DIFERENCIACION TOTAL Y PARCIAL EN ESPACIOS NO NORMABLES

J. M. García Lafuente

Universidad de Valladolid

1. Introducción. Es conocido que el Cálculo Diferencial clásico de Fréchet en espacios normados no tiene una extensión canónica a espacios vectoriales topológicos generales. Es más, han proliferado tanto las definiciones de diferenciación en el marco general de los espacios no normables (incluídos los espacios vectoriales de convergencia), que el verdadero problema de la teoría ha sido precisamente la clasificación de estas definiciones y la elaboración de una teoría unificada.

En este sentido, especial importancia tienen los trabajos de Averbukh y Smolyanov ( [2] , [3] , [4] ) y de Frölicher y Bucher ( [7] ) por cuanto suponen de generalidad en el estudio de varias definiciones de diferenciación en en espacios vectoriales topológicos y el trabajo de Keller ( [10] ) que hace también una amplia incursión en el ámbito de los espacios de convergencia. A dichos trabajos nos referiremos para todos los conceptos no definidos en el presente trabajo. Para la teoría general de los espacios de convergencia, ver la completa monografía [6].

En el presente trabajo investigamos relaciones entre diferenciación total y parcial de funciones definidas en espacios producto, cuando los espacios de aplicaciones lineales continuas son provistos indistamente de topologías localmente convexas o de estructuras de convergencia.

2. Definiciones y terminología. Sean $E$ y $F$ espacios localmente convexos, $X \subset E$ un conjunto abierto no vacío y $f : X \longrightarrow F$ una función continua. Diremos que $f$ admite derivada direccional según la dirección $h \in E$ en el punto $x \in X$ si existe un elemento $Df(x)h \in F$ tal que

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} t^{-1}(\ f(x+h) - f(x)\ ) = Df(x)h \tag{1}$$

y $f$ se dice que es diferenciable Gâteaux-Lévy en $x \in X$ si para todo $h \in E$ existe $Df(x)h$ satisfaciendo (1) y además la aplicación derivada $Df(x) : E \longrightarrow F$ definida por $h \longmapsto Df(x)h$ es lineal continua, es decir $Df(x) \in \mathscr{L}(E\ F)$ .

Denotaremos $\mathscr{L}_\Lambda(E\ F)$ el espacio vectorial de aplicaciones lineales continuas de $E$ en $F$ dotado, bien de la topología de la convergencia uniforme sobre una familia $\Lambda$ de conjuntos acotados de $E$ o bien de alguna de las estructuras de convergencia $\Lambda = \Lambda_c$ , $\Lambda_{qb}$ , $\pi$ , $\theta$ , de las que puede encontrarse un más detallado estudio en [10] y [8] .

La función $f$ se dice que es diferenciable de clase $C^1_\Lambda$ (escrito $f \in C^1_\Lambda$ ) si es diferenciable Gâteaux-Lévy en todo punto $x \in X$ y además la aplicación derivada

$$Df : X \longrightarrow \mathscr{L}_\Lambda(E\ F) \tag{2}$$

definida por $x \longmapsto Df(x)$ es continua. Es interesante notar que si $\Lambda = \Lambda_s$ es la familia de todos los conjuntos finitos de $E$ (topología débil en $\mathscr{L}(E\ F)$ ), la condición (2) no aporta nada sobre la condición (1), mientras que si $E$ es normable y $\Lambda = \Lambda_b$ es la familia de todos los conjuntos acotados de $E$ (topología fuerte en $\mathscr{L}(E\ F)$ ), la condición $f \in C^1_{\Lambda_b}$ implica que $f$ es continuamente diferenciable en el sentido clásico de Fréchet.

<u>3. Diferenciación Total y Parcial</u>. Sean $E_1$ , ... $E_n$ , $F$ espacios localmente convexos y sea $E = \prod E_i$ . Para cada conjunto abierto no vacío $X \subset E$ , cada función continua $f : X \longrightarrow F$ y cada punto $a = (a_1\ , \ldots,\ a_n) \in X$ , se define la inyección continua $j_i^a : E_i \longrightarrow E$ dada por

$$j_i^a(x_i) = (a_1\ ,\ldots,\ a_{i-1}\ ,\ x_i\ ,\ a_{i+1}\ ,\ldots,\ a_n)$$

La aplicación $f\circ j_i^a$ definida en el conjunto abierto $X_i = (j_i^a)^{-1}(X) \subset E_i$ , se llama aplicación parcial i-ésima de $f$ en el punto $a$ . Si la aplicación parcial i-ésima de $f$ en el punto $a_i \in X_i$ es diferenciable Gâteaux-Lévy en el punto

$a_i$ , diremos que $f$ admite derivada parcial i-ésima en $a$ . La derivada de $f \circ j_i$ en el punto $a_i$ se denota por $D_{a_i} f(a) \in \mathcal{L}(E_i, F)$ . Es sencillo comprobar la siguiente

Proposición 1. Si $\Lambda \in \{\Lambda_c, \Lambda_{qb}, \pi, \theta\}$ y $f : X \longrightarrow F$ es una aplicación de clase $C^1_\Lambda$ , para cada $a \in X$ , $i = 1,\dots,n$ , la función $f$ admite derivada parcial i-ésima en $a$ y además $f \cdot j_i^a$ es de clase $C^1_\Lambda$ .

El resultado central del trabajo es el siguiente recíproco de la proposición precedente

Teorema 2. Sea $\Lambda \in \{\Lambda_c, \Lambda_{qb}, \pi, \theta\}$ y sea $f : X \longrightarrow F$ una aplicación tal que para cada $x \in X$ y cada $i = 1,\dots,n$ , la aplicación parcial i-ésima de $f$ en $x$ es diferenciable Gâteaux-Lévy y la aplicación

$$D_{x_i} f : X \longrightarrow \mathcal{L}_\Lambda(E\ F)$$

definida por $x \longmapsto D_{x_i} f(x)$ es continua. Entonces $f \in C^1_\Lambda$ y la fórmula de diferenciación

$$Df(a)(h) = \sum D_{x_i} f(a)\ pr_i(h)$$

es válida para cada $a \in X$ y cada $h \in E$ .

Se puede demostrar incluso que si $E_1, \dots, E_n$ son espacios metrizables (resp. metrizables y tonelados), el teorema precedente sigue válido sustituyendo la estructura de convergencia $\Lambda$ por la topología $\Lambda_k$ (resp. $\Lambda_s$ ) de la convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos de E (resp. conjuntos finitos de E ) .

En particular, si $E_1, \dots, E_n$ son espacios de Banach, el Teorema 1 contiene como caso particular el análogo teorema de diferenciación total y parcial de la teoría clásica de la diferencial de Fréchet que, según se sabe, establece la existencia de derivada total de $f$ siempre que la aplicación $D_{x_i} f$ sea continua para cada $i = 1,\dots,n$ .

## BIBLIOGRAFIA


[1] O. C. Andonie, Teorema cresterilor finite pentru aplicaţii între spaţii local convexe. An. Univ. Bucuresti, Mat-Mec. 21, 1, 7-10, (1972).

[2] V. I. Averbukh, O. G. Smolyanov, Differentiation in linear topological spaces. Soviet Math. Dokl. 8, 444-448 (1967).

[3] V. I. Averbukh, O. G. Smolyanov, The Theory of differentiation in linear topological spaces. Russian Math. Surveys 22, 6, 201-258 (1967).

[4] V. I. Averbukh, O. G. Smolyanov, The various definitions of the derivative in linear topological spaces. Russian Math. Surveys, 23, 4, 67-113 (1968).

[5] A. Bastiani, Différentiabilité dons les especeslocalement convexes. Distructures.Thèse Doct. Fac. Sci. Paris. (1962)

[6] H. R. Fischer, Limesräume, Math. Ann. 137, 269-303 (1959)

[7] A. Frölicher, W. Bucher, Calculus in Vector Spaces.without norm. Lecture Notes in Math. 30. Springer, Berlin (1966).

[8] J. M. García Lafuente, Contribución al estudio de aplicaciones diferenciables en espacios localmente convexos. Tesis Doct. Monografías y Memorias de Matemática del C. S. I. C. Número XV. Madrid (1976).

[9] J. Gil de Lamadrid, Toplogy of mappings in locally convex topological vector spaces, their differentiation and integration and application to gradient mappings. Thesis. Univ. of Michigan (1955)

[10] H. H. Keller, Differential Calculus in locally convex spaces. Lecture Notes in Math. 417. Springer, Berlin (1974).

[11] J. Sebastião e Silva, Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes I , II . Atti Acad. Lincei, 20, 743-750 (1956).

[12] J. Sebastião e Silva, Conceitos da função differciavel em espaços localmente convexos. Publ. Centro Estudes Matemat. Lisboa (1957)

[13] Y. P. Wong, Differential calculusand differentiable partitions of unity in locally convex spaces. Thesis. Univ. Toronto (1974).

[14] S. Yamamuro, Differential calculus in topological linear spaces. Lecture Notes in Math. 374. Springer, Berlin (1974).