TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

CUERPOS EN EL ESPACIO. ÁREAS Y VOLÚMENES. EN 2º ESO EN EL IES "ZURBARÁN".

María de los Ángeles Carrillo Delgado

IES Zurbarán

Tutor: Francisco Manso García.

Director del TFM: Pedro José Rosa González.

ÍNDICE

1. Descripción del centro de prácticas.

El IES Zurbarán, situado en la Avenida de Huelva de Badajoz, está en una zona comercial y culturalmente activa. Cercano a lugares como la Biblioteca Pública Bartolomé J. Gallardo, museos y la catedral, facilita visitas educativas sin transporte adicional. Durante los recreos, la avenida es un punto de encuentro para los alumnos de Bachillerato. El centro fomenta la participación en actividades culturales y deportivas, y ofrece un enfoque bilingüe en español-francés e inglés-español. Aunque en una zona de clase media-alta, el alumnado es diverso.

El censo de estudiantes es el siguiente: En Educación Secundaria Obligatoria (ESO), hay 497 alumnos. En Bachillerato Diurno (1º y 2º), hay 349 alumnos, distribuidos en Ciencias Sociales, Humanidades, y Ciencia y Tecnología. En Bachillerato Nocturno hay 42 alumnos. Además, el centro ofrece ciclos formativos de grado superior y medio en áreas deportivas y naturales, con varios grupos y horarios diurnos y nocturnos. El profesorado está compuesto por 120 docentes.

El centro educativo promueve la cultura de paz, igualdad y no violencia, mejora los hábitos de estudio con el programa "Aprender a aprender", fomenta la actividad física y la salud, y desarrolla la inteligencia emocional mediante un programa de apadrinamiento. Ofrece secciones bilingües en francés e inglés y organiza intercambios internacionales con escuelas en Francia, Alemania y Reino Unido.

Además, el IES Zurbarán tiene una estructura organizativa sólida con órganos de gobierno como el director, el jefe de estudios y el secretario, supervisando las actividades diarias, y jefes de estudios adjuntos para áreas específicas. Un Consejo Escolar y un Claustro de Profesores aseguran la gestión participativa. El instituto cuenta con instalaciones como biblioteca, pabellón y pistas deportivas, además de recursos tecnológicos como portátiles y paneles digitales en cada aula. En coordinación didáctica, destacan el Departamento de Orientación, Actividades Complementarias y Extraescolares, y varios departamentos didácticos. La Asociación de Padres (AMPA) fomenta la participación familiar y apoya actividades complementarias.

2. Análisis sobre la intervención docente.

Las prácticas docentes del Master Universitario de Formación del Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria se llevaron a cabo entre los días 11 de marzo y 10 de mayo de 2024. Durante el periodo de prácticas se elaboró un Google Sites, en el que se recogían todas las actividades realizadas en el centro.

Durante las prácticas tuve la oportunidad de impartir dos unidades didácticas:

- "Cuerpos en el espacio. Áreas y Volúmenes" realizada en 2º de ESO.
- "Derivadas y Aplicaciones" realizada en 1º de Bachillerato de Ciencia y Tecnología.

Además, también el tutor del centro me brindó la ocasión de impartir clases en los siguientes grupos:

- En 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales y Humanidades, en el cual expliqué "Aplicaciones de las derivadas".
- En 4º de ESO, en el cual expliqué "Geometría Analítica".

2.1. Identificación de la unidad didáctica.

La unidad didáctica (UD) de denominó "Cuerpos en el espacio. Áreas y Volúmenes" y se llevó a cabo en el segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria. La UD se ubica en el tercer nivel de concreción curricular, siguiendo las directrices establecidas por la Ley Orgánica 3/2020, del 29 de diciembre, que reforma la Ley Orgánica 2/2006, del 3 de mayo, de educación (LOMLOE). Esta Unidad Didáctica ha sido elaborada tomando como referencia el Decreto 110/2022, el cual establece la organización y el plan de estudios para la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Extremadura. Este diseño se realiza a partir del currículo básico delineado en el Real Decreto 217/2022, adaptándolo según las exigencias y particularidades educativas específicas de dicha región.

Esta UD se realizó al finalizar la unidad didáctica de “Estadística”, en el tercer trimestre. La UD pertenece al Bloque C, Sentido Espacial.

2.2. Justificación.

Esta unidad didáctica es importante en este curso por las siguientes razones:

1. Establece bases matemáticas sólidas, ya que les proporciona a los estudiantes una comprensión fundamental de conceptos geométricos básicos que son esenciales en matemáticas y otras disciplinas.

2. Desarrolla habilidades de pensamiento espacial, ayuda a los alumnos a visualizar diferentes objetos tridimensionales.

3. Tiene aplicaciones prácticas en la vida cotidiana y en diversas profesiones.

4. Fomenta el razonamiento lógico, los estudiantes deben utilizar diferentes estrategias de razonamiento para llegar a soluciones efectivas.

5. Prepara a los estudiantes para niveles superiores, ya que los conceptos geométricos de esta unidad son la base para futuros estudios en matemáticas y disciplinas relacionadas.

2.3. Descripción del grupo de alumnos y sus características.

Esta clase la formaban un total de 14 alumnos entre 13 y 15 años que no participaban en el programa bilingüe del centro. El rendimiento académico general de la clase es medio/bajo. Dos de los alumnos recibían apoyo adicional en matemáticas; uno de ellos repetía curso. Sin embargo, estos alumnos no asistían a las sesiones de apoyo durante la hora de matemáticas, sino en otro momento de la semana. Dedicaban un total de 6 horas semanales al estudio de matemáticas, durante las cuales revisaban más detalladamente los conceptos aprendidos en clase. Cabe destacar, que la mayor parte de los días estos alumnos no asistían a clase e incluso algunas de las actividades realizadas en clase no las pudieron realizar. Además, había un estudiante con dificultades de integración que interactuaba con sus compañeros, pero no prestaba atención durante las clases ni realizaba los ejercicios en casa.

Este grupo, pertenecía a un curso formado por 30 alumnos. El grupo completo, en general, era bastante hablador, revoltoso y en el cual era bastante complicado impartir clases.

Es importante mencionar que los 14 alumnos se comportaban bien y eran manejables durante las clases de matemáticas. Durante las sesiones, gran parte de ellos eran participativos y mostraban interés por la asignatura. En algunas sesiones realicé actividades por parejas o tríos y pude observar que trabajaban bien de esta forma y había un buen ambiente de trabajo en clase.

En cuanto al trabajo realizado por los alumnos, es decir, los deberes, solo alrededor de la mitad de ellos los hacían a diario. Aunque en clase estaban activos y atentos, la mayoría de las veces no completaban en casa las tareas asignadas. Pude comprobar que, incluso ofreciendo un ejercicio que podía sumar hasta un punto extra en el examen, algunos estudiantes no lo entregaron. Además, a aquellos que sí lo entregaron les hice correcciones anticipadas para que pudieran mejorar sus respuestas, pero no se molestaron en corregirlas.

2.4. Objetivos y saberes básicos. Contribución a la adquisición de las competencias específicas y claves. Descriptores operativos para alcanzar el perfil de salida.

2.4.1. Competencias específicas.

Según el Decreto 110/2022 en el que establecen las directrices del currículo de Educación Secundaria Obligatoria, al realizar la unidad didáctica se deberían haber adquirido las siguientes competencias específicas:

Competencia específica 1: Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando individual o colectivamente diferentes estrategias y formas de razonamiento, explorando distintas soluciones posibles y diferentes maneras de proceder.

Competencia específica 2: Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando con ayuda las respuestas obtenidas, verificando su validez e idoneidad desde un punto de vista lógico y su repercusión global.

Competencia específica 5: Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, con una visión integral de las matemáticas en situaciones y contextos diversos.

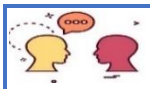
Competencia específica 7: Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos sencillos y presentes en situaciones cotidianas o académicas usando diferentes tecnologías, tanto individual como colaborativamente consiguiendo así visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.

Competencia específica 8: Comunicar de forma individual y en grupo conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos y presentes en situaciones cotidianas o académicas usando lenguaje oral, escrito o gráfico utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, y utilizando la terminología matemática apropiada, dando así significado y coherencia a las ideas matemáticas.

Durante el desarrollo de la unidad didáctica, se pueden observar las competencias específicas 1 y 2 en acción. Además, la competencia específica 5 se hace evidente cuando los estudiantes necesitan aplicar el teorema de Pitágoras, ya que no es un concepto propiamente dicho de la unidad. Por otro lado, la competencia específica 7 se manifiesta cuando usamos GeoGebra en clase para representar diferentes figuras geométricas. Por último, la competencia específica 8 se demuestra cuando los alumnos exponen actividades ante la clase.

2.4.2. Competencias claves.

Con respecto a las competencias claves, en la UD que elaboré se vieron reflejadas las siguientes:



Competencia en comunicación lingüística.

Esta competencia se evidencia en varias situaciones:

- Trabajo en grupo: Es crucial saber comunicarse cuando están trabajando en grupo.

- Exposición oral: Para exponer ante la clase sus ideas, los alumnos deben saber expresar y comunicar correctamente aquello que quieren decir.

- Participación en clase: Por el mismo motivo que en la exposición oral.

Competencia matemática y en ciencia, tecnología e ingeniería.

Esta competencia clave se ve reflejada durante todo el desarrollo de la UD, ya que estamos en la asignatura de matemáticas

Competencia digital.

Esta competencia se evidencia en varias situaciones:

- Trabajo en grupo: Es crucial saber comunicarse cuando están trabajando en grupo.

- Exposición oral: Para exponer ante la clase sus ideas, los alumnos deben saber expresar y comunicar correctamente aquello que quieren decir.

- Participación en clase: Por el mismo motivo que en la exposición oral.

2.4.3. Saberes básicos.

Los saberes básicos que van a permitir al alumnado de la clase de 2º de ESO adquirir la competencia matemática a través de las competencias específicas propuestas son los siguientes:

Bloque B. Sentido de la medida.

- Magnitud.

B.1.3.2. Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medidas.

- Medición.

B.3.3.1. Longitudes, áreas y volúmenes en figuras planas y tridimensionales: deducción, interpretación y aplicación.

B.3.3.2. Representaciones planas de objetos tridimensionales en la visualización y resolución de problemas de áreas.

B.3.3.3. Representaciones de objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos.

Bloque C. Sentido espacial.

- Figuras geométricas en el plano y en el espacio.

C.1.3.1. Figuras geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características.

C.1.3.3. Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada…).

2.5. Conocimientos previos y tratamiento de los contenidos transversales.

Algunos conocimientos previos que deben tener llegados a este curso son los siguientes:

- Según el Decreto 107/2022, en el que se establecen las directrices del currículo de Educación Primaria. Los alumnos en el tercer ciclo en el "Bloque C. Sentido Espacial", deben haber estudiado figuras geométricas en dos o tres dimensiones.

- En 1º de ESO los alumnos estudian el concepto de perímetro y área de los diferentes polígonos.

- En 2º de ESO, estudian el teorema de Thales y el teorema de Pitágoras. Este último teorema es un concepto crucial para esta unidad didáctica.

En esta clase, todos estos conceptos se han visto, ya que mi tutor de prácticas del centro fue profesor de estos alumnos en 1º de la ESO y trataron dicha unidad. Además, durante mi primera semana de estancia en el instituto los alumnos estaban terminando la unidad didáctica en la cual se explicaban los teoremas mencionados anteriormente. Por tanto, la UD comenzó con un repaso de los conceptos que se vieron en 1º de la ESO y los cuales nos serían de utilidad para este tema.

2.6. Medidas de individualización y atención a la diversidad.

Debido al bajo número de alumnos en la sección general de esta clase, no consideré necesario preparar material específico para aquellos que presentaban dificultades. Como se menciona en el apartado 2.3, en esta clase había dos alumnos que asistían a otras horas, diferentes a la de matemáticas, para recibir apoyo adicional.

Antes de cada sesión de refuerzo, el profesor encargado de estas horas de apoyo se comunicaba con nosotros para conocer el contenido que estábamos trabajando en clase. Mi tutor de prácticas o yo le proporcionábamos información detallada sobre los temas actuales y las áreas en las que los alumnos necesitaban reforzar su comprensión. De esta manera, asegurábamos que el tiempo de refuerzo se utilizara de manera eficiente y simultánea con el progreso de la clase. Durante las dos horas de refuerzo, los alumnos tenían la oportunidad de repasar con el profesor de apoyo lo aprendido en las clases regulares de matemáticas.

2.7. Metodología y recursos utilizados.

2.7.1. Metodología.

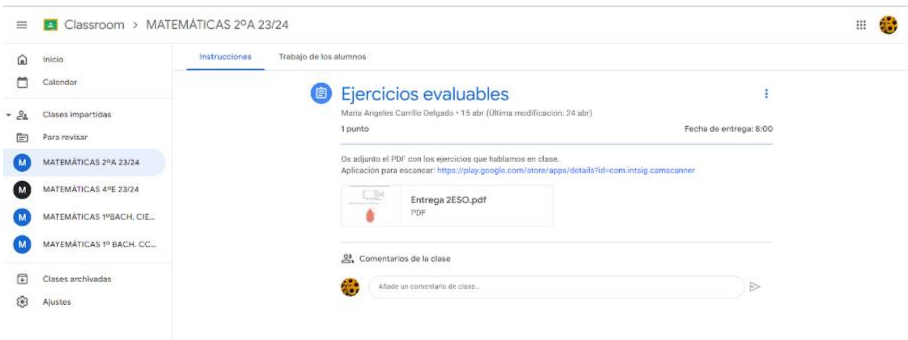
La metodología fue similar a la que utilizaba el profesor anteriormente, para que los alumnos no se vieran demasiado afectados en cambios de distintas metodologías. Generalmente, tuvo lugar una metodología tradicional acompañada de recursos tecnológicos. Algunos aspectos distintos fueron los siguientes: En primer lugar, no seguí el libro de texto, ya que tenía un nivel superior al nivel académico de la clase. Por tanto, realicé unos apuntes propios (Anexo I.2) basados en las unidades 10 y 11 del libro de texto (Arias Cabeza & Maza Sáez, 2023), pero modificándolo al nivel de los alumnos y explicándolo en otro orden diferente al libro. Además, también creé una ficha de ejercicios (Anexo I.3).

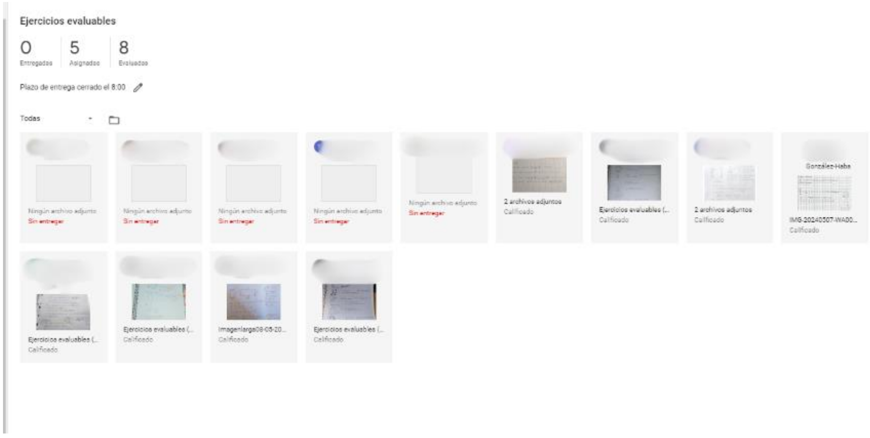
En esta clase, anteriormente no habían utilizado Google Classroom. Entonces, les proporcionamos a los alumnos el código para que se unieran a la clase. Utilicé dicha plataforma para subir los apuntes y ejercicios del tema, para subir semanalmente las soluciones de los ejercicios que habíamos realizado durante la semana y para crear una tarea que podía llegar a sumar hasta un punto extra a la nota del examen. Además, el último día de clase, los alumnos me dijeron que les gustaría tener su examen, por tanto, los escaneé y creé una tarea individual para cada alumno en la que se incluía un archivo PDF con el examen escaneado.

Además, para hacer una dinámica un poco diferente, durante cuatro sesiones realizamos otro tipo de actividades. En dos de las sesiones, realizamos una actividad manipulativa y en las dos restantes llevamos a cabo una situación de aprendizaje.

En los Anexos I.5 y I.6 se encuentran imágenes de los alumnos realizando dichas actividades.

Al comienzo del desarrollo de la UD revisaba las tareas que tenían que hacer para casa. Según fue avanzando la unidad, dejé de hacerlo, ya que los alumnos que no muestran interés por la asignatura no realizaban las tareas y eran siempre los mismos alumnos los que no hacían los deberes. Decidí hacer una actividad evaluable (comentada anteriormente), que como ya he comentado, podía sumar hasta un punto extra sobre la nota del examen. De esta forma conseguí que algunos de los alumnos que no realizaban las tareas con regularidad, al menos entregaran algo por Classroom, aunque algunos no lo hicieron.





2.7.2. Recursos.

Las clases se desarrollaron en el aula. Dicha aula estaba equipada con una pizarra de tiza, la cual no se podía utilizar y una pizarra blanca de roturador, la cual empleé para la impartición de las clases. Además, también podíamos encontrar un ordenador y un panel digital. El ordenador y el panel digital fueron usados para proyectar los apuntes y los ejercicios y además como en ocasiones era difícil dibujar el cuerpo geométrico, lo proyectaba en el panel y sobre él podía escribir y hacer anotaciones. Esto les ayudaba a los alumnos a ver claramente a los alumnos que datos tenían en el ejercicio y aquello que tenían que calcular.

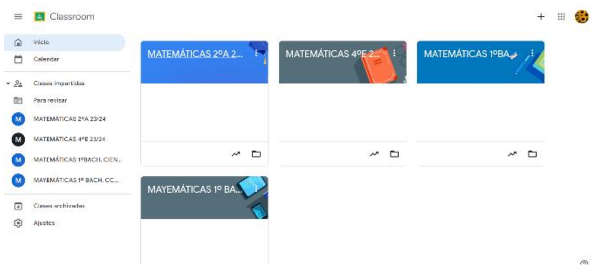
En cuanto a los materiales utilizados por los alumnos destacan los siguientes:

- Cuaderno de teoría: En este cuaderno simplemente copiaban la teoría y los ejemplos.
- Cuaderno de ejercicios: En este cuaderno hacían los ejercicios planteados en clase y deberes de casa.
- Lápices y bolígrafos.
- Calculadora.

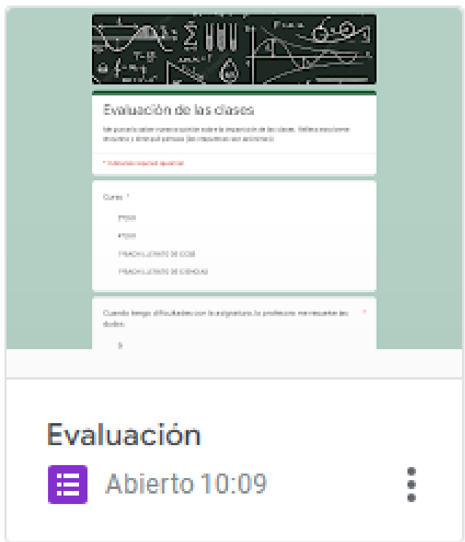
Las herramientas tecnológicas que utilicé para el desarrollo de la UD fueron las siguientes:

- Youtube: A lo largo del desarrollo de la UD, los alumnos podían encontrar algunos videos que complementaban lo que se estaba estudiando en clase.

- Google Classroom: Para compartir apuntes, ejercicios, soluciones y tareas.



- Ordenadores portátiles: Para el desarrollo de la situación de aprendizaje.
- Google Forms: Al finalizar las prácticas les subí a Google Classroom un cuestionario de evaluación de la docente y de la evaluación realizada.



En el Anexo III.3 se encuentran los resultados de esta autoevaluación. Dicha autoevaluación la realicé para todos los cursos.

2.8. Secuenciación y temporalización.

Al comenzar la unidad pensaba que para desarrollar la UD necesitaría a lo sumo 10 sesiones. Finalmente, utilicé 15 sesiones y esto fue debido a lo siguiente:

- Parte de los alumnos no le dedicaban el tiempo de estudio suficiente en casa, por tanto, en algunas sesiones era necesario comenzar repasando lo visto días previos.

- Durante el desarrollo de la UD, mi tutor de prácticas estuvo cuatro días de excursión con los alumnos de 1º de Bachillerato y durante estos días no impartí docencia al resto de curso, por tanto, la UD se prolongó una semana más de lo esperado.

El desarrollo de la UD, se dividió en cuatro fases:

Fase inicial o de introducción: Empezamos a abordar el tema de la geometría dialogando con los estudiantes acerca de sus ideas sobre qué son los poliedros y cuál es la diferencia entre un poliedro y un polígono. Dedicamos la primera sesión a esta discusión y a empezar un breve repaso sobre los polígonos.

Fase de desarrollo: Empleé 11 sesiones para desarrollar el tema. Lo abordé de manera tradicional, realizando explicaciones teóricas en la pizarra, acompañadas de ejemplos y ejercicios. En esta fase también dediqué dos sesiones a una actividad manipulativa y otras dos a la realización de una situación de aprendizaje. Los alumnos realizaron ejercicios en casa basados en lo explicado en las sesiones anteriores.

Fase de síntesis: Días antes del examen, los alumnos tuvieron acceso en el Classroom a todas las actividades que realizamos en clase, con soluciones proporcionadas por mí, para que pudieran entender cómo resolver cualquier ejercicio que no hubiéramos completado en clase. Además, en los días previos, hicimos un breve repaso del tema y llevamos a cabo una situación de aprendizaje en la que los estudiantes pusieron en práctica todo lo aprendido durante la unidad.

Fase de evaluación: La penúltima sesión se dedicó a realizar una prueba escrita en la que se evaluaron los conceptos, contenidos y competencias tratados en la unidad. Por último, se dedicó otra sesión a corregir el examen en la pizarra y entregar las notas.

FASE	SESIÓN	CONTENIDO
Introducción	**1ª** **8 de abril**	• Introducción al tema (diferencia entre polígono y poliedro) • Empezamos repaso del área polígonos. - Triángulos y rectángulos. - Ejercicios 1 y 2 de la ficha de ejercicios.
D E S A R R O L L O	**2ª** **9 de abril**	• Continuamos repaso de polígonos. - Polígonos regulares. - Ejercicio 3 de la ficha. • Círculo y circunferencia • Comenzamos teoría de poliedros. - Video. - Ejercicios 4 y 6 de la ficha.
	3ª **12 de abril**	• Área de prismas y cilindros. - Ejercicio 7 ficha (área). • Primera parte actividad manipulativa (Prismas y cilindros).
	4ª **15 de abril**	• Volúmenes de prismas y cilindros. - Ejercicios 8 y 10 ficha. - Acabar ejercicio 7 (volumen).
	EXCURSIÓN	
	5ª **22 de abril**	• Repaso de lo visto la semana anterior. • Empezamos el área y volumen de las pirámides. - Ejercicio 11 de la ficha. - Ejercicio de pirámides del libro de texto.
	6ª **23 de abril**	• Área y volumen de pirámides. - Ejercicios del libro para practicar. • Partes del cono.

D E S A R R O L L O	**7ª** **24 de abril**	• Área y volumen del cono. - Ejercicios 12 y 14c de la ficha.
	8ª **26 de abril**	• Segunda parte de la actividad manipulativa (pirámides y conos). • Repaso de prismas, cilindros, pirámides y cono.
	9ª **29 de abril**	• Ejercicio 14b. • Área y Volumen de la esfera. - Ejercicio 1e (autoevaluación).
	10ª **30 de abril**	• Actividad caja de zapatos. • Ejercicio 3 autoevaluación.
	11ª **3 de mayo**	• Situación de aprendizaje (realización).
	12ª **6 de mayo**	• Situación de aprendizaje (exposición).
Síntesis	**13ª** **7 de mayo**	• Ejercicios de ampliación y repaso (Anexo I.7).
Evaluación	**14ª** **8 de mayo**	• Prueba escrita (Anexo I.8).
	15ª **10 de mayo**	• Corrección de la prueba escrita y entrega de notas.

2.9. Actividades realizadas.

En este apartado se analiza y se describen las actividades llevadas a cabo en este curso. Dichas actividades las consideré interesantes para entender la UD.

2.9.1. Actividad Manipulativa.

Realicé una actividad manipulativa dividida en dos sesiones, una realizada cuando estudiamos prismas y cilindros y la otra cuando vimos pirámides y conos. Me pareció interesante ejecutar esta actividad porque, usualmente, no se explica por qué los poliedros tienen el desarrollo plano que se les enseña a los estudiantes. Generalmente, se muestran los poliedros en su forma sólida y se identifican sus partes a partir de esa presentación. Y consideré que era una forma innovadora de explicar el desarrollo plano y las partes de los poliedros.

Al comenzar la sesión les expliqué en qué consistía la actividad. El objetivo principal era que los alumnos se dieran cuenta de que para calcular el área de un poliedro simplemente hay que descomponerlo y sumar todas las áreas de los diferentes polígonos que lo forman. Les comenté que para calcular el área se imaginaran que tienen que cubrir con pintura todas las paredes y ante esta situación como calcularían la cantidad de pintura necesaria.

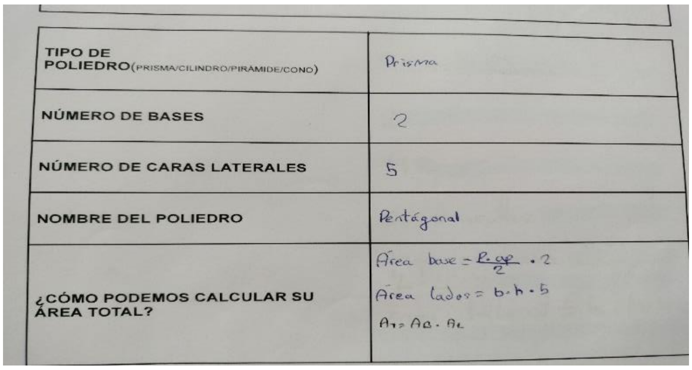
Por parejas o tríos repartí diferentes poliedros de papel. A continuación, debían recortarlo, para ver el desarrollo plano y rellenar la ficha en la cual tenían diferentes cuestiones sobre los poliedros. Además, esta actividad también les sirvió para ver que, por ejemplo, un cubo es un prisma cuadrangular en el que la altura coincide con la longitud de la arista del cuadrado y que un tetraedro no es más que una pirámide triangular.

Con esta actividad pude captar la atención de los alumnos, incluso de los estudiantes que no mostraban interés por la unidad. Decidí hacer esta actividad por parejas o tríos ya que de esta forma trabajaban todos durante las dos sesiones. Además, fomentaba el compañerismo, trabajo en equipo y la capacidad de debatir.

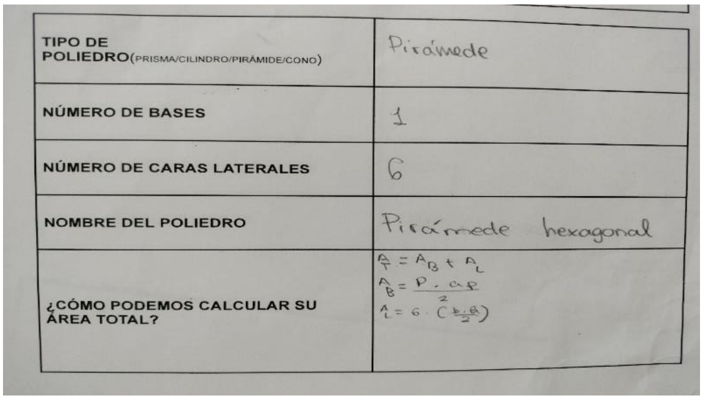
A través de esta actividad manipulativa, pude identificar a los alumnos que estudiaban a diario, ya que, tanto para calcular el área del prisma o del cilindro como la de las pirámides o del cono, necesitaban haber revisado previamente las áreas de los polígonos. En general, considero que la actividad fue eficiente, ya que permitió a los alumnos desarrollar su visión espacial. Además, cuando efectuábamos ejercicios en la pizarra durante la clase, ellos mismos podían realizar el desarrollo plano de cualquier cuerpo geométrico.

Los resultados obtenidos con esta actividad fueron gratificantes, ya que gran parte de la clase efectuó correctamente el cálculo de las áreas de los diferentes polígonos.

A continuación, se muestran imágenes de los trabajos que presentaron los alumnos.

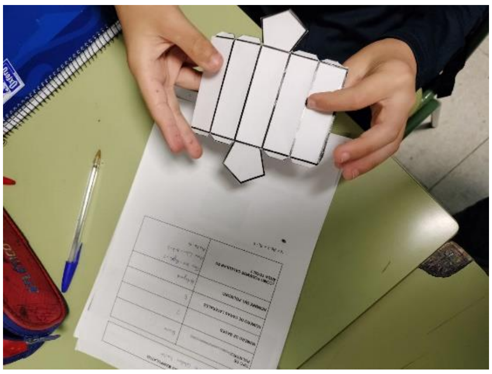


TIPO DE POLIEDRO(PRISMA/CILINDRO/PIRÁMIDE/CONO)	Prisma
NÚMERO DE BASES	2
NÚMERO DE CARAS LATERALES	5
NOMBRE DEL POLIEDRO	Pentágonal
¿CÓMO PODEMOS CALCULAR SU ÁREA TOTAL?	Área base $= \frac{P \cdot ap}{2} \cdot 2$ Área lados $= b \cdot h \cdot 5$ $A_T = A_B \cdot A_L$



TIPO DE POLIEDRO(PRISMA/CILINDRO/PIRÁMIDE/CONO)	Pirámede
NÚMERO DE BASES	1
NÚMERO DE CARAS LATERALES	6
NOMBRE DEL POLIEDRO	Pirámede hexagonal
¿CÓMO PODEMOS CALCULAR SU ÁREA TOTAL?	$A_T = A_B + A_L$ $A_B = \frac{P \cdot ap}{2}$ $A_L = 6 \cdot (\frac{b \cdot h}{2})$

En el Anexo I.5 se pueden encontrar imágenes de los alumnos realizando la actividad y el documento que tuvieron que rellenar y entregar.



2.9.2. Actividad con una caja de zapatos.

Durante la UD nos enfrentamos a ejercicios en los que teníamos que calcular el área y el volumen de un prisma regular, hasta que llegamos al ejercicio 9 de la ficha (Anexo I.3). En este ejercicio nos pedía calcular el volumen de una caja de zapatos y el cartón mínimo necesario para construirla. Para calcular el volumen, los alumnos no tuvieron ningún problema, ya que identificaron que era un prisma rectangular. Entonces sin ninguna complicación calcularon el volumen de la caja de zapatos. El problema que encontraron fue el cálculo del área, ya que era la primera vez que se enfrentaban a este tipo de ejercicios. Para ello, llevé a clase una caja de zapatos y la desmonté. De esta manera, los alumnos pudieron darse cuenta que la caja de zapatos, que, para calcular su área, al igual que en los demás ejercicios, simplemente hay que sumar las áreas de todos los polígonos que lo forman.

La dificultad que encontraron al calcular el área total fue que no estaban acostumbrados a que las caras de un prisma fueran distintas. Al ver la caja físicamente, pudieron darse cuenta lo que habíamos dibujado en la pizarra se correspondía con el desarrollo plano de la caja.

2.9.3. Explorando monumentos.

En este curso al ver que los alumnos iban captando correctamente los conceptos que se iban explicando a diario tuve la oportunidad de realizar una situación de aprendizaje.

Esta actividad la llamé “Explorando monumentos: Áreas y Volúmenes” y la realizamos en dos sesiones de 50 minutos aproximadamente cada una.

El objetivo principal por el que realicé dicha situación de aprendizaje era para que los alumnos vieran que las matemáticas están en todo lo que nos rodea. Además, esta actividad se realizó por parejas y por tanto también fomentaba el trabajo en grupo y el compañerismo.

La actividad consistió en lo siguiente:

1. Selección de Monumentos: Los estudiantes trabajarán por parejas y habrán elegido de forma aleatoria uno de los monumentos que les proporcioné.

2. Investigación: Cada grupo realizó una investigación detallada sobre su monumento seleccionado. Debieron recopilar información relevante, como las dimensiones físicas del monumento (altura, ancho, largo, diámetro, etc.), su forma geométrica predominante y cualquier dato adicional que consideren relevante.

3. Cálculo del área: Utilizando la información recopilada, los estudiantes calcularon el área de las diferentes superficies del monumento.

4. Cálculo del volumen: A continuación, los estudiantes calcularon el volumen total del monumento. Dependiendo de la forma del monumento, esto puedo implicar calcular el volumen de un prisma, una pirámide, una esfera, o cualquier otro cuerpo geométrico que se ajuste a la estructura.

5. Presentación: Cada grupo presentó sus hallazgos ante la clase. Tuvieron que explicar el proceso de investigación, los cálculos realizados y compartieron datos interesantes sobre el monumento seleccionado.

6. Por último, se les requirió identificar un monumento o edificio adicional que presentara la forma de algún cuerpo geométrico analizado durante las lecciones.

En la primera sesión utilizaron los ordenadores portátiles del centro para buscar la información necesaria. La segunda sesión los alumnos tuvieron que exponer ante la clase su trabajo y al finalizar la exposición los compañeros podían preguntarles cualquier duda que les hubiera surgido.

Durante la actividad, observé que los alumnos se mostraban dedicados y atentos en todo momento.

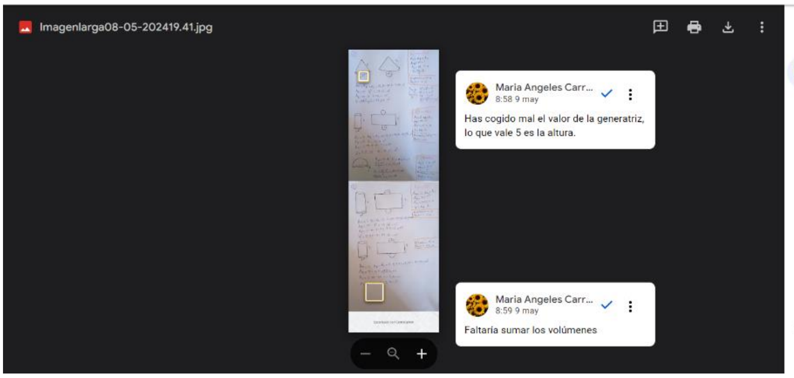
En el Anexo I.6 se incluyen imágenes de los alumnos trabajando en la actividad, así como algunos de los informes que entregaron.

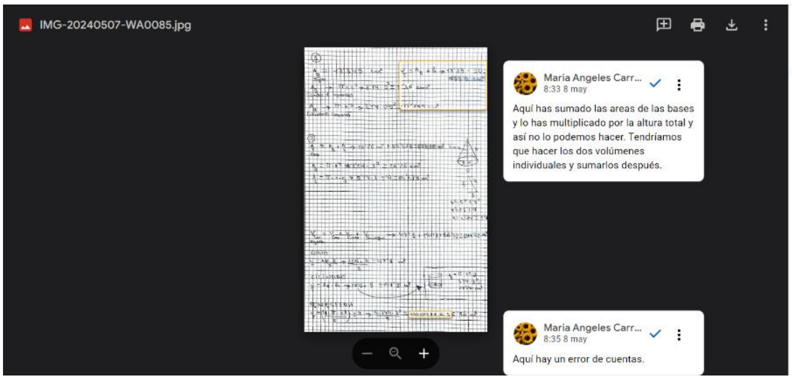
2.9.4. Actividades por Google Classroom.

Como he mencionado en secciones anteriores, en este curso había alumnos que hacían las tareas a diario y otros que no las realizaban nunca. Por ello, elaboré una tarea en Google Classroom que podía otorgar hasta un punto extra sobre el examen. La finalidad de esta tarea era doble: por un lado, ver si aquellos alumnos que no estaban interesados en la asignatura realizaban al menos esta tarea, y, por otro lado, premiar a aquellos alumnos que sí hacían los deberes diariamente, reconociendo así su esfuerzo y constancia.

Sinceramente, esta actividad sirvió principalmente para premiar a los alumnos que sí trabajaban, ya que aquellos que no estaban interesados en la materia no entregaron la actividad.

Dicha actividad fue corregida por Google Classroom, de esta manera los alumnos recibían un feedback lo más rápido posible.





2.10. Evaluación.

En primer lugar, seleccionaremos los criterios de evaluación que se corresponden con la UD. A continuación, analizaremos los diferentes instrumentos de evaluación. Finalmente, se presentarán las notas obtenidas.

2.10.1. Criterios de evaluación.

Para evaluar las diferentes competencias específicas seguiremos los siguientes criterios de evaluación que aparecen en el Decreto 110/2022.

Competencia específica 1.
Criterio. 1.1. Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
Criterio. 1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
Criterio. 1.3. Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.
Competencia específica 2.
Criterio 2.1. Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.

Criterio 2.2. Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas. Criterio 2.3. Comprobar la solución de un problema usando diferentes herramientas digitales o tecnológicas.
Competencia específica 5. Criterio 5.1. Reconocer y usar las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas formando un todo coherente.
Competencia específica 7. Criterio 7.1. Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información. Criterio 7.3 Visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos mediante herramientas digitales y tecnológicas, valorando su utilidad para compartir información.
Competencia específica 8. Criterio 8.1. Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, para describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

2.10.2. Instrumentos de evaluación.

Según la programación didáctica del departamento de matemáticas, que adjunta lo siguiente: "*Para valorar de forma objetiva el grado de consecución o nivel de logro de cada uno de los criterios de evaluación hemos definido una escala o rango de 0 a 10 según se expone en los indicadores de logro. Finalmente, a cada criterio de evaluación le hemos asignado una ponderación. Para calcular la nota de cada evaluación obtendremos la media* *aritmética ponderada de los criterios de evaluación correspondientes dicha evaluación con los pesos asignados".*

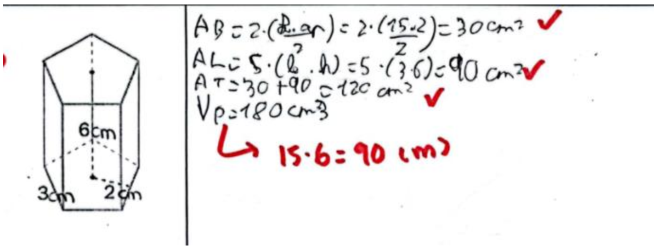
Como se debía asignar una nota numérica y los estudiantes estaban acostumbrados a que su calificación final dependiera del examen, decidí darle casi todo el peso a esta prueba. La evaluación fue de carácter tradicional. Al finalizar, el profesor realizará las ponderaciones necesarias y calculará la nota final usando la media ponderada de los criterios de evaluación.

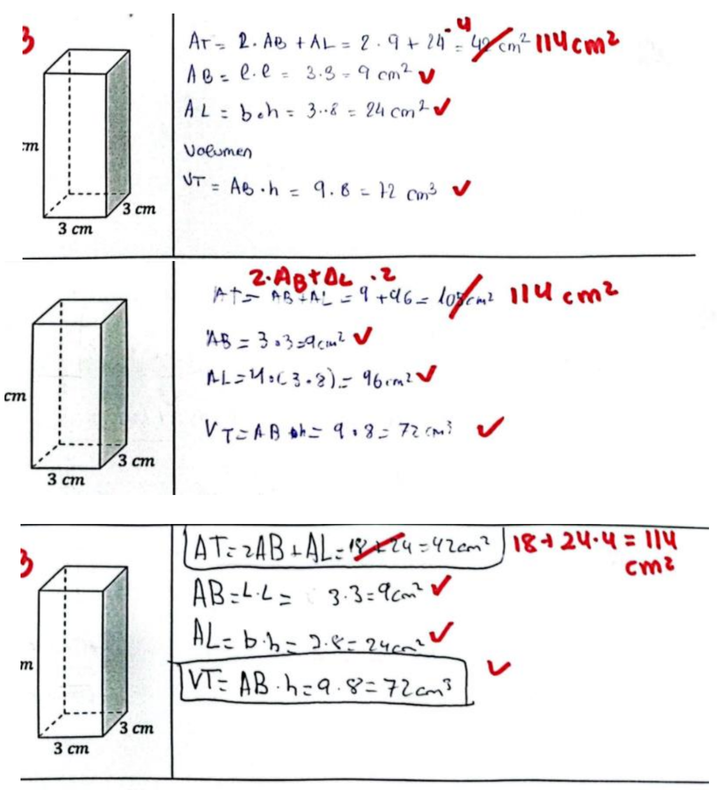
El examen puntuó un 90% de la nota y el 10% restante estaba asociado a la situación de aprendizaje. Además, se podía llegar a obtener hasta un 11, ya que la actividad explicada en el apartado 2.9.4., sumaba hasta un punto extra a la nota del examen.

El examen realizado se puede consultar en el Anexo I.8. Corregí esta prueba utilizando una rúbrica de evaluación, también incluida en dicho anexo. Uno de los errores más comunes que observé al corregir el examen fue que algunos alumnos no estudiaron la fórmula para calcular el área y el volumen de una esfera. Creo que esto se debió a que era la única fórmula que tenían que memorizar, ya que para el resto de los cuerpos geométricos podían deducir las fórmulas sin ningún problema. Otro error frecuente que noté fue en el cálculo del volumen de un prisma. Algunos alumnos, al calcular el área de un prisma, sumaban correctamente las áreas de las dos bases. Sin embargo, al calcular el volumen, utilizaban el área total de las bases y, lógicamente, obtenían un resultado incorrecto al multiplicarlo por dos. Aunque hice bastante hincapié en este aspecto en clase, algunos alumnos aún cometieron este error.

Otro error repetido fue en el cálculo del volumen de los prismas, donde algunos dividían el resultado entre 3. Esto se debió a que no repasaron las fórmulas correctamente. Como regla mnemotécnica, les expliqué que el cálculo del volumen es siempre el área de la base multiplicada por la altura, y solo en el caso de figuras que terminan en un vértice, como pirámides y conos, se debe dividir entre 3.

Finalmente, otro de los errores fue en el cálculo del área lateral de las figuras. Algunos de ellos, calculaban únicamente un rectángulo o un triángulo y se olvidaron multiplicar por el número de caras laterales.



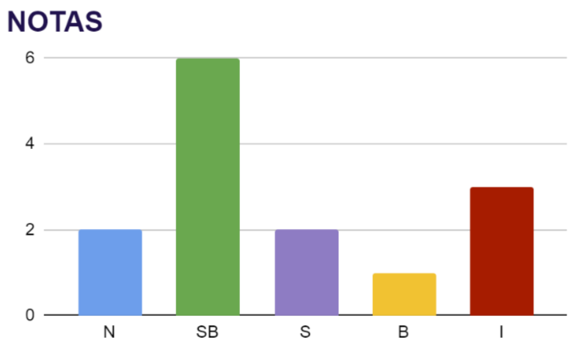


A continuación, adjunto una imagen con las calificaciones obtenidas:

Alumno	Pizarra	Act.Manip	SDA(10%)	Examen(90%)	Ejer.pto. extra	Nota Final	Nota
Alumno 1	SI	SI	9	7		7,2	N
Alumno 2	SI	SI	9,25	10	1	10,925	SB
Alumno 3	SI	SI	9	7	0,7	7,9	N
Alumno 4	SI	SI	8,75	8,7	0,9	9,605	SB
Alumno 5	SI	SI	9,25	10	0,8	10,725	SB
Alumno 6	SI	SI	10	5,7		6,13	S
Alumno 7	SI	SI	8,75	9,4		9,335	SB
Alumno 8	--	SI	10	6,6		6,94	B
Alumno 9	SI	SI	9	9,3	1	10,27	SB
Alumno 10	--	SI	8,75	0,8		1,595	I
Alumno 11	SI	SI	10	4,2	0,8	5,58	S
Alumno 12	SI	SI	10	8,3	0,8	9,27	SB
Alumno 13	--	SI	8,75	0	0,7	1,575	I
Alumno 14	--	SI	0	0		0	I

En general, en esta UD hubo una mejora notable por parte de algunos alumnos. Como se puede observar en la imagen anterior, el alumno 11 consiguió aprobar gracias a la correcta realización de la situación de aprendizaje y a la entrega de la actividad extra. Por otro lado, el alumno 12 logró mejorar su nota gracias al conjunto de actividades realizadas, pasando de tener un notable a obtener un sobresaliente.

A continuación, se muestra un diagrama de barras en el que se observa que el número de aprobados es superior al número de suspensos. Los alumnos que han suspendido son aquellos que no han mostrado interés por la asignatura; incluso, dos de ellos faltaban a menudo a clase y también estuvieron ausentes el día del examen.



En el diagrama anterior, SB significa Sobresaliente, N significa Notable, B significa Bien, S significa Suficiente e I significa Insuficiente.

3. Propuestas de mejora.

Durante mi labor como docente en el periodo de prácticas, he identificado una serie de factores que me gustaría mejorar de cara al futuro, los cuales se hicieron evidentes durante el desarrollo de la UD.

Atención a la diversidad.

En el curso en el que impartí la UD, 2º de la ESO, no realicé actividades específicas para los alumnos que estaban en refuerzo. Desde mi punto de vista, esto fue un grave error. Aunque el profesor les explicaba lo que se iba viendo en clase, creo que hubiera sido un gran acierto prepararles una ficha de actividades personalizada. La ficha que prepararía para los alumnos de refuerzo incluiría actividades como las que se puede encontrar en el Anexo III.4. Para mi futuro como docente, llevaré a cabo esto por diferentes motivos:

1. Preparar actividades específicas para los alumnos en refuerzo es una forma efectiva de mantener una sincronización con el profesor de refuerzo, asegurando que ambos trabajen en la misma dirección y con los mismos objetivos.
2. Estas actividades mejorarán la comprensión de los contenidos, ya que, al adaptarlas, se puede partir desde lo más básico hasta llegar al nivel del aula, permitiendo a los alumnos en refuerzo avanzar de manera progresiva y adecuada.

3. Además, este enfoque puede ayudar a mejorar la relación con el alumno, creando un ambiente de confianza y colaboración en el que ambas partes se esfuercen por alcanzar los objetivos educativos.

Por otro lado, algo que también me llamó la atención mientras impartía clases en este curso fue que los alumnos que asistían a refuerzo lo hacían en horas distintas a las de matemáticas. Desde mi punto de vista, esto constituye un gran error, ya que implica que el alumno pierda horas de otras asignaturas para "mejorar" en matemáticas, lo cual podría afectar negativamente su rendimiento en esas materias adicionales. En mi opinión, para mejorar esta situación y garantizar que el refuerzo no afecte el desempeño del alumno en otras asignaturas, propongo que el maestro de Pedagogía Terapéutica (PT) intervenga directamente en la clase para brindar apoyo al alumno en cuestión. Alternativamente, si los alumnos deben salir a refuerzo, sugiero que este se lleve a cabo durante un máximo de dos horas semanales y dentro del horario establecido para la asignatura de matemáticas.

Metodología.

En cuanto a la metodología, considero crucial abandonar el enfoque tradicional de impartir clases. En la actualidad, contamos con recursos más que suficientes para hacer que las clases sean dinámicas e interactivas. Por lo tanto, en lo que respecta a la metodología, optaría por un cambio total.

Algunas de las aplicaciones que se podría usar en clase con los alumnos son las siguientes:

- Khan Academy ofrece una forma sincronizada de trabajar en clase. Utilizando Google Classroom, es posible asignar tareas de Khan Academy directamente. Integraría la clase de Google Classroom en la plataforma, lo que permitiría observar la evolución de cada alumno al agregarles tareas. Un ejemplo podría ser las actividades que se muestran en el enlace de la siguiente imagen:

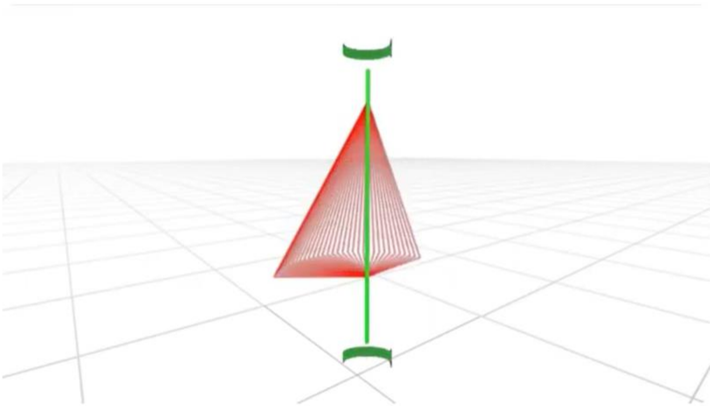
- Wordwall es una plataforma que proporciona una amplia variedad de juegos interactivos. Además, si ninguno de los juegos prediseñados se adapta a las necesidades específicas de la clase, ofrece la posibilidad de crear tu propia actividad. Dichos juegos se podrían utilizar durante el desarrollo de las sesiones, ya que es una forma de mantener la atención del alumnado. En esta clase, un ejemplo de actividad que podría haberse ejecutado con Wordwall es la que se muestra en el enlace de la siguiente imagen:

- Durante las clases en las que sea necesario utilizar GeoGebra, intentaré que cada alumno disponga de un dispositivo electrónico, como los ordenadores del centro, para que puedan realizar simultáneamente en sus dispositivos todo lo que se haga en el panel digital.

Recursos.

Además de modificar la metodología, también mejoraría los recursos proporcionados. Considero que una forma efectiva de enseñar, es comenzar las explicaciones con videos que generen curiosidad y despierten su espíritu curioso. Es cierto que probablemente no todos los videos disponibles en internet se adapten al nivel académico de nuestra clase. Por lo tanto, otra alternativa es crear videos propios adaptados al nivel educativo de nuestra aula.

Aunque los apuntes preparados para el desarrollo de la unidad didáctica en 2º de la ESO incluían videos que los alumnos podrían haber visualizado para una mejor comprensión de los contenidos, estos no fueron utilizados por los estudiantes. Uno de los videos incluidos en dichos apuntes fue el siguiente:



Formación del Cono

Como he mencionado anteriormente, este video estaba incluido en los apuntes de la unidad y se explicó en clase, pero no llegamos a visualizarlo. La explicación sobre la formación del cono o del cilindro se podría haber realizado de forma manipulativa en clase, para lo cual hubiera necesitado lo siguiente:

- Cartón en forma de triángulo o rectángulo.
- Un eje, que podría ser un lápiz o una caña de cartón, al que se amarraría el cartón.
- Pintura.

Para ilustrar este concepto, pintaría la base del triángulo o del rectángulo, respectivamente. Luego, haría girar la figura sobre el eje y, al estar la base pintada, colocaría un folio justo debajo para observar la formación del cono o cilindro. De esta manera, se ofrecería una explicación innovadora y manipulativa sobre la formación de estos cuerpos geométricos.

Actividades.

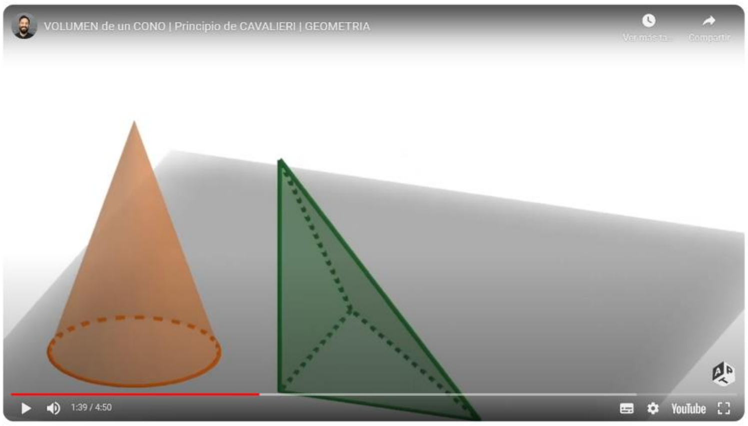
Como he mencionado en un apartado previo, uno de los errores más comunes que pude observar en 2º de la ESO, fue la comprensión de las fórmulas del cálculo de los volúmenes. Para mejorar esto, considero que tendría que trabajar dichas fórmulas de una forma más razonada. Por ejemplo, mediante el principio de Cavalieri.

Este principio, llevado a este nivel académico nos indica lo siguiente:

- Si tenemos un cilindro y un prisma con la misma altura y las áreas de las bases iguales, entonces los volúmenes de los cuerpos geométricos con iguales, sin importar la forma de la base.

- Si las secciones transversales de una pirámide y un cono, a la misma altura desde la base hasta el vértice, tienen áreas iguales en todas las alturas. Entonces, la pirámide y el cono tienen el mismo volumen.

Para ilustrar este hecho en clase, se podría mostrar un video explicativo de este principio. A continuación, adjunto un el enlace a dicha explicación.



Para desarrollar manipulativamente este principio, me hubiera gustado ejecutar una actividad manipulativa, pero no contaba con el material necesario. Para realizarla, hubiera necesitado cuerpos geométricos sólidos que se pudieran llenar de agua.

La actividad hubiera consistido en lo siguiente: dividiría la clase en cuatro grupos, con actividades idénticas dos a dos. Dos de los grupos tendrían un cilindro y tres conos (de igual base y altura), y los otros dos grupos tendrían un prisma y tres pirámides (de igual base y altura). Para ese momento, los alumnos ya sabrían calcular el volumen de los prismas y cilindros. Les propondría llenar con agua el cilindro y el prisma, o alternativamente, el cono y la pirámide, para observar la relación entre sus volúmenes.

Considero que esta actividad les hubiera proporcionado una gran visión espacial y una mejor comprensión de los conceptos. Además, esta actividad también podría adaptarse para explicar el volumen de una esfera.

Actividades complementarias o extraescolares.

Con respecto a las actividades complementarias o extraescolares, durante el periodo de prácticas solo participé en el día del centro. Considero, que también es importante realizar actividades fuera del centro para que los alumnos, en caso de matemáticas, puedan observar que las matemáticas están en todo lo que nos rodea.

Con los alumnos de 2º de la ESO, se podría haber realizado una salida del centro. Esta salida, como estábamos tratando el tema de “Cuerpos en el espacio. Áreas y Volúmenes.” podría haber sido un recorrido por varios lugares de Badajoz.

De hecho, hay una página web donde han diseñado un itinerario por Badajoz, señalando ciertos lugares de interés y en dichos lugares, hay que identificar los cuerpos geométricos que hayan encontrados.

Adjunto una imagen del itinerario y el enlace a la página web.

Evaluación.

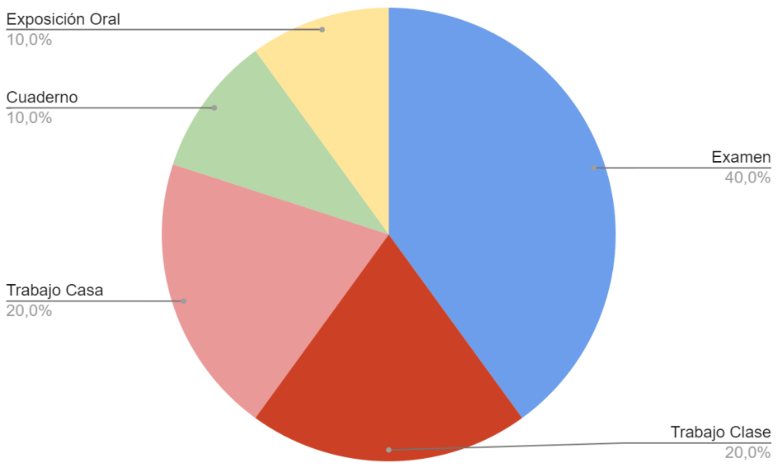
Con respecto a la evaluación, durante el periodo de prácticas, simplemente tenía que proporcionarle al finalizar la evaluación una nota numérica a mi tutor del centro. La forma de calcular esta nota no me pareció la más adecuada, ya que la mayor parte del peso recaía en el examen. Realicé la evaluación de esta manera porque los alumnos estaban acostumbrados a que su calificación final se correspondiera principalmente con la media de los exámenes.

En mi futuro como docente, cambiaré este método de evaluación, ya que considero que no se debe calificar únicamente a través de un examen. Mi intención es llevar a cabo diversas actividades en clase para evaluar la atención y el seguimiento en el aula. Además, realizaré más actividades a través de Google Classroom para evaluar el trabajo en casa.

Otro aspecto que considero muy importante es la capacidad de expresarse en público, por lo que me gustaría implementar exposiciones orales ante la clase. Por último, también evaluaría el cuaderno, ya que este refleja todo el trabajo realizado, tanto en clase como en casa.

Para evaluar todos estos aspectos, establecería los criterios de evaluación correspondientes a cada una de las competencias específicas de la unidad que se esté trabajando en ese momento. Luego, ponderaría cada criterio y, según la puntuación obtenida en cada uno de ellos, se sumaría más peso a una parte de la nota u otra.

Por tanto, la evaluación sería la siguiente:



Evaluaría las diferentes categorías de la siguiente forma:

- Exposición oral: Esta categoría está relacionada con la competencia específica 8. Es decir, dicha competencia específica tendría un peso del 10%. Dándole todo su peso al criterio 8.1.
- Cuaderno: Esta sección está ligada a las competencias específicas 1 y 2. Esta categoría tendría un peso del 10% repartido de forma equitativa entre los siguientes criterios: criterio 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2 y 2.3.
- Trabajo en casa: Esta categoría está asociada a la competencia especifica 7. Tendría una ponderación del 20% repartido de forma equitativa entre los criterios 7.1 y 7.3.
- Trabajo en clase: Esta categoría está asociada a las competencias especificas 5 y 7. Tendría una ponderación del 20% repartido de forma equitativa entre los criterios 5.1, 7.1 y 7.3.
- Examen: Esta sección está relacionada con las competencias específicas 1, 2, 5 y 7. Aportaría un peso del 40% sobre la evaluación y se repartiría a partes iguales entre todos los criterios asociados a dichas competencias previamente. El examen

realizado en este grupo no se adapta a las competencias específicas mencionadas anteriormente, por tanto, el examen que realizaría sería como el que se muestra en la imagen inferior.

Examen 2º ESO A
Cuerpos en el Espacio. Áreas y Volúmenes.

Nombre y Apellidos: ____

1. Juan quiere decorar su habitación. Ha decidido pintar las paredes y cambiar la alfombra. La habitación tiene forma de caja rectangular con las siguientes medidas: 5 m de largo, 4 m de ancho y 3 m de alto.
   Además, la alfombra que ha elegido se vende en rollos de 1m de ancho y se corta a medida.
   a) ¿Cuál es el área total de las paredes de la habitación que necesita pintar Juan?
   b) ¿Cuál es el área del piso que necesita cubrir con la alfombra? ¿Cuántos metros de alfombra necesita comprar? ¿Cuántos rollos son?
   c) Si la alfombra la quiere colocar en el techo, ¿cuántos rollos necesita? Razona tu respuesta sin realizar cálculos.

2. María tiene una piscina en su jardín. Las medidas de la piscina son las siguientes: 10 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de profundidad. Quiere llenar la piscina y dispone de 50 litros de agua para llenarla, ¿tendrá María suficiente agua para llenar la piscina con los litros que dispone?

3. Un grupo de estudiantes está planificando una fiesta en un salón de eventos con forma de cilindro de 10 metros de diámetro y 4 metros de altura.
   a) Utiliza GeoGebra para representar el salón.
   b) Calcula el área total y el volumen del salón.
   c) Queremos colocar pancartas. Cada pancarta cubre $2m^2$. ¿Cuántas pancartas podemos colocar en la pared?

Considero que podría haber realizado una evaluación inicial en 2º de la ESO. Si los alumnos recordaban lo que repasamos en las primeras sesiones, podríamos haber avanzado más rápido en la unidad y haber realizado más actividades. Una evaluación inicial es una buena herramienta para determinar el punto de partida en la unidad que se va a impartir. La realizaría únicamente si en cursos previos se ha tratado esta unidad o si es una ampliación de otras unidades. Por otra parte, si el tema a tratar es nuevo, realizaría esta evaluación inicial abordando aquellas herramientas necesarias para ejecutar dicha unidad.

Temporalización y secuenciación.

Con respecto a la temporalización y secuenciación de la Unidad Didáctica en 2º de la ESO, considero que dicha unidad podría haberse abordado en menos sesiones y haber incluido más actividades prácticas, como las mencionadas al comienzo de este análisis.

Inicialmente, estimé que el desarrollo de la unidad requeriría aproximadamente 10 sesiones; sin embargo, finalmente utilicé 15.

Este incremento en el número de sesiones se debió a varios factores. El principal fue que los alumnos no dedicaron el tiempo necesario al estudio del tema en casa, lo que obligó a repetir en varias sesiones lo explicado anteriormente. Este hecho ralentizó significativamente el avance del contenido. Además, otro factor que contribuyó al retraso fue la ausencia de clases durante casi una semana en este curso, lo que interrumpió la continuidad de la enseñanza y el aprendizaje.

En resumen, una planificación más ajustada y una mayor implicación del alumnado en el estudio autónomo, junto con una continuidad en la impartición de las clases, habrían permitido completar la unidad didáctica en el tiempo originalmente previsto.

4. Otras actividades desarrolladas.

Además de impartir la Unidad Didáctica en 2º de la ESO, realicé diversas actividades en el centro. Me pareció interesante asistir a clases de diferentes niveles educativos, distintos a los del tutor del centro. Además, también consideré importante participar en cursos bilingües, ya que en los cursos donde impartí docencia no enseñábamos matemáticas en inglés. Además, pude presenciar diversas reuniones con órganos de coordinación didáctica, impartir docencia en diferentes cursos y colaborar en el día del centro.

4.1. Actividades de observación.

Algunos de los cursos a los que pude asistir para observar la dinámica de las clases, el nivel académico y la madurez de los alumnos fueron los siguientes:

- <u>1º de ESO Bilingüe</u>: Decidí participar en esta clase para ampliar mi perspectiva, especialmente al explorar niveles educativos más bajos y evaluar el grado de madurez de los estudiantes. Durante la sesión a la que asistí, la enseñanza estuvo a cargo de una profesora nativa. Durante esta experiencia, pude observar cómo los estudiantes se desenvolvían en inglés dentro del contexto de la enseñanza de las matemáticas.

o 

- 2º de ESO Bilingüe: Durante varios días, asistí a esta clase con el objetivo de observar la metodología empleada por el profesor. Aunque las explicaciones escritas se ofrecían en inglés, la mayor parte de la interacción en clase se llevaba a cabo en español. Esta dinámica permitía a los estudiantes adquirir vocabulario en inglés mientras avanzaban en el aprendizaje de las matemáticas.

- 4º de ESO de Matemáticas A: Asistí a esta clase debido a que es conocida por ser uno de los grupos más desafiantes del centro educativo. La dinámica de la clase se centra en la realización de ejercicios que los estudiantes deben completar y entregar al final de la sesión, siendo corregidos al día siguiente. Esta estrategia permite al profesor mantener a los alumnos enfocados en una actividad específica, lo cual es especialmente difícil en este grupo.
- 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales y Humanidades y 2º de Bachillerato de Ciencia y Tecnología: Decidí asistir a estas clases dado que los estudiantes se preparaban para enfrentarse pronto a la Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU). Quería comprender la dinámica de enseñanza utilizada en estas circunstancias. En el caso de 2º de Ciencias Sociales, dado

el contenido relativamente breve del temario, los alumnos realizaban ejercicios de manera independiente en clase, seguidos de la corrección por parte del profesor. Por otro lado, en 2º de Ciencia y Tecnología, el enfoque estaba en el bloque de Geometría, una temática que los alumnos encontraban desafiante. El profesor dedicaba un mes entero a este tema, comenzando con una explicación teórica seguida de ejemplos y problemas prácticos para reforzar la comprensión.

Asimismo, también realicé observación en los niveles educativos que impartía mi tutor del centro. Además, pude impartir docencia directa en todos los cursos.

4.2. Otras actividades docentes.

Además de realizar la UD en 2º de la ESO, también desempeñé otra UD en 1º de Bachillerato de Ciencia y Tecnología y tuve la oportunidad de explicar dos temas en 4º de la ESO de Matemáticas B y en 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales y Humanidades.

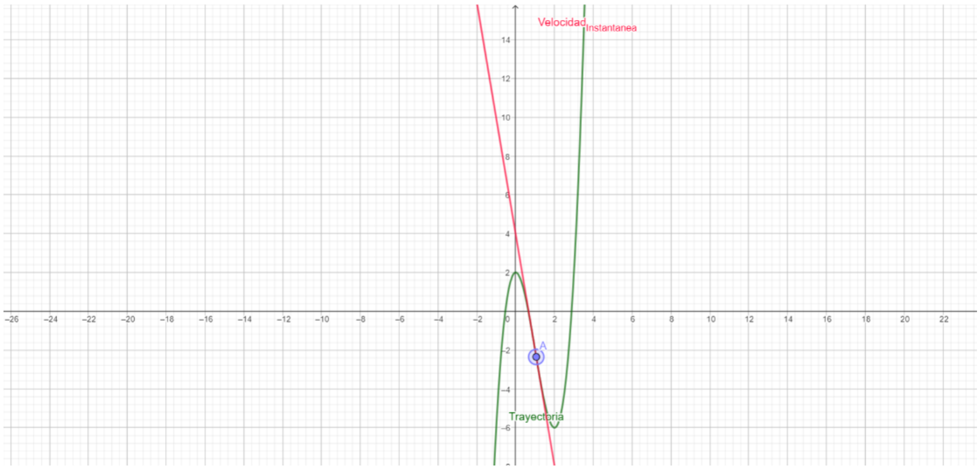
La Unidad Didáctica titulada "Derivadas y Aplicaciones" se desarrolló en 1º de Bachillerato de Ciencia y Tecnología. Para esta unidad, preparé material propio basado en el libro de texto (Colera Jiménez et al., 2022), que incluía una variedad de ejercicios del libro para realizar en clase o como tarea. Los apuntes detallados pueden encontrarse en el Anexo II.3.1. Además, diseñé una actividad evaluable utilizando Google Classroom (Anexo II.3.4), que ofrecía la posibilidad de sumar hasta un punto extra a la nota del examen. La evaluación final de la unidad consistió en un examen (Anexo II.3.5).

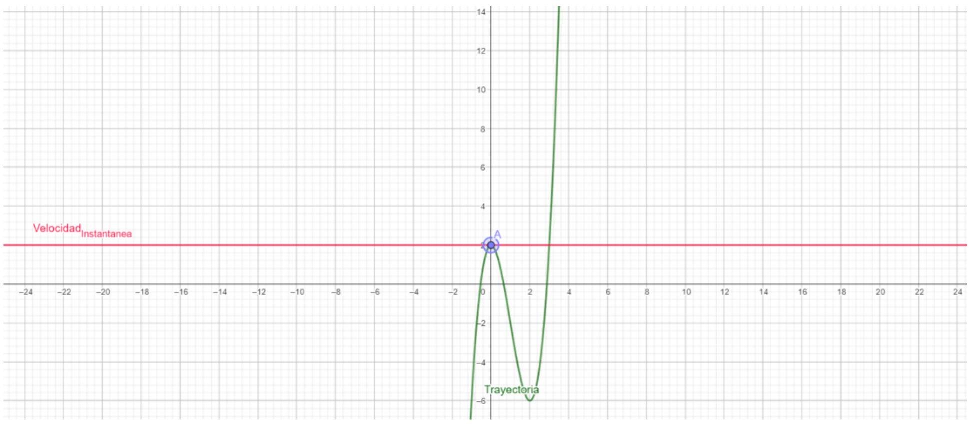
Si hubiera tenido tiempo, me habría gustado realizar una actividad que relacionara física y matemáticas. Ya que, en un una de las sesiones, un alumno mencionó que se había dado cuenta de que la aceleración es la derivada de la velocidad. Aprovechando esa observación, podríamos haber abordado problemas físicos de velocidad y aceleración, representando la función correspondiente a la velocidad y la aceleración en un punto, aplicando el concepto de la recta tangente en un punto.

De esta manera, habríamos relacionado ambas materias y puesto en práctica el concepto de la derivada o recta tangente de una forma distinta, facilitando su comprensión. Otra posible opción para este ejercicio sería calcular la velocidad instantánea de un objeto, ya que dicha velocidad es tangente a la trayectoria que sigue el objeto, siendo otra aplicación de las derivadas y la recta tangente.

Un ejemplo de ejercicio podría haber sido el siguiente: La trayectoria descrita por el movimiento de un satélite se puede expresar mediante la función f(x) = 2(x-3) x² + 2 ¿Cómo es esta trayectoria? Calcula y representa la función que expresa la velocidad instantánea en un punto.

La solución gráfica en GeoGebra hubiera sido la siguiente:





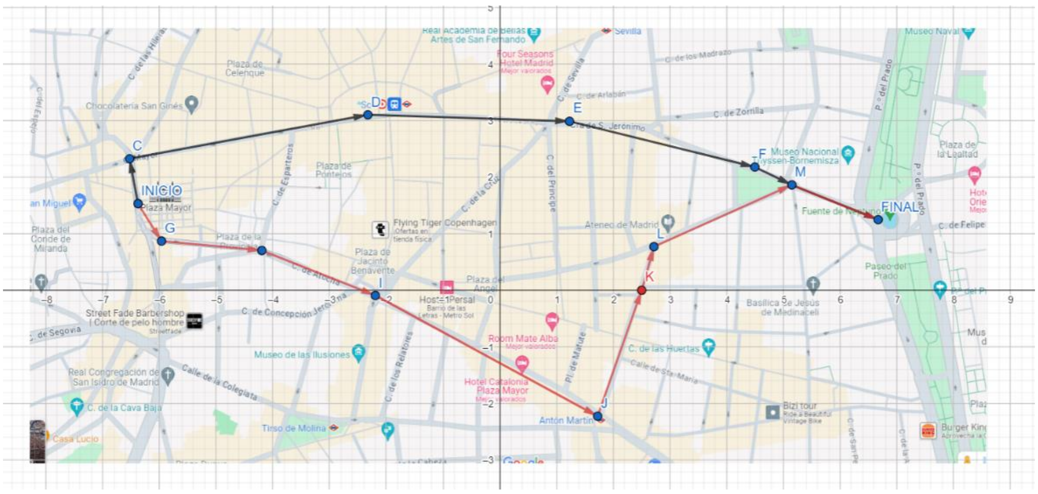
Impartí esta UD a lo largo de 14 sesiones. Sin embargo, no me fue posible terminar el tema. Considero que esta unidad debería haberse desarrollado en más sesiones, idealmente unas 20, para asegurar que los alumnos comprendieran bien el concepto de derivadas y sus aplicaciones. Lamentablemente, solo pude impartir este número de sesiones, ya que varias tuvieron que ser aplazadas debido a excursiones. Durante esas ausencias, la mayoría de los estudiantes no estaba presente, por lo que no consideré adecuado avanzar en el temario. Esto resultó en una mala planificación y en la imposibilidad de completar la unidad.

En 4º de ESO de Matemáticas B, ejecuté la unidad de "Geometría Analítica". Para desarrollarla, preparé material propio basado en el libro de texto (Arias Cabeza & Maza Sáez, 2023), que incluía ejercicios para realizar. Dichos apuntes se pueden encontrar en el Anexo II.1.1. Para completar estos apuntes, cree una ficha de ejercicios (Anexo II.1.2). Además, al igual que en 1º de Bachillerato, ofrecí la posibilidad de sumar hasta un punto extra en el examen. La actividad se encuentra en el Anexo II.1.3. Finalmente, se realizó un examen (Anexo II.1.5).

En este curso, me hubiera gustado desarrollar una situación de aprendizaje, pero por falta de tiempo no la ejecuté. Al observar que los días previos al examen había varios alumnos con dudas, preferí dedicar las últimas sesiones a hacer un repaso general del tema y resolver dudas.

La situación de aprendizaje que hubiera realizado hubiera sido la siguiente: En primer lugar, esta actividad se desarrollaría por grupos. Dichos grupos estarían formados por un total de entre 5 o 6 participantes. La actividad consistiría en lo siguiente: Tendrían que buscar un mapa de una ciudad grande, por ejemplo, Madrid. A continuación, con GeoGebra, establecer un sistema de referencia y marcar dos puntos que estén considerablemente lejos. Tras haber seleccionado estos puntos, deberían marcar varios itinerarios y con las nociones que tenían de geometría analítica, calcular que itinerario es más corto y una vez calculado esto, calcular las diferentes ecuaciones de las rectas que lo forman.

La actividad en GeoGebra, quedaría así:



El mapa que se muestra en la imagen es un ejemplo de un mapa inicial. Cada grupo recibirá uno diferente, dependiendo de la ciudad elegida y de los itinerarios correspondientes. A continuación, deben calcular cuál es el itinerario más corto y las respectivas ecuaciones de las rectas.

En 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales y Humanidades, desarrollé la segunda parte del tema de Derivadas, “Aplicaciones de las derivadas”. Para ejecutar este tema, realicé apuntes propios basado en el libro de texto (Colera Jiménez et al., 2022). Estos apuntes se encuentran en el Anexo II.2.1. Al igual que en los otros cursos, realicé una actividad de puntuación extra (Anexo II.2.2). Al finalizar, ejecuté un examen (Anexo II.2.3).

En este grupo, me hubiera gustado realizar una actividad que demostrara la gran utilidad de los problemas de optimización en la vida real. La idea era que los alumnos trabajaran en grupos, y que cada grupo creara una gran empresa, inventara un problema, intentara calcular una función de beneficio para dicha empresa y resolviera el problema.

Un ejemplo podría ser el siguiente: En mi empresa vendemos ordenadores y tabletas. Si sabemos que cada ordenador genera un beneficio de 670€ y cada tableta el 45% del beneficio de los ordenadores, ¿cuántos ordenadores y tabletas debemos vender para maximizar el beneficio?

Tras pensar, organizar y resolver el problema, los alumnos lo presentarían en clase. El ejemplo anterior es bastante sencillo, pero podrían añadirle condiciones más complejas. Creo que trabajar los problemas de esta forma hubiera sido una gran oportunidad para mostrar a los alumnos su aplicabilidad en la vida real y, además, abordar los problemas de optimización de una manera más innovadora.

4.3. Reuniones con órganos de coordinación didáctica.

Durante mi estancia en el centro, participé en diversas reuniones de coordinación didáctica:

Reunión de tutores: Asistí a las reuniones semanales de tutores, donde se discutían actividades de tutoría y se evaluaba el progreso de los estudiantes, identificando aquellos que podrían necesitar apoyo adicional.

Reunión de departamento: Participé en una reunión virtual donde se abordaron temas como las recuperaciones en ESO y Bachillerato, las fechas de evaluación de 2º de Bachillerato y el examen de prueba de EBAU.

Claustro: En esta reunión se discutieron las optativas disponibles en Bachillerato y se establecieron criterios para la asignación de matrículas en el segundo año, en caso de empate.

Evaluaciones de los cursos: Formé parte de las evaluaciones de todos los cursos en los que impartí docencia, donde se revisó el rendimiento académico de los estudiantes y se identificaron posibles perfiles para Formación Profesional Básica o Grado Básico.

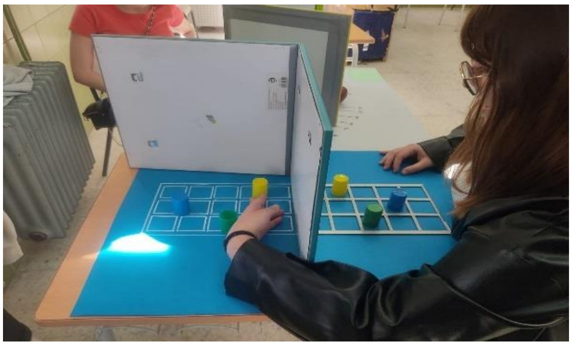
Reunión de padres: Asistí a una reunión con un padre de un estudiante de 4º de ESO para discutir el progreso académico del alumno y proporcionar orientación motivacional.

4.4. Actividades complementarias y extraescolares.

Durante mi participación en el centro educativo, se realizó el día del centro, una jornada especial que incluyó una variedad de actividades en las que tuve la oportunidad de involucrarme. Una de ellas fue:

Actividad del departamento de Biología y Geología: El departamento organizó un museo en el laboratorio de Biología, donde los alumnos tenían la oportunidad de explorar y tomarse fotos con los elementos que les interesaran.

Actividad del departamento de Física y Química: La actividad consistía en un concurso de experimentos. Esta competencia se dividió en dos categorías: la Categoría 1, que incluía a los alumnos de 1º a 3º de ESO, y la Categoría 2, destinada a los estudiantes de 4º de ESO, 1º y 2º de Bachillerato. Todos los participantes recibieron una recompensa de 0,5 punto extra en su próximo examen por presentar un experimento, mientras que los ganadores obtendrían un punto extra adicional como premio.



<u>Actividad del departamento de Matemáticas:</u> Esta actividad consistió en realizar operaciones mentalmente en el menor tiempo posible. Se realizaron dos rondas para permitir a los alumnos mejorar su marca si lo deseaban. Al final del día, se anunciaron los tres alumnos con la menor marca, quienes recibieron un premio por su desempeño.

<u>Actividad realizada por los grados del centro</u>: Después de las actividades organizadas por otros departamentos, los estudiantes de grado del centro organizaron una sesión de Zumba para concluir la jornada.

5. Autoevaluación.

Para finalizar este trabajo, quiero hacer una reflexión sobre la experiencia de las prácticas. Esta experiencia ha sido una de las más gratificantes y enriquecedoras que he vivido en los últimos años de estudio. Cuando ingresé en el grado de matemáticas, mi objetivo final era convertirme en profesora. Durante los años de estudio, he dado clases particulares, por lo que no fue la primera vez que me enfrenté a las dificultades de los alumnos. Sin embargo, he de decir que dar clases particulares no se asemeja en nada a impartir clases a diferentes grupos.

Lo que he aprendido con esta experiencia es que a veces las cosas no salen como se planean; es decir, que durante el camino podemos encontrar diversos obstáculos que debemos solucionar antes de avanzar. Durante los primeros días, tenía bastantes miedos, ya que temía que mi sueño de ser profesora no me gustara finalmente al enfrentarme a diversas situaciones. Sin embargo, gracias a las prácticas docentes, pude corroborar que realmente quiero dedicarme a esto.

Al comenzar con el desarrollo de las unidades didácticas, temía que lo que explicara no se entendiera y que los alumnos no preguntaran sus dudas, llevándoselas a casa. Recordaba que cuando yo era alumna, por vergüenza no preguntaba mis dudas en clase. Por eso, durante el desarrollo de las clases, intenté crear un ambiente de confianza para que los alumnos se sintieran seguros de preguntar todo aquello que no entendieran.

Otro de los aspectos que intenté fomentar en clase fue que, además de preguntarme sus dudas, también pudieran resolverlas entre ellos. Al comenzar a impartir clase en uno de los cursos, me di cuenta de que había dos alumnas que se complementaban muy bien, explicándose una a otra. Sinceramente, creo que no hay mejor forma de aprender que explicando aquello que sabes.

Durante este periodo también he aprendido que no siempre las cosas salen como se tienen previstas y que, a veces, las clases no se desarrollan como se había planeado. Por eso, es esencial tener un plan de acción alternativo. En ocasiones, la clase puede estar más dispersa o habladora, por lo que es necesario tener estrategias adicionales para captar la atención del alumnado e incluso, a veces, cambiar el enfoque por completo.

Además, he aprendido que es crucial adaptarse al nivel de la clase. En cursos distintos, pero del mismo nivel educativo, una misma unidad puede abordarse de maneras diferentes dependiendo del nivel académico de los estudiantes.

Sin embargo, aunque es una profesión muy gratificante, desde mi punto de vista es necesario ser mentalmente fuerte. Aunque no he tenido cursos difíciles de tratar, he observado clases complicadas. En estos cursos, uno de los aspectos fundamentales es la disciplina, es decir, saber controlar clases que se desbordan y reconducirlas adecuadamente. Otro aspecto importante es adaptar la forma de explicar a los cursos más bajos, evitando un lenguaje muy técnico, ya que no entienden ese vocabulario. Esto se me complicaba a veces en 2º de la ESO.

A pesar de estas dificultades, considero que ha sido una etapa muy bonita de mi vida en la que me he sentido muy acogida por los alumnos. Durante este corto periodo de prácticas, creé un fuerte vínculo con los alumnos, especialmente con los más pequeños. Ellos son quizás los más vulnerables, y si les proporcionas un ambiente de confianza, logras que se abran contigo. Con los cursos superiores también creé un buen vínculo, aunque la situación es diferente debido a que son alumnos más maduros.

En cuanto al Máster, la asignatura que más me ha gustado y que considero más útil para mi futuro como docente es Prácticas Docentes. Después de varios años estudiando el grado y el máster, finalmente llegó el momento de enfrentarme a la realidad de la enseñanza, algo que anhelaba. Otras asignaturas que también me han resultado bastante útiles son Didáctica de las Matemáticas, Metodología Experimental y Aprendizaje de las Matemáticas, y Fundamento Científico del Curriculum de Matemáticas en Enseñanza Secundaria II.

Gracias a la asignatura de Didáctica, aprendimos a crear una unidad propia y su correspondiente unidad didáctica. Esto me facilitó mucho la elaboración de este trabajo y la realización de la memoria de prácticas. Por otro lado, en la asignatura de Metodología aprendí algunas herramientas tecnológicas para utilizar en mi futuro como docente. Aunque en las prácticas no utilicé mucho más que GeoGebra debido a la brevedad del periodo de prácticas, estoy segura de que en mi futuro como docente usaré muchas de estas herramientas para promover el interés en la asignatura y alejarme de la metodología tradicional, que no es tan apreciada. Finalmente, la asignatura de Fundamentos II también me resultó muy útil, ya que antes de cursarla, prácticamente no sabíamos cómo elaborar una situación de aprendizaje. Esta asignatura me proporcionó las habilidades necesarias para crear la situación de aprendizaje que llevé a cabo en 2º de la ESO.

6. Bibliografía.

- Agencia Estatal Boletín Oficial del Estado. (2006). *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.* https://www.boe.es/buscar/pdf/2006/BOE-A-2006-7899-consolidado.pdf
- Agencia Estatal Boletín Oficial del Estado. (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.* https://www.boe.es/buscar/pdf/2022/BOE-A-2022-4975-consolidado.pdf
- Arias Cabeza, J. M., & Maza Sáez, I. (2023). *Matemáticas 2 ESO 3 Volúmenes Proyecto 5* (Vol. 3). Bruño.
- Arias Cabeza, J. M., & Maza Sáez, I. (2023). *Matemáticas 4 ESO MATEMATICAS B 3 Volúmenes Proyecto 5* (Vol. 3). Bruño.
- *Brainly*. (s. f.). https://brainly.lat/tarea/90651
- Carrillo Delgado, M. de los Á. (2024). *Evaluación*. https://forms.gle/14g8mPUECeVgaKMq7
- Carrillo Delgado, M. de los Á. (2024). *Google Sites*. https://sites.google.com/d/1BnRKuEocK-a8qGX1REfOIIxwARN5Ui-Y/p/1ZibYorpFn9ngqfFelrmDQNK14R7xJ-eX/edit
- Clases particulares en Ávila. (2021). *Los POLIEDROS para NIÑOS*. https://youtu.be/s-eD9gDaZkE?si=S8Sbwl6skBCvZoxe
- Colera Jiménez, J., García Pérez, R., Colera Cañas, R., Oliveira González, M. J., & Aicardo B, A. (2022). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Anaya.
- Colera Jiménez, J., García Pérez, R., Colera Cañas, R., Oliveira González, M. J., & Aicardo B, A. (2022). *Matemáticas I*. Anaya.
- Google Classroom.
- JEFATURA DEL ESTADO. (2020). *Disposición 17264 del BOE núm. 340 de 2020*. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3/dof/spa/pdf
- JUNTA DE EXTREMADURA. (2022). *DOE n.º 151- 5-agosto-2022*. https://doe.juntaex.es/pdfs/doe/2022/1510o/22040159.pdf

- Lopez Latorre, M. A. (2022). *DECRETO 110/2022, DE 22 DE AGOSTO, POR EL QUE SE ESTABLECEN LA ORDENACIÓN Y EL CURRÍCULO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA PARA LA COMUNIDAD AUTÓNOMA DE EXTREMADURA*. https://doe.juntaex.es/pdfs/doe/2022/1640o/22040165C.pdf
- Programación didáctica del departamento de matemáticas del IES Zurbarán.

ANEXOS

En las siguiente páginas, estará incluido tanto el material elaborado y utilizado durante el periodo de prácticas docentes como algunas de las actividades que llevé a cabo.

El índice de los anexos es el siguiente:

ANEXOS

III.2. Actividades en tutorías.
III.3. Autoevaluación.
III.4. Ficha para refuerzo.

I. Anexo I: Material 2º de ESO A.

En este apartado voy a incluir todo el material que he realizado para el curso 2º de ESO A, desde las semanas de observación hasta terminar la unidad didáctica.

Imagen 1: Impartición de clases en 2º de ESO A

I.1. Diagramas de sectores.

Durante el periodo de observación, realicé el material para explicar los diagramas de sectores.

Diagramas de sectores: Consisten en representar los datos en un círculo. Podemos representar todo tipo de variables (cualitativas o cuantitativas).

Ejemplo:

6.- Se ha hecho una encuesta sobre el tipo de vacaciones preferidas por los alumnos de una clase y se ha obtenido:

Tipo	Nº de alumnos
Playa	20
Montaña	8
Viaje cultural	4

a) **Forma la tabla estadística con frecuencias absolutas y relativas.**

b) **Representa la situación en un diagrama de sectores.**

a) Tabla de frecuencias absolutas y relativas.

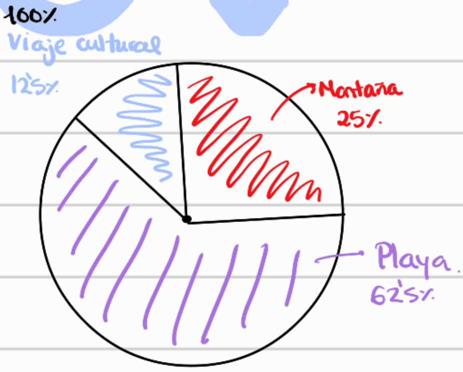
x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	%
Playa	20	0'625	20	0'625	62'5%
Montaña	8	0'25	28	0'875	25%
V. cultural	4	0'125	32	1	12'5%
	32	1			100%

b) Diagrama de sectores

Playa: $32 \longrightarrow 360^\circ$, $20 \longrightarrow x$ $\Rightarrow x = \frac{20 \cdot 360}{32} = 225^\circ$

Montaña: $32 \longrightarrow 360$, $8 \longrightarrow x$ $\quad x = 90^\circ$

V. cultural: $32 \longrightarrow 360$, $4 \longrightarrow x$ $\quad x = 45^\circ$



Ejercicio

9.- En la siguiente tabla se muestran los resultados de una encuesta entre 100 personas, sobre sus preferencias por espectáculos:

Tipo	Nº de personas (f_i)	h_i	F_i	H_i	%
Cine	41	0'41	41	0'41	41%
Teatro	28	0'28	69	0'69	28%
Música	12	0'12	81	0'81	12%
Variedades	19	0'19	100	1	19%
	100	1			

a) Forma la tabla estadística de las frecuencias absolutas y relativas.

b) Representa los datos en un diagrama de sectores.

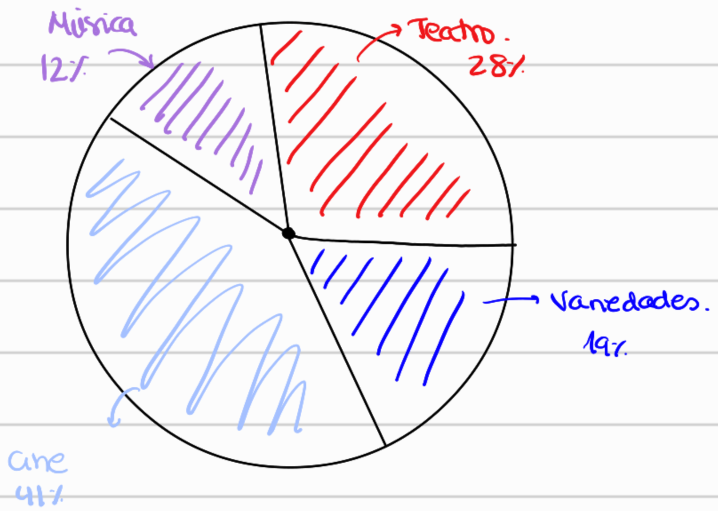
b) Diagrama de sectores

Cine: $100 \longrightarrow 360$, $41 \longrightarrow x$ $\quad x = 147'6°$

Teatro: $28 \longrightarrow x$ $\quad x = 100'8°$

Música: $12 \longrightarrow x$ $\quad x = 43'2°$

Variedades: $360 - (147'6 + 100'8 + 48'2) = 68'4°$



I.2. Apuntes de la unidad.

Los apuntes de la unidad los he realizado basándome en las unidades 10 y 11 del libro de texto.

Bibliografía.

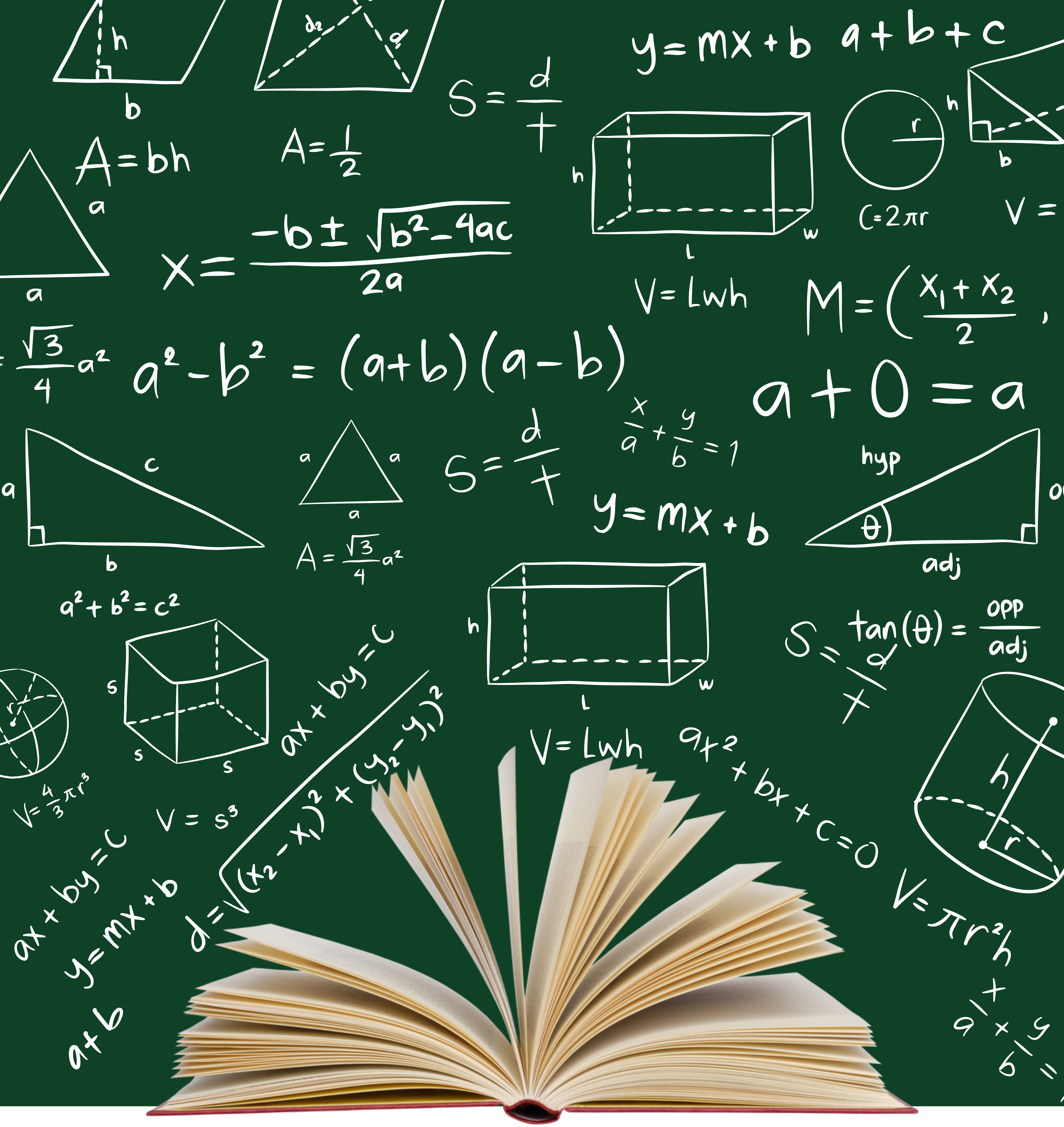
- Arias Cabeza, J. M., & Maza Sáez, I. (2023). *Matemáticas 2 ESO 3 Volúmenes Proyecto 5* (Vol. 3). Bruño.

I.3. Ejercicios del tema.

Realicé una ficha de ejercicios del tema. Algunos de estos ejercicios están sacados del libro de texto y el resto de internet. Al final de esta ficha se incluye una autoevaluación.

Bibliografía.

- Arias Cabeza, J. M., & Maza Sáez, I. (2023). *Matemáticas 2 ESO 3 Volúmenes Proyecto 5* (Vol. 3). Bruño.
- Muoa Benav, M. (2022). *Ejercicios de Poliedros*. Slideshare.net. https://es.slideshare.net/MarthaLuciaMuoaBenav/ejercicios-de-poliedrospdf
- *ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS*. (2008). Matematicasonline. https://www.matematicasonline.es/cuartoeso/ejercicios/areas%20y%20volumenes%20de%20cuerpos%20geometricos_.pdf
- González Medina, R. (s. f.). *Áreas y Volúmenes*. Selectividad.intergranada. https://selectividad.intergranada.com/ESO/Material/areas_vol_2eso.pdf



TEMA 10: CUERPOS EN EL ESPACIO. ÁREAS Y VOLÚMENES.

MARÍA DE LOS ÁNGELES CARRILLO DELGADO

ÍNDICE

1. ¿Para qué sirven los cuerpos en el espacio?

En nuestro día a día, casi nunca nos encontramos con figuras planas, sino que utilizamos objetos tridimensionales. Por ejemplo, una caja de zapatos, una goma de borrar o un paquete de tizas son un tipo de cuerpos geométricos. Las pirámides de Egipto son otro tipo de cuerpos geométricos y las latas de coca cola son otro tipo de cuerpos geométricos.
El objetivo de esta unidad es **conocer y diferenciar** los diferentes cuerpos en el espacio y además también aprenderemos a calcular **el área** de cada uno de ellos (por si por ejemplo queremos pintarlo y así estimar la cantidad de pintura que necesitamos para ello) y **el volumen** (para saber cuánto cabe en su interior).

Antes de comenzar a conocer dichos cuerpos, vamos a hacer un repaso en la siguiente sección de los **polígonos**.

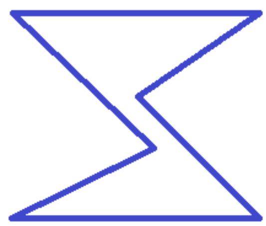
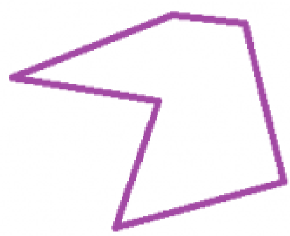
2. Polígonos.

2.1 ¿Qué es un polígono?

Para responder a esta pregunta primero tenemos que conocer que es una línea poligonal.

Una **línea poligonal** es una colección de segmentos consecutivos. Hay dos tipos: líneas poligonales **abiertas** y líneas poligonales **cerradas.**

Ejemplos:

Líneas poligonales abiertas	**Líneas poligonales cerradas**
 	 

Un **polígono** es una línea poligonal cerrada y su interior.

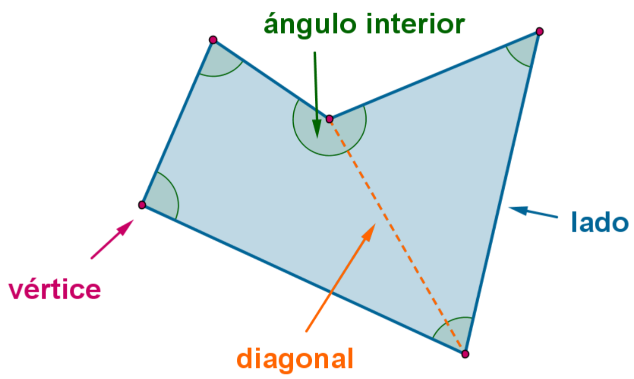
2.2 Elementos de un polígono.

Lados: Son cada uno de los segmentos que forman su contorno.

Vértices: Son los puntos donde se unen dos lados.

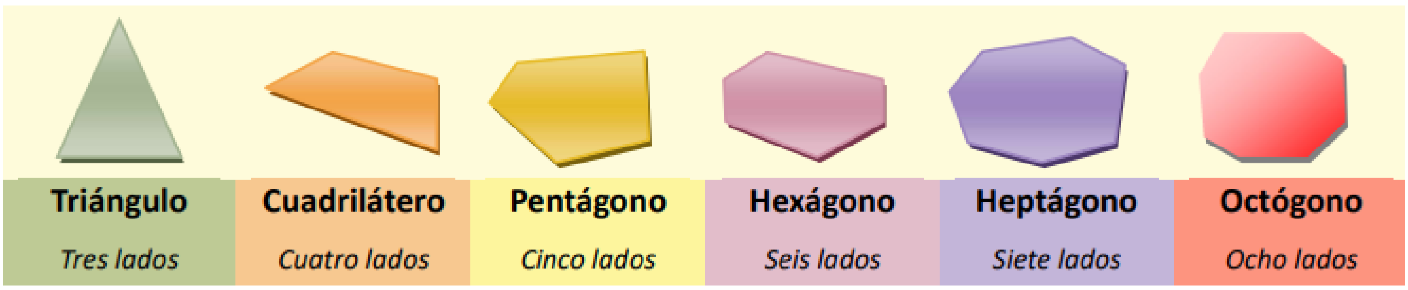
Diagonales: Son cada uno de los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

Ángulos interiores: Son los ángulos que forman dos lados consecutivos.



Si un polígono tiene todos sus lados y ángulos interiores iguales, se llama **polígono regular.** En caso contrario, se llama **polígono irregular.**

Por el **número de lados**, los polígonos se clasifican de la siguiente forma:



2.3 Área de los polígonos.

Triángulos.

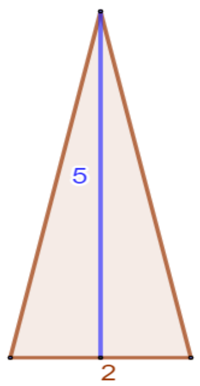
Para calcular el área de un triángulo, necesitamos conocer su **base y su altura.** Una vez conocidas, podremos calcular el área de la siguiente forma:

$$\text{Área} = \frac{Base \cdot Altura}{2}$$

<u>**Ejemplos:**</u>

1.Calcular el área del triángulo cuya base mide 2cm y cuya altura mide 5cm.

Primero vamos a hacer un dibujo con los datos que nos da el enunciado y vamos a identificar si nos falta algo para calcular el área.

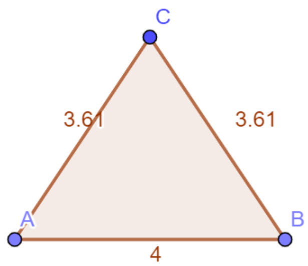


Tenemos la base y la altura, aplicando la fórmula obtenemos el área que buscábamos.

$$\text{Área}= \frac{Base \cdot Altura}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}^2$$

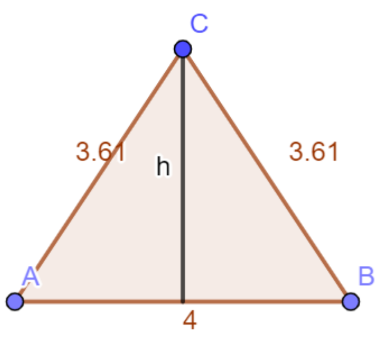
2. Calcula el área del triángulo isósceles (dos lados iguales) cuya base mide 4 cm y sus lados iguales miden 3.61cm.

Como en el ejercicio anterior, primero vamos a hacer un dibujo con los datos que tenemos:



Para calcular el área, necesitamos su base y su altura. La base la conocemos, pero la altura no. ¿Qué teorema podemos utilizar para calcular la altura?

<u>**Teorema de pitágoras:**</u>



$h^2 = c^2+c^2$

Entonces: $3.61^2 = 2^2 + h^2$

Despejando h, obtenemos h= 3 cm

Entonces el área del triángulo es:

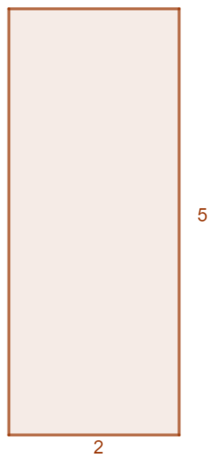
$$\text{Área}= \frac{Base \cdot Altura}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6\ \text{cm}^2$$

Rectángulos.

Para calcular el área de un rectángulo, necesitamos conocer su **base y su altura.** Una vez conocidas, podremos calcular el área de la siguiente forma:

Área = Base · Altura

Ejemplo: **Calcula el área de un rectángulo cuya base mide 2 cm y su altura mide 5 cm.**
Primero vamos a dibujar el rectángulo:



Como tenemos todo lo que necesitamos, aplicamos la fórmula:

Área = Base · Altura = 2 · 5 = 10 cm^2

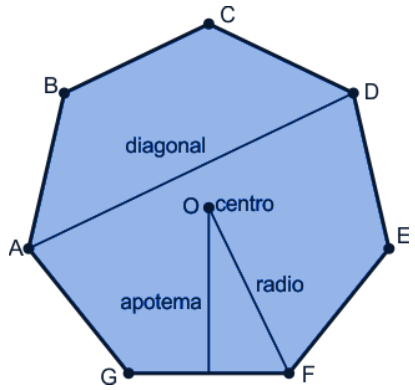
Polígonos regulares.

Antes de calcular el área de los polígonos regulares, tenemos que conocer las partes de estos polígonos.

Centro: punto que está a la misma distancia de todos los vértices.

Radio: segmento que une el centro y un vértice.

Apotema: segmento que une el centro con el punto medio de un lado.



Para calcular el área necesitamos conocer, el perímetro y la apotema del polígono, utilizaremos la siguiente fórmula:

$$\textbf{Área} = \frac{Perímetro \cdot Apotema}{2}$$

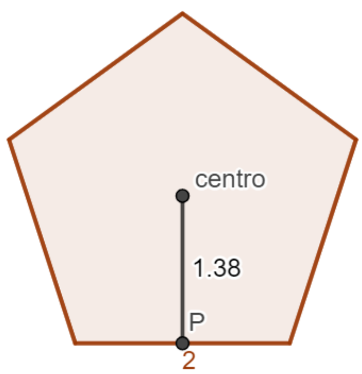
¡¡RECUERDA!! El perímetro de un polígono se calcula sumando las longitudes de todos sus lados.

Recuerda también que en los hexágonos el lado y el radio coinciden, es decir, el triangulo que se forma es equilátero.

Ejemplos:

1. **Calcula el área de un pentágono regular cuyo lado es 2 cm y la apotema 1.38 cm.**

Primero vamos a hacer un dibujo con los datos que nos da el enunciado:



Calculamos el perímetro:

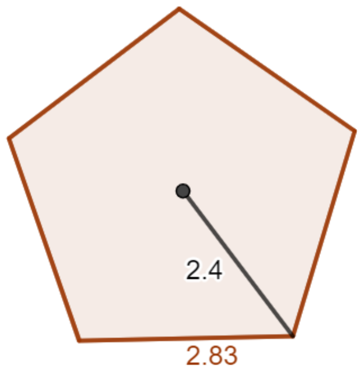
P = 2·5 = 10 cm

Ya tenemos todo lo necesario para calcular el área:

$$\textbf{Área} = \frac{10 \cdot 1.38}{2} = 6.9 \text{ cm}^2$$

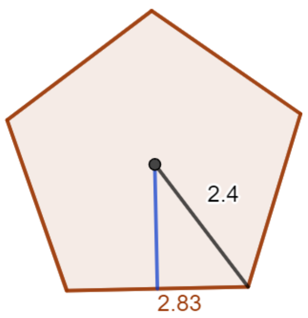
2. **Calcula el área de un pentágono regular cuyo lado mide 2.83 cm y cuyo radio mide 2.4 cm.**

   Primero hacemos un dibujo con los datos que nos ha dado el ejercicio:



El perímetro es: P= 2.83 · 5 = 14.15 cm

Ahora necesitamos conocer la apotema, para ello vamos a aplicar el **teorema de pitágoras**:



Como la apotema divide al lado en 2 partes iguales, aplicando el teorema de pitágoras obtenemos:

$$2.4^2 = 1.415^2 + ap^2$$

Despejando la apotema:

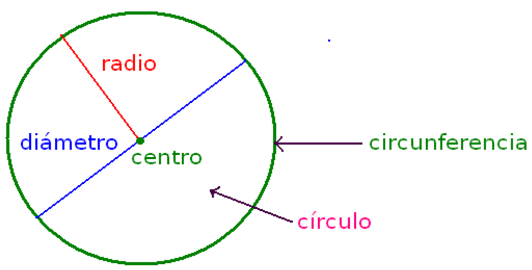
$$ap = 1.94 \text{ cm}$$

Ya tenemos todo lo necesario para calcular el área, por tanto obtenemos:

$$\textbf{Área} = \frac{14.15 \cdot 1.94}{2} = 13.73 \text{ cm}^2$$

2.3 Longitud de la circunferencia y área del círculo.

<u>Partes de la circunferencia:</u>



Para calcular la **longitud de la circunferencia o perímetro** de la circunferencia, vamos a utilizar la siguiente fórmula:

Longitud = $2 \cdot \pi \cdot r$

Para calcular el área del circulo, vamos a utilizar la siguiente fórmula:

Área = $\pi \cdot r^2$

3. Poliedros.

3.1 ¿Qué son los poliedros?

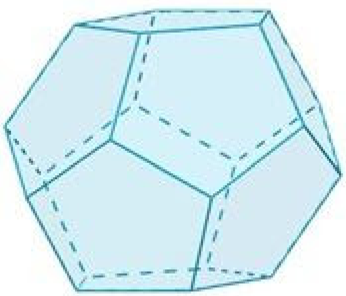
Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por polígonos. Sus elementos fundamentales son:

- **Caras**: son los polígonos que lo limitan.
- **Aristas**: son los lados comunes de las caras.
- **Vértices:** es el punto en el que se unen 3 o más caras.

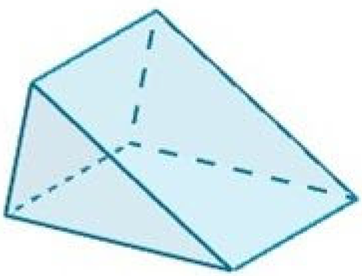
Video resumen de lo que vamos a tratar en el tema: https://youtu.be/s-eD9gDaZkE?si=Xhju3M--TJYBmLkl

3.2 Clasificación de poliedros.

- **Regular**: todas las caras son polígonos regulares.
- **Irregular**: cuando no es regular.

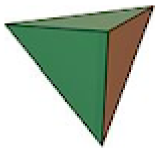
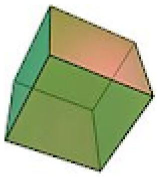
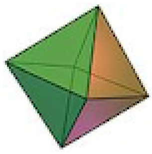
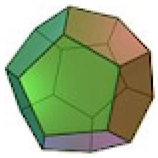
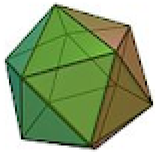


Poliedro regular



Poliedro irregular

3.3 Poliedros regulares.

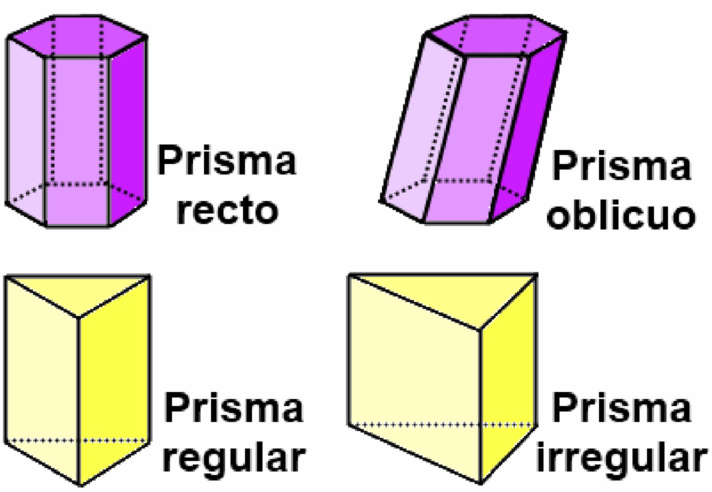
Sólidos Platónicos	Tetraedro	Hexaedro, Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
					
Número de caras	4	6	8	12	20
Polígonos en las caras	Triángulos Equiláteros	Cuadrados	Triángulos Equiláteros	Pentágonos Regulares	Triángulos Equiláteros
Número de aristas	6	12	12	30	30
Número de vértices	4	8	6	20	12

4. Prismas y cilindros.

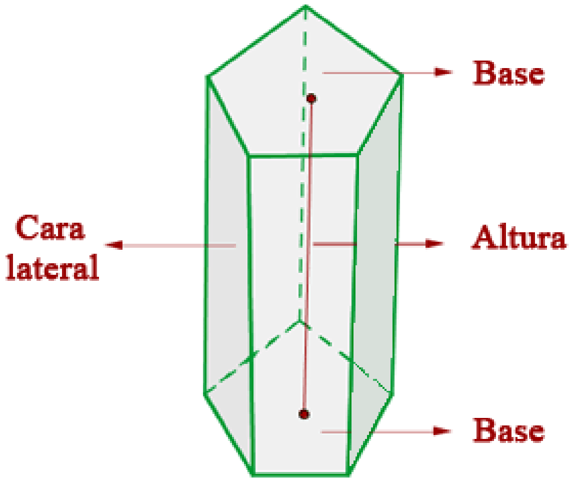
4.1. Prismas.

Un **prisma** es un poliedro cuyas bases son dos polígonos paralelos e iguales y cuyas caras laterales son paralelogramos. La **altura** de un prisma es la distancia que hay entre sus bases.

- Un **prisma** es **recto** si sus caras laterales son rectángulos. Es **oblicuo** en caso contrario.
- Un prisma es **regular** si es recto y sus bases son polígonos regulares.



Partes de un prisma.

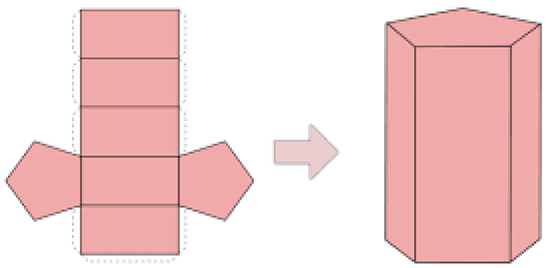


Desarrollo plano de un prisma regular.

El desarrollo plano de un prisma regular está formado por:

- Dos polígonos regulares iguales que forman las bases del prisma.
- Tantos rectángulos iguales como lados tenga el polígono de las bases.

La altura del prisma y la altura de los rectángulos que forman las caras laterales coinciden.



Aquí podemos observar que el desarrollo plano está formado por dos pentágonos (bases) y 5 rectángulos iguales que son las caras laterales.

Área y volumen de un prisma.

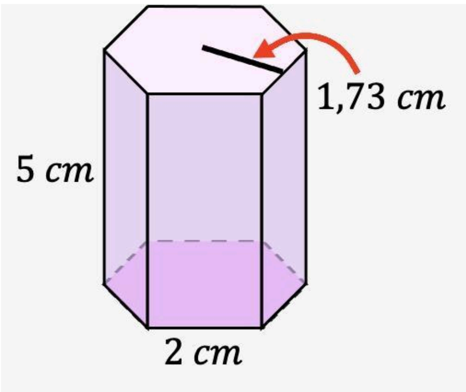
Para calcular el **área de un prisma**, vamos a observar su desarrollo plano. Como podemos observar, el desarrollo plano siempre está formado por dos polígonos regulares que son las bases, y tantos rectángulos como lados tengan los polígonos de las bases, que forman las caras laterales. Entonces el área de un prisma, simplemente será la suma de todos los polígonos que forman el desarrollo plano.

$$\textbf{Área}_{\textbf{prisma}} = \textbf{2} \cdot \textbf{Área}_{\textbf{Base}} + \textbf{Área}_{\textbf{Lateral}}$$

Para calcular el volumen de un prisma, simplemente vamos a multiplicar el área de la base por la altura.

$$\textbf{Volumen}_{\textbf{prisma}} = \textbf{Área}_{\textbf{Base}} \cdot \textbf{Altura}$$

Ejemplo: **Hallar el área y el volumen del prisma de la imagen.**



Para calcular el área total, tenemos que calcular el área de la base y el área lateral.

$\text{Área}_{\text{Base}} = \frac{12 \cdot 1.73}{2} = 10.38 \text{ cm}^2$

Ahora vamos a calcular el área lateral, para ello vamos a calcular el área de uno de los rectángulos, ya que el resto son iguales.

$$\text{Área}_{\text{Rectángulo}} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}^2$$

Entonces, el área lateral es:

$$\text{Área}_{\text{lateral}} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2$$

Entonces el área del prisma es:

$$\text{Área}_{\text{prisma}} = 2 \cdot 10.38 + 60 = 80.76 \text{cm}^2$$

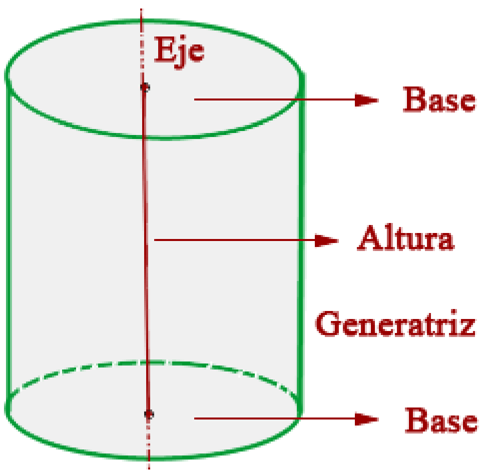
Y el volumen es:

$$\text{Volumen}_{\text{prisma}} = \text{Área}_{\text{Base}} \cdot \text{Altura} = 10.38 \cdot 5 = 51.9 \text{ cm}^3$$

4.2. Cilindros.

Un **cilindro recto** es un cuerpo redondo que se obtiene haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. La **altura** del cilindro es la distancia entre sus bases.

Partes de un cilindro.

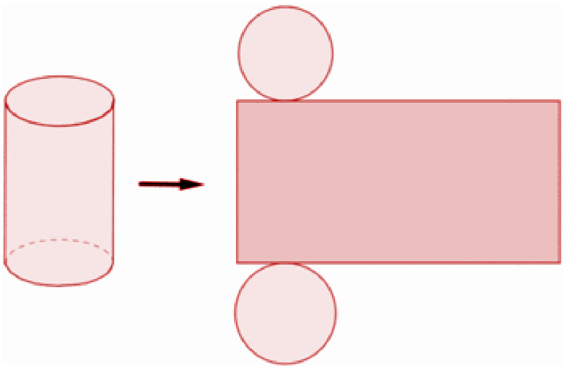


Desarrollo plano de un cilindro.

El desarrollo plano de un cilindro está formado por:

- Dos círculos iguales que forman las bases del cilindro.
- Un rectángulo que forma la superficie lateral.

La altura del cilindro y la altura del rectángulo que forma la cara lateral coinciden.



Aquí podemos observar que el desarrollo plano está formado por dos círculos (bases) y un rectángulo que forma la cara lateral.

Área y volumen de un cilindro.

Para calcular el **área de un cilindro**, vamos a observar su desarrollo plano. Como podemos observar, el desarrollo plano siempre está formado por dos círculos que son las bases, yun rectángulo que forma la cara lateral. Entonces el área del cilindro, simplemente será la suma de los círculos y el rectángulo que forman el desarrollo plano.

$$\textbf{Área}_{\text{cilindro}} = 2\cdot \textbf{Área}_{\text{Base}} + \textbf{Área}_{\text{Lateral}}$$

Para calcular el volumen de un cilindro, simplemente vamos a multiplicar el área de la base por la altura.

$$\textbf{Volumen}_{\text{cilindro}} = \textbf{Área}_{\text{Base}} \cdot \textbf{Altura}$$

Ejemplo: Hallar el área y el volumen de un cilindro recto de altura 7m y cuyo radio de la base es 3m.

Para calcular el área utilizamos la fórmula: $\textbf{Área}_{\text{cilindro}} = 2\cdot \textbf{Área}_{\text{Base}} + \textbf{Área}_{\text{Lateral}}$

Entonces:

$$\text{Área}_{\text{Base}} = \pi \cdot 3^2 = 28.26\ m^2$$
$$\text{Área}_{\text{Lateral}} = 2\cdot \pi\cdot 3\cdot 7 = 131.88\ m^2$$

Entonces, el área total es la suma de estas dos áreas:

$$Área_{cilindro} = 2 \cdot 28.26 + 131.88 = 188.40m^2$$

Y el volumen:

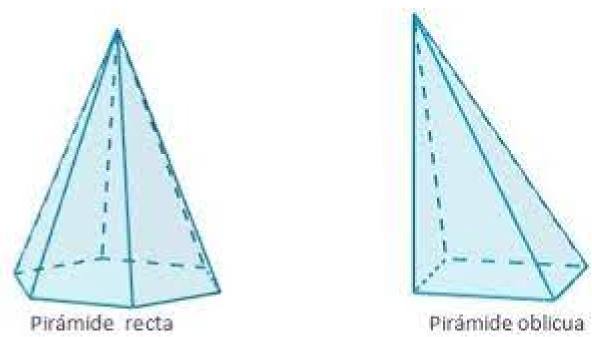
$$Volumen_{cilindro} = Área_{Base} \cdot Altura = 28.26 \cdot 7 = 197.82m^3$$

5. Pirámides y conos.

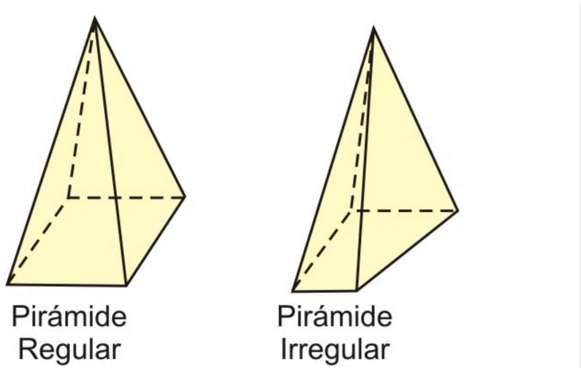
5.1. Pirámides.

Una **pirámide** es un poliedro que tiene por base un polígono cualquiera y cuyas caras laterales son triángulos con un vértice común. La **altura** de una pirámide es la distancia entre el vértice y la base.

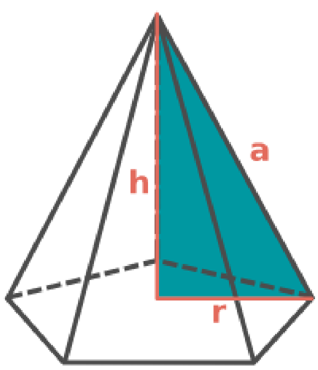
- Una **pirámide** es **recta** si sus caras laterales son triángulos isósceles. En caso contrario es oblicua.



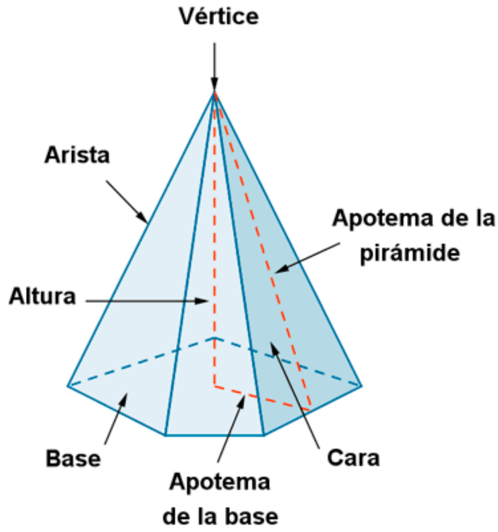
- Una **pirámide es regular** si es recta y su base es un polígono regular.



- La **apotema de una pirámide** regular es la altura de cada uno de los triángulos isósceles que forman las caras laterales.



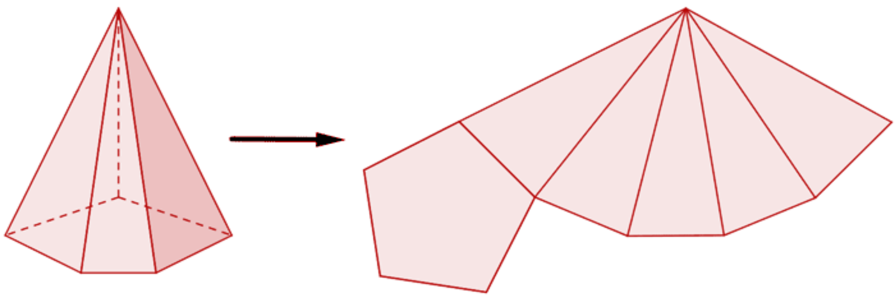
Partes de una pirámide.



Desarrollo plano de una pirámide.

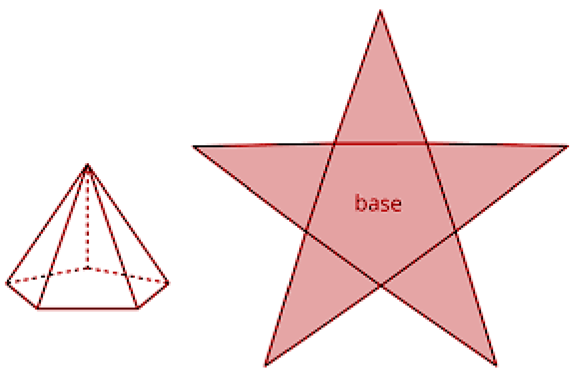
El desarrollo plano de una pirámide está formado por:

- Un polígono regular que forma la base de la pirámide.
- Tantos triángulos isósceles como lados tenga la base.



Aquí podemos observar que el desarrollo plano está formado por un pentágono (base) y 5 triángulos isósceles que forman las caras laterales.

Otra forma de ver el desarrollo plano:



Área y volumen de una pirámide.

Para calcular el **área de una pirámide**, vamos a observar su desarrollo plano. Como podemos observar, el desarrollo plano siempre está formado por un polígono regular que es su base, y tantos triángulos isósceles como lados tenga la base . Entonces el área de la pirámide, simplemente será la suma del área del polígono regular y el área de todos los triángulos isósceles que forman el desarrollo plano.

$$\textbf{Área}_{\textbf{pirámide}} = \textbf{Área}_{\textbf{Base}} + \textbf{Área}_{\textbf{Lateral}}$$

Para calcular el volumen de una pirámide, simplemente vamos a multiplicar el área de la base por la altura y dividir entre 3.

$$\textbf{Volumen}_{\textbf{pirámide}} = \frac{ÁreaBase \cdot Altura}{3}$$

Ejemplo: Hallar el área y el volumen de una pirámide cuadrangular de 6m de arista de la base y 8m de altura.

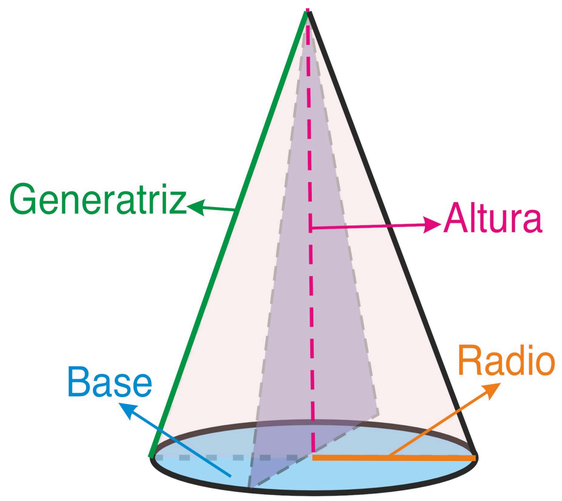
5.2. Conos.

Un **cono recto** es el cuerpo de revolución que se obtiene haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

Enlace a un video de como se obtiene un cono: https://youtu.be/HWRFiqcC2kc

Partes de un cono.

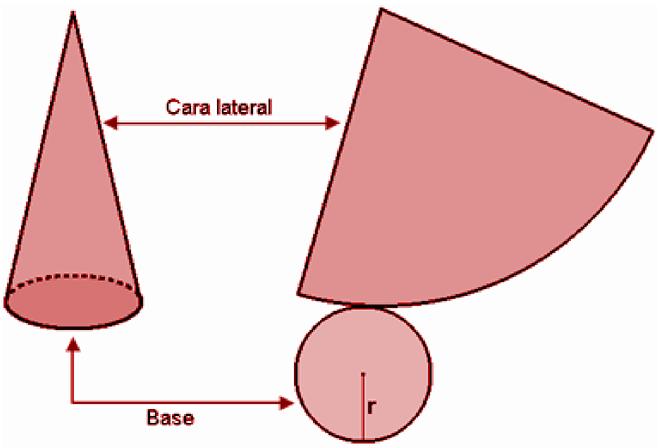
- La **altura** del cono es el cateto sobre el que gira el triángulo rectángulo.
- El **radio** de la base es el otro cateto.
- La **generatriz** del cono es la hipotenusa del triángulo rectángulo.



Desarrollo plano de un cono.

El desarrollo plano de un cono está formado por:

- Un círculo que es la base.
- Un sector circular que es la cara lateral.



Aquí podemos observar que el desarrollo plano está formado por un círculo (base) y un sector circular que forma la cara lateral.

Área y volumen de un cono.

Para calcular el **área de un cono**, vamos a observar su desarrollo plano. Como podemos observar, el desarrollo plano siempre está formado por un círculo que es su base, y un sector circular. Entonces el área del cono, simplemente será la suma del área del círculo regular y el área de la cara lateral.

$$\textbf{Área}_{\text{cono}} = \textbf{Área}_{\text{Base}} + \textbf{Área}_{\text{Lateral}} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$$

Para calcular el volumen de un cono, simplemente vamos a multiplicar el área de la base por la altura y dividir entre 3.

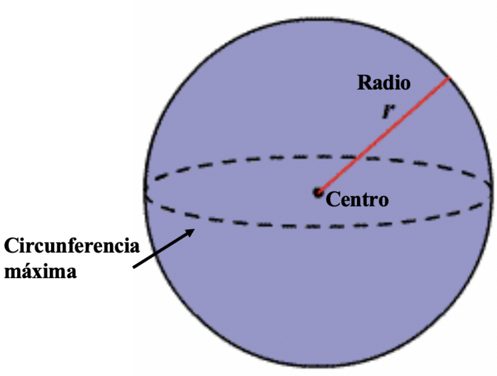
$$\textbf{Volumen}_{\text{cono}} = \frac{ÁreaBase \cdot Altura}{3}$$

Ejemplo:Hallar el área y el volumen de un cono recto de 5 m de radio de la base y 12 m de altura.

6. Esfera.

La esfera no tiene desarrollo plano.

Partes de una esfera.



Área y volumen de una esfera.

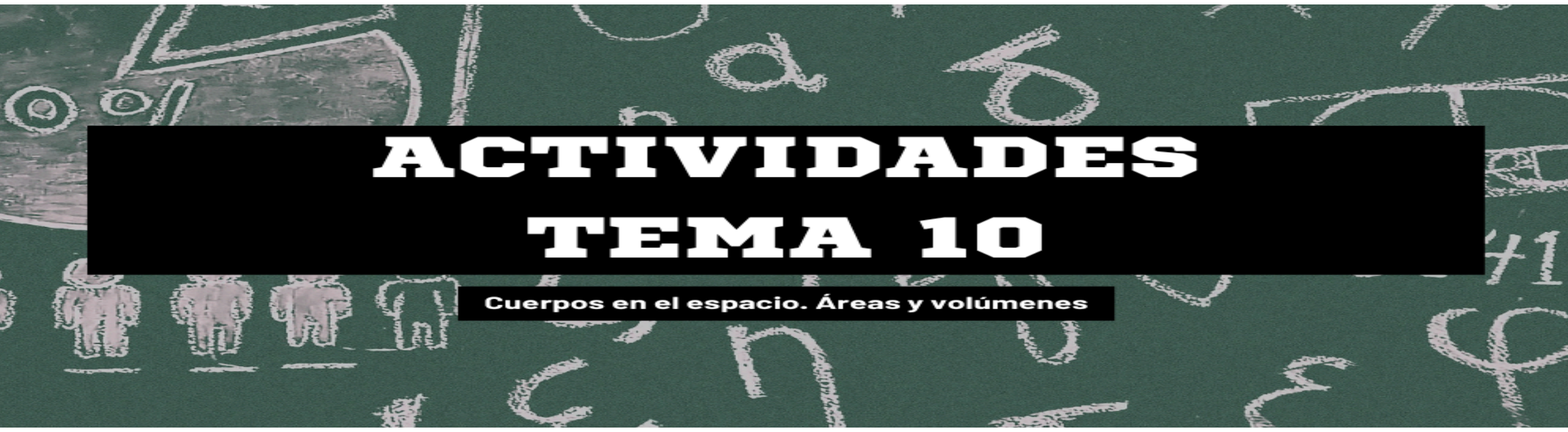
Para calcular el área de una esfera vamos a utilizar la siguiente fórmula:

$$\text{Área}_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Para calcular el volumen de una esfera vamos a utilizar la siguiente fórmula:

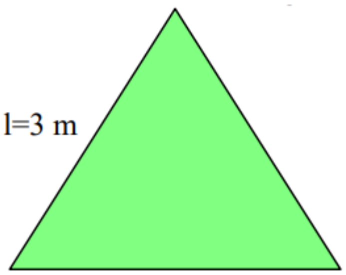
$$\text{Volumen}_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Ejemplo: Hallar el área y el volumen de una esfera de 5 m de radio.

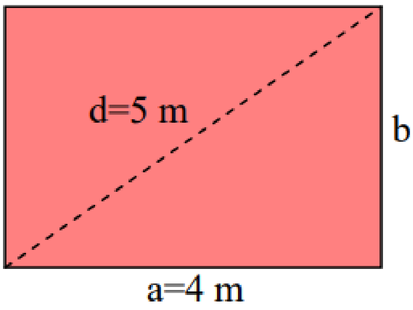


REPASO DE ÁREAS DE POLÍGONOS

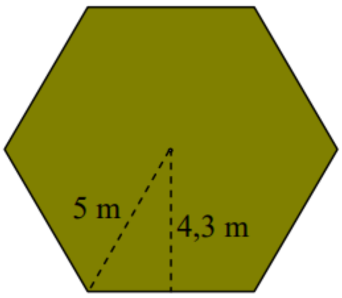
1. **Calcula el área del triángulo equilátero.**



2. **Calcula el perímetro y el área del rectángulo de la figura.**

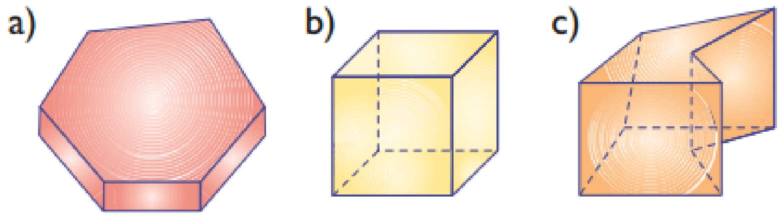


3. **Halla el área y el perímetro del siguiente hexágono.**

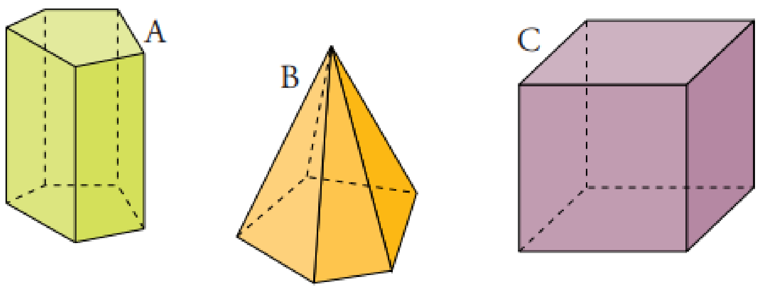


POLIEDROS

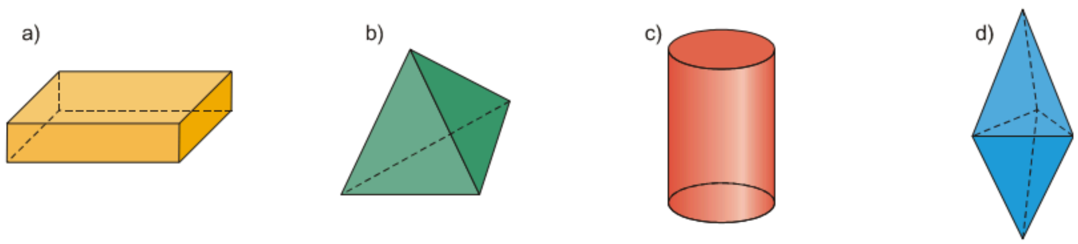
4. **Clasifica los siguientes poliedros.**



5. **Di, justificadamente, qué tipo de poliedro es cada uno de los siguientes:**



6. **Indica, razonando tu respuesta, si las siguientes figuras son poliedros regulares o no:**



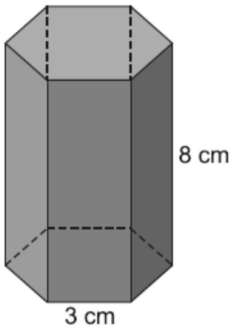
(4 triángulos equiláteros)

(6 triángulos equiláteros)

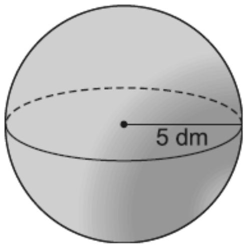
ÁREAS Y VOLÚMENES DE POLIEDROS

7. **Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un prisma hexagonal cuya altura mide 6 m y la arista de la base mide 2 m.**
8. **Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un prisma cuadrangular en el que la arista de la base mide 3 cm y la altura del prisma mide 8 cm.**
9. **Una caja de zapatos mide 25 cm de largo, 15 cm de ancho y 9 cm de alto. Halla su volumen y el cartón mínimo necesario para construirla.**
10. **Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un cilindro recto cuya base tiene 3 cm de radio y cuya altura mide 6 cm.**
11. **Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de una pirámide cuadrangular en la que la arista de la base mide 10 cm y la altura de la pirámide mide 12 cm.**
12. **Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 6 m y la altura del cono mide 8 m.**
13. **Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 6 cm.**
14. **Indica de qué poliedro se trata y halla el área y el volumen de las siguientes figuras:**

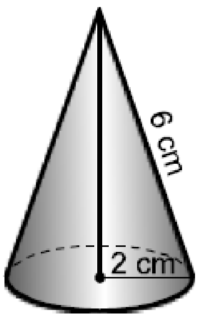
a)



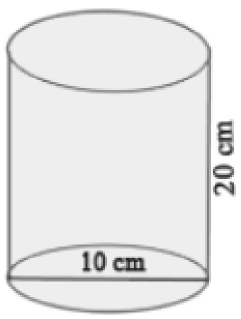
b)



c)

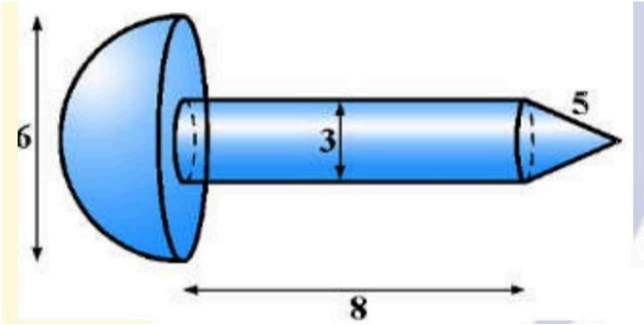


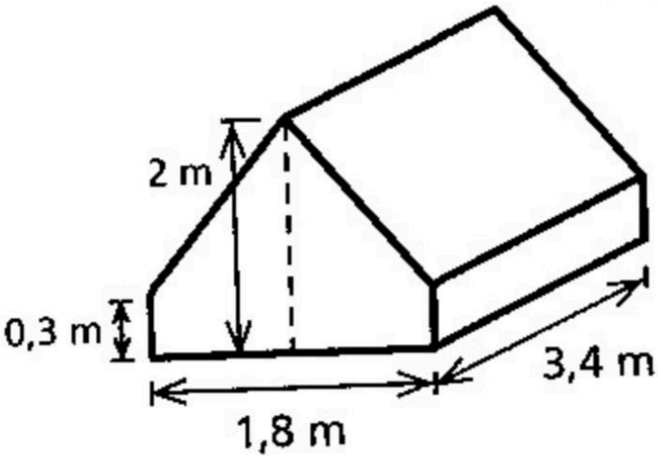
d)



UN POCO MÁS DIFÍCIL

14. Calcula el área y el volumen de las siguientes figuras:

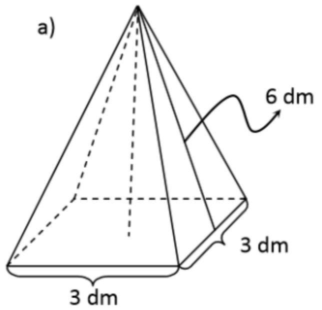




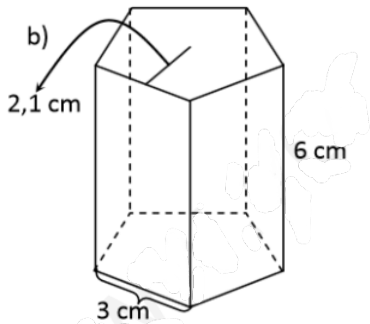
AUTOEVALUACIÓN

1. **Escribe el nombre de cada uno de los cuerpos geométricos y calcula el área y el volumen de cada uno de ellos.**

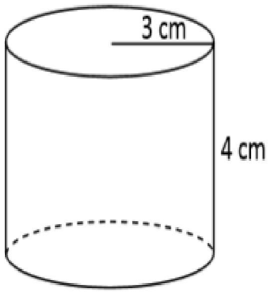
a)



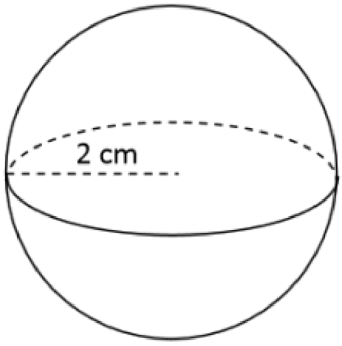
b)



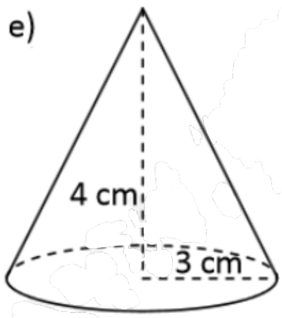
c)



d)



e)



2. **Halla el área total de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 4m y la altura 10 m.**
3. **Calcula el número de litros que caben en una piscina con forma de ortoedro cuyas dimensiones son 50 m de largo, 25 m de ancho y 2 m de alto.**

I.4. Ejercicios evaluables Google Classroom.

Realicé ejercicios evaluables por Google Classroom. Estos ejercicios podían sumar hasta un punto extra sobre el examen.

A través de Google Classroom, logré proporcionar retroalimentación a mis alumnos. De esta forma, pude corregir sus ejercicios y ellos pudieron ver los diversos comentarios a lo largo de las actividades.

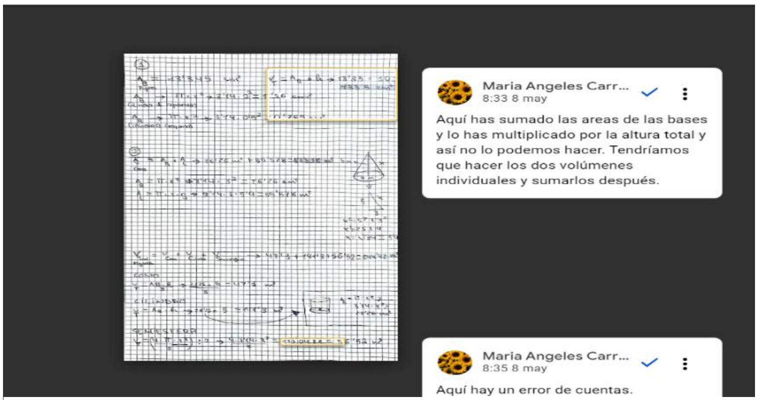


Imagen 2: Correcciones en Google Classroom.

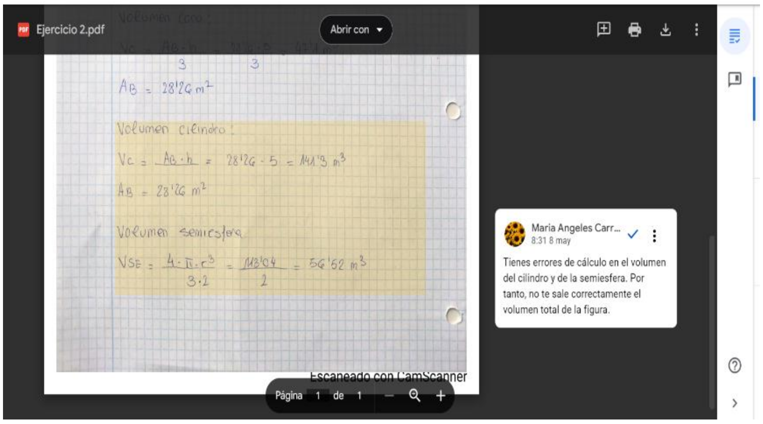


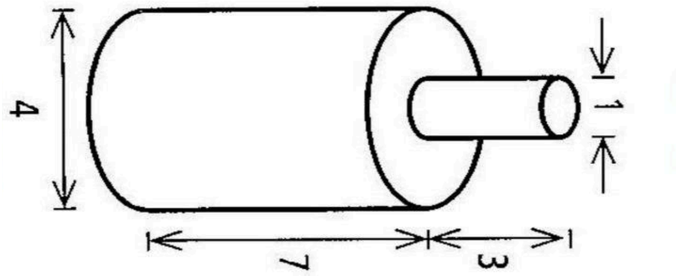
Imagen 3: Correcciones en Google Classroom.

Bibliografía.

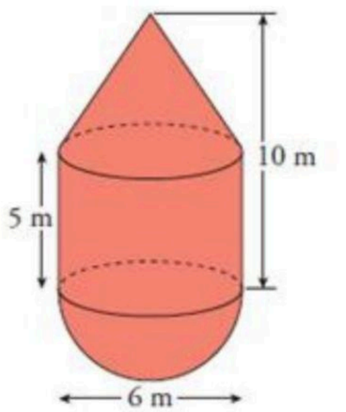
- González Medina, R. (s. f.). *Áreas y Volúmenes*. Selectividad.intergranada. https://selectividad.intergranada.com/ESO/Material/areas_vol_2eso.pdf

EJERCICIOS PARA ENTREGAR

1. Calcula el volumen del siguiente sólido, las medidas están en centímetros.



2. Calcula el área total del cono y el volumen de la figura :



Nota: Recuerda dividir las figuras.

I.5. Actividad manipulativa.

En este apartado adjunto imágenes realizando la actividad.

Imagen 4: Explicación de la actividad

Imagen 5: Realización de la actividad

ACTIVIDAD MANIPULATIVA.

Para esta unidad he preparado una actividad manipulativa, la cual se llevará a cabo en clase. Cada uno de los estudiantes tendrá un poliedro distinto y tendrán que identificar de qué poliedro se trata.

Una vez identificado, como dichos poliedros son de papel, van a tener que cortarlos para ver claramente su desarrollo plano y así tener una idea de como calcular su área total.

Todos estos datos los tendrán que compartir de forma oral con la clase y tendrán que rellenar la siguiente tabla:

ACTIVIDAD MANIPULATIVA
Nombre y Apellidos:

TIPO DE POLIEDRO(PRISMA/CILINDRO/PIRÁMIDE/CONO)	
NÚMERO DE BASES	
NÚMERO DE CARAS LATERALES	
NOMBRE DEL POLIEDRO	
¿CÓMO PODEMOS CALCULAR SU ÁREA TOTAL?	

I.6. Situación de aprendizaje.

Durante dos sesiones, llevé a cabo una situación de aprendizaje. Consistía en identificar qué tipo de poliedro era el monumento/ edificio que les había tocado. Esta situación de aprendizaje me resultó interesante hacerla, ya que así los alumnos llevar a la realidad aquello que habíamos estudiado y además hacer uso de las TIC para buscar la información necesaria.

Esta actividad la realizaron por parejas y los posibles monumentos/ edificios fueron los siguientes:

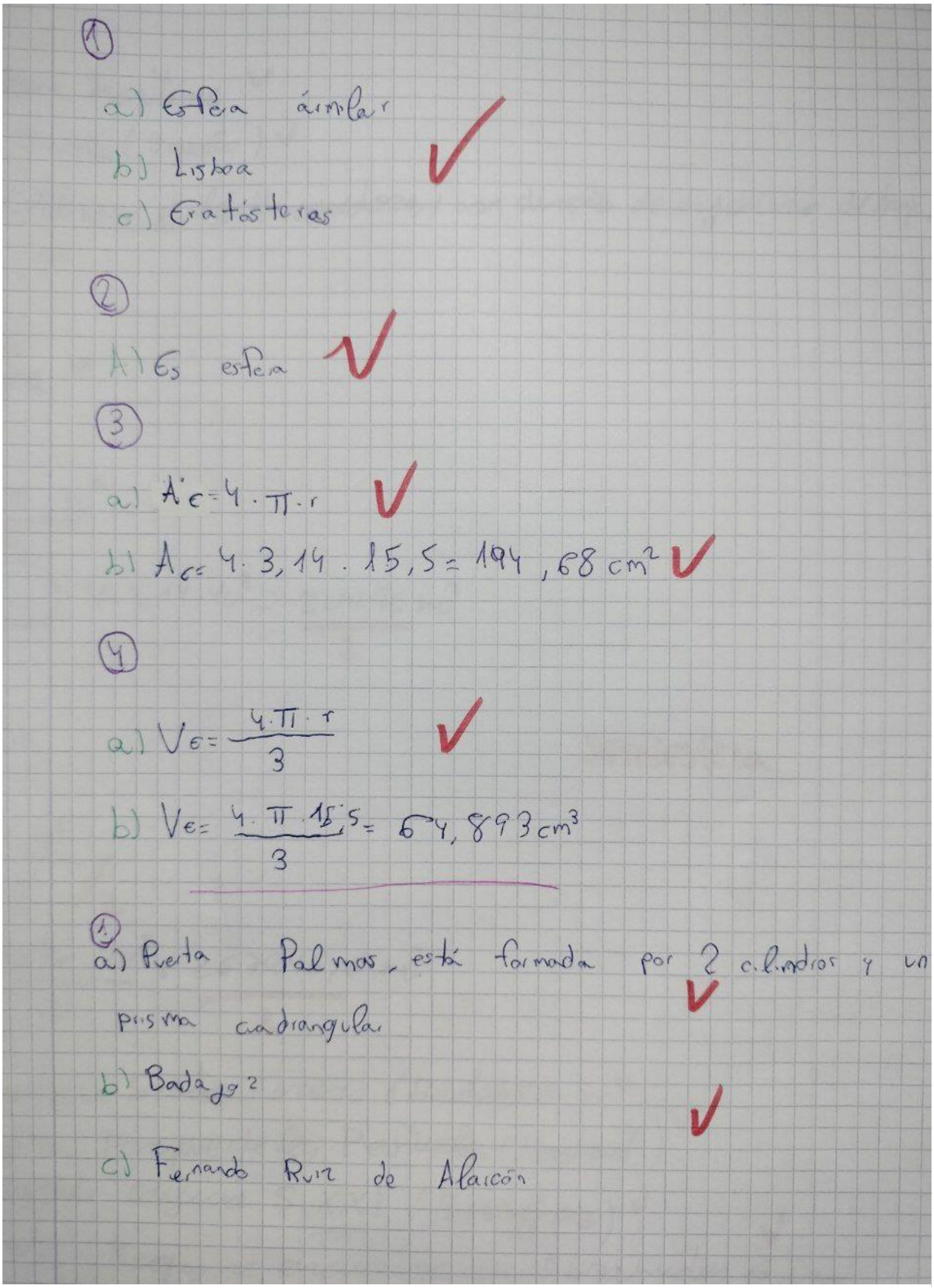
1. Torre de Pisa, Pisa.
2. Museo de Louvre, París.
3. Pirámide de Keops, Egipto.
4. Museo Marítimo, Osaka (Japón).
5. Torres Gemelas, Estados Unidos.
6. El Cubo de Astor Place, en Manhattan (Nueva York).
7. La Esfera Armilar en Lisboa, Portugal.

Los alumnos debían entregar al finalizar la sesión la información siguiente:

1. Identificación del monumento:
   a. ¿Cuál es el nombre del monumento?
   b. ¿Dónde se encuentra ubicado?
   c. ¿Quién fue el arquitecto o diseñador del monumento?
2. Descripción del monumento:
   a. ¿Qué tipo de poliedro es el monumento?
3. Cálculo del área:
   a. ¿Cómo se puede calcular el área de superficie del monumento?
   b. ¿Cuál es el resultado del cálculo del área del monumento?
4. Cálculo del volumen:
   a. ¿Cómo se puede calcular el volumen del monumento?
   b. ¿Cuál es el resultado del cálculo del volumen del monumento?
5. Busca otros monumentos que sean poliedros.

Imagen 6: Búsqueda de la información.

Imagen 7: Exposición oral ante la clase.



1

a) Esfera ármilar

b) Lisboa

c) Eratóstenes

2

A) Es esfera

3

a) $A_e = 4 \cdot \pi \cdot r$

b) $A_e = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 15{,}5 = 194{,}68\ cm^2$

4

a) $V_e = \frac{4 \cdot \pi \cdot r}{3}$

b) $V_e = \frac{4 \cdot \pi \cdot 15{,}5}{3} = 64{,}893\ cm^3$

1.

a) Puerta Palmas, está formada por 2 cilindros y un prisma cuadrangular

b) Badajoz

c) Fernando Ruiz de Alarcón

Imagen 8: Situación de Aprendizaje, Esfera Armilar.

1 a) Torre Pisa

b) En Pisa (Italia) mas concretamente en la Plaza de la Catedral (Piazza del Duomo

c) Su arquitecto fue Bonanno Pisano

2

a) Es un cilindro

3

a) Multiplicando $\pi \cdot r^2$ $(3'14 \cdot 7'5^2 = 176'625\ m^2)$

b) $\underbrace{3'14 \cdot 7'5^2 \cdot 2 = 353'25\ m^2}_{A_B}$ $\underbrace{2 \cdot 3'14 \cdot 7'5 \cdot 60 = 2.826\ m^2}_{A_L}$ $A_T = 353'25 + 2826 = 3.179$

4

a) Calculando el área de la base y ~~sumandolo~~ multiplicando al área de la altura

b) $V = \cancel{353'25}\ 176625 \cdot 60 = 21\cancel{,}195\ m^3$

5

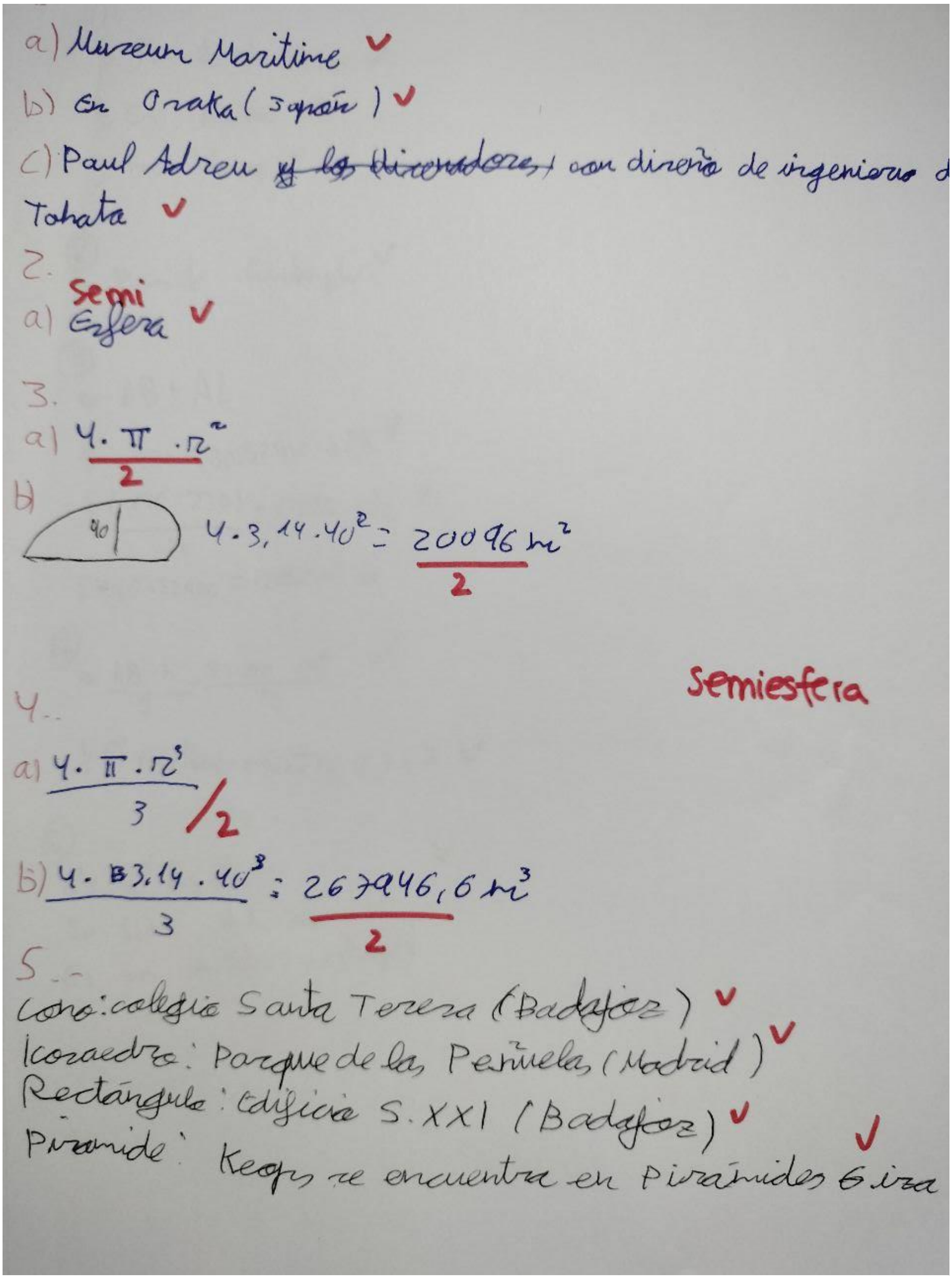
El arco del triunfo en París (Francia) → está formado por 3 prismas cuadrangulares

edificio siglo XXI en Badajoz (España) → prisma cuadrangular

Obelisco de São Paulo (Brasil) → prisma cuadrangular

Museo del Louvre en París (Francia) → piramide cuadrangular

Imagen 9: Situación de Aprendizaje, Torre de Pisa.



a) Museum Maritime

b) En Osaka (Japón)

c) Paul Andreu ~~y los diseñadores~~, con diseño de ingenieros de Tohata

2.

a) Semi Esfera

3.

a) $\frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{2}$

b) 40 $\quad \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 40^2 = 20096\,m^2}{2}$

Semiesfera

4.

a) $\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} / 2$

b) $\frac{4 \cdot 3,14 \cdot 40^3}{3} = \frac{267946,6\,m^3}{2}$

5.

Cono: colegio Santa Teresa (Badajoz)

Icosaedro: Parque de las Peñuelas (Madrid)

Rectángulo: Edificio S.XXI (Badajoz)

Pirámide: Keops se encuentra en Pirámides Giza

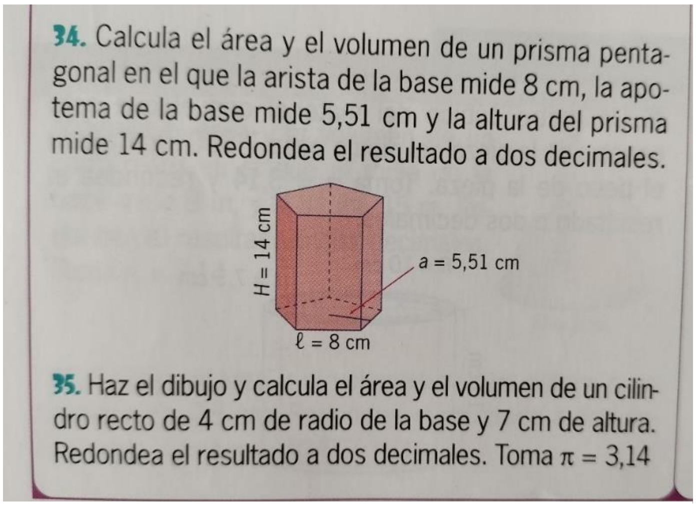
Imagen 10: Situación de Aprendizaje, Museo Marítimo.

I.7. Ejercicios de ampliación y repaso.

Además de los ejercicios de la ficha que realicé, también hicimos algunos ejercicios del libro de texto. Como los que se muestran a continuación.

Bibliografía:

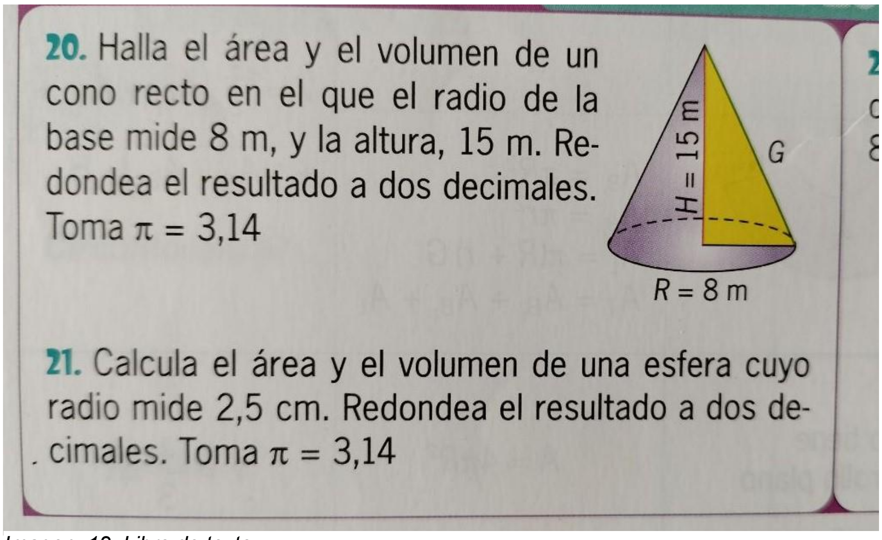
- Arias Cabeza, J. M., & Maza Sáez, I. (2023). *Matemáticas 2 ESO 3 Volúmenes Proyecto 5* (Vol. 3). Bruño.



34. Calcula el área y el volumen de un prisma pentagonal en el que la arista de la base mide 8 cm, la apotema de la base mide 5,51 cm y la altura del prisma mide 14 cm. Redondea el resultado a dos decimales.

35. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un cilindro recto de 4 cm de radio de la base y 7 cm de altura. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$

Imagen 11: Libro de texto.



20. Halla el área y el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 8 m, y la altura, 15 m. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$

21. Calcula el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 2,5 cm. Redondea el resultado a dos decimales. Toma $\pi = 3,14$

Imagen 12: Libro de texto.

I.8. Examen y rúbrica de evaluación.

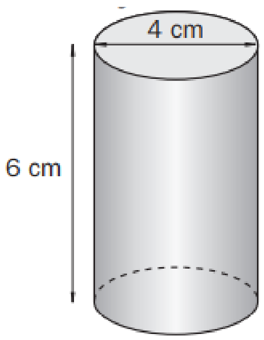
Para evaluar si los alumnos habían adquirido correctamente los conocimientos realicé un examen. El cual lo corregí siguiendo una rúbrica de evaluación.

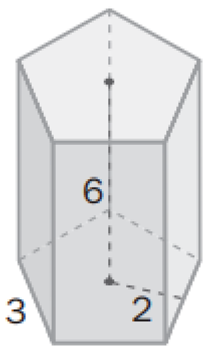
Examen 2°ESO A
Cuerpos en el espacio. Áreas y volúmenes.

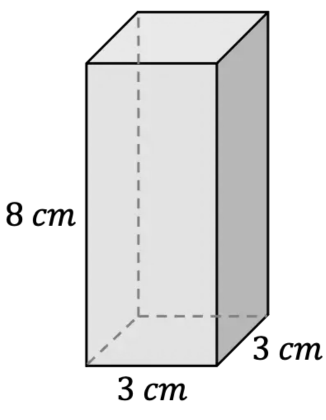
Nombre y apellidos: ____

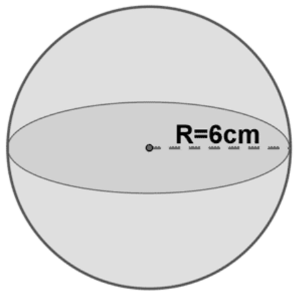
Advertencia: No olvidéis poner las unidades y cuando no indique ejercicio las unidades en la que están las medida vamos a tomar cm.

1. Calcula el área total y el volumen de los siguientes cuerpos.
   (6 puntos)

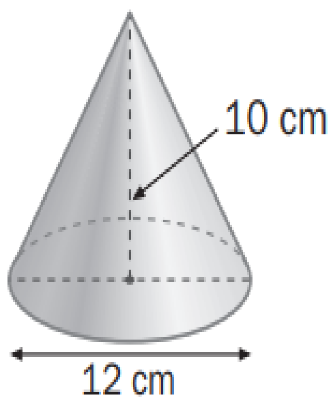


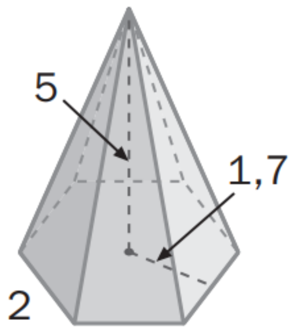






2. Calcula el área total y el volumen de los siguientes cuerpos.
   (4 puntos)





Rúbrica Examen 2ºESO A
Cuerpos en el Espacio. Áreas y Volúmenes.

Ejercicio 1 (6 puntos)

Criterios	Excelente (2 puntos)	Aceptable (1 punto)	Mal (0 puntos)
Aplicación de las fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes	El estudiante aplica las fórmulas de manera precisa y correcta en todos los ejercicios.	El estudiante aplica las fórmulas de manera generalmente correcta, pero con algunos errores.	El estudiante no logra aplicar las fórmulas de manera correcta.
Resolución de problemas matemáticos relacionados con áreas y volúmenes	El estudiante resuelve con éxito todos los problemas planteados de manera precisa y eficiente.	El estudiante resuelve de forma generalmente correcta, pero con algunos errores o dificultades.	El estudiante no logra resolver los problemas relacionados con áreas y volúmenes.
Organización , presentación de los resultados y unidades correctas.	El estudiante presenta los resultados de manera clara, ordenada y completa, usando unidades de medida adecuadas.	El estudiante presenta los resultados de forma generalmente clara y ordenada, pero con algunas omisiones o errores frecuentes en el uso de unidades de medida.	El estudiante presenta los resultados de manera desordenada, confusa o incompleta, sin usar adecuadamente las unidades de medida.

Ejercicio 2 (4 puntos)

Criterios	Excelente (1 puntos)	Aceptable (0.5 punto)	Mal (0 puntos)
Aplicación de las fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes	El estudiante aplica las fórmulas de manera precisa y correcta en todos los ejercicios.	El estudiante aplica las fórmulas de manera generalmente correcta, pero con algunos errores.	El estudiante no logra aplicar las fórmulas de manera correcta.
Resolución de problemas matemáticos relacionados con áreas y volúmenes	El estudiante resuelve con éxito todos los problemas planteados de manera precisa y eficiente.	El estudiante resuelve de forma generalmente correcta, pero con algunos errores o dificultades.	El estudiante no logra resolver los problemas relacionados con áreas y volúmenes.
Aplicación correcta del teorema de pitágoras	El estudiante aplica correctamente el teorema de pitágoras.	El estudiante aplica correctamente el teorema de pitágoras en la mitad de los ejercicios.	El estudiante no aplica el teorema de pitágoras
Organización , presentación de los resultados y unidades correctas.	El estudiante presenta los resultados de manera clara, ordenada y completa, usando unidades de medida adecuadas.	El estudiante presenta los resultados de forma generalmente clara y ordenada, pero con algunas omisiones o errores frecuentes en el uso de unidades de medida.	El estudiante presenta los resultados de manera desordenada, confusa o incompleta, sin usar adecuadamente las unidades de medida.

I.9.Solucionario de los ejercicios de la ficha.

Realicé las soluciones de los ejercicios de la ficha y semanalmente se los subí a Google Classroom.

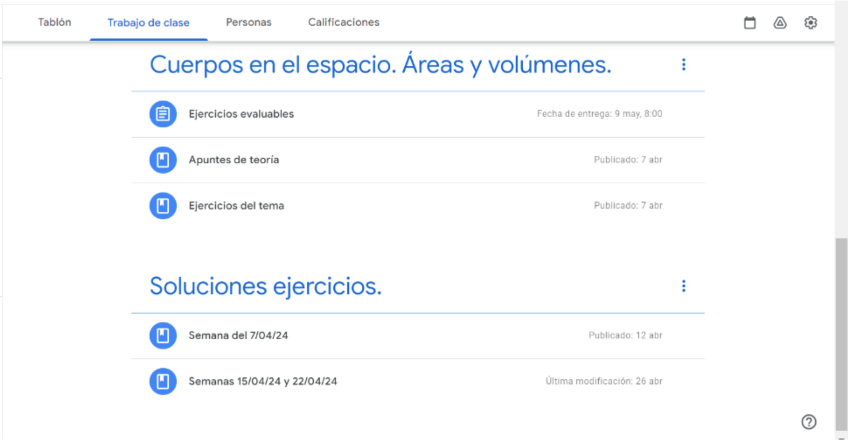


Imagen 13: Soluciones Google Classroom.

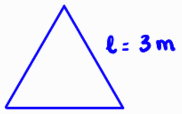
2ºESO

SOLUCIONARIO

CUERPOS EN EL ESPACIO.
ÁREAS Y VOLÚMENES.

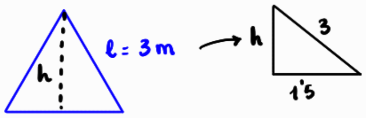
Repaso áreas polígonos

1.



$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 2'60}{2} = 3'9\ m^2$$

Vamos a calcular la altura del triangulo:



T. Pitágoras: $3^2 = h^2 + 1'5^2$

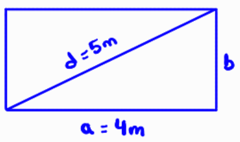
$h^2 = 3^2 - 1'5^2$

$h = \sqrt{6'75} = 2'60m$

$\boxed{h = 2'60\ m}$

Solución: El área del triangulo equilátero es de $3'9\ m^2$

2.



¿ Área y perímetro?

Para calcular el perímetro del rectangulo, necesitamos conocer b. Para calcular b, aplicamos el teorema de Pitágoras:

T. Pitágoras $5^2 = b^2 + 4^2$

$b^2 = 5^2 - 4^2$

$b^2 = 9$

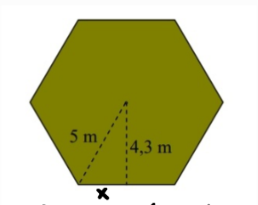
$\boxed{b = 3m}$

Entonces $P = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 8 + 6 = 14\ m$

$A = 4 \cdot 3 = 12\ m^2$

Solución: El perímetro del rectangulo es de 14m y el área es de $12\ m^2$.

3.



¿ Área y perímetro?

Para calcular el área del hexágono necesitamos conocer su perímetro, luego calculemos primero cuanto vale el lado del polígono.

Aplicando el teorema de pitágoras: $5^2 = 4'3^2 + x^2$

$x^2 = 5^2 - 4'3^2$

$x^2 = 6'51$

$\boxed{x = 2'55m}$

Entonces, el lado mide $l = 2'55 \cdot 2 = 5'1m$

Perímetro → $P = 6 \cdot 5'1 = 30'6m$

Área → $A = \frac{30'6 \cdot 4'3}{2} = 65'79\ m^2$

- Podríamos ahorrarnos cuentas, pues en un hexágono el triangulo que se forma es equilátero y por tanto $l = 5m$. El perímetro valdría 30m y el área $64'5\ m^2$

Poliedros

4. a) Poliedro irregular. Prisma hexagonal

b) Poliedro regular. Cubo

c) Poliedro irregular.

5. a) Prisma pentagonal

b) Pirámide pentagonal

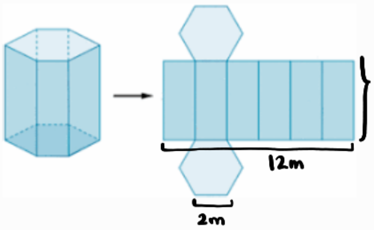
c) Cubo o prisma cuadrangular.

6. a) Poliedro irregular.   c) No es un poliedro.

b) Poliedro regular.   d) Poliedro irregular, en unos vertices concurren 3 caras y en otros cuatro.

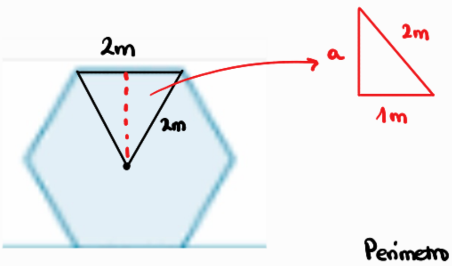
Áreas y volúmenes

7.



¿Área y volumen?

Para calcular el área, necesitamos calcular el área de las bases:



$2^2 = a^2 + 1^2$

$a^2 = 2^2 - 1^2$

$a^2 = 4 - 1 = 3$

$a = \sqrt{3} = 1'73 m$

$\boxed{a = 1'73 m}$

Perímetro $\rightarrow$ P = 12m

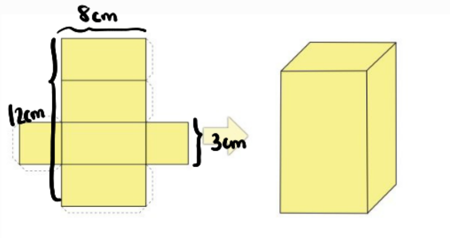
Entonces, el área de una base es $A_B = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{12 \cdot 1'73}{2} = 10'4 m^2$

El área lateral es: $A_L = 12 \cdot 6 = 72 m^2$

Area TOTAL $\Rightarrow$ $A_T = 2 \cdot A_B + A_L = 2 \cdot 10'4 + 72 = 92'8 m^2$

Volumen Prisma $\Rightarrow$ $V_P = A_B \cdot h = 10'4 \cdot 6 = 62'4 m^3$

8. ¿Área y volumen?



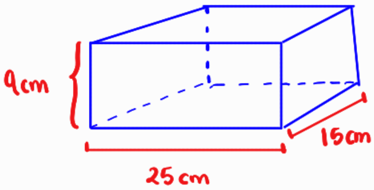
Área de la base $\rightarrow$ $A_B = 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}^2$

Área lateral $\rightarrow$ $A_L = 12 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^2$

$\Big\}$ $A_T = 2 \cdot A_B + A_L = 18 + 96 = 114 \text{ cm}^2$

Volumen prisma $\rightarrow$ $V_P = A_B \cdot h = 9 \cdot 8 = 72 \text{ cm}^3$

9.



¿Volumen y área?

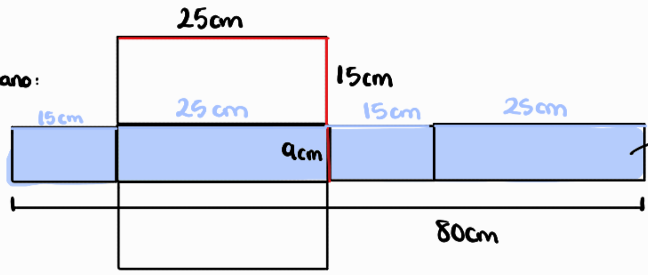
Prisma rectangular CUIDADO CON EL DESARROLLO PLANO.

Volumen $\rightarrow$ $V_P = A_B \cdot h = 375 \cdot 9 = 3375 \text{ cm}^3$

$A_B = 25 \cdot 15 = 375 \text{ cm}^2$

Área Total

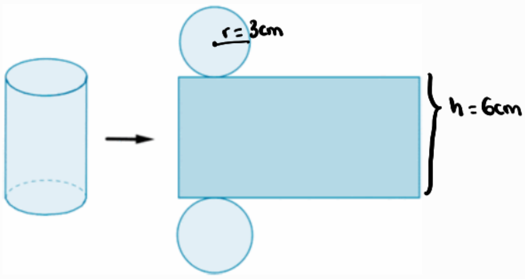
Desarrollo Plano:



$A_L = 80 \cdot 9 = 720 \text{ cm}^2$

$A_T = 2 \cdot A_B + A_L = 2 \cdot 375 + 720 = 1470 \text{ cm}^2$

10. ¿Área y Volumen?



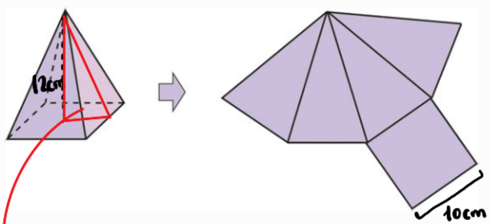
Área Base $\rightarrow$ $A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 28'26 \text{ cm}^2$

Área lateral $\rightarrow$ $A_L = 2\pi r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6 = 113'04 \text{ cm}^2$

$\Big\}$ $A_T = 2 \cdot A_B + A_L = 169'56 \text{ cm}^2$

Volumen $\rightarrow$ $V_C = A_B \cdot h = 28'26 \cdot 6 = 169'56 \text{ cm}^3$

11. ¿Área y Volumen?



Calculemos la altura del triangulo de la cara lateral:

T. Pitágoras: $x^2 = 12^2 + 5^2$

$x^2 = 169$

$\boxed{x = 13 \text{ cm}}$

Para calcular el área total necesitamos calcular A_B y A_L

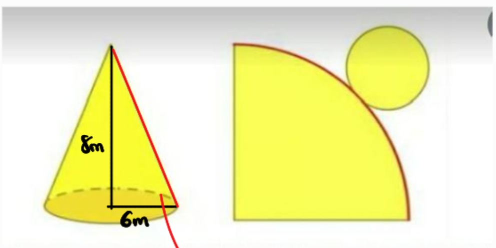
$A_B = 10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$

$A_L = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{4 triangulos}}}{4} \cdot (10 \cdot 13) = 520 \text{ cm}^2$

$\Big\}$ $A_T = A_B + A_L = 100 + 520 = 620 \text{ cm}^2$

Volumen $\Rightarrow$ $V_P = \dfrac{A_B \cdot h}{3} = \dfrac{100 \cdot 12}{3} = 400 \text{ cm}^3$

12. ¿Área y Volumen?



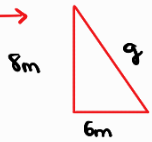
Para calcular el volumen tenemos todos los datos:

$V_C = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{113'04 \cdot 8}{3} = 301'44\ m^3$

$A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6^2 = 113'04\ m^3$

Para calcular el área lateral necesitamos conocer la generatriz

T. Pitágoras:



$g^2 = 8^2 + 6^2$

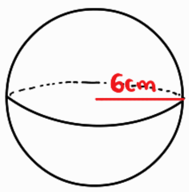
$g^2 = 100$

$\boxed{g = 10m}$

Entonces: $A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 188'4\ m^2$

$A_T = A_B + A_L = 113'04 + 188'4 = 301'44\ m^2$

13. ¿Área y volumen?



$A_E = 4\pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6^2 = 452'16\ cm^2$

$V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 904'32\ cm^3$

14.

a) Prisma hexagonal $\rightarrow A_T = A_B + A_L = 23'4 + 144 = 167'4\ cm^2$

$A_B = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{18 \cdot 2'6}{2} = 23'4\ cm^2$ $\qquad A_L = 144\ cm^2$

$3^2 = ap^2 + 1'5^2$

$ap^2 = 6'72$

$\boxed{ap = 2'6cm}$

Volumen $\rightarrow V_P = A_B \cdot h = 23'4 \cdot 8 = 187'2\ cm^3$

b) Esfera. $A_E = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 = 314\ dm^2$

$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = 523'3\ dm^3$

c) Cono.

$6^2 = h^2 + 2^2$

$h^2 = 32$

$\boxed{h = 5'66cm}$

$A_C = A_B + A_L = 12'56 + 37'68 = 50'24\ cm^2$

$A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 12'56\ cm^2$ $\qquad A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 2 \cdot 6 = 37'68\ cm^2$

$V_C = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{12'56 \cdot 5'66}{3} = 23'7\ cm^3$

d) Cilindro

$r = 5cm$

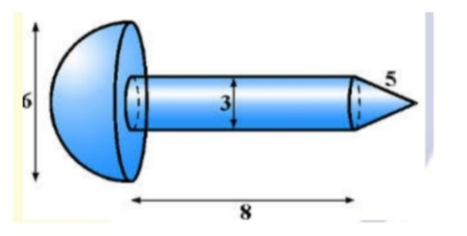
$A_T = A_B + A_L = 78'5 + 628 = 706'5\ cm^2$

$A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78'5\ cm^2$ $\qquad A_L = 2\pi r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 20 = 628\ cm^2$

$V_C = A_B \cdot h = 78'5 \cdot 20 = 1570\ cm^3$

Un poco más difícil

14. ¿Área y volumen?



Esta figura está formada por: → Semiesfera → Cilindro → Cono. Para calcular el área y volumen total vamos a calcular cada uno de ellos por separado y después lo sumaremos.

Semiesfera (mitad de una esfera)

$r = 3cm$ $\quad A_{Esfera} = 4\pi r^2 = 37'68\,cm^2 \longrightarrow A_{semi} = \frac{A_E}{2} = 18'84\,cm^2$

$V_{Esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 113'04\,cm^3 \longrightarrow V_{semi} = \frac{V_E}{2} = 56'52\,cm^3$

Cilindro $\quad r = 1'5\,cm$

$A_C = A_B + A_L = 7'065 + 75'36 = 82'425\,cm^2$ $\qquad V_{cilindro} = A_B \cdot h = 7'065 \cdot 8 = 56'52\,cm^3$

$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 1'5^2 = 7'065\,cm^2$

$A_L = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 1'5 \cdot 8 = 75'36\,cm^2$

Cono

$A_{cono} = A_B + A_L = 7'065 + 23'55 = 30'615\,cm^2$ $\qquad V_{cono} = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{7'065 \cdot 4'76}{3} = 11'21\,cm^3$

$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 1'5^2 = 7'065\,cm^2$ $\qquad A_L = \pi r g = \pi \cdot 1'5 \cdot 5 = 23'55\,cm^2$

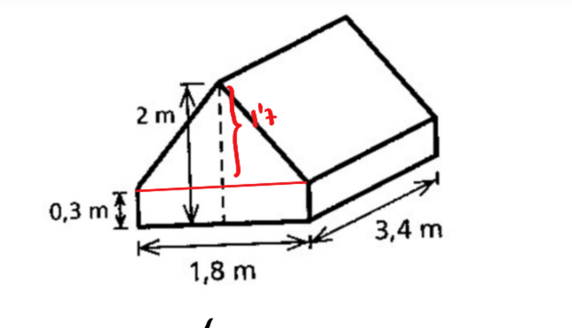
T. pitágoras: $5^2 = h^2 + 1'5^2$

$h^2 = 22'75$

$\boxed{h = 4'76\,cm}$

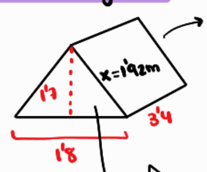
Área total de la figura $\Rightarrow A_T = 18'84 + 82'425 + 30'615 = 131'88\,cm^2$

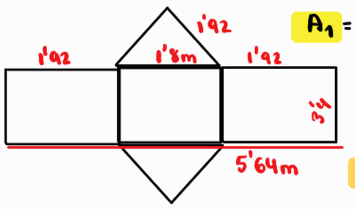
Volumen total de la figura $\Rightarrow V_T = 56'52 + 56'52 + 11'21 = 124'25\,cm^3$

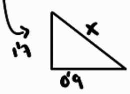


La figura está formada por → prisma triangular (parte superior) → prisma rectangular (parte inferior)

Prisma triangular







$x^2 = 1'7^2 + 0'9^2$

$\boxed{x = 1'92m}$

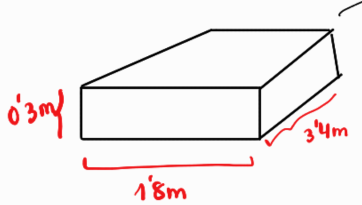
$A_1 = 2 \cdot A_B + A_L = 2 \cdot 1'53 + 19'176 = 22'236\,m^2$

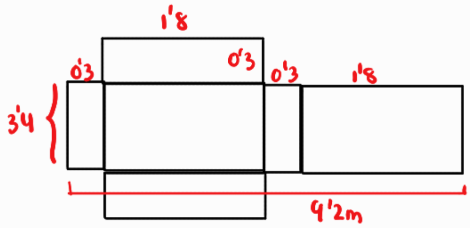
$A_B = \frac{1'8 \cdot 1'7}{2} = 1'53\,m^2$

$A_L = 5'64 \cdot 3'4 = 19'176\,m^2$

$V_1 = A_B \cdot h = 1'53 \cdot 3'4 = 5'202\,m^3$

Prisma rectangular





$A_2 = 2A_B + A_L = 2 \cdot 0'54 + 14'28 = 15'36\,m^2$ $\qquad V_2 = A_B \cdot h = 0'54 \cdot 3'4 = 1'836\,m^3$

$A_B = 1'8 \cdot 0'3 = 0'54\,m^2$

$A_L = 4'2 \cdot 3'4 = 14'28\,m^2$

Área total de la figura $\longrightarrow$ $A_T = A_1 + A_2 = 22'236 + 15'36 = 37'596\ m^2$

Volumen total de la figura $\longrightarrow$ $V_T = V_1 + V_2 = 5'202 + 1'836 = 7'038\ m^3$

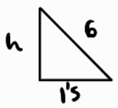
AUTOEVALUACIÓN

1. a) Pirámide cuadrangular

$A_P = A_B + A_L = 9 + 9 = 18\ dm^2$

$A_B = 9\ dm^2 \qquad A_L = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9\ dm^2$

$V_P = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{9 \cdot 5'8}{3} = 17'4\ dm^3$



$6^2 = h^2 + 1'5^2$

$h^2 = 33'75$

$\boxed{h = 5'8\ dm}$

b) Prisma pentagonal

$A_P = A_B + A_L = 15'75 + 90 = 105'75\ cm^2$

$A_B = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{15 \cdot 2'1}{2} = 15'75\ cm^2 \qquad A_L = 5 \cdot (3 \cdot 6) = 90\ cm^2$

$V_P = A_B \cdot h = 15'75 \cdot 6 = 94'5\ cm^3$

c) Cilindro

$A_C = A_B + A_L = 28'26 + 75'36 = 103'62\ cm^2$

$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 28'26\ cm^2 \qquad A_L = 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 4 = 75'36\ cm^2$

$V_C = A_B \cdot h = 28'26 \cdot 4 = 113'04\ cm^3$

d) Esfera $A_E = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 50'24\ cm^2$

$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = 33'5\ cm^3$

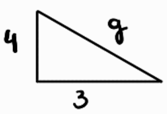
e) Cono.

$V_C = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{28'26 \cdot 4}{3} = 37'68\ cm^3$

$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 28'26\ cm^2$

$A_C = A_B + A_L = 28'26 + 47'1 = 75'36\ cm^2$

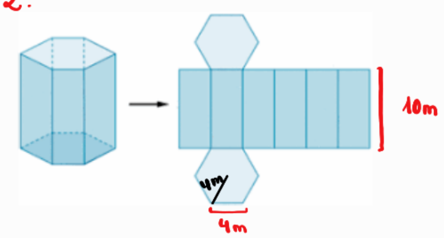
$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 47'1\ cm^2$

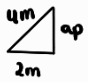


$g^2 = 4^2 + 3^2$

$\boxed{g = 5\ cm}$

2.





$\longrightarrow 4^2 = ap^2 + 2^2$

$\boxed{ap = 3'46\,m}$

$A_p = 2\cdot A_B + A_L = 2\cdot 41'52 + 240 = 323'04\ m^2$

$A_B = \frac{P\cdot ap}{2} = \frac{24\cdot 3'46}{2} = 41'52\ m^2$

$A_L = 6\cdot(4\cdot 10) = 240\ cm^2$

$V_p = A_B\cdot h = 41'52\cdot 10 = 415'2\ m3$

3. $V_{piscina} = A_B\cdot h = (50\cdot 25)\cdot 2 = 2500\ m^3$

II. Anexo II: Otros cursos.

En estas páginas voy a incluir el material realizado para otros cursos y las actividades que realicé con ellos.

II.1. 4º de ESO E de Matemáticas B.

Imagen 14: Impartiendo clases en 4ºE.

II.1.1. Apuntes del tema.

Para realizar los apuntes del tema me basé en el libro de texto que seguían en este curso, además de complementarlo con anotaciones propias y ejercicios del libro de texto.

Bibliografía.

- Arias Cabeza, J. M., & Maza Sáez, I. (2023). *Matemáticas 4 ESO MATEMATICAS B 3 Volúmenes Proyecto 5* (Vol. 3). Bruño.

II.1.2. Ficha de actividades.

Para realizar la ficha de actividades utilicé varias páginas web.

Bibliografía.

- Celia. (2009). *Ejercicios_resueltos.doc*. Matematicasonline.es. https://www.matematicasonline.es/cuarto-eso/ejercicios2/8-geometria-analitica.pdf
- *Geometría analítica*. (2022). Selectividad.intergranada.com. https://selectividad.intergranada.com/ESO/ESO-4/Resueltos/Trat_div_17/08_geo_anal.pdf

II.1.3. Ejercicios evaluables.

Los ejercicios evaluables los escogí de internet de la siguiente página web:

- *Geometría analítica*. (2022). Selectividad.intergranada.com. https://selectividad.intergranada.com/ESO/ESO-4/Resueltos/Trat_div_17/08_geo_anal.pdf

Elegí esos ejercicios, ya que me resultaron de un nivel superior al nivel del libro. Gran parte de los alumnos subieron los ejercicios a Classroom y posteriormente se los corregí y les comenté los errores.

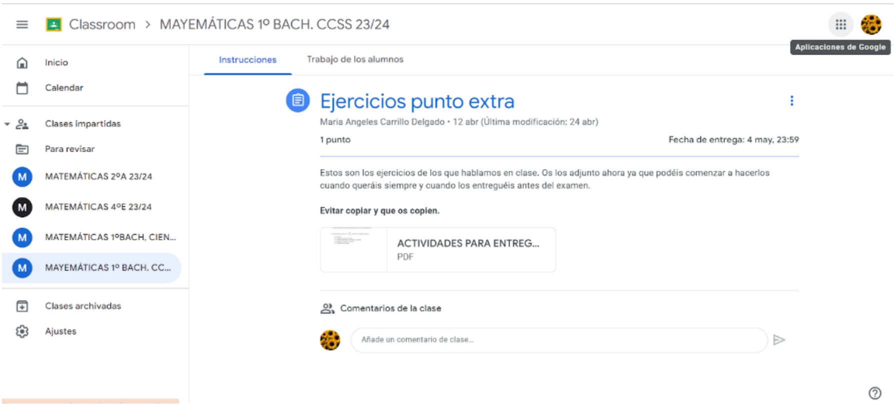


Imagen 15: Ejercicios evaluables.

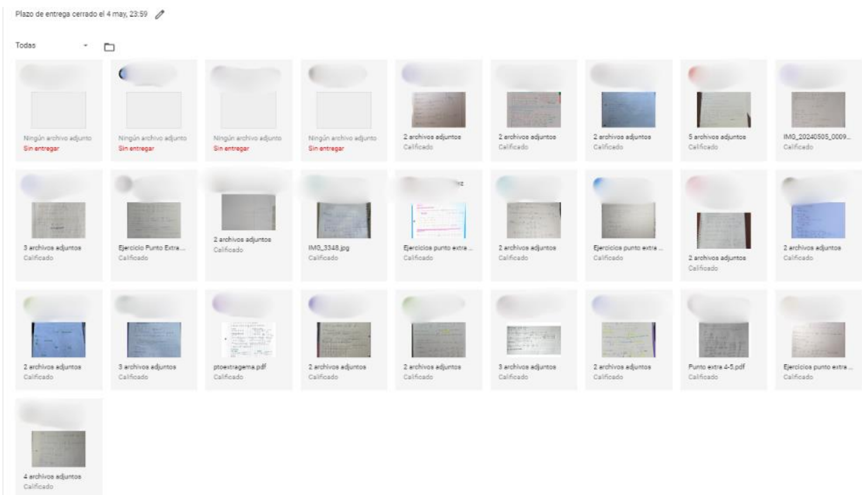


Imagen 16: Entrega de ejercicios.

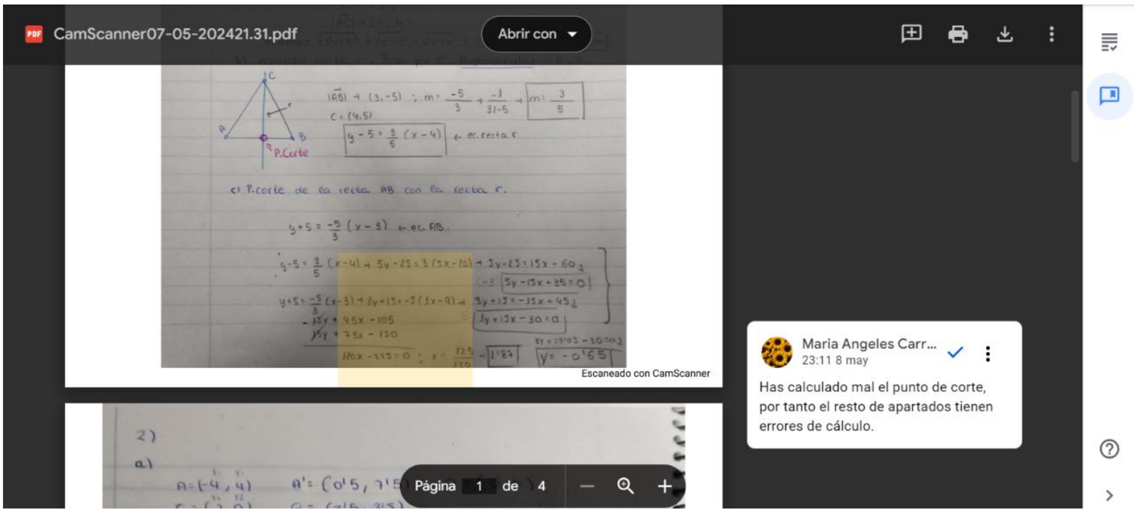


Imagen 17: Corrección de los ejercicios.

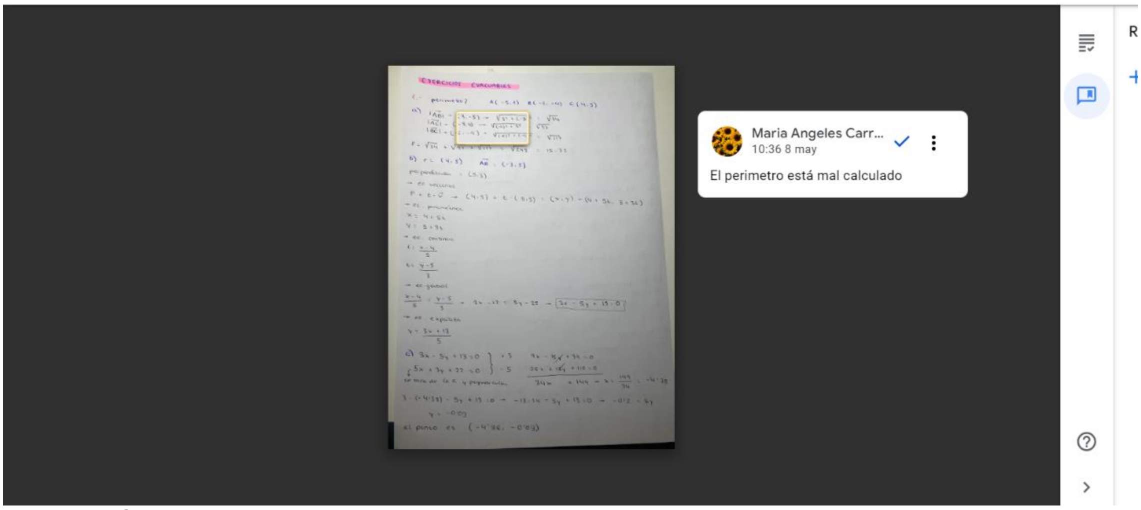


Imagen 18: Corrección de los ejercicios.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. ¿Qué es un vector?

Un **vector fijo** es un segmento orientado. Se representa por $\overrightarrow{AB}$ al vector cuyo origen es A y el extremo es B.

CARACTERISTICAS DE UN VECTOR

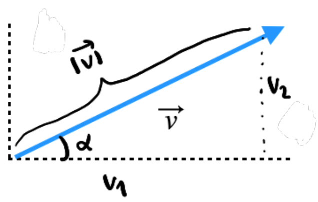
Módulo: es su longitud. $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	**Dirección:** Es la dirección de la recta que lo contiene.	**Sentido:** Es el que va del origen al extremo.

CÁLCULO DEL MÓDULO Y EL ARGUMENTO DE UN VECTOR.

Para calcular el **módulo** de un vector aplicamos la siguiente fórmula:

$$\vec{v} = (v_1, v_2)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

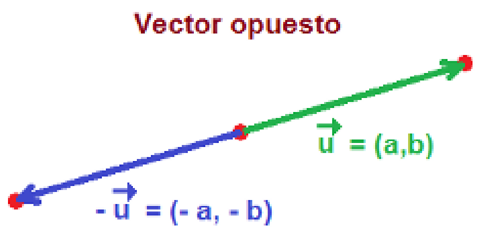


El argumento de un vector es el ángulo que forma el eje x con el vector. Para calcularlo, simplemente hay que aplicar la definición de la tangente de un ángulo:

$$tg\,\alpha = \frac{v_2}{v_1}$$

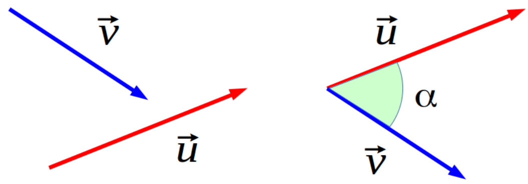
VECTOR OPUESTO

El vector opuesto es el que se obtiene al cambiar de signos sus componente. Geométricamente, es el que tiene el mismo módulo y dirección y sentido contrario.

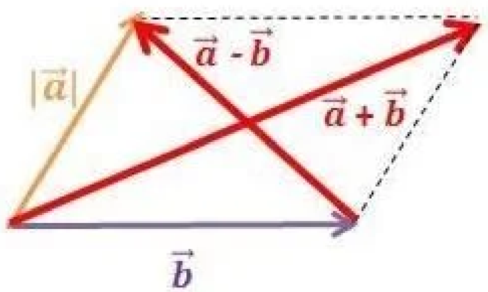
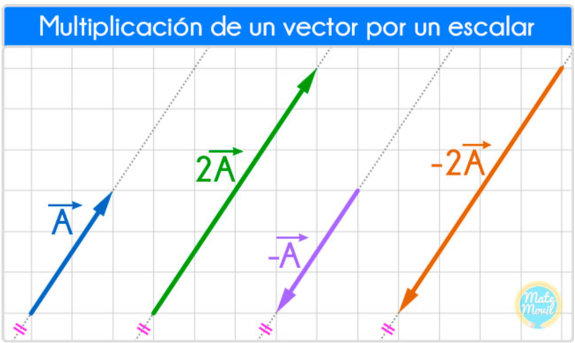


2.Operaciones con vectores

OPERACIONES ANALITICAMENTE

Suma y resta.	Producto de un número por un vector.	Producto escalar de dos vectores.
Para sumar y restar vectores analíticamente se suman o restan sus coordenadas. $V_1 = (x_1, y_1)$ $V_2 = (x_2, y_2)$ $V_1 \pm V_2 = (x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2)$	Para multiplicar un número por un vector se multiplica el número por las componentes del vector. $\vec{v} = (v_1, v_2)$ $k \cdot \vec{v} = k(v_1, v_2) = (kv_1, kv_2)$	Para calcular el producto escalar de dos vectores tenemos dos formas de hacerlo: Producto escalar de dos vectores  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert \cdot \cos\alpha$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$ De la primera fórmula podemos despejar cosα y así podríamos calcular el ángulo entre dos vectores. $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert}$

OPERACIONES GEOMÉTRICAMENTE.

Suma y resta.	Producto de un número por un vector.
Para sumar y restar vectores geométricamente, vamos a usar la regla del paralelogramo.  	

OBTENCIÓN DE UN VECTOR DADOS DOS PUNTOS.

Si tenemos los puntos **A(a1,a2) y B(b1,b2)** el vector $\overrightarrow{\textbf{AB}}$ se obtiene de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{AB} = (b1,b1) - (a1,a2) = \mathbf{(b1-a1,\ b2-a2)}$$

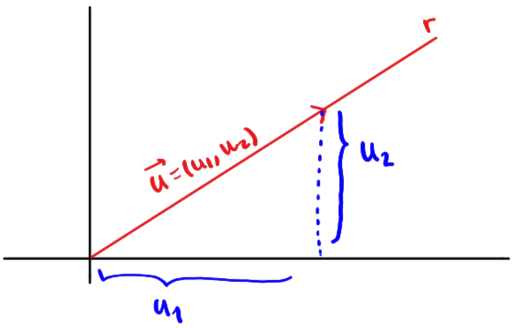
Ejercicios página 169.

3.Ecuaciones de la recta.

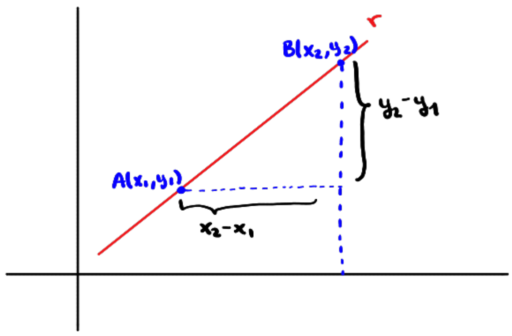
Para determinar una recta necesitamos conocer su **vector director** y **un punto** por el cual pase la recta.

VECTOR DIRECTOR Y PENDIENTE DE UNA RECTA.

- Un **vector director** de una recta es un vector paralelo a la recta, es decir, tiene la misma dirección de la recta.
- La **pendiente de una recta** es la tangente del ángulo que forma el eje x con la recta. Y se representa por m.



$$\boxed{m = \frac{u_2}{u_1}}$$



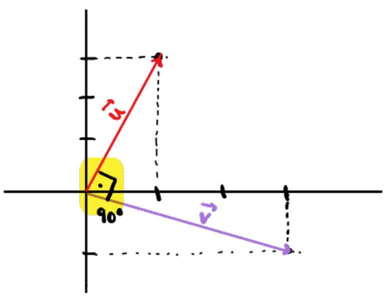
$$\boxed{m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

VECTOR NORMAL O PERPENDICULAR.

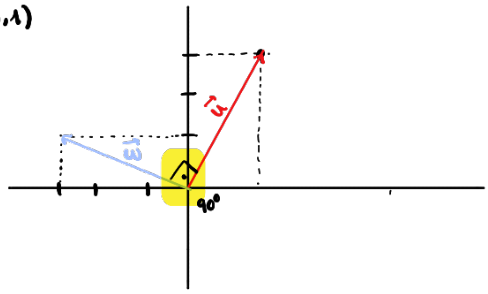
Un vector normal a un vector es un vector que es perpendicular a dicho vector. Para calcular un vector perpendicular a otro vector se cambian las coordenadas de orden y a una de ellas se le cambia el signo.

Ejemplo: Consideremos el vector $\vec{u} = (1,3)$.

- Vector perpendicular: $\vec{v} = (3,-1)$



- **Vector perpendicular**: $\vec{w} = (-3,1)$



ECUACIONES DE LA RECTA.

Como hemos mencionado al principio de la sección, para determinar una recta necesitamos un punto $P(p_1,p_2)$ y un vector director $\vec{v}=(v_1,v_2)$.

Las ecuaciones de la recta son las siguientes:

- **Ecuación vectorial.**

$$\boxed{(x,y) = \underbrace{(p_1,p_2)}_{P} + t\underbrace{(v_1,v_2)}_{\vec{v}} \quad , t \in \mathbb{R}}$$

- **Ecuaciones paramétricas.**

  Se obtienen de despejar de la ecuación vectorial x e y.

$$(x,y) = (p_1,p_2) + t(v_1,v_2)$$
$$(x,y) = (p_1+tv_1, p_2+tv_2) \longrightarrow \boxed{\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}}$$

- **Ecuación continua.**

  Se obtiene de despejar de las ecuaciones paramétricas el parámetro t e igualando los valores.

$$\left.\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \longrightarrow t = \dfrac{x-p_1}{v_1} \\ y = p_2 + tv_2 \longrightarrow t = \dfrac{y-p_2}{v_2} \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x-p_1}{v_1} = \dfrac{y-p_2}{v_2}}$$

- **Ecuación general o implícita.**

  Se obtiene de la ecuación continua, al realizar las operaciones y pasar todos los términos al primer miembro.

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} \Rightarrow v_2x - v_2p_1 = v_1y - v_1p_2$$

$$\underbrace{v_2}_{A}x - \underbrace{v_1}_{B}y \underbrace{- v_2p_1 + v_1p_2}_{C} = 0$$

$$\boxed{Ax+By+C=0} \longrightarrow \text{Vector normal } \vec{n}=(A,B)$$

Vector director $\vec{v}=(B,-A)$

- **Ecuación explícita.**

  Se obtiene de despejar y de la ecuación general.

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow By = -Ax-C$$

$$y = \overset{m}{-\frac{A}{B}}x \overset{n}{-\frac{C}{B}} \Rightarrow \boxed{y=mx+n}$$

m: pendiente

n: ordenada en el origen.

- **Ecuación punto-pendiente.**

$$\boxed{y-p_2 = m(x-p_1)}$$

Donde m es la pendiente; $m=\frac{v_2}{v_1}$

<u>Ejemplo 1:</u> Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P(-5,2) y el vector director v=(4,3).

<u>Ejemplo 2:</u> Hallar las ecuaciones de la recta que pasan por los puntos P(1,2) y Q(0,-1).

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.

El punto medio de un segmento de extremos $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$ es: $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES.

a) Diremos que dos rectas r y s son paralelas si tienen la misma pendiente.

$$\boxed{m_r = m_s}$$

b) Diremos que dos rectas r y s son perpendiculares si la pendiente de una es la opuesta de la inversa de la otra.

$$m_r = \frac{-1}{m_s}$$

Ejercicios página 171 y 173.

4.Posiciones relativas y distancia.

POSICIÓN RELATIVA DE UN PUNTO Y UNA RECTA.

Se pueden dar dos posiciones:

1. El punto está en la recta si verifica su ecuación.
2. El punto no está en la recta si no verifica su ecuación.

Ejemplo:

$r: x + 2y - 1 = 0$

- El punto $A(0,1)$ no está en la recta r porque: $0+2\cdot 1 - 1 = 2-1 = 1 \neq 0$.

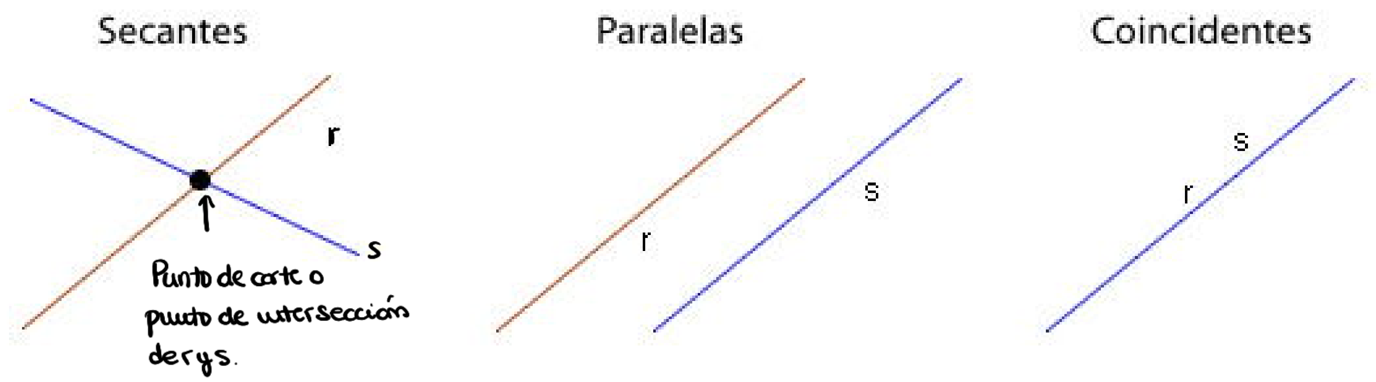
- El punto $B(1,0)$ si está en la recta r porque: $1 + 2\cdot 0 - 1 = 0$.

POSICÓN RELATIVA DE DOS RECTAS.

Consiste en ver si las rectas son secantes, paralelas o coincidentes. Para determinar esto vamos a comparar los coeficiente. Consideremos las siguientes rectas:

r: Ax + By + C = 0 s: A´x + B´y + C´= 0

RECTAS SECANTES: Dos rectas son secantes si tienen un único punto en común.	RECTAS PARALELAS: Dos rectas son paralelas si no tienen ningún punto en común.	RECTAS COINCIDENTES: Dos rectas son coincidentes si son la misma recta.
Criterio: Los coeficientes de las variables no son proporcionales. $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	Criterio: Los coeficientes de las variables son proporcionales y no lo son los términos independientes. $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	Criterio: Los coeficientes de las variables y los términos independientes son proporcionales. $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

Para calcula la distancia entre dos puntos simplemente tendríamos que calcular el módulo del vector que los unen.

CIRCUNFERENCIA DE CENTRO C(a,b) y RADIO R.

La circunferencia de centro C(a,b) y radio R es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al centro C es r. Su ecuación es:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

Ejercicios página 175.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. Dados los puntos A(-3,5) y B(5,3), halla:
   a) Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.
   b) El módulo y el argumento del vector $\overline{AB}$.
   c) El punto medio del segmento $\overrightarrow{AB}$.

2. Realiza las siguientes operaciones con los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,3)$, $\vec{v}=(-3,0)$ y $\vec{w}=(-5,4)$.
   a) $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{w}$ y $\vec{u}\cdot\vec{w}$.
   b) Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

3. Calcula el perímetro del triángulo de vértices A(2,3), B(8,0) y C(11,8).

4. En el ejercicio anterior, calcula las ecuaciones de la recta que pasa por los vértices A y C. Calcula la ecuación de la recta perpendicular a la anterior y que pasa por B. ¿En qué puntos se cortan las dos rectas anteriores?

5. Dadas las rectas r: 3x-2y +5=0, calcula su pendiente y halla:
   a) La ecuación de la recta s que es paralela a la recta r y pasa por A(1,-5).
   b) La ecuación de la recta t que es perpendicular a la recta r y pasa por B(-3,4).
   c) ¿Cómo son las rectas s y t entre sí?

6. Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(1,-3) y B(2,0).

7. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r: x+3y=0.

8. Obtén la ecuación continua de la recta que pasa por P(3,-2) y es perpendicular a la recta r: 2x -y +4=0.

9. Calcula el valor de a para que las rectas r: 2x + ay =3 y s: 3x + 5y = 1 sean paralelas.

10. Halla la ecuación implícita de la recta que pasa por P(1,2) y por el punto de corte de las rectas r: x-2y+3=0, s: 2x+y+1=0.

11.
   a) Obtén la ecuación de la recta r que pasa por (3,-1) y tiene pendiente -½.
   b) Escribe la ecuación de la recta s que es perpendicular a x+3y=2 y pasa por (2,-4).
   c) Halla el punto de corte de las rectas r y s.

12. Calcula la distancia entre los puntos:
    a) A(8,10) y B(-2,-14).
    b) P(6,-2) yQ(0,6).

13. ¿Cuál de las rectas r: y-3=5(x-1) , s: y=$\frac{2}{5}$x y t: $\frac{x+1}{5} = \frac{1-y}{2}$ es paralela a la recta 2x - 5y + 4=0 ?

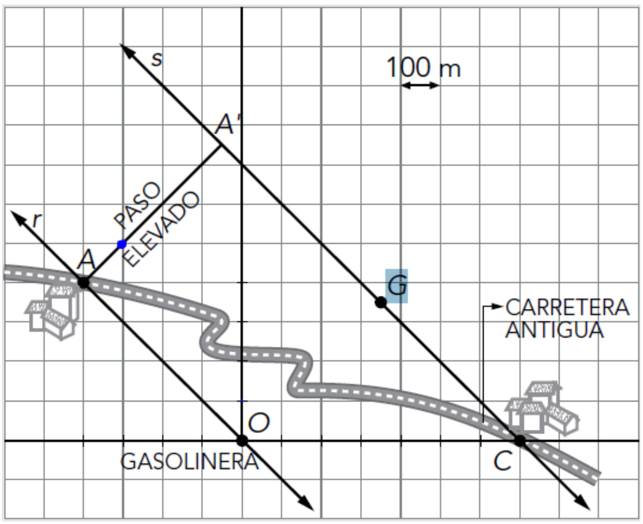
14. Halla el valor de m para que las rectas r: y-x+3=0 y s: mx+3y-1=0 no se corten. ¿Y para que se corten?.

Ejercicios para entregar:

Ambos ejercicios serán evaluados.

1. Dado el triángulo de vértices A(-5,1), B(-2,-4) y C(4,5), halla:
   a) Su perímetro.
   b) La ecuación de la recta r que pasa por C y que es perpendicular a la recta que pasa por A y B.
   c) El punto de corte de la recta que pasa por A y B con la recta r.
   d) La distancia de C a D.
   e) Área del triángulo ABC.
   Nota: Piensa como es la recta que forma la altura del triángulo. Si lo dibujas seguro que lo ves.

2. En un estudio de ingeniería civil se van a proyectar unas autovías que sustituyan a una antigua carretera en muy mal estado y con muchas curvas. La antigua carretera va desde A hasta C, y ahora quieren construir dos ramales paralelos, uno que pase por A y otro que pase por C. Para hacer el informe, se han colocado unos ejes coordenados con centro en O (la gasolinera).



a) Calcula la ecuación punto-pendiente de la recta que representa el ramal r.
b) Calcula la ecuación punto-pendiente del ramal s.
c) Desean diseñar otro ramal que comunique A con A', perpendicular a ambas autovías. ¿Qué ecuación tendrá la recta AA'? ¿Cuáles son las coordenadas de A'? ¿Qué longitud tendrá el paso elevado?
d) Quieren construir otra gasolinera, G, en la autovía s y que esté en la perpendicular a r pasando por O. ¿Qué coordenadas tendrá G? Es conveniente que calcules primero la ecuación de la recta OG.

Nota: Cada cuadro mide 100 m.

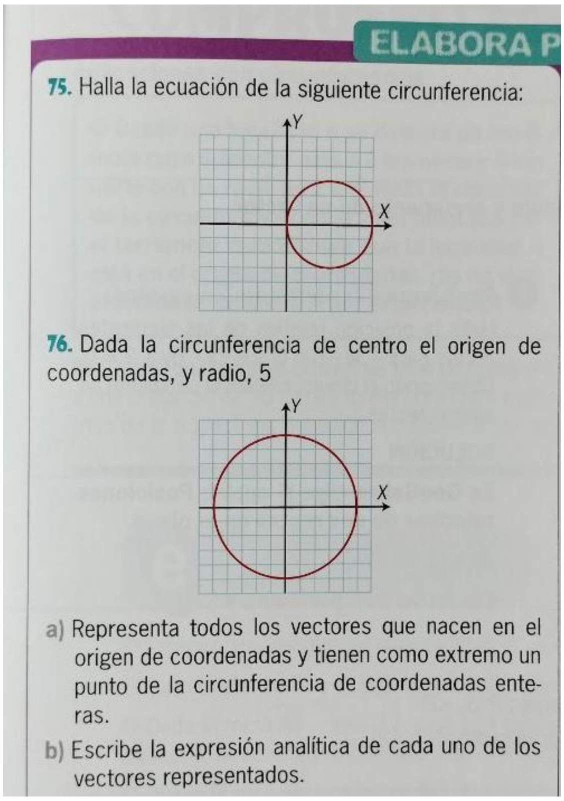
II.1.4. Ejercicios de ampliación y repaso.

Para repasar durante los días previos al examen realizamos gran parte de los ejercicios finales de la unidad del libro de texto. Algunos de los ejercicios que realizamos son como los que se muestran a continuación.

Bibliografía.

- Arias Cabeza, J. M., & Maza Sáez, I. (2023). *Matemáticas 4 ESO MATEMATICAS B 3 Volúmenes Proyecto 5* (Vol. 3). Bruño.

Adjunto imagen de los ejercicios.



ELABORA P

75. Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:

76. Dada la circunferencia de centro el origen de coordenadas, y radio, 5

a) Representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo un punto de la circunferencia de coordenadas enteras.

b) Escribe la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

Imagen 19: Ejercicios libro de texto.

ELABORA PROBLEMAS

62. Halla analíticamente un vector director y la pendiente de las rectas que están definidas por los dos puntos siguientes:

a) $A(0, 0)$, $B(3, 4)$ b) $A(2, -1)$, $B(4, 6)$

c) $A(-2, 5)$, $B(3, -4)$ d) $A(3, -2)$, $B(4, -1)$

63. Dada la siguiente recta:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$$

halla:

a) El tipo de ecuación.

b) Un punto.

c) El vector director.

d) Un vector normal.

e) La pendiente.

f) Represéntala.

64. Dada la siguiente recta:

$$y = 2x - 3$$

halla:

a) El tipo de ecuación.

b) Un punto.

c) La pendiente.

d) Un vector director.

e) Un vector normal.

f) Represéntala.

65. Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos $A(3, 4)$, $B(-1, -2)$ y $C(5, -4)$:

a) Representa dicho triángulo y dibuja la recta que contiene la mediana definida por el vértice A

b) Halla la ecuación de dicha recta.

66. Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos $A(1, 4)$, $B(-3, 2)$ y $C(5, -4)$:

a) Representa dicho triángulo y dibuja la recta paralela al lado BC, que pasa por el vértice A

b) Halla la ecuación de dicha recta.

67. Dibuja el segmento de extremos los puntos $A(5, 4)$ y $B(-1, -2)$ y su mediatriz. Halla la ecuación de la mediatriz.

68. Halla el coeficiente k para que la recta:

$$kx + 3y = 8$$

pase por el punto $A(1, 2)$

69. Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 12 \\ 2x + \ \ y = \ \ 3 \end{array}\right\}$$

Represéntalas y halla el punto de corte.

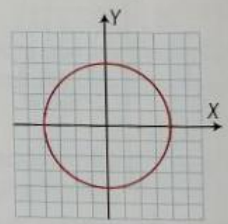
70. Dibuja un rectángulo sabiendo que tiene los lados paralelos a los ejes coordenados, y que las coordenadas de dos vértices opuestos son $A(-3, 5)$ y $B(3, 1)$. Dibuja y halla la longitud de la diagonal.

71. Halla el valor de k para que las siguientes rectas sean paralelas:

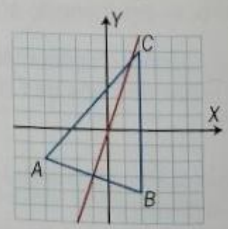
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ kx - 6y = 1 \end{array}\right\}$$

72. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto $C(-1, -2)$, y de radio, 4 unidades. Haz el dibujo.

73. Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



74. Dado el triángulo de la siguiente figura:



halla la ecuación de la mediatriz del lado AB

Imagen 20: Ejercicios libro de texto.

II.1.5. Examen.

En este curso realicé un examen, el cual se adaptaba a todo lo visto en clase.

Nombre y Apellidos:

1. **(2.5 puntos)** Dados los siguiente vectores $\vec{u} = (3, 2)$, $\vec{v} = (0, -1)$, $\vec{w} = (1, -2)$ y $\vec{(z)} = (1, a)$ calcula:
   a) $\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$.
   b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
   c) El módulo y argumento de $\vec{u}$.
   d) El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$.
   e) El valor de a para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{z}$ sean perpendiculares.
2. **(2 puntos)** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(0,1) y B(2,1).
3. **(1.5 puntos)** Dada la recta r: x - 3y = 1, halla una recta s perpendicular a r, que pase por el punto P(2,5).
4. **(2 puntos)** Estudia la posición relativa de las rectas r: 2x +3y = 5 y s: -x + 2y = 1. En caso de que se corten, halla su punto de corte.
5. **(2 puntos)**
   a) Halla el valor de k para que la recta r: kx + 3y = 8 pase por el punto A(1,0).
   b) Halla el valor de k para que las siguientes rectas sean paralelas: $\left.\begin{smallmatrix} r: 2x+3y=1 \\ s: kx+y=4 \end{smallmatrix}\right\}$

II.2. 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales y Humanidades DB.

Imagen 21: Impartición de clases en 1º de Bachillerato CCSS.

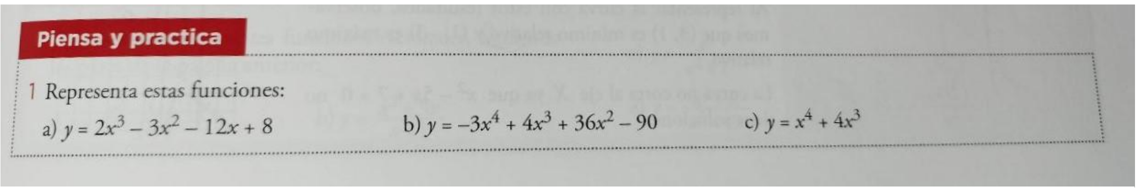
II.2.1. Apuntes del tema.

Para elaborar los apuntes del tema utilicé el libro de texto.

<u>Bibliografía.</u>

- Colera Jiménez, J., García Pérez, R., Colera Cañas, R., Oliveira González, M. J., & Aicardo B, A. (2022). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Anaya.

Para poner en práctica los conceptos teóricos realizamos ejercicios del libro.

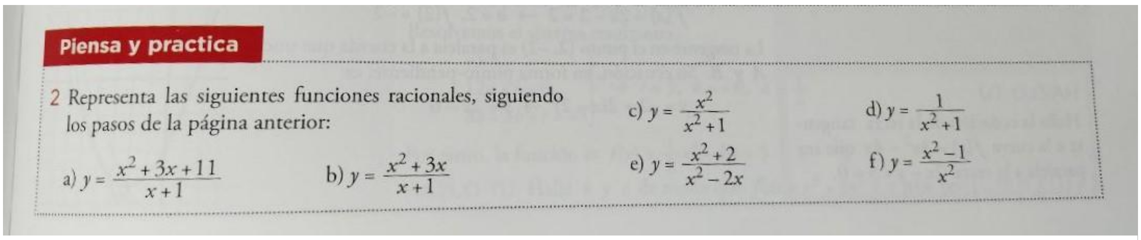


Piensa y practica

1 Representa estas funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ b) $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$ c) $y = x^4 + 4x^3$

Imagen 22: Ejercicios libro de texto.



Piensa y practica

2 Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:

a) $y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ b) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$ c) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ d) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ e) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ f) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

Imagen 23: Ejercicios libro de texto.

Recta tangente y recta normal

14 Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa indicado en cada caso.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en $x = 2$
b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 3$
c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$ en $x = -1$
d) $f(x) = ln\, x$ en $x = e^2$
e) $f(x) = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$

15 Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$
b) $y = 4\sqrt{x+3}$
c) $y = ln\,(4x - 1)$

16 Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a f, que sea paralela a la recta dada.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ paralela a $2x + y + 1 = 0$
b) $f(x) = x^3 - 3x$ paralela a $y = 6x + 10$
c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ paralela a $5x - y = 0$

17 Obtén los puntos donde la recta tangente es horizontal y escribe su ecuación.

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$
b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$
c) $y = x^4 - 4x^3$
d) $y = x^3 - 12x$

Imagen 24: Ejercicios libro de texto.

Aplicaciones de las derivadas.

1º Bachillerato CCSS.

Ecuación de la recta tangente.

Como ya vimos en el apartado de interpretación de la función derivada, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Por tanto, si queremos calcular la ecuación de la recta tangente en el punto **A(a, f(a))**, haciendo uso de la ecuación de la recta en forma punto-pendiente obtenemos:

$$y - f(a) = m \cdot (x-a)$$

Y como $m = f'(a)$, obtenemos que la ecuación de la recta tangente en el punto **A(a, f(a))** es:

$$\mathbf{y - f(a) = f'(a) \cdot (x-a)}$$

Ejemplo: Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 2x^2 - 3x$ en $x=-2$.

Ejemplo: Calcula el punto de la curva $f(x) = x^2 + x + 2$ en el que la recta tangente es paralela a la función $g(x) = x$.

Ejercicios 14, 15, 16 y 17 página 212.

Estudio de funciones.

En este apartado vamos a analizar todo lo correspondiente al estudio de funciones y para qué nos sirven las derivadas . Las derivadas las vamos a utilizar para estudia la monotonía (crecimiento/decrecimiento) y como consecuencia los máximos/mínimos de funciones. Además, también las utilizaremos para examinar la curvatura y los puntos de inflexión de funciones.

Monotonía.

Para la monotonía vamos a analizar el signo de la primera derivada, es decir, el signo de $f'(x)$. Para ello, vamos a tener que calcular las raíces de la primera derivada y esos puntos serán nuestros **posibles máximos o mínimos**. Una vez obtenidos dichos puntos vamos a hacer una tabla (en esta tabla tenemos que poner los puntos conflictivos del dominio y los posibles máximos o mínimos) en la cual vamos a estudiar el signo de la derivada.

Si $f'(a) > 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **creciente** en $x = a$.
Si $f'(a) < 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **decreciente** en $x = a$.

Diremos que x=a es un **máximo** de la función, si en en ese punto la función pasa de ser creciente a ser decreciente.

Diremos que x=a es un **mínimo** si la función pasa de ser decreciente a ser creciente.

Ejemplo: Estudia la monotonía de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.

Ejemplo: Estudia la monotonía de $f(x) = 1/x$.

Para representar funciones vamos a seguir los siguientes pasos:

- Calculamos el dominio de la función.
- Puntos de corte con los ejes.
- Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

Asíntotas Verticales [AV]	Las posibles asíntotas verticales se encuentran en los puntos de No dominio $Si \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \rightarrow$ x=a
Asíntotas Horizontales [AH]	Calculamos el límite cuando x tiende a más y menos infinito de la función $Si \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mathrm{b} \rightarrow$ y=b
Asíntotas Oblicuas [AO] Si tiene asíntotas Horizontales No tiene asíntotas Oblicuas	Son de la forma : y=mx+n Siendo $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$ Nota: En funciones racionales estas asíntotas también se pueden calcular haciendo la división de los polinomios

- Monotonía, máximos y mínimos.
- Representación aproximada de la función.

Ejercicio 1 página 203, 2 página 205, 19,20,21,22 página 212.

Problemas de Optimización.

En este apartado nos vamos a enfrentar a distintos problemas cuyo objetivo será optimizar una función, es decir, calcular los máximos o mínimos de esta función. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

1. Planteamos la función que tengamos que maximizar o minimizar.
2. Planteamos una ecuación que relacione las distintas variables del problema.
3. Despejamos de esta ecuación una de las variables y la sustituimos en la función del paso 1.
4. Como el problema consiste en maximizar o minimizar una función, para calcular los máximos y mínimos vamos a hacer la primera derivada e igualarla a 0.
5. Para comprobar el resultado, hacemos una tabla como la de los ejercicios de máximos y mínimos de funciones.

Ejemplo: Una cadena de montaje está especializada en la producción de un modelo de motocicleta. Los costes de producción en euros, C (x) , se relacionan con el número de motocicletas fabricadas, x mediante la expresión:

$$C(x) = 10x^2 + 2000x + 250000$$

Si el precio de venta de cada motocicleta es de 8000 euros y se venden todas las fabricadas, se pide:

a) Define la función de ingresos que obtiene la cadena de montaje en función de las unidades vendidas.

b) ¿Qué función expresa los beneficios de la cadena?

c) ¿Cuántas motocicletas debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán los mismos?

Ejemplo: En una planta depuradora de aguas residuales la expresión que determina el coste de funcionamiento anual en función de la cantidad de agua depurada es:

$$C(x) = 35x^2 - 140x + 2600$$

donde C(x) son los costes expresados en euros y x es el volumen de agua depurada en un año en miles de metros cúbicos. Determina:

a) La cantidad de agua depurada que hace mínimo el coste.

b) El valor de dicho coste mínimo.

c) El coste de la depuración de agua de una localidad de 2000 habitantes, si cada uno genera al año 8 metros cúbicos de agua para depurar.

Ejercicios 44, 45, 46 y 47 páginas 213 y 214.

II.2.2. Ejercicios evaluables.

Les subí a Google Classroom ejercicios que podían sumar hasta un punto extra sobre el examen. A través de esta plataforma se los corregí y les devolví las correcciones y la nota.

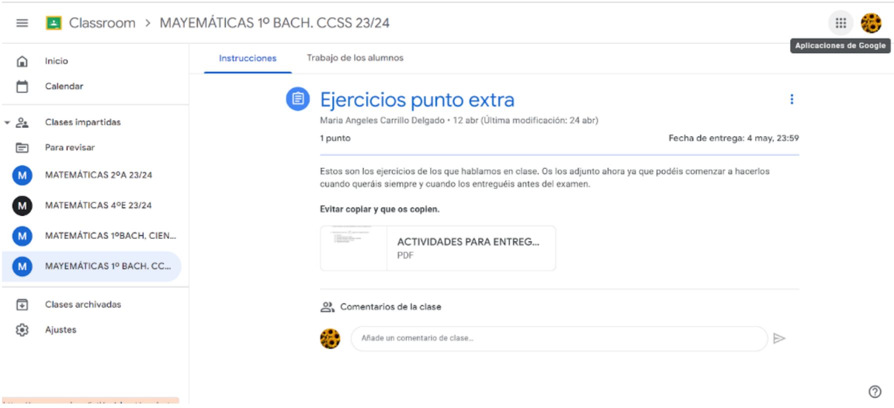


Imagen 25: Ejercicios Google Classroom.

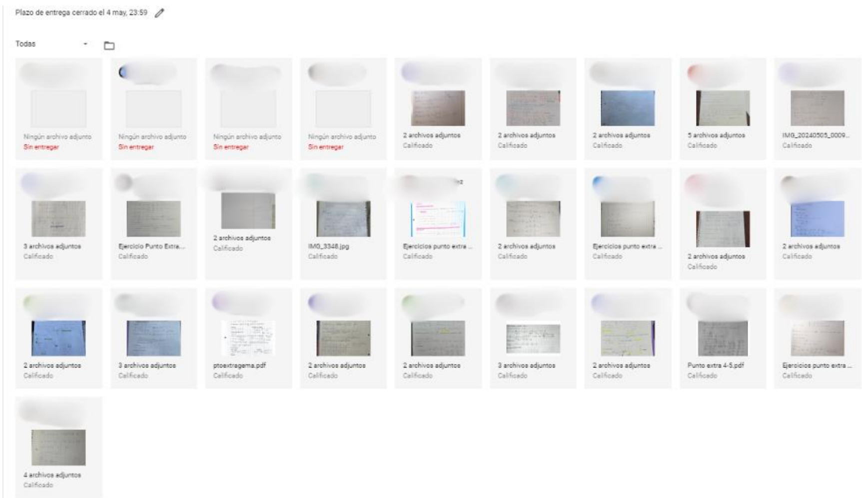


Imagen 26: Entrega de ejercicios evaluables.

<u>Bibliografía.</u>

- Aida. (2011). *10 ejercicios recta tangente CSII*. https://elblogdematedeaida.wordpress.com/wp-content/uploads/2011/01/10-ejercicios-recta-tangente-csii1.pdf

ACTIVIDADES PARA ENTREGAR

1. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función **y= x·ln(x)** en **x=e.**

2. Representa la función f(x) = $\frac{2x^3}{x^2 - 4}$ siguiendo los siguientes pasos:
    a) Dominio.
    b) Puntos de corte con los ejes.
    c) Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
    d) Monotonía, máximos y mínimos.
    e) Representación gráfica.

II.2.3. Examen.

En este curso realicé un examen formado por 5 ejercicios. Los enunciados de los ejercicios aparecen con una gran separación, ya que en esta clase hay un alumno TDAH. Los ejercicios del examen tienen la misma dificultad que los ejercicios realizado en clase.

1ºBACH CCSS
Aplicaciones de las derivadas.

3 de Mayo de 2024

Nombre y Apellidos:____

1. **(1.5 puntos)** Dada la función f(x) = $\frac{x^2-1}{x}$, halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente sea $\frac{5}{4}$.

2. **(1 punto)** Hallar la ecuación de la recta tangente a f(x) = $x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ en x= 3.

3. **(3.5 puntos)** Estudia y representa la siguiente función f(x) = $\frac{2}{x^2-1}$.

4. **(1.5 puntos)** Estudia la monotonía, los máximos y los mínimos de f(x) = $3x - x^3$.

5. **(2.5 puntos)** La cotización de las acciones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes y sigue la función

$$C(x) = x^3 - 45x^2 + 243x + 30000$$

donde x es el número de días. Calcula.

a) ¿Cuál ha sido la cotización en Bolsa el día 12?
b) Determina los días en el que se alcanzan las cotizaciones máxima y mínima.
c) ¿Cuánto son esas cotizaciones máxima y mínima?

II.3. 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología DC.

Imagen 27: Impartiendo clases en 1º de Ciencias.

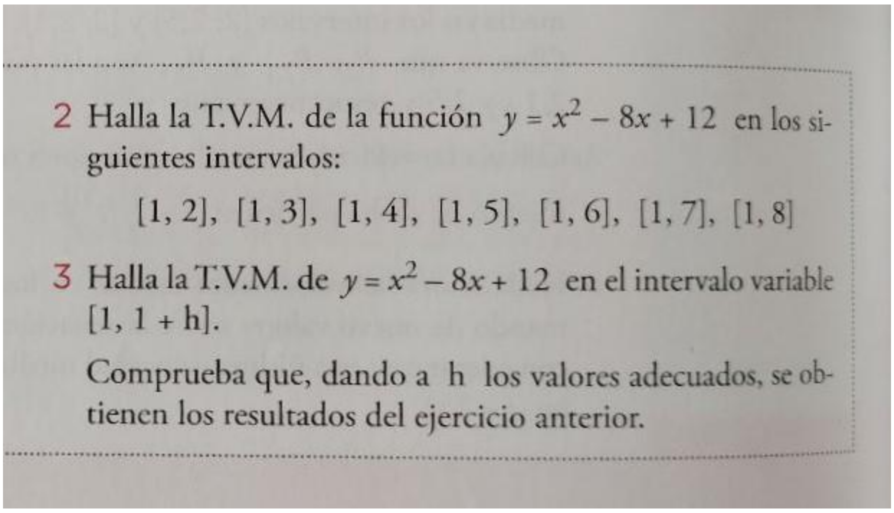
II.3.1. Apuntes del tema.

Para elaborar los apuntes del tema utilicé el libro de texto.

<u>Bibliografía.</u>

- Colera Jiménez, J., García Pérez, R., Colera Cañas, R., Oliveira González, M. J., & Aicardo B, A. (2022). *Matemáticas I*. Anaya.

Para poner en práctica los conceptos teóricos realizamos ejercicios del libro.



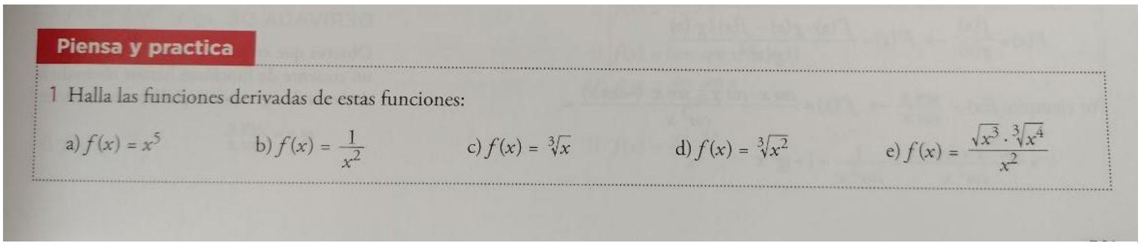
2 Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los siguientes intervalos:

$[1, 2]$, $[1, 3]$, $[1, 4]$, $[1, 5]$, $[1, 6]$, $[1, 7]$, $[1, 8]$

3 Halla la T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo variable $[1, 1 + h]$.

Comprueba que, dando a h los valores adecuados, se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Imagen 28: Ejercicios del libro de texto.

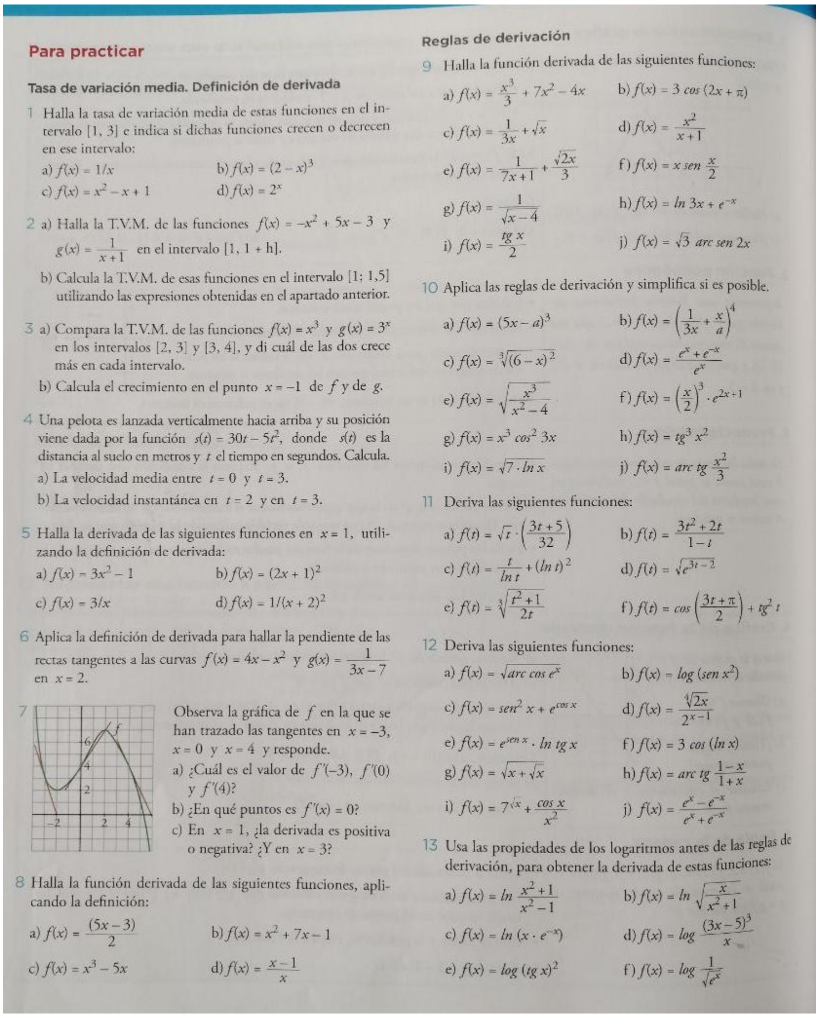


Piensa y practica

1 Halla las funciones derivadas de estas funciones:

a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^4}}{x^2}$

Imagen 29: Ejercicios del libro de texto.



Para practicar

Tasa de variación media. Definición de derivada

1 Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo $[1, 3]$ e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:

a) $f(x) = 1/x$ b) $f(x) = (2 - x)^3$
c) $f(x) = x^2 - x + 1$ d) $f(x) = 2^x$

2 a) Halla la T.V.M. de las funciones $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = \frac{1}{x+1}$ en el intervalo $[1, 1 + h]$.

b) Calcula la T.V.M. de esas funciones en el intervalo $[1; 1{,}5]$ utilizando las expresiones obtenidas en el apartado anterior.

3 a) Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos $[2, 3]$ y $[3, 4]$, y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.

b) Calcula el crecimiento en el punto $x = -1$ de f y de g.

4 Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba y su posición viene dada por la función $s(t) = 30t - 5t^2$, donde $s(t)$ es la distancia al suelo en metros y t el tiempo en segundos. Calcula.

a) La velocidad media entre $t = 0$ y $t = 3$.
b) La velocidad instantánea en $t = 2$ y en $t = 3$.

5 Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ b) $f(x) = (2x + 1)^2$
c) $f(x) = 3/x$ d) $f(x) = 1/(x + 2)^2$

6 Aplica la definición de derivada para hallar la pendiente de las rectas tangentes a las curvas $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \frac{1}{3x-7}$ en $x = 2$.

7 Observa la gráfica de f en la que se han trazado las tangentes en $x = -3$, $x = 0$ y $x = 4$ y responde.

a) ¿Cuál es el valor de $f'(-3)$, $f'(0)$ y $f'(4)$?
b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?
c) En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

8 Halla la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición:

a) $f(x) = \frac{(5x-3)}{2}$ b) $f(x) = x^2 + 7x - 1$
c) $f(x) = x^3 - 5x$ d) $f(x) = \frac{x-1}{x}$

Reglas de derivación

9 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x$ b) $f(x) = 3\cos(2x + \pi)$
c) $f(x) = \frac{1}{3x} + \sqrt{x}$ d) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
e) $f(x) = \frac{1}{7x+1} + \frac{\sqrt{2x}}{3}$ f) $f(x) = x \,\mathrm{sen}\, \frac{x}{2}$
g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$ h) $f(x) = \ln 3x + e^{-x}$
i) $f(x) = \frac{\mathrm{tg}\, x}{2}$ j) $f(x) = \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,sen}\, 2x$

10 Aplica las reglas de derivación y simplifica si es posible.

a) $f(x) = (5x - a)^3$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{3x} + \frac{x}{a}\right)^4$
c) $f(x) = \sqrt[3]{(6-x)^2}$ d) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$
e) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}$ f) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$
g) $f(x) = x^3 \cos^2 3x$ h) $f(x) = \mathrm{tg}^3\, x^2$
i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot \ln x}$ j) $f(x) = \mathrm{arc\,tg}\, \frac{x^2}{3}$

11 Deriva las siguientes funciones:

a) $f(t) = \sqrt{t} \cdot \left(\frac{3t+5}{32}\right)$ b) $f(t) = \frac{3t^2 + 2t}{1-t}$
c) $f(t) = \frac{t}{\ln t} + (\ln t)^2$ d) $f(t) = \sqrt{e^{3t-2}}$
e) $f(t) = \sqrt[3]{\frac{t^2+1}{2t}}$ f) $f(t) = \cos\left(\frac{3t+\pi}{2}\right) + \mathrm{tg}^2\, t$

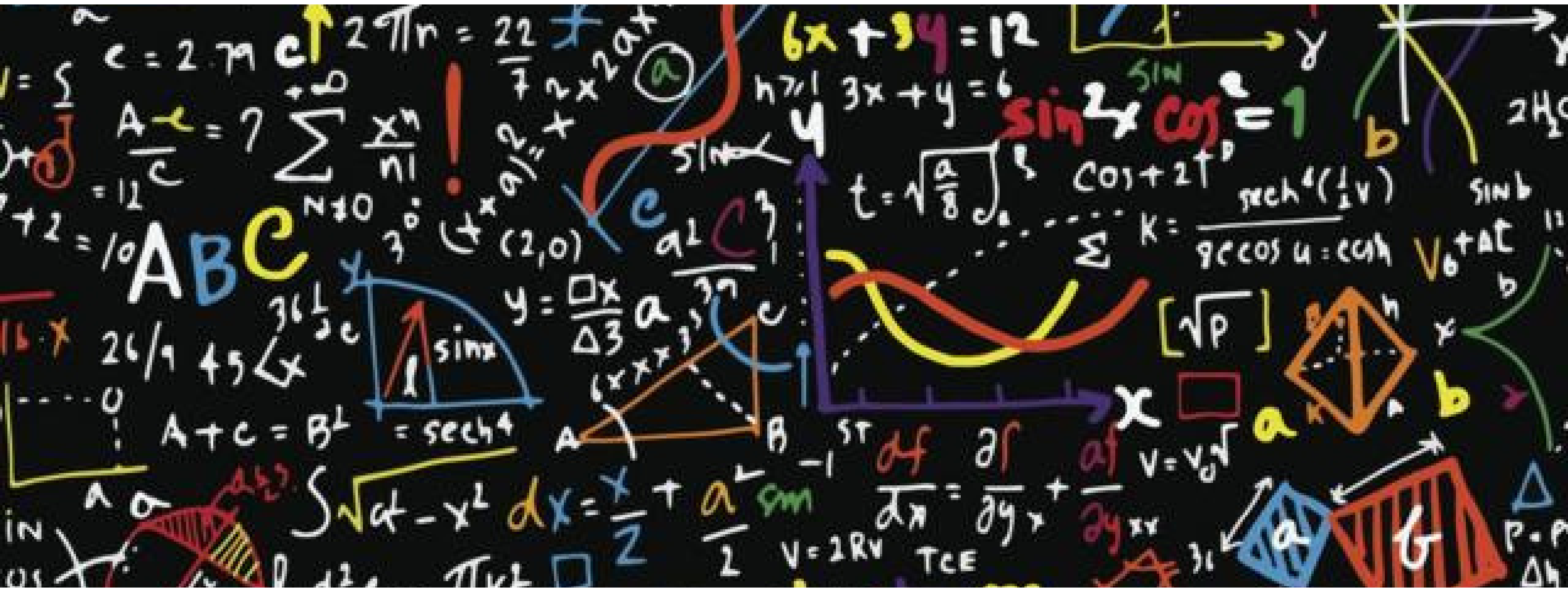
12 Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\mathrm{arc\,cos}\, e^x}$ b) $f(x) = \log(\mathrm{sen}\, x^2)$
c) $f(x) = \mathrm{sen}^2\, x + e^{\cos x}$ d) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{2x}}{2^{x-1}}$
e) $f(x) = e^{\mathrm{sen}\, x} \cdot \ln \mathrm{tg}\, x$ f) $f(x) = 3\cos(\ln x)$
g) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ h) $f(x) = \mathrm{arc\,tg}\, \frac{1-x}{1+x}$
i) $f(x) = 7^{\sqrt{x}} + \frac{\cos x}{x^2}$ j) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

13 Usa las propiedades de los logaritmos antes de las reglas de derivación, para obtener la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}$ b) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$
c) $f(x) = \ln(x \cdot e^{-x})$ d) $f(x) = \log \frac{(3x-5)^3}{x}$
e) $f(x) = \log(\mathrm{tg}\, x)^2$ f) $f(x) = \log \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

Imagen 30: Ejercicios del libro de texto.



Derivadas y aplicaciones

1ºBachillerato Científico-Tecnológico

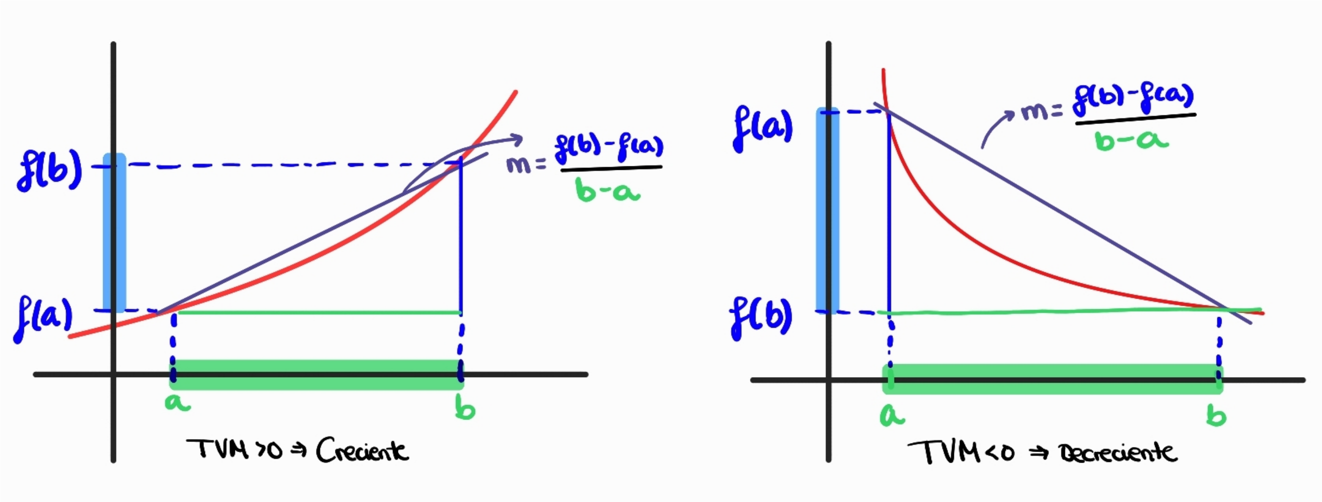
1. Tasa de Variación media.

Se llama **tasa de variación media (T.V.M)** de una función y=f(x), en un intervalo [a,b] al crecimiento medio de la función en ese intervalo, es decir,

$$T.V.M[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La T.V.M de f(x) en [a,b] es la pendiente del segmento que une los puntos A(a ,f(a)) y B(b, f(b)).

- Si la función es creciente, entonces T.V.M >0.
- Si la función es decreciente, entonces T.V.M <0.
- Si la función es constante, entonces T.V.M =0



Ejercicios: 2 y 3 página 296.

2. Definición de derivada de un punto.

La derivada de una función f(x) en un punto x=a se denota como **f'(a)** y se define mediante la siguiente expresión:

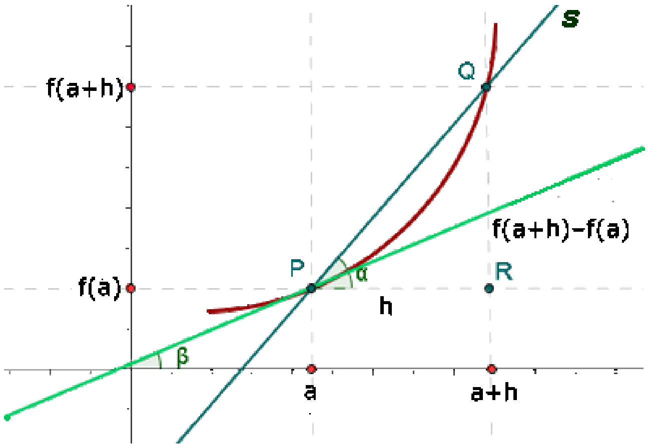
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejemplos: Calcula la derivada de

- f(x)= x+2 en a=1.
- f(x)= 3x+1 en a=2.
- f(x)= x^2 en a=3.
- f(x)= $x^2 + 3$ en a=2
- $\sqrt{x}$ en a=1.

Interpretación geométrica de la derivada.

La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.



Enlace a GeoGebra : https://www.geogebra.org/m/p5enaj6b

Ejemplo: Calcula el valor de la pendiente de la recta tangente a la función f(x)= $(2-x)^2$ en x=1.

Ejercicios: 2 y 3 página 299.

3.Reglas de derivación. Tabla de derivadas.

Derivada de las operaciones con funciones

Derivada de la suma/diferencia de dos funciones

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

<u>Derivada del producto de dos funciones</u>

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

<u>Derivada del producto de un escalar por una función</u>

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

<u>Derivada del cociente de dos funciones , g(x) ≠ 0</u>

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

<u>Derivadas elementales</u>

<u>CASO SIMPLE</u>

Función	Función derivada
Función constante: $k \in \mathbb{R}; f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Función identidad: $f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Función potencial: $\alpha \in \mathbb{R}; f(x) = x^{\alpha}$	$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
Función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
Función exponencial: $a \in \mathbb{R}; a > 0; a \neq 1$ $f(x) = a^x$ $f(x) = e^x$	$f'(x) = a^x \cdot La$ $f'(x) = e^x$
Función logarítmica: $a \in \mathbb{R}; a > 0; a \neq 1$ $f(x) = log_a x$ $f(x) = lnx = Lx$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot log_a e$ $f'(x) = \frac{1}{x}$
Función trigonométrica: $f(x) = sen\ x$ $f(x) = \cos x$ $f(x) = tg\ x$	$f'(x) = \cos\ x$ $f'(x) = -sen\ x$ $f'(x) = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x = 1 + tg^2 x$

Ejemplos: Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$f(x) = -7$	$f(x) = ln(x)$
$f(x) = 3x$	$f(x) = \log_6(x)$
$f(x) = x^4$	$f(x) = \tan(x)$
$f(x) = 3x^4 + 8$	$f(x) = \cos x$
$f(x) = \sqrt[3]{x} + x^6$	$f(x) = \sin x$
$f(x) = e^x$	$f(x) = x^7 \cdot 3^x$
$f(x) = 5^x$	$f(x) = \frac{e^x}{\tan(x)}$

Ejercicios: 1 página 301 / Ejercicios para practicar página 303(el apartado 4 y 5 no).

CASO COMPUESTO

Funciones elementales compuestas

Función	Función derivada
$\alpha \in \mathbb{R}; f(x) = [u(x)]^\alpha$	$f'(x) = \alpha \cdot u(x)^{\alpha-1} \cdot u'(x)$
Función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u(x)}} \cdot u'(x)$
Función exponencial: $a \in \mathbb{R}; a > 0; a \neq 1$ $f(x) = a^{u(x)}$ $f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot La$ $f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
Función logarítmica: $a \in \mathbb{R}; a > 0; a \neq 1$ $f(x) = log_a u(x)$ $f(x) = ln(u(x)) = L(u(x))$	$f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \cdot log_a e$ $f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$
Función trigonométrica: $f(x) = sen(u(x))$ $f(x) = \cos(u(x))$ $f(x) = tg(u(x))$	$f'(x) = \cos(u(x)) \cdot u'(x)$ $f'(x) = -sen(u(x)) \cdot u'(x)$ $f'(x) = \frac{u'(x)}{cos^2 u(x)} = sec^2 u(x) \cdot u'(x) = [1 + tg^2 u(x)] \cdot u'(x)$

Ejemplos: Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^2 + 7x)^7$$

$$f(x) = 2^{\sin^3 x}$$

$$f(x) = \sin 5x^4 - 7^{x^2}$$

$$f(x) = ln\frac{x+1}{x-1}$$

$$f(x) = e^{ln(x)}$$

Ejercicios: 1 página 304

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS			
SIMPLES		COMPUESTAS	
FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
$y = arc\ sen(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$z = arc\ sen[f(x)]$	$z' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = arc\cos(x)$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$z = arc\ cos[f(x)]$	$z' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = arctan(x)$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$z = arctan[f(x)]$	$z' = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

4. Aplicaciones de las derivadas.

Ecuación de la recta tangente

Como ya vimos en el apartado de interpretación de la función derivada, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Por tanto, si queremos calcular la ecuación de la recta tangente en el punto **A(a, f(a))**, haciendo uso de la ecuación de la recta en forma punto-pendiente obtenemos:

$$y - f(a) = m\cdot(x-a)$$

Y como m = f'(a), obtenemos que la ecuación de la recta tangente en el punto **A(a, f(a))** es:

$$\mathbf{y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)}$$

Ejemplo: Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 2x^2 -3x$ en $x=-2$.

Ejemplo: Calcula el punto de la curva $f(x) = x^2 +x + 2$ en el que la recta tangente es paralela a la función $g(x) = x$.

Ecuación de la recta normal

La recta normal a una curva en un punto es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto. Para calcular la ecuación de esta recta, simplemente tenemos que darnos cuenta que la pendiente es la inversa de la pendiente de la recta tangente cambiada de signo, es decir,

$$m = -\frac{1}{f'(a)}$$

Entonces obtenemos que la ecuación de la recta normal en el punto **A(a, f(a))** es:

$$\mathbf{y - f(a) = m\cdot(x-a)}$$

Enlace a GeoGebra : https://www.geogebra.org/m/vfwqrtb6

Ejemplo: Calcula la ecuación de la recta normal a la función $f(x) = 2x^2 -3x$ en $x=-2$.

Ejemplo: Calcula el punto de la curva $f(x) = x^2 +x + 2$ en el que la recta tangente es perpendicular a la función $g(x) = x$.

Ejercicios del 14 al 17 página 323.

Ejercicios del 33, 35 y 36 página 324.

Estudio de funciones

En este apartado vamos a analizar todo lo correspondiente al estudio de funciones y para qué nos sirven las derivadas . Las derivadas las vamos a utilizar para estudia la monotonía (crecimiento/decrecimiento) y como consecuencia los máximos/mínimos de funciones. Además, también las utilizaremos para examinar la curvatura y los puntos de inflexión de funciones.

Monotonía.

Para la monotonía vamos a analizar el signo de la primera derivada, es decir, el signo de f'(x). Para ello, vamos a tener que calcular las raíces de la primera derivada y esos puntos serán nuestros **posibles máximos o mínimos**. Una vez obtenidos dichos puntos vamos a hacer una tabla (en esta tabla tenemos que poner los puntos conflictivos del dominio y los posibles máximos o mínimos) en la cual vamos a estudiar el signo de la derivada.

Si $f'(a) > 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **creciente** en $x = a$.
Si $f'(a) < 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **decreciente** en $x = a$.

Diremos que x=a es un **máximo** de la función, si en en ese punto la función pasa de ser creciente a ser decreciente.

Diremos que x=a es un **mínimo** si la función pasa de ser decreciente a ser creciente.

Ejemplo: Estudia la monotonía de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.

Ejemplo: Estudia la monotonía de $f(x) = 1/x$.

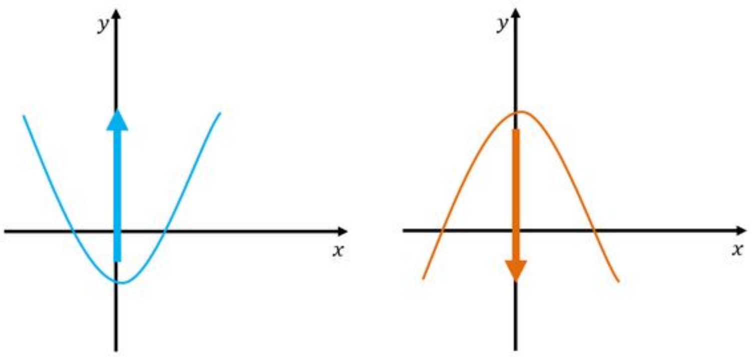
Curiosidad: ¿Podíamos calcular con lo que hemos estudiado que la fórmula para calcular el vértice de una parábola es $V_x = -b/2a$?

Ejercicios del 19,20 y 22 página 323.

Curvatura.

Para la curvatura vamos a estudiar el signo de la segunda derivada, es decir, el signo de $f''(x)$. Para ello, vamos a tener que calcular las raíces de la segunda derivada y esos puntos serán nuestros **posibles puntos de inflexión**. Una vez obtenidos dichos puntos vamos a hacer una tabla (en esta tabla tenemos que poner los puntos conflictivos del dominio y los posibles puntos de inflexión) en la cual vamos a analizar el signo de la segunda derivada.

Si $f''(a) > 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **cóncava hacia arriba** en $x = a$.
Si $f''(a) < 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **cóncava hacia abajo** en $x = a$.



La función de la izquierda es cóncava hacia arriba y la función de la derecha es cóncava hacia abajo.

Diremos que en x=a la función tiene un **punto de inflexión** si la función pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo o viceversa.

Ejemplo: Estudia la curvatura de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.

Para representar funciones vamos a seguir los siguientes pasos:

- Calculamos el dominio de la función.
- Puntos de corte con los ejes.
- Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

Asíntotas Verticales [AV]	Las posibles asíntotas verticales se encuentran en los puntos de No dominio $Si \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \to$ $\boxed{x=a}$
Asíntotas Horizontales [AH]	Calculamos el límite cuando x tiende a más y menos infinito de la función $Si \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \to$ $\boxed{y=b}$
Asíntotas Oblicuas [AO] Si tiene asíntotas Horizontales No tiene asíntotas Oblicuas	Son de la forma : y=mx+n Siendo $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$ Nota: En funciones racionales estas asíntotas también se pueden calcular haciendo la división de los polinomios

- Monotonía, máximos y mínimos.
- Curvatura y puntos de inflexión(solo si se pide).
- Representación aproximada de la función.

Ejercicio 1 página 312, ejercicio 2 página 314 , ejercicio 21 página 323 y ejercicios del 23,24,25 y 28 páginas 323 y 324.

Ejercicios 39 y 41 página 324. Ejercicio 54 página 325.

Diremos que una función es derivable o diferenciable en un punto x=a, cuando exista f'(a). Para que f'(a) exista tienen que existir y coincidir sus derivadas laterales es decir,

1. **$\exists\ f'(a^+)$ y $\exists\ f'(a^-)$.**
2. **$f'(a^+) = f'(a^-)$**

Toda función derivable es continua.

¿Se verificará que toda función continua es derivable? Hagamos el estudio de la función f(x)=|x|.

Ejercicios 66 y 67 página 326.

Problemas de optimización.

En este apartado nos vamos a enfrentar a distintos problemas cuyo objetivo será optimizar una función, es decir, calcular los máximos o mínimos de esta función. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

1. Planteamos la función que tengamos que maximizar o minimizar.
2. Planteamos una ecuación que relacione las distintas variables del problema.
3. Despejamos de esta ecuación una de las variables y la sustituimos en la función del paso 1.
4. Como el problema consiste en maximizar o minimizar una función, para calcular los máximos y mínimos vamos a hacer la primera derivada e igualarla a 0.
5. Para comprobar el resultado, hacemos una tabla como la de los ejercicios de máximos y mínimos de funciones.

Ejemplo: De todos los triángulos isósceles de 12 m de perímetro, hallar los lados del que tome área máxima.

Ejemplo: Una cadena de montaje está especializada en la producción de un modelo de motocicleta. Los costes de producción en euros, C (x) , se relacionan con el número de motocicletas fabricadas, x mediante la expresión:

$$C(x) = 10x^2 + 2000x + 250000$$

Si el precio de venta de cada motocicleta es de 8000 euros y se venden todas las fabricadas, se pide:

a) Define la función de ingresos que obtiene la cadena de montaje en función de las unidades vendidas.

b) ¿Qué función expresa los beneficios de la cadena?

c) ¿Cuántas motocicletas debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán los mismos?

Ejercicios del 59 al 64 página 325.

Ejercicios para profundizar: Ejercicios del 43 al 51 página 325.

Regla de L'Hôpital

En ocasiones, al calcular un límite en un punto sustituimos en la expresión y obtenemos resultados como 0/0 ó ∞/∞. Para resolver estas indeterminaciones en el tema anterior hemos estudiado varios procedimientos para resolver esos límites, pero no son aplicables a todo tipo de funciones. Entonces para eso se utiliza esta regla, que dice lo siguiente:

Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Ejemplo: Ejercicio 1 página 310.

Ejercicios del 2 y 3 página 310.

II.3.2. Solucionario.

Realicé un solucionario de los ejercicios que íbamos a trabajar durante el tema, para que de esta forma los alumnos tuvieran material suficiente para estudiar.

II.3.3. Recursos de GeoGebra.

Para explicar la definición de derivada, recta tangente y recta normal hice dos recursos en GeoGebra.

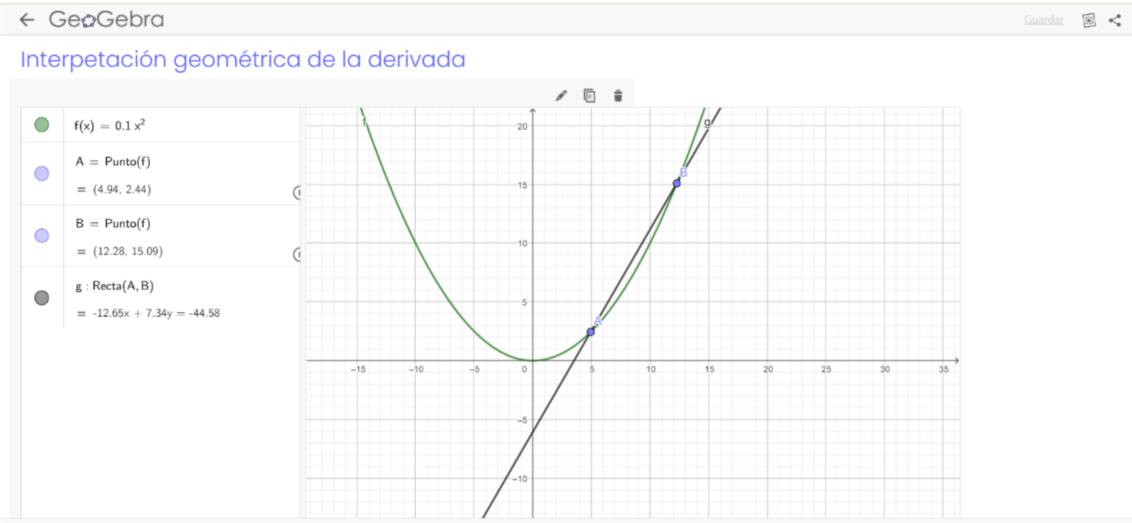


Imagen 31: Interpretación geométrica de la derivada.

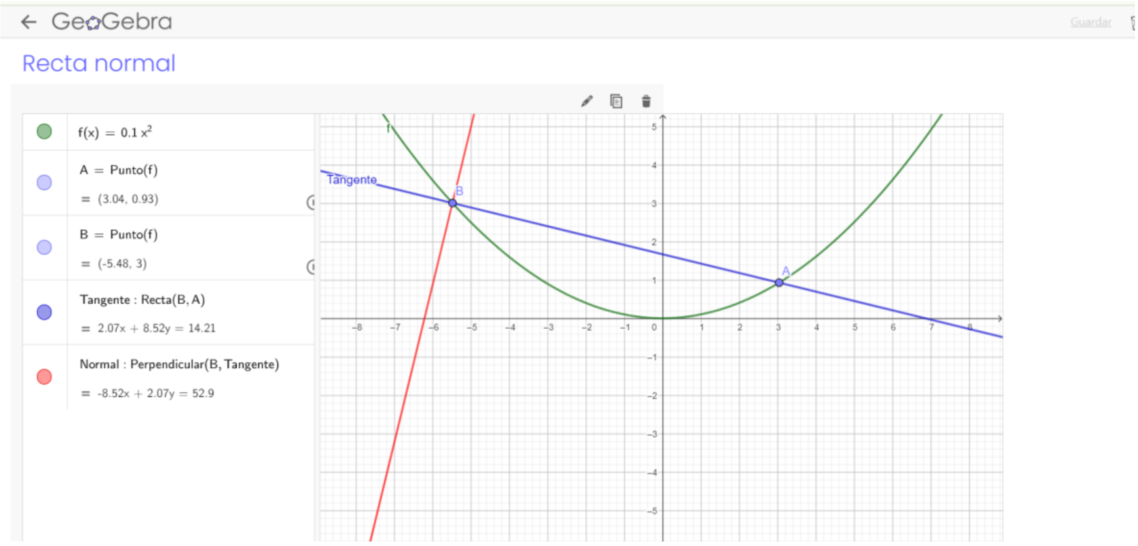


Imagen 32: Recta tangente y recta normal.

<u>Enlaces a los recursos de GeoGebra.</u>

- https://www.geogebra.org/m/w35av7sw
- https://www.geogebra.org/m/vfwqrtb6

1°BACHILLERATO C-T

SOLUCIONARIO

DERIVADAS Y APLICACIONES

1. Tasa de variación media.

Página 296

2. $y = x^2 - 8x + 12$

$f(1) = 5$ $\quad [1,2] \Rightarrow TVM([1,2]) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = \dfrac{0-5}{1} = -5$

$f(2) = 0$ $\quad [1,3] \Rightarrow TVM([1,3]) = \dfrac{-3-5}{3-1} = \dfrac{-8}{2} = -4$

$f(3) = -3$ $\quad [1,4] \Rightarrow TVM([1,4]) = \dfrac{-4-5}{4-1} = \dfrac{-9}{3} = -3$

$f(4) = -4$ $\quad [1,5] \Rightarrow TVM([1,5]) = \dfrac{-3-5}{5-1} = \dfrac{-8}{4} = -2$

$f(5) = -3$ $\quad [1,6] \Rightarrow TVM([1,6]) = \dfrac{0-5}{6-1} = \dfrac{-5}{5} = -1$

$f(6) = 0$ $\quad [1,7] \Rightarrow TVM([1,7]) = \dfrac{5-5}{7-1} = 0$

$f(7) = 5$ $\quad [1,8] \Rightarrow TVM([1,8]) = \dfrac{12-5}{8-1} = \dfrac{7}{7} = 1$

$f(8) = 12$

3. $y = x^2 - 8x + 12$ en $[1, 1+h]$

$f(1) = 5$

$f(1+h) = (1+h)^2 - 8(1+h) + 12 = 1 + h^2 + 2h - 8 - 8h + 12 = h^2 - 6h + 5$

$$TVM([1,1+h]) = \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{h^2-6h+5-5}{h} = \frac{h^2-6h}{h} = \frac{\cancel{h}(h-6)}{\cancel{h}} = h-6$$

$\left.\begin{array}{l} h=1 \rightarrow TVM([1,2]) = 1-6 = -5 \\ h=6 \rightarrow TVM([1,7]) = 6-6 = 0 \end{array}\right\}$ comprobación ejercicio 1.

2. Definición de derivada en un punto.

Ejemplos:

1) $f(x) = x+2$ en $a=1$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+3-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$f(1+h) = 1+h+2 = h+3$

$f(1) = 1+2 = 3$

2) $f(x) = 3x+1$ en $a=2$ (Para casa)

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h+7-7}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = 3$$

$f(2+h) = 3(2+h)+1 = 6+3h+1 = 3h+7$

$f(2) = 3\cdot 2+1 = 7$

3) $f(x) = x^2$ en $a=3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+6h+9-9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+6h}{h} = \underset{0/0}{\lim_{h\to 0}} \frac{\cancel{h}(h+6)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(h+6) = 6$$

$f(3+h) = (3+h)^2 = 9+h^2+6h$

$f(3) = 9$

4) $f(x) = x^2+3$ en $a=2$ (Para casa)

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h+7-7}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h}{h} \underset{0/0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} (h+4) = 4$$

$f(2+h) = (2+h)^2+3 = 4+h^2+4h+3 = h^2+4h+7$

$f(2) = 4+3 = 7$

5) $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 1$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \underset{0/0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{1+h-1}^{\cancel{h}}}{\cancel{h}(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2}$$

$f(1+h) = \sqrt{1+h}$

$f(1) = \sqrt{1} = 1$

Interpretación geométrica de la derivada.

Ejemplo: $f(x) = (2-x)^2$ en $x = 1$

Pendiente de $f(x)$ en $x=1$ es $f'(1)$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2-2h+1-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2-2h}{h} \underset{0/0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h-2)}{\cancel{h}} = -2$$

$f(1+h) = (2-1-h)^2 = (1-h)^2 = 1+h^2-2h$

$f(1) = 1$

Página 299

2. $y = \frac{1}{x}$ en $x=-2$ (Para casa)

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{-2+h}+\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cancel{2}-\cancel{2}+h}{2(-2+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{2\cancel{h}(-2+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{-4+2h} = \frac{-1}{4}$$

$f(-2+h) = \frac{1}{-2+h}$

$f(-2) = \frac{-1}{2}$

3. $y = -2x+4$ en $x=-3, x=0, x=4, x=7$. (Para casa)

- $f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h+10-10}{h} = -2$

  $f(-3+h) = -2(-3+h)+4 = 6-2h+4 = -2h+10$

  $f(-3) = 10$

- $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h+4-4}{h} = -2$

  $f(h) = -2h+4$

  $f(0) = 4$

- $f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = -2$
- $f'(7) = \lim_{h\to 0} \frac{f(7+h)-f(7)}{h} = -2$

Obtenemos el mismo resultado porque se trata de una recta y por la interpretación geométrica de la derivada es la pendiente de la recta tg y en este caso la recta tg y la recta coinciden y la pendiente de $y=-2x+4$ es -2.

3. Reglas de derivación. Tabla de derivadas.

Caso simple

Ejemplos: $f(x) = -7 \rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = \sqrt[3]{x} + x^6 = x^{1/3} + x^6 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 6x^5$

$f(x) = \log_6(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln(6)}$

$f(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3$

$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = \tan(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4x^3$

$f(x) = 5^x \rightarrow f'(x) = 5^x \ln 5$

$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$f(x) = 3x^4 + 8$
$\hookrightarrow f'(x) = 12x^3$

$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f'(x) = \cos x$

$$f(x) = x^7 \cdot 3^x \longrightarrow f'(x) = 7x^6 \cdot 3^x + x^7 \cdot 3^x \ln 3 = 3^x(7x^6 + x^7 \ln 3)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{\tan x} \longrightarrow f'(x) = \frac{e^x \cdot \tan x - e^x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(\tan x)^2}$$

Página 301

1. (Para casa)

a) $f(x) = x^5 \longrightarrow f'(x) = 5x^4$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \longrightarrow f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$ // Cociente $f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{1/3 - 1} = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} \longrightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{2/3 - 1} = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^4}}{x^2} = \frac{x^{3/2} \cdot x^{4/3}}{x^2} = \frac{x^{17/6}}{x^2} = x^{17/6 - 2} = x^{5/6} \longrightarrow f'(x) = \frac{5}{6} \cdot x^{5/6 - 1} = \frac{5}{6} x^{-1/6} = \frac{5}{6x^{1/6}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

Página 303

Piensa y practica.

2. $f(x) = 5x^2 + 7x - 2\sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = 10x + 7 - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

3. $f(x) = \sqrt{3x^3} \cdot e^x = 3x^{3/2} \cdot e^x \longrightarrow f'(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{x} \cdot e^x + \sqrt{3x^3} \cdot e^x$

$$(\sqrt{3x^3})' = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^3})' = \sqrt{3} \cdot (x^{3/2})' = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{x}$$

6. $f(x) = \frac{\log_2 x}{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x\ln 2} \cdot x - \log_2 x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln 2} - \log_2 x}{x^2}$

7. $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 3}{x^2} \longrightarrow f'(x) = \frac{(6x^2 - 5) \cdot x^2 - (2x^3 - 5x + 3) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{6x^4 - 5x^2 - 4x^4 + 10x^2 - 6x}{x^4} = \frac{2x^4 + 5x^2 - 6x}{x^4} = \frac{\cancel{x}(2x^3 + 5x - 6)}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2x^3 + 5x - 6}{x^3}$

8. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \longrightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3} - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$

9. $f(x) = \operatorname{arcosen}(x) \cdot (x + 3) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot (x + 3) + \operatorname{arcosen} x \cdot 1 = \frac{x + 3}{\sqrt{1 + x^2}} + \operatorname{arcosen} x$

10. $f(x) = \frac{\operatorname{arcosen}(x)}{\cos x} \longrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \cos x - \operatorname{arcosen}(x) \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1 + x^2}} + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{arcosen} x}{(\cos x)^2}$

11. $f(x) = \frac{\cancel{x^2} \cdot 5^x}{x^{\cancel{3}}} = \frac{5^x}{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{5^x \ln 5 \cdot x - 5^x \cdot 1}{x^2} = \frac{5^x \ln 5 \cdot x - 5^x}{x^2}$

Caso compuesto

Ejemplos:

1. $f(x) = (x^2+7x)^7 \longrightarrow f'(x) = 7(x^2+7x)^6 \cdot (2x+7) = (x^2+7x)^6 \cdot (14x+49)$

2. $f(x) = 2^{\text{sen}^3 x} \longrightarrow f'(x) = 2^{\text{sen}^3 x} \cdot \ln 2 \cdot 3\,\text{sen}^2 x \cdot \cos x$

3. $f(x) = \text{sen}\,5x^4 - 7^{x^2} \longrightarrow f'(x) = \cos(5x^4) \cdot 20x^3 - 7^{x^2} \ln 7 \cdot 2x$

4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)} \cdot \dfrac{1\cdot(\cancel{x}-1) - (\cancel{x}+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{(\cancel{x-1})}{(x+1)} \cdot \dfrac{-2}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \dfrac{-2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{-2}{(x^2-1)}$

5. $f(x) = e^{\ln x} \longrightarrow f'(x) = e^{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x}$

Página 304

Piensa y practica.

12. $f(x) = \text{sen}(x^2-5x+7) \rightarrow f'(x) = \cos(x^2-5x+7)\cdot(2x-5)$

13. $f(x) = (5x+3)^{2/3} \rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3}(5x+3)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x+3}}$

14. $f(x) = \text{sen}^2\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow f'(x) = 2\,\text{sen}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 3 = 6\,\text{sen}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$

15. $f(x) = \dfrac{\log x^2}{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{\frac{1}{\cancel{x^2}\ln 10}\cdot 2\cancel{x}\cdot x - \log x^2 \cdot 1}{x^2} = \dfrac{\frac{2x}{\ln 10} - \log x^2}{x^2}$

16. $f(x) = \cos(3x-\pi) \rightarrow f'(x) = -\text{sen}(3x-\pi)\cdot 3 = -3\,\text{sen}(3x-\pi)$

17. $f(x) = \sqrt{1+2x} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+2x}} \cdot \cancel{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

18. $f(x) = x\cdot e^{2x+1} \longrightarrow f'(x) = 1\cdot e^{2x+1} + x\cdot e^{2x+1}\cdot 2 = e^{2x+1} + 2xe^{2x+1} = e^{2x+1}(1+2x)$

19. $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos(x^2+1)\cdot 2x\cdot\sqrt{1-x^2} - \text{sen}(x^2+1)\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\cdot -\cancel{2}x}{(\cancel{\sqrt{1-x^2}})^{\cancel{2}}} = \dfrac{2x\cos(x^2+1)\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{\text{sen}(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$ (podríamos simplificar)

4. Aplicaciones de las derivadas.

Recta tangente

Ejemplo: $f(x) = 2x^2 - 3x$ en $x = -2$ $\rightarrow f'(x) = 4x - 3$

$m = f'(-2) = 4\cdot(-2) - 3 = -8 - 3 = -11$ $\quad f(-2) = 2\cdot 4 - 3\cdot(-2) = 8 + 6 = 14$

Ecuación recta tg
$$y - f(-2) = m(x+2)$$
$$y - 14 = -11(x+2)$$
$$y = -11x - 22 + 14$$
$$\boxed{y = -11x - 8}$$

Ejemplo: Punto de la curva de $f(x) = x^2+x+2$ recta tg paralela a $g(x) = x$

$m_1 = f'(x) = 2x+1$

$m_2 = 1 \rightarrow$ pendiente de $g(x)$

como son paralelos $m_1 = m_2$ $\Rightarrow 2x+1 = 1$

$\boxed{x=0}$ En $x=0$ la recta tg de $f(x)$ es paralela a $g(x)=x$.

Recta normal

Ejemplo: $f(x) = 2x^2 - 3x$ en $x = -2$ $\to f(-2) = 14$

$f'(x) = 4x - 3$ $\quad f'(-2) = -8 - 3 = -11$

$m = \frac{-1}{-11} = \frac{1}{11}$ $\Rightarrow$ Ecuación recta normal $\quad y - f(-2) = m(x+2)$

$$\boxed{y - 14 = \frac{1}{11}(x+2)}$$

Ejemplo: Punto de $f(x) = x^2 + x + 2$ recta tg es $\perp$ a $g(x) = x$.

$\left.\begin{array}{l} m_1 = f'(x) = 2x+1 \\ m_2 = 1 \end{array}\right\}$ $\underbrace{m_1 = \frac{-1}{m_2}}_{\text{perpendicular}}$ $\Rightarrow 2x+1 = \frac{-1}{1}$; $2x+1 = -1$

$2x = -2$

$x = -1$ En $x = -1$, la recta tg a $f(x)$ es $\perp$ a $g(x) = x$.

Página 323

14. a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en $x = 2$ $\quad f(2) = 4 - 10 + 6 = 0$

Recta tg $\to f'(x) = 2x - 5$ $\Rightarrow m = f'(2) = 4 - 5 = -1$ $\Rightarrow$ Ec. recta tg $\quad y = -1(x-2)$

$$\boxed{y = -x + 2}$$

Recta normal $\to m = \frac{-1}{-1} = 1$ $\Rightarrow$ Ec. recta normal $\quad y = 1(x-2)$

$$\boxed{y = x - 2}$$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 3$ $\quad f(3) = 2$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $\quad f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ Ec. recta tg $\boxed{y - 2 = \frac{1}{4}(x-3)}$ $\to y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

Ec. recta normal $\quad m = \frac{-1}{1/4} = -4$ $\Rightarrow \boxed{y - 2 = -4(x-3)}$ $\to y = -4x + 14$

c) $f(x) = \frac{2-x}{x^3}$ en $x = -1$ $\quad f(-1) = \frac{2-(-1)}{(-1)^3} = \frac{3}{-1} = -3$

$f'(x) = \frac{-x^3 - (2-x)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-x^3 - 6x^2 + 3x^3}{x^6} = \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{\cancel{x^2}(2x-6)}{x^{\cancel{6}\,4}} = \frac{2x-6}{x^4}$

$f'(-1) = \frac{2\cdot(-1) - 6}{1} = -2 - 6 = -8$

Ec. recta tg $\Rightarrow \boxed{y + 3 = -8(x+1)}$ $\to y = -8x - 11$

Ec. recta normal $\to m = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$ $\Rightarrow \boxed{y + 3 = \frac{1}{8}(x+1)}$ $\to y = \frac{1}{8}x - \frac{23}{8}$

d) $f(x) = \ln x$ en $x = e^2$ $\quad f(e^2) = \ln e^2 = 2\ln e = 2$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$

Ec. recta tg $\Rightarrow \boxed{y - 2 = \frac{1}{e^2}(x - e^2)}$ $\quad$ Ec. recta normal $\Rightarrow \boxed{y - 2 = -e^2(x - e^2)}$

$\hookrightarrow y = \frac{1}{e^2}x + 1$ $\quad$ $\hookrightarrow y = -e^2x + e^4 + 2$

e) $f(x) = \text{Sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ en $x = \frac{\pi}{3}$ $\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ec. recta tg $\Rightarrow \boxed{y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$ $\qquad$ Ec. recta normal $\Rightarrow \boxed{y - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$

15. Puntos pendiente recta tg = 2

a) $f(x) = x^2 - 2x \qquad f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow 2x - 2 = 2 \,;\; x = 2$

b) $f(x) = \frac{x}{x+2} \qquad f'(x) = \frac{1\cdot(x+2) - x\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{2}{(x+2)^2} = 2$

$2 = 2(x+2)^2$

$2 = 2(x^2 + 4 + 4x)$

$2x^2 + 8x + 6 = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}}$

c) $f(x) = 4\sqrt{x+3}$

$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2}{\sqrt{x+3}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \Rightarrow (2)^2 = \left(2\sqrt{x+3}\right)^2$

$4 = 4(x+3)$

$4 = 4x + 12 \Rightarrow 4x + 8 = 0$

$\boxed{x = -2}$

d) $f(x) = \ln(4x - 1)$

$f'(x) = \frac{4}{4x-1} \Rightarrow \frac{4}{4x-1} = 2 \,;\; 4 = 8x - 2$

$0 = 8x - 6 \Rightarrow 6 = 8x \,;\; x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\boxed{x = \frac{3}{4}}$

16. a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ paralela $2x + y + 1 = 0 \,;\; y = -2x - 1$

$f'(x) = 2x + 4 \Rightarrow 2x + 4 = -2$

$2x = -6$

$\boxed{x = -3} \quad f(-3) = -2$

$\boxed{y + 2 = -2(x+3)}$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ paralela $y = 6x + 10$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \qquad 3x^2 - 3 = 6 \,;\; 3x^2 = 9 \,;\; x^2 = 3 \,;\; \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$

$x = \sqrt{3} \quad f(\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 6(x - \sqrt{3})}$

$x = -\sqrt{3} \quad f(-\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 6(x + \sqrt{3})}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ paralela a $5x - y = 0 \quad y = 5x$

$f'(x) = \frac{1(x+2) - (x-3)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{\cancel{x} + 2 - \cancel{x} + 3}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{5}{(x+2)^2} = 5$

$\cancel{5} = \cancel{5}(x+2)^2$

$(x+2)^2 = 1$

$x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$

$x + 2 = -1 \Rightarrow x = -3$

$x = -1,\; f(-1) = -4 \rightarrow \boxed{y = 5(x+1) - 4}$

$x = -3,\; f(-3) = 6 \rightarrow \boxed{y = 5(x+3) + 6}$

17. Recta tg horizontal $m=0$ (Igual que ejercicio 16 pero igualando a 0)

Página 324

33. a) $f(x) = x^2+6x+11$

$f'(x) = 2x+6$ $\qquad 2x+6=0$; $\boxed{x=-3}$ → Vértice de la parábola.

b) Curiosidad vista en la teoría.

35. $f(x) = 3x^2-2x+5$ $\quad g(x) = x^2+6x$ rectas tg paralelas.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 6x-2 \\ g'(x) = 2x+6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6x-2 = 2x+6 \\ 4x = 8 \\ \boxed{x=2} \end{array}$$

→ En $x=2$ son paralelas.

Ec. recta tg en $f(x)$ ⇒ $\boxed{y-13 = 10(x-2)}$

$f(2) = 13$

$f'(2) = 10$

Ec. recta tg de $g(x)$ ⇒ $\boxed{y-16 = 10(x-2)}$ → $y = 10x-4$

$g(2) = 16$

$g'(2) = 10$

36. $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ $\quad$ f recta tg horizontal en $x=-4$ y $x=0$ y pase por $(1,1)$

• Recta tg horizontal en $x=-4$ $\quad f'(-4) = 0$ ⇒ $\boxed{48-8a+b=0}$

$f'(x) = 3x^2+2ax+b$

• Recta tg horizontal en $x=0$ $\quad f'(0) = 0$; $\boxed{b=0}$

• Pase por $(1,1)$

$f(1) = 1$; $f(1) = \boxed{1+a+b+c=1}$

$b=0$

$$\left\{\begin{array}{l} 48-8a=0 \ ; \ -8a=-48 \rightarrow a=6 \\ 1+a+c=1 \Rightarrow 1+6+c=1 \quad \boxed{c=-6} \end{array}\right.$$

$\boxed{f(x) = x^3+6x^2-6}$ Solución.

Estudio de funciones

Ejemplo: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$

Monotonía $f(x) = x^2$ $\qquad$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 2x = 0$ ⇒ $2x = 0$; $\boxed{x=0}$ → posible máximo / mínimo

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘	∪	↗

↳ En $x=0$ hay un mínimo.

Monotonía $g(x) = x^3$ $\qquad$ Dom $g(x) = \mathbb{R}$

$g'(x) = 3x^2 = 0$; $3x^2 = 0$; $\boxed{x=0}$ → Posible máximo / mínimo.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$g'(x)$	$+$		$+$
$g(x)$	↗	↑	↗

No es ni máximo ni mínimo.

Ejemplo: Monotonía de $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad \text{Dom} f(x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = 0 \; ; \; -1 = 0 \longrightarrow$ No hay posibles máximos o mínimos

Veamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	↘	↘

Esto será una asíntota vertical (punto conflictivo del dominio)

Curiosidad $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \; ; \; 2ax = -b \; ; \; \boxed{x = \frac{-b}{2a}}$ (fórmula del vértice de una parábola)

Página 323

19. a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ $\qquad \text{Dom} f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 8 = 0 \; ; \; 2x = 8 \; ; \; \boxed{x = 4}$ posible máx / mín

	$(-\infty, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

$\cup$

Crecimiento: $(4, +\infty)$

Decrecimiento: $(-\infty, 4)$

Mínimo $(4, -13)$

b) $f(x) = 12x - 3x^2$ $\qquad \text{Dom} f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 12 - 6x = 0 \; ; \; 6x = 12 \; ; \; \boxed{x = 2}$ posible max/min

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

$\cap$

Crecimiento: $(-\infty, 2)$

Decrecimiento: $(2, +\infty)$

Máximo $(2, 12)$

c) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2$ $\qquad \text{Dom} f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = x^2 - 6x = 0 \; ; \; x^2 - 6x = 0 \; ; \; x(x-6) = 0 \to \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array} \right\}$ posibles max / min

	$(-\infty, 0)$	$(0, 6)$	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

$\cap \qquad \cup$

Crecimiento: $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$

Decrecimiento: $(0, 6)$

Máximo $(0, 0)$ $\qquad$ Mínimo $(6, -36)$

d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 = 0 \longrightarrow \boxed{x = -2}$ posible max / min

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗

Crecimiento: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

No tiene ni máximos ni mínimos

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ $\quad$ $Dom f(x) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$; $x^2 - 2x = 0$; $x(x-2) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ posibles max/min

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗
	$\cap$			$\cup$

Crecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decrecimiento: $(0,1) \cup (1,2)$

Mínimo $(2,4)$ $\quad$ Máximo $(0,0)$

f) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ $\quad$ $Dom f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f'(x) = \dfrac{1\cdot(x+2) - (x-1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{\cancel{x}+2-\cancel{x}+1}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2} = 0$; $3 = 0$ No hay ni máximos ni mínimos.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,+\infty)$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	↗	↗

Asíntota vertical.

Crecimiento: $(-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$

20. a) $y = x^3 + 3x$ $\quad$ $Dom\, y = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 + 3 = 0$; $3x^2 = -3$ $\Rightarrow$ No hay posibles max/min

$x^2 = -1$ $\nexists$

$y' > 0$ para cualquier valor de x $\Rightarrow$ creciente en $\mathbb{R}$.

b) $y = \dfrac{1}{x}$ ejemplo.

c) $y = \sqrt{x}$ $\quad$ $Dom\, y = [0, +\infty)$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$; $1 = 0$ no hay posibles max/min

$y' > 0$ para cualquier $x \in [0,+\infty)$ $\Rightarrow$ siempre es creciente en $[0,+\infty)$

d) $y = \ln x$ $\quad$ $Dom\, y = (0,+\infty)$

$y' = \dfrac{1}{x} = 0$ $\quad$ No hay posibles max/min

$y' > 0$ para $x \in (0,+\infty)$ $\Rightarrow$ siempre es creciente en $(0,+\infty)$

22. a) $f' > 0$ en $(-\infty,-1)$, $f' < 0$ en $(-1,\infty)$

b) $f' > 0$ en $(-\infty,0)$, $f' < 0$ en $(0,\infty)$

c) $f' > 0$ en $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, $f' < 0$ en $(-1,1)$

Curvatura

Ejemplos: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$

Curvatura $f(x)$ $\quad$ $f'(x) = 2x$; $f''(x) = 2 = 0$ $\rightarrow$ No tiene posibles puntos de inflexión.

Veamos si es cóncava hacia arriba o hacia abajo:

$f''(x) = 2 > 0$ para cualquier x $\Rightarrow$ $f(x)$ cóncava hacia arriba.

Curvatura $g(x)$ $\quad$ $g'(x) = 3x^2$, $g''(x) = 6x = 0$; $\boxed{x=0}$ posible pto de inflexión

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

$x=0$ punto de inflexión porque pasa de ser cóncava hacia abajo a ser cóncava hacia arriba

Representación de funciones

Página 312

1. a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$

1) $Dom f(x) = \mathbb{R}$

2) Puntos de corte

Eje x: $y = 0$; $0 = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$

$x = -2'15$ → $(-2'15, 0)$

$x = 3'04$ → $(3'04, 0)$

Eje y: $x = 0$ $y = 8$ $(0, 8)$

3) Asíntotas → No hay (las funciones polinómicas no tienen asíntotas)

4) Monotonía, máximos y mínimos

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0$ → $x = 2$, $x = -1$ posibles máximos/mínimos.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

máximo (en -1), mínimo (en 2).

Crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

Decrecimiento: $(-1, 2)$

$M(-1, 15)$ $m(2, -12)$

5) Curvatura y puntos de inflexión

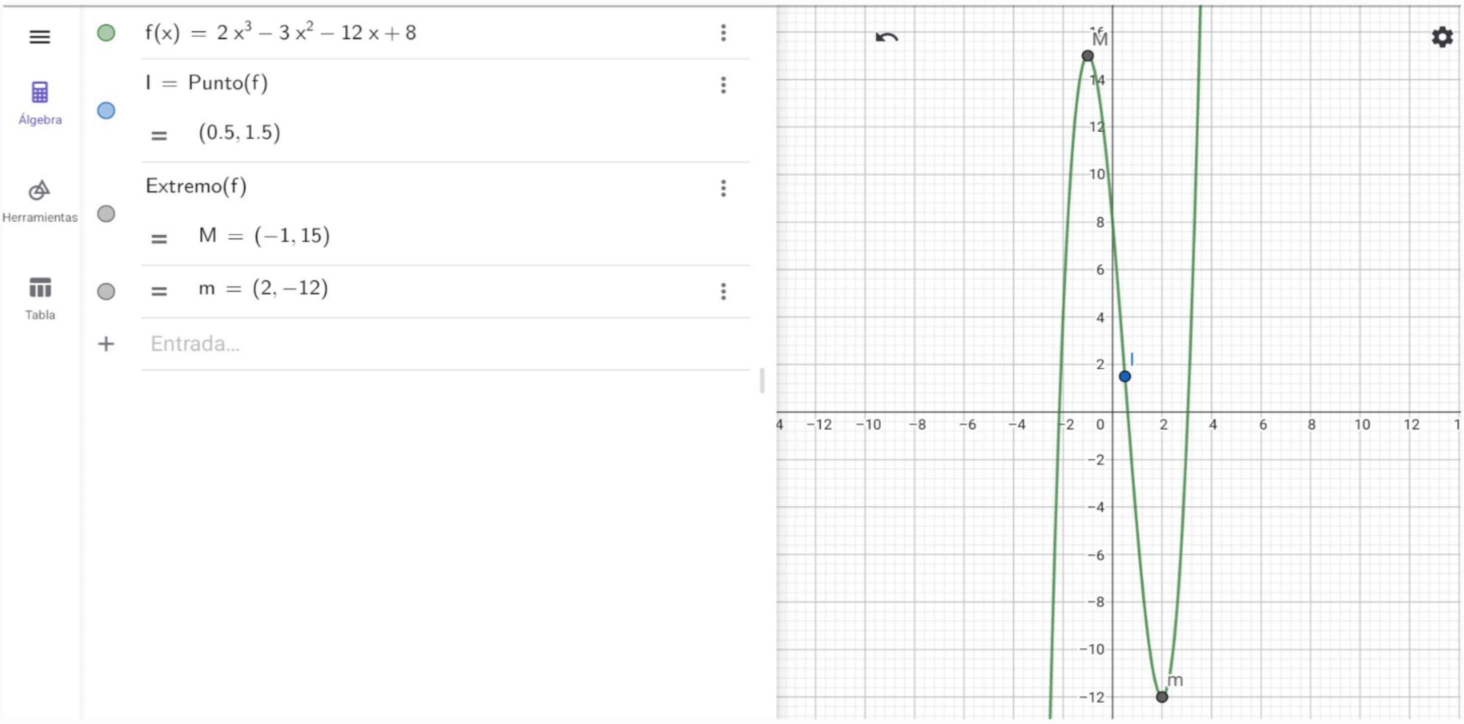
$f''(x) = 12x - 6 = 0$; $12x = 6$; $\boxed{x = 1/2}$ posible punto de inflexión

	$(-\infty, 1/2)$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	∩	∪

punto de inflexión (en $1/2$)

$I(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

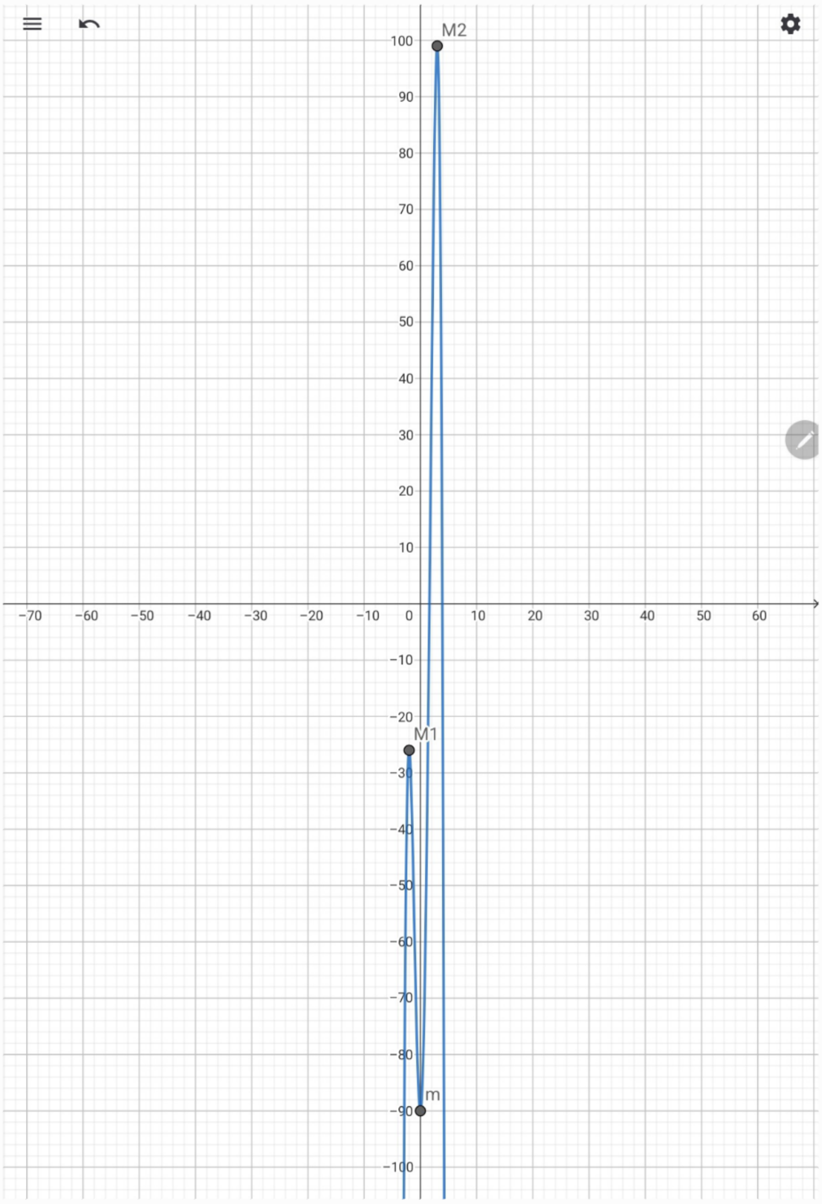
6. Representación

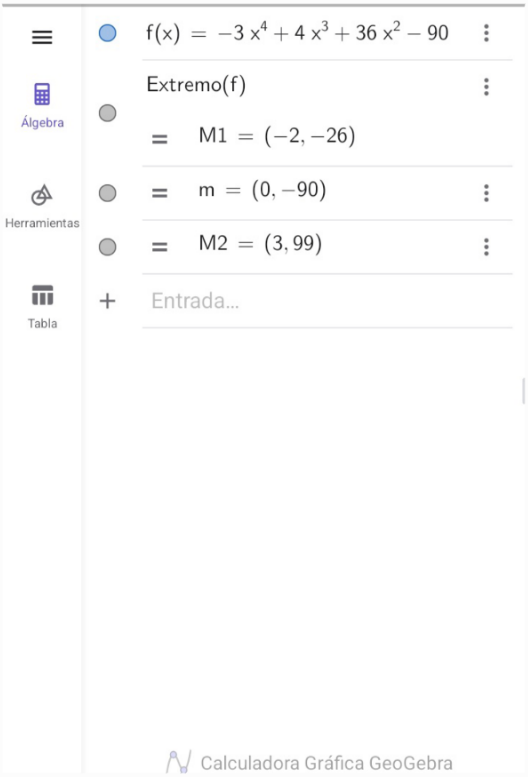


b) $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$

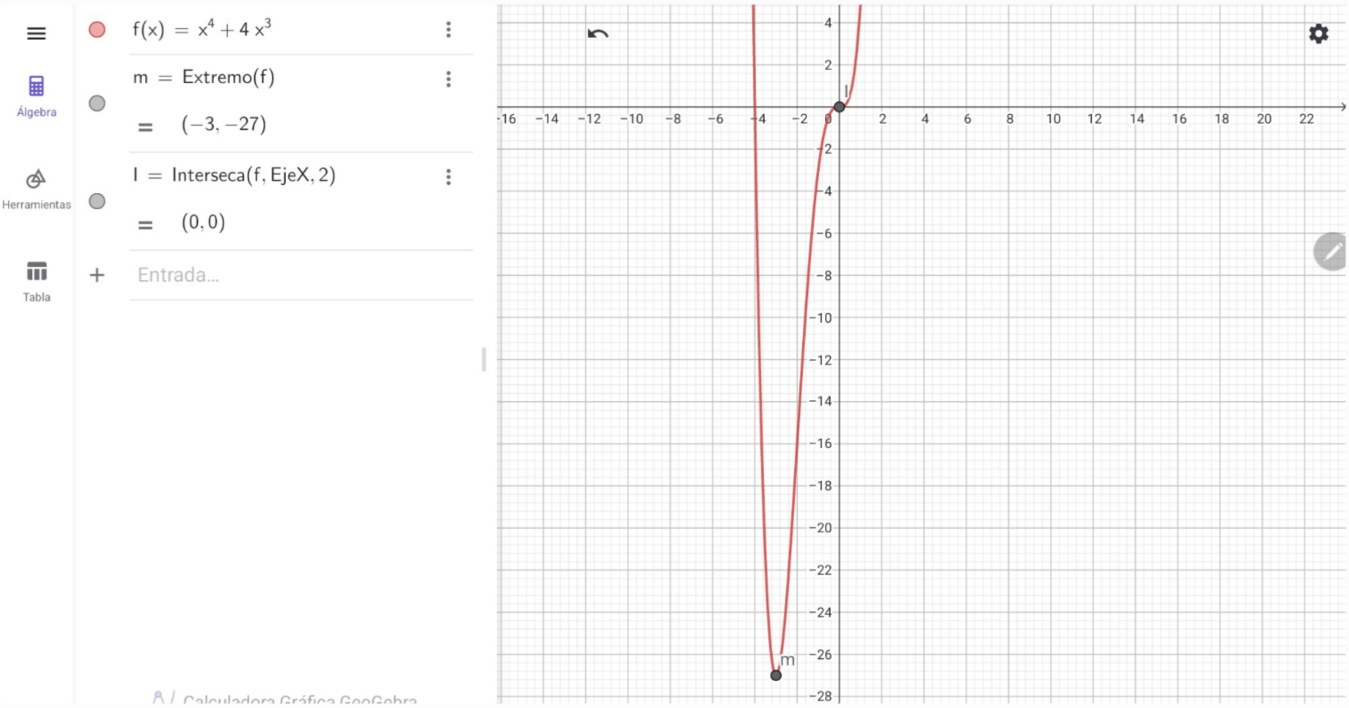
Estudio análogo al anterior.

Solución:





c) $f(x) = x^4 + 4x^3$



Página 314

2.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+11}{x+1}$

1) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) Ptos corte:

Eje x: $y=0$ $\quad x^2+3x+11=0$ $\nexists$ → No corta al eje x

Eje y: $x=0$ $\quad y=11$ $\quad (0,11)$

3) Asíntotas

AV] $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+11}{x+1} = \frac{9}{0} = \pm\infty$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{9}{0^-} = -\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{9}{0^+} = +\infty$ $\Big\}$ AV en $x=-1$

AH]

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+11}{x+1} = \infty$; $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3x+11}{x+1} = \infty$ No hay AH entonces comprobamos las oblicuas.

AO]

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+11}{x(x+1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+11}{x^2+x}\right) = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+11}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+3x+11-\cancel{x^2}-x}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+11}{x-1}\right) = 2$$

Asíntota oblicua $y = x+2$

4) Monotonía, máximos y mínimos.

$$f'(x) = \frac{(2x+3)\cdot(x+1) - (x^2+3x+11)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x-11}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2} = 0$$

$x^2+2x-8=0$

$x=2$, $x=-4$ } posibles max/min.

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

∩ en $x=-4$, ∪ en $x=2$

$M(-4,-5) \rightarrow$ máximo

$m(2,7) \rightarrow$ mínimo

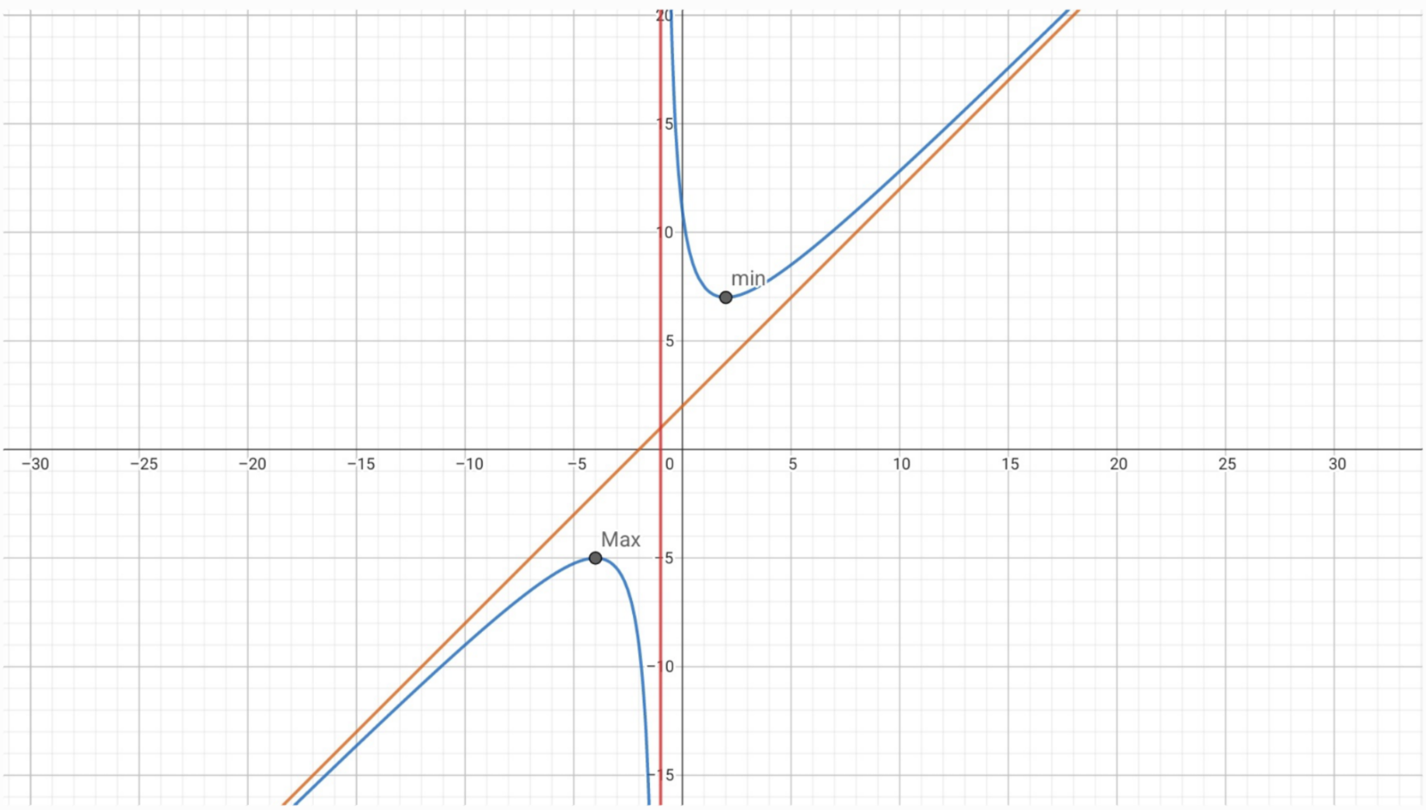
5) Curvatura y puntos de inflexión

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^{\cancel{2}} - (x^2+2x-8)\cdot 2\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{\cancel{2x^2}+\cancel{2x}+\cancel{2x}+2-\cancel{2x^2}-\cancel{4x}+16}{(x+1)^3} = \frac{18}{(x+1)^3} = 0$$

$18 \neq 0 \rightarrow$ No hay ptos de inflexión.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	∩ concava hacia abajo	∪ concava hacia arriba.

6) Representación.



b) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$

1) $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) Puntos de corte

Eje x: $y=0$; $x^2+3x=0$; $x(x+3)=0$ → $x=0$ $(0,0)$; $x=-3$ $(-3,0)$

Eje y: $x=0$; $y=0$ $(0,0)$

3) Asíntotas

AV) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+3x}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+3x}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

AV en $x=-1$

AH) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+3x}{x+1} = \infty$ No hay

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3x}{x+1} = \infty$ No hay

AO) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+3x}{x(x+1)} \right) = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+3x}{x+1} - x \right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\cancel{x^2}+3x-\cancel{x^2}-x}{x+1} \right) = 2$

AO en $y = x+2$.

4) Monotonía, máximos y mínimos

$$f'(x) = \frac{(2x+3)\cdot(x+1) - (x^2+3x)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+\cancel{3x}+3-x^2-\cancel{3x}}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} = 0 \; ; \; x^2+2x+3=0$$

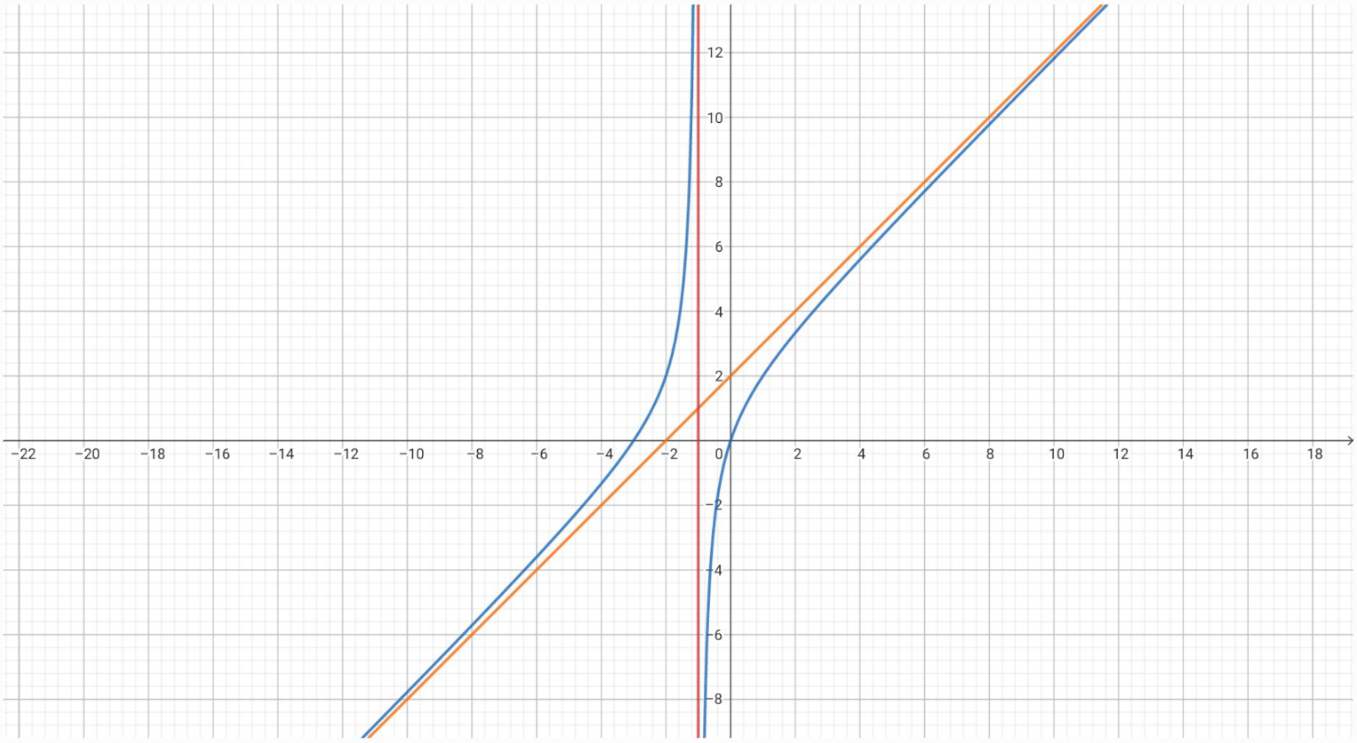
No tiene raíces reales ⇒ No tiene ni max/min.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	↗	↗

5) Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{-4}{(x+1)^3} = 0$; $-4 \neq 0$ → No tiene posibles puntos de inflexión

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f''(x)$	+	−
$f(x)$	∪	∩



c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

1) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

2) Puntos de corte

Eje x: $y=0$; $x^2=0$; $x=0$ $(0,0)$

Eje y: $x=0$ $y=0$ $(0,0)$

3) Asíntotas

AV) No hay

AH) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$ AH en $y=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$

Como hay AH, entonces no hay AO.

4) Monotonía, máximos y mínimos.

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{\cancel{2x^3}+2x-\cancel{2x^3}}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x+1)^2} = 0$; $2x=0$; $\boxed{x=0}$ posible max/min

0

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f''(x)$	↘	↗

$\cup$

m $(0,0)$ → mínimo

5) Curvatura y puntos de inflexión

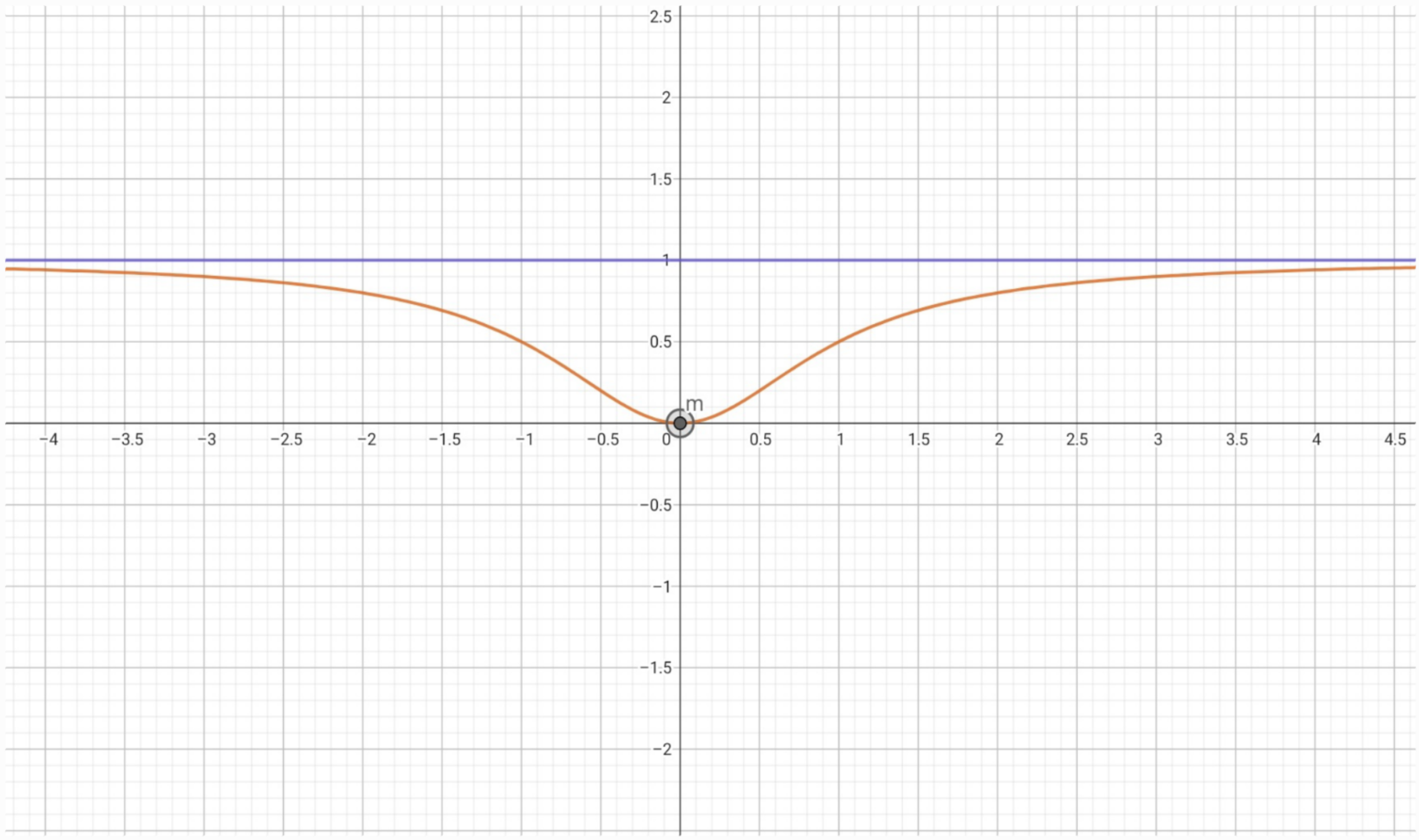
$$f''(x) = \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3} = 0 \quad ; \quad -6x^2+2=0$$

$$6x^2 = 2 \ ; \ x^2 = \frac{2}{6} \ ; \ \boxed{x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}}$$ posibles ptos de inflexión

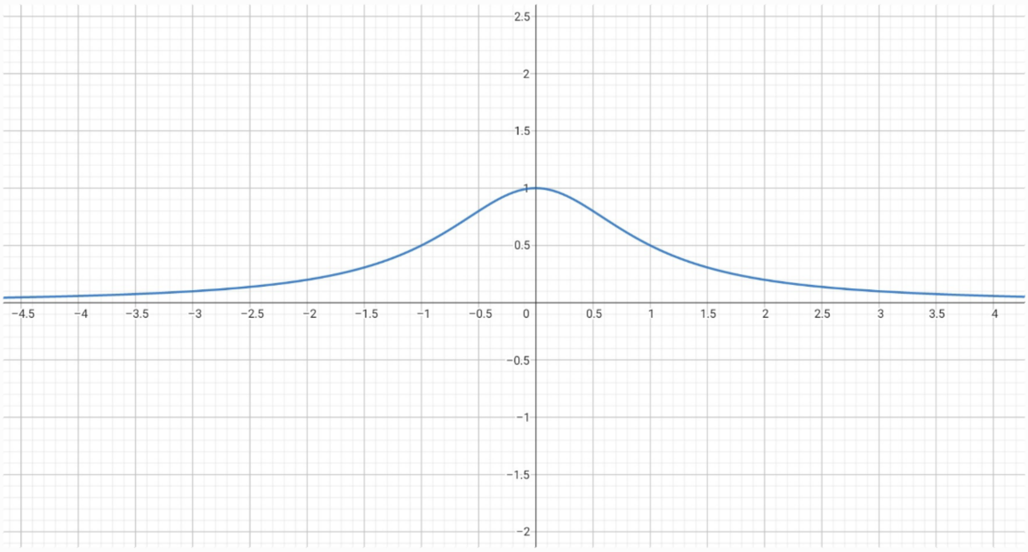
	$(-\infty, -1/\sqrt{3})$	$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	$(1/\sqrt{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

$-1/\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$ ↑ puntos de inflexión

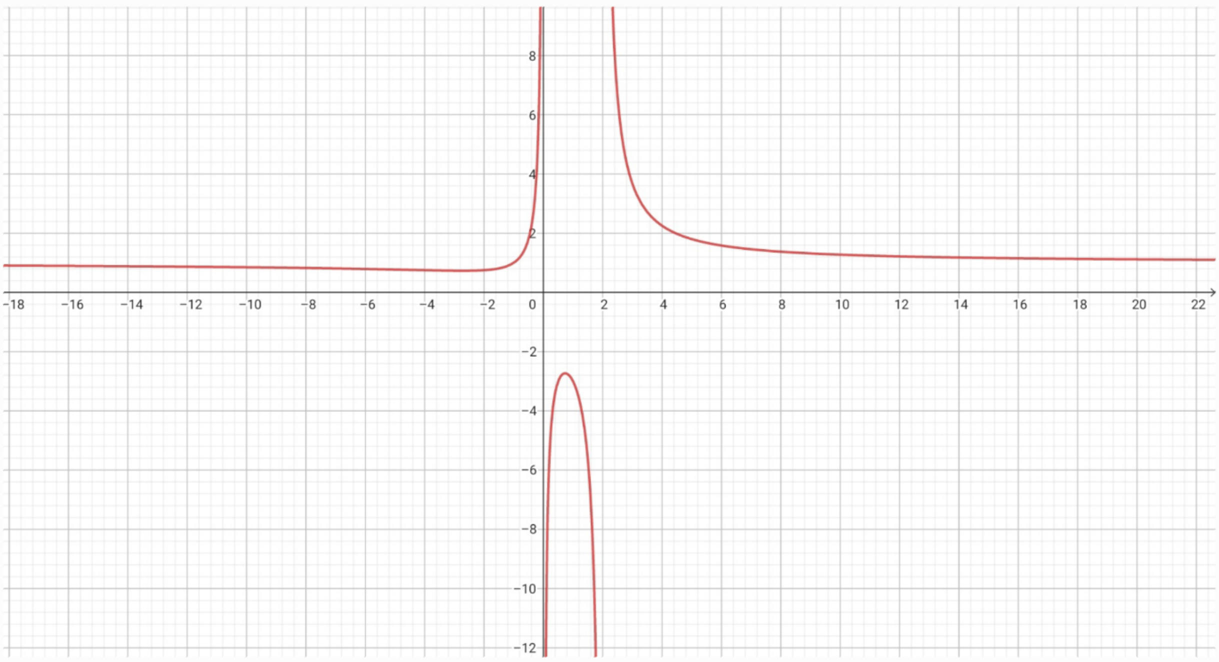
6) Representación



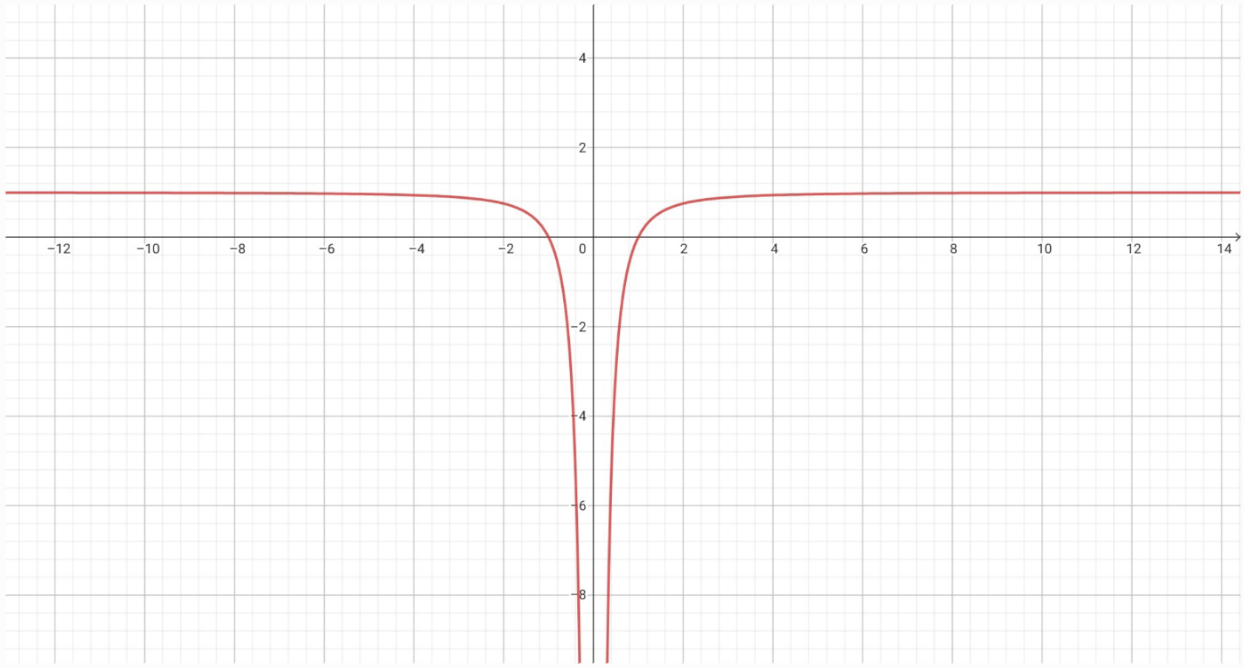
d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$



e) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$

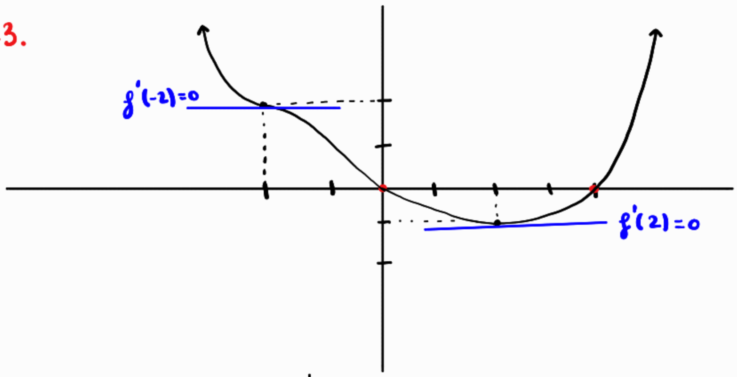


f) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

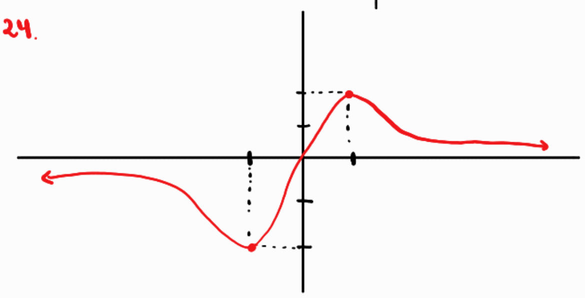


21. Similar a los anteriores.

23.



24.



25. a) 1) Dom $= \mathbb{R}$ / No tiene asíntotas

2) Dom $= \mathbb{R}$ / No tiene asíntotas

3) Dom $= \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$ / AV en $x=-4$ y $x=4$

4) Dom $= \mathbb{R}$ / AO en $y=x+2$, AV en $x=0$

b) 1) Ptos tg horizontal $(-2,-5), (3,2)$ / Crecimiento: $(-2,3)$ / Decrecimiento: $(-\infty,-2) \cup (3,+\infty)$ / Máximo $(3,2)$ / Mínimo $(-2,5)$

2) Ptos tg horizontal $(-2,2), (2,-1)$ / Crecimiento: $(2,+\infty)$ / Decrecimiento: $(-\infty,2)$ / Mínimo $(2,-1)$

3) Ptos tg horizontal $(-1,0)$ / Crecimiento: $(4,+\infty)$ / Decrecimiento: $(-\infty,-4) \cup (-4,4)$

4) Ptos tg horizontal $(-1,-4)$ / Crecimiento: $(-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$ / Máximo $(-1,-4)$ /

28.

39 y 41 (Hemos hecho similares)

Página 326

66. Continuidad y derivabilidad.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Continuidad en $a = 2$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -2 \cdot 2 + 5 = 1 \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 - 2x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} -2x + 5 = -4 + 5 = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1 \end{array}\right\} \text{continua en } a = 2$$

La función es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad en $a = 2$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 2 \cdot 2 - 2 = 4 - 2 = 2 \\ f'(2^+) = -2 \end{array}\right\} f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow \nexists f'(2)$$

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ $\qquad g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Continuidad en $a = 3$

$$\left.\begin{array}{l} g(3) = \sqrt{3 - 2} = \sqrt{1} = 1 \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} 2x - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x - 2} = \sqrt{1} = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 3} g(x) = 1 \end{array}\right\} \text{continua en } a = 3$$

$g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad $a = 3$

$$\left.\begin{array}{l} g'(3^-) = 2 \\ g'(3^+) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} g'(3^-) \neq g'(3^+) \Rightarrow \nexists g'(3) \Rightarrow g(x) \text{ derivable } \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

c) $h(x)=\begin{cases} e^x+2 & \text{si } x\le 0 \\ x^2+x+3 & \text{si } x>0 \end{cases}$ $\qquad h'(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ 2x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

Continuidad $a=0$

$h(0)=3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} e^x+2=3 \\ \lim_{x\to 0} x^2+x+3=3 \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} h(x)=3 \Big\} \text{ h(x) continua en } a=0$$

h(x) continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad en $a=0$

$$\left.\begin{array}{l} h'(0^-)=1 \\ h'(0^+)=1 \end{array}\right\} h'(0^-)=h'(0^+) \Rightarrow h'(0)=1 \Rightarrow h(x) \text{ derivable en } a=0$$

h(x) derivable en $\mathbb{R}$.

67. ¿m y n para que sea derivable?

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+m & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+nx & \text{si } x>2 \end{cases}$ $\qquad f'(x)=\begin{cases} 2x-5 & \text{si } x<2 \\ -2x+n & \text{si } x>2 \end{cases}$

Derivabilidad en $a=2$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=2\cdot 2-5=-1 \\ f'(2^+)=-4+n \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable} \Rightarrow \begin{array}{l} -1=-4+n \\ -1+4=n \\ \boxed{n=3} \end{array}$$

Como derivable implica continua $\Rightarrow$ Estudiamos continuidad

Continuidad en $a=2$

$f(2)=4-10+m=-6+m$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} x^2-5x+m=-6+m \\ \lim_{x\to 2^+} -x^2+nx=-4+2n \end{array}\right\} \begin{array}{l} -6+m=-4+2n \\ \downarrow n=3 \\ -6+m=-4+6 \\ -6+m=2 \\ \boxed{m=8} \end{array}$$

Solución: Para que sea derivable $m=8$ y $n=3$

b) $g(x)=\begin{cases} mx^2+nx-3 & \text{si } x<1 \\ 2nx-4 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$ $\qquad g'(x)=\begin{cases} 2mx+n & \text{si } x<1 \\ 2n & \text{si } x>1 \end{cases}$

Derivabilidad en $a=1$

$$\left.\begin{array}{l} g'(1^-)=2m+n \\ g'(1^+)=2n \end{array}\right\} \text{para que sea derivable } 2m+n=2n \quad \boxed{2m=n}$$

Derivable $\Rightarrow$ Continua

Continuidad en $a = 1$

$f(1) = 2n - 4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} mx^2 + nx - 3 = m + n - 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2nx - 4 = 2n - 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} m + n - 3 = 2n - 4 \\ \boxed{m = n - 1} \end{array}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2m = n \\ m = n - 1 \end{cases} > \begin{array}{l} 2(n-1) = n \\ 2n - 2 = n \\ \boxed{n = 2} \end{array}$$

$n = 2 \rightarrow \boxed{m = 1}$

Para que sea derivable $m = 1$ y $n = 2$

c) $h(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \leq 0 \\ mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad h'(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2 & \text{si } x < 0 \\ m & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Derivabilidad en $a = 0$

$$\left.\begin{array}{l} h'(0^-) = 3 \cdot (0-1)^2 = 3 \\ h'(0^+) = m \end{array}\right\} \boxed{m = 3}$$

Continuidad en $a = 0$

$h(0) = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (x-1)^3 = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} mx + n = n \end{array}\right\} \boxed{n = -1}$$

Para que sea derivable $m = 3$ y $n = -1$.

d) $j(x) = \begin{cases} mx^2 + 3x & \text{si } x < -2 \\ x^2 - nx - 4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$ $\qquad j'(x) = \begin{cases} 2mx + 3 & \text{si } x < -2 \\ 2x - n & \text{si } x > -2 \end{cases}$

Derivabilidad en $a = -2$

$$\left.\begin{array}{l} j'(-2^-) = -4m + 3 \\ j'(-2^+) = -4 - n \end{array}\right\} \begin{array}{l} -4m + 3 = -4 - n \\ \boxed{-4m = -n - 7} \end{array}$$

Continuidad en $a = -2$

$j(-2) = 2n$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} mx^2 + 3x = 4m - 6 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} x^2 - nx - 4 = 2n \end{array}\right\} \boxed{4m - 6 = 2n}$$

Resolvemos: $\begin{cases} -4m = -n - 7 \\ 4m - 6 = 2n \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -4\cancel{m} + n = -7 \\ 4\cancel{m} - 2n = 6 \\ \hline -n = -1 \\ \boxed{n = 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -4 \cdot m = -1 - 7 \\ -4m = -8 \\ \boxed{m = 2} \end{array}$$

Para que $j(x)$ sea derivable $m = 2$ y $n = 1$.

II.3.4. Ejercicios evaluables.

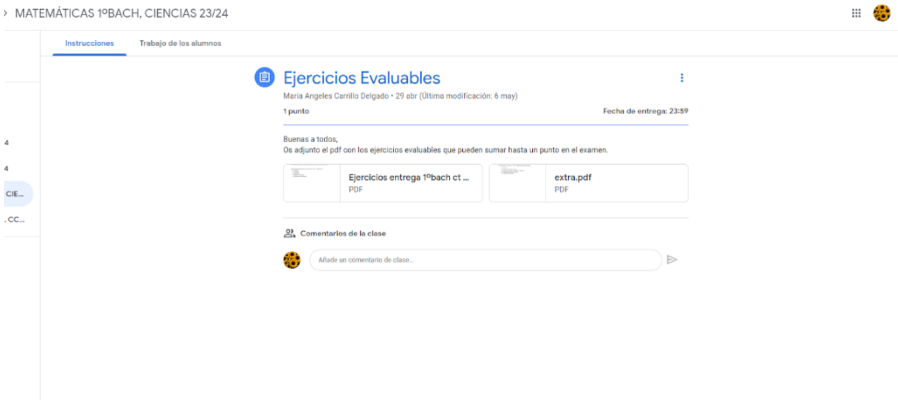


Imagen 33: Ejercicios evaluables.

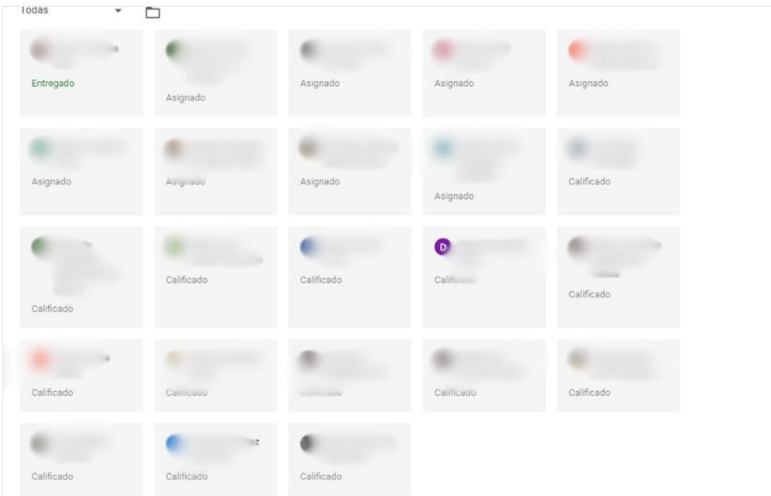


Imagen 34: Entrega de los ejercicios.

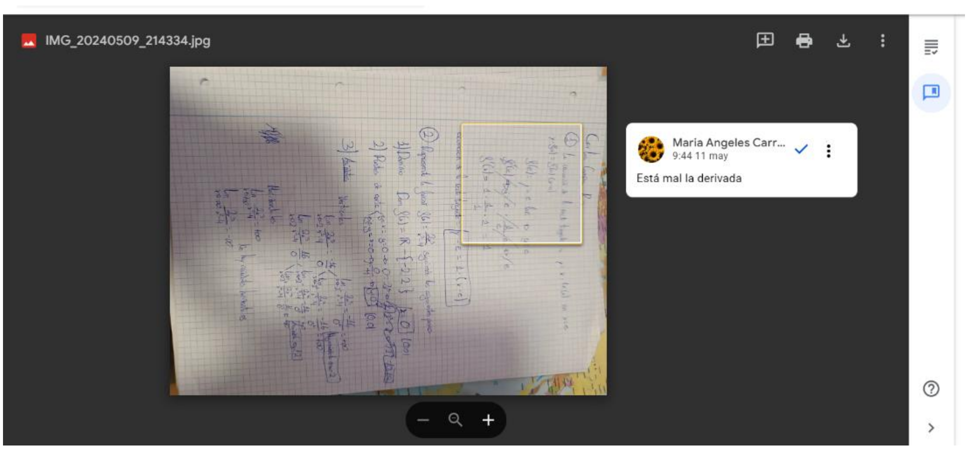


Imagen 35: Corrección de los ejercicios.

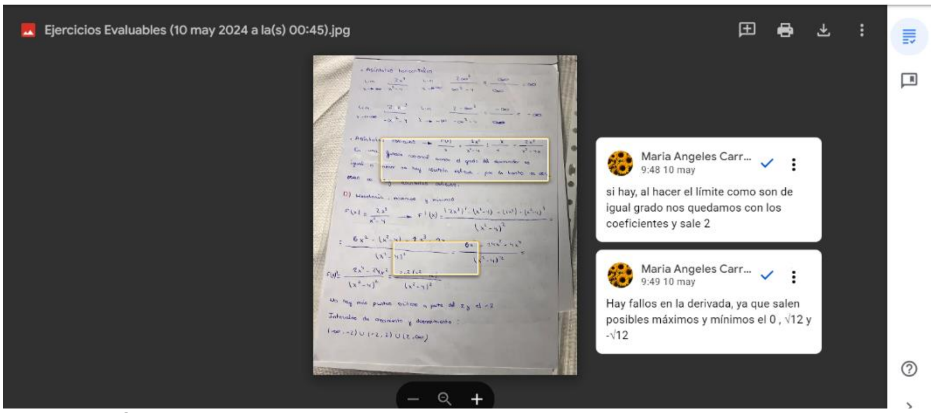


Imagen 36: Corrección de los ejercicios.

EJERCICIOS ENTREGA

1. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función **$y= x\cdot\ln(x)$** en **$x=e$.**

2. Representa gráficamente la función $f(x)= \ln(1-x^2)$. Determina:

a) Dominio.
b) Asíntotas.
c) Monotonía.
d) Máximos y mínimos.
e) Representa gráficamente.

II.3.5. Examen.

Al finalizar el tema, realicé un examen que se adaptaba a los conceptos que habíamos visto en clase.

Nombre y Apellidos:

1. **(2 puntos)** Aplicando la definición de derivada, calcula las derivadas en las siguientes funciones en los puntos que se indican:

   a) f(x) = 5x - 2 en a=1.

   b) f(x) = $\sqrt{x}$ en a=4.

2. **(3 puntos)** Calcula las siguientes derivadas:

   a) f(x) = $\ln(\tan(x))$

   b) f(x) = $\ln\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}$

   c) f(x) = $x^2 \cdot \sin(3x)$

   d) f(x) = $e^{\sin(x)\cdot\cos(x)}$

3. **(2 puntos)** Dada la función f(x) = $\frac{x^2-1}{x}$, halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente sea $\frac{5}{4}$ y hallar sus respectivas ecuaciones.

4. **(3 puntos)** Estudia y representa la siguiente función f(x) = $\frac{2}{x^2-1}$.

III. Anexo III: Otras actividades.

En estas páginas voy a incluir imágenes de otras actividades a las que he asistido.

III.1. Día del centro.

III.1.1. Departamento de Biología y Geología.

Imagen 37: Museo de Biología y Geología.

Imagen 38: Museo de Biología y Geología.

Imagen 39: Museo de Biología y Geología.

III.1.2. Departamento de Física y Química.

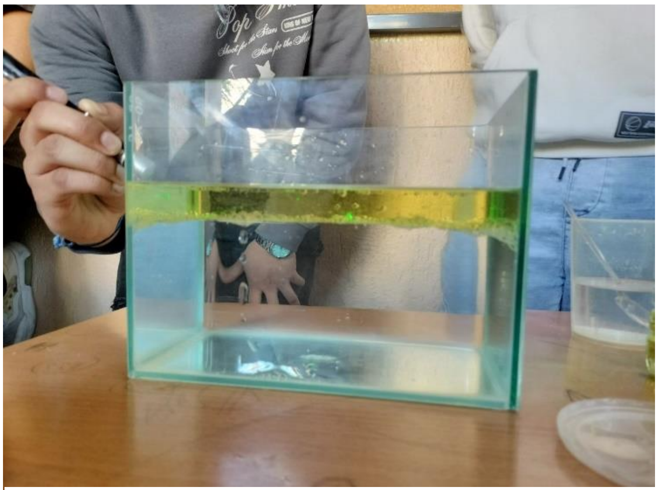


Imagen 40: Experimento de los alumnos.

Imagen 41: Experimento de los alumnos.

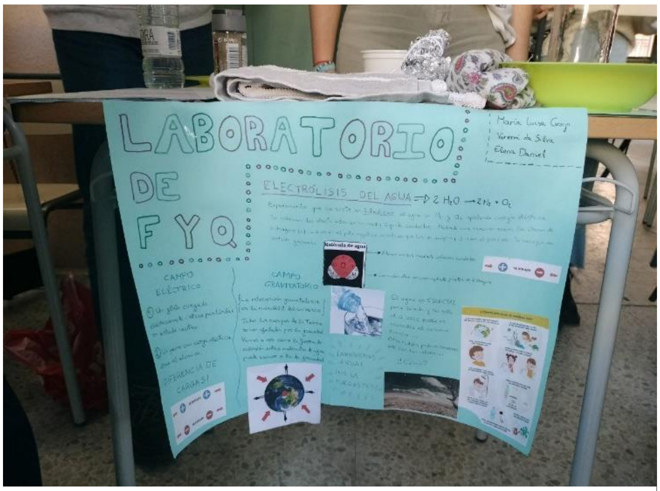


Imagen 42: Explicación de uno de los experimentos.

III.1.3. Departamento de Matemáticas.

Imagen 43: Calculadora humana.

III.1.4. Actividad organizada por los grados.

Imagen 44: Zumba al finalizar el resto de actividades.

III.2. Actividades en tutorías.

SEGUNDA SESIÓN DE EVALUACIÓN 4º DE ESO

1. PRE-EVALUACIÓN. PREPARACIÓN DE LA SEGUNDA EVALUACIÓN

El fin de curso está cerca. Al objeto de reflexionar sobre la marcha del curso y de obtener una visión lo más real posible de las dificultades, contesta con sinceridad a las siguientes preguntas:

Valoración individual

a) Escribe tu opinión sobre los siguientes aspectos y compáralos con el trimestre anterior:

- El ambiente de trabajo en clase y en casa.
- El comportamiento y el cumplimiento de normas.
- La relación con los compañeros.
- Relación con los profesores.

b) ¿Cómo ha sido tu rendimiento respecto al trimestre anterior?

Mejor, peor o igual. Posibles causas.

d) ¿Encuentras difícil este curso? SI NO . ¿Por qué?. Indica cómo superarlas.

e) Contesta las siguientes cuestiones marcando con una cruz la respuesta que más se ajuste a lo que piensas.

En general, a lo largo de este segundo trimestre...	SI	A VECES	NO
He atendido durante las clases			
He participado en clase con frecuencia			
He preguntado al profesorado cuando no entendía lo que me explicaban			
He realizado diariamente las tareas			
He estudiado con regularidad			
He preparado con tiempo los exámenes			
He tenido problemas personales o familiares que me han perjudicado en el estudio			
Algunos compañeros/as me distraen continuamente			

g) Anota las calificaciones que crees que deberías obtener en cada materia, teniendo en cuenta lo que has trabajado durante este trimestre y compáralas con el trimestre anterior:

LENGUA HISTORIA INGLÉS BIOLOGÍA MATEMÁTICAS

F-Q FILOSOFÍA INFORMÁTICA EF EPV TECNOLOGÍA MÚSICA

FRANCÉS PORTUGUÉS

Imagen 45: Evaluación por parte de los alumnos de 4º de ESO E.

Valoración grupal

a) Escribid vuestra opinión sobre los siguientes aspectos y compararlos con el 1º trimestre:

ASPECTOS A VALORAR	Trimestre pasado	Trimestre actual
Trabajo en clase		
Trabajo en casa		
Comportamiento y normas		
Relación con profesores		
Relación con compañeros		

b) ¿Cómo ha sido el rendimiento respecto al trimestre anterior?

Mejor, peor o igual. Posibles causas.

c) ¿Cuáles creéis que son las cuestiones que deberían cambiarse y qué proponéis para que el grupo mejorara? Escribidlas por orden de importancia.

Imagen 46: Evaluación por parte de los alumnos de 4º de ESO E.

Imagen 47: Alumnos de 4ºE trabajando en grupo en una charla de tutoría.

PREMÁTRICULA

1º BACHILLERATO

https://ieszurbaranbad.educarex.es/

Régimen Diurno

I.E.S "ZURBARÁN"
Avda. Huelva, 3
06005 Badajoz
Tfno.: 924013608

Nº EXPEDIENTE

DATOS DEL ALUMNO	**DNI**		**NIE**
APELLIDOS:		NOMBRE:	
Dirección.:		Nº.:	C.P.:
Teléfono Casa:	Tfno. Trabajo Padre:	Tfno. Trabajo Madre:	
Móvil Alumno:	Móvil Padre:	Móvil Madre:	
DATOS DEL CURSO ANTERIOR			
REPITE	**SI** ☐	**NO** ☐	**CENTRO DE PROCEDENCIA:** **DOMICILIO DEL CENTRO:** **ESTUDIOS QUE REALIZÓ:**

SECCIÓN BILINGÜE INGLÉS	**SI** ☐	**NO** ☐	
MATERIAS			
Lengua Castellana y Literatura I	**Filosofía**	**Lengua Extranjera** **Elegir una:** ☐ **Inglés** ☐ **Francés**	**Educación física**

CIENCIAS Y TECNOLOGÍA	**HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES**		**GENERAL**
MATERIAS MODALIDAD OBLIGATORIA	**MATERIAS MODALIDAD OBLIGATORIAS**		**MATERIAS MODALIDAD OBLIGATORIA**
Matemáticas I	**Elegir un itinerario:** ☐ **Latín I**	☐ **Matemáticas Aplicadas a las CC SS I**	**Matemáticas Generales**
MATERIAS DE MODALIDAD	**MATERIAS DE MODALIDAD**		**MATERIAS DE MODALIDAD**
Física y Química **Elegir una:** ☐ **Biología, Geología y Ciencias Ambientales** ☐ **Dibujo Técnico I** ☐ **Tecnología e Ingeniería I**	**Elegir dos:** ☐ **Griego I** ☐ **Historia del Mundo Contemporáneo** ☐ **Literatura Universal**	**Elegir dos:** ☐ **Economía** ☐ **Historia del Mundo Contemporáneo** ☐ **Literatura Universal** ☐ **Latín I**	**Elegir dos:** ☐ **Economía, Emprendimiento y Actividad Empresarial** ☐ **Biología, Geología y Ciencias Ambientales** ☐ **Historia del Mundo Contemporáneo** ☐ **Literatura Universal** ☐ **Latín I**
OPTATIVAS	**OPTATIVAS**		**OPTATIVAS**
Elegir una (numerar del 1 al): ☐ Segunda Lengua Extranjera Inglés I ☐ Segunda Lengua Extranjera Francés I ☐ Segunda Lengua Extranjera Portugués I ☐ Inteligencia Artificial ☐ Dibujo Técnico I ☐ Biología, Geología y Ciencias Ambientales ☐ Tecnología e Ingeniería I ☐ Economía	**Elegir una (numerar del 1 al):** ☐ Segunda Lengua Extranjera Inglés I ☐ Segunda Lengua Extranjera Francés I ☐ Segunda Lengua Extranjera Portugués I ☐ Inteligencia Artificial ☐ Historia del Mundo Contemporáneo ☐ Economía ☐ Matemáticas Aplicadas a las CC SS I		**Elegir una (numerar del 1 al):** ☐ Segunda Lengua Extranjera Inglés I ☐ Segunda Lengua Extranjera Francés I ☐ Segunda Lengua Extranjera Portugués I ☐ Inteligencia Artificial ☐ Historia del Mundo Contemporáneo ☐ Economía

- Con carácter general, el alumnado cursará como lengua extranjera la misma que hubiera cursado en la etapa precedente. El cambio a otra lengua extranjera exigirá que el alumno o alumna supere una prueba donde acredite que tiene la competencia suficiente para cursar la nueva lengua extranjera solicitada.
- Si eliges un idioma, debe ser distinto al elegido para la lengua extranjera.
- **La asignación de materias estará supeditada al número de alumnos que la elijan y al orden de matriculación.**

MATERIA DE OFERTA OBLIGADA

Religión **SI** ☐ **NO** ☐

SEGURO ESCOLAR

El/la alumno/a, ha abonado en la Secretaría de este Centro la cantidad de ***1,12 €*** en concepto de tasa del Seguro Escolar. ***Este resguardo no es válido sin el sello del Centro.***
(Imprescindible traer la cantidad exacta, el centro no dispone de cambio)

(Sello del Centro)

FIRMA DEL PADRE/MADRE O TUTOR/A
(SI EL ALUMNO/A ES MENOR DE EDAD)

Fdo.:

FIRMA DEL PADRE/MADRE O TUTOR/A
(SI EL ALUMNO/A ES MENOR DE EDAD)

Fdo.:

Imagen 48: Prematricula 4º de ESO E.

III.3. Autoevaluación.

Para saber que tengo que cambiar en mi futuro como docente, realicé un cuestionario en Google Forms y se lo pasé a los diferentes cursos.

Adjunto imágenes de los resultados obtenidos:

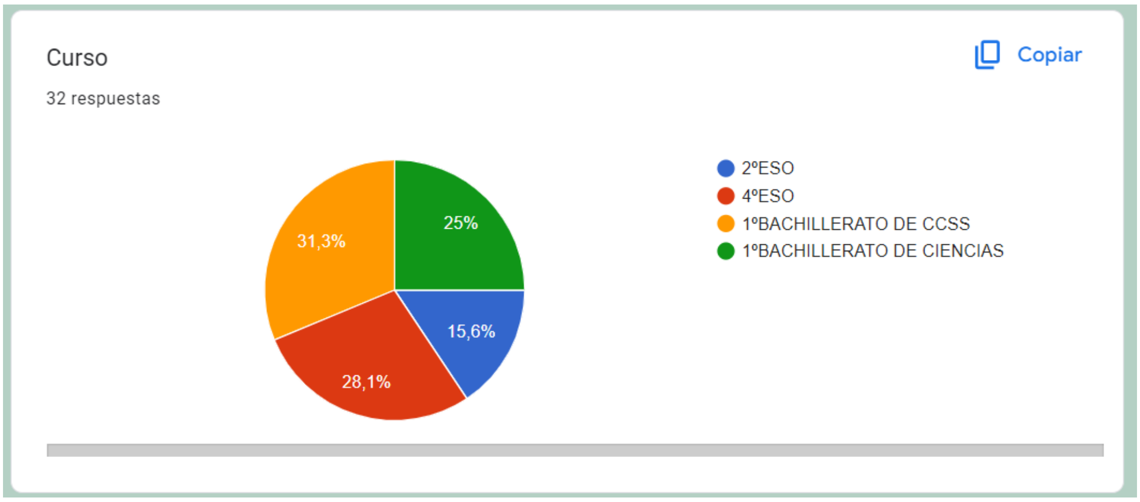


Imagen 49: Encuesta Google Forms.

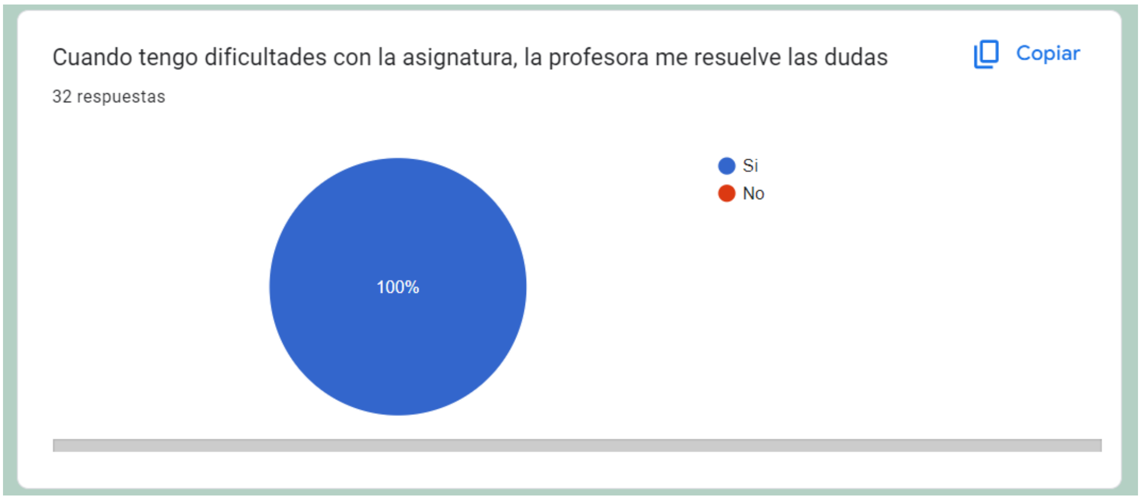


Imagen 50: Encuesta Google Forms.

En la siguiente gráfica, 1 significa fáciles de seguir y 4 significa difíciles de seguir.

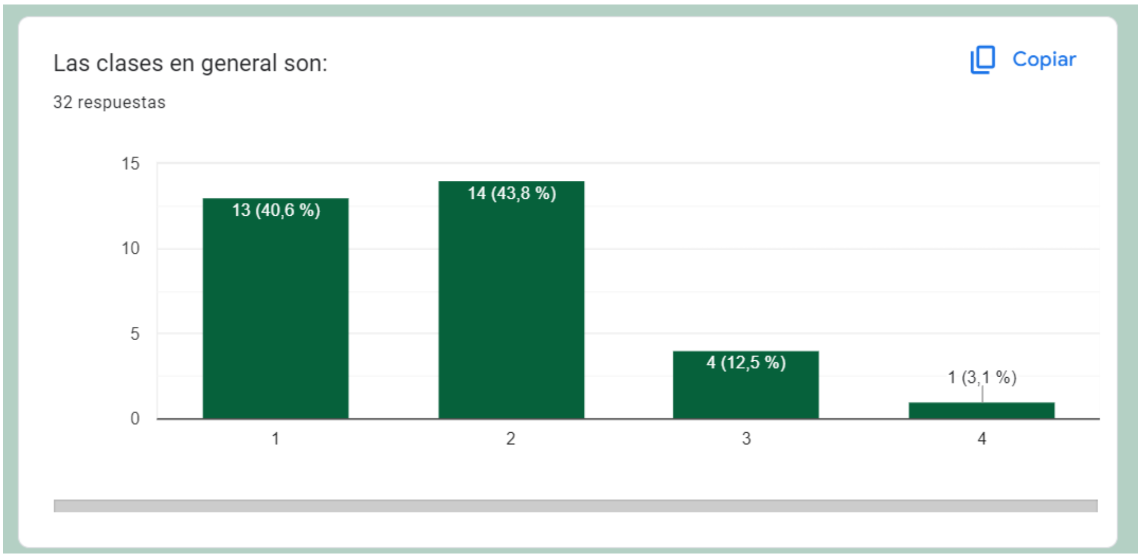


Imagen 51: Encuesta Google Forms.

En los siguientes diagramas de barra, 1 significa muy mala y 5 significa excelente.

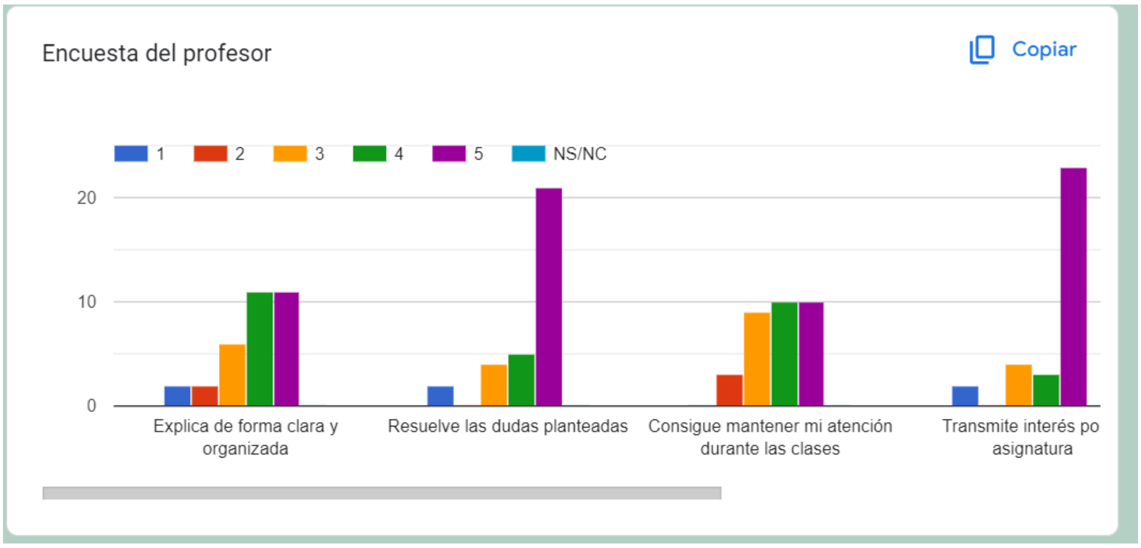


Imagen 52: Encuesta Google Forms.

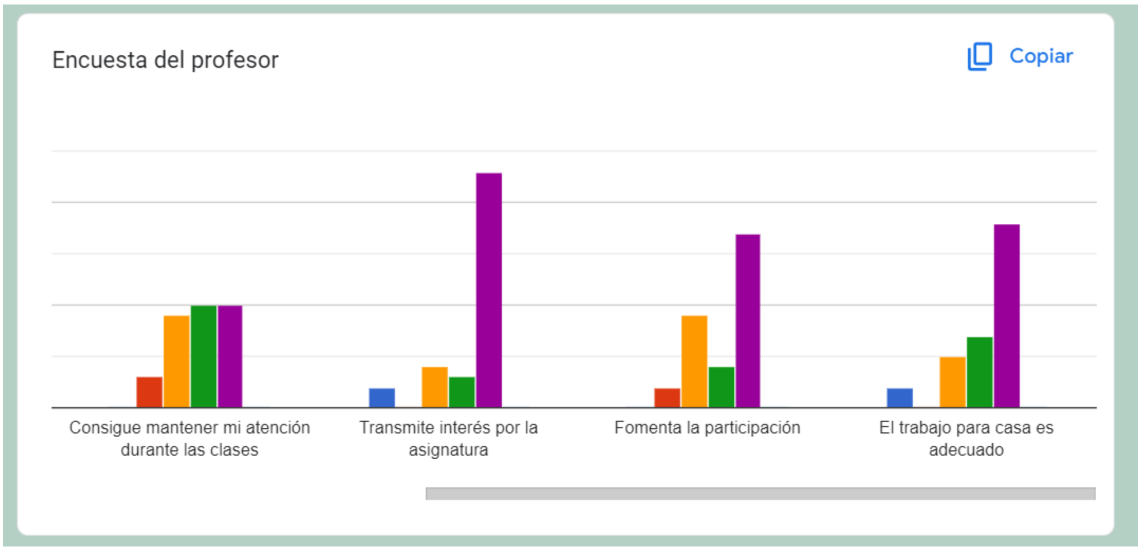


Imagen 53: Encuesta Google Forms.

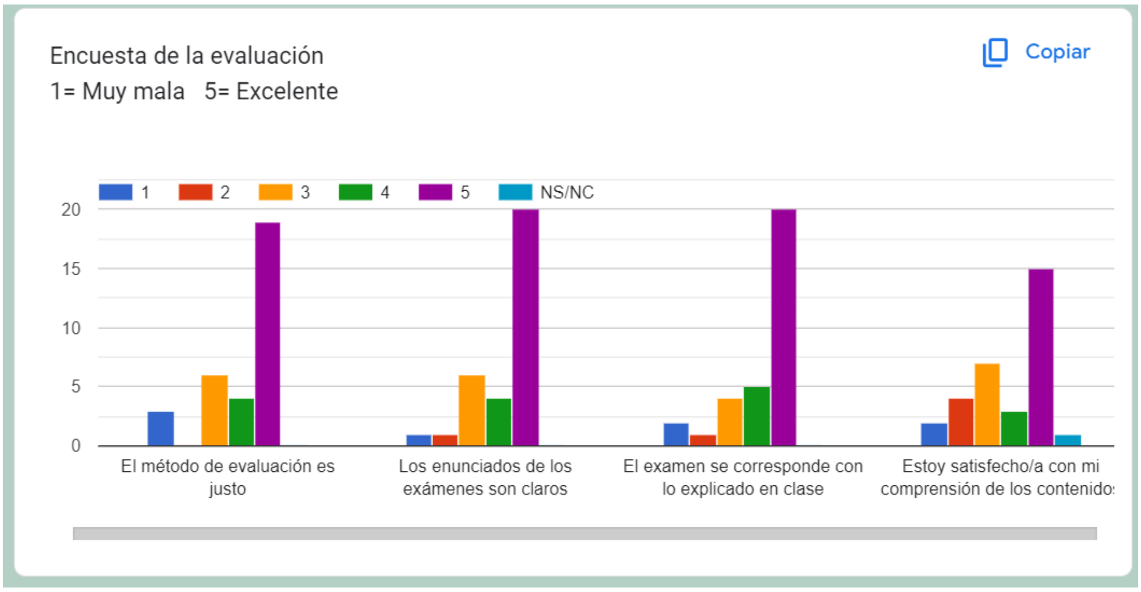


Imagen 54: Encuesta Google Forms.

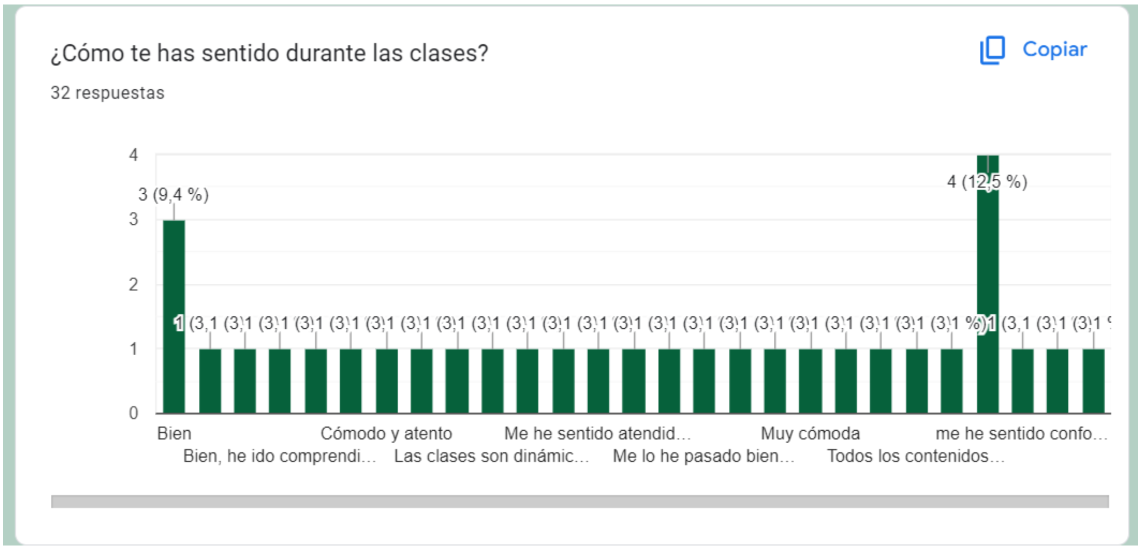


Imagen 55: Encuesta Google Forms.

III.4. Ficha para refuerzo.

Ejercicio 1: Calcula el área de un cuadrado de lado 4 cm.

Ejercicio 2: Calcula el área y el perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado mide 3cm.

Ejercicio 3: Calcula el área y el perímetro de un pentágono regular cuyo lado mide 3 cm y cuya apotema mide 2 cm.

Ejercicio 4: Calcula el área y el perímetro de un hexágono regular cuyo lado mide 5 cm.

Ejercicio 5: Calcula el área del círculo y la longitud de la circunferencia de un círculo de diámetro 7 cm.

Ejercicio 6: Halla el área y el volumen de un prisma cuadrangular cuya arista de la base mide 4 cm y tiene altura 7 cm.

Ejercicio 7: Halla el área y el volumen de un cilindro cuyo radio mide 2 cm y cuya altura mide 6 cm.

Ejercicio 8: Halla el área y el volumen de una pirámide hexagonal cuya arista de la base mide 5 cm y la altura de la pirámide mide 8cm.

Ejercicio 9: Halla el área y el volumen de un cono cuyo radio de la base mide 3 cm y cuya altura mide 5 cm.

Ejercicio 10: Halla el área y el volumen de una semiesfera de radio 1 cm.