada débil α -ésima $D^\alpha u$ existe y $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\mathcal{O})$. Es decir,

$$W^{k,p}(\mathcal{O}) = \{u \in \mathcal{L}^p(\mathcal{O}) : D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\mathcal{O}), |\alpha| \leq k\},$$

para $1 \leq p \leq \infty$. Además, se denotará

$$H^k(\mathcal{O}) = W^{k,2}(\mathcal{O}).$$

Además, generalizando la Definición B.1.2, se dice que $f \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathcal{O})$ si $f\chi_K \in W^{k,p}(\mathcal{O}) \forall K \subset \mathcal{O}$ compacto. Igualmente, para el caso particular de $p = 2$, $f \in H_{\text{loc}}^k(\mathcal{O})$ si $f\chi_K \in H^k(\mathcal{O}) \forall K \subset \mathcal{O}$ compacto.

Definición B.2.2. Si $u \in W^{k,p}(\mathcal{O})$, se define la siguiente norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\mathcal{O})} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{O})} & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

Lema B.2.3 (Propiedades de las derivadas débiles). Sean $u, v \in W^{k,p}(\mathcal{O})$ y $|\alpha| \leq k$. Entonces,

- (i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\mathcal{O})$.
- (ii) $D^\alpha(D^\beta u) = D^\beta(D^\alpha u)$ para todo multi-índice α, β tal que $|\alpha| + |\beta| \leq k$.
- (iii) (Linealidad) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\mathcal{O})$ y, además,

$$D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v.$$

(iv) Para $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ abierto, entonces $u, v \in W^{k,p}(\mathcal{O}')$.

(v) (Fórmula de Leibniz) Si $\eta \in C_0^\infty(\mathcal{O})$, entonces $\eta u \in W^{k,p}(\mathcal{O})$ y

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \eta D^{\alpha-\beta} u,$$

con

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \quad \text{con } \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$

y $\beta \leq \alpha$ denota que $\beta_j \leq \alpha_j$ para todo $j = 1, \dots, n$.

La prueba de los diferentes resultados resumidos en el lema anterior pueden encontrarse en [33].

Estas definiciones nos ha permitido introducir en los Capítulos 1–2 el concepto de solución débil de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. De tal forma que cumplirán la ecuación diferencial dada en el sentido de las derivadas débiles tal y como se ha introducido anteriormente.

Apéndice C

Algunos resultados útiles sobre polinomios

A lo largo de este capítulo, nos centraremos simplemente en polinomios con coeficientes reales con dominio e imagen en \mathbb{R} . Los resultados y definiciones que se introducen son necesarios para desarrollar algunas demostraciones en los Capítulos 1 y 2.

C.1. Resultantes y Discriminantes

Definición C.1.1. Dados dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$ y $Q(x) = \sum_{k=0}^m q_k x^k$, de grados n y m , respectivamente ($p_n \neq 0$ y $q_m \neq 0$), denominamos *matriz de Sylvester* asociada a los polinomios P y Q , y se denotará como $S_{P,Q}$, a la matriz $(n+m) \times (n+m)$ construida de la siguiente forma:

- Si $n > 0$, entonces la primera fila es:

$$(p_n \ p_{n-1} \ \cdots \ p_0 \ \overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{m-1}).$$

- La segunda fila coincide con la primera excepto por el desplazamiento de cada elemento una posición a la derecha, comenzando la fila por 0:

$$(0 \ p_n \ p_{n-1} \ \cdots \ p_0 \ \overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{m-2}).$$

- Las siguientes $n-2$ columnas se obtienen de la misma forma, desplazando los elementos una columna hacia la derecha y añadiendo un cero como primer elemento de la fila.

- Si $m > 0$ la fila $(n+1)$ -ésima sería:

$$(q_m \ q_{m+1} \ \cdots \ q_0 \ \overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{n-1}).$$

- Las siguientes filas se obtienen siguiendo el mismo algoritmo de desplazamiento que antes.

Denotemos como \mathcal{P}_n al conjunto de polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado n . Sean $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ los polinomios de grados n y m de la definición anterior. Consideremos la aplicación lineal,

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n &\longrightarrow \mathcal{P}_{n+m} \\ (A, B) &\longmapsto \varphi(A, B) := PA + QB.\end{aligned}$$

Es fácil ver que la matriz asociada a esta aplicación lineal no es más que $S_{P,Q}$.

Definición C.1.2. Dados dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$ y $Q(x) = \sum_{k=0}^m q_k x^k$, de grados n y m , respectivamente ($p_n \neq 0$ y $q_m \neq 0$), denominamos *resultante de P y Q* , y se denotará como $\text{res}(P, Q)$, al determinante de la matriz de Sylvester asociada a P y Q . Es decir, $\text{res}(P, Q) = \det S_{P,Q}$.

Lema C.1.3. *Dados dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$ y $Q(x) = \sum_{k=0}^m q_k x^k$, de grados n y m , respectivamente ($p_n \neq 0$ y $q_m \neq 0$). Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y β_1, \dots, β_m sus respectivas raíces en \mathbb{C} . Se puede reescribir el resultante de P y Q como cualquiera de las siguientes fórmulas*

$$\begin{aligned}\text{res}(P, Q) &= p_n^m Q(\alpha_1) \cdots Q(\alpha_n) \\ &= (-1)^{nm} q_m^n P(\beta_1) \cdots P(\beta_m) \\ &= p_n^m q_m^n \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (\alpha_i - \beta_j)\end{aligned}$$

La prueba del Lema C.1.3 puede verse en [4].

Proposición C.1.4. *Dados dos polinomios no nulos $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ de grados $n, m > 0$, respectivamente, se tiene que $\text{res}(P, Q) = 0$:*

- (i) *si y solo si tienen, al menos, una raíz común en \mathbb{C} .*
- (ii) *si y solo si tienen, al menos, un factor irreducible común.*

Demostración. Se sigue directamente del Lema C.1.3 y del Teorema Fundamental del Álgebra. □

Definición C.1.5. Dado un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado n ,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k,$$

con $p_n \neq 0$, se define el *discriminante* de P como

$$\text{Dis}(P(x), x) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{1}{p_n} \text{res}(P, P'), \quad (\text{C.1})$$

con $P'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)p_{k+1}x^k$ la primera derivada del polinomio $P(x)$.

Proposición C.1.6 (Clasificación de raíces según el signo del discriminante). *Dado un polinomio con coeficientes reales $P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ de grado $n > 1$, entonces:*

(i) Para $n = 2$.

- Si $\text{Dis}(P(x), x) > 0$, P tiene dos raíces reales simples.
- Si $\text{Dis}(P(x), x) = 0$, P tiene una raíz real doble.
- Si $\text{Dis}(P(x), x) < 0$, P tiene dos raíces complejas conjugadas.

(ii) Para $n = 3$.

- Si $\text{Dis}(P(x), x) > 0$, P tiene tres raíces reales simples.
- Si $\text{Dis}(P(x), x) = 0$, P tiene tres raíces reales, y una de ellas es múltiple.
- Si $\text{Dis}(P(x), x) < 0$, P tiene dos raíces complejas conjugadas y una raíz real simple.

(iii) Para $n \geq 4$.

- Si $\text{Dis}(P(x), x) > 0$, el número de raíces complejas de P es un múltiplo de 4. Es decir, existe un número natural $k \leq n/4$ tal que hay $2k$ pares de raíces complejas conjugadas y $n - 4k$ raíces reales.
- Si $\text{Dis}(P(x), x) = 0$, P tiene, al menos, una raíz múltiple.
- Si $\text{Dis}(P(x), x) < 0$, el número de raíces complejas de P no es un múltiplo de 4. Es decir, existe un número natural $k \leq (n - 2)/4$ tal que hay $2k + 1$ pares de raíces complejas conjugadas y $n - 4k - 2$ raíces reales.

C.2. Continuidad de las raíces por un parámetro

En esta sección haremos uso del Teorema de la función implícita para probar que las raíces reales simples de un polinomio en una variable con coeficientes reales que depende de un parámetro real son funciones continuas de dicho parámetro. Ello nos llevará a probar un resultado que será útil en secciones posteriores. Primero, recordemos el Teorema de la función implícita.

Teorema C.2.1 (Teorema de la función implícita). Sea $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un abierto y $(a, b) \in \Omega$ un punto tal que $F(a, b) = 0$ y que $\left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right|_{(x, y) = (a, b)}$ es invertible. Entonces, existe un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $a \in A$ y otro abierto $B \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que $b \in B$ que satisfacen lo siguiente:

- Para cada $x_0 \in A$, existe un único $y_0 = f(x_0) \in B$ tales que $F(x_0, f(x_0)) = 0$.
- Dada la función f anterior, además se tiene que $f(a) = b$ y que $f : A \rightarrow B$ es de clase \mathcal{C}^1 y

$$Jf(x) = \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right]_{m \times m}^{-1} \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \right]_{m \times n}, \quad \forall x \in A,$$

donde Jf denota a la matriz Jacobiana asociada a la función f .

La prueba de la función implícita sigue resultados elementales del Análisis Matemático. Pruebas del teorema pueden encontrarse, por ejemplo, en [8, 19].

Corolario C.2.2. Consideremos una familia de polinomios reales de grado n con coeficientes reales que dependen de forma continua en un parámetro real b ,

$$G_b(x) = \sum_{j=0}^n g_j(b)x^j.$$

Si existen k raíces reales simples de este polinomio para un $b_0 \in I$, entonces son funciones continuas del parámetro b en un entorno abierto de b_0 .

Demostración. Consideremos nuestro polinomio anterior $G_b(x) \equiv G(b, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos un $b_0 \in \mathbb{R}$ fijo, tal que G_{b_0} tiene k raíces reales simples, $\{x_i\}_{i=1}^k$. Por tanto, los puntos (b_0, x_i) cumplen que $G(b_0, x_i) = 0$ y que $\left. \frac{\partial G(z, y)}{\partial y} \right|_{(z, y) = (b_0, x_i)}$ son invertibles para cada $i = 1, \dots, k$. Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Función Implícita C.2.1. Así que, podemos afirmar que existen abiertos $B_i, X_i \subseteq \mathbb{R}$ tales que $x_i \in X_i$ y $b_0 \in B_i$, y funciones $f_i : B_i \rightarrow X_i$ de clase \mathcal{C}^1 que cumplen que $x_i = f_i(b_0) \in X_i$ y que para cada $b^* \in B_i$ existe un único $x_i^* = f_i(b^*) \in X_i$ tal que es raíz de G_{b^*} . \square

Lema C.2.3. Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y consideremos una familia de polinomios reales con coeficientes reales que dependen de forma continua en un parámetro real b ,

$$G_b(x) = \sum_{j=0}^n g_j(b)x^j.$$

Supongamos que existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ tal que:

- (i) Existe algún $b_0 \in I$, tal que $G_{b_0}(x)$ tiene exactamente k raíces simples en Ω .
- (ii) Para todo $b \in I$, $\text{Dis}(G_b(x), x) \neq 0$.

(iii) Para todo $b \in I$, $g_n(b) \neq 0$.

Entonces, $\forall b \in I$, $G_b(x)$ tiene exactamente k raíces simples en Ω .

Además, si $\Omega = \Omega_b := (c^*(b), \infty) \subset \mathbb{R}$ para alguna función real y continua c^* , el mismo resultado se satisface si se añade la hipótesis de que:

(iv) Para todo $b \in I$, $G_b(c^*(b)) \neq 0$.

Demostración. El punto de partida para la prueba es utilizar la continuidad de las raíces en el parámetro real b que nos garantiza el Corolario C.2.2 en entornos abiertos de b_0 . Primero, en virtud de las hipótesis, sabemos que el polinomio G_{b_0} tiene k raíces simples reales y por ende, $n - k \in 2\mathbb{Z}^+$ raíces complejas como consecuencia del Teorema fundamental del álgebra.

Basta ver que el resto de hipótesis garantiza la continuidad de las raíces para todo $b \in I$ y que no aparece ninguna nueva raíz continua en un subintervalo de I . Para ello, demostrémoslo por reducción al absurdo.

Comencemos asumiendo que $\Omega = \mathbb{R}$. Supongamos que existe algún $b^* \in I$, tal que aparece alguna raíz real diferente a las k conocidas. Si la aparición de alguna raíz real es en detrimento de un par de raíces complejas conjugadas, por continuidad de las raíces simples y de las raíces complejas en el parámetro b , es necesario que exista algún $b' \in I$ tal que $\text{Dis}(G_{b'}(x), x) = 0$ en contra de la hipótesis (ii). Por tanto, el grado del polinomio en $b^* \in I$ es necesariamente mayor que para $b_0 \in I$ que, de nuevo, contradice la hipótesis (iii). El caso en el que se considera la pérdida de alguna de las k raíces es simétrico a la discusión anterior y, por tanto, concluimos.

Consideremos ahora el caso en que $\Omega = \Omega_b$ y procedamos, de nuevo, por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que efectivamente existe un $b^* \in I$ tal que $b^* \neq b_0$ y que el polinomio G_{b^*} en Ω_{b^*} tiene k^* raíces reales simples, tal que $k^* \neq k$ que es el número de raíces simples de G_{b_0} en Ω_{b_0} . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $k^* > k$ y necesariamente $\Omega_{b_0} \subset \Omega_{b^*}$, i.e., $c^*(b_0) > c^*(b^*)$. Por tanto, existe al menos una raíz x_{k+1} que es continua sobre el parámetro $b \in I$ tal que $x_{k+1}(b^*) \in \Omega_{b^*}$ y que $x_{k+1}(b_0) \notin \Omega_{b_0}$, y definamos la función $h := x_{k+1} - c^*$, que es una función real y continua en I por ser la diferencia de dos funciones reales y continuas en ese mismo intervalo abierto. Por tanto, necesariamente $h(b^*) > 0 > h(b_0)$ y por continuidad de h en el I y a consecuencia del Teorema de Bolzano debe existir un $b' \in I$ tal que $b^* > b' > b_0$ o $b^* < b' < b_0$ que cumpla $h(b') = 0$ y por tanto que $G_{b'}(x_{k+1}(b')) = G_{b'}(c^*(b'))$. Sin embargo, esta afirmación contradice la hipótesis (iv). \square

C.3. Método de Sturm

En esta sección introduciremos el conocido como método de Sturm, que nos permitirá conocer el número de raíces en un intervalo dado para polinomios con coeficientes reales y de (una) variable real examinando los cambios de signo en una secuencia de polinomios. Las demostraciones relacionadas con esta sección pueden encontrarse en [1, 29].

Definición C.3.1. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado n , i.e.,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_n \neq 0. \quad (\text{C.2})$$

La sucesión

$$p(x) = p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)$$

se dice que es una sucesión de Sturm para el polinomio $p(x)$ si

- (i) todas las raíces de $p_0(x) = p(x)$ son simples.
- (ii) $\text{sgn}(p_1(\xi)) = -\text{sgn}(p'_0(\xi))$ si ξ es una raíz real de p_0 .
- (iii) Para $i = 1, \dots, m - 1$ se tiene que

$$p_{i+1}(\xi)p_{i-1}(\xi) < 0$$

si ξ es una raíz real de p_i .

- (iv) El último polinomio p_m no tiene raíces reales.

Teorema C.3.2 (Teorema de Sturm). *El número de raíces reales de $p(x) \equiv p_0(x)$ en el intervalo $a \leq x < b$ es igual a la diferencia $w(b) - w(a)$, donde $w(x)$ es el número de cambio de signos de una secuencia de Sturm*

$$p_0(x), \dots, p_m(x)$$

en x .

Nota C.3.3 (Método de Sturm). Uno puede crear una secuencia de Sturm mediante el siguiente procedimiento recursivo para un polinomio $p(x)$ de la forma (C.2). Definimos inicialmente

$$p_0(x) := p(x), \quad p_1(x) := -p'_0(x) = -p'(x),$$

y el resto de polinomios se definen de manera recursiva,

$$p_{i-1}(x) = c_i(x)p_i(x) - r_i p_{i+1}(x), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (\text{C.3})$$

tal que $\text{gr}(p_i) > \text{gr}(p_{i+1})$, pues no es más que la aplicación del algoritmo Euclides de la división para polinomios, donde se define de manera arbitraria $r_i > 0$. Como el grado de los polinomios va decreciendo, este debe acabar tras $m \leq n$ pasos, tal que:

$$p_{m-1}(x) = c_m(x)p_m(x), \quad p_m(x) \neq 0.$$

El último polinomio de la sucesión, p_m , es el mayor divisor común entre $p_0(x) = p(x)$ y $p_1(x) = -p'(x)$. Si p tiene raíces reales simples, entonces p' no tiene raíces en común con el polinomio p . Por tanto, p_m cumple C.3.1(iv). Si $p_i(\xi) = 0$, entonces, de (C.3) podemos deducir que $p_{i-1}(\xi) = r_i p_{i+1}(\xi)$ con $r_i > 0$. Por tanto, como necesariamente $p_{i+1}(\xi) \neq 0$, pues si no, se tendría que ξ es raíz de p_m , lo cual no es posible. Por tanto, se asegura C.3.1(iii). Finalmente, C.3.1(i)-(ii) se cumplen por construcción. Concluimos así que, efectivamente, esta sucesión es una sucesión de Sturm. Además, usualmente aplicar el Teorema C.3.2 a esta sucesión se le denomina *Método de Sturm*.

La determinación del número de raíces reales mediante el método de Sturm que aparecerán a lo largo del trabajo se realizarán mediante la ejecución de funciones predefinidas en el software de cálculo simbólico Mathematica [35].

Bibliografía

- [1] A. AKRITAS, G. I. MALASCHONOK, P. S. V. Sturm sequences and modified subresultant polynomial remainder sequences. *Ser. J. of Comp.* 8, 1 (2014), 29–46.
- [2] CAMASSA, R., AND HOLM, D. D. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993), 1661–1664.
- [3] CAMASSA, R., HOLM, D. D., AND HYMAN, J. M. A new integrable shallow water equation. vol. 31 of *Advances in Applied Mechanics*. Elsevier, 1994, pp. 1–33.
- [4] COHEN, H. *A Course in Computational Algebraic Number Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 1993.
- [5] CONSTANTIN, A. *Nonlinear Water Waves with Applications to Wave-Current Interactions and Tsunamis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- [6] CONSTANTIN, A., AND LANNES, D. The Hydrodynamical Relevance of the Camassa–Holm and Degasperis–Procesi Equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 192, 1 (2009), 165–186.
- [7] CONSTANTIN, A., AND STRAUSS, W. A. Stability of the Camassa-Holm solitons. *Journal of Nonlinear Science* 12 (2002), 415–422.
- [8] DE OLIVEIRA, O. The Implicit and Inverse Function Theorems: Easy Proofs. *Real Analysis Exchange* 39, 1 (2013), 207 – 218.
- [9] DURUK MUTLUBAŞ, N., AND GEYER, A. Orbital stability of solitary waves of moderate amplitude in shallow water. *J. Diffe. Equ.* 255, 2 (2013), 254–263.
- [10] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.
- [11] GASULL, A., AND GEYER, A. Traveling surface waves of moderate amplitude in shallow water. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* 102 (2014), 105–119.

- [12] GEYER, A. Solitary traveling water waves of moderate amplitude. *J. Nonlinear Math. Phys.* 19 (2012), 104–115.
- [13] GUCKENHEIMER, J., AND HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [14] HARTMAN, P. On local homeomorphisms of Euclidean spaces. *Bol. Soc. Math. Mexicana* 5 (1960), 220–241.
- [15] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, New York, 1964.
- [16] HIRSCH, M., AND SMALE, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- [17] JOHNSON, R. Camassa–Holm, Korteweg–de Vries and related models for water waves. *J. Fluid Mech.* 455 (2002), 63 – 82.
- [18] KORTEWEG, D. J., AND DE VRIES, G. Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 39, 240 (1895), 422–443.
- [19] KRANTZ, S. G., AND PARKS, H. R. *The Implicit Function Theorem*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser New York, NY, 2012.
- [20] LANDAU, L. D., AND LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics*, 2nd ed. Pergamon Press, 1987.
- [21] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20 (1963), 130–141.
- [22] MI, Y., AND MU, C. On the solutions of a model equation for shallow water waves of moderate amplitude. *J. Differ. Equ.* 255, 8 (2013), 2101–2129.
- [23] MOHDEB, N., FRUCHARD, A., AND MEHIDI, N. Elliptic sectors and Euler discretization. *Electronic Journal of Differential Equations* 183 (2018), 1–14.
- [24] MOLINET, L. On well-posedness results for camassa-holm equation on the line: A survey. *J. Nonlinear Math. Phys.* 11, 4 (2004), 521–533.
- [25] NEWTON, I. *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*. Henry Woodfall, 1736.
- [26] PALAIS JR., J., AND DE MELO, W. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer-Verlag, New York, 1982.

-
- [27] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer New York, NY, 2013.
- [28] PETROVSKY, I. G. *Lectures on Partial Differential Equations*. New York: Interscience, 1954. Translated by A. Shenitzer (Dover Ed.), 1991.
- [29] STOER, J., AND BULIRSCH, R. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer New York, NY, 2010.
- [30] STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018.
- [31] TESCHL, G. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, vol. 140 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 2012.
- [32] TREVES, F. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Dover Publications, Mineola, N.Y., 2006.
- [33] VLADIMIROV, V. *Methods of the Theory of Generalized Functions*. CRC Press, 2002.
- [34] WHITTAKER, E. T., AND WATSON, G. N. *A course of modern analysis*, 5 ed. Cambridge University Press, Cambridge, England, 2021.
- [35] WOLFRAM RESEARCH, INC. *Mathematica*, Version 13.0. Champaign, IL, 2021.