TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
MUFPES ESPECIALIDAD MATEMÁTICAS

UD Geometría Analítica 4º ESO Matemáticas B

IES ZURBARÁN

ESTHER RODRÍGUEZ TEJEDA

Tutor en el centro: Pablo García Martín

Director del TFM: Pedro José Rosa González

Junio 2024

Índice general

Capítulo 1 Información del centro

El Instituto de Educación Secundaria Zurbarán, ubicado en Badajoz, se encuentra situado en la Avenida de Huelva número 3, en la denominada “zona centro”, zona de tráfico comercial por antonomasia y de gran actividad cultural. Esta avenida constituye el lugar de reunión en los recreos, para los alumnos de Bachillerato, pues está muy bien acondicionada para ello al ser peatonal.Es un centro educativo de referencia en la región, que ofrece una educación integral desde la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) hasta Bachillerato, así como distintos ciclos formativos de Formación Profesional. Entre sus características destacadas se encuentran:

- Amplia gama de grados y ciclos formativos, adaptados a las necesidades e intereses de los alumnos.
- Está formado por 120 profesores.
- El alumnado del IES Zurbarán es diverso en cuanto a perfiles socioeconómicos, culturales y académicos. El centro acoge a estudiantes procedentes de diferentes barrios de Badajoz y localidades cercanas, creando un ambiente enriquecedor y multicultural que fomenta el respeto y la convivencia.

Cuenta con 497 alumnos de ESO, entre ellos 120 en 1º, 155 en 2º, 108 en 3º, 7 en Diversificación y 120 en 4º. Además, hay 7 grupos de 1º Bachillerato con 197 alumnos y 6 grupos de 2º Bachillerato con 152 alumnos. El Bachillerato nocturno está formado por 12 alumnos en 1º bachillerato y 30 en 2º Bachillerato. Por otro lado, cuenta con dos Ciclos Formativos de Grado Superior de Enseñanza y Animación Socio deportiva con 50 alumnos en 1º, 40 alumnos en 2º (nocturno) y un grupo de Acondicionamiento Físico. También tiene un Ciclo Formativo de Grado Medio de Guía en el Medio Natural y Tiempo Libre y otro Conducción de Actividades Físico-Deportivas en el Medio Natural con 50 alumnos matriculados y un grupo en segundo con 40. Las enseñanzas de régimen especial fútbol n1 y n2 con 24 alumnos matriculados y el nivel n3.

En relación con la Biblioteca un grupo de profesores coordinado por Concepción Villa está trabajando en un proyecto de Biblioteca con el fin de dinamizar y hacer un uso de esta más productivo, estamos incluidos en el proyecto REBEX (Red de Bibliotecas Escolares de Extremadura). Nuevamente contamos este curso con la figura del profesor encargado de nuevas tecnologías, lo que consideramos de suma importancia y un gran acierto ya que esto nos permitirá usarlas como recurso didáctico, así como mantener una comunicación entre los miembros de la comunidad educativa y dinamizar la gestión administrativa del centro. D. Vicente González Valle, coordinador ITED, quien asume las funciones puesto que es el profesor que cumple los requisitos necesarios para dicho cargo. Además, el centro presenta ordenadores a disposición de todos los alumnos y profesores que lo deseen y pizarras digitales y ordenadores en todas las aulas.

El IES Zurbarán presenta varios proyectos: red extremeña de Escuelas por una cultura de Paz, Igualdad y No violencia; red extremeña de escuelas promotoras de la actividad física y la salud; aprender a aprender, hay un grupo de trabajo para trabajar esta competencia; red de escuelas de inteligencia emocional. Hay dos secciones bilingües, inglés y francés.

IES ZURBARÁN

IES ZURBARÁN

Capítulo 2 Análisis de la intervención docente

I.Z., 2022 El periodo de prácticas docentes del Máster de Formación del Profesorado tuvo lugar entre el 11 de marzo y el 10 de mayo de 2024. Para llevar a cabo el seguimiento de éstas elaboramos un Google Sites donde mostramos todo el trabajo y actividades llevadas a cabo en el centro, características de los grupos y de los alumnos, materiales utilizados, etc. A pesar de que impartí clases en varios niveles, me centré en desarrollar dos unidades didácticas:

✿ Sistemas de Ecuaciones, 2º ESO.

✿ Geometría Analítica, 4º ESO Matemáticas B.

A parte de estas dos, impartí la unidad didáctica de Proporcionalidad y Porcentajes completa y comencé la unidad didáctica Álgebra en 1º ESO; en 2º ESO acabé la unidad didáctica de Ecuaciones; y en 4º ESO (Matemáticas B) impartí la unidad didáctica de Trigonometría.

2.1. Geometría Analítica

La Unidad Didáctica que se va a desarrollar a lo largo de este Trabajo de Fin de Máster es Geometría Analítica.

2.1.1. Introducción

La unidad didáctica (UD) se ubica en el tercer nivel de concreción curricular, siguiendo las directrices establecidas por la Ley Orgánica 3/2020, del 29 de diciembre, que reforma la Ley Orgánica 2/2006, del 3 de mayo, de educación (LOMLOE). Esta Unidad Didáctica ha sido elaborada tomando como referencia el Decreto 110/2022, el cual establece la organización y el plan de estudios para la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Extremadura. Este diseño se realiza a partir del currículo básico delineado en el Real Decreto 217/2022, adaptándolo según las exigencias y particularidades educativas específicas de dicha región.

2.1.2. Datos generales identificativos

Título de la Unidad Didáctica: "Geometría Analítica".
Nivel educativo: Cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria en la modalidad de Matemáticas B.
Trimestre: Tercer trimestre.
Bloque: Bloque C, sentido espacial.

2.1.3. Justificación de la Unidad Didáctica

La Geometría Analítica es una rama de la geometría que estudia los cuerpos geométricos a través de un sistema de coordenadas. De este modo se pueden expresar figuras como ecuaciones algebraicas.
La unidad didáctica de Geometría Analítica en 4º ESO es la primera que utiliza conceptos fundamentales como vectores y rectas. Ésta proporcionará al alumnado una base sólida en matemáti-

cas y lo preparará para los siguientes cursos tanto en matemáticas como en otras materias. Esta unidad didáctica es clave ya que los conceptos sirven para conectar el álgebra y la geometría y facilita la comprensión de conceptos abstractos.
Los contenidos que aborda esta unidad didáctica son los siguientes:

- Vectores
  - Concepto de vector.
  - Representación gráfica.
  - Operaciones con vectores tanto geométrica como analíticamente: suma, resta y producto por un escalar.
  - Conceptos de vector fijo y vector libre.
  - Características de los vectores: módulo, dirección y sentido.
- Rectas
  - Elementos de una recta.
  - Vector director, vector normal y pendiente.
  - Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétrica, continua, general o implícita y explícita.
  - Punto medio de un segmento.
  - Posición relativa punto-recta y recta-recta.
  - Distancia entre dos puntos.

2.1.4. Razones por las que esta Unidad Didáctica es fundamental

En primer lugar, la Geometría es una rama esencial de las matemáticas que tiene aplicaciones prácticas en la vida cotidiana y en disciplinas científicas y tecnológicas. Además, nos proporciona herramientas para desarrollar el pensamiento lógico espacial. Permite a los estudiantes visualizar y comprender las relaciones espaciales y las propiedades geométricas.

En segundo lugar, la geometría analítica se utiliza en numerosos campos, entre los que destacan la física, la informática, la arquitectura o la ingeniería. Entender cómo representar y resolver problemas geométricos analíticamente es crucial para la aplicación práctica en estas áreas. Con estos conocimientos aprenderán a abordar y a resolver problemas. También establece conexión entre el álgebra y la geometría, permitiendo como las representaciones algebraicas pueden describir figuras geométricas.

En tercer lugar, el uso de las herramientas digitales fomenta habilidades tecnológicas importantes para los estudiantes.

Por último, los estudiantes aprenderán a trabajar con conceptos abstractos, lo que es esencial para desarrollar la capacidad de resolver problemas en otros campos académicos.

El origen de la Geometría Analítica La geometría analítica, también conocida como geometría cartesiana, tiene sus orígenes en el trabajo de René Descartes, quien la presentó en el apéndice titulado "La Geometría"de su "Discurso del método", publicado en 1637. Aunque Descartes es comúnmente asociado con el nacimiento de la geometría analítica, se sabe que Pierre de Fermat ya utilizaba métodos similares antes de la publicación de Descartes. Las explicaciones de Descartes eran complejas y difíciles de entender y se atribuye a Frans van Schooten y sus colaboradores la tarea de ampliar, desarrollar y divulgar estas ideas en la comunidad matemática.

El término "geometría analítica"se ha utilizado indistintamente con "geometría cartesiana". Hoy en día, "geometría cartesiana"se refiere específicamente al apéndice del "Discurso del método"de Descartes, mientras que geometría analítica abarca el desarrollo posterior de la geometría basada en ejes coordenados y la descripción de figuras mediante funciones, hasta la aparición de la geometría diferencial de Gauss. En esa época, no había una clara distinción entre geometría analítica y análisis matemático debido a la identificación entre los conceptos de función y curva. La geometría algebraica posterior confirmó la superación de la geometría analítica.

Una de las cosas más relevantes, desde mi punto de vista, es la constante pregunta de los estudiantes “¿Para qué sirve esto?”. Aunque no lo sepan, la geometría está presente en muchos aspectos de la vida cotidiana como:

- **Diseño de edificios**. Los arquitectos la usan para diseñar planos precisos mediante el uso de líneas y curvas. Además, la utilizan para calcular ángulos y distancias para que las estructuras sean estables.
- **Física y astronomía**. Se usa para calcular la trayectoria de proyectiles en movimiento y para el estudio de las fuerzas. “Cálculo vectorial y su aplicación en física”, 2023
- **Informática**. Se utiliza para crear animaciones y simulaciones de entornos en programas de software.
- **Economía y finanzas**. Usan modelos matemáticos para representar y analizar relaciones entre variables como la oferta y la demanda. También utilizan técnicas para maximizar o minimizar costes.

2.1.5. Grupo y características

4º ESO D

El grupo de 4º ESO D (Matemáticas B) está formado por 31 alumnos entre los 15 y 17 años. Una alumna suele faltar con bastante frecuencia. A pesar de que su madre justifica las faltas, creemos que muchas no tienen justificación. En todas pone “Asuntos Personales”. Por lo que nos ha informado la jefa de estudios, esta alumna fue atendida desde casa el año pasado por lo que, aunque falte mucho, está progresando.

En este grupo solo hay un repetidor, una alumna que repitió 4º de primaria. En 4º ESO ya no hay refuerzos de Pedagogía Terapéutica (PT) y Audición y Lenguaje (AL) aunque algunos alumnos sí lo necesitarían.

La procedencia de los alumnos es diversa. Aunque la mayoría de ellos han estudiado en el CEIP Luis de Morales, otros proceden de otras localidades.

Como este nivel es decisivo, el instituto los agrupa por optativas. Todos ellos están cursando la rama de ciencias (tienen física y química y biología como obligatorias) y son un grupo bilingüe. En este nivel las matemáticas no se imparten en inglés, solo en primero y segundo. En este curso dan en bilingüe Geografía e Historia y Educación Física.

Además hay 4 alumnos ACNEAES (Alumnado con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo)/ACNEES (Alumnos Con Necesidades Educativas Especiales).

- El alumno 18 tiene TDA (Trastorno por Déficit de Atención). Se lo detectaron en noviembre. Desde entonces, ha mejorado con creces y no suele necesitar adaptaciones.
- El alumno 16 tiene TDA. También se lo detectaron hace poco pero le cuestan bastante las matemáticas. Su familia no quiere adaptaciones. Por este motivo dejamos que haga los exámenes en lápiz porque se pone muy nervioso y leemos con él los enunciados de los ejercicios en el examen para que entienda lo que preguntamos. Solemos estar muy pendiente.
- El alumno 26 tiene TDAH (Trastorno por Déficit de Atención con Hiperactividad) asociados a la conducta y a la socialización. No se relaciona con el grupo y, en ocasiones, insulta a los compañeros. Cuando otro alumno dice algo, él se da por aludido y les contesta de malas maneras. Estamos intentando que no conteste a los compañeros. El resto del alumnado es muy bueno y no tiene ningún problema con él. Es un alumno que se queja por todo. A pesar de tener TDAH es muy trabajador por lo que no tiene problemas en los exámenes. También leemos los enunciados en los exámenes con él para que no se confunda y le permitimos entregar los exámenes hechos en lápiz.

A todos estos alumnos los tenemos sentados en la primera fila para que no se distraigan, estos dos últimos están sentados juntos.

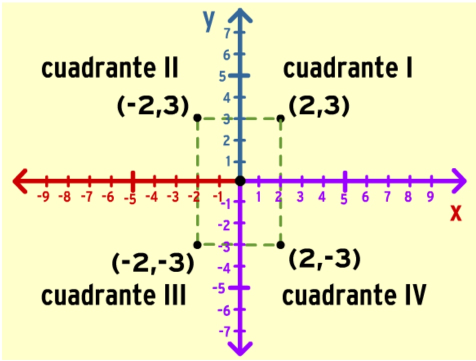
- El alumno 22 tiene AACC (Altas Capacidades). Ayuda mucho a los demás compañeros. El temario y el examen es el mismo para todos pero le estamos dando material de ampliación.

Académicamente el nivel de la clase es alto ya que de los 31 alumnos, en la 2º evaluación hubo cinco alumnos con todo sobresaliente y otros siete con sobresalientes y notables. Solo hubo cuatro alumnos con una asignatura suspensa, cuatro con dos y una con tres. La asignatura que más trabajo les cuesta es física y química ya que cuenta con siete alumnos suspensos.

Respecto al trabajo del alumnado, la mayoría trabaja diariamente. Como en las clases no hablan y atienden, las sesiones cunden mucho. Mi tutor prefiere que trabajen en clase y no les mandamos deberes. Nos da tiempo todos los días a explicar algo nuevo de temario, hacer ejercicios relacionados y que ellos salgan a la pizarra a corregirlos. Los solemos sacar en orden de lista para que participen todos. La mayoría trabaja mucho. El ambiente de la clase es muy bueno. Se ve que el alumnado está dividido en dos grupos de amigos, pero entre ellos se ayudan. Son muy participativos y siempre hay alguno con la mano levantada para preguntar dudas. Nunca tuvieron mal comportamiento. Me respetaron en todo momento a pesar de que había días que mi tutor se iba en mitad de la clase. Estuve poco tiempo con ellos pero me cogieron cariño.

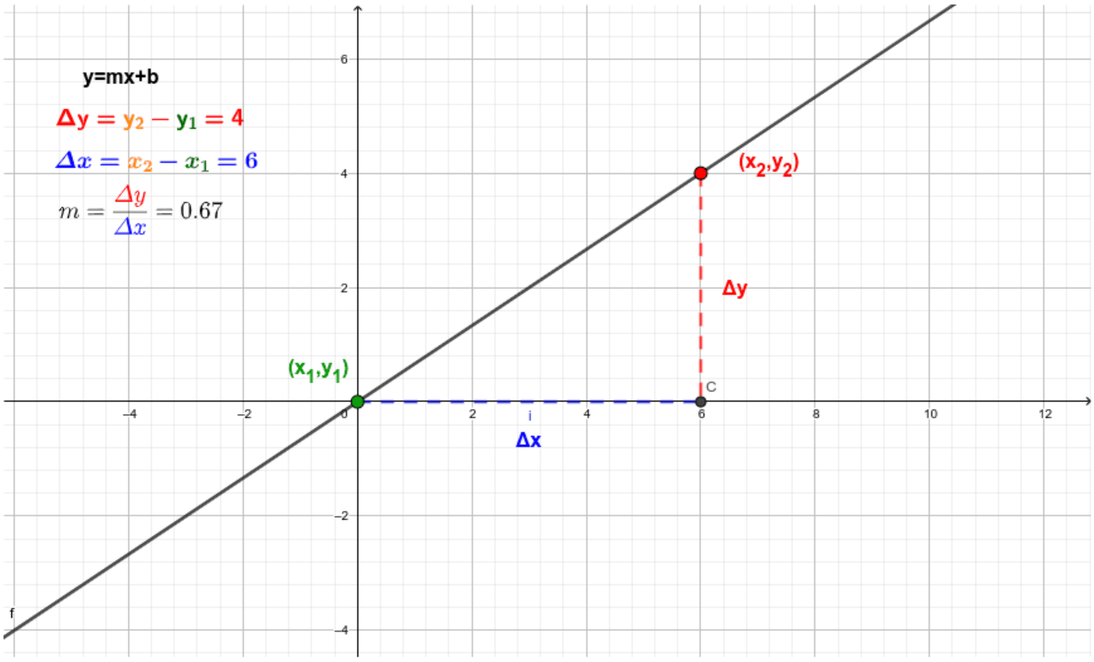
2.1.6. Conocimientos previos y tratamiento de los contenidos trasversales

- **Puntos en el plano coordenado**. Usamos un plano de coordenadas para representar la ubicación relativa en el espacio bidimensional. Cada punto en el plano se describe con un par ordenado (x, y), donde x indica la posición horizontal e y indica la posición vertical. Los puntos a la izquierda del eje y tienen coordenadas x negativas, mientras que los puntos a la derecha tienen coordenadas x positivas. De manera similar, los puntos por debajo del eje x tienen coordenadas y negativas, y los puntos por encima del origen tienen coordenadas y positivas. Esto deben dominarlo para poder situar los puntos y entender qué son las rectas y como representarlas.



Plano coordenado

- **Distancia y desplazamiento entre puntos**. La distancia mide cuán alejados están dos puntos entre sí y siempre es un valor no negativo. El desplazamiento, por otro lado, se refiere al cambio necesario para ir de un punto a otro, considerando tanto la distancia como la dirección de dicho cambio. Frecuentemente, descomponemos la distancia y el desplazamiento en sus componentes horizontales y verticales. Cuando nos enfocamos en una sola dirección de cambio (ya sea horizontal o vertical), la distancia es el valor absoluto del desplazamiento. Usamos el desplazamiento para calcular la pendiente de una recta, y para determinar la distancia total entre dos puntos, combinamos las distancias horizontales y verticales utilizando el teorema de Pitágoras.
- **Pendiente de la recta**. La pendiente es una forma de medir la inclinación de una recta. Calculamos la pendiente como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que es la relación entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal. Podemos utilizar la pendiente de dos rectas para determinar si son paralelas (o no). Esto nos permite saber si se aplican las propiedades de los ángulos en figuras con líneas paralelas. Si usamos la pendiente para demostrar que dos lados de un triángulo son perpendiculares, podemos aplicar razones trigonométricas para relacionar sus ángulos con las longitudes de los lados.



Pendiente de la recta

2.1.7. Competencias específicas

- **1-Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando individual o colectivamente diferentes estrategias y formas de razonamiento, explorando distintas soluciones posibles y diferentes maneras de proceder.**
  El alumnado aprenderá a interpretar y modelar situaciones reales utilizando coordenadas y ecuaciones de rectas. Las utilizará para resolver problemas como encontrar la distancia entre dos puntos o determinar el punto de intersección de dos rectas.
- **3-Formular y comprobar conjeturas sencillas o problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación y generando nuevos conocimientos tanto en el ámbito académico como en el ámbito social.**
  El alumnado utilizará esta competencia cuando estudie las propiedades de las rectas y sus posiciones relativas, como el paralelismo o la perpendicularidad. Van a descubrir qué sucede cuando se cambian las pendientes o las intersecciones mediante cálculos y gráficos.
- **5-Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, con una visión integral de las matemáticas en situaciones y contextos diversos.**
  El alumnado estudiará la conexión entre álgebra y geometría, mostrando cómo las ecuaciones algebraicas pueden representar figuras geométricas en un plano. Para ello integrarán conceptos de álgebra, como sistemas de ecuaciones, con geometría, al resolver problemas de intersección de rectas o al representar círculos mediante ecuaciones cuadráticas. Además verán las aplicaciones que tienen los vectores en física. En mecánica lo usarán para calcular movimiento, velocidad y aceleración de las partículas; en electromagnetismo para describir campos eléctricos y magnéticos; en dinámica para calcular gradientes o en óptica para describir la propagación de la luz.
- **6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimien-**

tos, para aplicarlos en situaciones diversas.
El alumnado identificará cómo la geometría analítica se aplica en ciencias como la física (trayectorias de proyectiles), la informática (gráficos por computadora) y la economía (gráficos de funciones). Analizarán problemas donde la posición y el movimiento son cruciales, como en la planificación de rutas (geografía), simulaciones de física, o el análisis de datos en ciencias sociales.

- **7-Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos sencillos y presentes en situaciones cotidianas o académicas usando diferentes tecnologías, tanto individual como colaborativamente consiguiendo así visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.**
Se utiliza tecnología como software de geometría dinámica, calculadoras gráficas y programas de modelado 3D para visualizar y resolver problemas, especialmente GeoGebra. Para ello representarán gráficamente ecuaciones de rectas y curvas, usarán aplicaciones para calcular pendientes y distancias, y colaborarán en proyectos que involucren modelado geométrico, facilitando la comprensión visual y estructuración de procesos matemáticos.

- **10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con funciones asignadas, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.**
Se trabajará en los trabajos en grupo. Además, los ejercicios de clase se harán de forma conjunta para que puedan ayudarse entre sí.

2.1.8. Contribución de la Unidad Didáctica a la adquisición de las competencias clave

La unidad didáctica de Geometría Analítica para estudiantes de 4º de la ESO puede contribuir significativamente al desarrollo de diversas competencias clave.

- **Competencia en matemáticas y competencias en ciencia y tecnología (STEM)**:
  - La Geometría implica conceptos matemáticos avanzados como vectores, rectas, operaciones, etc. Los estudiantes aplicarán y desarrollarán habilidades matemáticas esenciales al trabajar con problemas de Geometría.
  - Integración de Ciencia y Matemáticas: los alumnos usarán estos conceptos para resolver problemas de física relacionados con el movimiento de objetos, propagación de ondas...
  - Uso de la tecnología. Usarán GeoGebra para visualizar y manipular las figuras geométricas. Además usarán la calculadora para calcular tanto los módulos como las operaciones con vectores.
  - Desarrollarán el Pensamiento Crítico y Analítico.
- **Competencia Digital**:
  - Al utilizar herramientas digitales para representar rectas y vectores, los estudiantes desarrollarán habilidades en el uso de tecnologías de la información y la comunicación (TIC) aplicadas al ámbito de la geometría. Sobre todo nos centraremos en GeoGebra.
- **Competencia personal, social y aprender a aprender:**

- La Geometría se puede aplicar en situaciones del mundo real. Esto puede promover la conciencia social.
- Además, puede fomentar la capacidad de los estudiantes para aprender de manera autónoma. Pueden investigar y explorar diferentes estrategias para resolver problemas, promoviendo así la autonomía en el proceso de aprendizaje.

Competencia Ciudadana

- La unidad de geometría puede promover la competencia ciudadana al realizar proyectos en equipo. Se fomentará el trabajo colaborativo, la distribución de tareas y la responsabilidad compartida, habilidades fundamentales para la participación en la sociedad.

El fin de esta unidad didáctica es integrar actividades y recursos que permitan a los estudiantes desarrollar estas competencias clave mientras exploran y aprenden los conceptos de Geometría. Además, es importante proporcionar oportunidades para la aplicación práctica de estos conocimientos en contextos de la vida real.

A pesar de ser un grupo bilingüe, en este nivel las matemáticas no se imparten en inglés. Por ese motivo, no trabajaremos la competencia plurilingüe.

2.1.9. Saberes básicos

En esta tabla se recogen los saberes básicos del DOE DOE., 2022 utilizados en el desarrollo de esta Unidad Didáctica.

BLOQUE	SUB BLOQUE	SABER BÁSICO	APLICACIÓN
Bloque A. Sentido numérico.	A.3. Sentido de las operaciones.	A.4.4.2. Propiedades de las operaciones aritméticas: cálculos con números reales, incluyendo con herramientas digitales.	Se ha trabajado en las operaciones con vectores.
Bloque B. Sentido de la medida.	B.3. Medición	B.3.4.1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo y sus relaciones: aplicación a la resolución de problemas.	Se ha trabajado en el cálculo del argumento de un vector.

BLOQUE	SUB BLOQUE	SABER BÁSICO	APLICACIÓN
Bloque C. Sentido espacial	C.2. Localización y sistemas de representación.	C.2.4.2. Expresiones algebraicas de una recta: selección de la más adecuada en función de la situación a resolver.	Se ha trabajado en el cálculo de las diferentes ecuaciones de las rectas.
	C.4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica	C.4.4.3. Elaboración y comprobación de conjeturas sobre propiedades geométricas mediante programas de geometría dinámica u otras herramientas.	Se ha trabajado en toda la Unidad Didáctica mediante el uso de GeoGebra.
Bloque F. Sentido socioafectivo.	F.1. Creencias, actitudes y emociones.	F.1.4.2. Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.	He intentado despertar en el alumnado el gusto por las matemáticas.
		F.1.4.3. Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje	
	F.2. Trabajo en equipo y toma de decisiones.	F.2.4.2. Métodos para la gestión y la toma de decisiones adecuadas en la resolución de situaciones propias del quehacer matemático en el trabajo en equipo.	Se ha trabajado en las actividades en grupos.

BLOQUE	SUB BLOQUE	SABER BÁSICO	APLICACIÓN
Bloque F. Sentido socioafectivo.	F.3. Inclusión, respeto y diversidad	F.3.4.1. Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.	Durante los trabajos en grupo fomentaremos la inclusión del alumnado.
		F.3.4.2 La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano sin olvidar la perspectiva de género.	Se intentará transmitir distintos valores.

2.1.10 Metodología

Tipo de Metodología

Durante la Unidad Didáctica, se utilizó una metodología expositiva y tradicional que promovió la participación y el compromiso de los estudiantes. La mayoría de las actividades propuestas fueron de tipo expositivo. También vimos algunas curiosidades del tema para hacer las sesiones más amenas mediante vídeos explicativos y el uso de GeoGebra.

El desarrollo de las clases consistía en explicar los contenidos teóricos y luego realizar ejercicios y problemas sobre ese contenido explicado. Los estudiantes trabajaban de forma individual lo que permitía identificar posibles dificultades o conceptos no comprendidos.

A lo largo de la unidad, se explicaban los contenidos teóricos y se realizaban actividades relacionadas para que el alumnado pudiera asimilar dichos contenidos y aprender a aplicarlos en ejercicios prácticos.

Además se fomentó la participación en clase y se animó a los estudiantes a resolver ejercicios en la pizarra para evaluar directamente su comprensión y actuar en consecuencia. Los alumnos iban saliendo a la pizarra en orden de lista para que todos pudieran defender las actividades.

Por otro lado, al ser un grupo bueno las sesiones cundían mucho. Nos daba tiempo a explicar la teoría y hacer suficientes ejercicios todos los días. Por ese motivo sólo mandaba tareas los días que no me había dado tiempo a acabar lo que tenía previsto en esa sesión. Al día siguiente pasaba a verlo y ponía positivos y negativos para valorar al alumnado que trabajase en casa.

Aspectos metodológicos particulares de la Unidad Didáctica

Comencé esta Unidad Didáctica con un vídeo para captar la atención del alumnado y que mostrasen interés sobre la Geometría Analítica ya que es un tema nuevo este año, nunca han trabajado con vectores. Al finalizar el vídeo, expliqué qué son los vectores y sus características.

Durante el resto de las sesiones utilicé la metodología tradicional. Fui explicando los distintos contenidos y realizando ejercicios para abordarlos en la práctica para conseguir aclarar los conceptos.

La dinámica fue la siguiente: el inicio de las sesiones lo dedicamos a corregir los ejercicios que no hubiese dado tiempo el día anterior y resolver las dudas que tuviesen antes de empezar a dar temario nuevo. A continuación explicaba la teoría correspondiente a ese día y realizábamos ejemplos. Luego, planteaba algunos ejercicios que elaborábamos entre todos para darme cuenta si realmente habían entendido la lección correspondiente. Por último, mandaba más ejercicios para que los alumnos los hicieran y lo fuesen corrigiendo ellos en la pizarra por orden de lista. Este trabajo también lo valoré. Con esto me di cuenta de las dificultades que tenían. Permitía al alumnado hacer los problemas en parejas, estaban sentados en mesas de dos. Así se ayudaban unos a otros.

Mientras los alumnos estaban haciendo los ejercicios yo iba resolviendo las diferentes dudas que les surgían. Si veía que una duda era repetida por varios alumnos, me daba cuenta que esa parte de la unidad didáctica no la tenían clara y la volvía a explicar para todos.

Recursos materiales y uso de las TIC

En esta Unidad Didáctica he utilizado materiales con los que hemos pretendido dar a conocer a los alumnos la variedad de recursos que se pueden usar y con los que se puede estudiar la Geometría Analítica, favoreciendo así, el desarrollo y el manejo de diferentes materiales.
En general, he usado unos apuntes de elaboración propia basados en el libro de Bruño, en los que nos apoyaremos a lo largo de toda la unidad. Además de estos apuntes, empleamos los siguientes recursos:

- ✿ La pizarra tradicional.
- ✿ La pizarra digital.
- ✿ La calculadora científica. La mayoría del alumnado tenía la calculadora casio fx 991 o casio fx 570. Esto fue un gran avance ya que aprendimos a hacer operaciones con vectores directamente. Esto promovía las explicaciones entre ellos.
- ✿ GeoGebra.
- ✿ Ordenadores portátiles del aula.

Pizarra Tradicional

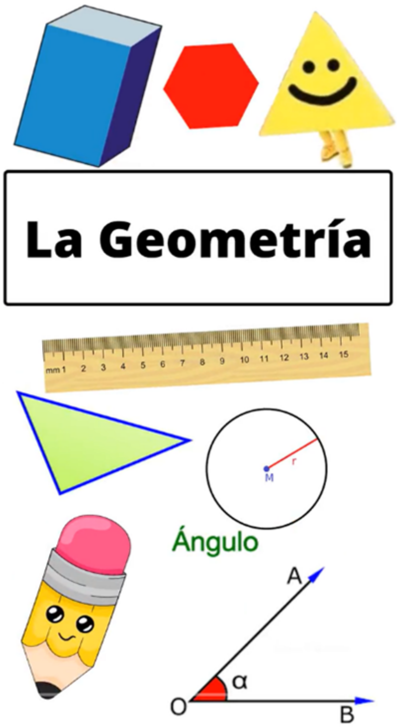
Pizarra Digital

Calculadora científica

Ordenadores portátiles

2.1.11 Secuenciación y Temporalización

Fase inicial o de introducción a la Unidad Didáctica de Geometría Analítica.
En primer lugar introduje esta Unidad con un vídeo para captar la atención del alumnado y que tuvieran interés por la Geometría, especialmente por los vectores ya que es la primera toma de contacto con ellos.



Fase de desarrollo de la Unidad Didáctica de Geometría Analítica.
Desarrollé esta Unidad en seis sesiones para explicar todas las secciones del tema. Como he comentado anteriormente, el inicio de las sesiones lo dedicamos a corregir los ejercicios que no hubiera dado tiempo el día anterior y resolver las dudas que tuviesen antes de empezar a dar temario nuevo. Después explicaba la teoría correspondiente a ese día y realizábamos ejemplos. Luego, planteaba algunos ejercicios que elaborábamos entre todos para darme cuenta si realmente habían entendido la lección correspondiente. Por último, mandaba más ejercicios para que los alumnos los hicieran y lo fuesen corrigiendo ellos en la pizarra por orden de lista.

Fase de síntesis la Unidad Didáctica de Geometría Analítica.
Dediqué los dos días antes del examen a hacer un resumen del temario y un par ejercicios de

cada tipo. De esta manera, el alumnado pudo resolver las dudas que tenía sobre el temario y fue mejor preparado para el examen. Así pude ver qué preguntar en éste y el nivel de los ejercicios. Me ayudaron sus respuestas durante los ejercicios de repaso.

Me ha parecido bastante complejo el hecho de hacer exámenes ya que yo todo lo veía "asequible" pero los alumnos no. Mi tutor me ha ayudado mucho a ver los fallos que podrían tener antes de hacer los ejercicios.

Además, dediqué otra sesión a hacer una actividad diferente. La actividad consistió en poner la imagen de un mapa de la ciudad que ellos quisieran en GeoGebra. A continuación, tuvieron que aprender a representar puntos y rectas. Eligieron dos lugares destacados de la ciudad y tuvieron que calcular la distancia entre ellos. Para ello pusieron puntos en esos lugares y dibujaron la recta que pasa por esos dos puntos y la distancia entre ellos. Lo hicieron tanto geométrica como analíticamente, y tuvieron que comprobar que obtenían el mismo resultado que en GeoGebra.

Luego me tuvieron que entregar tanto el documento de GeoGebra como el papel donde lo habían calculado a mano.

Fase de evaluación de la Unidad Didáctica de Geometría Analítica.

La última sesión se basó en hacer la prueba escrita (examen) en la que evalué conceptos, contenidos y competencias tratados en esta Unidad Didáctica. La mayoría de los alumnos pudieron realizar el examen con normalidad aunque hubo varios que se agobiaron y no supieron hacer algunos ejercicios, o ninguno y me lo entregaron en blanco. Por lo general supieron hacerlo ya que todos los ejercicios se habían hecho en clase con distintos números o estaban hechos en una relación de ejercicios que les mandé unos días antes del examen.

Por último, al día siguiente dediqué los quince minutos finales de la clase a la entrega de los exámenes y resolución de dudas sobre estos.

FASE	SESIÓN	CONTENIDO
Introducción	1ª	• Vídeo introductorio. • Concepto de vector. • Características de los vectores (módulo, dirección y sentido). • Operaciones básicas: suma, resta y multiplicación por un escalar. • Operaciones básicas geométricamente.

FASE	SESIÓN	CONTENIDO
Desarrollo	2ª	Ecuaciones de la recta: • Ecuación vectorial. • Ecuación paramétrica. • Ecuación continua. • Ecuación general o implícita. • Ecuación explícita. Pendiente. Ordenada en el origen. Vector director y vector normal.
	3ª	Punto Medio de dos Puntos A y B. Ejercicios de calcular rectas con ciertas condiciones.
	4ª	Posición relativa de un punto y una recta. Posiciones relativas de dos rectas. Ejercicios
	5ª	Ejercicios de vectores. Representación de vectores en GeoGebra. Suma, resta y multiplicación de vectores en GeoGebra.
	6ª	Ejercicios de ecuaciones rectas.

FASE	SESIÓN	CONTENIDO
Síntesis	7ª	Ejercicios de posiciones relativas, distancias y punto medio.
	8ª	Autoevaluación a modo de control.
	9ª	Actividad vida real.

FASE	SESIÓN	CONTENIDO
Evaluación	10ª	Examen

2.1.12 Atención a la Diversidad

Durante el desarrollo de esta Unidad Didáctica no se elaboró ningún tipo de material para la atención a la diversidad pero sí lo tratamos en los casos necesarios.
Como en esta clase hay un alumno de altas capacidades (AACC) y varios alumnos que acababan las actividades más rápido que el resto, cuando veía que habían acabado los ejercicios, se acercaban al ordenador del profesor y resolvían los mismos gráficamente. Luego les explicaban a los compañeros el uso de GeoGebra.
A los alumnos con TDH les pasaba todos los días vía Classroom los apuntes que hubiésemos dado en esa sesión para que los fueran estudiando poco a poco. A los demás se los pasaba un par de días antes del examen a modo de repaso.
Cuando hice los exámenes de las dos unidades que impartí en este tiempo vi que las notas de estos tres alumnos habían mejorado con creces.
También había en clase una alumna que trabajaba mucho pero no conseguía aprobar, por ello el día antes del examen nos quedamos en el recreo haciendo un resumen del temario. ¡De no haber aprobado matemáticas en todo el curso consiguió sacar un 9.58!.
Además, como el alumno de AACC le gustaban mucho las matemáticas, le facilité varias actividades de ampliación ya que él me las pedía.

- Investigar la historia y aplicaciones de la Geometría Analítica en la ciencia.
- Material sobre vectores en el espacio.

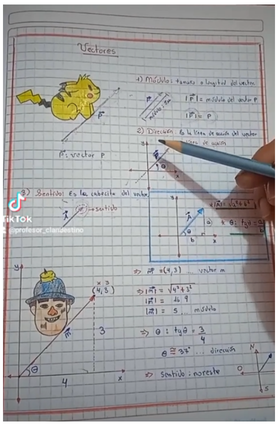
2.1.13 Actividades

A lo largo de esta Unidad Didáctica realizamos bastantes actividades. Todas estas pueden verse con más detalle en el Anexo III. Para ello me he basado en el libro de Bruño y Cabezas y Ildefonso Maza Saez, s/f. Me centraré en las más relevantes de cada apartado del tema: vectores, ecuaciones de la recta, rectas paralelas y perpendiculares y posiciones relativas punto-recta y recta-recta.

Punto 1

Vídeo introductorio del tema.

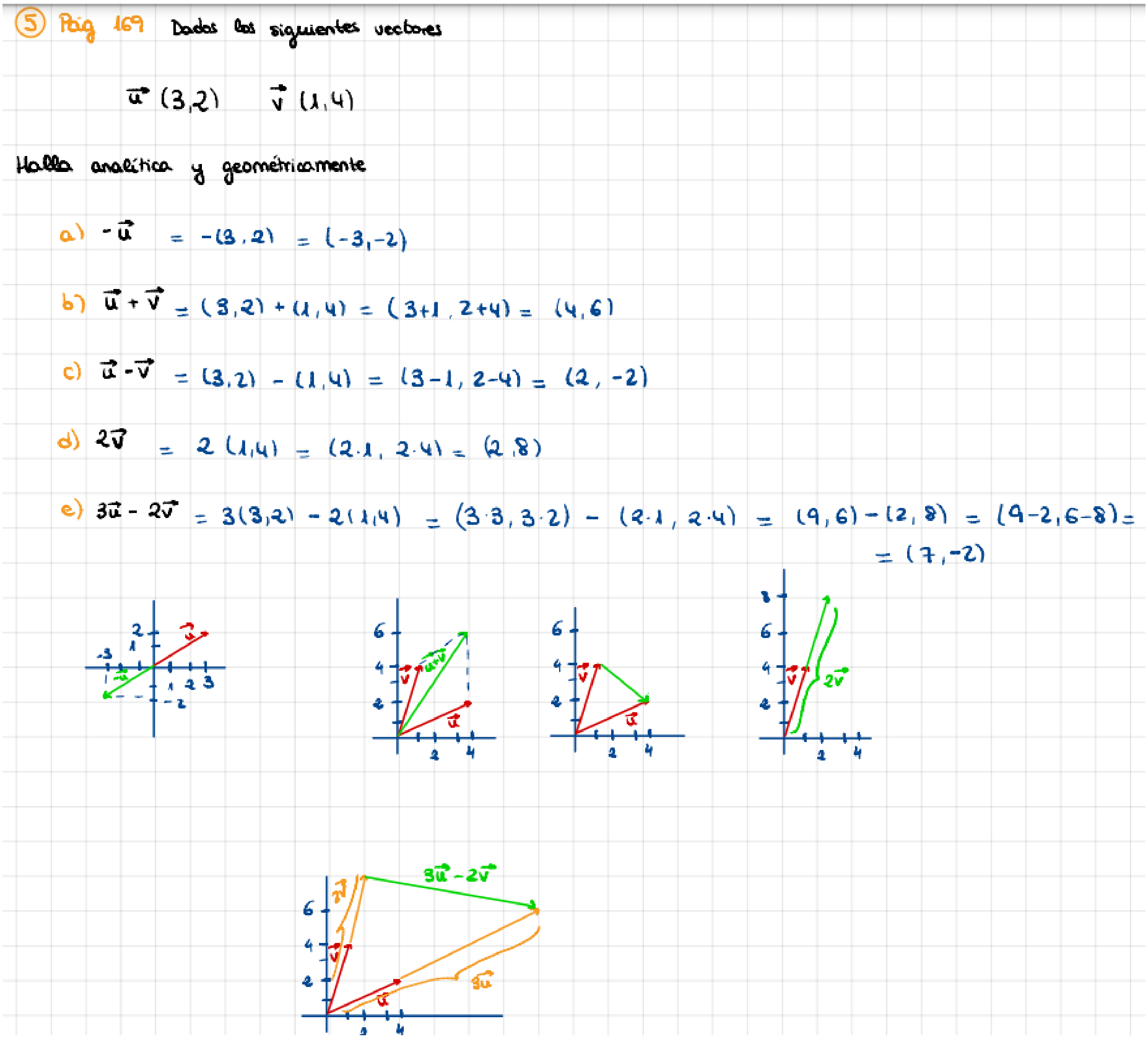
En primer lugar, introduje el tema con un vídeo muy corto que explica qué es la Geometría Analítica y para qué sirve. Con este vídeo quise contestar a la pregunta “¿Y esto para qué vale?” y despertar el interés y el gusto por las matemáticas del resto del alumnado.
Este vídeo compara la Geometría que ellos conocían hasta ahora, las figuras geométricas, que las define como aquellas piezas simples y bonitas que se encuentran por todos lados, con la Geometría al ir más allá. En lugar de dibujar las figuras escribimos sus ecuaciones, las igualdades que representan un lugar geométrico en un sistema coordenado.



A continuación empezamos el tema. Expliqué el concepto de vector y sus características (módulo, dirección y sentido). También vimos el siguiente vídeo que explica, mediante dibujos lo visto anteriormente.

Además, vimos operaciones básicas con los vectores: suma, resta y multiplicación por un escalar tanto analítica como geométricamente e hicimos ejercicios. Un par de ejemplos del tipo de ejercicios que abordamos sobre la primera parte del tema son:

1. Calcular el módulo de vectores.



5 Pág 169 Dados los siguientes vectores

$\vec{u}(3,2) \quad \vec{v}(1,4)$

Halla analítica y geométricamente

a) $-\vec{u} = -(3,2) = (-3,-2)$

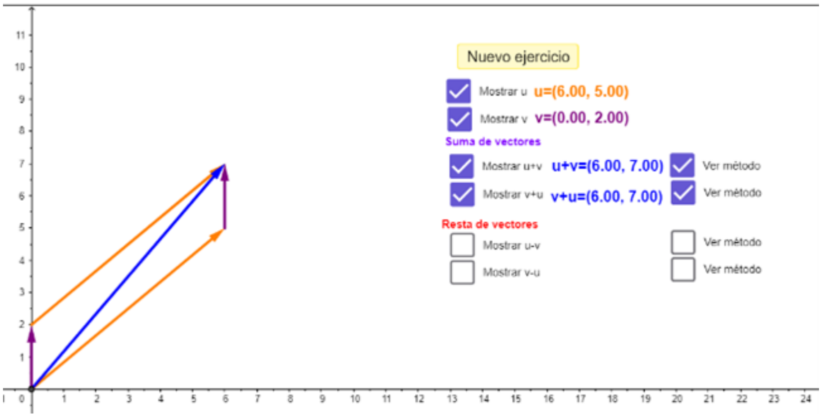
b) $\vec{u}+\vec{v} = (3,2)+(1,4) = (3+1, 2+4) = (4,6)$

c) $\vec{u}-\vec{v} = (3,2)-(1,4) = (3-1, 2-4) = (2,-2)$

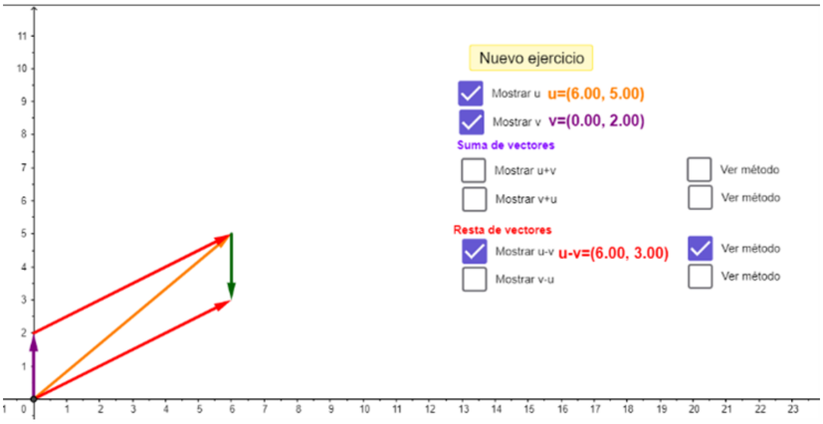
d) $2\vec{v} = 2(1,4) = (2\cdot1, 2\cdot4) = (2,8)$

e) $3\vec{u}-2\vec{v} = 3(3,2)-2(1,4) = (3\cdot3, 3\cdot2) - (2\cdot1, 2\cdot4) = (9,6)-(2,8) = (9-2, 6-8) =$
$= (7,-2)$

Por otro lado, también vimos las operaciones con vectores en GeoGebra. Me di cuenta que, hasta que no vimos gráficamente en un programa este tipo de operaciones no acabaron de entenderlo.



Suma de vectores en Geogebra



Resta de vectores en Geogebra

Punto 2

A continuación expliqué cómo calcular un vector que pasa por dos puntos y hablamos de la pendiente de la recta.
Además, expliqué lo que era un vector director de una recta.
De este apartado hicimos ejercicios del tipo:

- Calcula el vector que pasa por los puntos A y B.
- Calcula el módulo del vector anterior.
- Calcula el vector director y la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B.

En este tipo de ejercicios no tuvieron muchos problemas ya que en este nivel se reduce a aplicar las fórmulas explicadas anteriormente.

Punto 3

En tercer lugar expliqué qué es una recta y sus diferentes ecuaciones. También recordamos el concepto de pendiente y vimos los conceptos de ordenada en el origen y vector normal.
Para ello elaboré la siguiente tabla:

Ecuación vectorial	$(x,y) = (p_1,p_2) + t(v_1,v_2),\ t\in\mathbb{R}$	$(x,y) = (-5,2) + t(4,3)$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = p_1 + t v_1 \\ y = p_2 + t v_2 \end{cases}$	$x = -5 + 4t$ $y = 2 + 3t$ $\quad t\in\mathbb{R}$
Ecuación continua	$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2}$	$\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{3}$
Ecuación general o implícita	$Ax + By + C = 0$ $\vec{n}\ (A,B)$ $\vec{v}\ (B,-A)$ $\quad m = \frac{-A}{B}$	$3(x+5) = 4(y-2)$ $3x + 15 = 4y - 8$ $3x - 4y + 15 + 8 = 0$ $3x - 4y + 23 = 0$ $\vec{n}\ (3,-4)$ $\vec{v}\ (4,3)$ $\quad m = \frac{3}{4}$
Ecuación explícita	$y = mx + n$ $\quad m =$ pendiente $y =$ ordenada en el origen	$4y = 3x + 23$ $y = \frac{3x+23}{4}$ $\quad m = \frac{3}{4}$, $n = \frac{23}{4}$

En esta tabla podemos observar tanto las fórmulas de las distintas ecuaciones como un ejemplo particular para que el alumnado lo entendiese. Les costó bastante entender por qué había tantas rectas, aunque sin duda, lo que más trabajo nos dio y no conseguí que muchos lo entendiesen fue el concepto de vector normal y de perpendicularidad.

De este apartado del tema hicimos dos tipos de actividades:

- Calcula las distintas ecuaciones de la recta que pasa por un punto A y tiene como vector director .
- Calcula las distintas ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A y B.

Aquí empezaron algunas de las dificultades. No conseguían ver la diferencia entre un punto y un vector y dos puntos. Tardaron un par de sesiones en entender que si le daban dos puntos, la recta no tenía dirección y, por tanto, tenían que calcular el vector que pasa por ambos puntos y elegir uno de ellos para calcular las distintas ecuaciones de la recta.
En segundo lugar vimos ejercicios del tipo:

- Dada la siguiente ecuación, dada en forma vectorial, paramétrica o continua, calcular:
  - Un vector director.
  - Un vector normal.
  - La pendiente de la recta.
  - Un punto

A partir de este tipo de ecuaciones les enseñé a sacar el vector director y un punto. Si queremos calcular otro punto diferente, en las dos primeras tendríamos que darle un valor a t y en la otra un valor a x o a y.

✿ Dada la siguiente ecuación, dada en forma general o explícita, calcular:

- ❀ Un vector director.
- ❀ Un vector normal.
- ❀ La pendiente de la recta.
- ❀ Un punto.

A partir de este tipo de ecuaciones les enseñé a sacar el vector. Como este tipo de ecuaciones no nos da el punto directamente, les enseñé a calcularlo dándole valores a x o a y.
Con estos dos ejercicios aprendieron a calcular el vector normal a partir del vector director o al revés calculando un vector perpendicular. Para ello le daban la vuelta a las componentes del vector y a una le cambiaban el signo. Lo que debían tener claro de estas ecuaciones es la información que nos da cada una. Insistí mucho en estos conceptos para que lo dominasen. Hubo muchas dudas de estos ejercicios.

Por otro lado, abordamos otro tipo de ejercicios como:

✿ Calcula la ecuación de la recta paralela a r que pasa por el punto A.

✿ Calcula la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por el punto A.

Este tipo de ejercicios fue los que más les costó a los alumnos. Yo quería explicar simplemente que cuando dos rectas son paralelas tienen el mismo vector director y cuando son perpendiculares, el vector normal de la primera recta es el vector director de la segunda. Les insistí que de las ecuaciones vectorial, paramétrica y continua podían obtener directamente el vector director pero que de la ecuación general o implícita obtenemos el vector normal, perpendicular a la recta. Este concepto les costó bastante, pero conseguimos entenderlo. El problema llegó cuando, explicando esto, mi tutor me dijo que les explicase directamente cómo obtener la ecuación general. Decía que era la que más se usaba de cara a cursos superiores y que la tenían que dominar. En mi opinión, todas las rectas son igual de importantes y se usan de forma parecida, pero le hice caso y se lo expliqué. A partir de este momento fue cuando no conseguían hacer los ejercicios. Al ser la primera vez que veían esto, los conceptos no los tenían claros. El hecho de calcular una ecuación paralela a otra y necesitar un vector que es perpendicular no llegaban a comprenderlo, o el hecho de calcular dos rectas perpendiculares y usar el vector director de la otra tampoco. La clase siguiente estuve representando todo esto en GeoGebra y así consiguieron comprenderlo algunos. No conseguí que lo entendieran todos. Cuando les mandé los ejercicios de repaso al final del tema, redacté estos dos tipos de ejercicios y lo hice como creía que se iban a enterar mejor. De hecho en el examen, no les pedí en ningún momento que me calculasen la ecuación general de la recta. Podían calcular la que mejor hubiesen entendido. Yo se lo había explicado con la vectorial ya que creía que era la mejor forma para que ellos lo entendieran. En mi opinión, este es un tipo de ejercicios que, si dominan ahora, les facilita la geometría de 2º de Bachillerato, tema odiado por muchos alumnos. Si no lo entienden ahora, no tienen base en ese curso y todo se les hace un mundo.

Otro tipo de ejercicios que hicimos de este apartado fue:

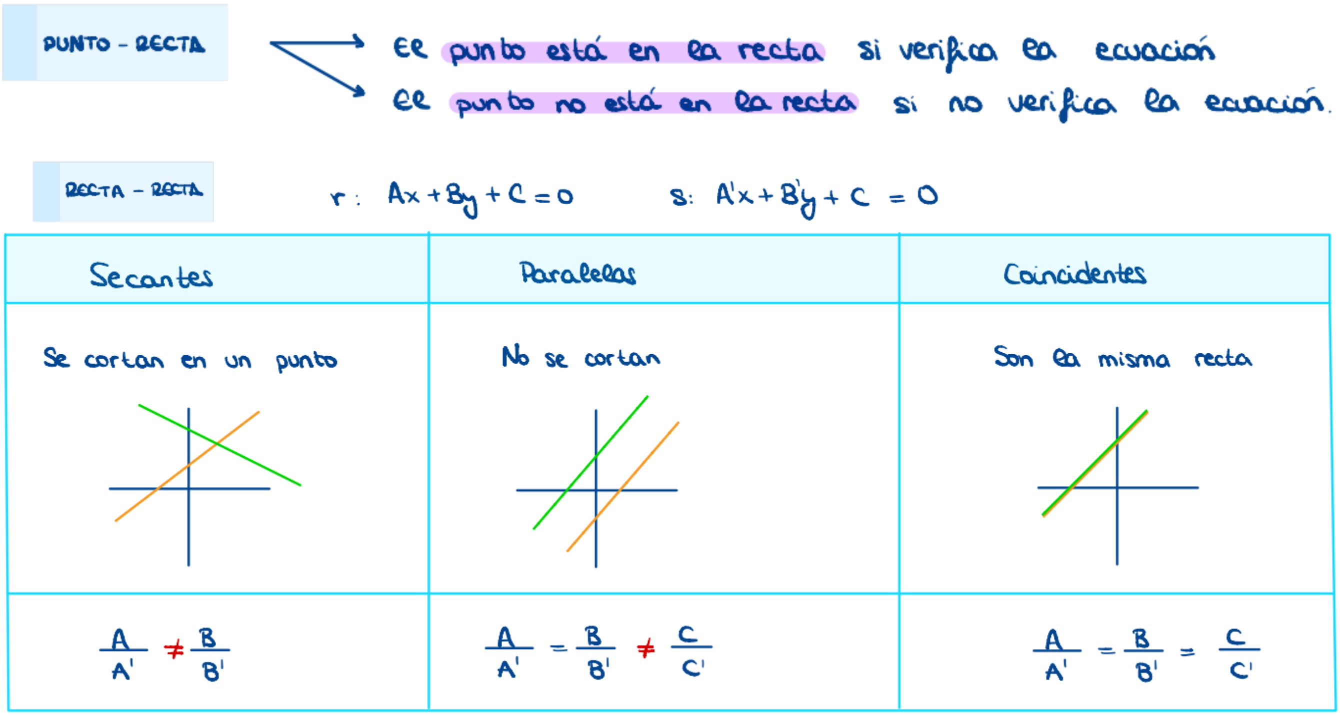
✿ Calcula la ecuación de la recta paralela al eje OX que pasa por el punto A.

✿ Calcula la ecuación de la recta perpendicular al eje OY que pasa por el punto B.

Les costó mucho sacar el vector del eje OX o del eje OY. Por este motivo decidí no poner ningún ejercicio de este tipo en el examen.

Punto 4

Por último expliqué a calcular el punto medio de dos puntos A y B y la posición relativa de un punto y una recta y de dos rectas. Para ello elaboré el siguiente esquema:



Para el primer tipo de ejercicios no hubo problemas ya que solo tenían que sustituir en la recta. Si el punto cumple la ecuación de la recta pertenece a ella y, si no lo cumple, no pertenece. Lo único que se les olvidaba al final de los ejercicios era poner las conclusiones.

El segundo tipo de ejercicios lo expliqué a través de las ecuaciones generales de la recta. Realmente sacaba los vectores normales de ambas rectas y, si eran proporcionales, el vector es el mismo y, por lo tanto, las rectas serán coincidentes o paralelas. Para distinguir entre ambos comparábamos los términos independientes. Si todo coincidía, las rectas eran coincidentes y, si no, paralelas. En el caso de que los vectores no coincidieran, las rectas serían secantes y podíamos calcular su punto de corte.

Podría haber explicado este apartado a través de la pendiente y la ordenada en el origen pero el libro seguía este método y decidí seguirlo.

El tipo de ejercicio que practicamos de este apartado fue:

✿ Calcula la posición relativa de la recta r y los puntos A y B.

✿ Calcula la posición relativa de las rectas r y s.

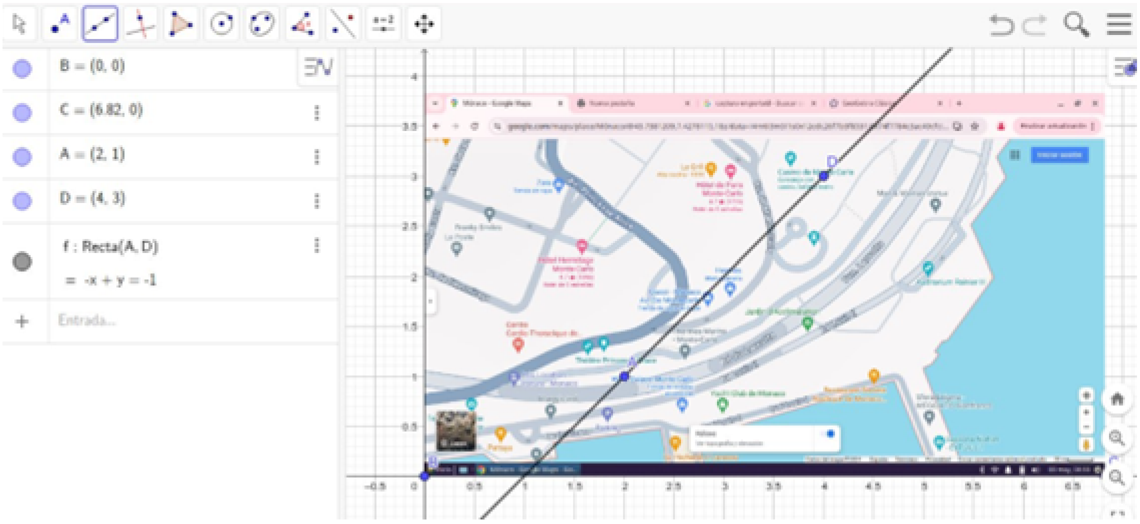
En caso de que las rectas las dieran en otra forma que no fuese la general, les dije que podían calcular la ecuación general de ambas o comparar los vectores directores o las pendientes aunque ellos se quedaron con la primera forma que fue la más repetitiva en los ejercicios del libro.

Además expliqué la distancia entre dos puntos e hicimos ejercicios del tipo:

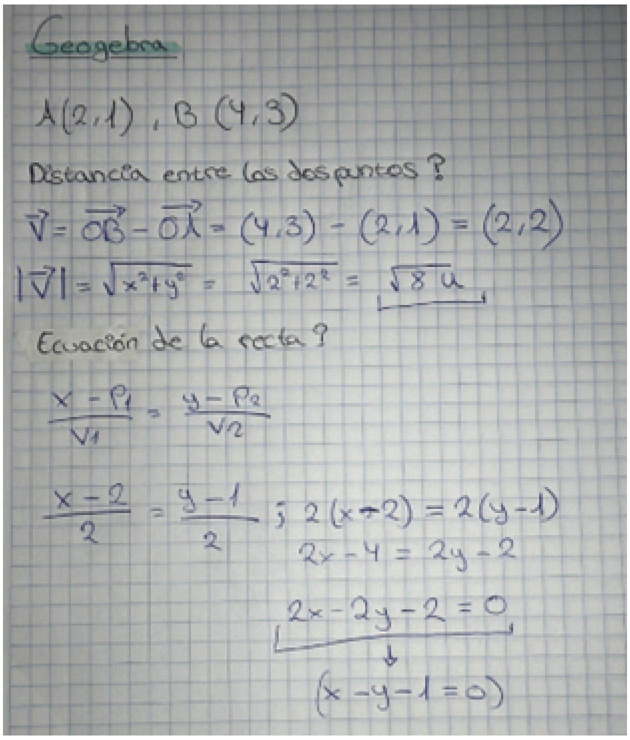
✿ Calcula la distancia entre los puntos A y B.

Les dije que no hacía falta aprenderse otra fórmula nueva, que la distancia entre dos puntos era simplemente el módulo del vector $\vec{AB}$.

Actividad vida real



Para que el alumnado mostrase más interés hacia esta parte del temario, decidí llevar a cabo una situación de la vida real.
En primer lugar la actividad consistió en poner la imagen de un mapa de la ciudad que ellos quisieran en GeoGebra. A continuación tuvieron que aprender a representar puntos y rectas. Además, eligieron dos lugares destacados de la ciudad y calcular la distancia entre ellos. Para ello pusieron puntos en esos lugares y dibujaron la recta que pasa por esos dos puntos y la distancia entre ellos. Lo hicieron tanto en el programa como en el papel, y comprobaron que obtenían el mismo resultado que en GeoGebra. Además, subieron al Classroom una captura de pantalla de su trabajo y una foto de las cuentas. Un ejemplo de uno de los trabajos fue:



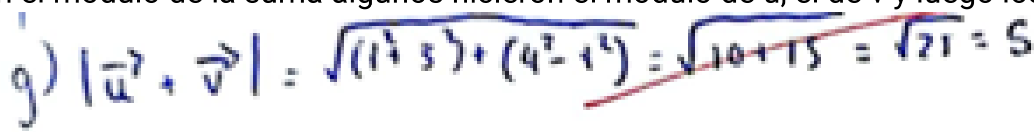
2.1.14 Examen

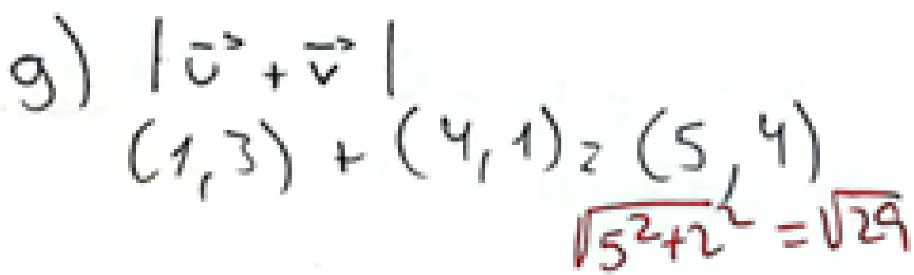
El examen estaba formado por seis ejercicios con varios apartados cada uno, todos ellos vistos en clase.

El primer ejercicio abarca el primer punto del tema: vectores, módulo y operaciones, tanto analítica como geométricamente. Antes de entregar el examen me comentó mi tutor que lo veía largo. Por ese motivo les dije a los alumnos que solo realizasen de forma geométrica los dos primeros apartados. Dos de ellos no se enteraron e hicieron solo los dos primeros apartados. Yo tenía intención de darle un folio con los ejercicios copiados al día siguiente y valorarlo ya que eran alumnos que en el examen anterior habían obtenido buenas calificaciones y esto les bajaba considerablemente la media, el ejercicio valía dos puntos, pero mi tutor se negó. Decía que las instrucciones habían sido claras. Escribí el nuevo enunciado en la pizarra y lo advertí varias veces durante el examen.

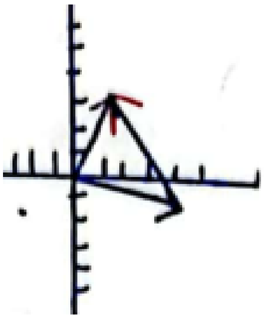
Los fallos más relevantes en este ejercicio fueron la parte geométrica y el módulo del vector suma. Muchos en la resta de vectores dibujaron bien la dirección pero no dibujaron la flecha, el sentido. El ejercicio que no veía claro no lo puntué.

En el módulo de la suma algunos hicieron el módulo de u, el de v y luego los sumaron.





$9)\ |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{1^2+3^2} + \cancel{\sqrt{4^2+(-1)^2} = \sqrt{10+17}} = \sqrt{29}$



El ejercicio dos era de calcular las distintas ecuaciones de la recta a partir de un punto y un vector dado. Lo puse todo positivo para que no hubiese confusión. Por lo general lo hicieron bien, lo habíamos trabajado mucho en clase. El fallo más repetitivo fue a la hora de calcular la ecuación continua, la despejaban al revés. Yo creo que fue porque se habían estudiado la fórmula a pesar de que insistí en que las deduciesen y no se estudiasen tanto de memoria. La memoria puede jugar una mala pasada en una situación de nervios.

E. Continua: $\cancel{\dfrac{2-x}{3}} = \dfrac{5-y}{4}$ ✗

El ejercicio tres era de calcular el vector $\overrightarrow{AB}$ y la distancia entre dos puntos. El apartado a) en general lo hicieron bien pero el b) no. A pesar de que la distancia entre dos puntos es el módulo del vector calculado en el apartado a), y en el primer ejercicio la mayoría tuvieron bien el cálculo del módulo, en este apartado lo quedaron sin hacer. Insistí bastante en clase en esto pero no hubo resultado.

b) $d(A,B) = (a_2-a_1)+(b_2-b_1) = (6,-1)$ ✗ $\sqrt{6^2+(-1)^2} = \sqrt{37}$

$|\overrightarrow{AB}|$ $\cancel{\sqrt{(-1,2)^2+(5,1)^2} = (-1,2)+(5,1) = (4,3)}$

$\cancel{\sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5u}$ $\sqrt{6^2+(-1)^2} = \sqrt{37}$

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5,1)-(-1,2) = (6,-1)$ ✓

d(A,B) →

¿ b)? $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2+(-1)^2} = \sqrt{37}$

El ejercicio cuatro era muy sencillo para todo aquel que tuviese claros los conceptos. Muchos confundieron el vector director con el vector normal. Hicimos muchos ejercicios en clase de este tipo. Además puse una ecuación continua para que no tuvieran problema ni con el vector general ni con el punto. Los fallos más repetitivos fueron:

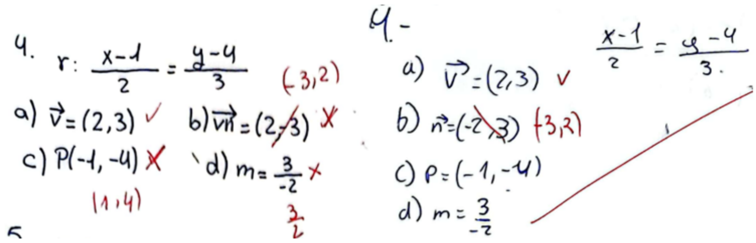
4.- $3x-3 = 2y-8$; $3x-2y+5=0$; $2y = 3x+5$; $y = \dfrac{3x+5}{2}$

a) (3,-2)

b) (2,3)

Por otro lado, cuando corregí los exámenes me di cuenta de que dos alumnas habían copiado.

Este ejercicio lo tenían igual. Eran fallos muy cantosos y encima ambas se sentaban al lado. Por el interés que mostraba una de ellas en clase y el desinterés de la otra sabía de antemano quien era. No puse nota a sus exámenes y les dije que hasta que no me admitiesen quién había copiado de quién estaban ambas suspensas. Rápidamente una de ellas lo admitió. Yo le hubiese puesto un 0 pero mi tutor no lo creyó conveniente ya que la que había copiado no llegaba al 4 y estaba suspensa.


4. $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3}$ $(-3,2)$

a) $\vec{v} = (2,3)$ ✓ b) $\vec{m} = (2,\cancel{3})$ ✗

c) $P(-1,-4)$ ✗ $(1,4)$ d) $m = \frac{3}{-2}$ ✗ $\frac{3}{2}$

4- $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3}$

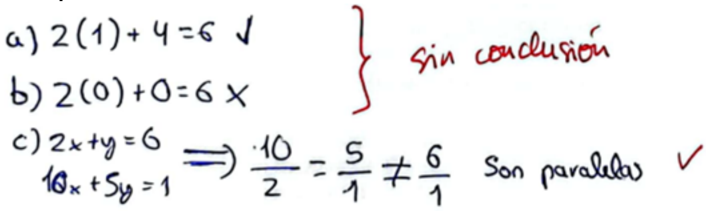
a) $\vec{v} = (2,3)$ ✓

b) $\vec{n} = (-2,3)$ $(3,2)$

c) $P = (-1,-4)$

d) $m = \frac{3}{-2}$

El ejercicio cinco fue sin duda el peor. Lo trabajé mucho en clase pero sabía que no lo habían llegado a entender todos.
El ejercicio seis era muy fácil. El único fallo que tuvieron fue no ponerme conclusiones. Por ese fallo quité una décima solamente.


a) $2(1)+4=6$ ✓

b) $2(0)+0=6$ ✗

sin conclusión

c) $2x+y=6$, $10x+5y=1$ $\Rightarrow \frac{10}{2} = \frac{5}{1} \neq \frac{6}{1}$ Son paralelas ✓

Las calificaciones fueron bastante altas. Se nota el alumno que estudia y el que muestra interés por la asignatura. No puedes facilitarles más las cosas. Hubo una media de 7.68, en mi opinión es bastante alta y estoy muy contenta.
A pesar de haber realizado varias actividades, todo el peso de la nota se lo llevó el examen.

A	B
	GEOMETRÍA
Alumno 1	9,33
Alumno 2	9,78
Alumno 3	9,25
Alumno 4	1
Alumno 5	9,78
Alumno 6	10
Alumno 7	6,53
Alumno 8	9,56
Alumno 9	4,36
Alumno 10	6,28
Alumno 11	5,42
Alumno 12	10
Alumno 13	10
Alumno 14	9
Alumno 15	8,35
Alumno 16	4,43
Alumno 17	7,08
Alumno 18	7,81
Alumno 19	3,8
Alumno 20	6,93
Alumno 21	7,13
Alumno 22	10
Alumno 23	8,16
Alumno 24	7,63
Alumno 25	9,56
Alumno 26	7,28
Alumno 27	10
Alumno 28	7,78
Alumno 29	5,2
Alumno 30	8,28
Alumno 31	8,38
Media	7,680322581

A pesar de plantear y evaluar las diferentes actividades que realicé durante este periodo, mi tutor solo se quedó con la nota del examen. Por ese motivo plantearé en la sección de Propuestas de Mejora cómo llevaría a cabo la evaluación.

2.1.15 Evaluación de mi labor durante este periodo

Unos días depués de finalizar las clases, les hice a los alumnos una encuesta para evaluar mi labor durante el periodo de prácticas. La encuesta la envié vía Classroom y la hice en Google Form. Les avisé que era anónima y podían contestar con toda sinceridad. No todos contestaron, pero sí la mayoría. Estas son algunas de las respuestas que obtuve.

Me han gustado las coases, sobre todo que respondías todas las preguntas por estúpidas que fueran, y yo almenos me lo he pasado mejor cuando has estado tú dando las clases. Gracias.

Me ha parecido bien

Me ha parecido que los temas han sido muy bien explicados. Además, has sido muy simpática y amable en todo momento.

Mi opinión es muy sencilla: increíbles.

A mi parecer y sin ofender las opiniones de mis compañeros, no cabe duda de que sus explicaciones han resultado en un sinfín de conocimientos acerca de los temas explicados durante su estancia en el centro como instructora, además de los momentos tan graciosos los cuales serán bien recordados. Para concluir le deseo una gran carrera como tutora, y que tenga suficiente paciencia para soportar a personas de nuestra edad que se que algunas veces puede llegar a ser un tanto tedioso. Saludos cordiales desde Cuenca.

A mí los temas en sí no me han gustado mucho, pero creo que los has explicado bastante bien.

muy entretenidos y he aprendido mucho

Es increible la manera de explicar, tienes mucho futuro y espero que sigas dando clase por que eres una autentica experta

Está todo bastante bien pero habría que ir un poquito más despacio sobretodo en temas complicados para que se enteren todos los compañeros de clase

Temas que se necesitaban trabajar para sacarlos adelante y eso es lo que hemos hecho en clase, trabajarlos

Bastante interesantes y bien explicados.

Me ha gustado mucho poder empezar a aprender la trigonometría y geometría analítica por primera vez. Las clases han sido entretenidas y fáciles de seguir.

En mi opinión los has explicado muy bien y me gustó que hiciéramos alguna clase para resolver dudas :)

A la mayoría de los alumnos les han gustado las clases. Muchos me agradecieron el último día el quedarme con ellos en los recreos para resolver dudas y mandarle los ejercicios hechos ya que les habían venido muy bien a la hora de estudiar, no les había costado tanto.
A raíz de esta encuesta he concluido que mi labor docente ha sido buena y, por lo general, el examen y las actividades habían sido acordes al nivel impartido ya que han sabido responderme bien.

Capítulo 3 Propuestas de mejora

En este apartado vamos a hablar de posibles propuestas de mejora para el desarrollo de la Unidad Didáctica de Geometría Analítica en 4º ESO: mejoras en la metodología, secuenciación y evaluación.

Metodología

Respecto a la metodología, creo que mejoraría de la siguiente forma:

Enviar ejercicios para casa. Como el nivel general de la clase era alto, en ocasiones, seguíamos un ritmo demasiado elevado durante las sesiones y no mandábamos deberes para casa. Esto puede ser insuficiente para aquellos alumnos que tienen algún tipo de dificultad con esta materia. Yo prefiero mandar deberes y que trabajen todos los días un poco en casa, que se enfrenten ellos solos a los problemas. En estas ocasiones, como se hacían y se corregían entre todos, muchos la primera vez que se enfrentaban a los problemas era el día del examen. Aunque sea un grupo bueno creo que esto les ayudaría a crecer y a obtener mejores calificaciones. Mi tutor prefiere no mandar deberes ya que piensa que se les carga demasiado a los alumnos. Yo veo que, con un par de ejercicios todas las tardes, acostumbras al alumnado a estudiar a diario y llevar las cosas al día. Para el día del examen solo tienes que dar un repaso general y no cuesta tanto.

Otros métodos que pueden mejorar la metodología son los siguientes:

Aprendizaje basado en proyectos. “Aprendizaje basado en proyectos”, 2017 Metodología de diseño y programación que consiste en llevar a cabo un conjunto de tareas centradas en la resolución de preguntas o problemas (retos). En este proceso, el alumnado realiza investigaciones o crea proyectos trabajando de forma relativamente autónoma, con un alto grado de implicación y cooperación. La culminación de este proceso es la presentación de un producto final ante sus compañeros (difusión).

En este método me basé a la hora de plantear la actividad. Fue muy breve por falta de tiempo, solo me dejaron usar una sesión. Si hubiese dispuesto de más tiempo la hubiese completado de la siguiente manera:

En primer lugar, dividiría la clase en grupos de 4 o 5 personas. Los grupos los haría yo para que no hubiese problemas. Les dejaría una sesión para que investigasen sobre parques y características geométricas que pudiesen encontrar en ellos.

La segunda sesión consistiría en lo siguiente: hacer un boceto del parque identificando las áreas principales que quieran incluir. Además, se nombraría a un responsable del grupo para distribuir las tareas.

La tercera sesión la dedicaríamos a, mediante rectas y segmentos, diseñar senderos y caminos. Los jardines mediante circunferencias y elipses y otros elementos usando curvas y parábolas.

La cuarta sesión consistiría en introducir todo eso que han calculado en GeoGebra para modelar el parque.

La quinta sesión la dejaríamos para revisar los fallos que pudiesen tener y elaborar las presentaciones.

Por último, dedicaríamos otra sesión a exponer a los compañeros en qué consiste nuestro parque y por qué está diseñado así.

Esta actividad, al realizarse durante las sesiones y con mi supervisión, también valoraré la implicación de cada miembro del grupo por separado. Además, valoraré la correcta aplicación de los

conceptos de geometría y la presentación del plano del parque. Por otro lado se valorará la exposición, la fluidez con la que se presente.
Este tipo de proyectos fomenta en los estudiantes el trabajo en equipo, la resolución de problemas y la curiosidad para investigar matemáticas. Por otro lado fomenta el trabajo en equipo, la resolución de problemas, la investigación y la comunicación entre los miembros del grupo. Tienen que llegar a acuerdos.
Por otro lado, estos proyectos pueden relacionarse con otras asignaturas y trabajarlo conjuntamente.

Gamificación "Gamificación: el aprendizaje divertido", s.f. es una estrategia pedagógica que utiliza elementos de juegos en contextos no lúdicos. Estos juegos captan la atención del alumnado y fomentan el esfuerzo diario.
No pude plantear este tipo de metodología ya que mi tutor no quería mandar deberes y trabajos a los alumnos. Yo lo haría de la manera siguiente:
En primer lugar, a la hora de comenzar un tema, plantearía una pregunta en ClassDojo (una plataforma en la que se pueden dar puntos e insignias). La actividad sería de investigación, ya sea de un matemático implicado en el tema que estuviésemos abordando o investigar sobre la unidad didáctica que fuésemos a impartir. Con actividades como esta les iría dando puntos. Todas serían voluntarias.
Estos puntos los podrían canjear más tarde por:

- Un punto más en la nota del examen.
- Un punto más en la nota de la evaluación.
- Conocer una pregunta de su examen.

Por otro lado propondría ejercicios de ampliación para todo el alumnado que lo desee, especialmente para el alumno de altas capacidades. Un ejemplo de ejercicio de ampliación sería:

Ejercicio 1

Sean los puntos
$$A(1,2), B(3,5)$$
Calcular el punto C sabiendo que ABC forma un triángulo equilátero.
Nota: Recordad que los triángulos equiláteros tienen todos los lados y ángulos iguales.

Ejercicio 2

Sean los puntos
$$A(1,2), B(3,5), C(6,2)$$
Calcular el punto D sabiendo que ABCD forma un paralelogramo.
Nota: Recordad que los paralelogramos tienen los lados paralelos dos a dos.

Ejercicio 3

Dada la definición de producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

Sean

$$\vec{u} = (3, 4), \vec{v} = (-1, 1)$$

Calcular:

- ✿ El producto escalar de ambos vectores.
- ✿ El ángulo que forman ambos vectores.

Ejercicio 4

Dados los puntos

$$A(1, 2), B(3, 5), C(6, 2)$$

- ✿ ¿Están alineados?
- ✿ Divide el segmento AB en 3 partes iguales.
- ✿ Divide el segmento AC en 4 partes iguales.

Ejercicio 5

Dado el vector

$$\vec{u} = (-4, 1)$$

Calcular un vector de módulo 3 que tenga la misma dirección que este.

Ejercicio 6

Dos puntos Q y Q' son simétricos respecto a un punto, P, si P es el punto medio del segmento Q y Q'.
Ejercicio 6: Sean los puntos

$$A(1, 2), B(3, 5)$$

Calcular el punto simétrico de A respecto de B.

Con este tipo de propuestas planteadas, los alumnos mostrarían más interés en la investigación y competirán entre ellos por ver quien tiene más puntos.
Evaluación continua. Iría sometiendo al alumnado a ciertas pruebas para evaluar las competencias y así quitarle peso al examen. Se juegan mucho a un día.

Atención a la diversidad.

Respecto a la atención a la diversidad la mejoraría implementando las siguientes actividades:

- Al principio todos tendrán las mismas pero una vez vaya viendo la evolución de cada alumno, cada uno tendrán unas actividades acordes a sus dificultades. Además, la dinámica será la siguiente: comenzaré la clase con un esquema del tema para que los alumnos vean lo que vamos a ver. A continuación se irán desarrollando las sesiones y haré ejercicios resueltos para que tengan como ejemplo. Luego mandaré actividades de esa sección. Estas actividades serán las mismas para todos. A partir de ahora, las actividades de repaso serán individualizadas.
- Con el alumno de altas capacidades procedería de forma similar. Además era un alumno que le encantaban las matemáticas, siempre estaba con muchas ganas de aprender. Por ese motivo, elaboraría apuntes y ejercicios de ampliación para que no se aburra durante las sesiones. Trataría los siguientes temas:
  1. **Producto escalar**. Durante las sesiones quise explicarlo ya que es algo muy sencillo, el nivel de la clase era alto y venía muy bien para explicar el concepto de perpendicularidad de vectores pero mi tutor no lo consideró oportuno ya que decía que no era temario de este curso. Por lo tanto incluiría en los apuntes de ampliación el concepto de producto escalar y sus aplicaciones.
  2. **Argumento de un vector.** A pesar de ser temario del libro mi tutor me comentó que, como el argumento no se usa en demasiadas ocasiones, mejor no explicarlo. Yo lo incluí en los apuntes pero no lo expliqué por ese motivo. En mi opinión, ya que vienen del estudiar la unidad didáctica de trigonometría, tienen los ángulos muy frescos y es el mejor momento para explicarlo. Por lo tanto, lo incluiría en los apuntes de ampliación.
  3. **Punto simétrico de un punto P respecto a otro punto Q.** Ya que hemos dado el punto medio de dos puntos, incluiría en los apuntes el concepto de punto simétrico al ser un concepto parecido.
  4. **Cálculo de vectores unitarios**.
  5. **Vectores en tres dimensiones**.

Además, podríamos hacer actividades extraescolares para aprender esta Unidad Didáctica de Grado En Educación Primaria, s.f. Para los alumnos TDAH adaptaría esta actividad dandole una lista con todos los pasos que tienen que seguir. Un ejemplo de actividad sería:

Actividad

Exploración del parque Castelar

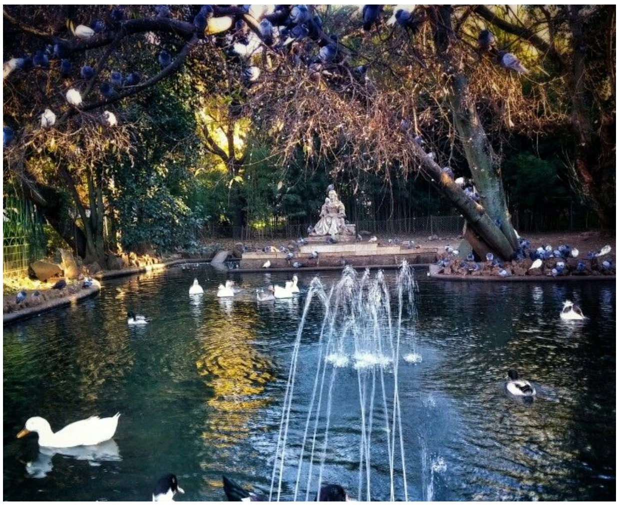
Para fomentar el interés del alumnado sobre la Geometría Analítica, organizaremos una actividad extraescolar al parque Castelar que se encuentra en las proximidades del IES ZURBARÁN.
Para el desarrollo de esta actividad, los materiales necesarios serán:

- Libreta y bolígrafo
- Cámara o teléfono móvil
- Calculadora
- Mapa del parque Castelar con cuadrícula para poder establecer ellos las coordenadas.

Actividad
En primer lugar, dividiré a los estudiantes en grupos de 4 o 5 personas y le daremos a cada grupo un mapa. En cada mapa situaremos el sistema de referencia en un lugar distinto para que no puedan fijarse unos grupos de otros.
En segundo lugar explicaremos a los alumnos lo que tienen que hacer:

1. Identificar los puntos de referencia de los distintos lugares del parque situados en el mapa.
2. Identificar los elementos geométricos que aparecan en el parque: fuentes, calles...
3. Calcular las ecuaciones de los elementos identificados anteriormente.

En tercer lugar reuniremos a los grupos y compartiremos con el resto de la clase lo que ha hallado cada grupo. Cada uno tendrá una ecuación diferente ya que las referencias son distintas.
Por último haremos un debate en clase y un cuestionario sobre lo aprendido y su opinión sobre el tema.



Imágenes parque Castelar

Imágenes parque Castelar

3.1. Temporalización y secuenciación

Respecto a la temporalización y la secuenciación, el problema ha estado en la multitud de actividades extraescolares y excursiones que tienen en este nivel. Cuando empecé la Unidad Didáctica, 4 alumnos estaban de excursión en Suecia. Como eran tan pocos, avanzamos con el resto de la clase. En esa semana expliqué toda la parte teórica del tema y cuando volvieron, estuvimos dando clases extra en los recreos porque estaban un poco perdidos. Solo se habían podido ir 4 a esta excursión porque eran los mejores expedientes de 3º ESO. Por ese motivo, no les perjudicó demasiado.
Además, otro día hubo una actividad biología y faltaba la mitad, por lo que no avanzamos. Otro nos pidió la hora la de filosofía para hacer otra actividad. Además, perdimos dos lunes seguidos de clase porque el orientador venía a dar las charlas sobre las optativas de Bachillerato.
En resumen, estuvimos casi un mes con esta unidad didáctica, cuando volvíamos teníamos que volver a explicar actividades anteriores ya que no se acordaban.
Para mejorarlo, propongo lo siguiente:

- Dividir el tema en dos partes, la primera en formada por vectores y ecuaciones de la rectas y la segunda por distancias y posiciones relativas.
- En lugar de explicar todo la primera semana y luego estar el resto de días constantemente recordando y volviendo a explicar lo mismo, haría una actividad evaluable a modo de control al final de la primera semana. Así me aseguro que los estudiantes la estudian y la dominan.
- Proveer ejercicios para interactuar de manera más individual con algunos de los alumnos menos participativos para asegurarse de que están siguiendo bien las explicaciones. Además, evitar dar teoria los jueves a última hora, ya que los alumnos están más cansados y no se centran igual. Estas horas las dedicaría a hacer ejercicios. Por otro lado cambiaría las horas de tutoría y matemáticas de los viernes, ya que están más frescos por la mañana a primera hora que a quinta.

Por otro lado, creo que debería haber ido un poco más lenta en esta clase. Como eran muy buenos, avanzaba demasiado y creo que no todos los alumnos conseguían enterarse de todos los conceptos. Además, muchos no preguntaban dudas.
Al ser principiante, me he dado cuenta que las sesiones no cunden lo que pensaba. Al principio preparaba todos los días algo de temario y 6 o 7 ejercicios para hacer durante la sesión. Sin embargo, solo daba tiempo a hacer 2 o 3 ejercicios. Los demás o los hacía otro día al final de la clase, como repaso o, en los casos en los que no me dio tiempo, los hice yo y se los mande corregidos.

Por último, debemos aumentar el uso de herramientas tecnológicas ya que facilitan las explicaciones. Los docentes todavía no las usan lo suficiente a pesar de que tenemos a nuestra mano tanto ordenadores como pizarras digitales y multitud de herramientas en línea.

3.2. Evaluación

Debemos evaluar a los estudiantes de manera constante y en todo momento. Esta evaluación es continua, se observa y se hace un seguimiento regular de cada estudiante. Se considera la situación particular de cada uno, sus capacidades y cómo aprenden mejor, para poder ajustar el apoyo necesario durante todo el curso.

Además, la evaluación tiene un propósito formativo, es decir, no solo mide el progreso, sino que también ayuda a orientar y mejorar tanto la enseñanza como el aprendizaje. Proporciona información útil para los profesores, los estudiantes y sus familias, y se utiliza para hacer ajustes que beneficien el proceso educativo en general.

La evaluación debe ser integral. Debemos considerar las diferentes competencias y habilidades de los estudiantes. La evaluación podría mejorarse de la siguiente manera:

Respecto a los exámenes también podríamos complementarlos con cuestionarios tipo test con preguntas de opción múltiple, verdadero/falso, relacionar y preguntas abiertas. Con esto podríamos evaluar la parte teórica del temario. También podemos añadir ejercicios de cálculo, resolución de ecuaciones o identificación de elementos geométricos en el plano. Además, incluiría algún ejercicio de ampliación algo más complicado para poder subir la nota. Solo lo puntuaría si la respuesta fuese razonada. En este curso el tutor no creía conveniente añadir ejercicios de ampliación ya que las notas eran buenas, pero en 2º ESO algunos alumnos lo resolvieron pero sin razonarlo. Por ese motivo solo lo evaluaré si noto que el alumnado sabe los conceptos.

Respecto a los ejercicios prácticos, podemos plantear problemas que requieran el uso de conceptos de geometría analítica como la ecuación de la recta, la parábola, el círculo,etc. Además incluiría problemas de la vida real y actividades online como Khan Academy para geometría analítica, s.f., y fomentaría el uso de herramientas tecnológicas.

Para ello les proporcionaría en Classroom el enlace a las actividades y les explicaría cómo registrarse. Cuando acabasen todos los ejercicios, deberán compartirme los logros de cada uno para valorar su esfuerzo de manera individualizada.

En segundo lugar, podríamos incluir diarios de aprendizaje. Estos diarios consisten en registran registrar todos los días lo que han aprendido, las dificultades que han tenido a la hora de abordarlos y reflexiones sobre los temas tratados. Con esto nos ayudaría a saber qué parte del temario debemos reforzar.

En tercer lugar, habría una sección del tema para resolver ejercicios en grupo. En esta sección evaluaremos la participación y colaboración en actividades grupales donde se resuelvan este tipo de problemas. Evaluaría el trabajo de forma individualizada para evitar que siempre trabajen los mismos en los grupos y la nota sea para todos la misma.

En cuarto lugar, podríamos incluir preguntas orales. Podemos plantear preguntas rápidas durante las sesiones para evaluar la comprensión inmediata de los conceptos.

En quinto lugar evaluaría las libretas de los alumnos para ver el seguimiento de las clases. Lo haría de forma reiterada para ver que copian el temario de forma organizada. Esto les vendrá bien para cursos superiores.

Además, evaluaría las actividades de investigación propuestas en las secciones anteriores. Por último realizaría una autoevaluación para que el alumnado evalúe su aprendizaje y otra coevaluación entre compañeros para que los estudiantes evalúen el trabajo de los demás.
Todos los días tomaría notas sobre la participación, actitud y trabajo en clase de todos los alumnos.

3.2.1. Criterios de evaluación

Usaré los siguientes criterios del DOE., 2022 para evaluar:

- Competencia específica 1.
  - **Criterio 1.1**. *Reformular de forma verbal y gráfica problemas matemáticos, interpretando los datos y preguntas planteadas.*
  - **Criterio 1.2**. *Utilizar herramientas digitales adecuadas para representar matemáticamente la información más relevante de un problema resolviendo situaciones problematizadas.*
  - **Criterio 1.3**. *Analizar y seleccionar diferentes herramientas y estrategias elaboradas para resolver un mismo problema valorando su eficiencia.*
  - **Criterio 1.4**. *Obtener todas las soluciones matemáticas de un problema movilizando los conocimientos necesarios y las herramientas tecnológicas necesarias.*

  Estos criterios los utilizaré para evaluar los ejercicios realizados en clase, ya sea en la pizarra o en la libreta, y en el examen.
- **Competencia específica 3**.
  - **Criterio 3.3**. *Plantear variantes de un problema que lleven a una generalización.*
  - **Criterio 3.4**. *Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.*

  Estos criterios los utilizaré para evaluar las Actividades relativas a Khan Academy y Gamificación mediante Classdojo.
- **Competencia específica 5**.
  - **Criterio 5.1**. *Conectar los conocimientos y experiencias matemáticas entre sí para formar un todo coherente.*

  Este criterio se usará a lo largo de toda la Unidad Didáctica para garantizar que entienden los conceptos abordados.
- **Competencia específica 6**.

- **Criterio 6.1**. *Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.*

Lo usaré para evaluar la actividad Exploración del Parque Castelar.

- **Competencia específica 7**.
  - **Criterio 7.1**. *Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, los conceptos, los procedimientos y los resultados matemáticos visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos.*
  - **Criterio 7.2**. *Seleccionar entre diferentes herramientas, incluidas las digitales, y formas de representación (pictórica, gráfica, verbal o simbólica) valorando su utilidad para compartir información.*

Lo evaluaré con las actividades que requieran el uso de las nuevas tecnologías, sobre todo Geogebra.
Todos estos criterios serán los mismos para todos los alumnos, pero estableceré rutinas para los alumnos ANEAE/ACNEE y ayudas visuales, instrucciones paso a paso, y descansos frecuentes para mantener la atención y el enfoque. Además implementaré refuerzos positivos y estrategias de manejo del comportamiento.

- **Competencia específica 10**.
  - **Criterio 10.1**. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y juicios informados.
  - **Criterio 10.2**. Gestionar el reparto de tareas en el trabajo en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa y responsabilizándose del papel asignado y de la propia contribución al equipo.

Con estos criterios evaluaré la actividad grupal Parque Castelar.

3.2.2. Instrumentos de evaluación

- **Cuaderno**. Tener el cuaderno limpio y ordenado con los ejercicios hechos es una tarea imprescindible.
- **Realización de actividades en clase**. Completar los ejercicios de clase mostrando así compromiso y dedicación hacia el trabajo en la asignatura.
- **Realización de las tareas de casa**. Realizar los ejercicios asignados para hacer en casa, asegurando la práctica y consolidación de los conceptos aprendidos.
- **Realización de ejercicios en la pizarra**. Participar en la resolución de ejercicios en la pizarra, valorando tanto el esfuerzo por participar como la correcta realización del ejercicio.
- **Tareas optativas**. Entregar este tipo de tareas muestra mayor interés por la asignatura.
- **Examen**. Realizar una prueba escrita que evalúe los conocimientos adquiridos a lo largo del tema.

Para evaluar estos instrumentos usaremos las competencias específicas 1,3 y 5 y los calificaremos con los criterios de evaluación mencionados anteriormente.

- **Realización de trabajos individuales y en grupo**. Lo trabajaremos en la actividad Exploración del parque Castelar, donde trabajaremos las competencias específicas 6,7 y 10 y lo calificaré con los criterios de evaluación mencionados anteriormente.

Alumnos con actitud hacia la asignatura

Alumnos en la pizarra

Cuaderno

Criterios de calificación

Para calificar al alumnado de forma continua y no darle tanto peso a la nota del examen lo repartiría de la siguiente forma:

- Que el alumno preste atención, colabore, presente buena predisposición a la hora de realizar las tareas que se mandan, prestarse voluntaria para la resolución de ejercicios y problemas planteados en clase. A pesar de haberselo planteado, mi tutor solo evaluó el examen. Por ese motivo, le daría un pequeño peso de la nota.
- Que el alumno traiga resueltas las tareas mandadas para realizar en casa. Además como iré revisando las libretas progresivamente, podré llevar este seguimiento.
- Que el alumno aprenda a trabajar en equipo, desarrollar los conceptos y contenidos aprendidos en la UD, que sepa defender públicamente el trabajo realizado. Lo valoraré en las actividades orales y en los trabajos en grupo. Lo veremos en la actividad Parque Castelar.
- Prueba Escrita, en la que se sintetizan todos los contenidos vistos en la UD y se evalúan los estándares de aprendizaje que incluye el Decreto 98/2016. Este criterio lo valoraría de la misma manera incluyendo un ejercicio de ampliación en el examen. Éste se llevará la mitad del peso de la nota.
- Prueba de recuperación, destinada a aquellos alumnos que no superen los criterios de evaluación cuya nota será como máximo un 5. En esta prueba bajaría un poco el nivel para intentar que la mayoría del alumnado apruebe al estar en la ESO.

Además realizaremos las actividades de Gamificación mencionadas anteriormente y podrán sumar hasta un punto en la nota final.

En estos capítulos anteriores me he basado en la estructura de los documentos I.Z., 2022 y C., 2021

Capítulo 4 Otras actividades desarrolladas

Claustro de profesores. Se votó para la matrícula y las optativas en 2º de Bachillerato.

Reunión de Departamento. El 6 de mayo a las 17:00h hubo una reunión de departamento. La reunión se realizó online vía zoom y se abordaron temas como evaluaciones en 2º de Bachillerato, fechas de recuperaciones de la ESO y EBAU.

Reuniones con órganos de coordinación didáctica. Todos los jueves 3º hora asistimos a reuniones con los tutores de 4º. Los temas abordados principalmente fueron:

- Propuestas a Diversificación o FP Básica de varios alumnos para el siguiente curso escolar.
- Propuestas a Grado Medio.
- Pasos a seguir para echar la beca MEC.
- Se recomendó echar también la beca de libros por si algún alumno repetía.
- Modalidades de Bachillerato, prematrícula y EBAU.

Día del centro.

El 10 de abril se celebró en el instituto el día del centro.

Comenzó a las 8:15. Los padres y madres del AMPA estuvieron repartiendo churros con chocolate a todos los alumnos y profesores para desayunar. A continuación hubo un concurso de ciencia donde los alumnos divididos en dos categorías (de 1º a 3º ESO y de 4º ESO a 2º Bach) fueron presentando diferentes experimentos. Nosotras estábamos sentadas en la mesa con una urna para que votaran los profesores y demás alumnos el experimento que más les gustase que se usó después para decidir los ganadores.

En segundo lugar participamos en LA CALCULADORA HUMANA, un taller que consistía en hacer cuentas mentalmente. El alumno o alumna que menos tiempo tarde ganaría el juego. Todos los alumnos tenían dos intentos y los agrupamos por cursos. Luego estuvimos en la degustación de postres. La sala estaba dividida en dos partes, los de francés y los de inglés y ganaría el postre más votado. Podían votar todos los alumnos y profesores y probarlos todos. Hubo un ganador de francés y otro de inglés.

Vimos también el laboratorio de Biología que tiene animales disecados, entre ellos un murciélago, un mono, una gallina o una ardilla. La profesora de Biología responsable del laboratorio se encargó de hacer exposiciones y explicar la historia de todo lo que recoge dicho laboratorio.

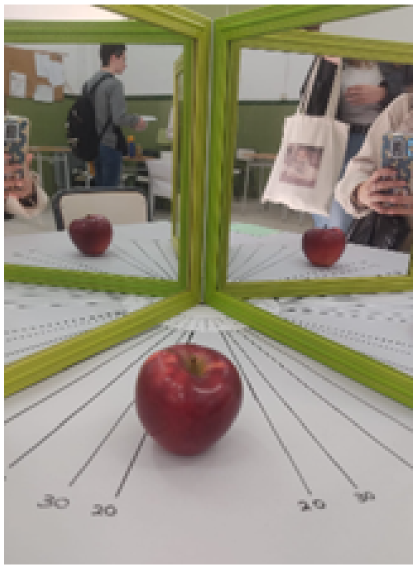
Más tarde, en el patio, los alumnos de TAFAD estuvieron haciendo una clase de zumba para todos.

Para finalizar, dieron los premios de las diferentes actividades en el salón de actos y los profesores nos quedamos a comer en el instituto, hicieron una barbacoa.

Pancarta día del Centro

La Calculadora Humana

Experimentos



Experimentos

Laboratorio de Biología

Charla con el orientador. Durante dos lunes consecutivos, el orientador del centro y la jefa de estudios de Bachillerato han dado una charla a los alumnos de 4º relativa a las posibilidades para el siguiente curso escolar.

Reuniones de evaluación. Las evaluaciones tuvieron lugar la semana justo después de Semana Santa. Asistí a todos los grupos a los que les damos clase.

Taller de guitarra Los jueves a 3ª hora voy a un taller de guitarra y me quedo para ensayar en el recreo con el coro del instituto.

Por otro lado, la profesora encargada de las actividades extraescolares organiza todos los viernes el famoso “dresscode”, donde todos los profesores y alumnos en prácticas tenemos que ir vestidos de alguna temática. También organiza ciertos viernes desayunos, como el “desayuno semanasantero” que hicimos en la sala de profesores el día antes de las vacaciones de Semana

Santa, en el que todos los profesores llevaron algún dulce típico.

4.1. Otros cursos donde mi tutor imparte clases

4.1.1. 1º ESO Bilingüe

1º ESO B/C

Grupo: Es un grupo formado por 29 alumnos, la mayoría con muchas ganas de aprender matemáticas. Son alumnos muy buenos por lo general, atienden en clase y son participativos. Se pelean por salir a la pizarra y normalmente los sacaba en orden de lista. Hay un par de ellos revoltosos pero se controlan bien. En este grupo me he quedado varios días sola para acostumbrarme como sería una clase sin otra persona responsable y se han portado bastante bien. En cuanto a atención a la diversidad solo hay un alumno con adaptaciones.

Actividades realizadas.

En este grupo estuve observando durante la impartición de la unidad didáctica de fracciones y operaciones. La dinámica fue ayudar a resolver dudas. Durante ese tiempo los fui conociendo. Además elaboré y corregí el examen.

En segundo lugar impartí la Unidad Didáctica de Proporcionalidad y porcentajes. La mayoría no tuvieron problemas. La dinámica era resolver dudas del día anterior al inicio de la clase. A continuación, impartía la parte nueva de teoría que tenía planificado para esa sesión y comenzábamos a hacer ejercicios entre todos. Al final de la clase mandaba varios ejercicios que casi todos lograban acabar en el tiempo de clase y no era necesario mandar deberes. Los que no aprovechasen ese tiempo sí que lo tenían que hacer. Al inicio de la siguiente sesión pasaba a ver quién los había trabajado.

De esta unidad hicimos un Quizz. Les gustó mucho y el hecho de aprender a modo de competición les vino bien. Todos querían ganar. Obtuvieron entre un 71 y un 93 por ciento en la calificación.

Por último, empecé a impartir el tema de Álgebra. Solo me dio tiempo a explicar hasta el producto de polinomios.

4.1.2. 2º ESO Bilingüe.

2º ESO B/D

Grupo: Es un grupo formado por 30 alumnos, atentos, demasiado habladores y con ganas de participar pero un poco menos que los de primero. No hay ningún alumno con necesidades especiales. Muchas clases eran productivas pero a base de enfadarte con ellos al inicio de la clase y amenazarles con no salir al recreo, ya que muchos días teníamos clase justo antes de éste.
Actividades. Nada más llegar empecé a impartir clase con ellos. La parte de álgebra a estos niveles me gusta mucho y cuando llegué tocaba explicar las ecuaciones de segundo grado. En esta unidad didáctica no atendieron lo suficiente, al ver que había "profe nueva"solían hablar mucho y no conseguían entender las explicaciones por el ambiente que había. Cuando hice el examen se llevaron una sorpresa, un tercio de la clase suspensa. La siguiente unidad didáctica que impartí fue sistemas de ecuaciones. Para ello dediqué 10 sesiones, comenzando con el método de sustitución, a continuación igualación y después reducción. Los alumnos inicialmente tenían dificultades para comprender la presencia de dos variables en una ecuación, pero su comprensión mejoró con la exposición a diversos métodos.

Dificultades encontradas: despejar una función en los métodos de sustitución e igualación, sustituir correctamente en otra ecuación, igualar dos ecuaciones, calcular el mínimo común múltiplo con fracciones. Recordar calcular ambas variables.
La última parte del tema consistió en resolver problemas de sistemas de ecuaciones, que incluían problemas simples, relativos a edades, mezclas y áreas. Los alumnos encontraron especialmente difícil identificar ecuaciones en los problemas sin dibujos o tablas.
Por la cuenta que les traía, comenzaron a atender algo más pero tampoco lo suficiente. Mi tutor ya se enfadaba con ellos y todos los días había broncas y malos rollos en clase. Esta fue la otra unidad didáctica que desarrollé. Para ello elaboré apuntes usando el libro de texto y preparé actividades como un cuatro en raya y otro tipo de actividad.

Actividad especial: Dividí la clase en grupos de 4-5 personas y entregué a cada grupo problemas de la vida real. En primer lugar valoré el planteamiento del problema. Además debían realizar la resolución del problema mediante los tres métodos para que viesen que obtenían el mismo resultado ya que son equivalentes. En caso de que varios grupos lo tuviesen bien, valoraría la presentación y el tiempo que habían tardado en realizar la actividad. Al día siguiente le explicaron al

resto de la clase los problemas planteados.
Esta actividad la pensé para que viesen que podía darse el caso de tener que plantear un problema en la vida real ya que me decían repetitivamente "esto no lo necesito para ir a comprar el pan." Los sistemas de ecuaciones son muy útiles en cursos superiores y creo que deben dominarlos bien para no tener problemas.

Preparación para el examen:
Debido a la conducta habladora de la clase, no se pudieron realizar todos los ejercicios en clase. Por ello, se subió una lista de ejercicios resueltos a Classroom el día antes del examen. El último examen tuvo un 35 % de suspensos, una cifra inusualmente alta para este grupo.

Corrección del examen: Se hicieron dos modelos de examen debido a la ausencia de dos alumnos. Se observaron dificultades con fracciones y un problema específico que solo resolvieron cuatro alumnos. Se ajustó la puntuación del examen para beneficiar a los alumnos.

El alumnado es participativo y competitivo, discutiendo por corregir en la pizarra. Las últimas sesiones se organizó la participación por orden de lista. Aunque hay aspectos a mejorar, se notó progreso en algunos alumnos, y se incentivó el trabajo adicional con puntos extras en las calificaciones. Se prestó atención especial a una alumna con TDAH, permitiéndole más tiempo para completar el examen.
No elegí esta Unidad Didáctica para desarrollarla en el TFM porque no tenía ningún alumno ACNEAE/ACNEE. Cuando acabé las prácticas, justo la última semana recibimos un mensaje de un padre que le habían detectado a su hija TDA, pero no habíamos tomado ninguna adaptación ya que no sabíamos nada. Por ese motivo elegí la otra unidad a pesar de que este grupo, al ser algo más problemático, es más normal encontrarlo en cualquier instituto.

4.1.3. 4º ESO A/C

4º ESO A/C

Grupo: Nos encontramos ante un grupo de 21 alumnos, muy problemáticos. Hay 4 TDA, 3 TDAH y una alumna con fobia social que había que atender desde casa. Por lo general, no se podía avanzar. Interrumpían todas las clases con preguntas tontas como, en el tema de Geometría, "¿Por qué el cubo se llama cubo y no se parece al de la fregona?". Yo creo que este tipo de preguntas lo hacían para enfadar al profesor y así no dar clase. Hubo muchos problemas en este grupo. Un día un alumno fue a echar agua a otro y me mojaron a mí, que estaba detrás. Mi tutor les puso un parte a los alumnos implicados. Otro día desmontaron una silla y la pusieron en el sitio de mi tutor para que se cayese. En el instituto ya no se dejan tizas en las clases por culpa de este grupo ya que se las tiraban. Con todos estos problemas, los trasladaron a una clase en frente de jefatura para tenerlos más vigilados y cambiaron las mesas a otras que pesasen más porque las tiraban.
Actividades. En esta clase solía sentarme con un par de alumnas a ayudarles. No impartí ninguna clase ya que no respetaban a mi tutor y él pensaba que era mejor no preparármelas por miedo a que se comportasen peor. Mi tutor impartía las clases y yo vigilaba a los alumnos para que no hubiese problemas. Con esto mejoró algo el comportamiento, siempre había alguien que podía verlos.

Capítulo 5 Autoevaluación

Durante el periodo de prácticas he aprendido mucho. Se me ha hecho bastante corto, cuando empezaba a conocer a los alumnos y a tener confianza con ellos ha sido cuando se han acabado las prácticas. Al principio empecé con mucho miedo. Yo estaba acostumbrada a dar clases particulares y pensaba que con eso me servía pero que va. Llegar allí y ver tantos alumnos... me dio un poco de respeto. La primera clase que impartí fue en 2º ESO. Al ser tan habladores me enfadaban mucho. Sentía que podían conmigo. Gracias a mi tutor que los controlaba mejor, me respetaban algo más, aunque para mi gusto no lo suficiente. A muchos los mandabas a callar y te contestaban de malas maneras. Mi tutor les dijo que a la mínima que me faltasen el respeto a mí, iban a recibir consecuencias. En este grupo no me atrevía a dar clases sola. Menos mal que era el grupo bilingüe, eran los "buenos". En atención educativa teníamos al resto y eso sí que era difícil de llevar.

En este curso he estado muy cómoda impartiendo las clases. A pesar de los enfados, me cogieron mucho cariño. El último día de prácticas les llevé un detalle a cada uno y todos me decían "Profe no te vayas". Me dio mucha pena acabar. Un par de semanas después, fui al instituto a firmar los anexos de las prácticas y me pasé a verlos. Me recibieron con abrazos, diciéndome que me quedase a dar la clase. El segundo grupo que empecé a dar clase fue en cuarto. Los primeros días me sentía algo nerviosa. Eran alumnos más grandes y estaban siempre todos muy atentos. Pero conforme iban pasando los días, estaba más a gusto con ellos. Eran callados, participativos. Muchos días impartí clase yo sola ya que mi tutor me decía que así me iba acostumbrando. Por lo general les gustaron mis clases ya que en la evaluación que hice, la mayoría eran buenos comentarios.

"Me ha gustado mucho poder empezar a aprender trigonometría y geometría analítica por primera vez. Las clases han sido entretenidas y fáciles de seguir."

"Me han gustado las clases, sobre todo que respondías a todas las preguntas por estúpidas que parecieran. Me lo he pasado mejor cuando has dado tú las clases".

Estos comentarios me hicieron mucha ilusión. Pero sobre todo me gustó el siguiente comentario:

"Me ha gustado la manera de explicar. Espero que sigas dando clase, tienes mucho futuro."

Sin duda, aunque parezca mentira, donde más me ha costado impartir clases ha sido en primero. Cuando llegué el primer día los veía tan pequeños, parecía que estaban todavía en el colegio. Son niños. El primer día estaban dando operaciones con fracciones. Cuando llegaban a los problemas y me preguntaban dudas no era capaz de explicárselos. Yo los haría poniendo una x en el término que quisieses calcular pero... ¡Ellos todavía no saben nada de álgebra! Había que plantear los problemas con una tabla poniendo total y parte. Mi tutor me hizo un resumen de cómo había que resolver los distintos ejercicios y a partir de ahí mucho mejor.

El problema vino cuando empecé la Unidad Didáctica de Proporcionalidad y Porcentajes. Seguí mucho el libro porque no sabía el nivel que podían tener los alumnos, lo que se daba en cursos inferiores. Lo estuve consultando. Seguí el libro por lo general. Mi mayor miedo fue el bilingüe. Más que la parte de matemáticas me preparaba todos los días la parte de vocabulario en inglés que tocaba para ese día. Al leer los problemas buscaba las palabras que no conocía porque siempre, algún alumno te preguntaba por el vocabulario. Encima, en este tema, todo eran problemas. Además, había una alumna americana en clase. Temía pronunciar mal o entender mal el enunciado de un problema.

Como anécdota, un día hicimos un problema. Un alumno en la pizarra haciendo una división de números decimales, sin calculadora ya que en este nivel todavía no se permite. Me preguntó cómo hacerla ya que no se acordaba, lo habían dado un par de exámenes antes. Me costó explicárselo ya que hacía años que no resolvía cuentas así. Esa tarde me puse a recordar todo lo básico que se da en primaria que, con el uso de las calculadoras, se olvida con el tiempo.
Sin duda, fue el mejor grupo. Me quedaba sola con ellos y las clases se hacían amenas. Me veían mayor y me respetaban. Era un grupo ejemplar. Muchos alumnos me cogieron cariño. El día que fui a verlos, nada más entrar en clase todos contentos, estaban haciendo ejercicios de álgebra. Dos minutos después de entrar ya estaban preguntándome dudas sobre los ejercicios.
En resumen, las prácticas me han encantado, he aprendido a cómo tratar los alumnos en diferentes situaciones. Mi tutor me comentó que había progresado mucho, los primeros días estaba más nerviosa y daba por sabidas algunas cosas que no conocían los alumnos. Además, no siempre va la clase como te esperas. Un día traes una actividad y no hay Internet y no se puede hacer, o está la mitad de excursión, o simplemente están habladores ese día y no te da tiempo a acabarla. En segundo lugar, En general, el máster me ha parecido muy interesante, aunque creo que tiene un enfoque excesivamente teórico. Considero que habría sido mejor que las prácticas hubiesen sido todo el segundo cuatrimestre, ya que es en este periodo donde realmente se aprende. Además, algunas asignaturas tienen contenidos redundantes que podrían haberse aprovechado mejor desarrollando otras actividades, como analizar situaciones reales en el aula.

1. Psicología: Esta asignatura ha sido particularmente útil para manejar la clase, los alumnos y diversas situaciones en el aula.
2. Didáctica de las Matemáticas y Metodología: Estas asignaturas nos han acercado a las situaciones reales de un instituto, enseñándonos a desarrollar unidades didácticas y conocer plataformas para incluir las nuevas tecnologías en la enseñanza.
3. Fundamento: Estas clases nos han permitido recordar y profundizar en conceptos que podían haberse olvidado y que han sido útiles a la hora de impartir las clases.

Bibliografía

Aprendizaje basado en proyectos [Recuperado el 31 de mayo de 2017, de https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/pedagotic/aprendizaje-basado-proyectos/]. (2017).

C., S. P. (2021). Trabajo Fin de Máster [Vectores en el plano de 4o ESO MOEAC en el marco de las prácticas realizadas en el IES Maestro Juan Calero de Monesterio] [https://dehesa.unex.es/flexpaper/template.html?path=https://dehesa.unex.es/bitstream/10662/12555/1/TFMUEX_2021_Parrilla_Cubiella.pdf#page=4].

Cálculo vectorial y su aplicación en física [Recuperado el 15 de junio de 2023, de https://www.calculareas.com/calculo-vectorial-y-su-aplicacion-en-fisica/]. (2023).

de Grado En Educación Primaria, T. (s.f.). EL ENTORNO URBANO COMO RECURSO EDUCATIVO PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA [Recuperado el 4 de junio de 2024, de https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/30550/TFG-B.1130.pdf?sequence=1].

DOE., N. E. T. C. d. V. J. P. C. l. V. O. y. A. P. A. a. F. P. (2022). DECRETO 110/2022, DE 22 DE AGOSTO, POR EL QUE SE ESTABLECEN LA ORDENACIÓN Y EL CURRÍCULO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA PARA LA COMUNIDAD AUTÓNOMA DE EXTREMADURA [Recuperado el 4 de junio de 2024, de https://doe.juntaex.es/pdfs/doe/2022/1640o/22040165C.pdf].

Gamificación: el aprendizaje divertido [Recuperado el 4 de junio de 2024, de https://www.educativa.com/blog-articulos/gamificacion-el-aprendizaje-divertido/]. (s.f.).

I.Z., A. (2022). Trabajo Fin de Máster, MUFPES Especialidad Matemáticas [Estadística en 1o ESO en el IES Castelar] [https://dehesa.unex.es/flexpaper/template.html?path=https://dehesa.unex.es/bitstream/10662/15644/1/TFMUEX_2022_Indias_Zamora.pdf#page=1].

para geometría analítica, P. (s.f.). Preparación para geometría analítica (artículo) [Recuperado el 4 de junio de 2024, de https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-analytic-geometry/hs-geo-distance-and-midpoints/a/getting-ready-for-analytic-geometry].

y Cabezas y Ildefonso Maza Saez, J. M. A. (s/f). *Matemáticas 4 B ESO. Volumen 3. Proyecto 5 etapas*. BRUÑO.

ANEXOS

ESTHER RODRIGUEZ TEJEDA

ÍNDICE

01 ANEXO I

02 ANEXO II

03 ANEXO III

ANEXO I

ESTHER RODRIGUEZ TEJEDA

1º ESO B/C

EXÁMEN 1º ESO B/C 16/04/2024

OPERACIONES CON FRACCIONES

NOMBRE____ NOTA: __________

1. Calcula (1 punto)

A) $\dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{6}$ B) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{5}$

2. Calcula (1 punto)

A) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{5}$ B) $\dfrac{5}{2} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4}$

3. Calcula (0,5 puntos)

A) $\dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{7}{4}$ B) $\dfrac{7}{9} : \dfrac{8}{6}$

4. Calcula

A) $\dfrac{2}{3} + \left(4 + \dfrac{1}{2}\right)$ B) $\dfrac{7}{2} - \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{6}\right)$ C) $\left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{5}\right) + \left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{6}\right)$

5. Calcula

A) $\dfrac{1}{2} : \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3}\right)$ B) $\dfrac{3}{2} \cdot \left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{7}\right)$ C) $\left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{5}\right)$

D) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{6}\right)$

6. Simplifica las siguientes fracciones, hasta llegar a la fracción irreducible. (1 punto)

A) $\dfrac{15}{30} =$ B) $\dfrac{9}{12} =$

7. Write as you read the next fractions: (0,5 puntos)

A) $\dfrac{1}{2}$ ________________________________ B) $\dfrac{5}{7}$ ________________________________

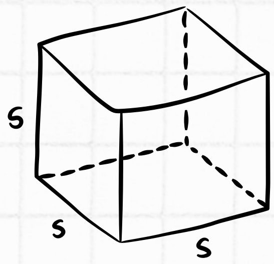
8. Juan ha enviado 15 mensajes de texto. Dos tercios de los mensajes son para sus amigos. ¿Cuántos mensajes ha mandado a sus amigos?

(0,5 puntos)

9. Los dos quintos de un bidón de agua son 8 litros. ¿Cuál es la capacidad total del bidón?

(0,5 puntos)

NOTA: Los ejercicios 4 y 5 valen 5 puntos. Cada uno de los ocho apartados valen lo mismo.



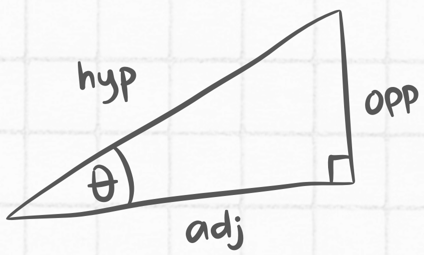
$V = s^3$

IES ZURBARÁN

PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

ESTHER RODRIGUEZ TEJEDA

GRUPO 1º B/C



$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp}$

EXAMEN 1º B/C 02/05/2024

PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

NOMBRE ____ NOTA _________

1. Resuelve el problema por **reducción a la unidad:**
   Un coche gasta 5 litros de gasolina cada 100 kms. ¿Cuántos litros de gasolina gastará el coche en recorrer 120 km?

2. Cuatro albañiles tardan en arreglar el tejado de una casa 18 días. Si quiero acabar el tejado en 12 días, ¿Cuántos albañiles tengo que contratar?

3. Un obrero gana 350 € en 7 días. ¿Cuánto gana en 14 días?

4. Una piscina con 3 grifos tarda en llenarse 24 horas. Si abrimos un grifo más, ¿Cuánto tardará en llenarse?

5. Calcula:

   a) 10% de 30 = ___
   b) 25% de 400 = ___
   c) 20% de ___ = 24
   d) __% de 65 = 26

6. En el aparcamiento de unos grandes almacenes hay 420 coches, de los que el 35 % son blancos. ¿Cuántos coches hay blancos? ¿Y cuántos coches hay de otro color que no sea blanco?

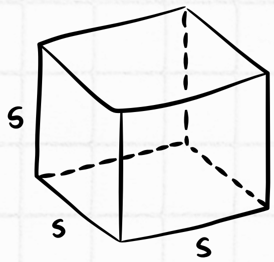
7. ¿Cuánto me costará un abrigo de 360 euros si me hacen una rebaja del 20%?

8. Five workers make a wall in 15 days. How long will it take 3 workers to make the same wall?

ANEXO II

ESTHER RODRIGUEZ TEJEDA

2º ESO B/D



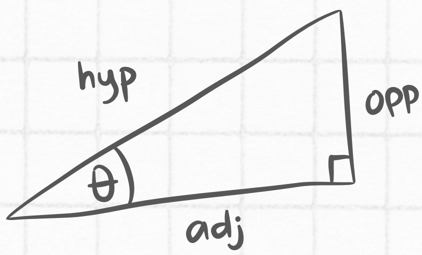
$V = s^3$

IES ZURBARÁN

ECUACIONES

ESTHER RODRIGUEZ TEJEDA

GRUPO 2º B/D



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp}$$

SECOND DEGREE EQUATIONS

1 $ax^2 + bx + c = 0$

How is it solves? ⟶ Using the following formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Two solutions

cuidado con los signos

a) $5x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{10} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{10} = \frac{7 \pm 3}{10} =$

$a = 5$
$b = -7$
$c = 2$

$x = \frac{7+3}{10} = \frac{10}{10} \Rightarrow x = 1$

$x = \frac{7-3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 5} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

b) $x^2 + 2x - 3 = 0 \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} =$

$a = 1$
$b = 2$
$c = -3$

$x = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow x = 1$

$x = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} \Rightarrow x = -3$

Without solution

a) $5x^2 + 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{10} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{10}$

it doesn't exist

⇒ This equation cannot be solved

$a = 5$
$b = 6$
$c = 2$

b) $x^2 + 5x + 10 = 0 \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 5} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 40}}{10} = \frac{-5 \pm \sqrt{-15}}{10}$

it doesn't exist

⇒ This equation cannot be solved

$a = 1$
$b = 5$
$c = 10$

One solution

a) $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2}$ $\begin{cases} x = \frac{2+0}{2} = 2 \\ x = \frac{2-0}{2} = 2 \end{cases}$ doble solution

$a = 1$
$b = -2$
$c = 1$

b) $2x^2 - 8x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{2 \pm 0}{4}$ $\begin{cases} x = \frac{8+0}{4} = 2 \\ x = \frac{2-0}{4} = 2 \end{cases}$ doble solution

$a = 2$
$b = -8$
$c = 8$

2 $ax^2 + c = 0$

How is it solves? ⟶ Using the square root

a) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x = +3 \\ x = -3 \end{cases}$

b) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

c) $2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = \frac{32}{2} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$

d) $\frac{x^2}{7} = 7 \Rightarrow x^2 = 7 \cdot 7 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7$

3 $ax^2 + bx = 0$

How is it solves? ⟶ Taking out common factor

a) $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0$ → $x = 0$; $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

common factor

b) $5x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(5x-2) = 0$ → $x = 0$; $5x - 2 = 0 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

c) $x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0$ → $x = 0$; $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Exercises :

1

a) $x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm\sqrt{81} \begin{cases} x = 9 \\ x = -9 \end{cases}$

b) $x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$

c) $5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = \dfrac{20}{5} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

d) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow$

e) $x^2 + 6 = 10$

f) $4x^2 + 1 = 2$

g) $\dfrac{x^2}{7} = 7$

h) $\dfrac{5x^2}{8} = \dfrac{2}{5}$

i) $\dfrac{2x^2}{9} - \dfrac{1}{50} = 0$

2

a) $x^2 - 4x = 0$

b) $x^2 + 2x = 0$

c) $x^2 - x = 0$

d) $x^2 + x = 0$

e) $3x^2 - 2x = 0$

f) $5x^2 + x = 0$

g) $\frac{x^2}{3} = x$

h) $\frac{x^2}{2} = \frac{x}{3}$

i) $\frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} = \frac{5x}{6}$

3

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0$

c) $x^2 + x - 12 = 0$

d) $x^2 + 7x + 10 = 0$

e) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

f) $x^2 - 2x + 1 = 0$

g) $x^2 + 6x + 9 = 0$

h) $x^2 - 3x + 3 = 0$

4

a) $x^2 - 3x - 5 = 2x + 9$

b) $6x^2 - 5(x-1) = x(x+1) + 4$

c) $x(x+1) - \frac{1}{2} = \frac{x-4}{6}$

Exercises and problems

* $6-(4x+6)=3x+(7-4x)$

* $\frac{7x}{4}-1-\frac{x}{8}=x+\frac{5x}{8}+1$

* $\frac{x}{2}+\frac{1}{6}-\frac{x}{3}=\frac{5}{6}+\frac{x}{6}-\frac{2}{3}$

EXÁMEN 2° ESO B/D 12/04/2024

ECUACIONES

NOMBRE____ NOTA: __________

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 7 = 3 - x$

b) $2(x - 1) + 7x = 5(2x + 4)$

c) $\dfrac{x+3}{6} + \dfrac{2x-4}{2} = \dfrac{x}{3}$

d) $x - \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{x}{7} - \dfrac{1}{14}$

e) $5\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{6}\right) - \dfrac{1}{3} = x + 2\left(\dfrac{x}{3} - 1\right)$

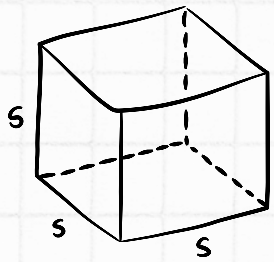
f) $x^2 - 8x + 15 = 0$

g) $2x^2 + 10x + 8 = 0$

h) $3x^2 - 6x = 0$

i) $x^2 - 25 = 0$

2. When a number is doubled and then increased by 7, the answer is 19. Find the number.



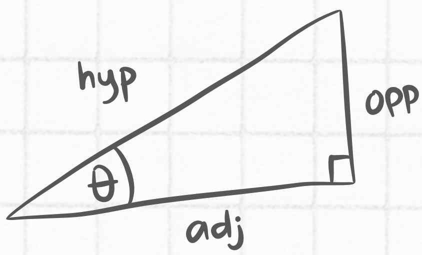
$V = s^3$

IES ZURBARÁN

SISTEMAS DE ECUACIONES

ESTHER RODRIGUEZ TEJEDA

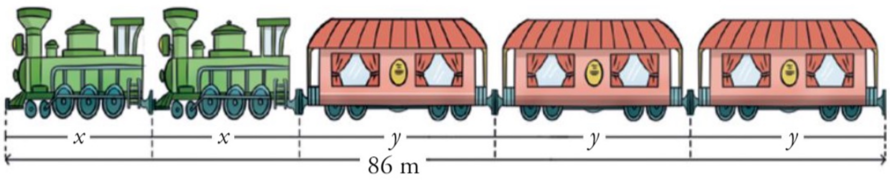
GRUPO 2º B/D



$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp}$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

1. FIRST-DEGREE EQUATIONS WITH TWO UNKNOWNS



$x + x + y + y + y = 86$

$2x + 3y = 86$ $\longrightarrow$ The equallity may be true for different values of x and y

This pair of values (x, y) are solutions of the equation
There is more than one solution.

$x = 16$
$2 \cdot 16 + 3 \cdot y = 86$
$32 + 3 \cdot y = 86$
$3y = 86 - 32$
$3y = 54$
$y = 18$

$x = 16,\ y = 18$

$(16, 18)$

$x = 19$
$y = 16$ $\longrightarrow$

First-degree equations with two unknows are called **linear equations**.
A **solution** of a lineal equation is one pair of values that makes the equallity true.
A lineal equation has **infinite solutions**.

Pág 182

1. Find which of the following pair of values are solutions for the equation $3x - 4y = 8$

a) $x = 4$, $y = 1$

b) $x = 3$, $y = 2$

c) $x = 0$, $y = -2$

d) $x = 1$, $y = -1$

② Pág 182 Find three different solutions for the following equation:

$$2x - y = 5$$

③ Pág 182 Copy and complete the table of solutions for the equation

$$3x + y = 12$$

x	0		3		5	-1		-3
y		9		0			18	

④ Pág 182 Reduce these equations to the general form.

a) $2x - 5 = y$

b) $x - 3 = 2(x + y)$

c) $y = \frac{x+1}{2}$

Graphical representation of a linear equation

Isolate one of the unknowns and give values to the other

$3x + y = 45 \Rightarrow y = 45 - 3x$

The values are organised in a table

x	y
0	45
5	30
10	15
15	0
20	-15
-5	60

$y = 45 - 3 \cdot 0 = 45$

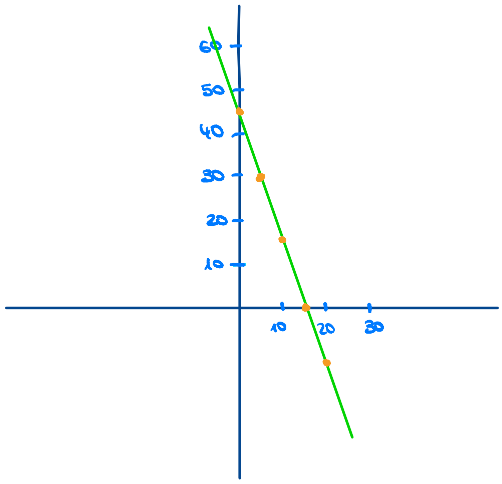
$y = 45 - 3 \cdot 5 = 45 - 15 = 30$

$y = 45 - 3 \cdot 10 = 45 - 30 = 15$

$y = 45 - 3 \cdot 15 = 45 - 45 = 0$

$y = 45 - 3 \cdot 20 = 45 - 60 = -15$

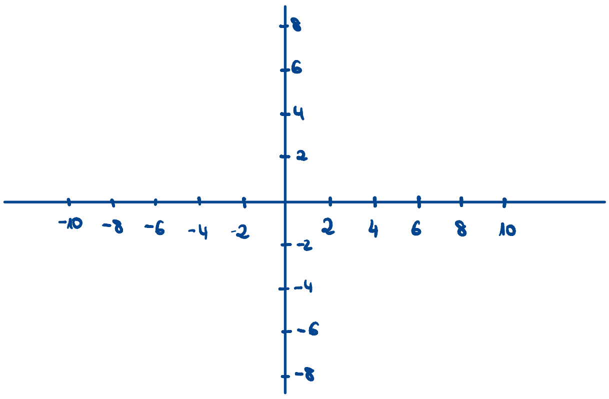
$y = 45 - 3 \cdot (-5) = 45 + 15 = 60$



Example : Copy and compeete the table for the following equation :

$x - 2y - 4 = 0$

x	y
-8	-6
-6	
-4	-4
-2	
0	
2	
4	0
6	
8	2



⑤ Pág 183 Copy the table for each equation in your notebook and graph the corresponding straight line.

a) $x - y = 0 \Rightarrow y = x$

x	y
-6	
-4	
-2	
0	
2	
4	
6	

b) $x - 2y = 2 \Rightarrow y = \frac{x-2}{2}$

x	y
-6	
-4	
-2	
0	
2	
4	
6	

⑥ Pág 183 Graph the following equations:

a) $2x - y = 1$

b) $2x + y = 1$

c) $y = \frac{x}{2} + 3$

⑦ Pág 183 Write the equation and graph its straight line.

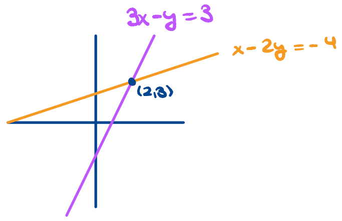
  +    = 8 €

2. SISTEMS OF LINEAR EQUATIONS

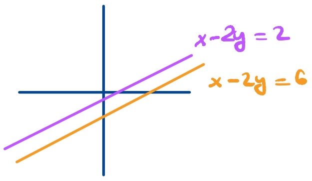
Two linear equation form a system : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

The solution to a system is the common solution of both equations

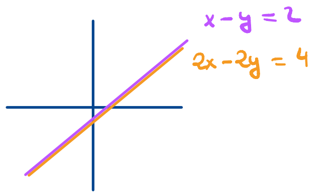
Solution



No solution



Infinite solution



1 ? NO MG .

3. METHODS FOR SOLVING LINEAL SYSTEMS

Substitution method

First, we isolated one of the unknowns in one of the equations.
Then the resulting expression is substituted into the other equation.

Example:

$$3x - y = 3$$
$$x + 2y = 8$$

1º Despejamos una incógnita

$x = -2y + 8$

2º sustituimos en la otra ecuación:

$3(-2y+8) - y = 3$; $-6y + 24 - y = 3$;

$-7y = 3 - 24$

$-7y = -21$; $y = \frac{-21}{-7}$; $y = 3$

3º Sustituimos en la ecuación despejada para calcular la otra variable

$x = -2 \cdot 3 + 8$; $x = -6 + 8$; $x = 2$

1 Pág 185.

a) $\begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 10 \end{cases}$ Como ya lo tenemos despejada, sustituimos

$2y + 3y = 10$; $5y = 10$; $y = \frac{10}{5}$; $y = 2$

3º PASO: $x = 2 \cdot 2$; $x = 4$

b) $\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ Sustituimos

$3x - 2(x+1) = 7$

$3x - 2x - 2 = 7$

$x = 7 + 2$

$x = 9$

3er PASO $y = x + 1 = 9 + 1$; $y = 10$

c) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ $\xrightarrow{1^{er}\ PASO}$ $x = -2y + 11$

$\xrightarrow{2^{o}}$ $3(-2y + 11) - y = 5$

$-6y + 33 - y = 5$

$-7y = 5 - 33$

$-7y = -28$

$y = \frac{28}{7}$

$y = 4$

3er PASO: $x = -2 \cdot 4 + 11$

$x = -8 + 11$

$x = 3$

d) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$ $\xrightarrow{1^{o}\text{ PASO}}$ $2x - 1 = y$

$\xrightarrow{2^{o}\text{ PASO}}$ $5x - 3(2x-1) = 0$

$5x - 6x + 3 = 0$

$-x = -3$

$x = 3$

3er PASO:

$y = 2 \cdot 3 - 1$

$y = 6 - 1$

$y = 5$

e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ $\xrightarrow{1^{o}\text{ PASO}}$ $x = -2y + 1$

$\xrightarrow{2^{o}\text{ PASO}}$ $2(-2y + 1) + 3y = 4$

$-4y + 2 + 3y = 4$

$-y = 4 - 2$

$-y = 2$

$y = -2$

3er PASO

$x = -2(-2) + 1$

$x = 4 + 1$

$x = 5$

Equalization method

We isolated the same unknown in both equation and equalise the resulting expression.

Example: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

1º elegimos la incógnita que vayamos a despejar y la despejamos de ambas ecuaciones

$y = 3x - 3$

$2y = -x + 8$; $y = \dfrac{-x+8}{2}$

2º Igualamos ambas fórmulas

$3x - 3 = \dfrac{-x+8}{2}$

$6x - 6 = -x + 8$

$6x + x = 8 + 6$

$7x = 14$

$x = \dfrac{14}{7}$

$x = 2$

3º Sustituimos en alguna de las ecuaciones despejadas.

$y = 3x - 3$

$y = 3 \cdot 2 - 3$

$y = 6 - 3$

$y = 3$

② Pág 186

a) $\begin{cases} y = 3x \\ y = 5x - 4 \end{cases} \Rightarrow$

$3x = 5x - 4$

$4 = 5x - 3x$

$4 = 2x$

$x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

$y = 3x$

$y = 3 \cdot 2$

$y = 6$

b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \xrightarrow{1^{er}\ PASO} \begin{cases} x = -2y + 3 \\ x = 3y + 8 \end{cases} \xrightarrow{2^{o}\ PASO}$

$-2y + 3 = 3y + 8$

$-2y - 3y = 8 - 3$

$-5y = 5$

$y = \frac{5}{-5}$

$y = -1$

3er PASO: $x = -2y + 3$

$x = -2(-1) + 3$

$x = 2 + 3$

$x = 5$

c) $\begin{cases} 2x + y + 6 = 0 \\ 5x - y + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{1^{er}\ PASO} \begin{cases} y = -2x - 6 \\ y = 5x + 1 \end{cases} \xrightarrow{2^{o}\ PASO}$

$-2x - 6 = 5x + 1$

$-2x - 5x = 1 + 6$

$-7x = 7$

$x = \frac{7}{-7}$

$x = -1$

3er PASO: $y = 5x + 1$

$y = 5(-1) + 1$

$y = -5 + 1$

$y = -4$

d) $\begin{cases} 5x + 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \xrightarrow{1^{er}\ PASO} \begin{cases} y = \frac{-5x}{2} \\ y = -2x + 1 \end{cases} \xrightarrow{2^{o}\ PASO}$

$\frac{-5x}{2} = -2x + 1$

$-5x = -4x + 2$

$-5x + 4x = 2$

$-x = 2$

$x = -2$

3er PASO: $y = \frac{-5x}{2}$

$y = \frac{-5(-2)}{2}$

$y = 5$

e) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 7 \end{cases} \xrightarrow{1^{er}\ PASO} \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \frac{4x - 7}{2} \end{cases} \xrightarrow{2^{o}\ PASO}$

$2x - 3 = \frac{4x - 7}{2}$

$4x - 6 = 4x - 7$

$\cancel{4x} - \cancel{4x} = -7 + 6$

$0 = -1$

$\nexists$

No tiene solución

Reduction method

Once the equations are in the general form, we multiply them by the appropriate numbers so that the coefficients of one of the unknowns are opposite.
By adding the equations together, the unknown dissappears.

Example:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{array}{r} 6x - \cancel{2y} = 6 \\ x + \cancel{2y} = 8 \\ \hline 7x \quad = 14 \end{array}$$

$x = \frac{14}{7}$

$x = 2$

2° Sustituimos en una

$x + 2y = 8$

$2 + 2y = 8$

$2y = 8 - 2$

$2y = 6$

$y = 3$

3 Pág 187

a) $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ x - 3y = 10 \end{cases} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \xrightarrow{x(-4)} \end{array} \begin{array}{r} \cancel{4x} + y = 1 \\ -\cancel{4x} + 12y = -40 \\ \hline 13y = -39 \end{array}$

$y = \frac{-39}{13}$

$y = -3$

3° PASO: $x - 3y = 10$

$x - 3(-3) = 10$

$x + 9 = 10$

$x = 10 - 9$

$x = 1$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 5} \\ \xrightarrow{\times 3} \end{array} \begin{array}{r} 10x + \cancel{15y} = 35 \\ 9x - \cancel{15y} = 3 \\ \hline 19x \quad = 38 \end{array}$

$x = \frac{38}{19}$

$x = 2$

3er PASO: $2x + 3y = 7$

$2 \cdot 2 + 3y = 7$

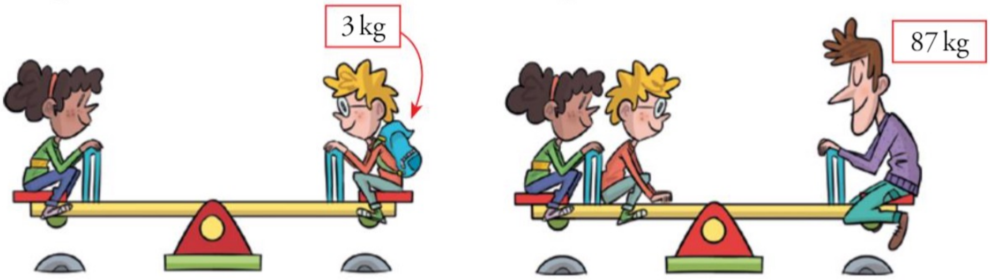
$4 + 3y = 7$

$3y = 7 - 4$

$3y = 3$

$y = 1$

Sara and her younger brother Alberto are on a seesaw. The seesaw is balanced with Alberto carrying a 3-kilo rucksack. Then they both sit on the same side of the seesaw without the rucksack. The seesaw is balanced with their father on the other side. He weights 87 kilos. How much does each child weigh?



Sara x

Alberto y

$x = y + 3$

$x + y = 87$

$$\begin{aligned} x - \cancel{y} &= 3 \\ x + \cancel{y} &= 87 \\ \hline 2x &= 90 \\ x &= \frac{90}{2} \\ x &= 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= y + 3 \\ 45 &= y + 3 \\ 45 - 3 &= y \\ y &= 42 \end{aligned}$$

Sara weights 45 kg and Alberto weights 42 kg

Pág 188

1 Look and solve. How much does each box weigh?

$x = y + 175$

$3y = x + 125$

$-x + 3y = 125$

$$\begin{aligned} \cancel{x} - y &= 175 \\ -\cancel{x} + 3y &= 125 \\ \hline 2y &= 300 \\ y &= \frac{300}{2} \\ y &= 150 \end{aligned}$$

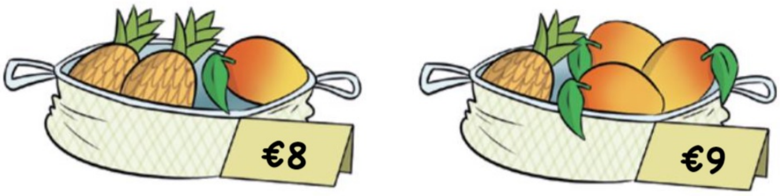
$$\begin{aligned} x &= y + 175 \\ x &= 150 + 175 \\ x &= 325 \end{aligned}$$

The green box weights 325 kg and the blue box weights 150 kg.

Pág 188

Example 2

A greengrocer sells pineapples and mangoes at a fixed price per unit. Look at the cost of these two bags of fruit. What is the price of a pineapple? And a mango?



$x \to$ pineapples

$y \to$ mangoes

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 8 \\ x + 3y = 9 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rcl} \cancel{2x} + y &=& 8 \\ -\cancel{2x} - 6y &=& -18 \\ \hline -5y &=& -10 \\ y &=& \dfrac{-10}{-5} \\ y &=& 2 \end{array}$$

$x + 3 \cdot 2 = 9$

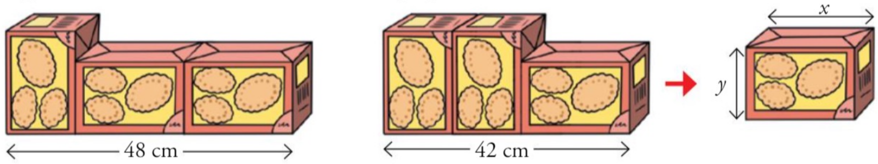
$x + 6 = 9$

$x = 3$

The price of pineapples is 3€ and the mango costs 2€.

Pàg 189

3 Look at the diagram and solve: What length of shelf does one of these boxes take up when it is lying on its side? And when it is standing up?



$$y + x + x = 48$$
$$2x + y = 48$$

$$y + y + x = 42$$
$$x + 2y = 42$$

$$2x + y = 48$$
$$x + 2y = 42$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{r} \cancel{2x} + y = 48 \\ -\cancel{2x} - 4y = -84 \\ \hline -3y = -36 \end{array}$$

$$y = 12$$

$$x + 2y = 42$$
$$x + 2 \cdot 12 = 42$$
$$x + 24 = 42$$
$$x = 42 - 24$$
$$x = 18$$

The box is 18×12 cm

Pàg 189

4 I have bought three pens and a marker for €6. My friend Rosa has paid €9.25 for two pens and three markers. How much does one pen cost? What about a marker?

 → € x  → € y

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 6 \\ 2x + 3y = 9'25 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} -9x - \cancel{3y} = -18 \\ 2x + \cancel{3y} = 9'25 \\ \hline -7x = -8'75 \end{array}$$

$$x = 1'25$$

$$3x + y = 6$$
$$3 \cdot 1'25 + y = 6$$
$$y = 6 - 3 \cdot 1'25$$
$$y = 2'25$$

The pen costs 1'25€ and the market costs 2'25 €

Pág 189

5 A customer has paid €3.90 for one kilo of oranges and two kilos of apples at the greengrocer. Another customer has paid €5.70 for three kilos of oranges and one kilo of apples. How much does one kilo of oranges cost? What about one kilo of apples?

1 KG OF ORANGES → € x 1 KG OF APPLES → € y

$$\left.\begin{aligned} x+2y &= 3'90 \\ 3x+y &= 5'70 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{array}{rcl} -\cancel{3x} - 6y &=& -11'7 \\ \cancel{3x} + y &=& 5'70 \\ \hline -5y &=& -6 \end{array}$$

$$y = \frac{-6}{-5}$$

$$y = 1'2€$$

$$x+2y = 3'90$$
$$x + 2\cdot 1'2 = 3'9$$
$$x = 3'9 - 2\cdot 1'2$$
$$x = 1'5€$$

1 kg of oranges costs 1'5€ and 1 kg of apples costs 1'2€

Pág 189

6 Last week we paid €10 for two tickets to the movies and a box of popcorn. Today we paid €22 for four tickets and 3 boxes of popcorn. How much does one ticket cost? And how much does one box of popcorn cost?

Movies → x

Popcorn → y

$$\left.\begin{aligned} 2x+y &= 10 \\ 4x+3y &= 22 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{array}{rcl} -6x - \cancel{3y} &=& -30 \\ 4x + \cancel{3y} &=& 22 \\ \hline -2x &=& -8 \end{array}$$

$$x = \frac{-8}{-2}$$

$$x = 4$$

$$2x+y = 10$$
$$2\cdot 4 + y = 10$$
$$8 + y = 10$$
$$y = 10 - 8$$
$$y = 2$$

The tickets cost 4€ and the box of popcorn cost 2€

Example 3

Flora is 17 years older than her nephew Pablo, and in 9 years she will be double his age. How old is Pablo now? What about Flora?

	AGE NOW	AGE IN 9 YEARS
FLORA	x	$x+9$
PABLO	y	$y+9$

$x = y + 17 \longrightarrow -x + y = -17$

$x + 9 = 2(y+9) \longrightarrow x + 9 = 2y + 18$;

$$\begin{array}{r} \cancel{x} - 2y = 9 \\ -\cancel{x} + y = -17 \\ \hline -y = -8 \end{array}$$

$y = 8$

$x = 8 + 17$

$x = 25$

Flora is 25 years old and Pablo is 8 years old.

Pág 190

7 Complete and solve in your notebook.

a) Cristina is three times as old as her cousin María, but in 10 years she will only be twice as old as María. How old is each cousin?

	AGE NOW	IN 10 YEARS
CRISTINA	x	$x + 10$
MARÍA	y	$y + 10$

Cristina is three times as old as María. $\longrightarrow x = 3y$ $\Rightarrow 2y + 10 = 3y$; $y = 10$; $x = 3 \cdot 10$

In 10 years, Cristina will be twice as old as María. $\rightarrow x + 10 = 2(y + 10) \rightarrow x + 10 = 2y + 20$

$x = 2y + 10$

$x = 30$

Cristina is 30 years old and María is 10 years old

b) Rafael is six times as old as his granddaughter Adela, but 2 years ago his age was seven times hers. How old is Rafael now? What about Adela?

	AGE NOW	TWO YEARS AGO
RAFAEL	x	$x - 2$
ADELA	y	$y - 2$

EQUATIONS

$x = 6y$

$x - 2 = 7(y - 2)$

$x - 2 = 7y - 14$

$x = 7y - 14 + 2$

$x = 7y - 12$

$7y - 12 = 6y$

$y = 12$

$x = 6y$

$x = 6 \cdot 12$

$x = 72$

Rafael is 72 years old and Adela is 12 years old

Example 4

If we mix an olive oil that costs €4.30/L with a lower-quality oil that costs €2.80/L we get 500 litres of medium-quality oil that costs €3.40/L. How many litres of each type of olive oil have we used?

	QUANTITY (L)	PRICE (€/L)	COST (€)
HIGHER-QUALITY OIL	x	4'30	$4{'}30x$
LOWER-QUALITY OIL	y	2'80	$2{'}80y$
MIXTURE	500	3'40	$500 \cdot 3{'}40$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 500 \\ 4{'}3x + 2{'}8y = 500 \cdot 3{'}40 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rcl} -\cancel{4{'}3x} - 4{'}3y &=& -2150 \\ \cancel{4{'}3x} + 2{'}8y &=& 1700 \\ \hline -1{'}5y &=& -450 \end{array}$$

$$y = \frac{-450}{-1{'}5}$$

$$y = 300$$

$x + y = 500$

$x + 300 = 500$

$x = 200$

We have used 200ℓ of higher-quality oil and 300ℓ of lower quality oil.

Pág 191

8 Copy and solve in your notebook.

a) Coffee A is of higher quality and costs €13/kg. Coffee B is of lower quality and costs €8/kg. How much of each do we need to get 30 kilos of coffee mixture that costs €10/kg?

	AMOUNT (kg)	PRICE (€/kg)	COST (€)
HIGHER-QUALITY COFFEE (A)	x	13	$13x$
LOWER-QUALITY COFFEE (B)	y	8	$8y$
MIXTURE	□ 30	10	$30 \cdot 10$

Amount of coffee A + Amount of coffee B = Amount of mixture → $x + y = \square$

Cost of coffee A + Cost of coffee B = Cost of mixture ⟶ $13x + \square y = 300$

b) What quantities of gold, at €8/gram and silver at €1.70/gram do we need to make 1 kg of an alloy that costs €4.22/gram?

	QUANTITY (g)	PRICE (€/g)	COST (€)
GOLD	x	8	$8x$
SILVER	y	1.7	$1{'}7y$
ALLOY	1 000	4.22	$1000 \cdot 4{'}22$

EQUATIONS

$x + y = \square$

$\square x + \square y = \square$

a) $$\left.\begin{array}{l} x + y = 30 \\ 13x + 8y = 30 \cdot 10 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rcl} -8x - \cancel{8y} &=& -240 \\ 13x + \cancel{8y} &=& 300 \\ \hline 5x &=& 60 \end{array}$$

$$x = \frac{60}{5}$$

$$x = 12$$

$x + y = 30$

$12 + y = 30$

$y = 30 - 12$

$y = 28$

We need 12ℓ of coffee A and 28ℓ of coffee B.

b) $$\left.\begin{array}{l} x + y = 1000 \\ 8x + 1{'}7y = 4220 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rcl} -\cancel{8x} - 8y &=& -8000 \\ \cancel{8x} + 1{'}7y &=& 4220 \\ \hline -6{'}3y &=& -3780 \end{array}$$

$$y = \frac{-3780}{-6{'}3} \; ; \; y = 600$$

$x + y = 1000$

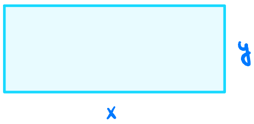
$x + 600 = 1000$

$x = 400$

we need 400g of gold and 600g of silver.

Example 5

The perimeter of a rectangle is 40 cm and its area is 91 cm². How long are the sides of the rectangle?



$$2x + 2y = 40 \longrightarrow x = \frac{40-2y}{2} = 20 - y$$

$$x \cdot y = 91$$

$$\hookrightarrow (20-y)\,y = 91$$

$$20y - y^2 = 91$$

$$y^2 - 20y + 91 = 0$$

$$y = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 91}}{2} = \frac{20 \pm 6}{2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{20+6}{2};\ y = 13 \\ \frac{20-6}{2};\ y = 7 \end{array} \right.$$

si $y = 13 \Rightarrow x = 20 - y$; $x = 20 - 13$; $x = 7$

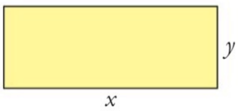
si $y = 7 \Rightarrow x = 20 - y$; $x = 20 - 7$; $x = 13$

Sides: 7×13 cm

Pág 192

9 Copy and complete in your notebook.

a) A rectangle is 7 cm longer than it is wide and has an area of 98 cm². Calculate the length of the sides.



$$\rightarrow \begin{cases} x = y + \boxed{7} \\ x \cdot y = \boxed{98} \end{cases} \rightarrow (y + \boxed{7}) \cdot y = \boxed{98} \rightarrow \ldots\ y^2 + 7y - 98 = 0 \left\langle \begin{array}{l} y = 7 \\ \cancel{y = -14} \end{array} \right.$$

$x = y + 7$; $x = 7 + 7$; $x = 14$

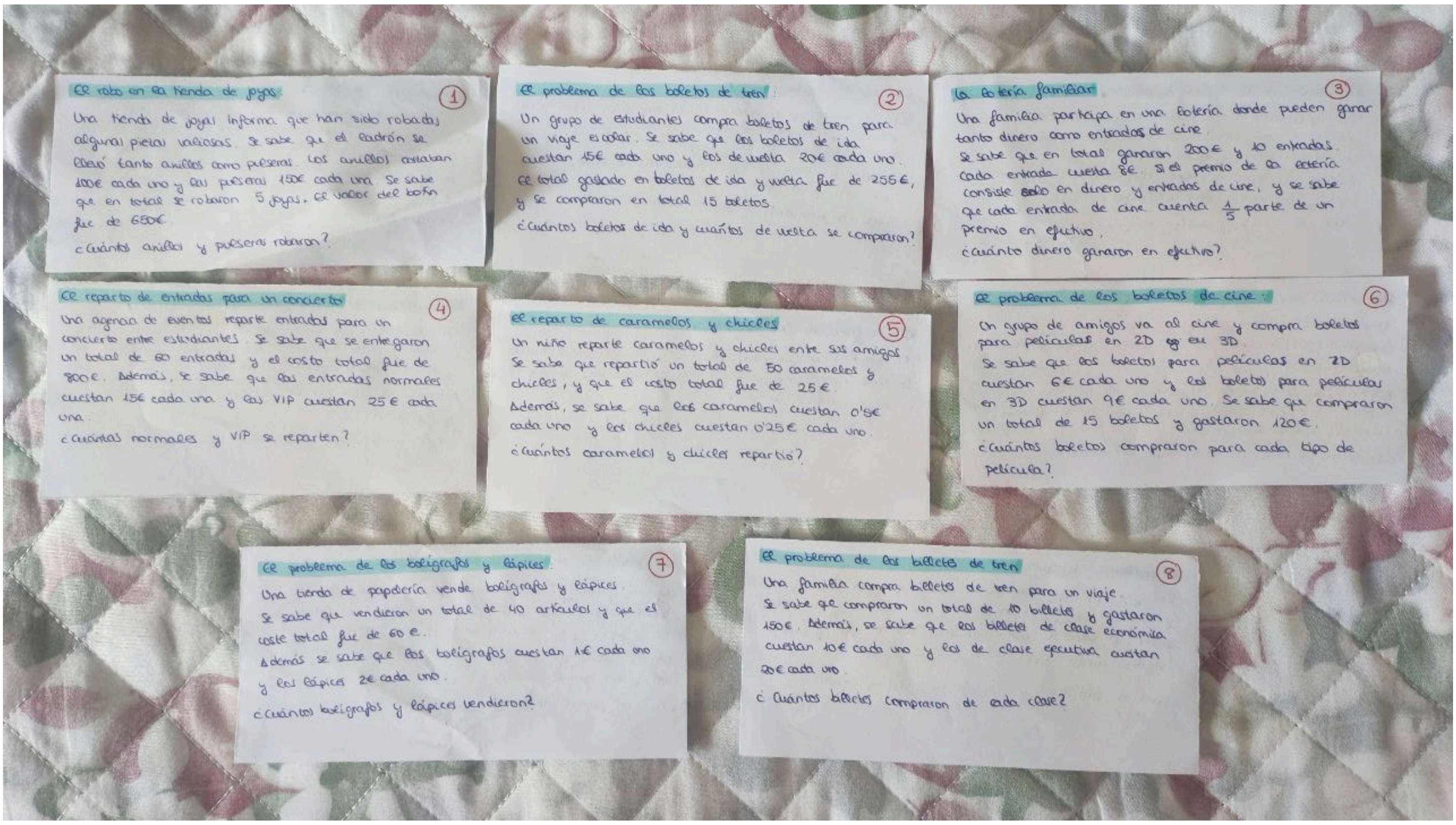
ACTIVIDAD

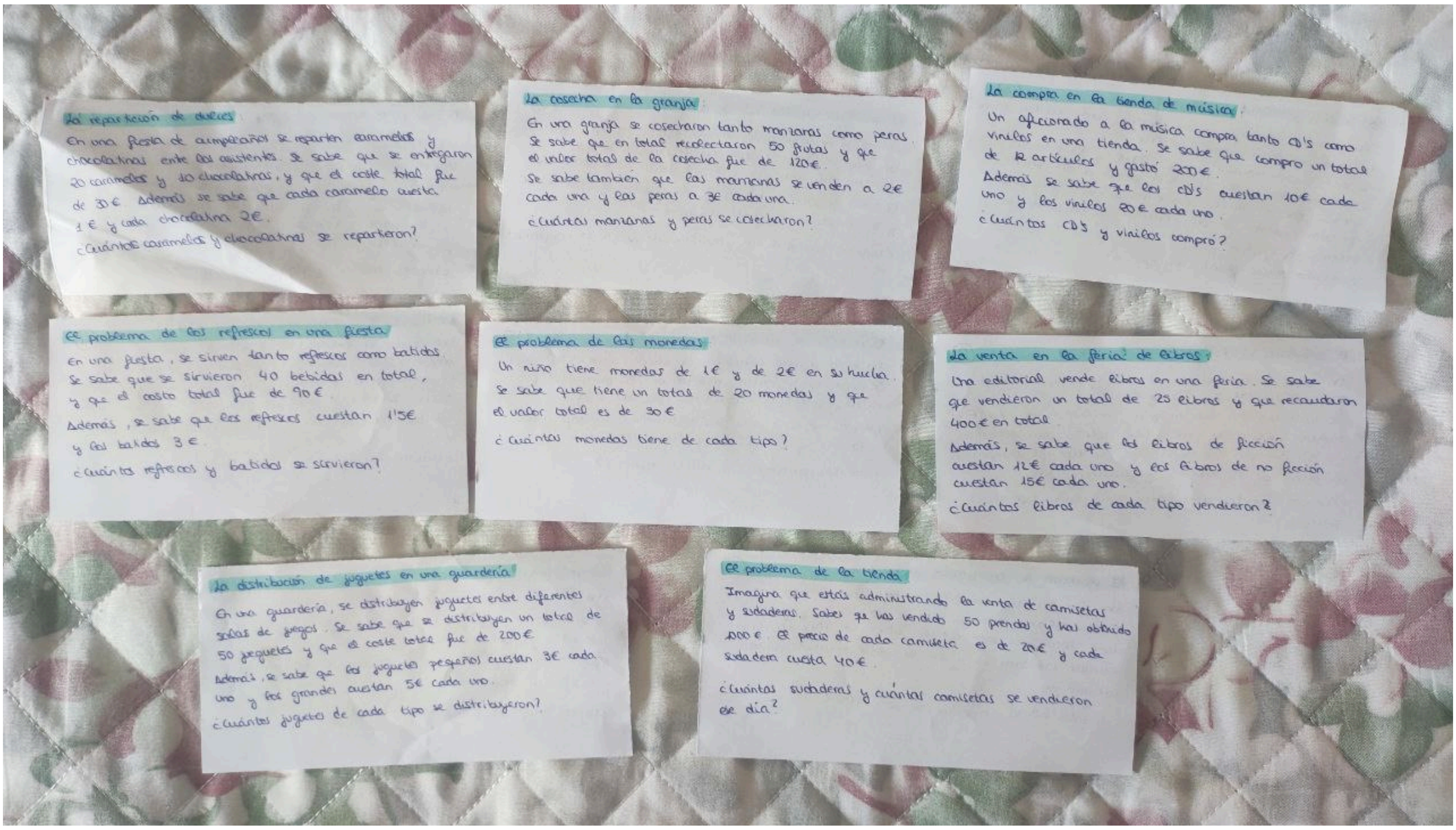
	1	2	3	4	5
1	$\begin{cases} x+4y=13 \\ 6x-2y=-26 \end{cases}$	$\begin{cases} x+5y=-25 \\ -x-2y=10 \end{cases}$	$\begin{cases} x+3y=17 \\ 2x-6y=-14 \end{cases}$	$\begin{cases} x-3y=-8 \\ -2x-4y=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} x+4y=13 \\ 4x+4y=16 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x-6y=17 \\ -4x-4y=16 \end{cases}$	$\begin{cases} x+4y=3 \\ -6x-3y=-39 \end{cases}$	$\begin{cases} x+5y=-11 \\ -2x-4y=10 \end{cases}$	$\begin{cases} x-3y=0 \\ -6x-2y=-20 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y=-14 \\ -6x+6y=72 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x+6y=18 \\ 3x+3y=-6 \end{cases}$	$\begin{cases} x+3y=-3 \\ 5x+2y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} x-4y=-9 \\ 5x-2y=-45 \end{cases}$	$\begin{cases} x+3y=-4 \\ x+2y=-5 \end{cases}$	$\begin{cases} x+4y=-10 \\ -5x-y=-26 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x-y=-5 \\ -5x-4y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+3y=-7 \\ -6x+y=61 \end{cases}$	$\begin{cases} x+3y=-3 \\ -6x+6y=-54 \end{cases}$	$\begin{cases} x+3y=10 \\ x+6y=19 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=5 \\ x-5y=1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x-5y=10 \\ -3x+6y=6 \end{cases}$	$\begin{cases} x+3y=3 \\ 4x+5y=12 \end{cases}$	$\begin{cases} x-6y=-9 \\ x-y=6 \end{cases}$	$\begin{cases} x-4y=-20 \\ 2x+2y=-10 \end{cases}$	$\begin{cases} x-6y=-16 \\ -3x-4y=-18 \end{cases}$

ACTIVIDAD

	1	2	3	4	5
1	$\begin{cases} x+y=15 \\ x-y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} -x-y=-10 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=15 \\ x-y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} -x-y=-10 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} -x-y=-10 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 5x+y=0 \\ x-4y=21 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x-y=31 \\ 2x-y=17 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y=25 \\ x-y=10 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} -x-y=-10 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y=24 \\ x-y=-83 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=5 \\ x-6y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y=13 \\ 3x-4y=-22 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x-3y=-3 \\ x-2y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y=4 \\ x-2y=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x-y=9 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=5 \\ x-6y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y=13 \\ 3x-4y=-22 \end{cases}$	$\begin{cases} x-3y=-3 \\ x-2y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-y=0 \end{cases}$

ACTIVIDAD VIDA COTIDIANA





EXÁMEN 2º ESO B/D 03/05/2024

SISTEMAS DE ECUACIONES

NOMBRE____ NOTA: __________

1. Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución.

$$\left.\begin{aligned} 5x - 2y &= 2 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -3x - 5y &= 13 \\ x - 4y &= -10 \end{aligned}\right\}$$

2. Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ x + y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x + 7y &= 1 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3. Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción.

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 4x + 6y &= 2 \\ 6x + 5y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

4. A hotel has double and single rooms. In total there are 90 rooms and 165 beds. How many rooms are there of each type?

5. Carmen is 12 years older than David. Five years ago, the sum of their ages was 28. How old are they now?

6. Resuelve la siguiente ecuación: $x + \dfrac{2-3x}{5} = \dfrac{x}{2} + 1$

EJERCICIO EXTRA: La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades. Si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?

EXÁMEN 2º ESO B/D 06/05/2024

SISTEMAS DE ECUACIONES

NOMBRE____ NOTA: __________

1. Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución.

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 2y = 9 \\ x + 2y = 21 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -3x - 5y = 13 \\ x - 4y = -10 \end{array}\right\}$$

2. Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 7y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{array}\right\}$$

3. Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 6y = 16 \\ 6x - 5y = -4 \end{array}\right\}$$

4. Carmen is 12 years older than David. Five years ago, the sum of their ages was 28. How old are they now?

5. Resuelve la siguiente ecuación: $x + \dfrac{2 - 3x}{5} = \dfrac{x}{2} + 1$

EJERCICIO EXTRA: La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades. Si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?

ANEXO III

ESTHER RODRIGUEZ TEJEDA

4º ESO D

TRIGONOMETRÍA

4º ESO

1. Circunferencia Goniométrica

Grado

Un **grado** es la medida del ángulo que resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales.

D $\longrightarrow$ Deg

Radián

Un **radián** es la medida del ángulo cuyo arco tiene la misma longitud que el radio.

R $\longrightarrow$ Dad

En grados	0°	90°	180°	270°	360°
En radianes	0 rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	2π rad

1. Circunferencia Goniométrica

Grados a Radianes

Se multiplica por la fracción $\frac{\pi}{180}$.

Ejemplo:Pasar 68 a radianes:

$$68^\circ \frac{\pi\, rad}{180^\circ} = 1.1868 rad$$

Radianes a Grados

Se multiplica por la fracción $\frac{180}{\pi}$.

Ejemplo:Pasar 2.5 radianes a grados:

$$2.5 rad \frac{180^\circ}{\pi\, rad} = 143.24^\circ$$

1. Circunferencia Goniométrica

Ejercicio 1: Pasa los ángulos siguientes a radianes:

1. $45^{\cancel{o}} \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180^{\cancel{o}}} = \dfrac{1}{4}\pi \text{ rad}$
2. $15\cancel{0}^{\cancel{o}} \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{18\cancel{0}^{\cancel{o}}} = \dfrac{5}{6}\pi \text{ rad}$
3. $21\cancel{0}^{\cancel{o}} \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{18\cancel{0}^{\cancel{o}}} = \dfrac{21\pi}{18} \text{ rad}$
4. $330^{\cancel{o}} \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180^{\cancel{o}}} = \dfrac{33}{18}\pi \text{ rad}$

1. Circunferencia Goniométrica

Ejercicio 2: Pasa los ángulos siguientes a grados:

1. $2 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 114'59^\circ$
2. $\frac{\cancel{\pi}}{9}\text{rad} \cdot \frac{180^\circ}{\cancel{\pi} \text{ rad}} = 20^\circ$
3. $\frac{5\cancel{\pi}}{3}\text{rad} \cdot \frac{180^\circ}{\cancel{\pi} \text{ rad}} = 300^\circ$
4. $1.7\text{rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 97'4^\circ$

1. Circunferencia Goniométrica

Ángulos mayores de 360º

Si un ángulo α es mayor de 360°, este es equivalente a otro ángulo que se diferencia de él en un número entero de circunferencias:

$$\alpha = \alpha \pm 360^\circ = \alpha \pm 360^\circ \cdot 2 = \alpha \pm 360^\circ \cdot 3 = \dots$$

Forma general

$$\alpha = \alpha + 360k, \, k \in \mathbf{Z}$$

Pasos a seguir:

1. Dividimos los grados entre 360 y nos quedamos con el cociente(sin parte decimal).
2. Restamos a los grados que teníamos 360· cociente.

1. Circunferencia Goniométrica

Ejercicio 3: Reduce estos ángulos al primer cuadrante:

1. $365°$; $\frac{365}{360} = 1 \longrightarrow 365 - 360 \cdot 1 = 5°$ **Solución**: $365° = 5°$

   Nos quedamos con la parte entera

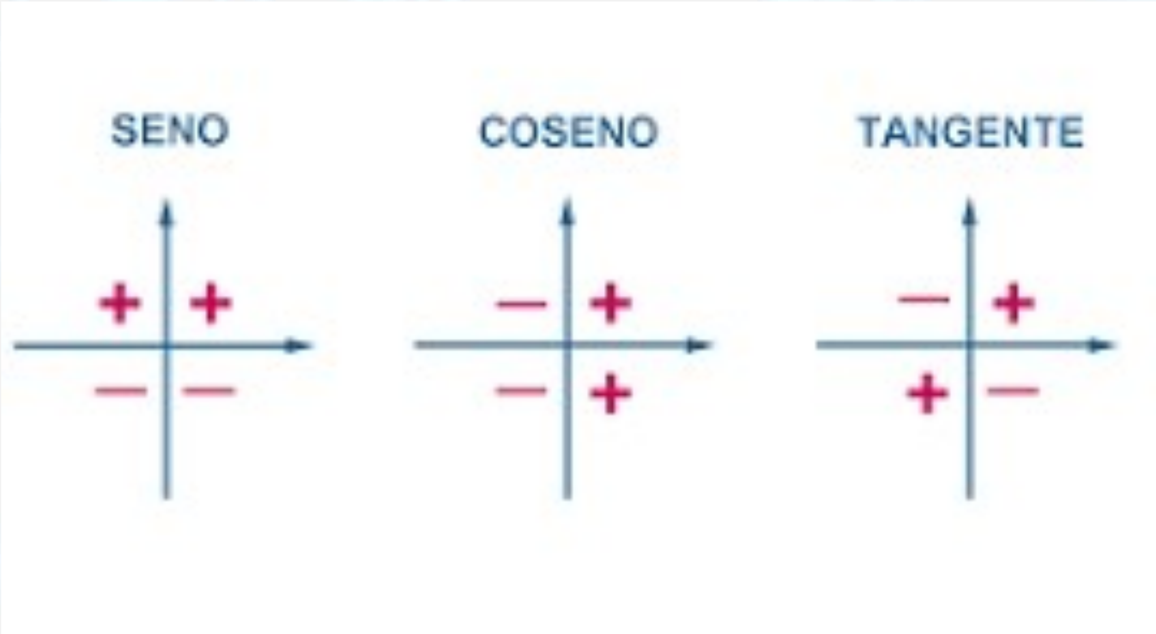
2. $1485°$; $\frac{1485}{360} = 4 \longrightarrow 1485 - 360 \cdot 4 = 45°$ Solución: $1485° = 45°$

3. $2370°$; $\frac{2370}{360} = 6 \longrightarrow 2370 - 360 \cdot 6 = 210°$ Solución: $2370° = 210°$

4. $2100°$; $\frac{2100}{360} = 5 \longrightarrow 2100 - 360 \cdot 5 = 300°$ Solución: $2100° = 300°$

1. Circunferencia Goniométrica

Signo de las razones trigonométricas



El seno y coseno de un ángulo toman valores entre

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

La tangente sí puede tomar valores mayores que 1.

1. Circunferencia Goniométrica

Ejercicio 3. Determina $\cos\alpha$ sabiendo que el ángulo α está en el segundo cuadrante y que $\sin\alpha = 0.2$.

2º cuadrante

Usando $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$$(0'2)^2 + cos^2\alpha = 1$$

$$cos^2\alpha = 1 - 0'2^2$$

$$cos\,\alpha = \sqrt{1-0'2^2}$$

$$cos\,\alpha = -0'98$$

Veamos los signos:

sen +

cos −

$$tg = \frac{sen}{cos} = \frac{+}{-} = -$$

1. Circunferencia Goniométrica

Ejercicio 4. Determina $\tan\alpha$ sabiendo que el ángulo α está en el tercer cuadrante y que $\cos\alpha = -0.7$.

Usando $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\text{sen}^2\alpha + (-0'7)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - 0'7^2$$

$$\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - 0'7^2}$$

$$\text{sen}\,\alpha = -0'71$$

Veamos los signos:

sen −

cos −

$$tg = \frac{\text{sen}}{\cos} = \frac{-}{-} = +$$

1. Circunferencia Goniométrica

Ejercicio 5. Determina las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que está en el cuarto cuadrante y que $\sin\alpha = -0.4$.

Usando $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$(-0'4)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - 0'4^2$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - 0'4^2}$$

$$\boxed{\cos\alpha = +0'92}$$

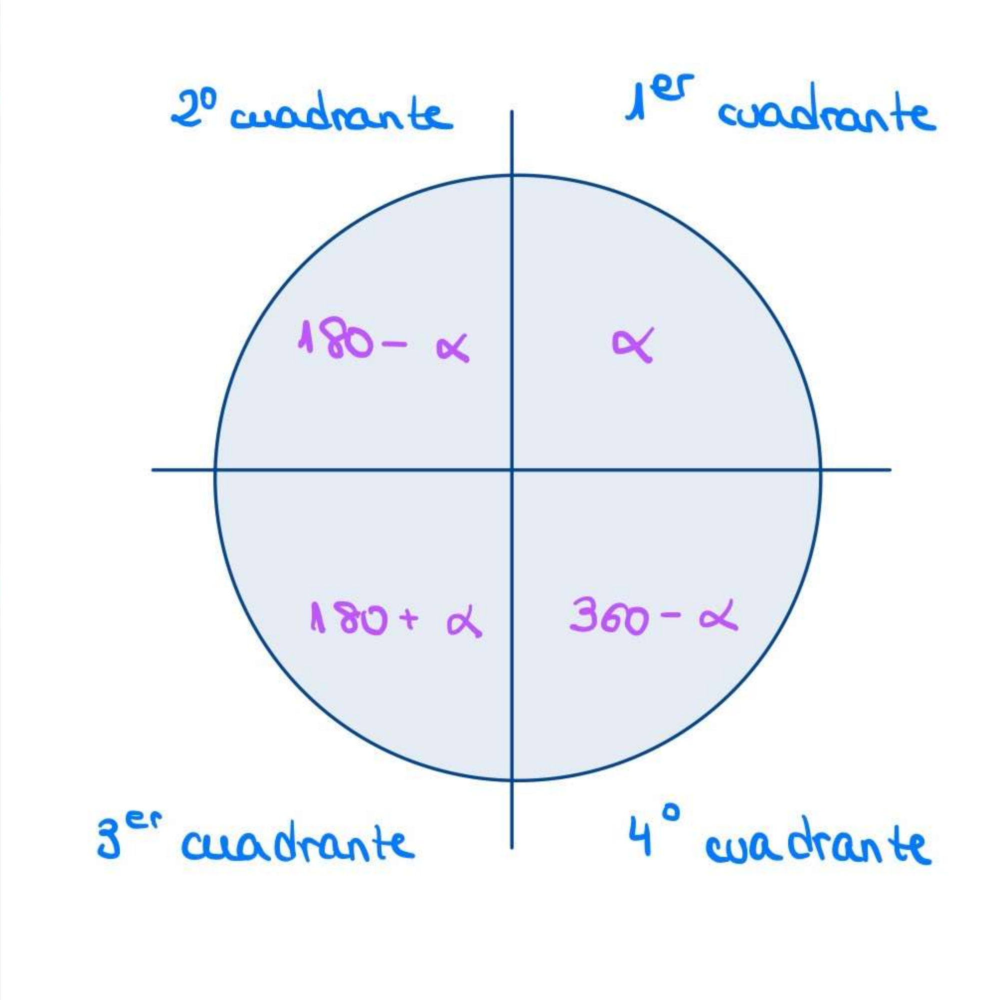
Veamos los signos:

sen $-$

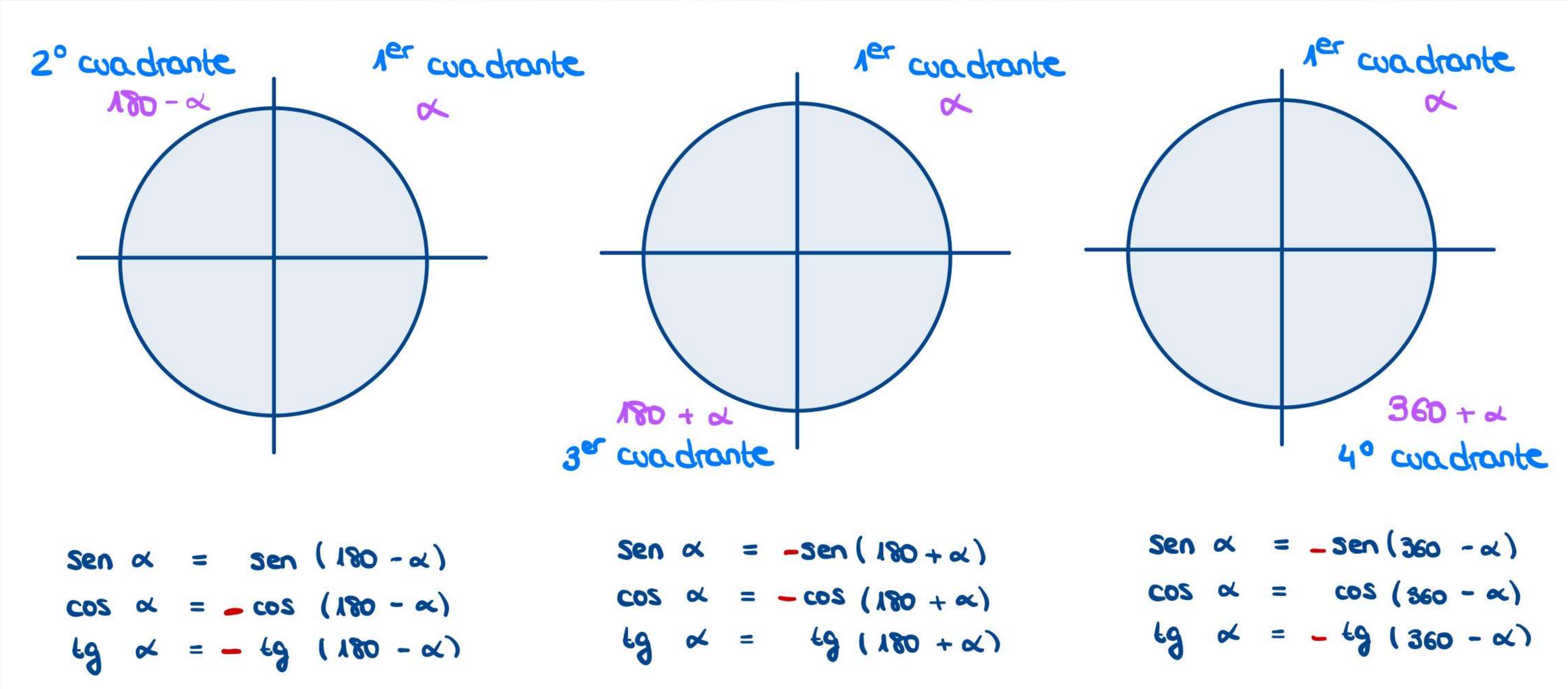
cos $+$

$\text{tg} = \dfrac{\text{sen}}{\cos} = \dfrac{-}{+} = -$

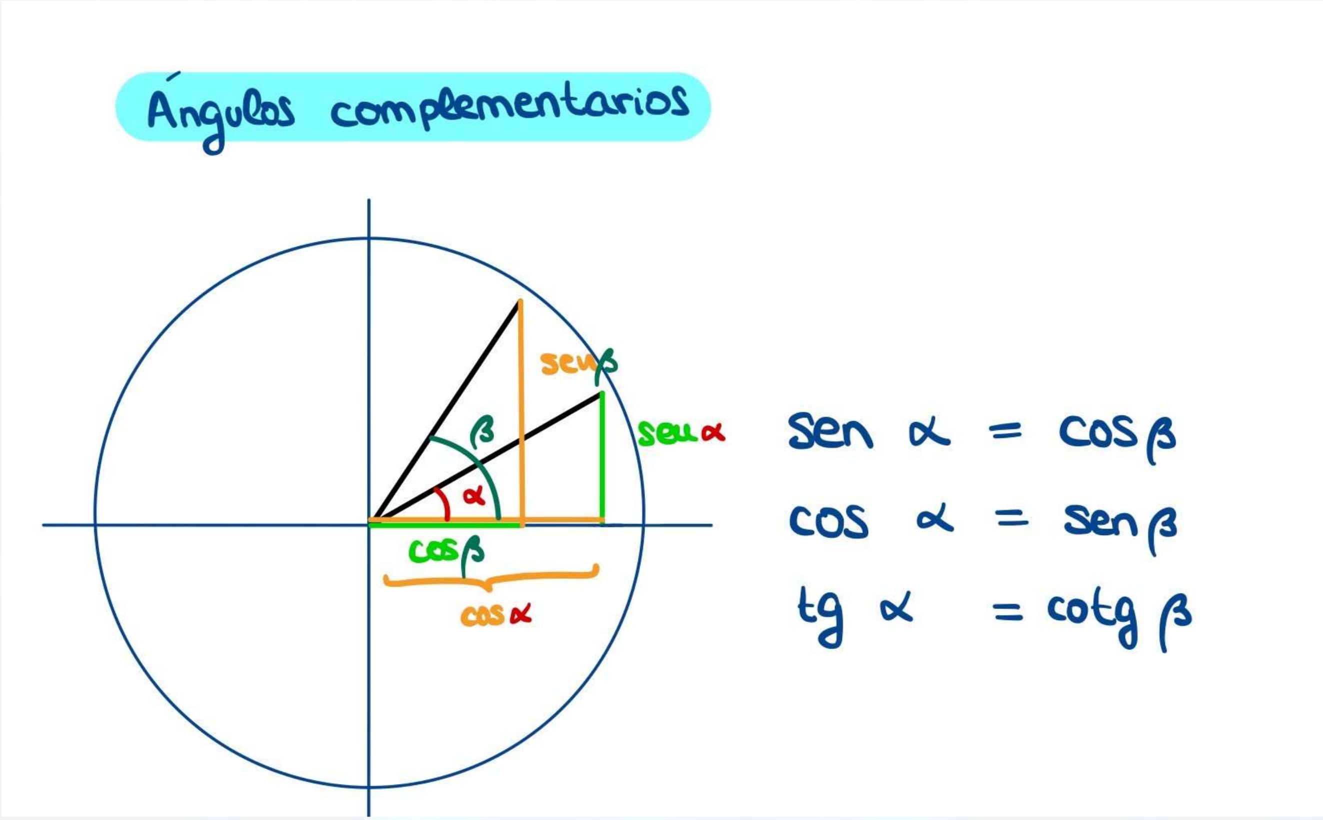
2. ¿Cómo se resuelven identidades y ecuaciones?



2. ¿Cómo se resuelven identidades y ecuaciones?



2. ¿Cómo se resuelven identidades y ecuaciones?



2. ¿Cómo se resuelven identidades y ecuaciones?

Ejemplo 5

Demuestra que $(sen\ x + \cos x)^2 = 1 + 2senx \cos x$

$$(senx + cosx)^2 = \underbrace{sen^2 x + cos^2 x}_{1} + 2senx\,cosx =$$

$$= 1 + 2senx\,cosx$$

2. ¿Cómo se resuelven identidades y ecuaciones?

Ecuaciones trigonométricas

Ejemplo 6

~~Demuestra que~~ Calcula $\cos^2 x + \cos x = \underbrace{sen^2 x}$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\cos^2 x + \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x + \cos x - 1 + \cos^2 x = 0$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Cambio de variable $y = \cos x$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

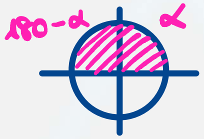
$y = -1 \longrightarrow sen\,x = -1$; $x = 270 + 360k$, $k \in \mathbb{Z}$

$y = 1/2 \longrightarrow sen\,x = \frac{1}{2}$; $x = 30 + 360k$, $k \in \mathbb{Z}$

2. ¿Cómo se resuelven identidades y ecuaciones?

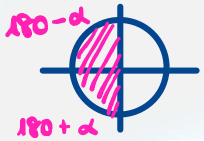
Ejercicio 8. Escribe dos ángulos que cumplan:

1. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{4} \longrightarrow$ 1er cuadrante : $\alpha = 48'59°$
   2º cuadrante : $\alpha' = 180 - \alpha = 180 - 48'59° =$
   $= 131'41°$



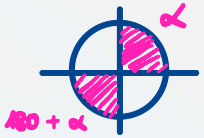
El seno es positivo en el 1º y 2º cuadrante

2. $\cos\alpha = -\frac{1}{4} \xrightarrow[\text{1er cuad. para trasladarlo luego}]{\text{Lo calculamos en el}}$ 1er cuadrante : $\alpha = 75'52°$
   2º cuadrante : $\alpha' = 180 - 75'52 = 104'48°$
   3er cuadrante : $\alpha'' = 180 + 75'52 = 255'52°$



El coseno es negativo en el 2º y 3º cuadrante

4. $\tan\alpha = 1.5 \longrightarrow$ 1er cuadrante : $\alpha = 56'31°$
   3er cuadrante : $\alpha' = 180 + \alpha = 180 + 56'31° =$
   $= 236'31°$



La tg es positiva en el 1º y 3º cuadrante

2. ¿Cómo se resuelven identidades y ecuaciones?

Ejercicios 9 y 10. Calcula las razones trigonométricas siguientes:

1. $\cos 120°$

   ↓
   2º cuadrante

   sen +
   cos −
   tg −

   $\cos 120 = -0'5$

2. $sen 300°$

   ↓
   4º cuadrante

   sen −
   cos +
   tg −

   $sen 300 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\tan 120°$

   ↓
   2º cuadrante

   sen +
   cos −
   tg −

   $tg\ 120 = -\sqrt{3}$

4. $sen 240°$

   ↓
   3er cuadrante

   sen −
   cos −
   tg +

   $sen\ 240 = \frac{-1}{2}$

2. ¿Cómo se resuelven identidades y ecuaciones?

Ejercicio 12: Demuestra que

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\overbrace{1 - sen^2 x}^{\cos^2 x}}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

2. ¿Cómo se resuelven identidades y ecuaciones?

Ejercicio 12: ~~Demuestra que~~ calcula

1. $2senx = 1$; $sen x = \frac{1}{2}$; $x = 30 + 360k, \; k \in \mathbb{Z}$

2. $4senx = \csc x$; $4senx = \frac{1}{senx}$; $4sen^2 x = 1$; $sen^2 x = \frac{1}{4}$

$senx = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\begin{cases} senx = \frac{1}{2} \; ; \; x = 30 + 360k \quad k \in \mathbb{Z} \\ senx = -\frac{1}{2} \; ; \; x = 330 + 360k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2. ¿Cómo se resuelven identidades y ecuaciones?

Ejercicio 12: ~~Demuestra que~~ Calcula

1. $2\cos x = \sqrt{3}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = 30 + 360k, \ k \in \mathbb{Z}$

2. $3senx - 2\underbrace{\cos^2 x}_{} = 0 \longrightarrow 3\operatorname{sen} x - 2(1-\operatorname{sen}^2 x) = 0$

$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$3\operatorname{sen} x - 2 + 2\operatorname{sen}^2 x = 0$

$2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 2 = 0$

$y = \operatorname{sen} x$

$2y^2 + 3y - 2 = 0$; $y = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4\cdot 4}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$ $\begin{cases} \cancel{y = -2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

el seno está acotado entre -1 y 1

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$; $x = 30 + 360k, \ k \in \mathbb{Z}$

2. ¿Cómo se resuelven identidades y ecuaciones?

Ejercicio 12: calcula ~~Demuestra que~~

1. $2sen^2x = 1$; $sen^2x = \frac{1}{2}$; $sen\,x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$;

$$\begin{cases} sen\,x = \sqrt{\frac{1}{2}} \ ; & x = 45^\circ + 360k, \ k \in \mathbb{Z} \\ sen\,x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \ ; & x = 315^\circ + 360k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4. ¿Cómo se hallan distancias, áreas y volúmenes?

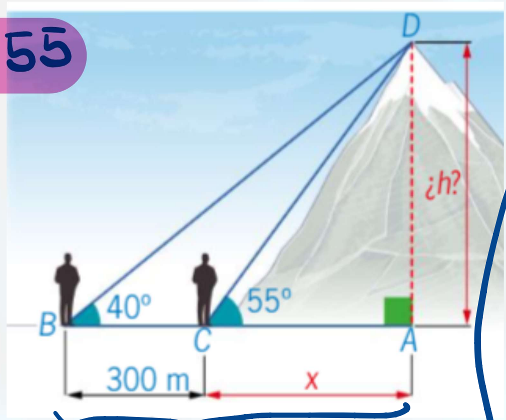
Ejemplo 9: En una llanura, desde un punto cualquiera, se mide el ángulo B de elevación y se obtiene 40°.
Acercándose a la montaña en horizontal se vuelve a medir el ángulo C de elevación y se obtiene 55°.

Despejamos y sustituimos en la otra

$$\begin{cases} tg\,55 = \dfrac{h}{x} \; ; \; h = x\,tg\,55 \\[2mm] tg\,40 = \dfrac{h}{x+300} \end{cases}$$

$$tg\,40 = \frac{x\,tg\,55}{x+300}$$

$$(x+300)\,tg\,40 = x\,tg\,55 \; ; \quad x\,tg\,40 + 300\,tg\,40 = x\,tg\,55$$



$\underbrace{\qquad\qquad}_{300 + x}$

$$300\,tg\,40 = x\,tg\,55 - x\,tg\,40$$

$$300\,tg\,40 = x\,(tg\,55 - tg\,40)$$

$$\frac{300\,tg\,40}{tg\,55 - tg\,40} = x$$

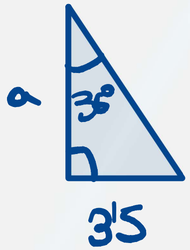
$$x = 427'35\ m$$

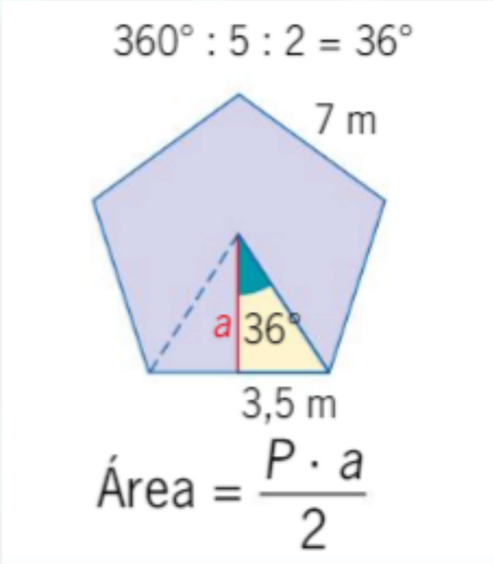
$$h = x\,tg\,55 = 427'35\,tg\,55 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 610'32\,m$$

4. ¿Cómo se hallan distancias, áreas y volúmenes?

Ejemplo 10: Calcula el área de un pentágono regular en el que el lado mide 7 m.





$$\text{sen}\,36 = \frac{3'5}{a}$$

$$a = \frac{3'5}{\text{sen}\,36}$$

$$a = 5'95\ \text{m}$$

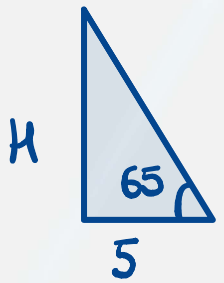
$$\text{Área} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(7 \cdot 5) \cdot 5'95}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 104'125\ \text{m}^2}$$

4. ¿Cómo se hallan distancias, áreas y volúmenes?

Cálculo de volúmenes

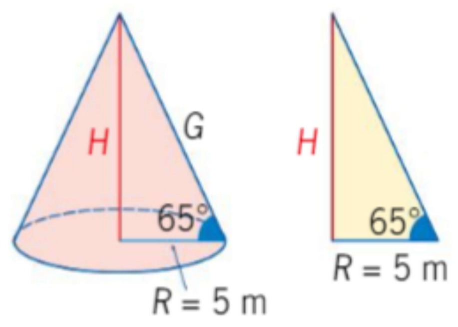
Ejemplo 11. Calcula el volumen de un cono en el que el radio de la base mide 5m y el ángulo de elevación de la generatriz es de 65°.



$tg65 = \frac{H}{5}$

$H = 5 \cdot tg65$

$H = 10'72 m$



$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H$$

$V = \frac{1}{3} A_B H =$

$= \frac{1}{3} (\pi 5^2) \cdot 10'72 =$

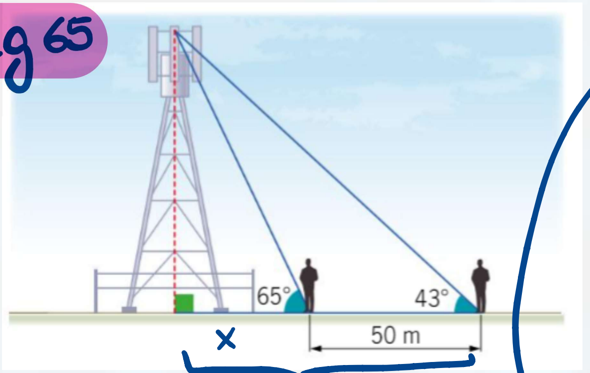
$\rightarrow V = 841'95 m^3$

4. ¿Cómo se hallan distancias, áreas y volúmenes?

Ejercicio 23: Una antena de telefonía móvil está en una llanura dentro de una cerca en la que está prohibido entrar. Para hallar su altura, medimos desde un punto exterior el ángulo de elevación y se obtienen 65°. Nos alejamos 50m y el nuevo ángulo de la antena de telefonía móvil.

Despejamos y sustituimos en la otra

$$\begin{cases} tg\,65 = \dfrac{h}{x} \; ; \; h = x\,tg\,65 \\ tg\,43 = \dfrac{h}{x+50} \end{cases}$$



x, $50 + x$

$$tg\,43 = \frac{x\,tg\,65}{x+50}$$

$(x+50)\,tg\,43 = x\,tg\,65 \; ; \; x\,tg\,43 + 50\,tg\,43 = x\,tg\,65$

$50\,tg\,43 = x\,tg\,65 - x\,tg\,43$

$50\,tg\,43 = x(tg\,65 - tg\,43)$

$$\frac{50\,tg\,43}{tg\,65 - tg\,43} = x$$

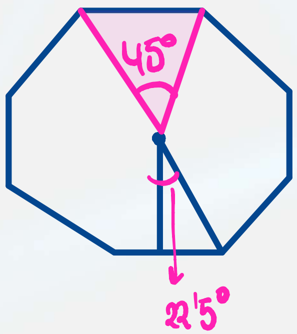
$x = 38'47\,m$

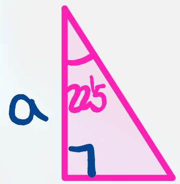
$h = x\,tg\,65 = 38'47 \cdot tg\,65$

$\Rightarrow h = 82'5\,m$

4. ¿Cómo se hallan distancias, áreas y volúmenes?

Ejercicio 24: Calcula la apotema de un octógono regular en el que el lado mide 7.2 cm.





$360 : 8 = 45$

$\frac{45}{2} = 22'5$

$\frac{7'2}{2} = 3'6$

$tg\ 22'5 = \frac{3'6}{a}$

$a = \frac{3'2}{tg\ 22'5}$

$a = 8'7$ cm

4. ¿Cómo se hallan distancias, áreas y volúmenes?

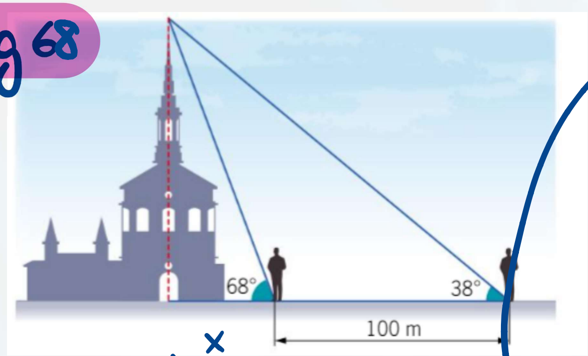
Ejercicio 26: Para medir la altura de una catedral, medimos el ángulo de elevación de la parte más alta desde un punto determinado y obtenemos 68°; Nos alejamos en la misma dirección 100m y el nuevo ángulo de elevación es de 38°. Halla la altura de la catedral.

Despejamos y sustituimos en la otra

$$\begin{cases} tg\,68 = \dfrac{h}{x} \; ; \; h = x\,tg\,68 \\ tg\,38 = \dfrac{h}{x+100} \end{cases}$$

$$tg\,38 = \frac{x\,tg\,68}{x+100}$$

$$(x+100)\,tg\,38 = x\,tg\,68 \; ; \quad x\,tg\,38 + 100\,tg\,43 = x\,tg\,68$$



x

$100 + x$

$$100\,tg\,38 = x\,tg\,68 - x\,tg\,38$$

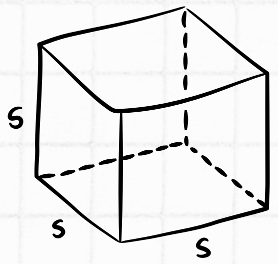
$$100\,tg\,38 = x(tg\,68 - tg\,38)$$

$$\frac{100\,tg\,38}{tg\,68 - tg\,38} = x$$

$$x = 46'13\,m$$

$$h = x\,tg\,68 = 46'13 \cdot tg\,68$$

$$\Rightarrow h = 114'17\,m$$



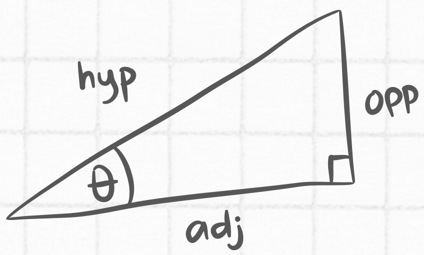
$V = s^3$

IES ZURBARÁN

EJERCICIOS RESUELTOS

ESTHER RODRIGUEZ TEJEDA

GRUPO 4º D



$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp}$

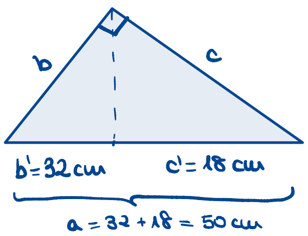
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

TRIGONOMETRÍA (TEMA 7)

Págs 142 – 145

49. En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a esta en dos segmentos que miden $b' = 32$ cm y $c' = 18$ cm. Halla:

a) el cateto b b) el cateto c



Tª cateto : $b^2 = a \cdot b' = 50 \cdot 32$; $b = 40$ cm

$c^2 = a \cdot c' = 50 \cdot 18$; $c = 30$ cm

64. Sea α un ángulo agudo y $\operatorname{sen} \alpha = 2/5$. Calcula $\cos \alpha$

$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{5}$

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$; $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25}$; $\cos^2 \alpha = \frac{21}{25}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$

65. Sabiendo que $\cos \alpha = 9/15$, calcula $\operatorname{tg} \alpha$

$\cos \alpha = 9/15$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\longrightarrow$ $\operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{9}{15}\right)^2 = 1$; $\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{9}{15}\right)^2$; $\operatorname{sen}^2 \alpha = 0'64$;

$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{0'64}$; $\operatorname{sen} \alpha = 0'8$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0'8}{9/15} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1'33$

* Sabiendo que $tg\,\alpha = 3$, calcula $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$.

$tg\,\alpha = 3$

$tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$ $\qquad 3 = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$; $3\cos\alpha = sen\,\alpha$

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

sustituyendo

$(3\cos\alpha)^2 + cos^2\alpha = 1$

$9\cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1$; $10\cos^2\alpha = 1$; $cos^2\alpha = \dfrac{1}{10}$; $cos\,\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{10}}$

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$; $sen^2\alpha + \left(\cancel{\sqrt{\dfrac{1}{10}}}\right)^{\cancel{2}} = 1$; $sen^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{10}$; $sen^2\alpha = \dfrac{9}{10}$

$sen\,\alpha = \sqrt{\dfrac{9}{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$sen\,\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

73. En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide esta en dos segmentos que miden $b' = 18$ cm y $c' = 32$ cm. Halla:

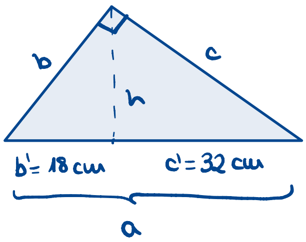
a) La longitud de la hipotenusa *a*

b) La longitud de la altura relativa a la hipotenusa;

c) El cateto *b*

d) El cateto *c*

e) El área de dicho triángulo rectángulo.



a) $a = 18 + 32 = 50$ cm

b) T^a altura : $h^2 = b' \cdot c' = 18 \cdot 32$; $h^2 = 576$; $h = 24$ cm

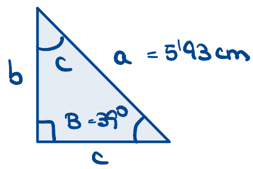
c) T^a cateto : $b^2 = a \cdot b' = 50 \cdot 32$; $b = 40$ cm

d) T^a cateto : $c^2 = a \cdot c' = 50 \cdot 18$; $c = 30$ cm

e) $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{50 \cdot 24}{2} = 600 \text{ cm}^2$

92. Calcula en un triángulo rectángulo el lado *b*, siendo $a = 5{,}93$ cm y $B = 39°$

Tomemos a como la hipotenusa pues el libro sigue esa notación.



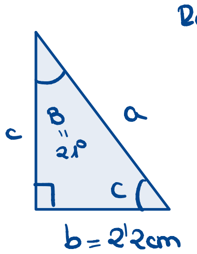
$\text{sen } B = \dfrac{b}{a}$; $\text{sen } 39 = \dfrac{b}{5'93}$; $b = 5'93 \cdot \text{sen } 39$; $b = 3'73$ cm

$\cos B = \dfrac{c}{a}$; $\cos 39 = \dfrac{c}{5'93}$; $c = 5'93 \cdot \cos 39$; $c = 4'61$ cm

Como la suma de los ángulos de un triángulo es $180° \Rightarrow$

$C = 180 - 90 - 39 = 51°$; $C = 51°$

93. Calcula en un triángulo rectángulo el lado *a*, siendo *b* = 2,2 cm y *B* = 21°



Recordamos que si llamamos a un ángulo B, entonces el lado opuesto es b.

Calculemos el ángulo.

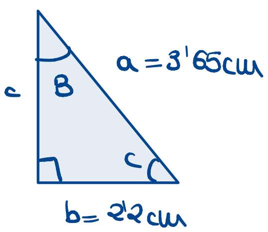
$C = 180 - 90 - 21 = 69$; $C = 69°$

Como recomendación, usad los datos que os facilita el problema ya que nos podemos confundir calculando algún lado que no tengamos.

$$\begin{cases} \operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a} \; ; \; \operatorname{sen} 21 = \dfrac{2'2}{a} \; ; \; a = \dfrac{2'2}{\operatorname{sen} 21} \; ; \; a = 6'14 \text{ cm} \\[2ex] \operatorname{tg} B = \dfrac{b}{c} \; ; \; \operatorname{tg} 21 = \dfrac{2'2}{c} \; ; \; c = \dfrac{2'2}{\operatorname{tg} 21} \; ; \; c = 5'73 \text{ cm} \end{cases}$$

→ Yo he usado solo el lado b y el ángulo $\hat{B}$, aunque podeis hacerlo de la manera que os parezca más fácil.

97. Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo *B*, siendo *a* = 3,65 cm y *b* = 2,2 cm



Calculemos primero el ángulo C

Como tenemos el cateto contiguo y la hipotenusa, la razón trigonométrica que nos relaciona ambos lados es el coseno, por tanto:

$\cos C = \dfrac{b}{a}$; $\cos C = \dfrac{2'2}{3'65}$; $\cos C = 0'6027$; $C = 52'93°$

Quitamos el coseno en la calculadora pulsando:

SHIFT | cos | 0'6027 | =

$\operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a}$; $\operatorname{sen} B = \dfrac{2'2}{3'65}$; $\operatorname{sen} C = 0'6027$; $C = 37'07°$

Quitamos el seno en la calculadora pulsando:

SHIFT | sin | 0'6027 | =

Usando T^a Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

$3'65^2 = 2'2^2 + c^2$

$3'65^2 - 2'2^2 = c^2$

$\sqrt{3'65^2 - 2'2^2} = c$

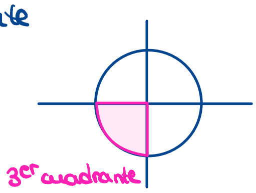
$c = 2'91$ cm

Pág 160 - 163

42. Determina todas las razones trigonométricas del ángulo α si cos α = – 0,8 y el ángulo α está en el 3.er cuadrante. Redondea los resultados a dos decimales.

Datos: $\cos\alpha = -0'8$
$\alpha \rightarrow 3^{er}$ cuadrante

En primer lugar, veamos qué signos van a tener el seno y la tangente



seno –
coseno –
$tg = \frac{seno}{coseno} = \frac{-}{-} = +$

Usando $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$;

$sen^2\alpha + (-0'8)^2 = 1$; $sen^2\alpha = 1 - 0'8^2$; $sen\,\alpha = \sqrt{1-0'8^2}$; $sen\,\alpha = -0'6$

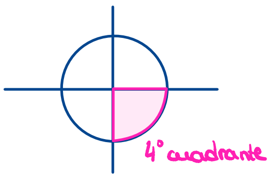
Usando $tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$

$tg\,\alpha = \frac{-0'6}{-0'8}$; $tg\,\alpha = 0'75$

43. Si tg α = – 0,5 y α está en el 4.º cuadrante, determina el resto de las razones trigonométricas.

Datos: $tg\,\alpha = -0'5$
$\alpha \rightarrow 4^{o}$ cuadrante

En primer lugar, veamos que signos van a tener el seno y el coseno



seno –
coseno +
$tg = \frac{seno}{coseno} = \frac{-}{+} = -$

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$tg\,\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \longrightarrow -0'5 = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$

$-0'5\,cos\alpha = sen\,\alpha$

Sustituyendo obtenemos:

$(-0'5\,cos\alpha)^2 + cos^2\alpha = 1$; $0'25\,cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1$; $1'25\,cos^2\alpha = 1$; $cos\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{1'25}}$

$cos\,\alpha = +0'89$

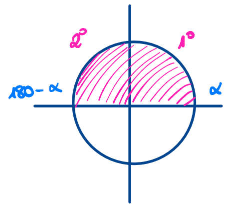
Como $-0'5\,cos\,\alpha = sen\,\alpha$
$-0'5\cdot(+0'89) = sen\,\alpha$; $sen\,\alpha = -0'447$

Calcula dos ángulos que cumplan:

47. ~~Dibuja en la circunferencia unidad los ángulos que cumplan que:~~

a) sen $\alpha = 0{,}7$ b) cos $\alpha = -0{,}4$

a) sen $\alpha = 0'7$

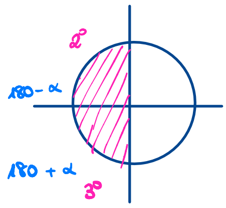


Como el seno es la coordenada y, veamos en qué cuadrantes es positivo.

sen $\alpha = 0'7$; $\alpha = 44'42°$ → 1er cuadrante

2° cuadrante → $\alpha' = 180 - \alpha = 180 - 44'42 = 135'57$

b) $\cos \alpha = -0'4$



Como el coseno es la coordenada x, veamos en qué cuadrantes es negativo

Como es negativo calculemos α en el primer cuadrante

$\cos \alpha = 0'4$; $\alpha = 66'42°$

Ahora lo trasladamos al 2° y al 3° usando las fórmulas.

2° cuadrante → $\alpha' = 180 - \alpha = 180 - 66'42$; $\alpha' = 113'58°$

3° cuadrante → $\alpha'' = 180 + \alpha = 180 + 66'42$; $\alpha'' = 246'42°$

50. Demuestra la siguiente identidad:

$$\cos^3\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha = \cos\alpha$$

Partamos de la 1º parte y lleguemos a la segunda mediante transformaciones:

$$\cos^3\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha \underset{\uparrow}{=} \cos^3\alpha + \cos\alpha\,(1-\cos^2\alpha) = \cancel{\cos^3\alpha} + \cos\alpha - \cancel{\cos^3\alpha} = \cos\alpha.$$

$\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\mathrm{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

Recordemos que si damos vueltas a la circunferencia y volvemos al mismo sitio el seno no varía.

52. $\mathrm{sen}\,2x = 1$; $2x = 90$; $x = 45 + 360k, \; k\in\mathbb{Z}$

53. $\mathrm{tg}\,2x = \sqrt{3}$; $2x = 60$; $x = 30 + 360k, \; k\in\mathbb{Z}$

56. $\mathrm{sen}\,x = \cos^2 x + 1$; $\mathrm{sen}\,x = 1 - \mathrm{sen}^2 x + 1$; $\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\,x - 2 = 0 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0$

$\cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x$

Cambio de variable $\mathrm{sen}\,x = y$

$$\Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} y = -2 \; \text{X} \\ y = 1 \end{cases}$$

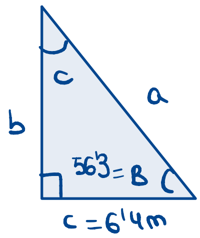
el seno toma valores entre -1 y 1

Deshacemos el cambio:

$y = 1$; $\mathrm{sen}\,x = 1$; $x = 90 + 360k, \; k\in\mathbb{Z}$

57. $\cancel{\mathrm{sen}\,x}\cos x = \cancel{\mathrm{sen}\,x}$; $\cos x = 1$; $x = 0 + 360k, \; k\in\mathbb{Z}$

60. En un triángulo rectángulo se conocen el cateto $c = 6,4$ m y el ángulo contiguo $B = 56° \, 23' \, 44''$ $\simeq 56'3°$. Calcula los demás elementos. Redondea las longitudes y el área a dos decimales.

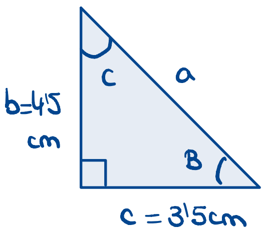


$\text{tg } 56'3 = \dfrac{b}{6'4}$; $b = 6'4 \cdot \text{tg } 56'3$; $b = 9'6 \text{ m}$

$\cos 56'3 = \dfrac{6'4}{a}$; $a = \dfrac{6'4}{\cos 56'3}$; $a = 11'53 \text{ m}$

$C = 180 - 56'3 - 90 = 33'7°$

61. En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos $b = 4,5$ cm y $c = 3,5$ cm. Calcula los demás elementos. Redondea las longitudes y el área a dos decimales.



$\text{tg } C = \dfrac{3'5}{4'5}$; $C = 37'87°$

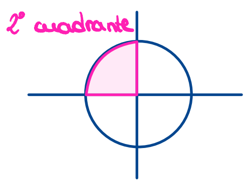
$\text{tg } B = \dfrac{4'5}{3'5}$; $B = 52'13°$

$a^2 = b^2 + c^2$; $a^2 = 4'5^2 + 3'5^2$; $a = \sqrt{4'5^2 + 3'5^2}$; $a = 5'7 \text{ m}$

66. Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que $\text{tg } \alpha = -2/5$ y α está en el 2.° cuadrante.

Datos: $\text{tg } \alpha = -2/5$
$\alpha \rightarrow 2°$ cuadrante

En primer lugar, veamos qué signos van a tener el seno y el coseno



seno +
coseno −
$\text{tg} = \dfrac{\text{seno}}{\text{coseno}} = \dfrac{+}{-} = -$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \longrightarrow -\dfrac{2}{5} = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$-\dfrac{2}{5} \cos \alpha = \sin \alpha$

Sustituyendo obtenemos:

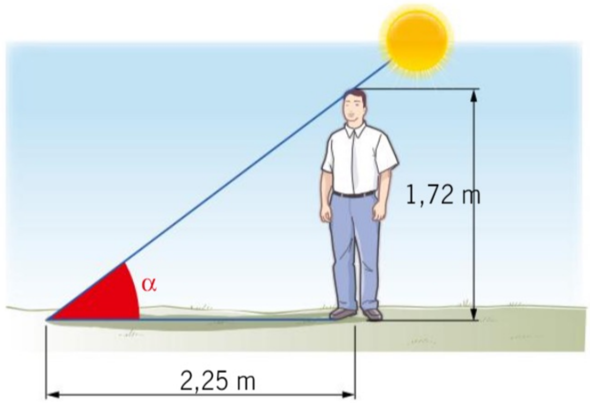
$\left(-\dfrac{2}{5} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$; $0'16 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $1'16 \cos^2 \alpha = 1$; $\cos \alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1'16}}$

$\cos \alpha = -0'93$

Como $-2/5 \cos \alpha = \sin \alpha$

$-2/5 \cdot (-0'93) = \sin \alpha$; $\sin \alpha = 0'372$

82. Una persona que mide 1,72 m proyecta una sombra de 2,25 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol en ese momento?

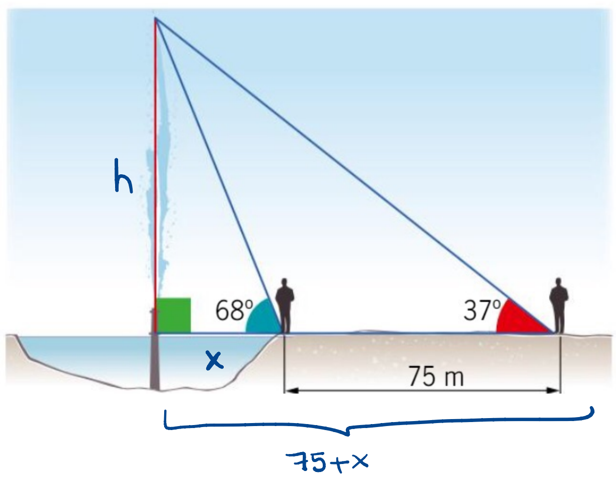


La razón trigonométrica que nos relaciona los dos catetos es la tangente:

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1'72}{2'25}$; $\operatorname{tg} \alpha = 0'764$; $\alpha = 37'4^\circ$

SHIFT TAN 0'764

83. En el centro de un lago sale verticalmente un chorro de agua, y se quiere medir su altura. Para ello, se mide el ángulo de elevación desde la orilla a la parte más alta del chorro de agua y se obtienen 68°; alejándose 75 m del lago se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 37°. Calcula la altura del chorro de agua. Redondea el resultado a dos decimales.



La razón trigonométrica que nos relaciona los dos catetos es la tangente:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 68 &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 37 &= \frac{h}{x+75} \end{aligned}\right\} \quad h = x \cdot \operatorname{tg} 68 \qquad \operatorname{tg} 37 = \frac{x \operatorname{tg} 68}{x+75}$$

$(x+75) \operatorname{tg} 37 = x \operatorname{tg} 68$

$x \operatorname{tg} 37 + 75 \operatorname{tg} 37 = x \operatorname{tg} 68$

$75 \operatorname{tg} 37 = x \operatorname{tg} 68 - x \operatorname{tg} 37$

$75 \operatorname{tg} 37 = x (\operatorname{tg} 68 - \operatorname{tg} 37)$

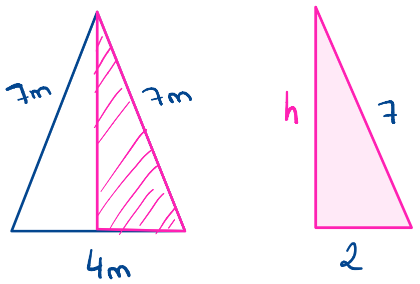
$x = \frac{75 \operatorname{tg} 37}{\operatorname{tg} 68 - \operatorname{tg} 37}$

$x = 32'83 \text{ m}$

Como $h = x \operatorname{tg} 68 = 32'83 \cdot \operatorname{tg} 68$;

$h = 81'26 \text{ m}$

85. Dado un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden 7 m, y el desigual, 4 m, calcula la altura relativa al lado desigual. Redondea el resultado a dos decimales.



Tª Pitágoras: $7^2 = h^2 + 2^2$

$49 - 4 = h^2$

$h = \sqrt{45}$

$h = 6'71\,m$

88. Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{1 + \text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1 + \text{sen}\,\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}$$

$$\frac{1 + \text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1 + \text{sen}\,\alpha} \underset{\text{mcm}}{=} \frac{(1 + \text{sen}\,\alpha)^2 + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(1 + \text{sen}\,\alpha)} = \frac{1 + \text{sen}^2\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(1 + \text{sen}\,\alpha)} =$$

$$= \frac{1 + 2\,\text{sen}\,\alpha + \overbrace{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}^{1}}{\cos\alpha\,(1 + \text{sen}\,\alpha)} = \frac{2 + 2\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha\,(1 + \text{sen}\,\alpha)} = \frac{2\,\cancel{(1 + \text{sen}\,\alpha)}}{\cos\alpha\,\cancel{(1 + \text{sen}\,\alpha)}} = \boxed{\frac{2}{\cos\alpha}}$$

Examen 4º ESO D TRIGONOMETRÍA 18/04/2024

Nombre: ____ NOTA: _____________

1. (1.5 puntos) Calcula todos los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que $c = 3$ cm y $B = 50$ grados.

2. (2 puntos) Sabemos que $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Calcula sen α y $\cos \alpha$ utilizando **razones trigonométricas.**

3. (1.5 puntos) En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a esta en dos segmentos que miden $b' = 15$ cm y $c' = 20$ cm. Halla:

a) La longitud de la altura relativa a la hipotenusa.
b) Los catetos.

4. (1.75 puntos) Calcula dos ángulos $\alpha, \beta, 0 \leq \alpha, \beta \leq 360$ que verifiquen:

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. (1.75 puntos) Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $\cos^2 x - 2sen\, x = 2$

6. (1.5 puntos) Para hallar la altura a la que se encuentra un globo, procedemos del siguiente modo:
Rosa se coloca en un punto B. Medimos el ángulo de elevación desde Rosa hasta la parte más alta del globo y se obtienen 50º. Ana se pone a 5 metros de ella, se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 40º. Calcula la altura a la que se encuentra el globo.

Examen 4º ESO D TRIGONOMETRÍA 04/2024

Nombre: ____ NOTA: _____________

1. (1.5 puntos) Calcula todos los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que $c = 4$ cm y $B = 55$ grados.

2. (2 puntos) Sabemos que $\tan \alpha = \frac{2}{3}$. Calcula sen α y $\cos \alpha$ utilizando **razones trigonométricas.**

3. (1.5 puntos) En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a esta en dos segmentos que miden $b' = 18$ cm y $c' = 22$ cm. Halla:

a) La longitud de la altura relativa a la hipotenusa.
b) Los catetos.

4. (1.75 puntos) Calcula dos ángulos $\alpha, \beta,\ 0 \leq \alpha, \beta \leq 360$ que verifiquen:

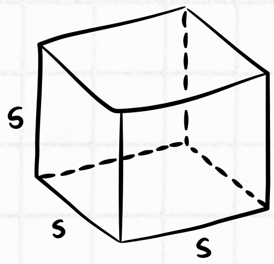
$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. (1.75 puntos) Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $\cos^2 x - 2 sen\, x = 2$

6. (1.5 puntos) Para hallar la altura a la que se encuentra un globo, procedemos del siguiente modo:
Rosa se coloca en un punto B. Medimos el ángulo de elevación desde Rosa hasta la parte más alta del globo y se obtienen 55º. Ana se pone a 10 metros de ella, se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 45º. Calcula la altura a la que se encuentra el globo.

IES ZURBARÁN

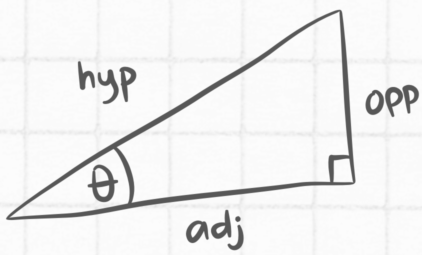
GEOMETRÍA ANALÍTICA



$V = s^3$

ESTHER RODRIGUEZ TEJEDA

GRUPO 4º D



$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp}$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

TEMA 9: GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. ¿Qué es un vector?

Un **vector fijo** { es un segmento orientado. / se representa por $\vec{AB}$.

Ejemplo: A (1,2), B (5,3) } $\vec{AB} = B - A = (5,3) - (1,2) = (4,1)$

Características:

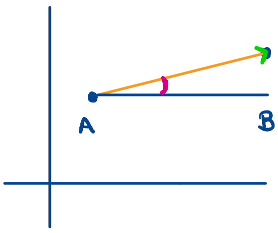
- **Módulo** < su longitud / se representa por $|AB|$

  $\vec{v} = (x,y) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2}$

  $|\vec{AB}| = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$

- **Dirección**: dirección de la recta que lo contiene

- **Sentido**: es el que va del origen al extremo



Un **vector libre** es un vector fijo $\vec{v} = \vec{OA}$ que representa a todos los vectores que tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

Ejemplo: Calcula el módulo del vector $\vec{v}(1,2)$.

Módulo $\longrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

Ejemplo: Calcula el módulo del vector $\vec{v}(-3,-4)$

Módulo $\longrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

Vector opuesto: $\vec{v} = -\vec{v}$

$(x,y) = (-x,-y)$

Ejemplo: El vector opuesto de $\vec{v} = (1,2)$ es $-\vec{v} = (-1,-2)$

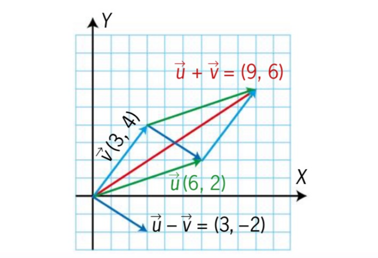
Suma y resta de vectores

$\vec{u}\ (6,2)$, $\vec{v}\ (3,4)$

$\vec{u}+\vec{v} = (6,2)+(3,4) = (6+3,\ 2+4) = (9,6)$

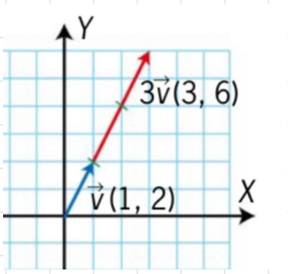
$\vec{u}-\vec{v} = (6,2)-(3,4) = (6-3,\ 2-4) = (3,-2)$

Regla del paralelogramo



Producto de un número por un escalar

$\vec{v}\ (1,2) \longrightarrow 3\vec{v} = 3(1,2) = (3\cdot 1,\ 3\cdot 2) = (3,6)$

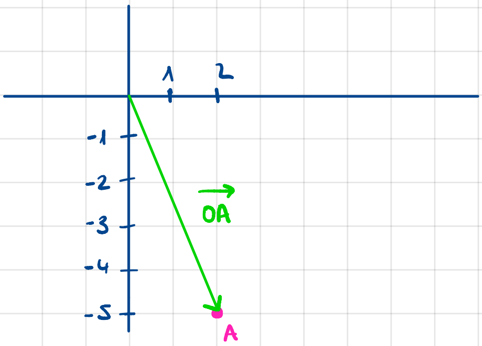


① Pág 169 Dado el punto A(2,-5) halla el vector $\vec{OA}$, representalo y halla sus componentes.

$A = (2,-5)$

$O = (0,0)$

$\vec{OA} = A-O = (2,-5)-(0,0) = (2,-5)$



③ Pág 169. Calcula el módulo de los siguientes vectores:

a) $\vec{v}\,(4,-2)$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

b) $\vec{v}\,(-3,-4)$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

⑤ Pág 169 Dados los siguientes vectores

$\vec{u}\,(3,2) \qquad \vec{v}\,(1,4)$

Halla analítica y geométricamente

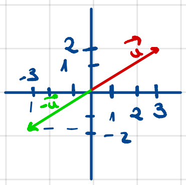
a) $-\vec{u} = -(3,2) = (-3,-2)$

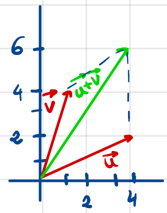
b) $\vec{u}+\vec{v} = (3,2) + (1,4) = (3+1, 2+4) = (4,6)$

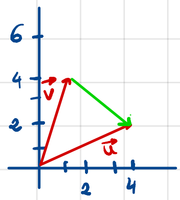
c) $\vec{u}-\vec{v} = (3,2) - (1,4) = (3-1, 2-4) = (2,-2)$

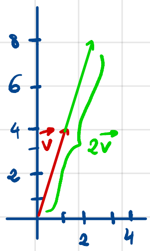
d) $2\vec{v} = 2\,(1,4) = (2\cdot 1, 2\cdot 4) = (2,8)$

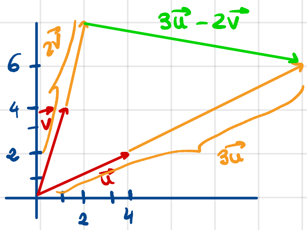
e) $3\vec{u} - 2\vec{v} = 3(3,2) - 2(1,4) = (3\cdot 3, 3\cdot 2) - (2\cdot 1, 2\cdot 4) = (9,6) - (2,8) = (9-2, 6-8) =$
$= (7,-2)$











2. ¿Cómo es la ecuación de una recta?

¿Qué elementos determinan una recta?

Vector definido por dos puntos

$$\left.\begin{matrix} A\,(a_1, a_2) \\ B\,(b_1, b_2) \end{matrix}\right\} \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \Rightarrow \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

__Ejemplo__: $\left.\begin{matrix} A\,(-4,1) \\ B\,(2,5) \end{matrix}\right\} \quad \vec{AB} = (2,5) - (-4,1) = (2-(-4), 5-1) = (2+4, 5-1) = (6,4)$

Vector director y pendiente de una recta

Un vector director de una recta es un vector paralelo a la recta, es decir, tiene la misma dirección de la recta.

Pendiente de una recta: $m = \underset{\uparrow}{\operatorname{tg} \alpha}$

ángulo que forma el semieje positivo de las x con la recta

⟶ Si tenemos el vector director $\vec{v}\,(v_1, v_2) \Rightarrow m = \dfrac{v_2}{v_1}$

⟶ Si tenemos dos puntos $\left.\begin{matrix} A\,(x_1, y_1) \\ B\,(x_2, y_2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

__Ejemplo__: Halla un vector director y la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

$A\,(-5,2)$
$B\,(-2,4)$

vector director: $\vec{v} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-2,4) - (-5,2) = (-2-(-5), 4-2) = (3,2)$

$\vec{v} = (3,2) \Rightarrow m = \dfrac{3}{2}$

$\Downarrow$

$m = \dfrac{4-2}{-2-(-5)} = \dfrac{2}{3}$

Vector normal o perpendicular

Un vector normal a un vector es un vector perpendicular a dicho vector.

$$\vec{v}\,(v_1, v_2) \Rightarrow \begin{cases} \vec{n_1}\,(v_2, -v_1) \\ \vec{n_2}\,(-v_2, v_1) \end{cases}$$

__Ejemplo__: $\vec{v}\,(3,4) \Rightarrow \begin{cases} \vec{n_1}\,(4,-3) \\ \vec{n_2} = (-4,3) \end{cases}$

Ecuaciones de la recta

RECTA: Punto + vector

Elementos característicos:
- el punto $P(p_1, p_2)$
- el vector director $\vec{v}(v_1, v_2)$
  - La pendiente: $m = \frac{v_2}{v_1}$
  - Vector normal: $\vec{n_1}(-v_2, v_1)$, $\vec{n_2}(v_2, -v_1)$

7) Halla la ecuación de la recta determinada por $\begin{cases} \text{Punto } P(-5,2) \\ \text{vector } \vec{v}(4,3) \end{cases}$

Ecuación vectorial	$(x,y) = (p_1,p_2) + t(v_1,v_2)$, $t \in \mathbb{R}$	$(x,y) = (-5,2) + t(4,3)$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = p_1 + t v_1 \\ y = p_2 + t v_2 \end{cases}$	$x = -5 + 4t$ $y = 2 + 3t$ $\quad t \in \mathbb{R}$
Ecuación contínua	$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2}$	$\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{3}$
Ecuación general o implícita	$Ax + By + C = 0$ $\vec{n}(A,B)$ $\vec{v}(B,-A)$ $\quad m = \frac{-A}{B}$	$3(x+5) = 4(y-2)$ $3x + 15 = 4y - 8$ $3x - 4y + 15 + 8 = 0$ $3x - 4y + 23 = 0$ $\vec{n}(3,-4)$ $\vec{v}(4,3)$ $\quad m = \frac{3}{4}$
Ecuación explícita	$y = mx + n$ $\quad m =$ pendiente $y =$ ordenada en el origen	$4y = 3x + 23$ $y = \frac{3x+23}{4}$ $\quad m = \frac{3}{4}$, $n = \frac{23}{4}$

⊛ Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por los siguientes puntos:

a) $A(1,2)$ $B(-5,4)$

Para calcular la ecuación de una recta necesitamos un punto y un vector. Como tenemos dos puntos, vamos a calcular un vector.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-5,4) - (1,2) = (-5-1, 4-2) = (-6,2)$$

Ahora elijamos un punto de los dos: $A(1,2)$

$A(1,2)$
$\vec{v} = (-6,2)$

Ecuación vectorial $\rightarrow$ $(x,y) = (1,2) + t(-6,2)$

separando componentes

Ecuación paramétrica $\rightarrow$ $\begin{cases} x = 1-6t \\ y = 2+2t \end{cases}$

Ecuación continua $\rightarrow$ Despejemos t de ambas ecuaciones

$$\begin{cases} x = 1-6t \Rightarrow x-1 = -6t \Rightarrow t = \dfrac{x-1}{-6} \\ y = 2+2t \Rightarrow y-2 = 2t \Rightarrow t = \dfrac{y-2}{2} \end{cases}$$

$\Downarrow$ Igualando

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{2}$$

Ecuación general o implícita $\rightarrow$ $\dfrac{x-1}{-6} = \dfrac{y-2}{2} \xRightarrow{\text{Quitando denominadores}} 2(x-1) = (y-2)(-6) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x-2 = -6y+12 \xRightarrow[\text{a un lado}]{\text{Pasamos todo}} 2x+6y-14=0$

Ecuación explícita $\rightarrow$ $2x+6y-14=0 \xRightarrow{\text{Despejar } y} 6y = -2x+14 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{-2x+14}{6}$; $y = \dfrac{-2}{6}x + \dfrac{14}{6}$

$\dfrac{-2}{6}$ pendiente

$\dfrac{14}{6}$ ordenada en el origen

b) A (−2,3) Para calcular la ecuación de una recta necesitamos un punto y un vector.
B (1,2) Como tenemos dos puntos, vamos a calcular un vector.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (1,2) - (-2,3) = (1+2, 2-3) = (3,-1)$$

Ahora elijamos un punto de los dos: B (1,2)

B (1,2)
$\vec{v} = (3,-1)$

Ecuación vectorial → $(x,y) = (1,2) + t(3,-1)$

separando componentes

Ecuación paramétrica → $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$

Ecuación continua → Despejemos t de ambas ecuaciones

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x-1 = 3t \Rightarrow t = \frac{x-1}{3} \\ y-2 = -t \Rightarrow t = \frac{y-2}{-1} \end{matrix}$$

⇓ Igualando

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1}$$

Ecuación general o implícita → $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} \xrightarrow{\text{Quitando denominadores}} -(x-1) = (y-2)\cdot 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x+1 = 3y - 6 \xrightarrow[\text{a un lado}]{\text{Pasamos todo}} x+3y-7=0$$

Ecuación explícita → $x+3y-7=0 \xrightarrow{\text{Despejar } y} 3y = -x+7$

$$\Rightarrow y = \frac{-x+7}{3} \; ; \; y = \frac{-1}{3}x + \frac{7}{3}$$

$-\frac{1}{3}$ pendiente

$\frac{7}{3}$ ordenada en el origen

(9) Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(-4,-1)$ y tiene como vector director $\vec{v}(3,2)$.

(10) Dada la recta $2x+3y=6$, ¿Qué tipo de ecuación es?

Halla un punto, un vector normal, un vector director y la pendiente.

Ecuación general $2x+3y=6$

Para calcular un punto, damos un valor a una variable y despejamos la otra.

$x=0 \qquad 2\cdot 0+3y=6;\ \ 3y=6;\ \ y=\frac{6}{3};\ \ y=2$

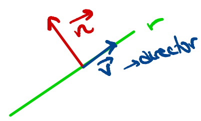
Punto $\longrightarrow$ $(0,2)$

La ecuación general es de la forma $Ax+By+C=0$
De aquí podemos sacar el vector normal. $\vec{n}=(A,B)$

Por lo tanto, $\vec{n}=(2,3)$

Como sabemos, el vector normal es perpendicular a la recta

Para calcular el vector director de la recta, tenemos que calcular un vector perpendicular.



Para calcularlo, podemos darle la vuelta a las coordenadas y cambiarle el signo a una.

$\vec{v}=(-3,2)$ (también valdría $(3,-2)$)

Como la ecuación que nos dice la pendiente de la recta es la explícita, calculemos la ecuación.

$2x+3y=6;\ \ 3y=-2x+6;\ \ y=\frac{-2x+6}{3};\ \ y=\frac{-2}{3}x+2 \qquad m=\frac{-2}{3}$

Punto medio de un segmento

$A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ $\Big\}$ $\quad M = \dfrac{A+B}{2} = \left(\dfrac{a_1+b_1}{2}, \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$

<u>Ejemplo</u>: Calcula el punto medio del segmentos de extremos $A(-3,1)$ y $B(5,3)$

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(-3,1)+(5,3)}{2} = \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = (1,2)$$

<u>Ejercicios</u>: Halla la ecuación de la recta que verifique:

a) $A(1,4)$, $m = \dfrac{2}{3}$

La ecuación que nos da información sobre la pendiente es la explícita.
Es de la forma $y = mx+n \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + n$

Como conocemos un punto, podemos sustituirlo en la ecuación y calcular n.

$4 = \frac{2}{3}\cdot 1 + n$; $4 - \frac{2}{3} = n$; $n = \frac{10}{3} \longrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

b) $A(-3,1)$, $B(2,5)$

Para calcular la ecuación de la recta necesitamos un punto y un vector.
Vamos a calcular el vector $\vec{AB}$.

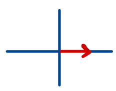
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2,5) - (-3,1) = (2-(-3), 5-1) = (5,4)$$

Elijamos un punto, por ejemplo A

La ecuación más fácil sería la vectorial $\longrightarrow (x,y) = (-3,1) + t(5,4) \quad t\in\mathbb{R}$

c) Es paralela al eje ox, $A(2,-3)$

Como es paralela al eje ox, podemos coger como vector director de la recta el vector del eje ox



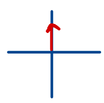
como vemos, la $y=0$ y a la x le podemos dar el valor que queramos ya que dan la misma dirección

$\vec{v} = (1,0)$
$A = (2,-3)$

$(x,y) = (2,-3) + t(1,0)$

d) Es paralela al eje oy, $A(-2,5)$

De la misma forma vemos qué vector elegimos



$\vec{v} = (0,1)$

$(x,y) = (-2,5) + t(0,1) \quad t\in\mathbb{R}$

12 Halla el punto medio del segmento de extremos A(3,4) y B(-5,2)

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(3,4)+(-5,2)}{2} = \frac{(3-5,\ 4+2)}{2} = \frac{(-2,\ 6)}{2} \ ; \ M=(-1,3)$$

4. Posición relativa y distancia

PUNTO - RECTA

- El punto está en la recta si verifica la ecuación
- El punto no está en la recta si no verifica la ecuación.

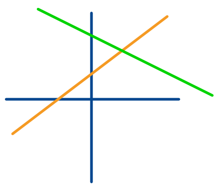
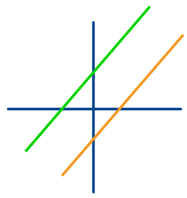
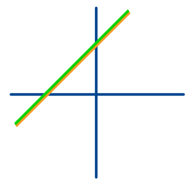
<u>Ejemplo</u>: Estudia la posición relativa de los puntos $A(4,3)$ y $B(1,4)$ respecto de la recta $r: 3x - 2y = 6$

$A(4,3) \Rightarrow 3\cdot 4 - 2\cdot 3 = 12 - 6 = 6 \Rightarrow A(3,4) \in r$.

$B(1,4) \Rightarrow 3\cdot 1 - 2\cdot 4 = 3 - 8 = -5 \neq 6 \Rightarrow B(1,4) \notin r$

RECTA - RECTA

$r: Ax + By + C = 0 \qquad s: A'x + B'y + C = 0$

Secantes	Paralelas	Coincidentes
Se cortan en un punto 	No se cortan 	Son la misma recta 
$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

<u>Ejemplo</u>: Estudia la posición relativa de las siguientes rectas.

a) $2x - 3y + 5 = 0$
$x + 2y - 8 = 0$

$\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{2}$

Secantes

b) $3x - 4y - 5 = 0$
$3x - 4y + 2 = 0$

$\frac{3}{3} = \frac{-4}{-4} \neq \frac{-5}{2}$

Paralelas

c) $2x - 3y - 1 = 0$
$-2x + 3y + 1 = 0$

$\frac{2}{-2} = \frac{-3}{3} = \frac{-1}{1}$

Coincidentes

Rectas paralelas y perpendiculares

Rectas paralelas $\longrightarrow$ tienen la misma pendiente : $m_r = m_s$.

Rectas perpendiculares $\longrightarrow$ $m_r = \frac{v_2}{v_1}$ $m_s = -\frac{v_1}{v_2}$

Ejemplo : Dada la recta $r: 2x - 3y + 5 = 0$

a) Halla la recta s paralela a r que pasa por el punto $P(4,1)$

Como es paralela tienen la misma pendiente.
Calculemos la pendiente de r

$$2x-3y+5=0;\ 2x+5=3y;\ y=\frac{2x+5}{3} \qquad m=\frac{2}{3} \longrightarrow y=\frac{2}{3}x+n$$

Como pasa por el punto P

$$1=\frac{2}{3}4+n;\ 1-\frac{8}{3}=n;\ \frac{-5}{3}=n \longrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$$

b) Halla la recta t perpendicular a r que pasa por el punto $P(4,1)$

Como es perpendicular a la recta, podemos tomar el vector normal de la recta como vector director de la otra

$$2x-3y+5=0 \qquad \vec{n}=(2,-3)=\vec{v}$$

Como tenemos un punto y un vector, vamos a calcular la ecuación vectorial

$$(x,y)=(4,1)+t(2,-3) \quad t\in\mathbb{R}$$

Distancia entre dos puntos

$A(a_1, a_2)$
$B(b_1, b_2)$

$$\vec{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

$$d(A,B)=|\vec{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

Ejemplo : Halla la distancia entre $A(1,2)$ y $B(5,5)$

$$d(A,B)=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5u$$

Ejercicios : Halla la posición relativa de :

1. $A(5,1)$ respecto de $r: x-2y=3$
$B(-2,3)$

1° Calculamos la recta que pasa por A y B

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2,3)-(5,1) = (-7,2)$

$(x,y) = (5,1) + t(-7,2) \longrightarrow \begin{cases} x = 5-7t \\ y = 1+2t \end{cases} \longrightarrow \frac{x-5}{-7} = \frac{y-1}{2} \longrightarrow \begin{matrix} 2x-10 = -7y+7 \\ 2x+7y-17=0 \end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} 2x+7y-17=0 \\ x-2y-3=0 \end{matrix}\right\} \quad \frac{2}{1} \neq \frac{7}{2} \Rightarrow$ Secantes

2. $x-2y=3$
$-x+2y=-3$

$\frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{3}{-3}$

Coincidentes

b) $3x+4y=5$
$2x-y=-4$

$\frac{3}{2} \neq \frac{4}{-1}$

Secantes

3 a) Dada la recta $r: 3x+y=2$ halla la recta s paralela a r que pase por el punto $P(2,-1)$

Como son paralelas tienen el mismo vector director.

1° Calculemos el vector normal de $r \to (3,1) = \vec{n}$
2° Calculemos el vector director de $r \to (-1,3) = \vec{v}$

3° Como ya tenemos el vector y el punto calculamos la recta en forma vectorial:

$\vec{v} = (-1,3)$ $\quad (x,y) = (2,-1) + t(-1,3), \ t \in \mathbb{R}$
$A = (2,-1)$

b) Dada la recta $r: 3x+y=2$ halla la recta s perpendicular a r que pase por el punto $P(2,-1)$

Como las rectas son perpendiculares, el vector normal de r lo tomamos como vector director de s.

$\vec{n} = (3,1)$ $\longrightarrow (x,y) = (2,-1) + t(3,1) \ \ t \in \mathbb{R}$
$P = (2,-1)$

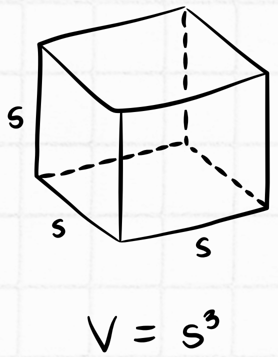
4. Halla la distancia entre los puntos $A(-3,2)$ y $B(4,5)$

$d(A,B) = \sqrt{(4+3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{8^2+3^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$ u

5. Halla el coeficiente a para que la recta $4x + ay = 7$ pase por el punto $P(-2,3)$

Para que el punto esté en la recta debe cumplir la ecuación de la recta.

$4(-2) + a \cdot 3 = 7$; $-8 + 3a = 7$; $3a = 15$; $a = 5$

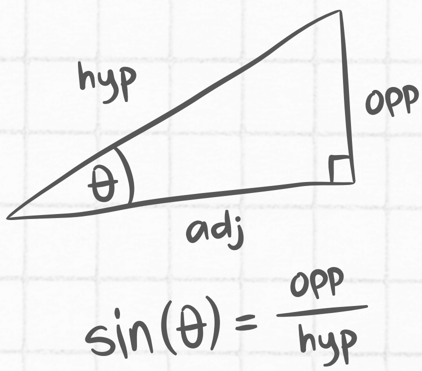


IES ZURBARÁN

EJERCICIOS RESUELTOS

ESTHER RODRIGUEZ TEJEDA

GRUPO 4º D



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

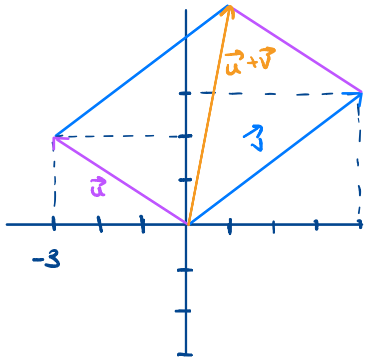
38. Dados los siguientes vectores:

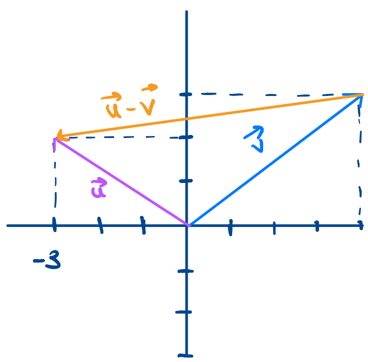
$\vec{u}(-3, 2)$ y $\vec{v}(4, 3)$

calcula analítica y geométricamente:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$





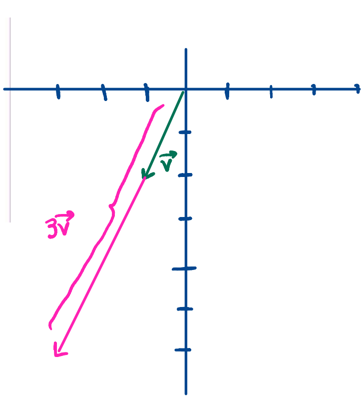
$\vec{u}+\vec{v} = (-3,2) + (4,3) =$
$= (-3+4, 2+3) =$
$= (1, 5)$

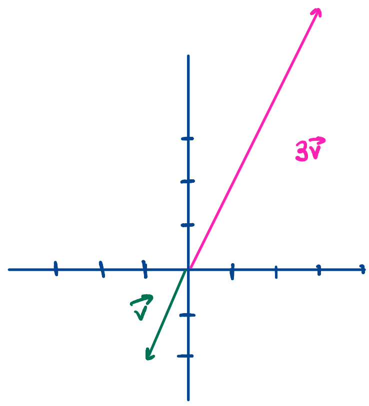
$\vec{u}-\vec{v} = (-3,2) - (4,3) =$
$= (-3,-4, 2-3) =$
$= (-7, -1)$

39. Dado el vector $\vec{v}(1, -2)$, calcula analítica y geométricamente:

a) $3\vec{v}$

b) $-3\vec{v}$

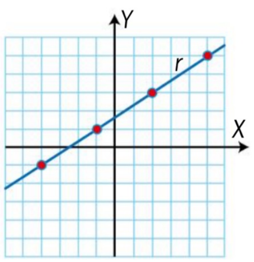




40. Dados los puntos $A(-2, 1)$ y $B(3, 4)$, calcula el vector $\overrightarrow{AB}$. Haz la representación gráfica.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3,4) - (-2,1) = (3+2, 4-1) = (5,3)$

41. Halla un vector director y la pendiente de la siguiente recta:



Para calcular un vector vamos a coger dos puntos: $A(2,3)$ y $B(-1,1)$

el vector director de la recta será $\overrightarrow{AB}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1,1) - (2,3) =$
$= (-1-2, 1-3) = (-3,-2)$

$m = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{-2}{-3} \Rightarrow m = \dfrac{2}{3}$

42. Representa la recta que pasa por el punto $P(1, 4)$ y tiene como vector director $\vec{v}(2, -3)$. Halla las distintas ecuaciones de dicha recta.

$P(1,4)$
$\vec{v} = (2,-3)$

Ecuación vectorial $\rightarrow$ $(x,y) = (1,4) + t(2,-3)$

separando componentes

Ecuación paramétrica $\rightarrow$ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

Ecuación continua $\rightarrow$ Despejemos t de ambas ecuaciones

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x - 1 = 2t \rightarrow t = \frac{x-1}{2} \\ y - 4 = -3t \rightarrow t = \frac{y-4}{-3} \end{matrix}$$

$\Downarrow$ Igualando

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3}$$

Ecuación general o implícita $\rightarrow$ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} \xrightarrow{\text{Quitando denominadores}} -3(x-1) = (y-4)\cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x + 3 = 2y - 4 \xrightarrow[\text{a un lado}]{\text{Pasamos todo}} 3x + 2y - 7 = 0 \rightarrow \vec{n}(3,2)$

Ecuación explícita $\rightarrow$ $3x + 2y - 7 = 0 \xrightarrow{\text{Despejar } y} 2y = -3x + 7$

$\Rightarrow y = \frac{-3x+7}{2}$; $y = \frac{-3}{2}x + \frac{7}{2}$

$-\frac{3}{2}$ pendiente

$\frac{7}{2}$ ordenada en el origen

44. Dibuja la recta que pasa por el siguiente punto $A(-2, 3)$ y que tiene de pendiente $-4/5$. Halla la ecuación de dicha recta.

Como tenemos un punto y la pendiente, la recta más fácil sería la explícita

$y = mx + n$; $y = \frac{-4}{5}x + n$

Sustituyendo el punto obtenemos : $3 = \frac{-4}{5}(-2) + n$; $3 = \frac{8}{5} + n$

$3 - \frac{8}{5} = n$; $n = \frac{7}{5}$

$r \equiv y = \frac{-4}{5}x + \frac{7}{5}$

45. Dibuja la recta que pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(3, 0)$. Halla la ecuación de dicha recta.

Para calcular la ecuación de una recta necesitamos un punto y un vector.

1° Calculemos el vector que pasa por ambos puntos:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (3,0) - (-1,3) = (3+1, 0-3) = (4,-3)$$

Por lo tanto, $\vec{AB}$ será el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (4,-3) \\ P\ (3,0) \end{array}\right\} \quad (x,y) = (3,0) + t(4,-3) \quad t \in \mathbb{R}$$

Si queremos la ecuación general podemos calcularla directamente

Para ello, necesitamos el vector normal.

Calculemos un vector perpendicular a $\vec{v}$ que tomaremos como vector normal de la recta:

$$\vec{n} = (3,4)$$

La recta será de la forma $3x + 4y + C = 0$

Sustituyendo el punto obtenemos: $3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + C = 0$; $C = -12$

$$r \equiv 3x + 4y - 12 = 0$$

51. Estudia analítica y gráficamente la posición relativa de los puntos $A(1, 2)$ y $B(-3, 4)$ respecto de la siguiente recta:

$$r \equiv 2x + 3y = 6$$

Para calcular la posición relativa de un punto y una recta tenemos que sustituir el punto en la recta para ver si verifica la ecuación:

A y $r \longrightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 6$
$2 + 6 = 6$
$8 \neq 6$

$A \notin r$

B y $r \longrightarrow 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 6$
$-6 + 12 = 6$
$6 = 6$ ✓

$B \in r$

52. Estudia analíticamente la posición relativa de las siguientes pares de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 2x - 3y &= 11 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ -2x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$

a) Para comparar ambas rectas vamos a comparar sus vectores normales:

$n_1 = (2,3)$ $\frac{2}{2} \neq \frac{3}{-3} \Rightarrow$ Secantes

$n_2 = (2,-3)$

b) $n_1 = (2,-1)$ $\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow$ Paralelas

$n_2 = (-2,1)$

53. Dada la recta $r \equiv x - 3y = 1$, halla una recta s, paralela a r, que pase por el punto $P(2, 5)$. Haz la representación gráfica.

Como son paralelas tendrán el mismo vector normal

$n_r = (1,-3) = n_s$

$s \equiv x - 3y + C = 0$

Sustituyendo el punto $P(2,5) \longrightarrow 2 - 3\cdot 5 + C = 0$

$2 - 15 + C = 0$

$C = 13$

$s \equiv x - 3y + 13 = 0$

54. Dada la recta $r \equiv 2x + y = 1$, halla una recta t, perpendicular a r, que pase por el punto $P(3, 2)$. Haz la representación gráfica.

Tomemos $\vec{n}$ como vector director de s

$\vec{n_r} = (2,1)$

Por lo tanto, $n_s = (-1,2)$

$-x + 2y + C = 0 \xrightarrow{P(3,2)} -3 + 2\cdot 2 + C = 0$ $s \equiv -x + 2y - 1 = 0$

$1 + C = 0$

$C = -1$

55. Halla la distancia que hay entre los siguientes puntos:

$$A(-1, 5) \text{ y } B(2, 1)$$

$d(A, B) = |\vec{AB}|$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2,1) - (-1,5) = (2+1, 1-5) = (3,-4)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5u$

56. Halla el coeficiente *a* para que la recta

$$ax + 4y = 11$$

pase por el punto $P(1, 2)$. Haz la representación gráfica.

$1 \cdot a + 2 \cdot 4 = 11$

$a + 8 = 11$

$a = 3$

63. Dada la siguiente recta:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$$

halla:

a) El tipo de ecuación. continua

b) Un punto. $(2,-1)$

c) El vector director. $(3,4)$

d) Un vector normal. $(4,-3)$

e) La pendiente. $m = \frac{4}{3}$

f) Represéntala.

64. Dada la siguiente recta:

$$y = 2x - 3 \longrightarrow 2x - y - 3 = 0$$

halla:

a) El tipo de ecuación. explícita

b) Un punto. $(0,-3)$

c) La pendiente. 2

d) Un vector director. $(1,2)$

e) Un vector normal. $(2,-1)$

f) Represéntala.

68. Halla el coeficiente k para que la recta:

$$kx + 3y = 8$$

pase por el punto $A(1, 2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot k + 3 \cdot 2 = 8 \\ k + 6 = 8 \end{array} \right.$$
$k = 2$

69. Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 12 \\ 2x + \ \ y = \ \ 3 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \vec{n} = (3,4) \\ \vec{n} = (2,1) \end{array} \qquad \frac{3}{2} \neq \frac{4}{1} \Rightarrow \text{secantes}$$

❷ Calcula el módulo y el argumento del vector $\vec{v}(4, 3)$ $\rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

❸ Dada la recta $4x - 3y = 12$, ¿qué tipo de ecuación es? Halla dos puntos, un vector normal, un vector director y la pendiente. Haz la representación gráfica.

Puntos $(0, -4)$
$(3, 0)$

Ecuación explícita

$\vec{n} = (4,-3)$

$\vec{v} = (3,4)$

$m = \frac{4}{3}$

❹ Dibuja la recta que pasa por $A(3, 1)$ y tiene de pendiente 2. Halla la ecuación de la recta.

$y = mx + n$

$m = 2 \longrightarrow 1 = 2 \cdot 3 + n$

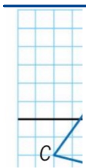
$1 = 6 + n \ ; \ n = -5$

$y = 2x - 5$

❻ Estudia analíticamente la posición relativa del siguiente par de rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + \ \ y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-3} \quad \text{Secantes}$$

Si se cortan, halla el punto de corte y representa ambas rectas para comprobarlo.



$$\begin{array}{r} \cancel{2x} + y = 5 \\ -\cancel{2x} + 6y = -12 \\ \hline 7y = -7 \\ y = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2x - 1 = 5 \\ 2x = 6 \\ x = 3 \end{array} \qquad (3, -1)$$

❼ Dada la recta $2x - 3y = 6$, halla su ecuación vectorial.

$\vec{n} = (2,-3)$
$\vec{v} = (3,2)$
$P(0,-2)$

$(x,y) = (0,-2) + t(3,2) \quad t \in \mathbb{R}$

EXÁMEN 4º ESO D 07/05/2024

GEOMETRÍA ANALÍTICA

NOMBRE____ NOTA: ___________

1. Sean $\vec{u} = (1,3)$ y $\vec{v} = (4, -1)$. Realiza las siguientes operaciones geométrica y analíticamente:

a) $\vec{u} + \vec{v}$
b) $\vec{u} - \vec{v}$
c) $2\vec{u}$
d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$
e) $-\vec{v}$
f) $|\vec{u}|$
g) $|\vec{u} + \vec{v}|$

2. Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P(2,5) y tiene como vector director $\vec{v} = (3,4)$.

3. Dados los puntos $A(-1,2)$ y $B(5,1)$, calcular:

a) El vector $\overrightarrow{AB}$
b) La distancia entre los dos puntos

4. Sea la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{3}$. Calcular:

a) El vector director.
b) El vector normal.
c) Un punto.
d) La pendiente.

5. Dada la recta $r : 2x - 3y + 1 = 0$ y el punto P(3,5)

a) Calcular la recta s paralela a r que pasa por el punto P.
b) Calcular la recta t paralela a s que pasa por el punto P.

6. Sean $r : 2x + y = 6$, $s : 10x + 5y = 1$, A(1,4) y B(0,0).

a) Halla la posición relativa de A y r
b) Halla la posición relativa de B y r
c) Halla la posición relativa de r y s

EXÁMEN 4º ESO D 09/05/2024

GEOMETRÍA ANALÍTICA

NOMBRE____ NOTA: ___________

1. Sean $\vec{u} = (2,6)$ y $\vec{v} = (1, -4)$. Realiza las siguientes operaciones analíticamente. De los dos primeros apartados (a) y b)) haced la representación geométrica.

a) $\vec{u} + \vec{v}$
b) $\vec{u} - \vec{v}$
c) $2\vec{u}$
d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$
e) $-\vec{v}$
f) $|\vec{u}|$
g) $|\vec{u} + \vec{v}|$

2. Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P(2,6) y tiene como vector director $\vec{v} = (5,1)$.

3. Dados los puntos $A(-3,4)$ y $B(6,2)$, calcular:

a) El vector $\overrightarrow{AB}$
b) La distancia entre los dos puntos

4. Sea la recta $r : \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{4}$. Calcular:

a) El vector director.
b) El vector normal.
c) Un punto.
d) La pendiente.

5. Dada la recta $r : 5x - 2y + 3 = 0$ y el punto P(3,1)

a) Calcular la recta s paralela a r que pasa por el punto P.
b) Calcular la recta t perpendicular a r que pasa por el punto P.

6. Sean $r : x + 3y = 1$, $s : 5x - 15y = 1$, A(1,0) y B(5,1).

a) Halla la posición relativa de A y r
b) Halla la posición relativa de B y r
c) Halla la posición relativa de r y s