



Tesis doctoral

Curvas invariantes y ciclos límite en ecuaciones de Abel

Luis Ángel Calderón Pérez

Programa de doctorado de Modelización y Experimentación
en Ciencia y Tecnología (R007)

Con la conformidad del director y del codirector:

José Luis Bravo Trinidad e Ignacio Ojeda Martínez de Castilla

Esta tesis cuenta con la autorización del director/a y codirector/a de la misma y de la Comisión Académica del programa. Dichas autorizaciones constan en el Servicio de la Escuela Internacional de Doctorado de la Universidad de Extremadura.

2024

Tesis por compendio

Esta tesis doctoral se ha presentado en el formato de Tesis por compendio de manuscritos, siguiendo la normativa de la Universidad de Extremadura y del Programa de doctorado de Modelización y Experimentación en Ciencia y Tecnología. Los tres artículos que conforman esta tesis por compendio, en todos los cuales el doctorando ha sido autor de correspondencia, son los siguientes:

1. **Upper bounds of limit cycles in Abel differential equations with invariant curves.** J.L. Bravo, L.A. Calderon and M. Fernández. J. Math. Anal. Appl. 494 (2021) 124580.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124580>.
Journal impact factor in the time of publication of the paper : 1,417 (77/330, Q1 in Mathematics 2021).
2. **Rational solutions of Abel differential equations.** J.L. Bravo, L.A. Calderon, M. Fernández and I. Ojeda. J. Math. Anal. Appl. 515 (2022) 126368.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126368>.
Journal impact factor in the time of publication of the paper : 1,3 (84/330, Q2 in Mathematics 2022).
3. **Rational limit cycles of Abel differential equations.** J.L. Bravo, L.A. Calderon and I. Ojeda. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 47 (2023) 1-13.
DOI: <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2023.1.47>.
Journal impact factor in the time of publication of the paper : 1,1 (101/330, Q2 in Mathematics 2022).

Agradecimientos

Quisiera expresar mi infinita gratitud a mis directores de tesis, José Luis Bravo e Ignacio Ojeda, por todo el apoyo, ayuda, consejos, paciencia y atención que me han prestado durante estos años. A José Luis, que ya estuvo pendiente de mí desde el máster de investigación, al inicio del camino, y que sigue sorprendiéndome tanto por su generosidad como por su calidad como matemático; y a Ignacio, que se incorporó a nuestra línea de investigación y que ha brindado una valiosísima ayuda en la elaboración de esta memoria. Vuestros consejos, no solo en el ámbito académico y matemático sino también en el profesional y universitario, han sido imprescindibles, entre otras cosas, para que la presentación de esta tesis doctoral sea posible.

Además quisiera agradecer también a mi "director no oficial", Manuel Fernández García-Hierro, a quien debo agradecerle en gran medida su labor de apoyo y de consejo a lo largo de mi recorrido en la universidad.

Igualmente, me gustaría expresar mi gratitud a otros profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura, del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla y del Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de les Illes Balears, por la acogida, cariño y ayuda que me han prestado en cada etapa de mi carrera universitaria.

Finalmente, quisiera agradecer a las personas que, ajenas a la elaboración de esta tesis, han sido condición absolutamente necesaria para hacer posible su elaboración.

A Meme y Lidia, que tantísimo me han dado a tantos niveles.

A Aritz, apoyo y refugio siempre dispuesto, entregado e imprescindible en los momentos más complicados.

A mi familia, a mis padres, a Paz y a Javi, por tenerme siempre presente y ser para mí un pilar constante, infalible e imprescindible.

Índice general

Índice general	4
Introducción	5
1. Marco teórico	9
1.1. El problema de valor inicial en sistemas diferenciales	9
1.1.1. Existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial	9
1.1.2. Continuidad y derivabilidad de las soluciones	10
1.1.3. El problema de valor inicial en sistemas diferenciales autónomos	11
1.2. Sistemas planos	12
1.2.1. Sistemas diferenciales autónomos planos	13
1.2.2. Curvas invariantes e integrales primeras	13
1.2.3. Teoría de integrabilidad de Darboux	14
1.3. Ecuaciones diferenciales escalares periódicas	16
1.3.1. Ecuaciones diferenciales periódicas	16
1.3.2. Comportamiento asintótico de las soluciones	18
1.3.3. Las derivadas de la aplicación desplazamiento	20
1.3.4. Estabilidad de soluciones periódicas	23
1.3.5. Ecuaciones escalares periódicas y sistemas planos	24
1.4. Cotas superiores del número de ciclos límite	28
1.4.1. Ecuación lineal y de Ricatti. Resultado de Lins-Neto.	28
1.4.2. Criterios de cotas de ciclos límite para ecuaciones de Abel	31
1.4.3. Cotas superiores del número de ciclos límite	36
1.4.4. Número de soluciones polinómicas y racionales	41
1.5. Factorización en anillos de polinomios y polinomios trigonométricos.	45
2. Upper bounds of limit cycles in Abel differential equations with invariant curves	48
3. Rational solutions of Abel differential equations	49
4. Rational limit cycles of Abel differential equations	50
Resumen, conclusiones y trabajo futuro	64
Bibliografía	67

Introducción

Las ecuaciones diferenciales son un elemento de estudio de gran interés en el campo de las matemáticas desde que fueron propuestas por Leibnitz y Newton en el siglo XVII, entre otros motivos, por sus enormes aplicaciones prácticas en gran diversidad de campos, ya que permiten describir cómo evolucionan fenómenos a lo largo del tiempo.

El estudio de las ecuaciones diferenciales comenzó intentando obtener expresiones de sus soluciones. Sin embargo, rápidamente se hizo patente la dificultad de conseguir estas expresiones explícitas en la mayoría de los casos. A finales del siglo XIX, las ecuaciones empezaron a abordarse desde un punto de vista distinto, el enfoque de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales: el objetivo no es conseguir las expresiones de las soluciones, si no describirlas de la forma más completa posible.

Hilbert presentó en el año 1900 una lista [26] en la que planteaba 23 problemas (posteriormente ampliados a 40) como desafío para la comunidad matemática, algunos haciendo referencia a la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Entre los problemas no resueltos en la actualidad, aquellos con menor avance son la conjetura de Riemann y la segunda parte del problema XVI.

La segunda parte del problema XVI de Hilbert plantea determinar el número de ciclos límite (y su posición relativa) de un sistema diferencial autónomo polinómico plano, es decir, un sistema diferencial del tipo

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y), \quad (1)$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son polinomios con coeficientes reales o complejos. Denotamos como $n = \max\{\text{gr}(P), \text{gr}(Q)\}$ al grado del sistema.

Un ciclo límite es una solución periódica del sistema diferencial aislada en el conjunto de soluciones periódicas, y controlar su número y posición aportan información esencial para el estudio cualitativo del resto de soluciones del sistema. El objetivo principal del problema XVI de Hilbert consiste en acotar el número de ciclos límite en términos de n .

Si $n = 1$, es inmediato que el sistema no tiene ciclos límite. El caso $n = 2$ sigue abierto. Una prueba de la finitud del número de ciclos límite fue propuesta por Ecalle e Ilyashenko [17, 30], pero su validez es objeto de debate en la comunidad matemática.

La segunda parte del problema XVI de Hilbert se considera, por tanto, como uno de los principales desafíos dentro de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. La falta de progreso deja en evidencia la complejidad de trabajar con sistemas diferenciales, incluso en dimensión dos.

Para algunas familias de sistemas polinómicos planos, un método alternativo [12] al estudio directo del sistema en el plano consiste en buscar cambios de variable que transformen el sistema diferencial en una ecuación diferencial escalar (ya que estas son generalmente más fáciles de abordar), de modo que el cambio establezca una relación biunívoca entre los ciclos límite del sistema y los ciclos límite de la ecuación. De este modo, al obtener información sobre los ciclos límite de la ecuación, también la obtendremos sobre los del sistema. En este contexto, destacan las ecuaciones diferenciales de Abel.

Esta tesis doctoral se centra en el análisis de la ecuación diferencial de Abel

$$x' = A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x, \quad (2)$$

donde $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ son funciones continuas. En particular, cuando la ecuación es periódica respecto de t (es decir, cuando $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ son funciones periódicas), Lins-Neto [38] encontró una familia de ecuaciones de Abel con tantos ciclos límite como se desee. Así, un problema abierto consiste en dar cotas superiores al número de ciclos límite de la ecuación al imponer restricciones sobre las funciones $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$. A este problema se le denomina problema de Smale-Pugh [47].

El mismo problema se puede plantear para ecuaciones de Abel generalizadas, es decir, ecuaciones de la forma

$$x' = \sum_{i=1}^n A_i(t)x^i, \quad (3)$$

con $A_i(t)$ derivables y periódicas respecto de t , y $n > 3$.

La principal utilidad de estas ecuaciones radica en el hecho de que, cuando la ecuación de Abel es periódica respecto de la variable t , ciertas familias de sistemas diferenciales planos admiten un cambio de variable que los transforma en ecuaciones de Abel, y este cambio de variable relaciona los ciclos límite del sistema con los ciclos límite de la ecuación [12, 3]. De este modo, el problema de Smale-Pugh se puede considerar como una parte del problema XVI de Hilbert. Además, estas ecuaciones diferenciales poseen interés intrínseco [18] y son útiles como “toy-model“ para cierto tipo de estudios.

Generalmente, para estudiar el problema de Smale-Pugh, o bien se imponen condiciones a los coeficientes respecto de t y se prueba que, bajo esas hipótesis, se puede acotar el número de ciclos límite; o bien se intenta acotar el número de un tipo particular de ciclos límite (como hacemos en el tercer artículo recogido en este trabajo). Conseguir avances en este problema será el objetivo general de la tesis, y para ellos usaremos y estudiaremos la presencia de curvas invariantes de cierto tipo.

El problema de Smale-Pugh no es el único que se aborda al estudiar ecuaciones de Abel. Otro problema interesante en el contexto de las ecuaciones de Abel periódicas respecto de t es la adaptación del problema del Centro-Foco de Poincaré que, en este contexto, pregunta cuándo las soluciones de la ecuación de Abel son todas periódicas en un entorno de $x(t) \equiv 0$. Se han obtenido resultados parciales para este problema, relacionados con la condición de composición [24, 40].

Por último, un problema más directo consiste en estudiar soluciones de cierto tipo cuando los coeficientes con respecto de t son de cierta naturaleza (por ejemplo, encontrar soluciones polinómicas cuando $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ son polinomios).

Hablando en términos más precisos, consideremos la ecuación de Abel

$$x' = f(t, x) = A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x, \quad (4)$$

donde $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ son funciones diferenciables y periódicas de período $T > 0$.

Varios autores [20, 35, 41] obtienen criterios sobre el número de ciclos límite de (4) al imponer ciertas condiciones sobre las derivadas respecto de x de $f(t, x)$.

Recientemente, Huang y Liang [27] desarrollaron una versión refinada de esta técnica en la que obtienen resultados similares a los anteriores, partiendo de la elección de una función auxiliar periódica y de clase uno que, si se elige de forma inteligente, da lugar a nuevos resultados. Sin embargo, la elección oportuna de dicha función auxiliar para que los criterios resultantes sean novedosos e interesantes no es trivial ni está determinada de antemano.

En el artículo [29], los autores hacen uso de esta técnica. El objeto de estudio en este trabajo son los sistemas polinómicos planos con parte no lineal homogénea. Estos sistemas se corresponden con ciertas ecuaciones de Abel, estableciéndose una relación entre los ciclos límite de ambas, tal y como se ha comentado anteriormente. En particular, estudian la familia de ecuaciones de Abel

$$x' = (a_1(t)x - b_1(t))(a_2(t)x - b_2(t))x + \frac{x}{b_1(t)} (b_1(t)' - a_1(t)'x,)$$

donde $a_1(t)$, $b_1(t)$, $a_2(t)$ y $b_2(t)$ son funciones derivables y periódicas y $b_1(t) \neq 0$. Esta es la familia de las ecuaciones de Abel que tienen a $x = 0$ y a $a_1(t)x - b_1(t) = 0$, una curva de grado uno en x , como curvas invariantes.

El estudio se enfoca, por tanto, en la ecuación de Abel, donde los autores escogen una familia de funciones auxiliares que generan criterios novedosos respecto a los conocidos con anterioridad.

Sin embargo, los criterios obtenidos son muy restrictivos, ya que imponen que algunas de las funciones $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ no tengan ceros. Como estas funciones son periódicas, es decir, generalmente son polinomios trigonométricos, estas condiciones son bastante restrictivas.

En nuestro primer artículo [6] mejoramos estos resultados de Huang, Liang, Llibre en [29] y trasladamos el resultado a los sistemas planos correspondiente. Haciendo uso del Teorema de Sturm, obtenermos criterios que permiten a las funciones dependientes de t tener tantos ceros como se desee.

Por otro lado, mostramos que las curvas invariantes de la forma $a + p(t)x = 0$, con $a \in \mathbb{R}$ y $p(t) \in \mathbb{R}[t]$, que tiene la ecuación, están estrechamente relacionadas con la elección de la función auxiliar escogida por los autores en [29]. En conclusión, además de obtener criterios mejorados, llegamos a la conclusión de que las curvas invariantes de grado uno en x de una ecuación de Abel aportan información valiosa que puede ayudar a obtener resultados sobre los ciclos límite de la ecuación.

El siguiente paso consistiría en generalizar esta conclusión, es decir, estudiar qué información podemos extraer del hecho de que una ecuación de Abel tenga un número mayor de curvas invariantes de grado uno en x que las dadas en este artículo [6], o qué información podemos extraer del hecho de que una ecuación de Abel tenga curvas invariantes de un tipo distinto a las que aparecen en [6], es decir, no necesariamente de grado uno en x .

Más precisamente, consideremos la ecuación de Abel

$$x' = g(t, x) = A(t)x^3 + B(t)x^2, \tag{5}$$

con $A(t), B(t) \in \mathbb{C}[t]$. Estudiar el número de curvas invariantes de grado uno en x es equivalente a estudiar el número de soluciones racionales de la ecuación.

En [34], se estudia este problema para soluciones racionales cerradas, y otros trabajos [33, 44] estudian el mismo problema desde diferentes puntos de vista. En nuestro segundo artículo [7] que forma parte de esta tesis, damos una cota general en términos del grado de $A(t)$ al número de soluciones racionales de la ecuación (5), ofrecemos dos condiciones suficientes para que la ecuación tenga a lo sumo dos soluciones racionales, y utilizamos la teoría de integrabilidad de Darboux [15] para controlar el número de soluciones racionales que puede tener una ecuación (5) sin que sea integrable.

La cota general ofrecida no es ajustada, por lo que además realizamos un estudio computacional que permite establecer el número máximo de soluciones racionales de la ecuación (5) cuando el grado de $A(t)$ es bajo. El método que desarrollamos es válido para cualquier grado de $A(t)$, pero solo obtenemos resultados explícitos para los grados de $A(t)$ bajos por limitaciones en la potencia computacional.

El estudio de soluciones racionales es equivalente al estudio de curvas invariantes de grado uno en x , por lo que nuestros resultados pueden ser enunciados en términos de curvas invariantes, en vez de soluciones racionales.

Una evolución natural de estos resultados, parcialmente estudiada en [51], consiste en trasladar el artículo anterior al contexto trigonométrico. Es decir, intercambiar los polinomios por polinomios trigonométricos. De este modo, las soluciones racionales serán ciclos límite racionales (siempre que no haya un centro, es decir, un continuo de soluciones periódicas), y los resultados obtenidos estarán mucho más cercanos a la motivación original de tomar esta línea de investigación: obtener información sobre el número de curvas invariantes de grado uno en x de una ecuación de Abel periódica.

Justamente esta idea es la que da lugar al tercer artículo de esta tesis [8], donde trasladamos los resultados de $\mathbb{C}[t]$ a $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$. Sin embargo, como nos encontramos en un contexto periódico y la integrabilidad de la ecuación implica la existencia de un centro (y por tanto, la no existencia de ciclos límite), podemos dar una cota más ajustada para el número de ciclos límite de la ecuación al aplicar la teoría de integrabilidad de Darboux.

La estructura del trabajo es la siguiente: comenzamos el trabajo con un marco teórico detallado, que contiene todas las herramientas y conceptos matemáticos que se utilizan en los tres artículos, pero que no vienen recogidos en ellos con detalle. Los siguientes capítulos son los tres artículos que conforman la tesis por compendio, con breves encabezados introductorios para cada uno. Por último, concluimos la tesis con un capítulo final de resumen, conclusiones y trabajo futuro.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. El problema de valor inicial en sistemas diferenciales

Comenzaremos resumiendo las definiciones y los resultados más importantes de la teoría elemental de sistemas diferenciales n -dimensionales.

1.1.1. Existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial

Definición 1.1.1. Un sistema diferencial n -dimensional es una expresión de la forma

$$x' = f(t, x),$$

donde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, $f \in \mathcal{C}(D)$, definida sobre un abierto D . Cuando $n = 1$, hablaremos de ecuaciones diferenciales (o ecuaciones diferenciales escalares) en vez de sistemas diferenciales. Diremos que el sistema es autónomo cuando f es independiente del valor de t , es decir, cuando la expresión sea de la forma

$$x' = f(x).$$

En caso contrario el sistema se dirá no autónomo.

Definición 1.1.2. Una función $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida sobre un intervalo I de \mathbb{R} es solución del sistema diferencial si para todo $t \in I$, u es derivable, $(t, u(t)) \in D$ y

$$u'(t) = f(t, u(t)).$$

Si el intervalo I contiene alguno de sus extremos, en dichos puntos se consideran las derivadas laterales correspondientes.

Definición 1.1.3. Dado $(t_0, x_0) \in D$, plantear un problema de valor inicial consiste en el estudio de la existencia y unicidad de soluciones u del sistema diferencial que además cumplan que $u(t_0) = x_0$, es decir, de las soluciones de

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.1}$$

Este problema se denomina problema de valor inicial con condición inicial (t_0, x_0) .

Definición 1.1.4. Diremos que $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Lipschitz en un abierto D respecto de x , $f \in Lip(D, x)$, si existe $L > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{para todos } (t, x), (t, y) \in D.$$

Diremos que f es localmente Lipschitz en D respecto de x , $f \in Lip_{loc}(D, x)$, si para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe un entorno V de dicho punto tal que $f \in Lip(D \cap V, x)$.

Podemos enunciar ahora el resultado básico sobre existencia y unicidad de soluciones de un problema de valor inicial.

Teorema 1.1.5 (Picard-Lindelöf-Lipschitz, ver por ejemplo [13]). *Sea $f \in \mathcal{C}(D) \cap Lip_{loc}(D, x)$. Fijada una condición inicial $(t_0, x_0) \in D$, existen $\delta > 0$ y $u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución del problema de valor inicial. Cualquier otra solución coincide con u en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.*

1.1.2. Continuidad y derivabilidad de las soluciones

Este apartado sigue el Capítulo 1 de [42], y repasa los contenidos básicos sobre soluciones maximales, así como el teorema de continuidad y diferenciabilidad con respecto de las condiciones iniciales y parámetros.

La solución dada por el Teorema de Picard-Lindelöf-Lipschitz puede estar definida en un intervalo de longitud muy pequeña, de modo que surge el problema de determinar el mayor intervalo de definición del problema de valor inicial. El siguiente teorema responde a esta cuestión bajo las hipótesis de continuidad y carácter lipschitziano local respecto de x de $f(t, x)$.

Proposición 1.1.6. *Sea $f \in \mathcal{C}(D) \cap Lip_{loc}(D, x)$. Si $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $v : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ son soluciones del mismo problema de valor inicial, entonces $u = v$ en $I \cap J$.*

Se debe notar que como consecuencia de la proposición anterior, entre todas las soluciones que verifican una condición inicial hay una única cuyo intervalo de definición, necesariamente abierto, contiene a todos los demás. Esta solución se denomina maximal.

Teorema 1.1.7. *Sea $f \in \mathcal{C}(D) \cap Lip_{loc}(D, x)$, D abierto, $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ la solución maximal y $t_0 \in I$. La gráfica de $u(t)$ no puede estar contenida en ningún compacto incluido en D .*

En lo que sigue, si tomamos una solución maximal de un sistema diferencial, entenderemos que la estamos tomando para alguna condición inicial. Además, a partir de ahora siempre que hablemos de soluciones entenderemos que son maximales.

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x, \lambda) \rightarrow f(t, x, \lambda)$ una función continua y localmente Lipschitz respecto de x sobre un abierto D . Consideremos la siguiente familia de sistemas diferenciales, dependientes del parámetro λ ,

$$x' = f(t, x, \lambda).$$

Fijado $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\lambda}) \in D$ (una condición inicial y un valor del parámetro), denotaremos por $u(t, \bar{t}, \bar{x}, \bar{\lambda})$ el valor en t de la única solución del problema de valor inicial

$$x' = f(t, x, \bar{\lambda}), \quad x(\bar{t}) = \bar{x}. \tag{1.2}$$

Con esta notación, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 1.1.8. Sean $f \in \mathcal{C}(D) \cap Lip_{loc}(D, x)$, $(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{\lambda}) \in D$ y un intervalo $[a, b]$ tal que $u(t, \bar{\tau}, \bar{x}, \bar{\lambda})$ está definida para todo $t \in [a, b]$. Existe un entorno V de $(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{\lambda})$, tal que la función $[a, b] \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$; $(t, \tau, x, \lambda) \mapsto u(t, \tau, x, \lambda)$ está bien definida y es continua. Además, para cada $(\tau, x, \lambda) \in V$, se cumple que

- la derivada parcial $u_x(t, \tau, x, \lambda)$ es la solución matricial $Z(t)$ de

$$Z' = f_x(t, u(t, \tau, x, \lambda), \lambda)Z,$$

tal que $Z(\tau)$ es igual a la matriz identidad de orden n ;

- la derivada parcial $u_\tau(t, \tau, x, \lambda)$ es la solución $z(t)$ de

$$z' = f_x(t, u(t, \tau, x, \lambda), \lambda)z,$$

que satisface $z(\tau) = -f(\tau, x, \lambda)$;

- la derivada parcial $u_\lambda(t, \tau, x, \lambda)$ es la solución $z(t)$ de

$$z' = f_x(t, u(t, \tau, x, \lambda), \lambda)z + f_\lambda(t, u(t, \tau, x, \lambda), \lambda),$$

que satisface $z(\tau) = 0$.

Si en el teorema anterior, reemplazamos $f \in \mathcal{C}(D) \cap Lip_{loc}(D, x)$ por $f \in \mathcal{C}^m(D)$, entonces se tiene que la función $[a, b] \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$; $(t, \tau, x, \lambda) \mapsto u(t, \tau, x, \lambda)$ es de clase m respecto de x en $[a, b] \times V$ y se puede conseguir el resultado correspondiente si imponemos la analiticidad de f respecto de x .

1.1.3. El problema de valor inicial en sistemas diferenciales autónomos

En este apartado consideraremos sistemas diferenciales de la forma

$$x' = f(x),$$

con $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathcal{C}(U) \cap Lip_{loc}(U)$, siendo U abierto. Recordamos que estos sistemas se denominan autónomos.

Tomemos $D = \mathbb{R} \times U$ y $g(t, x) = f(x)$. Entonces, D es abierto y g es continua y localmente Lipschitziana respecto de x sobre D , de modo que, en estas condiciones, se verifica el Teorema 1.1.5 de existencia y unicidad del problema de valor inicial, así como el Teorema 1.1.8 de continuidad respecto de condiciones iniciales y parámetros. Si además pedimos $f \in \mathcal{C}^m(U)$, entonces $g \in \mathcal{C}^m(D)$ y también se verifica el Teorema 1.1.8.

Recordemos un resultado básico de los sistemas autónomos, la trasladada a lo largo del eje t de cualquier solución también es solución.

Proposición 1.1.9. Si $x : I \rightarrow U$ es una solución del sistema autónomo, entonces para todo $\tau \in \mathbb{R}$, $x(t + \tau)$ también es solución del sistema, definida en $- \tau + I$.

Demostración. Así es, pues si $y(t) = x(t + \tau)$, entonces

$$y'(t) = \frac{d}{dt}(x(t + \tau)) = f(x(t + \tau)) = f(y(t)).$$

□

A continuación, enunciamos algunos resultados elementales sobre sistemas autónomos y algunas propiedades de sus soluciones periódicas.

Proposición 1.1.10. *Si $x : I \rightarrow U$ es una solución maximal del sistema autónomo que no es inyectiva, entonces es periódica.*

Demostración. Sean $a < b$ tales que $x(a) = x(b)$, y definamos $y(t) = x(t + \tau)$, con $\tau = b - a$. Entonces y es una solución maximal definida en $-\tau + I$. Como $y(a) = x(a)$, $y(t) = x(t)$ en $-\tau + I = I$. Por lo tanto, $I = \mathbb{R}$ y $x(t) = x(t + \tau)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. \square

Proposición 1.1.11. *Sea $x : \mathbb{R} \rightarrow U$ continua. Si*

$$\inf\{\tau > 0 : x \text{ es } \tau\text{-periódica}\} = 0,$$

entonces x es constante.

Demostración. Si x no es constante, entonces existen $a < b \in \mathbb{R}$ tales que $x(a) \neq x(b)$. Veamos que x no es continua.

Sean $\varepsilon = \|x(a) - x(b)\| > 0$. Por hipótesis, para todo $\delta > 0$ existe un periodo $\tau \in (0, \delta)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, si escribimos $b - a = n\tau + r$, con $0 \leq r < \tau < \delta$, y tomamos $t = a + n\tau$, tenemos que $|t - b| < \delta$ y $\|x(t) - x(b)\| = \varepsilon$, y por tanto x no es continua. \square

Notamos que la Proposición 1.1.11 es cierta para cualquier función continua. Definimos

$$T := \inf\{\tau > 0 : x \text{ es } \tau\text{-periódica}\}.$$

Definición 1.1.12. Sea $x : I \rightarrow U$ una solución del sistema autónomo. Se denomina Además, si el sistema es polinómico de la solución a $\text{orb}(x) = x(I)$. Si la solución es maximal, su órbita también se dirá maximal. Se dirá que una órbita es periódica si es la órbita de una solución periódica.

Proposición 1.1.13. *Las órbitas periódicas con $T \neq 0$ son homeomorfas a S^1 , la circunferencia unidad del plano.*

Demostración. Sea $x : I \rightarrow U$ una solución maximal periódica, que tendrá $T > 0$. Entonces, $x : [0, T) \rightarrow U$, es inyectiva, $x(0) = x(T)$ y es claro que $\text{orb}(x) = x([0, T))$ con la topología inducida por U es homeomorfo a S^1 . \square

1.2. Sistemas planos

Como se ha comentado en la introducción, una de las principales utilidades de la ecuación de Abel radica en su relación con ciertos sistemas planos mediante cambios de variable que relacionan los ciclos límite del sistema y de la ecuación. Esta sección resume los conceptos y resultados elementales sobre sistemas planos que serán necesarios y, más adelante, dedicaremos un apartado a detallar estos cambios de variable.

1.2.1. Sistemas diferenciales autónomos planos

Los sistemas diferenciales planos son de la forma

$$x' = f(t, x, y), \quad y' = g(t, x, y),$$

con f y g suficientemente regulares.

En particular, todo sistema plano con el que vamos a trabajar será autónomo, así que solo consideraremos sistemas del tipo

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y). \quad (1.3)$$

Definición 1.2.1. Diremos que (x_0, y_0) es un punto crítico del sistema si $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ o equivalentemente, si $(x(t), y(t)) \equiv (x_0, y_0)$ es una solución del sistema.

Supondremos que el sistema tiene una cantidad finita y positiva de puntos críticos. En este caso, siempre se puede realizar un cambio de variable que traslade uno de los puntos críticos al origen, por lo que asumiremos que el sistema tiene un punto crítico en el $(0, 0)$.

Además, asumiremos que el sistema linealizado en el origen es de tipo centro o foco, es decir, la matriz jacobiana del sistema en el origen tiene autovalores complejos conjugados. Cualquier sistema de este tipo admite un cambio de variable que lo transforma en un sistema de la forma

$$x' = \lambda x + y + p(x, y), \quad y' = -x + \lambda y + q(x, y) \quad (1.4)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, el comportamiento de las soluciones cerca del origen queda parcialmente determinada por λ ,

- Si $\lambda > 0$, el origen es un foco fuerte inestable, esto es, las soluciones cerca del origen son espirales logarítmicas que se acercan al origen cuando $t \rightarrow -\infty$.
- Si $\lambda < 0$, el origen es un foco (fuerte) estable, esto es, las soluciones cerca del origen son espirales logarítmicas que se acercan al origen cuando $t \rightarrow \infty$.
- Si $\lambda = 0$, el origen es o bien un foco (débil), o bien es un centro, esto es, las soluciones cerca del origen son todas periódicas y giran alrededor del origen.

Puesto que el objetivo principal de esta tesis son las ecuaciones de Abel y no los sistemas planos, no detallaremos la teoría básica habitual de este tipo de sistemas. Para consultar todos estos detalles se puede ver, por ejemplo, [16].

1.2.2. Curvas invariantes e integrales primeras

En este apartado, introduciremos algunos otros conceptos dinámicos en el ámbito de los sistemas planos, que estarán presentes en los artículos: las curvas invariantes, y las integrales primeras.

Ambos son conceptos de gran importancia y que forman parte del análisis habitual de un sistema diferencial, pues aportan información esencial para determinar soluciones particulares y describir las soluciones del sistema. De hecho, una integral primera de un sistema plano determina completamente el comportamiento de sus soluciones.

A partir de ahora entenderemos que todos los sistemas planos que vamos a considerar serán autónomos.

Definición 1.2.2. Consideremos el sistema diferencial plano

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y), \quad (1.5)$$

con $f, g \in \mathcal{C}(D) \cap Lip_{loc}(D, x)$ para algún abierto D de \mathbb{R}^2 .

Diremos que una curva $h(x, y) = 0$ es una curva invariante del sistema si existe una función continua $K(x, y)$ cumpliendo

$$\mathcal{X}(h(x, y)) := h_x(x, y)f(x, y) + h_y(x, y)g(x, y) = h(x, y)K(x, y), \quad (1.6)$$

donde los subíndices denotan las respectivas derivadas parciales y \mathcal{X} es el campo dado por el sistema. A $K(x, y)$ se le denomina cofactor de la curva $h(x, y)$. Cuando $h(x, y)$ es un polinomio, se dice que curva $h(x, y) = 0$ es una curva algebraica invariante. En este caso, si $h(x, y)$ es además irreducible, diremos que $h(x, y) = 0$ es una curva algebraica invariante irreducible del sistema. Recordemos que la irreducibilidad de $h(x, y)$ puede depender del anillo de polinomios.

Es fácil comprobar que toda curva invariante está formada por órbitas de las soluciones del sistema, ya que sobre los puntos de la curva, el gradiente (h_x, h_y) es ortogonal a (f, g) , y por lo tanto, en cada punto de $h(x, y) = 0$, (f, g) es tangente a la curva.

Además, supongamos que el sistema es polinómico (es decir, f, g son polinomios) y denotemos $m = \max\{\text{gr}(f), \text{gr}(g)\}$. Entonces, si $h(x, y) = 0$ es una curva algebraica invariante y $K(x, y)$ es su cofactor, sabemos que $K(x, y)$ es un polinomio y, comparando los grados en (1.6), que $\text{gr}(K) \leq m - 1$. Estas afirmaciones se pueden consultar en [22].

Definición 1.2.3. Diremos que $L(x, y)$, una función suficientemente regular y no constante es una integral primera de (1.5) si

$$\mathcal{X}(L(x, y)) := L_x(x, y)f(x, y) + L_y(x, y)g(x, y) = 0.$$

Dicho de otro modo, para todo $c \in \mathbb{R}$, si $L(x, y)$ es una integral primera, entonces $L(x, y) - c$ es una curva invariante del sistema, con cofactor cero. Si un sistema diferencial plano admite una integral primera, diremos que es integrable.

1.2.3. Teoría de integrabilidad de Darboux

Dedicamos ahora un apartado a la teoría de integrabilidad de Darboux, que aplicaremos en los dos últimos artículos. El ejemplo más característico de sistemas diferenciales con integrales primeras son los hamiltonianos, pero en general, obtener expresiones explícitas de las integrales primeras de un sistema no es un problema trivial ni sistemático. Un caso especial de integrales primeras es el de las integrales primeras de Darboux, un interesante caso en el que la integral primera considerada se obtiene como producto de potencias de las curvas invariantes del sistema.

En su trabajo original, Darboux demostró, en el ámbito de los sistemas polinómicos planos, que la existencia de una cierta cantidad de curvas algebraicas invariantes irreducibles permitía la construcción de una integral primera a partir de ellas. Este tipo de integral primera se denomina integral primera de Darboux.

Definición 1.2.4. Decimos que la función

$$h(x, y) = f_1(x, y)^{\lambda_1} \cdots f_r(x, y)^{\lambda_r}, \quad (1.7)$$

es una integral primera de Darboux del sistema (1.5) si es una integral primera y $f_1(x, y) = 0, \dots, f_r(x, y) = 0$ son curvas algebraicas invariantes irreducibles del sistema con $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ no todos nulos. Si existe esta integral primera, se dice que el sistema es Darboux integrable.

Lema 1.2.5. *Existe una integral primera del sistema (1.5) de la forma (1.7) si y solo si los correspondientes cofactores son linealmente dependientes.*

Demostración. Sea

$$h(x, y) = f_1(x, y)^{\lambda_1} \cdots f_r(x, y)^{\lambda_r},$$

Como $f_i(x, y)$ es una curva invariante, sabemos que, si $K_i(x, y)$ es su cofactor, entonces $\mathcal{X}(f_i(x, y)) = f_i(x, y)K_i(x, y)$ para cada $i = 1, \dots, r$. Y, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}h(x, y) &= \mathcal{X}\left(\prod_{i=1}^r f_i(x, y)^{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^r \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r f_j(x, y)^{\lambda_j}\right) \lambda_i \mathcal{X}(f_i(x, y)) f_i(x, y)^{\lambda_i-1} \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{h(x, y)}{f_i(x, y)} \mathcal{X}(f_i(x, y)) = h(x, y) \sum_{i=1}^r \lambda_i K_i(x, y). \end{aligned}$$

Luego $h(x, y)$ es una integral primera del sistema si y solo si los cofactores son linealmente dependientes. \square

Definición 1.2.6. Cuando (1.5) es un sistema polinómico, denominamos grado del sistema a $\max\{\text{gr}(f), \text{gr}(g)\}$.

Con el Lema 1.2.5, Darboux demostró el siguiente teorema.

Teorema 1.2.7 (Teorema de integrabilidad de Darboux, [15]). *Consideremos el sistema diferencial polinómico plano*

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y).$$

Si el sistema tiene grado n y su número de curvas algebraicas invariantes irreducibles es mayor que $\frac{n(n+1)}{2}$, entonces el sistema es Darboux integrable.

Demostración. Sean $f_1(x, y) = 0, \dots, f_r(x, y) = 0$ las curvas algebraicas invariantes del sistema, y $K_1(x, y), \dots, K_r(x, y)$ sus respectivos cofactores. Como sabemos que $\text{gr}(K_i) \leq n - 1$ para $i = 1, \dots, r$, entonces los cofactores se encuentran en el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que $n - 1$, que tiene dimensión $n(n+1)/2$. Luego los cofactores son linealmente dependientes, y basta aplicar el Lema 1.2.5. \square

Una generalización de este resultado consiste en combinar curvas invariantes con factores exponenciales.

Definición 1.2.8. Sean $h_1(x, y), h_2(x, y)$ polinomios coprimos en $\mathbb{R}[x, y]$. Entonces, decimos que $r(x, y) = \exp(h_1/h_2)(x, y)$ es un factor exponencial de un sistema polinómico plano $x' = P(x, y), y' = Q(x, y)$ de grado n si existe un polinomio $K(x, y)$ de grado a lo sumo $n - 1$ tal que

$$\mathcal{X}(r(x, y)) = K(x, y)r(x, y).$$

Por analogía, a $K(x, y)$ se le denomina cofactor de $r(x, y)$.

Los factores exponenciales permiten extender el Teorema 1.2.7 al considerarse la existencia de integrales primeras que sean producto de curvas invariantes y factores exponenciales.

Teorema 1.2.9 (ver por ejemplo [22]). *Si el sistema polinómico plano $x' = P(x, y), y' = Q(x, y)$ de grado n tiene curvas algebraicas invariantes irreducibles distintas f_1, \dots, f_p con cofactores K_1, \dots, K_p y factores exponenciales r_1, \dots, r_q con cofactores L_1, \dots, L_q , entonces*

- *Existen números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q$ tales que*

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^q \mu_j r_j = 0$$

si y solo si

$$h = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} r_1^{\mu_1} \dots r_q^{\mu_q}$$

es una integral primera de Darboux del sistema.

- *Si $p + q > n(n + 1)/2$, entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que*

$$h = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} r_1^{\mu_1} \dots r_q^{\mu_q}$$

es una integral primera de Darboux del sistema.

En la teoría de Darboux se suele añadir también una condición suficiente para garantizar que la integral primera sea racional. Es decir, en términos del último resultado, que los exponentes $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q$ sean enteros. En particular, esa condición suficiente es que $p + q > n(n + 1)/2 + 1$.

Tanto las definiciones de curva invariante y de sistema integrable como la teoría de integrabilidad de Darboux se pueden generalizar a conceptos y resultados equivalentes en sistemas diferenciales n -dimensionales, con $n > 2$. Es posible consultar más información al respecto en [22].

1.3. Ecuaciones diferenciales escalares periódicas

Buena parte de este trabajo se sitúa en el ámbito del estudio de ecuaciones diferenciales escalares que son periódicas con respecto de t , y de la búsqueda de las soluciones de la ecuación que sean periódicas. Esta sección está dedicada a presentar los conceptos, herramientas y resultados básicos sobre soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales periódicas. En el último apartado, mostraremos cómo las soluciones periódicas de algunas ecuaciones escalares (ecuaciones de Abel generalizadas) están relacionadas con las soluciones periódicas de algunos sistemas planos.

1.3.1. Ecuaciones diferenciales periódicas

Definición 1.3.1. La ecuación diferencial $x' = f(t, x)$, con $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \cap Lip_{loc}(\mathbb{R}^2, x)$ se dice periódica respecto de t cuando existe $T_0 > 0$ tal que

$$f(t + T_0, x) = f(t, x), \quad \text{para todo } (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Supuesta su existencia, denotaremos siempre como T al ínfimo de todos los $T_0 > 0$ que tienen esta propiedad. Supondremos $T > 0$, pues en otro caso por continuidad la ecuación es autónoma.

En el resto de la tesis, si decimos que una ecuación diferencial es periódica, entenderemos que es periódica respecto de t . En este caso, además, usaremos el término T -periódica para enfatizar que T es un periodo.

Proposición 1.3.2 (ver [25]). Consideremos la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$, con $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \cap \text{Liploc}(\mathbb{R}^2, x)$ y T -periódica. Se verifica que:

1. Si $x(t)$ es solución, entonces $x(t + T)$ también es solución.
2. Una solución $x(t)$ es T -periódica si y solo si $x(0) = x(T)$.
3. Si $x(t)$ es una solución periódica, entonces es T -periódica.

Demostración. (1.) Veamos que $y(t) = x(t + T)$ es solución. Como $f(t, x)$ es T -periódica, entonces

$$y'(t) = x'(t + T) = f(t + T, x(t + T)) = f(t, x(t + T)) = f(t, y(t)).$$

En cuanto a (2.), si $x(t)$ es T -periódica, es claro que $x(0) = x(T)$. Recíprocamente, si $x(0) = x(T)$, consideremos $y(t) = x(t + T)$, que también es solución de la ecuación por (1.). Como por hipótesis, $x(0) = y(0)$, entonces $x(t) = y(t) = x(t + T)$ sobre la intersección de sus dominios, por lo que $x(t)$ es T -periódica.

Abordemos por último (3.). Probaremos el contrarrecíproco: supongamos que $x(t)$ no es T -periódica, es decir $x(0) \neq x(T)$ por (2.).

Pongamos primero que $x(T) < x(0)$. Entonces, por unicidad de las soluciones, se cumple que $x(t + T) < x(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Por la misma razón, tenemos $x(t + 2T) < x(t)$ para todo $t \in [0, T]$. De modo recurrente, tendremos que $x(t + nT) < x(t)$ para todo $t \in [0, T]$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $x(t)$ nunca puede volver a alcanzar el valor $\max_{t \in [0, T]} x(t)$, y la solución no es periódica.

Si $x(T) > x(0)$, por argumentos análogos, podemos afirmar que ocurre que $x(t + nT) > x(t)$ para todo $t \in [0, T]$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Luego $x(t)$ nunca puede volver a alcanzar el valor $\min_{t \in [0, T]} x(t)$, y la solución no es periódica. \square

En base al resultado anterior, para estudiar las soluciones periódicas de una ecuación, bastará con estudiar solamente las T -periódicas.

Es conveniente trasladar los conceptos de curva invariante y de integral primera, así como la teoría de integrabilidad de Darboux, al contexto escalar, pues es el ámbito en el que aplicaremos esta teoría en las publicaciones recogidas en esta tesis.

Definición 1.3.3. Decimos que una curva $h(t, x) = 0$ es una curva invariante de la ecuación diferencial escalar $x' = f(t, x)$ si existe una función continua K tal que

$$\mathcal{X}(h(t, x)) := h_t(t, x) + h_x(t, x)f(t, x) = h(t, x)K(t, x).$$

Si h es un polinomio respecto de x , la curva invariante se dice algebraica, y, si además f es un polinomio respecto de x de grado m , K también ha de ser un polinomio respecto de x de grado a lo sumo $m - 1$. Una explicación detallada se puede consultar en [22].

Definición 1.3.4. Decimos que una función diferenciable no constante $L(t, x)$ es una integral primera de la ecuación escalar $x' = f(t, x)$ si

$$\mathcal{X}(L(t, x)) := L_t(t, x) + L_x(t, x)f(t, x) = 0.$$

Equivalentemente, si $x(t)$ es una solución de la ecuación, entonces $L(t, x(t))$ es constante. Si la ecuación diferencial admite una integral primera, diremos que es integrable.

El Lema 1.2.5 puede ser fácilmente adaptado a este contexto, y por lo tanto, podemos dar una noción de integrabilidad Darboux equivalente a la del plano.

Definición 1.3.5. Decimos que la función

$$h(t, x) = f_1(t, x)^{\lambda_1} \cdots f_r(t, x)^{\lambda_r}, \quad (1.8)$$

es una integral primera de Darboux de la ecuación $x' = f(t, x)$ si es una integral primera y $f_1(t, x) = 0, \dots, f_r(t, x) = 0$ son curvas algebraicas invariantes irreducibles de la ecuación con $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ no todos nulos. Si existe esta integral primera, se dice que la ecuación es Darboux integrable.

Podemos ahora adaptar el Lema 1.2.5 al caso escalar no autónomo.

Lema 1.3.6. Consideremos la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$, donde $f(t, x)$ es una función polinómica respecto de x . Si $f_1(t, x), \dots, f_r(t, x)$ son curvas algebraicas invariantes irreducibles de la ecuación con cofactores $K_1(t, x), \dots, K_r(t, x)$, y existen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i K_i = 0, \text{ entonces}$$

$$h(t, x) = f_1(t, x)^{\lambda_1} \cdots f_r(t, x)^{\lambda_r}$$

es una integral primera de Darboux de la ecuación.

1.3.2. Comportamiento asintótico de las soluciones

Las soluciones periódicas de una ecuación diferencial escalar tienen especial relevancia al estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación.

Definición 1.3.7. Sean $u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Decimos que v converge asintóticamente a u cuando t tiende a infinito si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| = 0.$$

La convergencia asintótica cuando $t \rightarrow -\infty$ se define de modo análogo.

Teorema 1.3.8 (J.L.Massera [39]). Sean $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \cap Lip_{loc}(\mathbb{R}^2, x)$ y T -periódica y $t_0 \in \mathbb{R}$.

1. Si u es una solución acotada para $t \geq t_0$ en su dominio de definición (respectivamente $t \leq t_0$), entonces está definida para todo $t \geq t_0$ (respectivamente $t \leq t_0$) y converge asintóticamente a una solución periódica cuando t converge a ∞ (respectivamente $-\infty$).

2. Si u es una solución acotada, entonces está definida en todo \mathbb{R} y existen $u_1 \leq u \leq u_2$, soluciones periódicas, tales que

- Si $u(0) \leq u(T)$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |u(t) - u_1(t)| = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - u_2(t)| = 0.$$

- Si $u(0) \geq u(T)$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |u(t) - u_2(t)| = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - u_1(t)| = 0.$$

Como consecuencia inmediata, una ecuación diferencial periódica tiene soluciones periódicas si y sólo si tiene soluciones acotadas.

Demostración. Solo se probará el apartado (1.) con $t \geq t_0$, ya que el caso $t \leq t_0$ es análogo y (2.) es consecuencia de lo anterior y de la unicidad de las soluciones. Sea u una solución de la ecuación acotada en $t \geq t_0$. Por el Teorema 1.1.7, u está definida para todo $t \geq t_0$. Para simplificar la notación suponemos, haciendo una traslación si fuera necesario, que $t_0 = 0$.

Si u es periódica, el resultado es inmediato considerando $u_1 = u$. Supongamos por tanto que u no es periódica, entonces $u(0) \neq u(T)$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $u(0) > u(T)$.

Tenemos que $u(t+T)$ también es solución de la ecuación por la Proposición 1.3.2 y $u(0) > u(T)$, luego por unicidad de las soluciones, $u(t) > u(t+T)$ para todo $t \geq 0$. Consideremos la sucesión

$$u(0) > u(T) > u(2T) > \dots$$

Por ser u acotada, esta sucesión también lo es y existe x_0 tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(nT) = x_0.$$

Sea u_1 la solución con condición inicial $u_1(0) = x_0$. Para todo t en el intervalo de definición de u_1 , la continuidad respecto de las condiciones iniciales implica que

$$u_1(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(t + nT).$$

En particular, u_1 está acotada para los $t \geq 0$ de su intervalo de definición, luego está definida para todo $t \geq 0$. Por otra parte

$$u_1(t+T) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(t + (n+1)T) = u_1(t),$$

por lo que u_1 es periódica. Además, puesto que la convergencia es uniforme en compactos, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N(\varepsilon)$, entonces

$$|u(t + nT) - u_1(t)| < \varepsilon \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Para finalizar, probemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - u_1(t)| = 0.$$

Por tanto, si fijamos $\varepsilon > 0$. Para todo $s > T + N(\varepsilon)T$, tenemos que $s = t + nT$ para algún $t \in [0, T)$ y algún entero $n \geq 1$. Luego

$$nT > (T - t) + N(\varepsilon)T > N(\varepsilon)T,$$

de donde $n > N(\varepsilon)$. Por último, de la relación $u_1(t) = u_1(t + nT)$, obtenemos

$$|u(s) - u_1(s)| = |u(t + nT) - u_1(t)| < \varepsilon.$$

□

1.3.3. Las derivadas de la aplicación desplazamiento

Uno de los objetivos principales de este trabajo consiste en la búsqueda de criterios que nos permitan determinar, o al menos acotar, el número de soluciones periódicas de una ecuación diferencial periódica.

Una de las herramientas básicas para realizar este estudio es la aplicación desplazamiento, que definimos y estudiamos en este apartado y que se utilizará con frecuencia en las siguientes secciones.

Consideremos la ecuación diferencial escalar $x' = f(t, x)$ definida por una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \cap Lip_{loc}(\mathbb{R}^2, x)$ y T -periódica. En lo que sigue, denotaremos por $u(t, x)$ al valor en t de la solución de la ecuación diferencial anterior tal que $u(0, x) = x$.

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : u(T, x) \text{ está definida}\}$.

Proposición 1.3.9. *El conjunto A es un intervalo abierto de \mathbb{R} .*

Demostración. Veamos primero que es un abierto. Sea $x_0 \in A$. Por el Teorema 1.1.8, existe un entorno abierto V_{x_0} de x_0 , tal que $u(t, x)$ está definida para $(t, x) \in [0, T] \times V_{x_0}$. Así, si $x \in V_{x_0}$, $u(T, x)$ estará definida y por tanto, $x \in A$.

Veamos ahora que es un intervalo. Sean $x_1 < x_2$, con $x_1, x_2 \in A$. Si $x \in (x_1, x_2)$, por unicidad

$$u(t, x_1) < u(t, x) < u(t, x_2).$$

$u(t, x)$ está definida necesariamente al menos en $[0, T]$, por lo que $x \in A$. □

Definición 1.3.10. Definimos la aplicación de Poincaré, π , como la que a cada $x \in A$ le asigna el valor

$$\pi(x) := u(T, x).$$

Definimos la aplicación desplazamiento, d , como la que a cada $x \in A$ le asigna el valor

$$d(x) := u(T, x) - x = \pi(x) - x.$$

Notemos que $u(t, x)$ es periódica si y solo si $u(T, x) = u(0, x) = x$ si y solo si $d(x) = 0$. Por lo tanto, encontrar ceros de la aplicación desplazamiento equivale a encontrar soluciones periódicas de la ecuación diferencial escalar de partida.

Observemos que por el Teorema 1.1.8, $d(x)$ heredará cualquier condición de regularidad que posea $f(t, x)$.

Definición 1.3.11. Si x_0 es un cero aislado de $d(x)$, entonces diremos que $u(t, x_0)$ es un ciclo límite de la ecuación diferencial. Diremos que un ciclo límite es hiperbólico si $d'(x) \neq 0$. La multiplicidad de un ciclo límite será su multiplicidad como cero de la aplicación desplazamiento.

Es decir, encontrar ciclos límite equivale a encontrar soluciones periódicas aisladas en el conjunto de soluciones periódicas de la ecuación diferencial escalar de partida.

Definición 1.3.12. Diremos que la ecuación diferencial tiene un centro si existe una solución periódica de la ecuación tal que en un entorno suyo toda solución contenida en él es periódica. Equivalentemente, un centro es un cero de la aplicación desplazamiento contenido en un intervalo donde la aplicación desplazamiento es idénticamente nula.

A continuación detallamos los cálculos completos de las expresiones de las derivadas $u_x(T, x)$, $u_{xx}(T, x)$ y $u_{xxx}(T, x)$, desarrollados por Lloyd [35], que permitirán exponer más adelante la utilidad de la aplicación desplazamiento para acotar el número de ciclos límite de la ecuación. Antes de realizar dichos cálculos, recordamos que, utilizando el método de variación de constantes, la solución del problema de valor inicial

$$x' = a(t)x + b(t), \quad x(0) = x_0$$

es

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) + \int_0^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right) ds.$$

Centrémonos ahora en el cálculo de las expresiones de las derivadas con respecto a x de $u(t, x)$. Supondremos a partir de ahora que tenemos impuestas todas las condiciones de regularidad suficientes para que se cumpla el Teorema 1.1.8 y así poder realizar todas las operaciones desarrolladas a continuación. Utilizaremos $'$ para denotar las parciales respecto de t , y los subíndices para denotar las parciales respecto de otras variables.

Con esta notación, consideremos la ecuación

$$u'(t, x) = f(t, u(t, x)). \quad (1.9)$$

Como $u(t, x)$ es solución, entonces si derivamos respecto de x , obtenemos que

$$u'_x(t, x) = f_x(t, u(t, x))u_x(t, x). \quad (1.10)$$

Esta es una ecuación lineal en $u_x(t, x)$, luego

$$u_x(t, x) = u_x(0, x) \exp\left(\int_0^t f_x(s, u(s, x))ds\right) = \exp\left(\int_0^t f_x(s, u(s, x))ds\right).$$

ya que $u_x(0, x) = 1$. Y, en particular,

$$u_x(T, x) = \exp\left(\int_0^T f_x(t, u(t, x))dt\right). \quad (1.11)$$

Calculamos ahora la segunda derivada. Si derivamos u'_x en (1.10) de nuevo con respecto a x , obtenemos

$$u'_{xx}(t, x) = f_{xx}(t, u(t, x))u_x(t, x)^2 + f_x(t, u(t, x))u_{xx}(t, x),$$

con $u_{xx}(0) = 0$. Esta es una ecuación lineal no homogénea. Por la fórmula de variación de constantes, tendremos

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, x) &= \int_0^t f_{xx}(s, u(s, x))u_x^2(s, x) \exp\left(\int_s^t f_x(\tau, u(\tau, x))d\tau\right) ds \\ &= \int_0^t f_{xx}(s, u(s, x))u_x^2(s, x) \frac{u_x(t, x)}{u_x(s, x)} ds = u_x(t, x) \int_0^t f_{xx}(s, u(s, x))u_x(s, x) ds. \end{aligned}$$

En particular,

$$u_{xx}(T, x) = u_x(T, x) \int_0^T f_{xx}(t, u(t, x))u_x(t, x) dt. \quad (1.12)$$

Por último, para obtener la derivada tercera, derivemos con respecto a x en la expresión obtenida para $u_{xx}(t, x)$,

$$u_{xxx}(t, x) = u_x(t, x) \int_0^t (f_{xxx}(s, u(s, x))u_x^2(s, x) + f_{xx}(s, u(s, x))u_{xx}(s, x)) ds \\ + u_{xx}(t, x) \left(\int_0^t f_{xx}(s, u(s, x))u_x(s, x) ds \right),$$

obteniéndose también la expresión correspondiente con $t = T$,

$$u_{xxx}(T, x) = u_x(T, x) \int_0^T (f_{xxx}(s, u(s, x))u_x^2(s, x) + f_{xx}(s, u(s, x))u_{xx}(s, x)) ds \\ + u_{xx}(T, x) \left(\int_0^T f_{xx}(s, u(s, x))u_x(s, x) ds \right).$$

Teniendo en cuenta (1.12), el segundo sumando de la primera integral de la expresión anterior queda

$$\int_0^T f_{xx}(t, u(t, x))u_{xx}(t, x) dt = \int_0^T f_{xx}(t, u(t, x)) \left(u_x(t, x) \int_0^t f_{xx}(s, u(s, x))u_x(s, x) ds \right) dt = (*),$$

e integrando aquí por partes,

$$(*) = \left(\int_0^T f_{xx}(t, u(t, x))u_x(t, x) dt \right) \left(\int_0^T f_{xx}(t, u(t, x))u_x(t, x) dt \right) \\ - \int_0^T \left(\int_0^t f_{xx}(s, u(s, x))u_x(s, x) ds \right) (f_{xx}(t, u(t, x))u_x(t, x)) dt \\ = \left(\int_0^T f_{xx}(t, u(t, x))u_x(t, x) dt \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\int_0^T f_{xx}(t, u(t, x))u_x(t, x) dt \right)^2 \\ = \frac{1}{2} \left(\int_0^T f_{xx}(t, u(t, x))u_x(t, x) dt \right)^2.$$

Finalmente, notando por (1.12) que

$$\int_0^T f_{xx}(t, u(t, x))u_x(t, x) dt = \frac{u_{xx}(T, x)}{u_x(T, x)},$$

obtenemos

$$u_{xxx}(T, x) = u_{xx}(T, x) \frac{u_{xx}(T, x)}{u_x(T, x)} + \frac{u_x(T, x)}{2} \left(\frac{u_{xx}(T, x)}{u_x(T, x)} \right)^2 \\ + u_x(T, x) \int_0^T f_{xxx}(t, u(t, x))u_x^2(t, x) dt \\ = \frac{3}{2} \frac{u_{xx}^2(T, x)}{u_x(T, x)} + u_x(T, x) \int_0^T f_{xxx}(t, u(t, x))u_x^2(t, x) dt.$$

Hemos demostrado entonces el siguiente resultado.

Proposición 1.3.13. *Consideremos la ecuación diferencial escalar $x' = f(t, x)$ definida por una función f suficientemente regular y T -periódica. Con la notación descrita anteriormente para $u(t, x)$ y sus derivadas, se cumple*

$$d'(x) = u_x(T, x) - 1 = \exp\left(\int_0^T f_x(t, u(t, x))dt\right) - 1,$$

$$d''(x) = u_{xx}(T, x) = u_x(T, x) \int_0^T f_{xx}(t, u(t, x))u_x(t, x)dt,$$

$$d'''(x) = u_{xxx}(T, x) = \frac{3}{2} \frac{u_{xx}^2(T, x)}{u_x(T, x)} + u_x(T, x) \int_0^T f_{xxx}(t, u(t, x))u_x^2(t, x)dt.$$

1.3.4. Estabilidad de soluciones periódicas

Habiendo estudiado ya las propiedades básicas de las soluciones periódicas, definido la aplicación desplazamiento y obtenido las expresiones de sus derivadas, dedicamos este apartado a mostrar la utilidad de la aplicación desplazamiento para determinar la estabilidad de las soluciones periódicas.

Para comenzar, establecemos un corolario del Teorema 1.3.8 relativo a la aplicación de Poincaré y a la aplicación desplazamiento. Seguimos en este apartado considerando una ecuación $x' = f(t, x)$, con $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \cap Lip_{loc}(\mathbb{R}^2, x)$ y T -periódica.

Corolario 1.3.14. *En las condiciones del Teorema 1.3.8, supongamos que existen dos soluciones periódicas de la ecuación $u_1 < u_2$ que sean consecutivas (es decir, cualquier otra solución periódica es menor que u_1 o mayor que u_2). Entonces:*

1. *La aplicación de Poincaré está definida para todo $x \in [u_1(0), u_2(0)]$, y $d(x)$ tiene signo estricto constante en $(u_1(0), u_2(0))$.*
2. *Si $d(x) > 0$ para todo $x \in (u_1(0), u_2(0))$, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |u(t, x) - u_1(t)| = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, x) - u_2(t)| = 0.$$

3. *Si $d(x) < 0$ para todo $x \in (u_1(0), u_2(0))$, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |u(t, x) - u_2(t)| = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, x) - u_1(t)| = 0.$$

Definición 1.3.15. Una solución acotada u es estable si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - u(0)| < \delta$, entonces $u(0, x)$ está definida al menos en $[0, \infty)$ y $|u(t, x) - u(t)| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. Se dice que u es inestable cuando no es estable.

Definición 1.3.16. Una solución acotada u es asintóticamente estable si existe $\delta > 0$ tal que si $|x - u(0)| < \delta$, entonces $u(0, x)$ está definida al menos en $[0, \infty)$ y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, x) - u(t)| = 0.$$

Proposición 1.3.17 (ver por ejemplo [5]). *Se verifica*

1. Si una solución es asintóticamente estable, entonces es estable.
2. Si una solución acotada no es periódica, entonces es asintóticamente estable (y por tanto, estable).

De este modo, solo tenemos que centrarnos en el estudio de la estabilidad de las soluciones periódicas. En este caso, dicho estudio se puede realizar a través de la aplicación desplazamiento, como muestran los siguientes resultados.

Proposición 1.3.18 (ver por ejemplo [5]). *Sea u una solución periódica de $x' = f(t, x)$.*

1. *La solución u es asintóticamente estable si y solo si $d(x)$ es estrictamente decreciente en $u(0)$.*
2. *La solución u es inestable si y solo si existe $\delta > 0$ tal que $d(x) > 0$ para todo $x \in (u(0), u(0) + \delta)$ o $d(x) < 0$ para todo $x \in (u(0) - \delta, u(0))$.*

Corolario 1.3.19 (ver por ejemplo [45]). *Sea u una solución periódica y supongamos que la aplicación de Poincaré tiene derivada continua en $u(0)$.*

1. *Si $d'(u(0)) < 0$, entonces u es asintóticamente estable (y por tanto, estable).*
2. *Si $d'(u(0)) > 0$, entonces u es inestable.*

1.3.5. Ecuaciones escalares periódicas y sistemas planos

Como se ha comentado anteriormente, un pilar del interés y la utilidad de las ecuaciones de Abel es que determinadas familias de sistemas planos admiten un cambio de variable que los transforman en ecuaciones de este tipo, relacionando el número de soluciones periódicas de la ecuación y del sistema.

De este modo, es posible obtener resultados sobre el número de ciclos límite de ecuaciones escalares periódicas polinómicas respecto de x , que luego definiremos como ecuaciones de Abel generalizadas, o ecuaciones de Abel cuando el grado respecto de x es tres, y luego trasladar estos resultados a sus correspondientes sistemas planos. En este apartado detallaremos las familias de sistemas polinómicos planos que admiten un cambio a ecuaciones escalares conservando el número de soluciones periódicas.

En términos concretos, supongamos que el origen es un punto crítico de tipo foco del sistema plano. Podemos entonces escribir el sistema como

$$x' = P(x, y) = \lambda x - y + P_2(x, y) + \cdots + P_n(x, y), \quad y' = Q(x, y) = x + \lambda y + Q_2(x, y) + \cdots + Q_n(x, y), \quad (1.13)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $P_i(x, y)$, $Q_i(x, y)$ polinomios homogéneos de grado i , $i = 2, \dots, n$. Un cambio a polares transforma el sistema anterior en

$$r' = \lambda r + \sum_{i=2}^n \phi_i(\theta) r^i, \quad \theta' = 1 + \sum_{i=2}^n \psi_i(\theta) r^{i-1}, \quad (1.14)$$

donde, para $i = 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \phi_i(\theta) &= \cos(\theta)P_i(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \sin(\theta)Q_i(\cos(\theta), \sin(\theta)), \\ \psi_i(\theta) &= \cos(\theta)Q_i(\cos(\theta), \sin(\theta)) - \sin(\theta)P_i(\cos(\theta), \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Primero repasaremos algunas de las familias más notables de sistemas planos en las que podemos encontrar esta transformación en una ecuación escalar periódica que relacione las soluciones periódicas del sistema y de la ecuación, y luego plantearemos el problema en general.

Sistemas rígidos

En algunos casos, el cambio a coordenadas polares ya transforma el sistema plano en una ecuación escalar periódica. La familia más notable en la que esto ocurre es la de sistemas rígidos.

Un sistema plano rígido, es decir, un sistema de la forma

$$x' = -y + xP(x, y), \quad y' = x + yP(x, y) \quad (1.15)$$

donde $P(x, y)$ es un polinomio, admite un cambio de variable que transforma el sistema en una ecuación escalar periódica, de modo que los ciclos límite del sistema que rodean el origen se corresponden con los ciclos límite positivos de la ecuación.

Así es, pues el cambio a coordenadas polares transforma el sistema anterior en

$$r' = rP(r \cos \theta, r \sin \theta), \quad \theta' = 1,$$

y este sistema admite una transformación trivial en la ecuación escalar periódica

$$\frac{dr}{d\theta} = rP(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

que, como veremos, es una ecuación de Abel generalizada de grado $\text{gr}(P) + 1$.

Sistemas con parte no lineal homogénea

En otros casos, las familias de sistemas planos necesitan una transformación adicional tras el cambio a coordenadas polares para convertirse en ecuaciones escalares periódicas, relacionando los ciclos límite de ambas. Una familia de gran relevancia es la de los sistemas planos con parte no lineal homogénea.

Un sistema plano con parte no lineal homogénea, es decir, un sistema de la forma

$$x' = \lambda x - y + P_n(x, y), \quad y' = y + \lambda x + Q_n(x, y), \quad (1.16)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ son polinomios homogéneos de grado n , admite un cambio de variable que transforma el sistema en una ecuación escalar periódica $\rho' = f(\theta, \rho)$. De este modo, los ciclos límite del sistema que rodean el origen se corresponden con los ciclos límite positivos de la ecuación contenidos en la región

$$V = \begin{cases} \{(\theta, \rho) : 0 < \rho < 1/\psi_n(\theta)\} & \text{cuando } \psi_n(\theta) > 0 \\ \{(\theta, \rho) : \rho > 0 \text{ o } \rho < 1/\psi_n(\theta)\} & \text{cuando } \psi_n(\theta) < 0 \\ \{(\theta, \rho) : \rho > 0 \text{ y } \rho < 1/\psi_n(\theta) \text{ para } \theta \text{ con } \psi_n(\theta) > 0\} & \text{cuando } \psi_n(\theta) \text{ tiene ceros.} \end{cases}$$

donde $f(\theta, \rho)$ vendrá dada más adelante y $\psi_n(\theta)$ ha sido definida en (1.13).

Recordemos por (1.13) que, con un cambio a polares, el sistema se transforma en

$$r' = \lambda r + \phi_n(\theta)r^n, \quad \theta' = 1 + \psi_n(\theta)r^{n-1}.$$

Se puede comprobar que los ciclos límite del sistema (1.16) que rodean el origen no pueden cortar a la curva $\theta' = 1 + \psi_n(\theta)r^{n-1} = 0$ (ver [11, 14, 20, 21]). De este modo, todos los ciclos límite del sistema que rodeen el origen deben estar ubicados en la región

$$W = \begin{cases} [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ & \text{cuando } \psi_n > 0 \\ [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \setminus \{(\theta, r) : \theta' = 0\} & \text{cuando } \psi_n < 0 \\ [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \setminus \{(\theta, r) : \theta' \leq 0\} & \text{cuando } \psi_n \text{ tiene ceros.} \end{cases}$$

donde se han omitido los argumentos de $\psi_n(\theta)$ por simplicidad. A partir de este punto, escribiremos ψ y ϕ en lugar de $\psi_n(\theta)$, $\phi_n(\theta)$ para aliviar la notación. Podemos entonces reducir el sistema en polares a la ecuación

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\lambda r + \phi(\theta)r^n}{1 + \psi(\theta)r^{n-1}}. \quad (1.17)$$

El cambio de Cherkas

$$\rho = \frac{r^{n-1}}{1 + \psi(\theta)r^{n-1}}$$

transforma la ecuación anterior en la ecuación escalar

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (n-1)(\lambda\psi - \phi)\psi\rho^3 + ((n-1)(\phi - 2\lambda\psi) - \psi')\rho^2 + (n-1)\lambda\rho, \quad (1.18)$$

manteniendo la correspondencia entre ciclos límite que rodean al origen del sistema con ciclos límite de la ecuación que están en V .

Comprobemos con detalle que el cambio de Cherkas efectivamente realiza esa transformación.

En estos cálculos y para simplificar notación, ponemos $\frac{d\rho}{d\theta} = \rho'$, $\frac{d\psi}{d\theta} = \psi'$. Primero, de la expresión

$$\rho = \frac{r^{n-1}}{1 + \psi r^{n-1}}$$

podemos obtener

$$r^{n-1} = \frac{\rho}{1 - \rho\psi} \quad \text{y} \quad 1 + r^{n-1}\psi = \frac{r^{n-1}}{\rho} = \frac{1}{1 - \rho\psi}. \quad (1.19)$$

Sea $r(\theta)$ solución de (1.17) y consideremos

$$\begin{aligned} \rho(\theta) &= \frac{r^{n-1}(\theta)}{1 + r^{n-1}(\theta)\psi(\theta)}, \\ \rho(\theta)(1 + r^{n-1}(\theta)\psi(\theta)) &= r^{n-1}(\theta). \end{aligned}$$

Derivando con respecto de θ ,

$$\begin{aligned} \rho'(\theta)(1 + r^{n-1}(\theta)\psi(\theta)) + \rho(\theta) \left((n-1)r^{n-2}(\theta) \frac{dr}{d\theta}(\theta)\psi(\theta) + r^{n-1}(\theta)\psi'(\theta) \right) \\ = (n-1)r^{n-2}(\theta) \frac{dr}{d\theta}(\theta). \end{aligned}$$

Usando (1.19), tenemos

$$\begin{aligned} \rho'(\theta)(1 + r^{n-1}(\theta)\psi(\theta)) + \rho(\theta) \left(\frac{(n-1)r^{n-2}(\theta)(\lambda r(\theta) + r^n(\theta)\phi(\theta))\psi(\theta)}{1 + r^{n-1}(\theta)\psi(\theta)} + r^{n-1}(\theta)\psi'(\theta) \right) \\ = (n-1)r^{n-2}(\theta) \frac{\lambda r(\theta) + r^n(\theta)\phi(\theta)}{1 + r^{n-1}(\theta)\psi(\theta)}. \end{aligned}$$

En lo que sigue suprimimos argumentos para simplificar notación. Por las igualdades deducidas al comienzo de esta demostración, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho'}{1 - \rho\psi} + \rho \left((n-1)\rho(\lambda + r^{n-1}\phi)\psi + \frac{\rho}{1 - \rho\psi}\psi' \right) &= (n-1)\rho(\lambda + r^{n-1}\phi), \\ \rho' + (n-1)\lambda\psi(1 - \rho\psi)\rho^2 + (n-1)\rho^3\phi\psi + \rho^2\psi' &= (n-1)\lambda(1 - \rho\psi)\rho + (n-1)\phi\rho^2, \\ \rho' &= -(n-1)\lambda\psi\rho^2 + (n-1)\lambda\psi^2\rho^3 - (n-1)\psi\phi\rho^3 - \psi'\rho^2 + (n-1)\lambda\rho - (n-1)\lambda\psi\rho^2 + (n-1)\phi\rho^2. \end{aligned}$$

Con esta igualdad es fácil obtener la expresión buscada

$$\rho' = (n-1)(\lambda\psi - \phi)\psi\rho^3 + ((n-1)(\phi - 2\lambda\psi) - \psi')\rho^2 + (n-1)\lambda\rho.$$

Sistemas cuadráticos y algunas familias de sistemas cúbicos

Los sistemas planos de la forma

$$x' = \lambda x - y + P(x, y), \quad y' = y + \lambda x + Q(x, y), \quad (1.20)$$

donde el grado del sistema es 2, 3, 4, ... se denominan respectivamente cuadráticos, cúbicos, cuárticos...

Notamos que de estas familias, solo los sistemas cuadráticos son todos sistemas con parte no lineal homogénea. Esto implica, por lo visto anteriormente, que todo sistema plano cuadrático admite un cambio de variables a una ecuación escalar periódica relacionando los ciclos límite del sistema y de la ecuación, concretando las expresiones del caso general con $n = 2$.

Si bien todos los sistemas cuadráticos admiten este tipo de cambios de variable, no todos los sistemas cúbicos lo hacen, pero hay varias familias notables de sistemas cúbicos que sí.

Obviamente, una familia de sistemas cúbicos que admite un cambio de Cherkas a una ecuación escalar periódica es la de los sistemas cúbicos que tienen parte no lineal homogénea. En [36], los autores probaron que otros sistemas cúbicos admiten un cambio de Cherkas.

- Sistemas cúbicos “quadratic-like”, de la forma

$$x' = \lambda x - y + g(x, y) + xf(x, y), \quad y' = y + \lambda x + h(x, y) + yf(x, y), \quad (1.21)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $g(x, y)$, $h(x, y)$, $f(x, y)$ son polinomios homogéneos de grado 2.

- Sistemas que en coordenadas polares tienen la forma

$$r' = a(\theta)r^2 + b(\theta)r^3, \quad \theta' = 1 + c(\theta)r + d(\theta)r^2, \quad (1.22)$$

donde a , c son polinomios trigonométricos de grado 3 (recordamos que definiremos con detalle el grado de un polinomio trigonométrico en la última sección de este marco teórico), y b , d son polinomios trigonométricos de grado 4, tales que $da^2 - b^2 - abc = 0$. En particular, sistemas de la forma

$$r' = 0, \quad \theta' = 1 + m(\theta)r + n(\theta)r^2,$$

donde m es un polinomio trigonométrico de grado 3, y n es un polinomio trigonométrico de grado 4.

- Sistemas cúbicos que en coordenadas polares tienen la forma (1.22) con $d = \frac{1}{4}c^2$, es decir, con la forma

$$r' = a(\theta)r^2 + wb(\theta)r^3, \quad \theta' = (1 - \frac{1}{2}c(\theta)r)^2.$$

Sistemas homogéneos, quasi-homogéneos y semi-homogéneos

Otra familia importante de sistemas que admiten un cambio de Cherkas a una ecuación de Abel son los sistemas quasi-homogéneos que sean monodrómicos, como se puede consultar con más detalle en [14]. Un sistema quasi-homogéneo es un sistema de la forma

$$x' = P_n(x, y) + P_m(x, y), \quad y' = Q_n(x, y) + Q_m(x, y), \quad (1.23)$$

donde P_n , Q_n son polinomios homogéneos de grado n o, posiblemente, uno de ellos es idénticamente nulo, y P_m , Q_m son polinomios homogéneos de grado m o, posiblemente, uno de ellos es

idénticamente nulo, con $n, m \geq 2$. En particular, los sistemas homogéneos y los semi-homogéneos también admiten un cambio de Cherkas, es decir, sistemas respectivamente de las formas

$$x' = P_n(x, y), \quad y' = Q_n(x, y) \quad (1.24)$$

siendo P_n, Q_n polinomios homogéneos de grado $n \geq 2$, y

$$x' = P_n(x, y), \quad y' = Q_m(x, y) \quad (1.25)$$

siendo P_n, Q_m polinomios homogéneos de grados n, m respectivamente, con $n, m \geq 2, n \neq m$.

Hemos resaltado las familias de sistemas planos más relevantes que admiten una transformación a una ecuación escalar periódica que relacione el número de ciclos límite de ambas. Este problema se puede considerar en general.

Consideremos un sistema plano (1.13), que en polares quedará como (1.14). En este contexto general, se puede considerar el cambio de Cherkas

$$\rho(\theta) = \frac{u(r)}{-1 + B(\theta)u(r)},$$

donde u es un polinomio estrictamente creciente tal que $u(0) = 0$, B es una función 2π -periódica y suficientemente regular. Dado este cambio, la pregunta es: ¿qué sistemas planos se transforman en una ecuación escalar periódica en una región D del plano que contiene el origen, relacionando las soluciones periódicas del sistema y de la ecuación? La solución a este problema viene dada en [3].

1.4. Cotas superiores del número de ciclos límite

Como se ha expuesto en la introducción, los trabajos que conforman esta tesis abordan el problema de acotar el número o bien de ciclos límite de la ecuación o bien de cierto tipo de soluciones de determinadas familias de ecuaciones de Abel.

En esta sección, concretaremos criterios sobre el número de ciclos límite de ecuaciones diferenciales de Abel y presentamos algunos resultados sobre el número de soluciones que cumplen ciertas propiedades de cierto tipo de ecuaciones de Abel.

1.4.1. Ecuación lineal y de Ricatti. Resultado de Lins-Neto.

Como introducción a esta sección, en este apartado estudiaremos el número máximo de ciclos límite que tienen la ecuación lineal y de Ricatti y veremos que este número admite una cota general. Sin embargo, un resultado de Lins-Neto nos permitirá mostrar que el número de ciclos límite de una ecuación de Abel general no está acotado.

Comenzamos enunciando dos resultados sobre las cotas superiores para las ecuaciones periódicas lineales y de Ricatti.

Proposición 1.4.1. *Una ecuación lineal, de la forma*

$$x' = a(t)x + b(t).$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas y T -periódicas, tiene a lo sumo un ciclo límite.

Demostración. Utilizando el método de variación de constantes, podemos dar explícitamente las soluciones de esta ecuación. Así, sabemos que en este caso

$$u(t, x) = x \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right) + \int_0^t b(s) \exp \left(\int_s^t a(\tau) d\tau \right) ds.$$

Por lo tanto

$$d(x) = u(T, x) - x = x \left(\exp \left(\int_0^T a(t) dt \right) - 1 \right) + \int_0^T b(t) \exp \left(\int_t^T a(s) ds \right) dt.$$

Así, como $d(x)$ es una recta, si $d(x)$ no es idénticamente nula entonces corta a lo sumo una vez al eje de abcisas, es decir, a lo sumo hay un ciclo límite. \square

Proposición 1.4.2. *La ecuación de Riccati*

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),$$

donde $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ son funciones continuas y T -periódicas, tiene a lo sumo dos ciclos límite.

Demostración. Supongamos que la ecuación tiene dos soluciones periódicas, $x_1(t)$, $x_2(t)$. Consideremos el cambio de variable

$$y = \frac{x - x_1(t)}{x_2(t) - x_1(t)}.$$

Este cambio transforma la ecuación de partida en

$$y' = \lambda(t)y(y - 1),$$

donde $\lambda(t) = a(t)(x_2(t) - x_1(t))$. Como x_1 y x_2 son periódicas, el cambio de variables conserva las soluciones periódicas. Además, el cambio envía x_1 a $y_1 \equiv 0$ y x_2 a $y_2 \equiv 1$. Si $y(t)$ es una solución no constante definida en $[0, T]$,

$$\begin{aligned} \frac{y'(t)}{y(t)(y(t) - 1)} &= \lambda(t), \\ \int_0^T \frac{y'(t)}{y(t)(y(t) - 1)} dt &= \int_{y(0)}^{y(T)} \frac{dy}{y(y - 1)} = \int_0^T \lambda(t) dt. \end{aligned}$$

Sea

$$H(y) = \int_{y(0)}^y \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - 1)}.$$

Entonces, H es inyectiva en cada intervalo de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, y

$$H(y(T)) - H(y(0)) = \int_0^T \lambda(t) dt.$$

Distinguimos dos casos. Si $\int_0^T \lambda(t) dt = 0$, obtenemos $H(y(T)) = H(y(0))$, lo que implica $y(T) = y(0)$. En consecuencia, todas las soluciones definidas en $[0, T]$ son periódicas y no hay ciclos límite.

El segundo caso es $\int_0^T \lambda(t) dt \neq 0$, en cuyo caso $H(y(T)) \neq H(y(0))$, lo que implica $y(T) \neq y(0)$. Entonces, las únicas soluciones periódicas son las constantes $y_1(t) \equiv 0$, $y_2(t) \equiv 1$. \square

Destacamos que las cotas de ciclos límite obtenidas coinciden con las del caso autónomo, es decir, cuando $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ son constantes.

Primero, definimos formalmente lo que entenderemos por una ecuación de Abel, para fijar notación.

Definición 1.4.3. Una ecuación de Abel es una ecuación diferencial de la forma

$$x' = a_3(t)x^3 + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t),$$

donde $a_3(t), a_2(t), a_1(t), a_0(t)$ son funciones continuas.

Una ecuación de Abel generalizada es una ecuación diferencial de la forma

$$x' = \sum_{i=0}^n a_i(t)x^i,$$

donde $a_i(t)$, $i = 0, \dots, n$, son funciones continuas y $n \geq 4$.

Proposición 1.4.4 (A. Lins Neto [38]). *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que n tal que la ecuación de Abel*

$$x' = \cos(t)x^2 + p(\sin t)x^3$$

tiene al menos n ciclos límite.

Corolario 1.4.5. *No existe una cota general para el número de ciclos límite de una ecuación de Abel periódica con respecto de t .*

Este resultado motiva el estudio del número de ciclos límite de las ecuaciones de Abel periódicas. Otro problema notable en el ámbito de las ecuaciones de Abel periódicas consiste en determinar condiciones que impliquen la existencia de un centro, equivalente al problema de centro-foco de Poincaré para sistemas planos. Para estudiar este problema, es relevante la denominada condición de composición.

Definición 1.4.6. Decimos que la ecuación de Abel

$$x' = a(t)x^3 + b(t)x^2,$$

donde $a(t), b(t)$ son continuas y T -periódicas, verifica la condición de composición si, definidos

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds, \quad B(t) = \int_0^t b(s)ds,$$

existen funciones \tilde{A}, \tilde{B}, W tales que

$$A(t) = \tilde{A}(W(t)), \quad B(t) = \tilde{B}(W(t)), \quad W(0) = W(T).$$

Es fácil ver que la condición de composición implica la existencia de un centro. Consideremos el cambio de variable $x(t) = y(W(t))$, con el que obtenemos la ecuación de Abel

$$\frac{dy}{dW} = \bar{A}'(W)y^3 + \bar{B}'(W)y^2, \tag{1.26}$$

con una relación biyectiva entre las soluciones de esta ecuación y de la ecuación de partida. Como $W(t)$ es periódica, la ecuación ha de tener un centro, pues $x(0) = y(W(0)) = y(W(T)) = x(T)$.

Se ha probado en [40] que la condición de composición determina ciertos centros paramétricos cuando $a(t), b(t)$ son polinomios. El problema está abierto para polinomios trigonométricos, y se conjetura que el recíproco del resultado es cierto en el caso polinomial, para más detalles, se puede consultar [18, 24].

1.4.2. Criterios de cotas de ciclos límite para ecuaciones de Abel

En este apartado presentamos algunos de los principales resultados conocidos que permiten acotar el número de ciclos límite de la ecuación de Abel periódica al imponer ciertas condiciones sobre los coeficientes con respecto de t de la ecuación.

En el resto de la sección, en todos los resultados sobre ecuaciones de Abel supondremos que estas son periódicas y consideraremos ecuaciones de la forma

$$x' = a(t)x^3 + b(t)x^2 + c(t)x, \quad (1.27)$$

esto es, asumiremos que el término independiente con respecto de x es idénticamente nulo. Esto no es restrictivo, pues si $u(t)$ es una solución periódica de la ecuación de Abel con el término independiente no nulo, entonces el cambio de variable $y = x - u$ transforma la solución anterior en la ecuación (1.27) estableciendo una relación biunívoca entre las soluciones periódicas de ambas.

Incluimos el siguiente resultado con demostración, que contiene alguna de las ideas esenciales que se utilizan en el primer artículo de esta tesis.

Teorema 1.4.7 (A. Gasull y J. Llibre [20]). *Consideremos la ecuación de Abel*

$$x' = a(t)x^3 + b(t)x^2 + c(t)x,$$

siendo $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ suficientemente regulares y T -periódicas. Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (i) Si $a(t)$ no es idénticamente nula y no cambia de signo en $[0, T]$, el número de ciclos límite de la ecuación, contando multiplicidad, es a lo sumo tres.
- (ii) Si $b(t)$ no es idénticamente nula y no cambia de signo en $[0, T]$, el número de ciclos límite de la ecuación, contando multiplicidad, es a lo sumo tres.

Demostración. Apartado (i).

Sea $S(t, x) = a(t)x^3 + b(t)x^2 + c(t)x$, y asumamos primero que $a(t) \geq 0$. Se cumple que

$$S_{xxx}(t, x) = 6a(t) \geq 0.$$

que no puede ser idénticamente nula por hipótesis. Por la Proposición 1.3.13,

$$d'''(x) = u_{xxx}(T, x) = \frac{3 u_{xx}^2(T, x)}{2 u_x(T, x)} + u_x(T, x) \int_0^T S_{xxx}(t, u(t, x)) u_x^2(t, x) dt.$$

Como $u_x(T, x) > 0$, $u_{xx}^2(T, x) \geq 0$ y $S_{xxx}(t, x) \geq 0$ y no es idénticamente nula en $[0, T]$, entonces $d'''(x) > 0$ y por tanto $d(x)$ tendrá a lo sumo tres ceros (aislados), es decir, la ecuación tendrá a lo sumo tres ciclos límite contando multiplicidad.

Si $a(t) \leq 0$, entonces $S_{xxx}(t, x) = 6a(t) \leq 0$ y podemos seguir un razonamiento similar al anterior, considerando el cambio de variable $y(t) = -x(-t)$, que conserva soluciones periódicas y da lugar a una nueva ecuación con derivada tercera con signo definido positivo.

En efecto, supongamos que $S_{xxx}(t, x) \leq 0$ y no idénticamente nula. El cambio $y(t) = -x(-t)$ conserva las soluciones periódicas y

$$y'(t) = x'(-t) = S(-t, x(-t)) = S(-t, -y(t)) =: g(t, y(t)).$$

Y por tanto

$$\begin{aligned}g_y(t, y) &= -S_x(-t, -y), \\g_{yy}(t, y) &= S_{xx}(-t, -y), \\g_{yyy}(t, y) &= -S_{xxx}(-t, -y) > 0.\end{aligned}$$

Y podemos aplicar lo que ya sabemos cuando la tercera derivada es positiva y no idénticamente nula.

Apartado (ii). Supongamos que $b(t) \geq 0$, y el caso $b(t) \leq 0$ será análogo. Consideremos una solución $u(t, x)$ con condición inicial $x > 0$. Entonces

$$a(t)u^2 = \frac{u'}{u} - b(t)u - c(t),$$

donde hemos suprimido los argumentos de $u(t, x)$ por simplicidad. Por lo tanto

$$\begin{aligned}d'(x) &= \exp\left(\int_0^T 3a(t)u^2 + 2b(t)u + c(t)dt\right) - 1 = \exp\left(\int_0^T 3\frac{u'}{u} - b(t)u - 2c(t)dt\right) - 1 \\&= \frac{u^3(T)}{u^3(0)} \exp\left(\int_0^T -b(t)u - 2c(t)dt\right) - 1.\end{aligned}$$

En particular, si u es periódica

$$d'(x) = \exp\left(\int_0^T -b(t)u - 2c(t)dt\right) - 1.$$

Como por hipótesis, el término derecho de la igualdad anterior es monótono, $d'(x)$ también lo es sobre las soluciones periódicas. Si $d'(x)$ es estrictamente creciente (el caso estrictamente decreciente es análogo) sobre las soluciones periódicas (es decir, que dados $x_1 < x_2$ tales que $d(x_1) = d(x_2) = 0$, se tiene $d'(x_1) < d'(x_2)$) y hubiera tres raíces simples de $d(x)$, $x_1 < x_2 < x_3$, entonces las opciones serían:

$$d'(x_1) < 0, \quad d'(x_2) > 0, \quad d'(x_3) < 0,$$

y llegamos a contradicción porque $d'(x_2) > d'(x_3)$, o

$$d'(x_1) > 0, \quad d'(x_2) < 0, \quad d'(x_3) > 0,$$

y llegamos a contradicción porque $d'(x_1) > d'(x_2)$.

Calculando $d''(x)$ y particularizando su expresión sobre las soluciones periódicas múltiples, de modo similar a los cálculos realizados con $d'(x)$, se demuestra que $d''(x)$ tiene signo definido opuesto al de $b(t)$ sobre dichos ceros. Por lo tanto, $d(x)$ no puede tener ceros triples.

Veamos que tampoco es posible que haya un cero doble y un cero simple de $d(x)$. En efecto, consideremos la siguiente perturbación de la ecuación original

$$x' = g(t, x, \lambda) = S(t, x) + \lambda.$$

Sea $u(t, x, \lambda)$ la solución de la ecuación perturbada tal que en $t = 0$ vale x . Por el Teorema 1.1.8,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u(t, x, \lambda) = u(t, x).$$

Además

$$u'_x = g_x(t, u, \lambda)u_x = S_x(t, u)u_x, \quad u_x(0) = 1,$$

$$u_x(T, x, \lambda) = \exp\left(\int_0^T g_x(t, u, \lambda)\right) = \exp\left(\int_0^T S_x(t, u)\right).$$

Y por tanto en este caso g_x también hereda de S_x el carácter estrictamente monótono sobre las soluciones periódicas (S_x es estrictamente monótona pues $d'(x)$ lo es, por hipótesis). Por otra parte, para $\lambda > 0$, como

$$g(t, x, \lambda) = S(t, x) + \lambda > f(t, x).$$

Entonces, para $t \neq 0$,

$$u(t, x, \lambda) > u(t, x).$$

Por lo tanto, si $d(x, \lambda)$ denota la función desplazamiento asociada al sistema $x' = g(t, x, \lambda)$, concluimos que

$$d(x, \lambda) > d(x).$$

Lo cual es una contradicción pues esta perturbación generaría tres raíces simples, lo cual ya hemos probado que no es posible al conservarse el carácter estrictamente monótono. El razonamiento para una solución $u(t, x) < 0$ es análogo, por lo que hemos probado por tanto que en las bandas $x > 0$ y $x < 0$ hay, respectivamente, a lo sumo dos ciclos límite contando multiplicidad.

Debemos comprobar que el número máximo de ciclos límite no es mayor que tres. Sea

$$\hat{c} = \int_0^T c(t)dt.$$

No es restrictivo considerar $\hat{c} \geq 0$ (es decir, que el origen es inestable, pues $d'(0) = \exp(\hat{c}) - 1$), ya que la otra opción seguirá razonamientos análogos. Si $u(t, x_0)$ es una órbita periódica con $x_0 > 0$, entonces

$$d'(x_0) = \exp\left(-\int_0^T (b(t)u(t, x_0) + 2c(t))dt\right) - 1 < 0.$$

Por lo tanto, $d(x)$ es estrictamente decreciente sobre las soluciones periódicas en la banda $x > 0$. Veamos que esto nos permite afirmar la ecuación tiene a lo sumo un ciclo límite en esta banda, que además será hiperbólico y estable.

Así es, pues si consideramos dos ceros consecutivos de $d(x)$, $x_1 < x_2$, como la derivada es negativa en cada uno de ellos, $d(x)$ será negativa a la derecha de x_1 y positiva a la izquierda de x_2 , luego por el Teorema de Bolzano, debe existir $x_3 \in (x_1, x_2)$ tal que $d(x_3) = 0$, en contradicción con que x_1, x_2 sean raíces consecutivas.

Sabemos por lo tanto que en $x > 0$ hay a lo sumo un ciclo límite. Hay dos opciones:

Si $\hat{c} = 0$, $d(x)$ será estrictamente creciente sobre las soluciones periódicas en la zona $x < 0$, y por el razonamiento anterior habrá a lo sumo un ciclo límite hiperbólico e inestable, y hemos terminado.

Si $\hat{c} > 0$, sin pérdida de generalidad suponemos que hay un ciclo límite con condición inicial $x_0 > 0$ y dos ciclos límite (o uno doble) con condiciones iniciales $0 > x_1 \geq x_2$. Supongamos $x_1 > x_2$ (el caso $x_1 = x_2$ es similar). Ya hemos probado que en la región $x < 0$ solo puede haber dos ciclos límite contando multiplicidad, así que los ciclos límite con condiciones iniciales x_1 y x_2 son hiperbólicos y, puesto que

$$d'(x) = \exp\left(-\int_0^T (b(t)u(t, x) + 2c(t))dt\right) - 1$$

es monótona decreciente sobre las soluciones periódicas, si $x_1 > x_2$, entonces $d'(x_1) < d'(x_2)$. Además, estos dos ciclos límite no pueden tener la misma estabilidad (ya que entonces, por el Teorema de Bolzano, habría un ciclo límite intermedio, pero ya hemos probado que en $x < 0$ hay a lo sumo dos ciclos límite contando multiplicidad). Es decir, necesariamente $d'(x_1) < 0$ y $d'(x_2) > 0$, es decir, el primero es estable y el segundo inestable (ya que la estabilidad en el origen viene dada en este caso por el signo de \hat{c}).

Sea $\alpha(t) = -x(t)$. Entonces

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= -x'(t) = -a(t)x^3 - b(t)x^2 - c(t)x = a(t)(-x)^3 - b(t)(-x)^2 + c(t)(-x) \\ &\leq a(t)(-x)^3 + b(t)(-x)^2 + c(t)(-x),\end{aligned}$$

puesto que $b(t) \geq 0$. Hemos obtenido

$$\alpha' \leq a(t)\alpha^3 + b(t)\alpha^2 + c(t)\alpha.$$

Es decir, α es una subsolución de la ecuación.

Primero, $-x_0$ no puede ser x_1 ni x_2 porque $u(t, -x_0)$ es una subsolución por lo visto antes y las soluciones periódicas no cortan ni a las subsoluciones ni a las supersoluciones. Ahora, como $u(t, -x_0)$ es una subsolución, debe existir un entorno de $-x_0$ tal que la aplicación desplazamiento sea positiva a su derecha. Puesto que por el estudio anterior de las estabilidades de los ciclos límite considerados sabemos que $d(x) < 0$ a la izquierda de x_2 y en $(x_1, 0)$, concluimos $-x_0 \in (x_2, x_1)$.

Pero entonces, $x_0 \in (-x_1, -x_2)$. Llegamos a contradicción pues $u(t, -x_2)$ también es subsolución y sin embargo $d(x) < 0$ a la derecha de x_0 . Por lo tanto el ciclo límite de condición inicial x_0 y el de condición inicial x_2 no pueden existir simultáneamente. \square

Si tenemos una ecuación de Abel generalizada con $n \geq 4$, la condición de que $a_n(t)$ tenga signo definido no permite acotar el número de ciclos límite de la ecuación, como sí pasa en $n = 3$. Basta considerar $x' = a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 + \varepsilon x^4$. Fijado n , para $\varepsilon = 0$ por la Proposición 1.4.4 existen $a_3(t), a_2(t)$ de modo que la ecuación tiene al menos n ciclos límite hiperbólicos. Siguiendo la misma idea que en el resultado de Lins-Neto, dichos ciclos límite perduran tras una pequeña perturbación de ε , para más información, se puede consultar [19, 38].

Si $c(t) \equiv 0$, se puede dar un resultado más preciso, y más general, que enunciamos sin demostración.

Teorema 1.4.8 (M.J. Álvarez, A. Gasull and H. Giacomini, [4]). *Consideremos la ecuación de Abel con $c(t) \equiv 0$, es decir,*

$$x' = S(t, x) = a(t)x^3 + b(t)x^2,$$

con $a(t), b(t)$ suficientemente regulares y T -periódicas. Si existen números reales α, β tales que $\alpha A(t) + \beta B(t)$ tiene signo definido en $[0, T]$, entonces la ecuación tiene a lo un ciclo límite no idénticamente nulo.

Si tomamos $\alpha = 0, \beta = 1$ o $\alpha = 1, \beta = 0$, el resultado dice que si $c(t) \equiv 0$ y $a(t)$ o $b(t)$ tienen signo definido, entonces la ecuación tiene a lo sumo un ciclo límite no idénticamente nulo.

Otro tipo de resultados relativos al número de ciclos límite de ecuaciones de Abel imponen condiciones de acotación sobre los coeficientes con respecto de t de la ecuación. Un ejemplo es el siguiente teorema de Ilyashenko [31].

Teorema 1.4.9 (Y. Ilyashenko [31]). *Consideremos la ecuación de Abel*

$$x'(t) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^i, \quad (1.28)$$

con $n \geq 4$, $a_i(t)$ funciones suficientemente regulares y T -periódicas. Si existe $C > 1$ tal que $\max_{t \in [0, T]} |a_i(t)| \leq C$ para todo $i = 0, \dots, n-1$, entonces, la ecuación (1.28) tiene a lo sumo

$$8 \exp \left((3C + 2) \exp \left(\frac{3}{2}(2C + 3)^n \right) \right)$$

ciclos límite.

Notamos que los casos $n \leq 3$ están ya cubiertos por los resultados anteriores, donde la cota es n . Otros ejemplos de resultados en esta línea se pueden consultar en [10, 46].

Otro punto de vista para estudiar la ecuación

$$x' = a(t)x^3 + b(t)x^2$$

consiste en partir de que las funciones $a(t)$ y $b(t)$ son polinomios trigonométricos, e intentar acotar el número de ciclos límite de la ecuación en términos de los grados de estos polinomios (considerando el grado en el sentido de Fourier). Puesto que con grado cero el problema es trivial, la formulación más sencilla y no trivial es la de grado uno, es decir, plantear ecuaciones del tipo

$$x' = (a_0 + a_1 \sin t + a_2 \cos t)x^3 + (b_0 + b_1 \sin t + b_2 \cos t)x^2, \quad (1.29)$$

con $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Este problema fue propuesto por Gasull (ver por ejemplo [4]), y ha sido resuelto completamente en [53], donde se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.4.10 (X. Yu, J. Huang, C. Liu, [53]). *La ecuación de Abel (1.29) tiene a lo sumo tres ciclos límite, y la cota se alcanza.*

Este trabajo completa el estudio de (1.29) que se ha ido realizando a lo largo de varios trabajos, cubriendo los casos restantes que no se habían estudiado en los trabajos anteriores, como [4, 9].

Otra aproximación es plantear ecuaciones

$$x' = \left(\sum_{i=1}^l a_i A_i(t) \right) x^3 + \left(\sum_{j=1}^p b_j B_j(t) \right) x^2, \quad (1.30)$$

con $l, p \geq 1$ o, en términos de una ecuación de Abel generalizada,

$$x' = \left(\sum_{i=1}^l a_i A_i(t) \right) x^m + \left(\sum_{j=1}^p b_j B_j(t) \right) x^n, \quad (1.31)$$

con $l, p \geq 1$, $m > n \geq 2$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, y $A_i(t), B_j(t)$ monomios trigonométricos reales que pueden tener cuatro tipos de comportamiento: tipo seno, tipo coseno, tipo impar o tipo par.

Denotaremos por \mathcal{S} , \mathcal{C} , \mathcal{O} y \mathcal{E} a los cuatro conjuntos de monomios con estos cuatro comportamientos, definidos como

$$\mathcal{S} = \left\{ \sin^i(t) \cos^j(t), i \text{ impar}, j \text{ par} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \sin^i(t) \cos^j(t), i \text{ par}, j \text{ impar} \right\},$$

$$\mathcal{O} = \left\{ \sin^i(t) \cos^j(t), i, j \text{ impar} \right\}, \quad \mathcal{E} = \left\{ \sin^i(t) \cos^j(t), i, j \text{ par} \right\}.$$

El problema consiste en dar criterios que acoten el número de ciclos límite dependiendo de las distintas combinaciones de comportamiento para las funciones $A_i(t)$.

Algunos trabajos que estudian subfamilias del tipo (1.30) o (1.31) son [1, 2], donde podemos resumir algunos de los principales resultados obtenidos en el siguiente teorema.

Antes, definamos F como la familia de ecuaciones (1.31) con $A_1(t) \in \mathcal{S}$, $B_1(t) \in \mathcal{C}$, y todos los otros monomios en \mathcal{O} .

Teorema 1.4.11 (M.J. Alvarez, J.L. Bravo, M. Fernandez, R. Prohens [2]). *Consideremos ecuaciones de Abel generalizadas (1.31) que no estén en F . Entonces, el máximo número de ciclos límite que la ecuación puede tener es*

- Cero, si y solo si todos los monomios están en $\mathcal{S} \cup \mathcal{O}$ (resp $\mathcal{C} \cup \mathcal{O}$).
- Uno, si y solo si una de las siguientes condiciones se satisfacen (salvo orden de los monomios o intercambio de los coeficientes de x^m y x^n):
 - $A_1 \in \mathcal{E}$ y el resto de los monomios están en $\mathcal{S} \cup \mathcal{O}$ (resp $\mathcal{C} \cup \mathcal{O}$).
 - $l = p = 2$, $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $A_1 \in \mathcal{S}$ y $A_2 \in \mathcal{C}$.
 - $p = 1$, $B_1 \in \mathcal{E}$, y $A_i \notin \mathcal{E}$ para todo i .
 - $p = 1$, $B_1 \in \mathcal{C}$, $A_1 \in \mathcal{S}$, y $A_i \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ para todo $i \neq 1$.
 - $p = 1$, $B_1 \in \mathcal{S}$, $A_1 \in \mathcal{C}$, y $A_i \in \mathcal{S} \cup \mathcal{O}$ para todo $i \neq 1$.
 - $p = 1$, $B_1 \in \mathcal{O}$, $A_1 \in \mathcal{S}$, $A_2 \in \mathcal{C}$ y $A_i \in \mathcal{O}$ para todo $i \neq 1, 2$.
- Mayor o igual que dos en los otros casos.

Aunque no se ha probado el resultado para la familia F , resultados parciales y estudios computacionales sugieren que para esta familia el número máximo de ciclos límite es mayor o igual que dos, y por lo tanto que el resultado anterior podría ser cierto para toda familia de ecuaciones de Abel de la forma (1.31).

1.4.3. Cotas superiores del número de ciclos límite

Como se ha visto en el Teorema 1.4.7, las derivadas de la aplicación desplazamiento son una herramienta importante para desarrollar criterios de cotas superiores del número de ciclos límite de ecuaciones de Abel periódicas. Estas técnicas son perfectamente generalizables a ecuaciones escalares periódicas genéricas. Este apartado está dedicado a exponer las herramientas generales que se utilizan en este trabajo para determinar, o al menos acotar, el número de soluciones periódicas de una ecuación diferencial periódica cualquiera: las derivadas de la aplicación desplazamiento, y la función auxiliar de Huang y Liang.

El siguiente teorema reúne los resultados que generalizan las técnicas utilizadas en el Teorema 1.4.7, y se basa en los resultados de Pliss [41] (condiciones sobre derivada con signo), de Gasull

y Llibre [20] (condiciones solo sobre las soluciones periódicas) y de Andersen y Sandqvist [45] (generalización de las condiciones sobre derivadas con signo).

No incluimos la demostración, pues es una generalización de la prueba del Teorema 1.4.7 para una ecuación escalar dada por una función periódica $f(t, x)$ suficientemente regular cualquiera.

Teorema 1.4.12. *Consideremos la ecuación diferencial escalar $x' = f(t, x)$ definida por una función f suficientemente regular y T -periódica. Entonces*

1. *Son condiciones suficientes para que haya a lo sumo un ciclo límite:*

a) $f_x(t, x) \geq 0$ y existe un conjunto no vacío $E \subset [0, T]$ tal que f_x no es idénticamente nula sobre ese intervalo.

b) $f_x(t, x) > 0$ cuando $d(x) = 0$.

Los resultados anteriores se cumplen si cambia el sentido de las desigualdades.

2. *Son condiciones suficientes para que haya a lo sumo dos ciclos límite (contando multiplicidad):*

a) $f_{xx}(t, x) \geq 0$ y existe un conjunto no vacío $E \subset [0, T]$ tal que f_{xx} es no idénticamente nula sobre ese intervalo.

b) $f_x(t, x)$ es estrictamente monótona cuando $d(x) = 0$.

Los resultados anteriores se cumplen si cambia el sentido de las desigualdades.

3. *Es condición suficiente para que haya a lo sumo tres ciclos límite (contando multiplicidad) que $f_{xxx}(t, x) \geq 0$ y que exista un conjunto no vacío $E \subset [0, T]$ tal que f_{xxx} es no idénticamente nula sobre ese intervalo. El resultado anterior se cumple si cambia el sentido de la desigualdad.*

Las derivadas de la aplicación desplazamiento nos han permitido obtener una serie de criterios presentados en el Teorema 1.4.12. El problema fue abordado de un modo similar, pero menos restrictivo, con la introducción de una función auxiliar propuesta por Huang y Liang.

La idea básica detrás de este método consigue en encontrar funciones $G(t, x)$ distintas a $f_x(t, x)$ tales que

$$d'(x) = \exp\left(\int_0^T G(t, u(t, x))dt\right) - 1.$$

De este modo, para cada $G(t, x)$ que cumpla esta condición, si $G(t, x)$ tiene signo definido positivo o negativo en $[0, T]$, la ecuación tendrá a lo sumo un ciclo límite. Lo mismo es válido si esto es cierto sobre las soluciones periódicas.

El planteamiento es el siguiente: encontrar una función $H(t, x)$ continua, no idénticamente nula y tal que para toda solución periódica $u(t, x)$, $\int_0^T H(t, u(t, x))dt = 0$.

Entonces, si $G(t, x) = f_x(t, x) + H(t, x)$,

$$\int_0^T f_x(t, u)dt = \int_0^T G(t, u)dt,$$

y

$$d'(x) = \exp\left(\int_0^T f_x(t, u)dt\right) - 1 = \exp\left(\int_0^T G(t, u)dt\right) - 1.$$

Por lo tanto, algunos de los criterios que antes aplicábamos a $f_x(t, x)$ ahora podrían aplicarse sobre $G(t, x)$.

A continuación, enunciamos formalmente los resultados de Huang y Liang.

Proposición 1.4.13 (J. Huang y H. Liang, ver [28]). *Consideremos la ecuación diferencial escalar $x' = f(t, x)$ definida por una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \cap Lip_{loc}(\mathbb{R}^2, x)$ y T -periódica. Sea f tantas veces derivable como sea necesario. Sean $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \cap Lip_{loc}(\mathbb{R}^2, x)$ y T -periódica y $G(t, x)$ definida como*

$$G(t, x) = f_x(t, x) + F_t(t, x) + F_x(t, x)f(t, x).$$

Entonces:

1. *Es condición suficiente para que haya a lo sumo un ciclo límite que $G(t, x) \geq 0$ y que exista un conjunto no vacío $E \subset [0, T]$ tal que G no sea idénticamente nula sobre ese intervalo. La condición sigue siendo válida si se cambia el sentido de la desigualdad.*
2. *Es condición suficiente para que haya a lo sumo dos ciclos límite (contando multiplicidad) que $G(t, x)$ sea estrictamente monótona sobre soluciones periódicas.*

Demostración. **Condición 1.** Como

$$\begin{aligned} \int_0^T F_t(t, u(t, x)) + F_x(t, u(t, x))f(t, u(t, x))dt &= \int_0^T F_t(t, u(t, x))dt \\ &= F(T, u(T, x)) - F(0, u(0, x)), \end{aligned}$$

si $u(t, x)$ es periódica, entonces $u(T, x) = u(0, x) = x$ y, como hemos supuesto que F es T -periódica, $F(T, u(T, x)) - F(0, u(0, x)) = 0$. Luego

$$\int_0^T F_t(t, u(t, x)) + F_x(t, u(t, x))f(t, u(t, x))dt = 0,$$

de donde se sigue que

$$\int_0^T f_x(t, u(t, x))dt = \int_0^T G(t, u(t, x))dt.$$

Por tanto, cuando $u(t, x)$ es periódica,

$$d'(x) = \exp\left(\int_0^T G(t, u(t, x))dt\right) - 1.$$

Es decir, sobre las soluciones periódicas, si $G(t, x)$ tiene signo, coincide con el de $d'(x)$. Así, si $G(t, x) \geq 0$ y no es idénticamente nula en $[0, T]$, entonces sobre las soluciones periódicas $d'(x) > 0$, lo cual nos permite obtener la tesis con los mismos razonamientos de la Proposición 2.1.1.

Condición 2. Si $G(t, x)$ es estrictamente creciente (el caso decreciente es análogo) sobre las soluciones periódicas, entonces, como sobre las soluciones periódicas se cumple que

$$d'(x) = \exp\left(\int_0^T G(t, u(t, x))dt\right) - 1,$$

concluimos que $d'(x_1) < d'(x_2)$, que con el razonamiento expuesto en la Proposición 1.4.12, nos permite concluir que a lo sumo hay dos ciclos límite. Notamos que una condición suficiente para que $G(t, x)$ sea estrictamente creciente sobre las soluciones periódicas es que $G_x(t, x) > 0$. \square

Este enfoque permite una mayor flexibilidad que la Proposición 1.4.12 a la hora de dar criterios para acotar el número de ciclos límite de una ecuación periódica.

Dada una ecuación diferencial $x' = f(t, x)$, los criterios de la Proposición 1.4.12 solo se cumplen si algunas de las primeras derivadas con respecto a x de f cumplen ciertas condiciones de signo o de monotonía.

Con la función auxiliar de Huang y Liang, estas condiciones tienen que satisfacerse, esencialmente, para una función periódica cualquiera $G(t, x)$ cuya integral en $[0, T]$ coincida con la de $f(t, x)$, o que las integrales coincidan sobre las soluciones periódicas. Sin embargo, no cualquier función $G(t, x)$ que cumpla estas condiciones produce criterios eficaces y novedosos con respecto a los ya conocidos, y no existe un método estándar para encontrar las funciones auxiliares más útiles.

En el siguiente teorema presentamos de modo compacto el resultado que nos será necesario aplicar siempre que utilicemos la función auxiliar de Huang y Liang.

Teorema 1.4.14 (J. Huang y H. Liang [27]). Sean $c_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ y $U = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in (c_1(t), c_2(t))\}$. Sean $F(t, x)$ y $G(t, x)$ como en la Proposición 1.4.13. Entonces, si $G(t, x)|_U \geq 0$ (respectivamente ≤ 0) y existe un conjunto no vacío $E \subset [0, T]$ tal que $G(t, x)|_{U \cap (E \times \mathbb{R})}$ es distinta de cero, entonces la ecuación diferencial tiene a lo sumo un ciclo límite contenido en U , que además es hiperbólico e inestable (respectivamente estable). Además, si x es una solución periódica, se cumple que

$$\int_0^T f_x(t, x(t))dt = \int_0^T G(t, x(t))dt.$$

Demostración. Primero, debemos notar que ya se probó en la Proposición 1.4.13 que en las condiciones que impone este teorema, se cumple que, sobre las soluciones periódicas,

$$\int_0^T f_x(t, x(t))dt = \int_0^T G(t, x(t))dt.$$

Además, ya sabemos que con la condición $G(t, x)|_U \geq 0$ (≤ 0) y que exista un conjunto no vacío $E \subset [0, T]$ tal que $G(t, x)|_{U \cap (E \times \mathbb{R})} \neq 0$, la ecuación diferencial tiene a lo sumo un ciclo límite. Falta ver que dicho ciclo límite es hiperbólico, e inestable si $G(t, x)|_U \geq 0$, o estable si $G(t, x)|_U \leq 0$.

Para esto, basta recordar que sobre las soluciones periódicas

$$d'(x) = \exp\left(\int_0^T G(t, u(t, x))dt\right) - 1.$$

Y por tanto si $G|_U \geq 0$ y existe un conjunto no vacío $E \subset [0, T]$ tal que $G|_{U \cap (E \times \mathbb{R})} \neq 0$, entonces $d'(x) > 0$, y por el Corolario 1.3.18, la solución es inestable. De modo análogo, si $G|_U \leq 0$, entonces $d'(x) < 0$, y por el Corolario 1.3.18, la solución es estable. Además, dicho ciclo límite es hiperbólico simplemente porque $d'(x) \neq 0$ en cualquier caso. \square

En el primer artículo recogido por compendio [6], demostramos que la presencia de curvas invariantes permite encontrar funciones auxiliares útiles para aplicar el criterio de Huang y Liang.

Concretamente, supongamos que una ecuación de Abel

$$x' = f(t, x) = a(t)x^3 + b(t)x^2 + c(t)x$$

con $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ continuas y T -periódicas tiene r curvas algebraicas invariantes $q_1(t, x), \dots, q_r(t, x)$, con cofactores respectivos $K_1(t, x), \dots, K_r(t, x)$. Sea $u(t, x)$ una solución periódica de la ecuación tal que para $i \in \{1, \dots, r\}$, $q_i(t, u(t, x)) \neq 0$ para todo t . Entonces, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$\int_0^T K_i(t, u) dt = \int_0^T \frac{(q_i)_t(t, u) + (q_i)_x(t, u)f(t, u)}{q_i(t, u)} dt = \int_0^T \frac{d}{dt} \ln |q(t, u)| dt = 0.$$

Es decir, un candidato para la función $G(t, x)$ de Huang y Liang siempre será

$$G(t, x) = f_x(t, x) + \sum_{i=1}^r \alpha_i K_i(t, x) + k(t)$$

para cualesquiera $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y donde $k(t)$ es una función continua y T -periódica.

En [29], para estudiar una determinada familia de sistemas planos se estudian los ciclos límite de la familia de ecuaciones de Abel que tienen a $x = 0$ y a $a_1(t)x + b_1(t) = 0$ como curvas invariantes, siendo $a_1(t)$, $b_1(t)$ funciones \mathcal{C}^1 , T -periódicas, y $b_1(t) \neq 0$ para todo t . Estas ecuaciones se pueden escribir como:

$$x' = (a_1x - b_1)(a_2x - b_2)x + \frac{x}{b_1} (b_1' - a_1'x), \quad (1.32)$$

para algunas funciones \mathcal{C}^1 y T -periódicas $a_2(t)$, $b_2(t)$.

Escogiendo una función auxiliar en base a los cofactores de las curvas invariantes tal y como se ha descrito anteriormente, los autores buscan el número de ciclos límite que tiene la ecuación en el conjunto

$$V = \begin{cases} \{(t, x) : 0 < x < 1/a_1(t)\} & \text{cuando } a_1(t) > 0 \\ \{(t, x) : x > 0 \text{ o } x < 1/a_1(t)\} & \text{cuando } a_1(t) < 0 \\ \{(t, x) : x > 0 \text{ y } x < 1/a_1(t) \text{ para } t \text{ con } a_1(t) > 0\} & \text{cuando } a_1(t) \text{ tiene ceros.} \end{cases}$$

Recordamos que este conjunto está relacionado con el cambio de Cherkas (ver Sección 3.5), y aquí estarán ubicados todos los ciclos límite que interesa estudiar.

Teorema 1.4.15 (J. Huang, H. Liang, J. Llibre, [29]). *La ecuación (1.32) tiene a lo sumo un ciclo límite no trivial con gráfica contenida en V si, para todo $t \in [0, T]$, se verifica alguna de las siguientes condiciones*

1. $a_1(t) \neq 0$ y existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $a_1(t)b_2(t) + \eta a_2(t)b_1(t) + (a_1'(t)/b_1(t)) \geq 0$ (resp. ≤ 0).
2. $a_2(t) \geq 0$ (resp. ≤ 0).
3. O bien $a_1(t)a_2(t) \geq 0$ y $b_1(t)b_2(t) \leq 0$, o $a_1(t)a_2(t) \leq 0$ y $b_1(t)b_2(t) \geq 0$.

Estos criterios imponen condiciones fuertes sobre las funciones dependientes de t , usualmente funciones trigonométricas, ya que restringen sus ceros.

El objetivo principal del primer artículo [6] consiste en refinar estos criterios utilizando el Teorema de Sturm. Reescribimos la ecuación anterior para poder tomar $b_1(t) \equiv 0$, obteniendo:

$$x' = a_1 a_2 x^3 - (a_1 b_2 + a_2) x^2 + \left(b_2 - \frac{a_1'}{a_1} \right) x, \quad (1.33)$$

Así, obtenemos los siguientes resultados:

Teorema 1.4.16 (J.L.Bravo, L.A.Calderon, M.Fernandez, [6, Teorema 1.2.]). *Supongamos que existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $b_2 + \eta a_1'/a_1$ tiene signo definido positivo (respectivamente negativo) y que para cada $t \in [0, T]$ se cumplen las siguientes condiciones:*

1. Si $a_1(t) < 0$, entonces $a_2(t) \leq 0$ (resp. ≥ 0),
2. Si $a_1(t) > 0$, entonces $a_1(t)b_2(t) - a_2(t) + \eta a_1'(t) \geq 0$ (resp. ≤ 0),

con las desigualdades de ambas condiciones estrictas para todo t en algún subconjunto de medida positiva de $[0, T]$. Entonces, la ecuación (1.33) no tiene ciclos límite con gráfica contenida en V .

Teorema 1.4.17 (J.L.Bravo, L.A.Calderon, M.Fernandez, [6, Teorema 1.3.]). *Supongamos que existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $b_2 + \eta a_1'/a_1$ tiene signo definido positivo (respectivamente negativo), $b_2(t)$ no es idénticamente nula, y para cada $t \in [0, T]$ se cumplen las siguientes condiciones:*

1. Si $a_1(t) < 0$, entonces $a_2(t) \geq 0$ (resp. ≤ 0),
2. Si $a_1(t) > 0$, entonces $a_1(t)b_2(t) - a_2(t) + \eta a_1'(t) \geq 0$ (resp. ≤ 0),

con las desigualdades de ambas condiciones estrictas para todo t en algún subconjunto de medida positiva de $[0, T]$. Entonces, la ecuación (1.33) tiene a lo sumo un ciclo límite no trivial con gráfica contenida en V , y la cota se alcanza.

Destacamos que con estos criterios, $a_1(t)$ y $a_2(t)$ pueden tener cualquier número de ceros.

Por último, hay otro tipo de resultados con enfoques distintos que también dan criterios de acotación del número de ciclos límite de ecuaciones escalares periódicas sin concretar la expresión de la ecuación o incluso sin suponer su diferenciabilidad, pero imponiendo otro tipo de condiciones sobre $f(t, x)$, por ejemplo, su concavidad. Un ejemplo sería el siguiente resultado.

Teorema 1.4.18 (J. Mawhin, [37]). *Consideremos la ecuación escalar*

$$x' = f(t, x)$$

con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua, T -periódica, y tal que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(t, x) = -\infty$, uniformemente para $t \in \mathbb{R}$. Entonces, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación

$$x' = f(t, x) + \lambda \tag{1.34}$$

tiene cero, al menos un, o al menos dos ciclos límite dependiendo de si $\lambda < \lambda_0$, $\lambda = \lambda_0$ o $\lambda > \lambda_0$, respectivamente. Si f es estrictamente cóncava con respecto de x , las cotas son exactas.

Algunos otros trabajos que desarrollan este resultado, u obtienen resultados en esa línea, son [48, 49, 50].

1.4.4. Número de soluciones polinómicas y racionales

Un problema con relevancia en el ámbito de cualquier ecuación escalar consiste en obtener información sobre las soluciones de cierto tipo que pueda tener la ecuación concretamente. La pregunta sería la siguiente: ¿cuántas soluciones de cierto tipo (polinómicas, racionales, trigonométricas...) puede tener una ecuación de Abel, si sabemos que sus coeficientes con respecto de t son de cierto tipo?

Este problema está relacionado con nuestro primer artículo, pues el estudio de soluciones con cierta naturaleza equivale al estudio de curvas invariantes de determinada forma.

El planteamiento más sencillo y no trivial que puede tener este problema dentro del caso no autónomo es en el contexto polinómico, es decir: ¿cuántas soluciones polinómicas puede tener una ecuación de Abel con coeficientes polinómicos con respecto de t ?

Este problema fue resuelto completamente para la ecuación de Abel generalizada en el siguiente resultado, enunciado en los reales pero también válido en los complejos.

Teorema 1.4.19 (J. Giné, M. Grau and J. Llibre, [23]). *La ecuación de Abel generalizada*

$$x' = \sum_{i=0}^n a_i(t)x^i,$$

con $a_i(t) \in \mathbb{R}[t]$, tiene a lo sumo n soluciones polinómicas, existen ejemplos en los que tiene exactamente n soluciones polinómicas, y la diferencia de dos soluciones polinómicas cualesquiera siempre es constante.

Demostración. Sea $x(t) = p(t) \in \mathbb{R}[t]$ una solución polinómica de la ecuación. Con el cambio de variable $z = x - p(t)$, la ecuación queda

$$z'(t) = \tilde{a}_1(t)z + \tilde{a}_2(t)z^2 + \cdots + \tilde{a}_{n-1}(t)z^{n-1} + a_n(t)z^n, \quad (1.35)$$

con $\tilde{a}_i(t) \in \mathbb{R}[t]$.

Las soluciones polinómicas de la ecuación de partida están en relación biyectiva con las soluciones de (1.35), y en particular, $x = p(t)$ se corresponde con $z = 0$.

Si $z(t) = q(t)$ es una solución de (1.35) distinta de la idénticamente nula, entonces debe verificar

$$q'(t) = \tilde{a}_1(t)q(t) + \tilde{a}_2(t)q(t)^2 + \cdots + \tilde{a}_{n-1}(t)q(t)^{n-1} + a_n(t)q(t)^n.$$

Por lo tanto, $q(t)$ debe dividir a $q'(t)$. Luego, $q(t)$ es una solución polinómica si y solo si $q(t) = c \in \mathbb{R}$ y c es raíz de

$$\tilde{a}_1(t)c + \tilde{a}_2(t)c^2 + \cdots + \tilde{a}_{n-1}(t)c^{n-1} + a_n(t)c^n.$$

Este polinomio tiene a lo sumo n raíces y, por tanto, la ecuación de partida tiene a lo sumo n soluciones polinómicas. Nótese que deshaciendo el cambio de variable, la diferencia de dos soluciones de la ecuación de partida siempre ha de ser constante.

La cota se alcanza, pues

$$x' = x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))$$

tiene exactamente n soluciones polinomiales. □

El siguiente paso en cuanto a nivel de complejidad consiste en mantener el carácter polinómico de las funciones coeficiente dependientes de t , pero buscar soluciones racionales, en vez de polinómicas. De vuelta a la ecuación de Abel (no generalizada), un ejemplo de resultados obtenidos en esta línea es

Teorema 1.4.20 (X. Qian, Y. Shen, J. Yang, [44]). *Consideremos la ecuación de Abel*

$$x' = a(t)x^3 + b(t)x^2 \quad (1.36)$$

con $a(t), b(t)$ son polinomios con coeficientes reales. Entonces,

1. Si $\text{gr}(b) + 1 \leq \text{gr}(a) < 2 \text{gr}(b)$, o $\text{gr}(a) \geq 2m + 2$ y $\text{gr}(a)$ es impar, entonces la ecuación tiene a lo sumo dos soluciones racionales, y la cota se alcanza.
2. Si $\text{gr}(a) = \text{gr}(b) + 1$ con $\text{gr}(b) \geq 1$, entonces la ecuación tiene a lo sumo $\text{gr}(b) + 3$ soluciones racionales, y la cota se alcanza para $\text{gr}(b) = 1$ y $\text{gr}(b) = 2$.

Se pueden consultar más resultados en esta línea en [33], y en [34] también se estudia este problema, pidiendo a las soluciones racionales buscadas que sean periódicas.

En nuestros dos últimos artículos [7, 8], obtenemos resultados de este tipo. En particular, en nuestro segundo artículo [7] estudiamos las soluciones racionales (soluciones $x(t) = p(t)/q(t)$, con $p(t)$ un polinomio no idénticamente nulo, $q(t)$ un polinomio no constante, $x(t) \notin \mathbb{C}[t]$) de la ecuación

$$x' = a(t)x^3 + b(t)x^2 \quad (1.37)$$

cuando $a(t)$, $b(t)$ son polinomios con coeficientes complejos.

En [7], nuestros resultados principales son los siguientes, enunciados en términos de curvas invariantes de grado uno en x , ya que el estudio de las soluciones racionales es equivalente al de este tipo de curvas invariantes.

Teorema 1.4.21 (J.L. Bravo, L.A. Calderon, M. Fernandez and I. Ojeda, [7, Teorema 2.12.]). *Consideremos la ecuación (1.37) y sea $n = \deg(A)$. Entonces, la ecuación tiene a lo sumo dos curvas invariantes de grado uno en x si se verifica una de las siguientes condiciones:*

1. n es par,
2. $\deg(B) > (n - 1)/2$.

En cualquier otro caso, $\binom{n}{(n+1)/2} + 1$ es una cota superior para el número de curvas invariantes de grado uno en x de (1.37).

Teorema 1.4.22 (J.L. Bravo, L.A. Calderon, M. Fernandez and I. Ojeda, [7, Teorema 3.3.]). *Consideremos la ecuación (1.37) y sea $n = \deg(A)$, con $n > 3$. Si (1.37) tiene más de $(n + 1)/2$ curvas invariantes de grado uno en x , entonces la ecuación tiene una integral primera de Darboux.*

Para el primer resultado, seguimos [33] donde se obtiene una condición necesaria y suficiente para que $q(t) + p(t)x = 0$ sea curva invariante de la ecuación. En particular, $q(t)$ ha de ser una constante no nula (que pondremos como uno), y $p(t)$ debe cumplir que

$$p(t)p'(t) - p(t)b(t) + a(t) = 0. \quad (1.38)$$

Utilizando esto y las propiedades de factorización de $\mathbb{C}[t]$ que se describen en la siguiente sección, concluimos que si $1 + p_1(t)x = 0$ y $1 + p_2(t)x = 0$ son curvas invariantes de (1.37), entonces $\deg(p_1) + \deg(p_2) = n + 1$. De este modo, si $1 + p_1(t)x = 0, \dots, 1 + p_r(t)x = 0$ son curvas invariantes de la ecuación y $r \geq 3$, entonces $\deg(p_1) = \dots = \deg(p_r) = (n + 1)/2$. A partir de este hecho es sencillo obtener las dos condiciones suficientes para que la cota del número de curvas invariantes de grado uno en x sea dos.

Por otra parte, de (1.38) deducimos que si $1 + p(t)x = 0$ es curva invariante de (1.37), entonces $p(t)$ debe dividir a $a(t)$. Analizando los divisores de $a(t)$ que pueden dar lugar a curvas invariantes, obtenemos la cota general dada.

Como un elevado número de curvas invariantes producen una integral de tipo Darboux, es muy conveniente aplicar la adaptación de la teoría de Darboux a este contexto para conocer cuántas

curvas de este tipo pueden coexistir hasta que el sistema sea Darboux integrable, lo cual da lugar a nuestro segundo resultado principal.

Por último, puesto que uno de nuestros resultados parametriza las ecuaciones (1.37) que tienen al menos dos curvas invariantes de grado uno en x , podemos desarrollar un método computacional que estudia exhaustivamente el número de curvas invariantes de grado uno en x que puede tener (1.37). Hemos obtenido cotas exactas para $n = 1, 3, 5$, puesto que la exigencia computacional aumenta rápidamente con n .

Tras estudiar las soluciones racionales en el contexto polinómico, hay distintas posibilidades para continuar con trabajos de este tipo. Por ejemplo, en [52] se estudian las soluciones racionales de $c(t)x' = a(t)x^3 + b(t)x^2$ cuando $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ son polinomios.

Otra alternativa es intercambiar en los contextos anteriores los polinomios por polinomios trigonométricos. De este modo, la ecuación a considerar

$$x' = a(t)x^3 + b(t)x^2 \quad (1.39)$$

con $a(t)$, $b(t)$ polinomios trigonométricos sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} volvería a ser una ecuación escalar periódica, y habremos regresado al contexto de la Sección 1.3. y el resto de la 1.4.

Además, si las soluciones a buscar ahora son polinomios trigonométricos, o racionales trigonométricas, estas soluciones serán de modo natural soluciones periódicas y, en ausencia de un centro, ciclos límite de la ecuación.

En nuestro tercer artículo [8], estudiamos las soluciones racionales trigonométricas que sean ciclos límite de la ecuación (1.39) cuando $a(t)$, $b(t)$ son polinomios trigonométricos con coeficientes reales. En [51] se estudian las soluciones racionales trigonométricas de la misma ecuación.

En general siempre es preferible trabajar en el contexto de los reales, pues es donde podemos motivar los resultados con lo explicado anteriormente, y se trabaja en los complejos porque facilita el trabajo, Sin embargo, en este caso trabajar en los complejos presenta grandes dificultades, como viene explicado en la siguiente sección. El resultado principal de [8] es el siguiente.

Teorema 1.4.23 (J.L. Bravo, L.A. Calderon and I. Ojeda, [8, Teorema 1.1.]). *Consideremos la ecuación (1.39) y sea $n = \deg(A)$. Si n es impar o es menor que el doble del grado de $b(t)$, entonces la ecuación tiene a lo sumo dos ciclos límite racionales no triviales. En otro caso, el número de ciclos límite racionales no triviales de (1.39) es de a lo sumo $n + 1$.*

De nuevo, en el artículo se trabaja con curvas invariantes de grado uno en x , $q(t) + p(t)x = 0$, con $p(t)$ y $q(t)$ polinomios trigonométricos con coeficientes reales, pues su estudio será equivalente al de soluciones periódicas racionales de la ecuación.

Aquí tenemos la misma condición necesaria y suficiente para que $q(t) + p(t)x = 0$ sea una curva invariante de (1.39), esto es, $q(t)$ debe de ser una constante no nula (que pondremos como uno), y $p(t)$ debe cumplir que

$$p(t)p'(t) - p(t)b(t) + a(t) = 0. \quad (1.40)$$

Utilizando esto y las propiedades del anillo $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$ que se describen en la siguiente sección, concluimos que si $1 + p_1(t)x = 0$ y $1 + p_2(t)x = 0$ son curvas invariantes de (1.39), entonces $\deg(p_1) + \deg(p_2) = n$. De este modo, si $1 + p_1(t)x = 0, \dots, 1 + p_r(t)x = 0$ son curvas invariantes de la ecuación y $r \geq 3$, entonces $\deg(p_1) = \dots = \deg(p_r) = n/2$. A partir de este hecho es sencillo obtener las dos condiciones suficientes para que la cota del número de curvas invariantes de grado uno en x sea dos que están al principio del teorema.

Sin embargo, ahora podemos ofrecer una cota mucho mejor que la cota general que daríamos en analogía al segundo artículo [7]. Esto es porque, en este contexto, la presencia de una integrabilidad de Darboux implica la existencia de un centro y, en consecuencia, la no existencia de ciclos límite.

Por ello, podemos aplicar la teoría de Darboux en analogía al artículo anterior, y obtener la cota que damos en este teorema.

1.5. Factorización en anillos de polinomios y polinomios trigonométricos.

Esta última sección va destinada a recopilar las herramientas algebraicas y a justificar brevemente su utilidad en los artículos que conforman la tesis.

Las demostraciones del primer artículo [6] no requieren de herramientas adicionales a las ya expuestas en este capítulo, pues las demostraciones se basan en la función auxiliar de Huang-Liang (ver Teorema 1.4.13), técnicas usuales de análisis y el teorema de Sturm que se enuncia en el propio trabajo. En los otros dos trabajos [7, 8], las demostraciones utilizan las propiedades de factorización del anillo de polinomios complejos $\mathbb{C}[t]$ y del anillo de polinomios trigonométricos reales $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$.

Anillo polinomios complejos (y reales)

Comenzamos recordando que $\mathbb{C}[t]$ es un dominio de integridad, es decir, un anillo conmutativo con elemento unidad distinto de cero donde el producto de dos elementos no nulos nunca es cero.

Proposición 1.5.1 (ver, por ejemplo, [32]). *En $\mathbb{C}[t]$, con el grado definido de modo usual, se cumplen las siguientes propiedades*

1. $\text{gr}(p(t)q(t)) = \text{gr}(p(t)) + \text{gr}(q(t))$.
2. $\text{gr}(p(t) + q(t)) \leq \max\{\text{gr}(p(t)), \text{gr}(q(t))\}$.
3. $\text{gr}(p(t)) = 0$ si y solo si $p(t) = c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
4. $\text{gr}(p'(t)) = \text{gr}(p(t)) - 1$ si $\text{gr}(p(t)) \geq 1$.

El anillo $\mathbb{C}[t]$ es, además, un dominio euclídeo. Luego, en particular, es un dominio de factorización única, es decir, es un anillo íntegro donde cada elemento no nulo ni invertible factoriza de forma única (salvo orden de los factores y producto por invertibles) en producto de irreducibles. Para más detalles, ver [32, Sección II.5].

El siguiente resultado se beneficia de las buenas propiedades de factorización de $\mathbb{C}[t]$ y, junto la Proposición 1.5.1, ha sido fundamental en el segundo trabajo [7].

Proposición 1.5.2. *En $\mathbb{C}[t]$ se cumple que*

1. *Todo par de elementos tienen un máximo común divisor y un mínimo común múltiplo, que serán únicos salvo producto por invertibles.*
2. *Si $p(t) = h(t)r(t)$ no es constante y ningún factor irreducible de $p(t)$ divide a $h(t)$, entonces $p(t)$ divide a $r(t)$.*
3. *Dos polinomios no constantes $p(t)$ y $q(t)$ serán coprimos si y solo si no tienen factores irreducibles en común.*

Los resultados anteriores son ciertos si cambiamos \mathbb{C} por \mathbb{R} . En cualquiera de los dos casos, se cumple que *el grado de un polinomio es la suma de los grados de sus componentes irreducibles (contando multiplicidades)*. Veamos qué ocurre en los anillos polinomios trigonométricos.

Anillo polinomios trigonométricos reales y complejos

El anillo de polinomios trigonométricos reales no es un dominio de factorización única. En efecto, en [43, Teorema 3.4] se demuestra que los elementos irreducibles de $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$ son aquellos de la forma $a \cos t + b \sin t + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Luego,

$$(\sin t)^2 = (1 - \cos t)(1 + \cos t)$$

son dos factorizaciones en irreducibles distintas de un mismo elemento de $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$.

Esto no sucede en $\mathbb{C}[\cos t, \sin t]$. En este caso se tiene que los elementos irreducibles son los de la forma $\cos t + i \sin t + a$, con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ver [43, Teorema 2.1]). En particular, $\sin(t)$ y $\cos(t) \pm 1$ no son irreducibles; es más, se tiene que

$$\sin t = -i \frac{\cos t - i \sin t}{2} (\cos t + i \sin t - 1) (\cos t + i \sin t + 1), \quad (1.41)$$

y

$$1 \pm \cos t = \pm \frac{\cos t - i \sin t}{2} (\cos t + i \sin t \pm 1)^2, \quad (1.42)$$

de donde se obtiene una única descomposición en irreducibles de $\sin^2 t$. Esto no es un hecho aislado como afirma el siguiente resultado.

Proposición 1.5.3. *El anillo, $\mathbb{C}[\cos t, \sin t]$, de polinomios trigonométricos con coeficientes complejos es un dominio de factorización única.*

Demostración. La aplicación $\phi : \mathbb{C}[u, v] \rightarrow \mathbb{C}[\cos t, \sin t]$ tal que $\phi(u) = \cos(t) + i \sin(t)$ y $\phi(v) = \cos(t) - i \sin(t)$ es sobreyectiva y su núcleo es el ideal generado por $uv - 1$. Luego,

$$\mathbb{C}[\cos t, \sin t] \cong \mathbb{C}[u, v]/(uv - 1).$$

Por otra parte, como

$$\mathbb{C}[u, v]/(uv - 1) \cong \mathbb{C}[s, s^{-1}]$$

es igual a la localización de $\mathbb{C}[s]$ en s , y la localización de un dominio de factorización única es dominio de factorización única (ver, por ejemplo, [32, Ejercicio 5 del capítulo II]), concluimos que $\mathbb{C}[\cos t, \sin t]$ es un dominio de factorización única. \square

Pese a que en $\mathbb{C}[\cos t, \sin t]$ tenemos factorización única, la noción usual de grado en este caso (que definimos a continuación) carece las propiedades análogas a las enunciadas en la Proposición 1.5.1.

Definición 1.5.4. *Sea \mathbb{K} igual a \mathbb{R} o a \mathbb{C} . El grado un polinomio trigonométrico no nulo*

$$p(t) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), a_k, b_k \in \mathbb{K},$$

es el mayor k tal que $a_k b_k \neq 0$. El grado de $p(t)$ se denota $\text{gr}(p)$.

Obsérvese que, conforme a (1.41) o (1.42), el grado de un producto de polinomios trigonométricos complejos no es igual a la suma de los grados de sus factores.

Cabría pensar que definiendo el grado de un polinomio trigonométrico no nulo complejo como 0 si es invertible (como, por ejemplo, $\cos t - i \sin t$) y como la suma de los grados de sus factores

irreducibles (contando multiplicidades) se resuelve nuestro problema; sin embargo, por una parte, tendríamos que $\text{gr}(\cos(kt) + i \sin(kt) + 1) = k$, y $\text{gr}((\cos(kt) + i \sin(kt) + 1)') = \text{gr}(-k \sin(kt) + i k \cos(kt)) = 0$, y por otra que $k = \text{gr}(\sin(kt)) = \text{gr}(k \cos(kt))$, por ejemplo.

Dado que la definición de curva invariante se traduce a un problema de factorización. En el tercer trabajo [8] es fundamental que el grado sea estable respecto a factorizaciones de polinomios trigonométricos y sus derivadas. Esto es posible si trabajamos con polinomios trigonométricos reales.

Teorema 1.5.5 (ver [43]). *El anillo de polinomios trigonométricos con coeficientes reales es un dominio de Dedekind semifactorial, es decir, todo elemento no nulo ni invertible es producto finito de irreducibles, y todas las posibles factorizaciones en irreducibles tienen el mismo número de factores.*

Así, obtenemos las siguientes propiedades, que vienen probadas en el apéndice A del tercer artículo de esta tesis.

Teorema 1.5.6. *En $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *El grado (usual) de un polinomio no nulo coincide con el número de sus factores irreducibles.*
2. *Si $p(t)$ es un polinomio no constante y $p(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces la descomposición de $p(t)$ en irreducibles es única salvo orden de los factores y producto por invertibles.*
3. *Si $p(t) = h(t)r(t)$ no es constante, $p(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y ningún factor irreducible de $p(t)$ divide a $h(t)$, entonces $p(t)$ divide a $r(t)$.*
4. *Dos polinomios no constantes $p(t), q(t)$, con $p(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, son coprimos si y solo si no tienen factores irreducibles en común.*

Concluimos con el resultado equivalente a la Proposición 1.5.1 para polinomios trigonométricos reales.

Proposición 1.5.7. *En $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$ se cumple que*

1. $\text{gr}(p(t)q(t)) = \text{gr}(p(t)) + \text{gr}(q(t))$.
2. $\text{gr}(p(t) + q(t)) \leq \max\{\text{gr}(p(t)), \text{gr}(q(t))\}$.
3. $\text{gr}(p(t)) = 0$ si y solo si $p(t) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4. $\text{gr}(p'(t)) = \text{gr}(p(t))$.

Capítulo 2

Upper bounds of limit cycles in Abel differential equations with invariant curves

Upper bounds of limit cycles in Abel differential equations with invariant curves¹. J.L. Bravo, L.A. Calderón and M. Fernández. *J. Math. Anal. Appl.* 494 (2021) 124580.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124580>.

En [29], Huang, Liang, y Llibre estudian los sistemas diferenciales planos con parte no lineal homogénea

$$x' = \lambda x - y + P_n(x, y), \quad y' = y + \lambda x + Q_n(x, y), \quad (2.1)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ son polinomios homogéneos de grado n . Como se ha comentado en la Sección 1.3.5, estos sistemas admiten un cambio de variable a una ecuación de Abel relacionando los ciclos límite de ambas. Huang, Liang, y Llibre observan que la ecuación de Abel correspondiente pertenece a la familia de ecuaciones de Abel

$$x' = (a_1(t)x - b_1(t))(a_2(t)x - b_2(t))x + \frac{1}{b_1(t)}(b_1'(t) - a_1'(t)x^2), \quad (2.2)$$

con $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ diferenciables, T -periódicas y $b_1(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, T]$.

Aplicando la técnica de la función auxiliar de Huang y Liang, con una elección apropiada de la función $F(t, x)$ asociada a este método, consiguen dar unos criterios novedosos para la familia de ecuaciones de Abel, que luego trasladan al sistema plano.

En este artículo, apreciamos que la familia (2.2) es precisamente la familia de ecuaciones de Abel que tienen a $x = 0$ y $a_1(t)x - b_1(t) = 0$ como curvas invariantes; mostramos que la construcción de la función $F(t, x)$ elegida por Huang y Liang está relacionada con las curvas invariantes y sus cofactores; refinamos y mejoramos los criterios de [29] utilizando el Teorema de Sturm y, por último, trasladamos estos criterios mejorados a los sistemas planos correspondientes con parte no lineal homogénea.

En el artículo mostramos que nuestros criterios son efectivamente una mejora con respecto a los dados en [29], es decir, encontramos ejemplos en los que nuestros criterios se aplican y los otros, no.

¹El copyright de este artículo está cedido a 0022-247X/ 2020 Elsevier Inc.

Capítulo 3

Rational solutions of Abel differential equations

Rational solutions of Abel differential equations¹. J.L. Bravo, L.A. Calderón, M. Fernández and I. Ojeda. *J. Math. Anal. Appl.* 515 (2022) 126368.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126368>.

En el artículo anterior [6] apreciábamos que las curvas invariantes y sus cofactores permitían encontrar funciones apropiadas para aplicar el método de Huang y Liang y obtener criterios novedosos e interesantes.

En particular, en el artículo anterior trabajamos con la familia de ecuaciones de Abel (2.2), que tenía dos curvas invariantes de cierto tipo (de grado uno en x). Las dos evoluciones naturales de este problema, son: ¿qué podemos decir si la ecuación tiene más curvas invariantes de este tipo? ¿qué podemos decir si el sistema tiene curvas invariantes de otro tipo?

Motivados por la primera pregunta, estudiamos qué se sabía sobre el número de curvas invariantes de grado uno en x que pueden tener las ecuaciones de Abel. Como la existencia de estas curvas es equivalente a la existencia de soluciones racionales de la ecuación, encontramos trabajos y resultados relacionados con este problema, mencionados en la Sección 1.4.4.

Este artículo es una continuación de esos trabajos, aplicado a ecuaciones de Abel con coeficientes polinómicos complejos, es decir, a ecuaciones del tipo

$$x' = A(t)x^3 + B(t)x^2, \tag{3.1}$$

donde $A(t), B(t) \in \mathbb{C}[t]$.

Damos una cota general (no exhaustiva) del número de curvas invariantes de la ecuación; dos condiciones suficientes para que el número de curvas invariantes sea a lo sumo dos; aplicamos la teoría de integrabilidad de Darboux en este contexto para determinar cuántas curvas invariantes pueden coexistir antes de implicar la existencia de una integral primera de Darboux; y desarrollamos un método computacional para realizar un estudio exhaustivo del número de curvas invariantes en términos del grado $A(t)$, obteniendo resultados particulares cuando el grado de $A(t)$ es uno, tres y cinco.

¹El copyright de este artículo está cedido a 0022-247X/ 2022 Elsevier Inc.

Capítulo 4

Rational limit cycles of Abel differential equations

Rational limit cycles of Abel differential equations¹. J.L. Bravo, L.A. Calderón and I. Ojeda. Electron J. Qual. Theo. 47 (2023), 1-13.

DOI: <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2023.1.47>

El trabajo anterior [7] nos permite trasladar el contexto polinómico al polinómico trigonométrico, que es nuestro ámbito de interés. Es decir, trabajar con la ecuación

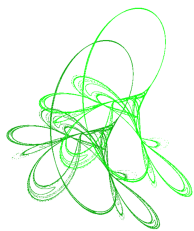
$$x' = A(t)x^3 + B(t)x^2 \quad (4.1)$$

donde ahora $A(t), B(t) \in \mathbb{R}[\cos t, \sin t]$. Las soluciones que buscamos son cocientes de polinomios trigonométricos, que automáticamente serán soluciones periódicas. En particular, buscaremos los ciclos límite racionales, es decir, soluciones periódicas racionales cuando la ecuación no presenta un centro.

El contexto trigonométrico tiene la ventaja adicional de que, al aplicar la teoría de integrabilidad de Darboux en este caso, la presencia de una integral primera implica la existencia de un centro, y por lo tanto, la no existencia de ciclos límite. De este modo, podemos dar una cota del número de ciclos límite mucho más ajustada que la que dábamos en el contexto polinómico.

En este artículo nos encontramos con condiciones más favorables para trabajar directamente con coeficientes reales y no complejos. Las propiedades de $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$ se han comentado con detalle en la Sección 1.5, y se demuestran en el propio artículo.

¹Este artículo es de acceso abierto distribuido bajo los términos y condiciones de la licencia Creative Commons Attribution (CC BY). Se incluye en su totalidad a continuación.



Rational limit cycles of Abel differential equations

José Luis Bravo¹, Luis Ángel Calderón^{✉2} and Ignacio Ojeda¹

¹Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura, 06071 Badajoz, Spain

²Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica, IAC3 Institute of Applied Computing & Community Code, Universitat de les Illes Balears, 07122 Palma, Spain

Received 7 July 2023, appeared 8 December 2023

Communicated by Armengol Gasull

Abstract. We study the number of rational limit cycles of the Abel equation $x' = A(t)x^3 + B(t)x^2$, where $A(t)$ and $B(t)$ are real trigonometric polynomials. We show that this number is at most the degree of $A(t)$ plus one.

Keywords: periodic solution, limit cycle, Abel equation.

2020 Mathematics Subject Classification: 34C25.

1 Introduction

The Abel differential equation

$$x' = A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x,$$

where $A(t)$, $B(t)$ and $C(t)$ are trigonometric polynomials has been studied by many authors, either for its relation to higher degree phenomena (see e.g. [11]), for applications to real-world models (see e.g. [2]), or for its own intrinsic interest (see e.g. [7]).

In this paper we consider Abel differential equations without linear term, that is,

$$x' = A(t)x^3 + B(t)x^2, \tag{1.1}$$

with $A(t)$ and $B(t)$ being real trigonometric polynomials.

Among the main problems related to this equation, we could name the Smale–Pugh [16] problem, which is considered as a particular case of the 16th Hilbert problem. The problem consists in bounding the number of limit cycles of (1.1), that is, the number of isolated periodic solutions in the set of periodic solutions of the equation. In connection with this problem, Lins Neto [11] proved that there is no upper bound on the number of limit cycles of (1.1).

Another important problem often mentioned in the literature is the Poincaré center-focus problem applied to this setting. Trivially, $x(t) = 0$ is a solution of the equation. The problem asks when the equation 1.1 has a center at $x(t) = 0$, i.e., all solutions in a neighborhood of the solution $x(t) = 0$ are closed. This problem for (1.1) was proposed by Briskin, Françoise, and

[✉]Corresponding author. Email: l.calderon@uib.es

Yondim [4, 5]. There are some progresses in solving this problem, for example, it has been proved that the composition condition determine certain parametric centers when the coefficients are polynomials [13], but the problem is open for trigonometric coefficients. Moreover, it is conjectured that the converse is true when $A(t)$ and $B(t)$ are polynomials, with some relevant evidences that support it. For more details, the reader may refer to [7, 10].

When faced with the Smale–Pugh problem, one of the most common strategies for obtaining upper bounds on the number of limit cycles is to impose some additional restrictions on $A(t)$ and $B(t)$. For example, it has been shown that if $A(t) \neq 0$ or $B(t) \neq 0$ does not change sign, or if there exist $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ such that $\alpha A(t) + \beta B(t) \neq 0$ does not change sign, then the equation has at most three limit cycles [1, 8]. See [7] for more information.

Another strategy is to focus on the problem for limit cycles of a certain form or with certain properties that may be of particular interest. An example of such a result is that the generalized Abel equation with polynomial coefficients and degree n has at most n polynomial limit cycles, see [9].

Also, the number of rational solutions of (1.1) when $A(t), B(t)$ are polynomials has been profusely studied. For instance, in [15] the authors obtain upper bounds on the number of rational periodic solutions of (1.1) under certain conditions on the degrees of $A(t), B(t)$, and in [3], a general, non-optimal upper bound has been obtained. It has been also studied for $A(t), B(t)$ trigonometric polynomials, in [17]. Note that the rational solutions are not necessarily limit cycles, as they may be part of a centre.

In this paper we obtain an upper bound on the number of rational limit cycles of the equation (1.1), i.e., limit cycles of the form $x(t) = Q(t)/P(t)$, where $P(t)$ and $Q(t)$ are real trigonometric polynomials and $P(t) \neq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$. Recall that a real trigonometric polynomial of degree n is an expression of the form

$$\sum_{k=0}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

with $a_n \cdot b_n \neq 0$. As usual, we write $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ for the ring of real trigonometric polynomials.

Using this notation, our main result is as follows.

Theorem 1.1. *Let $A(t), B(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$. If the degree of $A(t)$ is odd or less than twice the degree of $B(t)$, then (1.1) has at most two non-trivial rational limit cycles. Otherwise, the number of non-trivial rational limit cycles of equation (1.1) is at most the degree of $A(t)$ plus one.*

To prove this result, we consider each rational limit cycle $x(t) = Q(t)/P(t)$ as an invariant trigonometric algebraic curve of degree one in x with real trigonometric coefficients (Proposition 2.2), that is, an invariant curve of (1.1) of the form $Q(t) - P(t)x = 0$, where $P(t)$ and $Q(t)$ are real trigonometric polynomials and $P(t) \neq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$. Therefore, to bound the number of limit rational cycles, we bound the number of invariant algebraic curves of degree one in x with real trigonometric coefficients of (1.1) such that (1.1) has no center at the origin. In particular, to prove the second part of Theorem 1.1, we bound the maximum number of invariant curves of this type such that (1.1) does not have a Darboux first integral.

The study of invariant curves of degree one in x is interesting in itself, regardless of whether they correspond to rational limit cycles or not. Therefore, we include a method to parameterize the Abel equations 1.1 that have at least two non-trivial invariant algebraic curves of degree one in x with real trigonometric coefficients.

The structure of the paper is as follows. In the first section we characterize the invariant algebraic curves of degree one in x with real trigonometric coefficients such that the equation (1.1) has and we show some of their properties. Then we prove the first part of Theorem 1.1 and give the parameterization mentioned above. In the second section, we apply Darboux's integrability theory to this situation, which allows us to complete the proof of the main result of the paper.

Due to the fact that $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ is not a unique factorization domain, some necessary facts and results about factorization in these rings are collected in Appendix A.

2 Real trigonometric invariant algebraic curves of degree one in x

Consider the Abel equation (1.1), set $g(t, x) := A(t)x^3 + B(t)x^2$ and denote the associated vector field by \mathcal{X} , that is,

$$\mathcal{X} = \frac{\partial}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial x}.$$

Fixed $f \in \mathcal{C}^1$, the curve $f(t, x) = 0$ is said to be an invariant curve of (1.1) if there exists $K \in \mathcal{C}^0$, called the cofactor of $f(t, x)$, such that

$$(\mathcal{X}f)(t, x) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + g \frac{\partial f}{\partial x} \right) (t, x) = K(t, x)f(t, x).$$

Note that $f_0(t, x) := x = 0$ is always an invariant curve of (1.1) with the cofactor $K_0(t, x) = A(t)x^2 + B(t)x$.

If $f(t, x) = 0$ is invariant and $x(t)$ is a solution of (1.1), then, for any t_0 in the domain of the solution,

$$f(t, x(t)) = f(t_0, x(t_0)) \exp \left(\int_{t_0}^t K(s, x(s)) ds \right).$$

Therefore, if $f(t_0, x(t_0)) = 0$, then $f(t, x(t)) = 0$ for all t . Consequently $f(t, x) = 0$ consists of trajectories of solutions of the equation.

From now on, unless otherwise stated, $A(t)$ and $B(t)$ are real trigonometric polynomials, that is, $A(t), B(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$.

The first objective of this section is to characterize the invariant algebraic curves $f(t, x) = 0$ of (1.1) such that $f(t, x) = Q(t) - P(t)x \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)][x]$ with $P(t) \neq 0$, for all $t \in \mathbb{R}$.

Let $P(t)$ and $Q(t)$ be real trigonometric polynomials with $P(t) \neq 0$, for all $t \in \mathbb{R}$. If $R(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ is a common factor of $P(t)$ and $Q(t)$, meaning that there exist factorizations of $P(t)$ and $Q(t)$ in which $R(t)$ appears (see Appendix A for details), we have that $Q(t) - P(t)x = 0$ is an invariant curve of (1.1) if and only if $Q(t)/R(t) - (P(t)/R(t))x = 0$ is an invariant curve of (1.1). Thus, in what follows, we always assume that $P(t)$ and $Q(t)$ have no common factors, that is, $Q(t) - P(t)x$ is irreducible in $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)][x]$ and, by Corollary A.4, in $\mathbb{C}[\cos(t), \sin(t)][x]$.

Remark 2.1. To simplify the exposition from now on, we simply say invariant curves of (1.1) to refer to invariant curves of (1.1) of the form $Q(t) - P(t)x = 0$, where $P(t) \neq 0$, for all $t \in \mathbb{R}$, and $Q(t) - P(t)x$ is irreducible.

The following result establishes the relationship between rational limit cycles $x(t) = Q(t)/P(t)$ and invariant curves of (1.1).

Proposition 2.2. *Let $P(t)$ and $Q(t)$ be real trigonometric polynomials. If $P(t) \neq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$, then $x(t) = Q(t)/P(t)$ is a solution of (1.1) if and only if $Q(t) - P(t)x = 0$ is an invariant curve of (1.1).*

Proof. Since $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ is a domain (see [14, Theorem 3.1]) its field of fractions, Σ , is well-defined. Thus, we can perform the Euclidean division of $(\mathcal{X}f)(t, x) = Q'(t) - P'(t)x - P(t)(A(t)x^3 + B(t)x^2)$ by $f(t, x) := Q(t) - P(t)x$ in $\Sigma[x]$, so that there exist unique $K(t, x)$ and $Z(t, x) \in \Sigma[x]$ such that

$$(\mathcal{X}f)(t, x) = K(t, x)(Q(t) - P(t)x) + Z(t).$$

Concretely,

$$Z(t) = P(t) \left(\left(\frac{Q(t)}{P(t)} \right)' - A(t) \left(\frac{Q(t)}{P(t)} \right)^3 - B(t) \left(\frac{Q(t)}{P(t)} \right)^2 \right)$$

and

$$\begin{aligned} K(t, x) = & A(t)x^2 + \left(A(t) \left(\frac{Q(t)}{P(t)} \right) + B(t) \right) x \\ & + A(t) \left(\frac{Q(t)}{P(t)} \right)^2 + B(t) \left(\frac{Q(t)}{P(t)} \right) + \frac{P'(t)}{P(t)}. \end{aligned}$$

Note that $K(t, x) \in \mathcal{C}^0$ because $P(t) \neq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$. Therefore, we conclude that the necessary and sufficient condition for $Q(t) - P(t)x = 0$ to be an invariant curve of (1.1) is $Z(t) = 0$, which, given the expression of $Z(t)$, is equivalent to $x(t) = Q(t)/P(t)$ being a solution of (1.1). \square

Now, our approach is as follows: instead of directly bounding the number of rational limit cycles of (1.1), we bound the number of invariant curves of degree one in x such that (1.1) has not a center. According to Proposition 2.2, this will be an upper bound on the number of rational limit cycles.

Next we give a condition so that $Q(t) - P(t)x = 0$ is an invariant curve of (1.1). But first we need a lemma.

Lemma 2.3. *Let $P(t)$ and $Q(t)$ be real trigonometric polynomials with $P(t) \neq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$. If $Q(t) - P(t)x = 0$ is an invariant curve of (1.1), then the corresponding cofactor is a polynomial in x with real trigonometric polynomial coefficients.*

Proof. Let $f(t, x) := Q(t) - P(t)x$. Arguing as in the proof of Proposition 2.2, we obtain that there exists $\tilde{K}(t, x) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)][x]$ such that $P(t)^2(\mathcal{X}f)(t, x) = \tilde{K}(t, x)f(t, x)$.

By Corollary A.4, $f(t, x)$ is irreducible in $\mathbb{C}[\cos(t), \sin(t)][x]$. Moreover, as $\mathbb{C}[\cos(t), \sin(t)]$ is an Euclidean domain (see [14, Theorem 2.1]), it is a unique factorization domain and therefore $\mathbb{C}[\cos(t), \sin(t)][x]$ is also a unique factorization domain. Thus, we have that $P(t)^2$ or $(\mathcal{X}f)(t, x)$ are divisible by $f(t, x)$ which necessarily implies that there exists $H(t, x) \in \mathbb{C}[\cos(t), \sin(t)][x]$ such that $(\mathcal{X}f)(t, x) = H(t, x)f(t, x)$ for degree reasons.

Finally, since both $(\mathcal{X}f)(t, x)$ and $f(t, x)$ are polynomials in x with real trigonometric polynomial coefficients, we conclude that $H(t, x)$ is also a polynomial in x with real trigonometric polynomial coefficients. \square

The next result gives the condition for $Q(t) - P(t)x = 0$ to be an invariant curve of (1.1). This result is proved in [12] for the polynomial case. Moreover, since rational solutions are

equivalent to the invariant curves of degree one in x , as mentioned in the introduction, the following result can also be obtained from those of [17] for the trigonometric case. Here, we provide a simplified proof.

Proposition 2.4. *The curve $Q(t) - P(t)x = 0$ is an invariant curve of (1.1) if and only if $Q(t) = c \in \mathbb{R}$ and there exists a trigonometric polynomial $R(t)$ such that*

$$A(t) = (P(t)/c)R(t), \quad B(t) = -P'(t)/c - R(t).$$

In this case, the corresponding cofactor is equal to $A(t)x^2 - (P'(t)/c)x$.

Proof. Let $f(t, x) := Q(t) + P(t)x = 0$ be an invariant curve of (1.1). Arguing as in the proof of Proposition 2.2 and taking advantage of the fact that $x(t) = Q(t)/P(t)$ is a solution of (1.1), we have that the corresponding cofactor can be written as

$$K(t, x) = A(t)x^2 - \left(\frac{P(t)}{Q(t)}\right)' x + \frac{Q'(t)}{Q(t)}.$$

Since, by Lemma 2.3, $K(t, x) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)][x]$, we have in particular that $Q'(t)$ is equal to $K_0(t)Q(t)$ for some $K_0(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$. Comparing degrees, either $Q(t) = 0$ or K_0 is constant. In the latter case,

$$|Q(t)| = e^{\int K_0 dt}.$$

Thus we conclude that $K_0 = 0$, and $Q(t) = c \in \mathbb{R}$. Note that, in this case, $K(t, x) = A(t)x^2 - (P'(t)/c)x$.

Finally, noting that

$$-\frac{P'(t)}{c} = A(t) \left(\frac{c}{P(t)}\right) + B(t)$$

we conclude that $B(t) = -P'(t)/c - R(t)$ where $R(t) = cA(t)/P(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$.

The converse follows by direct checking. \square

As mentioned in the proof of Proposition 2.4, the curve $c - P(t)x = 0$ is an invariant curve of the equation (1.1) if and only if

$$-\frac{P'(t)}{c} = A(t) \left(\frac{c}{P(t)}\right) + B(t).$$

Without loss of generality, we can assume $c = 1$, so that

$$P(t)P'(t) + P(t)B(t) + A(t) = 0. \quad (2.1)$$

Note that if equation (1.1) has an invariant curve of the form $1 - Kx = 0$ with K a non-zero constant, then the Abel equation becomes the separated variable equation $x' = B(t)x^2(-Kx + 1)$ with constant solutions 0 and $1/K$. If $\int_0^{2\pi} B(t) dt \neq 0$ these constant solutions are the unique limit cycles, while if $\int_0^{2\pi} B(t) dt = 0$ every bounded solution is periodic, so it has no limit cycles. Hence, we consider only the case $\deg(P) \geq 1$.

We will say that an invariant curve $1 - P(t)x = 0$ has degree n if $\deg(P) = n$. Next we prove that the sum of the degrees of two invariant curves is the degree of A .

Proposition 2.5. *If $1 - P_1(t)x = 0$ and $1 - P_2(t)x = 0$ are two different invariant curves of (1.1), then $\deg(P_1) + \deg(P_2) = \deg(A)$. Consequently, if $\deg(P_1) = \deg(P_2)$, then $\deg(P_1) = \deg(P_2) = \deg(A)/2$.*

Proof. By Proposition 2.4, there exist trigonometric polynomials $R_1(t)$ and $R_2(t)$ such that $P_1(t)R_1(t) = A(t) = P_2(t)R_2(t)$ and $-P_1'(t) - R_1(t) = B(t) = -P_2'(t) - R_2(t)$. Thus,

$$P_1(t)(P_2'(t) + R_2(t) - P_1'(t)) = A(t) = P_2(t)R_2(t).$$

Therefore

$$P_1(t)(P_2(t) - P_1(t))' = P_1(t)(P_2'(t) - P_1'(t)) = R_2(t)(P_2(t) - P_1(t)).$$

Now, since $\deg(P_2(t) - P_1(t)) = \deg((P_2(t) - P_1(t))')$, we conclude that $\deg(P_1) = \deg(R_2) = \deg(A) - \deg(P_2)$, from which our claim follows. \square

The following example shows that (1.1) can have two limit cycles of different degrees.

Example 2.6. Let $P_1(t) = 2(\cos(t) + 2)(\sin(t) + 2)$ and $P_2(t) = (\cos(t) + 2)(\sin(t) + 2)(\sin(t) + 4)$. By Proposition 2.4, we have that $1 - P_i(t)x$, $i = 1, 2$ are invariant curves of (1.1) for

$$A(t) = (\cos(t) + 2)(\sin(t) + 2)(\sin(t) + 4)(3 \cos(2t) + 8 \cos(t) - 4 \sin(t) + 1)$$

and

$$B(t) = -3/4 \sin(3t) - 9 \cos(2t) - 2 \sin(2t) - 20 \cos(t) + 49/4 \sin(t) - 1.$$

Note that $5 = \deg(A) = \deg(P_1) + \deg(P_2) = 2 + 3$. Moreover, since $\int_0^{2\pi} B(t) dt = -2\pi \neq 0$, (1.1) does not have a center (see, for instance, [1, Lemma 7]), so the solutions $x(t) = 1/P_1(t)$ and $x(t) = 1/P_2(t)$ are limit cycles.

Remember that $x(t) = 0$ is always an invariant curve of (1.1). It corresponds to the case $Q(t) = 0$ and we call it a trivial invariant curve.

Corollary 2.7. *If equation (1.1) has three or more non-trivial invariant curves, then they all have degree $\deg(A)/2$.*

Proof. Suppose that equation (1.1) has three invariant curves $1 - P_1(t)x = 0$, $1 - P_2(t)x = 0$ and $1 - P_3(t)x = 0$. Then, by Proposition 2.5, $\deg(P_1) + \deg(P_2) = \deg(P_1) + \deg(P_3) = \deg(P_2) + \deg(P_3) = \deg(A)$, which implies $\deg(P_1) = \deg(P_2) = \deg(P_3) = \deg(A)/2$. \square

Now, it is easy to give two conditions for equation (1.1) to have at most two non-trivial invariant curves, which proves the first part of the main theorem (Theorem 1.1).

Corollary 2.8. *If $\deg(A)$ is odd or if $\deg(B) > \deg(A)/2$, then (1.1) has at most two non-trivial invariant curves.*

Proof. If $\deg(A)$ is odd the claim follows directly from Corollary 2.7.

So, suppose that $\deg(A)$ is even and $\deg(B) > \deg(A)/2$. If $1 - P(t)x = 0$ is an invariant curve of (1.1), then by Proposition 2.4 there exists $R(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ such that $A(t) = P(t)R(t)$ and $B(t) = -P'(t) - R(t)$, then $\deg(B) \leq \max\{\deg(P) = \deg(P'), \deg(A) - \deg(P)\}$. Thus if $\deg(P) = \deg(A)/2$, then $\deg(B) \leq \deg(A)/2$, contradicting the hypothesis. This fact, together with Proposition 2.5 and Corollary 2.7, completes the proof of the claim. \square

We can now write this last result in terms of rational limit cycles.

Corollary 2.9. *If $\deg(A)$ is odd or if $\deg(B) > \deg(A)/2$, then (1.1) has at most two non-trivial rational limit cycles.*

In [3] a parameterization is given for all cases of equations $x' = A(t)x^3 + B(t)x^2$, with $A(t), B(t) \in \mathbb{C}[t]$ which have at least two non-trivial polynomial invariant curves. Before we finish proving the main result of the paper in the next section, let us see that a similar parametrization of the rational limit cycles can be obtained in this case.

Proposition 2.10. *Equation (1.1) has two different non-trivial invariant curves if and only if there exist $G(t), \hat{G}(t), S_1(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ and $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, such that $G(t), S_1(t), S_1(t) + k\hat{G}(t) \neq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$, every irreducible factor of $\hat{G}(t)$ divides $G(t)$, and the functions A, B satisfy*

$$\begin{aligned} A(t) &= G(t)S_1(t)(S_1(t) + k\hat{G}(t)) \left(G'(t) + \frac{G(t)\hat{G}'(t)}{\hat{G}(t)} \right), \\ B(t) &= -(G(t)S_1(t))' - (S_1(t) + k\hat{G}(t)) \left(G'(t) + \frac{G(t)\hat{G}'(t)}{\hat{G}(t)} \right), \end{aligned}$$

Furthermore, in this case the two different invariant curves are

$$1 - G(t)S_1(t)x = 0 \quad \text{and} \quad 1 - G(t)(S_1(t) + k\hat{G}(t))x = 0.$$

Proof. Assume $1 - P_1(t)x = 0$, $1 - P_2(t)x = 0$ are two different non-trivial invariant curves of (1.1). Recall that by Remark 2.1, $P_1(t) \neq 0$ and $P_2(t) \neq 0$, for all $t \in \mathbb{R}$, so they have unique decomposition (see Corollary A.2). Thus there exists their greatest common divisor. Set $G(t) := \gcd(P_1(t), P_2(t))$, $S_1(t) := P_1(t)/G(t)$ and $S_2(t) := P_2(t)/G(t)$. Moreover, since, by Proposition 2.4, $P_1(t)$ and $P_2(t)$ divide $A(t)$, there exists $S(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ such that

$$A(t) = G(t)S_1(t)S_2(t)S(t)$$

and, by Proposition 2.4,

$$B(t) = -(G(t)S_1(t))' - S_2(t)S(t) = -(G(t)S_2(t))' - S_1(t)S(t).$$

Thus,

$$\left(G(t)(S_2(t) - S_1(t)) \right)' = (S_2(t) - S_1(t))S(t).$$

Let $\hat{G}(t)$ be the product of all the factors of $S_2(t) - S_1(t)$ that divide $G(t)$; note that $\hat{G}(t)$ is well-defined by Proposition A.1 because $G(t) \neq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$. Set $H(t) := (S_2(t) - S_1(t))/\hat{G}(t)$. $H(t)$ does not necessarily have a unique decomposition; however, by construction, no irreducible factor of $H(t)$ (in any of its factorizations) can divide $G(t)$. Now, from

$$\begin{aligned} G'(t)H(t)\hat{G}(t) + G(t)(H(t)\hat{G}(t))' &= (G(t)(S_2(t) - S_1(t))) \\ &= (S_2(t) - S_1(t))S(t) \\ &= H(t)\hat{G}(t)S(t), \end{aligned}$$

it follows that $G(t)H'(t)\hat{G}(t) + G(t)H(t)\hat{G}'(t) = H(t)\hat{G}(t)(S(t) - G'(t))$. So,

$$G(t)H'(t)\hat{G}(t) = H(t)\left(\hat{G}(t)(S(t) - G'(t)) - G(t)\hat{G}'(t)\right). \quad (2.2)$$

Therefore, since $G(t)\hat{G}(t)$ have no real zeros and no common irreducible factors with $H(t)$, by Corollary A.3, $G(t)\hat{G}(t)$ divides $R(t) := \hat{G}(t)(S(t) - G'(t)) - G(t)\hat{G}'(t)$. Moreover, noticing

that $\deg(R(t)) \leq \deg(\hat{G}(t)G'(t)) = \deg(\hat{G}(t)G(t))$, we have that $R(t)/(G(t)\hat{G}(t)) = k_0 \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$. Therefore, $H'(t) = H(t)R(t)/(\hat{G}(t)G(t)) = H(t)k_0$ and we conclude that $H(t) = k$, for some $k \in \mathbb{R}$, and that $S_2(t) = S_1(t) + k\hat{G}(t)$. Now, since $P_1(t) \neq P_2(t)$, we have that $k \neq 0$. So, replacing $H(t)$ by k in (2.2), we obtain that $S(t) = G'(t) + (G(t)\hat{G}'(t))/\hat{G}(t)$ as claimed.

Finally, since $S_1(t) \neq S_2(t)$, The opposite is deduced by direct verification using Proposition 2.4. \square

Example 2.11. In order to obtain Example 2.6, it suffices to apply Proposition 2.10 with $G(t) = (\cos(t) + 2)(\sin(t) + 2)$, $\hat{G}(t) = \sin(t) + 2$, $S_1(t) = \sin(t) + 4$, and $k = -1$.

3 Darboux first integrals and proof of the main result

In this section, we use Darboux integrability theory to bound the maximum number of invariant curves that (1.1) can have without forcing the existence of a center.

We say that $f(t, x)$, smooth enough and not identically constant, is a first integral of (1.1) if $\mathcal{X}f = 0$, that is, $f(t, x) = 0$ is an invariant curve of (1.1) with zero cofactor. Equivalently, $f(t, x(t)) = 0$ is constant if $x(t)$ is a solution of the equation.

We say that a first integral f of (1.1) is of Darboux type if

$$f(t, x) = \prod_{i=0}^r f_i(t, x)^{\alpha_i},$$

where $f_i(t, x) = 0$ are invariant curves of the equation and $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

First, we present Darboux's general result that relates the existence of a first Darboux integral with the linear dependence of the cofactors of the invariant curves. We have adapted its statement to our situation

Theorem 3.1 (Darboux's Theorem, [6]). *Let $f_0(t, x) = 0, \dots, f_r(t, x) = 0$ be invariant curves of (1.1) with cofactors $K_0(t, x), \dots, K_r(t, x)$, respectively. If there exist $\alpha_0, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ such that $\sum_{i=0}^r \alpha_i K_i(t, x) = 0$ then $f(t, x) = \prod_{i=0}^r f_i(t, x)^{\alpha_i}$ is a first integral of (1.1).*

The following result is a direct application of Theorem 3.1 for the case where the invariant curves $f_0(t, x) = 0, \dots, f_r(t, x) = 0$ are all non-trivial and have the form described in Remark 2.1.

Proposition 3.2. *Let $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, r$, and $\alpha_0 := -\sum_{i=1}^r \alpha_i$. If $1 - P_i(t)x = 0, i = 1, \dots, r$ are invariant curves of (1.1), then $f(t, x) := x^{\alpha_0} \prod_{i=1}^r (1 - P_i(t)x)^{\alpha_i}$ is a first integral of (1.1) if and only if*

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \frac{A(t)}{P_i(t)} = 0. \quad (3.1)$$

Proof. First, we recall that $f_0(t, x) = x = 0$ is always an invariant curve of (1.1) with cofactor $K_0(t, x) = A(t)x^2 + B(t)x$. Furthermore, by Proposition 2.4, we have the cofactor of $1 - P_i(t)x = 0$ is $K_i(t, x) = A(t)x^2 - P_i'(t)x$ for each $i = 1, \dots, r$. Therefore,

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}f)(t, x) &= \left(\alpha_0 A(t)x^2 + \alpha_0 B(t)x + \sum_{i=1}^r \alpha_i (A(t)x^2 - P_i'(t)x) \right) f(t, x) \\ &= - \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i (B(t) + P_i'(t))x \right) f(t, x). \end{aligned}$$

Moreover, by Proposition 2.4, $B(t) = -P'_i(t) - \frac{A(t)}{P_i(t)}, i = 1, \dots, r$. So, we conclude that

$$(\mathcal{X}f)(t, x) = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \frac{A(t)}{P_i(t)} x \right) f(t, x)$$

Now, by the definition of first integral and Theorem 3.1, our claim follows. \square

Note that, as we have seen in the proof of the previous result, (3.1) is a necessary and sufficient condition for the cofactors to be linearly dependent.

We can now complete the proof of the main result (Theorem 1.1).

Proof of Theorem 1.1. If (1.1) has less than three non-trivial rational limit cycles, then the number of rational limit cycles is bounded by $\deg(A) + 1$ because $\deg(A) \geq 1$. Thus, we assume that (1.1) has $r \geq 3$ non-trivial rational limit cycles, corresponding to the invariant curves $1 - P_1(t)x = 0, \dots, 1 - P_r(t)x = 0$ of (1.1) by Proposition 2.2.

Since $r \geq 3$, by Corollary 2.7 we know that $\deg(P_i) = \deg(A)/2, i = 1, \dots, r$, and consequently $\deg(A/P_i) = \deg(A)/2$ for all i by Proposition 2.4. Moreover, by Proposition 3.2, the trigonometric polynomials $A/P_i, i = 1, \dots, r$, are linearly independent. Otherwise, there would be a Darboux first integral and thus a center.

Finally, since the \mathbb{R} -vector space of trigonometric polynomials of degree $\deg(A)/2$ has dimension $\deg(A) + 1$, we conclude that $r \leq \deg(A) + 1$. \square

A On factorization issues in the ring of real trigonometric polynomials

It is well known that the ring of real trigonometric polynomials is not a unique factorization domain. However, it is a Dedekind half-factorial domain ([14, Theorem 3.1]). Therefore, every non-zero non-unit is a finite product of irreducible elements, and any two factorizations into irreducibles of an element in $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ have the same number of irreducible factors. This allows us to consider the irreducible factors of a given real trigonometric polynomial or to use expressions such as “ $P(t)$ and $Q(t)$ have no common irreducible factors”, regardless of the fact that the greatest common divisor is not defined in half-factorial domains in general.

Recall that, given a non-zero real trigonometric polynomial

$$P(t) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kt) + b_0 \sin(kt), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

the degree of $P(t), \deg(P)$, is the biggest k such that $a_k \cdot b_k \neq 0$. Note that $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ and, if $\deg(P) > 0$, then $\deg(P') = \deg(P)$. In particular, $P' = 0$ if and only if $P \in \mathbb{R}$.

Furthermore, since the irreducible elements of $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ are those of the form

$$a \cos(t) + b \sin(t) + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$$

by [14, Theorem 3.4], we have that the degree of a non-zero non-unit element of the ring $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ is the number of its irreducible factors.

Given $z \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$, in the following we write $\langle z \rangle$ for the principal ideal of the ring $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ generated by z .

The irreducible factors of real trigonometric polynomials without real zeros are characterized by the following proposition.

Proposition A.1. *Let $P(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ be non-zero and non-unit. The following statements are equivalent.*

1. $P(t) \neq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$.
2. Any irreducible factor of $P(t)$ can be written (up to units) in the form $a \cos(t) + b \sin(t) + c$ where $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ and $c^2 > a^2 + b^2$.
3. If z is an irreducible factor of $P(t)$, then $\langle z \rangle$ is a maximal ideal of $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$.
4. Every maximal ideal of $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ containing $\langle P(t) \rangle$ is principal.

Proof. (1) \iff (2). Let $z_i \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$, $i = 1, \dots, n$, be irreducible elements such that $P = u z_1 \cdots z_n$ for some $u \in \mathbb{R}$. Obviously, $P(t) \neq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$ if and only if $z_i(t) \neq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$ and all $i \in \{1, \dots, n\}$. Since irreducible elements in $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ have the form $a \cos(t) + b \sin(t) + c$ with $a, b, c \in \mathbb{R}$ and $(a, b) \neq (0, 0)$, and $a \cos(t) + b \sin(t) + c$ has no real zeros if and only if $c^2 > a^2 + b^2$, we are done.

(2) \iff (3). Let $z = a \cos(t) + b \sin(t) + c \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ with $(a, b) \neq (0, 0)$. Since, by [14, Theorem 3.8], $\langle z \rangle$ is a maximal ideal if and only if $c^2 > a^2 + b^2$, we have the desired equivalence.

(3) \implies (4). Let \mathfrak{m} be a maximal ideal of $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ such that $P(t) \in \mathfrak{m}$. Since \mathfrak{m} is a prime ideal, there exists an irreducible factor z of $P(t)$ such that $z \in \mathfrak{m}$; equivalently, $\langle z \rangle \subseteq \mathfrak{m}$. From the maximality of $\langle z \rangle$ follows that $\mathfrak{m} = \langle z \rangle$.

(4) \implies (3). Let z be an irreducible factor of $P(t)$ and let \mathfrak{m} be a maximal ideal of the ring $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ containing $\langle z \rangle$. Since \mathfrak{m} is principal, there exists $w \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ such that $\mathfrak{m} = \langle w \rangle$; in particular, w divides z and the irreducibility of z implies $\langle z \rangle = \mathfrak{m}$. \square

Corollary A.2. *Let $P(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ be non-zero and non-unit. If $P(t) \neq 0$ for all $t \in \mathbb{R}$, then $P(t)$ has a unique factorization except for order of factors or product by units.*

Proof. Let $u z_1 \cdots z_n = v w_1 \cdots w_n$ be two factorizations of P into irreducibles, z_i, w_i , $i = 1, \dots, n$, for some $u, v \in \mathbb{R}$. Since, by Proposition A.1, $\langle w_1 \rangle$ is maximal and $u z_1 \cdots z_n = P(t) \in \langle w_1 \rangle$, we have that there exists j such that $z_j \in \langle w_1 \rangle$. So it follows from the irreducibility of z_j that $z_j = u_1 w_1$ for some $u_1 \in \mathbb{R}$. Now it is sufficient to repeat the same argument with $u u_1 z_1 \cdots z_{j-1} z_{j+1} \cdots z_n = v w_2 \cdots w_n$, and so on, to get the desired result. \square

Clearly, the converse of the previous corollary is not true, since there are many real irreducible trigonometric polynomials with real zeros.

Corollary A.3. *Let $P(t), H(t)$ and $R(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ be non-zero and non-units. If $P(t) \neq 0$, for every $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = H(t)R(t)$ and no irreducible factor of $P(t)$ divides $H(t)$, then $P(t)$ divides $R(t)$.*

Proof. By Corollary A.2, there exist unique irreducible real trigonometric polynomials z_1, \dots, z_n such that $P(t) = u z_1 \cdots z_n$ for some $u \in \mathbb{R}$. If z_1 is an irreducible factor of $P(t)$, then $H(t)R(t) = P(t) \in \langle z_1 \rangle$. By Proposition A.1, $\langle z_1 \rangle$ is maximal. Therefore, $H(t) \in \langle z_1 \rangle$ or $R(t) \in \langle z_1 \rangle$. However, since no irreducible factor of $P(t)$ divides $H(t)$, we conclude that $R(t) \in \langle z_1 \rangle$ and therefore $R(t) = \tilde{R}(t)z_1$ for some $\tilde{R}(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$. Now, if we repeat the same argument with $\tilde{P}(t) = u z_2 \cdots z_n, \tilde{R}(t)$ and z_2 , and so on, we get the desired result. \square

Now, it is convenient to recall that $\mathbb{C}[\cos(t), \sin(t)]$ is an Euclidean domain (see [14, Theorem 2.1]). In particular, it is a unique factorization domain.

Corollary A.4. Let $P(t)$ and $Q(t) \in \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ be non-zero and non-units. If $P(t) \neq 0$, for all $t \in \mathbb{R}$, then $P(t)$ and $Q(t)$ are coprime in $\mathbb{C}[\cos(t), \sin(t)]$ if and only if they have no common irreducible factors in $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$.

Proof. If $P(t)$ and $Q(t)$ have common irreducible factors in $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$, then they have common irreducible factors in $\mathbb{C}[\cos(t), \sin(t)]$.

Conversely, let us suppose that $P(t)$ and $Q(t)$ have no common irreducible factors in $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$. If $z \in \mathbb{C}[\cos(t), \sin(t)]$ is an irreducible factor of $P(t)$ and $Q(t)$, then $P(t)$ and $Q(t)$ belong to $\langle z \rangle \cap \mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$. Thus there exists a maximal ideal \mathfrak{m} of $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ such that $P(t) \in \mathfrak{m}$ and $Q(t) \in \mathfrak{m}$. Since, by Proposition A.1, \mathfrak{m} is principal, we conclude that, contrary to the hypothesis, $P(t)$ y $Q(t)$ have a real common factor. \square

Note that for the above corollary to hold, the condition $P(t) \neq 0$, for all $t \in \mathbb{R}$, is mandatory.

Example A.5. The trigonometric polynomials $P(t) = \sqrt{2} \sin(t) - 1$ and $Q(t) = -\sqrt{2} \cos(t) + 1$ are irreducible in $\mathbb{R}[\cos(t), \sin(t)]$ and their respective factorizations in $\mathbb{C}[\cos(t), \sin(t)]$ are

$$\left(\frac{(i-1)\sin(t) + (i-1)\cos(t) - \sqrt{2}i}{2} \right) \left(i\sin(t) + \cos(t) - \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

and

$$- \left(\frac{(i+1)\sin(t) + (i-1)\cos(t) + \sqrt{2}}{2} \right) \left(i\sin(t) + \cos(t) - \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Note that they both have the same last irreducible complex factor.

Acknowledgements

The authors are partially supported by Junta de Extremadura/FEDER grant number IB18023. The first and second authors are also partially supported by Junta de Extremadura/FEDER grant number GR21056 and by grant number PID2020-118726GB-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by “ERDF A way of making Europe”. The third author is also partially supported by Junta de Extremadura/FEDER grant number GR21055 and by grant PID2022-138906NB-C21 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033, by “ERDF A way of making Europe”.

References

- [1] M. J. ÁLVAREZ, A. GASULL, H. GIACOMINI, A new uniqueness criterion for the number of periodic orbits of Abel equations, *J. Differential Equations* **234**(2007), No. 1, 161–176. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.11.004>; MR2298969; Zbl 1118.34036
- [2] D. M. BENARDETE, V. W. NOONBURG, B. POLLINA, Qualitative tools for studying periodic solutions and bifurcations as applied to the periodically harvested logistic equation, *Amer. Math. Monthly* **115**(2008), No. 3, 202–219. <https://doi.org/10.1080/00029890.2008.11920518>; MR2395031; Zbl 1361.34038

- [3] J. L. BRAVO, L. A. CALDERÓN, M. FERNÁNDEZ, I. OJEDA, Rational solutions of Abel differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **515**(2022), No. 1, Paper No. 126368, 16 pp. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126368>; MR4436497; Zbl 1503.34076
- [4] M. BRISKIN, J. P. FRANÇOISE, Y. YOMDIN, Center conditions, compositions of polynomials and moments on algebraic curves, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19**(1999), No. 5, 1201–1220. <https://doi.org/10.1017/S0143385799141737>; MR1721616; Zbl 0990.34017
- [5] M. BRISKIN, J. P. FRANÇOISE, Y. YOMDIN, Center conditions II: Parametric and model center problems, *Israel J. Math.* **118**(2000), 61–82. <https://doi.org/10.1007/BF02803516>; MR1776076; Zbl 0989.34021
- [6] G. DARBOUX, Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (in French), *Darboux Bull.* (2) II, 60–96 (1878); II, 123–144, 151–200 (1878). Zbl 10.0214.01
- [7] A. GASULL, Some open problems in low dimensional dynamical systems. *SeMA J.* **78**(2021), No. 3, 233–269. <https://doi.org/10.1007/s40324-021-00244-3>; MR4297215; Zbl 1487.37024
- [8] A. GASULL, J. LLIBRE, Limit cycles for a class of Abel equations, *SIAM J. Math. Anal.* **21**(1990), No. 5, 1235–1244. <https://doi.org/10.1137/0521068>; MR1062402; Zbl 0732.34025
- [9] J. GINÉ, M. GRAU, J. LLIBRE, On the polynomial limit cycles of polynomial differential equations, *Israel J. Math.* **181**(2011), 461–475. <https://doi.org/10.1007/s11856-011-0019-3>; MR2773053; Zbl 1215.34024
- [10] J. GINÉ, M. GRAU, X. SANTALUSIA, The center problem and composition condition for Abel differential equations, *Expo. Math.* **34**(2016), No. 2, 210–222. <https://doi.org/10.1016/j.exmath.2015.12.002>; MR3494281; Zbl 1351.34030
- [11] A. LINS NETO, On the number of solutions of the equation $\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j$, $0 \leq t \leq 1$, for which $x(0) = x(1)$, *Invent. Math.* **59**(1980), No. 1, 67–76. <https://doi.org/10.1007/BF01390315>; MR0575082; Zbl 0448.34012
- [12] C. LIU, C. LI, X. WANG, J. WU, On the rational limit cycles of Abel equations, *Chaos Solitons Fractals* **110**(2018), 28–32. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.03.004>; MR3790380; Zbl 1391.34067
- [13] F. PAKOVICH, Solution of the parametric center problem for the Abel differential equation, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **19**(2017), No. 8, 2343–2369. <https://doi.org/10.4171/JEMS/719>; MR3668062; Zbl 1372.34077
- [14] G. PICAVET, M. PICAVET-L’HERMITE, Trigonometric polynomial rings, in: *Commutative ring theory and applications (Fez, 2001)*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Vol. 231, Marcel Dekker, Inc., New York, 2003, pp. 419–433. MR2029841; Zbl 1079.13013
- [15] X. QIAN, Y. SHEN, J. YANG, The number of rational solutions of Abel equations, *J. Appl. Anal. Comput.* **11**(2021), No. 5, 2535–2552. <https://doi.org/10.11948/20200475>; MR4321501

- [16] S. SMALE, Mathematical problems for the next century, *Math. Intelligencer* **20**(1998), No. 2, 7–15. <https://doi.org/10.1007/BF03025291>, MR1631413; Zbl 0947.01011
- [17] C. VALLS, Rational solutions of Abel trigonometric polynomial differential equations, *J. Geom. Phys.* **180**(2022), Paper No. 104627, 9 pp. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2022.104627>; MR4460346; Zbl 1509.34004

Resumen, conclusiones y trabajo futuro

En resumen, el objetivo principal de esta tesis doctoral ha consistido en encontrar criterios novedosos que permitan acotar el número de ciclos límite de ciertas familias de ecuaciones de Abel, esto es, parte del problema de Smale-Pugh utilizando el hecho de que tienen curvas invariantes.

Para ello hemos analizado con profundidad en [6] cómo podemos combinar la presencia de curvas del tipo $c + p(t)x = 0$, cuando c es una constante y $p(t)$ es una función periódica, con el método de Huang y Liang para obtener criterios, y hemos obtenido resultados prometedores.

Puesto que el siguiente paso consistiría en generalizar el planteamiento anterior, o bien añadiendo un mayor número de curvas, o bien cambiando su naturaleza, el objeto de la investigación viró al estudio de curvas invariantes que pueden tener las ecuaciones de Abel.

El resto de la tesis y nuestros artículos [7, 8] han estado dedicados a este objetivo: analizar, en distintos contextos, las curvas invariantes del tipo $c + p(t)x = 0$ que puede tener la ecuación. Puesto que este estudio es equivalente al estudio de soluciones racionales de las ecuaciones estudiadas, las publicaciones que recogen estos resultados se enuncian en términos de soluciones, y no de curvas.

En nuestro primer artículo [6], caracterizamos la familia de ecuaciones de Abel en la que trabajan Huang, Liang y Llibre en [29], proporcionando un método para obtener una familia de funciones auxiliares a partir de las curvas invariantes y sus cofactores, y mejoramos los criterios que habían obtenido en [29] utilizando el Teorema de Sturm, como viene resumido en los resultados principales del artículo, los Teoremas 2.1.2. y 2.1.3. Estos resultados suponen una mejora de los criterios de [29] en el sentido de que permiten mayor libertad en el número de ceros de los coeficientes respecto de t . Además, puesto que la familia de ecuaciones de Abel se corresponde con sistemas planos con parte no lineal homogénea, trasladamos los criterios obtenidos a estos sistemas, y así obtenemos los Corolarios 2.4.2. y 2.4.3.

Los resultados principales de este artículo ponen de manifiesto que las curvas invariantes de una ecuación permiten obtener información sobre sus ciclos límite, y que sería interesante extender o generalizar el contexto y las hipótesis de estos resultados.

En nuestro segundo artículo [7], abordamos el problema de estudiar las soluciones racionales de una ecuación de Abel con coeficientes con respecto de t en $\mathbb{C}[t]$. Identificando soluciones racionales con curvas invariantes de grado uno en x , y utilizando las propiedades algebraicas de $\mathbb{C}[t]$, en el Teorema 3.2.12, conseguimos una cota general y damos dos condiciones suficientes para que el máximo número de soluciones racionales sea dos. Además, aplicamos la teoría de integrabilidad de Darboux para dar una mejor cota bajo la hipótesis de que la ecuación no es Darboux-integrable en el Teorema 3.3.3., y hacemos un estudio computacional de los casos con grado bajo, obteniendo resultados como las Proposiciones 3.4.1., 3.4.2. y 3.4.6.

Aparte de continuar el trabajo de otros autores en contextos similares, queda de manifiesto gracias al estudio computacional que la cota para el número de curvas invariantes de grado uno en x que aportamos en el Teorema 3.2.12. no es óptima. Mejorar esta cota es el principal problema abierto que dejamos en este ámbito.

Finalmente, nuestro tercer artículo [8] se nutre del segundo, sustituyendo los polinomios con coeficientes complejos por polinomios trigonométricos con coeficientes reales y, por lo tanto, retornando de forma natural al contexto periódico y volviendo a buscar ciclos límite, en este caso racionales. Siendo cuidadosos con las propiedades algebraicas del anillo de polinomios en el que trabajamos, replicamos las técnicas del artículo anterior y, teniendo en cuenta que en este caso la integrabilidad Darboux implica de forma natural la existencia de un centro, nos permite llegar a nuestro resultado principal, el Teorema 4.1.1.

Las principales cuestiones que han surgido al desarrollar la tesis podrían estructurarse de la siguiente forma:

1. Sobre la función auxiliar de Huang y Liang aplicada a ecuaciones de Abel.

- (i) ¿Hay un método general y sistemático para elegir funciones auxiliares adecuadas de modo que el método de Huang y Liang genere criterios novedosos y eficaces?
- (ii) En el caso particular de la familia de ecuaciones de Abel que se estudia en [6], ¿hay una forma sistemática de estudiar el espacio de parámetros que aparecen en la familia de funciones auxiliares de Huang y Liang de modo que se generen criterios novedosos y eficaces?
- (iii) Teniendo en cuenta los resultados de [7, 8] sobre el número de curvas invariantes, ¿qué podemos decir utilizando el método de Huang y Liang cuando la ecuación de Abel tiene un mayor número de curvas invariantes de grado uno en x ?
- (iv) ¿Podemos extraer información similar a la obtenida con curvas invariantes de grado uno en x , si suponemos la presencia de curvas invariantes de grado mayor que uno en x ?

2. Sobre el número de soluciones de cierto tipo (polinomiales, racionales...) de ecuaciones de Abel no necesariamente periódicas.

- (i) De modo similar a (iv) del apartado anterior, [7] se basa en relacionar soluciones racionales con curvas invariantes de grado uno en x . ¿Se puede hacer un razonamiento equivalente con curvas invariantes de mayor grado en x ?
- (ii) ¿Cuánto se puede mejorar la cota general para el número de soluciones racionales aportada en el Teorema 3.2.12?
- (iii) ¿Es óptima la cota dada en el Teorema 3.3.3.?

3. Sobre el número de ciclos límite racionales de una ecuación de Abel con coeficientes polinomios trigonométricos

- (i) ¿Es óptima la cota de ciclos límite racionales dada en el Teorema 4.1.1.?
- (ii) ¿Podemos estudiar el número de curvas invariantes de grado mayor que uno en x para acotar el número de ciclos límite de otro tipo?
- (iii) ¿Podemos replicar el estudio realizado en el artículo, pero sobre $\mathbb{C}[\cos t, \sin t]$?
- (iv) ¿Podemos desarrollar, en el ámbito real o en el complejo, un método computacional análogo al de [7]?

Por último, dos preguntas menos específicas y más ambiciosas que quedan abiertas a partir del contenido de esta tesis son las siguientes:

- Supuesto que podamos controlar el número máximo de ciclos límite racionales de una ecuación de Abel periódica, ¿qué información podemos extraer sobre el número de ciclos límite de la ecuación utilizando la función auxiliar de Huang y Liang?
- ¿Son estas ideas y técnicas trasladables de algún modo a dimensiones superiores?

Bibliografía

- [1] M.J. Alvarez, J.L. Bravo, M. Fernandez and R. Prohens. *Alien limit cycles in Abel differential equations*, J. Math. Anal. Appl., **482(1)** (2020), 123525.
- [2] M.J. Alvarez, J.L. Bravo, M. Fernandez and R. Prohens. *Characterization of the existence of non-trivial limit cycles for generalized Abel equations*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, **20(15)** (2021).
- [3] A. Alvarez, J.L. Bravo and F. Sánchez. *Planar systems and Abel equations*, Communications on Pure and Applied Analysis, **21(10)** (2022), 3463-3478.
- [4] M.J. Alvarez, A. Gasull and H. Giacomini. *A new uniqueness criterion of the number of periodic orbits of Abel equations*, Journal of Differential Equations, **234(3)** (2006), 161-176.
- [5] J.L. Bravo. *Bifurcación de Soluciones Periódicas*, Universidad de Extremadura (2004).
- [6] J.L. Bravo, L.A. Calderon and M. Fernandez. *Upper bounds of limit cycles in Abel differential equations with invariant curves*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **494** (2021), 124580.
- [7] J.L. Bravo, L.A. Calderon, M. Fernandez and I. Ojeda. *Rational solutions of Abel differential Equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **515** (2022), 126368.
- [8] J.L. Bravo, L.A. Calderon and I. Ojeda. *Rational limit cycles of Abel differential equations*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **47** (2023), 1-13.
- [9] J.L. Bravo, M. Fernandez and A. Gasull. *Limit cycles for some Abel equations having coefficients without fixed signs*, Int. J. Bifurc. Chos, **19** (2009), 3869-3876.
- [10] M. Calanchi and B. Ruf. *On the number of closed solutions for polynomial ODE's and a special case of Hilbert's 16th problem*, Adv. Differential Equations, **7** (2002), 197-216.
- [11] M. Carbonell and J. Llibre. *Limit cycles of a class of polynomial systems*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, **109(1-2)** (1988), 187-199.
- [12] L.A. Cherkas. *Number of limit cycles of an autonomous second-order system*. Differential Equations, **5(12)** (1976), 666-668.
- [13] E.A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations* (1955). McGraw-Hill.
- [14] B. Coll, A. Gasull and R. Prohens. *Differential equations defined by the sum of two-quasi homogeneous vector fields*, Can. J. Math, **49(2)** (1997), 212-231.

- [15] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Bull. Sci. Math, Série 2, Tome 2 (1878) 60–96.
- [16] F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems*. (2006), Universitext, Springer-Verlag.
- [17] J. Ecalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. (1992) Actualités Math, Hermann, Paris.
- [18] A. Gasull, *Some open problems in low dimensional dynamical systems*. SeMA J. **78** (2021), 233-269.
- [19] A. Gasull and A. Guillamon. *Limit cycles for generalized Abel equations*, Internat. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Engrg., **16** (2006), 3737-3745.
- [20] A. Gasull and J. Llibre. *Limit cycles for a class of Abel equations*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, **21(5)** (1990), 1235-1244.
- [21] A. Gasull, J. Yu and X. Zhang. *Vector fields with homogeneous nonlinearities and many limit cycles*, Journal of Differential Equations, **258** (2015), 3286-3303.
- [22] J. Gine, M. Grau and J. Llibre. *On the extensions of the Darboux Theory of Integrability*, Nonlinearity, **26(8)** (2013), 2221-2229.
- [23] J. Gine, M. Grau and J. Llibre. *On the polynomial limit cycles of polynomial differential equations*, Israel J. Math., **106** (2013), 481-507.
- [24] J. Gine, M. Grau and X. Santallusia. *The center problem and composition condition for Abel differential equations*, Expo. Math. **34** (2016), 210-222.
- [25] J.K. Hale, H. Koçak. *Dynamics and bifurcations*, volume 3 (2012). Springer Service and Business Media.
- [26] D. Hilbert. *Mathematical problems*, Bulletin of the American Mathematical Society, **8(10)** (1902), 437-479.
- [27] J. Huang and H. Liang. *A uniqueness criterion of limit cycles for plana polynomial systems with homogeneous nonlinearities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **457(1)** (2018), 498-521.
- [28] J. Huang and H. Liang. *Limit cycles of planar systems defined by the sum of two quasi-homogeneous vectors fields*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **26(2)** (2021), 861-873.
- [29] J. Huang, H. Liang and J. Llibre. *Non-existence and uniqueness of limit cycles for planar polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities*, Journal of Differential Equations, **265** (2018), 3888-3913.
- [30] Y. Ilyashenko. *Finiteness theorems for limit cycles*. TRanslations of Mathematical Monographs, **94** (1991), American Mathematical Society, Providence.

- [31] Y. Ilyashenko. *Hilbert-type numbers for Abel equations, growth and zeros of holomorphic functions*, Nonlinearity, **13** (2000), 1337-1342.
- [32] S. Lang, *Algebra. Third revised edition. Graduate Texts in Mathematics.* (2002), NY: Springer.
- [33] C. Liu, C. Li, X. Wang and J. Wu. *On the rational limit cycles of Abel equations*, Chaos Solitons Fractals, **110** (2018), 2-32.
- [34] J. Llibre and C. Valls. *Rational limit cycles of Abel equations*, Commun. Pure Appl. Anal. **20(3)** (2021), 1077-1089.
- [35] N. G. Lloyd, *A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems*, J. London Math. Soc. **20** (1979), 277-286.
- [36] N.G. Lloyd, C.J. Christopher, J. Devlin, J.M. Pearson and N. Yasmin. *Quadratic-like Cubic Systems*, Differential Equations and Dynamical Systems, **5(3-4)** (1997), 329-345.
- [37] J. Mahwin. *First order ordinary differential equations with several periodic solutions*, J. Appl. Math. Phys., **38** (1987), 257-265.
- [38] A.L. Neto. *On the Number of Solutions of the Equation $\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j$, $0 \leq t \leq 1$, for which $x(0) = x(1)$* , Inventiones mathematicae, **59** (1980), 67-76.
- [39] J.L. Massera et al. *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*, Duke Mathematical Journal, **17(4)** (1950), 457-475.
- [40] F. Pakovich. *Solution of the parametric center problem for the Abel differential equation*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **19** (2017), 2343-2369.
- [41] V.A. Pliss, *Non local problems of the theory of oscillations*, Academic Press, New York, 1966.
- [42] L.C. Piccini, G. Stampacchia, G. Vidossich. *Ordinary differential equations in R^n : problems and methods*, volume 39 (2012). Springer Service and Business Media.
- [43] G. Picavet, M. Picavet-L'Hermite. *Trigonometric polynomial rings*, Commutative ring theory and applications (Fez, 2001). Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **231** (2003), 419-433.
- [44] X. Qian, Y. Shen and J. Yang. *The number of rational solutions of Abel equations*, J. Appl. Anal. Comput., **11** (2021), 2535-2552.
- [45] A. Sandqvist and K. M. Andersen. *On the number of closed solutions to an equation $x = f(t, x)$, where $f_x^n(t, x) \geq 0$ ($n = 1, 2, \text{ or } 3$)*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **159(1)** (1991), 127-146.
- [46] S. Shahshahani. *Periodic solutions of polynomial first order differential equations*, Nonlinear Anal., **5** (1981), 157-165.
- [47] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Math. Intell. **20** (1998) 7-15.
- [48] A. Tineo. *A result of Ambrosetti-Prodi type for first order ODE with cubic nonlinearities, Part I*, Analli di Matematica, **182** (2003), 113-128.

- [49] A. Tineo. *A result of Ambrosetti-Prodi type for first order ODE with cubic nonlinearities, Part II*, Analli di Matematica, **182** (2003), 129-141.
- [50] A. Tineo. *First order ordinary differential equations with several bounded separate solutions*, J. math. Anal. Appl., **225** (1998), 359-372.
- [51] C. Valls. *Rational solutions of Abel trigonometric polynomial differential equations*, Journal of Geometry and Physics, **180** (2022).
- [52] C. Valls. *Rational Periodic Solutions on Some Generalized Abel Equations*, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, **20(2)** (2022).
- [53] X. Yu, J. Huang and C. Liu. *Maximum number of limit cycles for Abel equation having coefficients with linear trigonometric functions*, arXiv:2304.13528 (2023).