Universidad de Valladolid
Colegio Universitario de Burgos
Departamento de Análisis Matemático

PROPIEDADES DE SIMETRIA DE C^2_G- FUNCIONES

José M.ª García Lafuente

Universidad de Valladolid
Colegio Universitario de Burgos
Departamento de Análisis Matemático

PROPIEDADES DE SIMETRIA DE $C^2_{\mathcal{G}}$-FUNCIONES

José María García Lafuente

INTRODUCCION

En la teoría clásica de la diferenciación de funciones en espacios de Banach, es conocido el teorema de Schwarz de simetría de las "derivadas cruzadas" de segundo orden en un punto. La única hipótesis necesaria para que tal simetría se dé, es la de doble diferenciabilidad de la función en el punto en cuestión. Incluso si el espacio de Banach es finito-dimensional esta hipótesis puede ser debilitada.

Sin embargo, cuando se estudian funciones en espacios no normables, las dificultades aumentan notablemente. En primer lugar, y como acertadamente señala H. H. Keller ([8]), la primera dificultad surge de la propia definición de derivada de primer y segundo orden. En efecto, la condición de Fréchet

$$\lim_{h\to 0} \|h\|^{-1} r(f\,;x\,;h) = 0$$

donde $r(f\,;x\,;h) = f(x+h) - f(x) - Df(x)$ es el resto de f en el punto x y en la dirección h, es una condición natural cuando el dominio de f es un espacio normable. Pero no ocurre así cuando E es un espacio localmente convexo no normable, en cuyo caso procede partir de una condición del tipo Gâteaux

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in \mathbb{R}}} t^{-1} r(f\,;x\,;th) = 0$$

y añadir condiciones de existencia del límite uniformemente para $h\in S$ donde S varía en una familia prefijada $\mathfrak{S}$ de conjuntos acotados que recubren el espacio E de definición de f. Las diversas elecciones de la familia $\mathfrak{S}$ generan sen das condiciones de diferenciabilidad que han sido bien estudiadas y sistematizadas por H. H. Keller en [8] .

Por otro lado el estudio de las funciones continuamente diferenciables, es decir con derivada Df continua, plantea el problema adicional de la topología en $\mathscr{L}(E\ F)$, rango de la aplicación Df , que, a diferencia del caso E y F normables, no aparece de forma natural y pueden, por consiguiente definirse en $\mathscr{L}(E\ F)$ tantas $\mathfrak{S}$-topologías como elecciones posibles de la familia $\mathfrak{S}$.

Estos problemas, ya de por sí importantes al manejar derivadas de primer orden, aumentan, si cabe, al estudiar derivadas de orden superior, donde la mera definición de la derivada segunda de f , es decir la derivada de

$$Df : E \longrightarrow \mathscr{L}(E\ F)$$

exije la previa elección de la $\mathfrak{S}$-topología en $\mathscr{L}(E\ F)$ y la condición de resto para definir la derivada segunda.

No es extraño, por tanto, que se hayan realizado relativamente pocos progresos en el campo de la derivación superior de funciones en espacios no normables, pues, tal y como señala H. H. Keller, el marco de las $\mathfrak{S}$-topologías parece insuficiente para el tratamiento de la derivación superior, y se hace necesaria la introducción de estructuras más generales en los espacios $\mathscr{L}(E\ F)$ en orden a obtener un mínimo de resultados de interés. En [6] son introducidas las estructuras de convergencia de H. R. Fischer sobre los espacios de aplicaciones lineales continuas, lo cual provee de propiedades adicionales a dichos espacios cuando E y F no son normables; por ejemplo la continuidad de las aplicaciones evaluación y composición.

La teoría de las funciones de clase C^1 ha sido estudiada también en los trabajos [1] , [2] , [3] , [10] y otros, mostrando ser buenas generalizaciones de la teoría clásica, al comprobarse como la mayoría de los teoremas de diferenciación en espacios euclídeos, o más general, en espacios de Banach, se satisfacen y al demostrarse que la teoría constituye una generalización natural de la diferenciación Frèchet. En efecto, si E es normable, las funciones de clase C^1_b precisamente son las funciones diferenciables Frèchet. Sin embargo, tal y como se apuntaba anteriormente, cuando se dota al espacio $\mathcal{L}(E\ F)$ de $\mathfrak{S}$-topologías (aun siendo E y F normables), surgen importantes problemas a causa de la no continuidad de las aplicaciones evaluación

$$ev : \mathcal{L}(E\ F) \times E \longrightarrow F$$

y composición

$$\pi : \mathcal{L}(F\ G) \times \mathcal{L}(E\ F) \longrightarrow \mathcal{L}(E\ G)$$

por ejemplo, al estudiar la "regla de la cadena" para funciones de clase $C^1_{\mathfrak{S}}$. La introducción de las estructuras de convergencia [6] en los espacios $\mathcal{L}(E\ F)$, permite superar estos problemas (ver [7] , [8] , [9]) a costa de debilitar la estructura topológica de los espacios $\mathcal{L}(E\ F)$.

Otros autores sin embargo no comparten la necesidad de introducir las estructuras de convergencia, y desarrollan una teoría diferencial dentro del marco de los espacios vectoriales topológicos. Tal es el caso de S. Yamamuro [10] quien ha construído una completa teoría de la diferenciación sin hacer uso de las estructuras de convergencia, y es en esta línea por donde el presente trabajo trata de aportar nuevos resultados. Los teoremas de simetría de la derivada segunda que aquí se estudian, son construídos para funciones de clase $C^2_{\mathfrak{S}}$, es decir cuando los espacios de aplicaciones lineales continuas están dotados de una $\mathfrak{S}$ -topología y no necesariamente una estructura de convergencia. Ello aporta, entre otras cosas una generalización directa del teorema de Schwarz de simetría de la derivada segunda de funciones en espacios euclídeos, a funciones en espacios localmente convexos, no normables.

PROPIEDADES DE SIMETRIA DE C_6^2-FUNCIONES

Sean E y F espacios localmente convexos Hausdorff reales, y sean Γ_E y Γ_F las familias de seminormas continuas en E y F respectivamente. En todo el trabajo se denotará por $|x|_\alpha$ el valor de la seminorma $\alpha \in \Gamma_E$ sobre el vector $x \in E$. La familia Γ_E es separada, es decir si $x \neq 0$, existe $\alpha \in \Gamma_E$ con $|x|_\alpha \neq 0$, y análogamente la familia Γ_F. Asimismo ambas familias son filtrantes para el orden usual $\leq$ de aplicaciones reales.

El conjunto de todas las aplicaciones lineales continuas de E en F es un espacio vectorial real, denotado por $\mathscr{L}(E\ F)$.

Una familia $\mathfrak{S}$ de conjuntos acotados de E se dice que es saturada si la unión de dos elementos de $\mathfrak{S}$ está contenida en algún otro elemento de $\mathfrak{S}$. Si $\mathfrak{S}$ es un recubrimiento saturado de E por conjuntos acotados, se define del modo siguiente una topología localmente convexa sobre $\mathscr{L}(E\ F)$.

Definición 1

Sea $\mathfrak{S}$ un recubrimiento saturado de E por conjuntos acotados. Para cada $S \in \mathfrak{S}$ y cada $\beta \in \Gamma_F$, se define la seminorma

$$| \ |_{\beta S} : \mathscr{L}(E\ F) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por $|u|_{\beta S} = \sup_{x \in S} |u(x)|_\beta$, para todo $u \in \mathscr{L}(E\ F)$. La familia

$$\left\{ | \ |_{\beta S} \right\}_{\beta \in \Gamma_F,\ S \in \mathfrak{S}}$$

de seminormas, genera en $\mathscr{L}(E\ F)$ una topología localmente convexa Hausdorff denotada $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ y el espacio $\mathscr{L}(E\ F)$ provisto de la $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-topología se denotará $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$.

Los entornos de 0 para la $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-topología son los conjuntos

$$V_{\beta S \varepsilon} = \{ u \in \mathcal{L}(E\ F) \ / \ |u|_{\beta S} < \varepsilon \}$$

para $\beta \in \Gamma_F$, $S \in \mathfrak{S}$, $\varepsilon > 0$.

<u>Proposición 2</u>

Si $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$ entonces $\Lambda_{\mathfrak{S}} \leq \Lambda_{\mathfrak{S}'}$.

Interés preferente tienen las $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-topologías generadas por las familias $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_s$ de todos los conjuntos finitos de E (topología débil), $\mathfrak{S}_k$ de los conjuntos compactos de E (topología de la convergencia compacta), $\mathfrak{S}_{pk}$ de los conjuntos precompactos de E (topología de la convergencia precompacta) y $\mathfrak{S}_b$ de los conjuntos acotados de E (topología fuerte). El espacio $\mathcal{L}(E\ F)$ dotado de las respectivas $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-topologías se escribirá $\mathcal{L}_s(E\ F)$, $\mathcal{L}_k(E\ F)$, $\mathcal{L}_{pk}(E\ F)$, $\mathcal{L}_b(E\ F)$.

<u>Definición 3</u>

Sea $\mathfrak{S}$ un recubrimiento saturado de E por conjuntos acotados. Para cada $S \in \mathfrak{S}$ y cada $\beta \in \Gamma_F$, se define la seminorma

$$|\ |_{(\beta\ S)\ S} : \mathcal{L}(E\ ,\ \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$|u|_{(\beta S)\ S} = \sup_{y \in S} |u(y)|_{\beta S} = \sup_{y \in S}\ \sup_{x \in S} |[u(y)]\,(x)|_{\beta}$$

La topología que sobre el espacio de aplicaciones lineales continuas $\mathscr{L}(E , \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F))$ genera la familia de seminormas

$$\left\{ |\ |_{(\beta\ S)\ S} \right\}_{\beta \in \Gamma_F}\ , S \in \mathfrak{S}$$

se llama $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-topología y dicho espacio con esta topología localmente convexa Hausdorff se denota por $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E , \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F))$

Correspondientes espacios se construyen cuando $\mathfrak{S}$ es alguna de las familias $\mathfrak{S}_s$, $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_{pk}$, $\mathfrak{S}_b$, antes mencionadas

En [8] se estudian relaciones entre el espacio $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E , \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F))$ arriba introducido y el espacio $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ E ; F)$ de aplicaciones bilineales continuas de $E \times E$ en F con la $\Lambda_{\mathfrak{S}}$-topología correspondiente. El lector interesado puede consultar dicho trabajo, pero a los efectos del presente tal estudio es innecesario y se omite.

En lo que sigue, y en orden a definir las diferenciales de primer y segundo orden de una función en espacios localmente convexos, la letra X denotará un conjunto abierto no vacío de E, y $f : X \longrightarrow F$ una aplicación continua.

<u>Definición 4</u> (Diferencial Gâteaux en un punto)

Se dice que la función $f : X \longrightarrow F$ admite derivada direccional en el punto $x \in X$ según la dirección $h \in E$, si existe $Df(x)h \in F$ tal que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in R}} t^{-1}\left(f(x+th) - f(x) \right) = Df(x)h$$

y diremos que f es diferenciable Gâteaux en el punto $x \in X$ si para todo $h \in E$, existe la derivada direccional de f en x según la dirección $h \in E$ y además la aplicación

$$\begin{aligned} Df(x) : E &\longrightarrow F \\ h &\longmapsto Df(x)h \end{aligned}$$

llamada aplicación diferencial de f en x, es lineal y continua, es decir $Df(x) \in \mathscr{L}(E\ F)$.

<u>Definición 5</u> (Diferencial Gâteaux)

La aplicación $f : X \longrightarrow F$ es diferenciable Gâteaux, si f es diferenciable Gâteaux en cada punto $x \in X$. La aplicación

$$\begin{aligned} Df : X &\longrightarrow \mathscr{L}(E\ F) \\ x &\longmapsto Df(x) \end{aligned}$$

que se construye para tales funciones f, se llama aplicación derivada o aplicación diferencial de f .

<u>Definición 6</u> (Funciones de clase $C^1_{\mathfrak{S}}$)

Sea $\mathfrak{S}$ un recubrimiento saturado de E por conjuntos acotados y $f : X \longrightarrow F$ una función diferenciable Gâteaux. Diremos que f es de clase $C^1_{\mathfrak{S}}$, o que $f \in C^1_{\mathfrak{S}}$, si la aplicación derivada

$$Df : X \longrightarrow \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$$

es continua cuando X lleva la topología usual de subespacio.

Cuando $\mathfrak{S}$ es alguna de las familias particulares de conjuntos acotados $\mathfrak{S}_s$, $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_{pk}$, $\mathfrak{S}_b$, se generan respectivamente las clases de funciones C^1_s , C^1_k , C^1_{pk} , C^1_b , para las cuales obviamente se tiene la relación

Proposición 7

$C_b^1 \subset C_{pk}^1 \subset C_k^1 \subset C_s^1$

Para mayor información sobre los espacios de funciones de clase $C_{\mathfrak{S}}^1$ y sus relaciones mutuas se remite a los trabajos [8] y [9] donde son estudiados en detalle.

Se introduce a continuación la clase de funciones dos veces diferenciables

Definición 8 (Doble diferenciabilidad débil)

Sea $f : X \longrightarrow F$ una aplicación de clase C_s^1 y sea $Df : X \longrightarrow \mathscr{L}_s(E\ F)$ su aplicación derivada. Diremos que f es dos veces débilmente diferenciable en $x \in X$, si existe

$$D(Df)(x) = D^2f(x) \in \mathscr{L}(E\ ,\ \mathscr{L}_s(E\ F))$$

tal que, para todo $h \in E$

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} t^{-1}\ (\ Df(x+th) - Df(x) - D^2f(x)(th)\ ) = 0$$

donde el límite está tomado respecto de la topología débil en $\mathscr{L}(E\ F)$. Si f es dos veces débilmente diferenciable en cada punto $x \in X$, decimos entonces que f es dos veces débilmente diferenciable.

Para toda función dos veces débilmente diferenciable se puede construir la aplicación derivada o diferencial segunda

$$D^2f : X \longrightarrow \mathscr{L}(E\ ,\ \mathscr{L}_s(E\ F))$$

que asocia a cada $x \in X$ el elemento $D^2f(x)$ introducido en la definición 8 .

<u>Definición 9</u> ($C^2_{\mathfrak{S}}$ -funciones)

Sea $\mathfrak{S}$ un recubrimiento saturado por conjuntos acotados de E y sea $f : X \longrightarrow F$ una función dos veces débilmente diferenciable. Diremos que f es diferenciable de clase $C^2_{\mathfrak{S}}$ o que $f \in C^2_{\mathfrak{S}}$ si

1) $f \in C^1_{\mathfrak{S}}$
2) Para todo $x \in X$, $D^2 f(x) \in \mathscr{L}(E, \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F))$
3) $D^2 f : X \longrightarrow \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E, \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F))$ es continua

En el caso particular $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_s$, la condición 2) huelga, ya que está incluída en la propia definición de doble diferenciabilidad débil, mientras que para clases $\mathfrak{S}$ más amplias que $\mathfrak{S}_s$, la condición es más restrictiva ya que

$$\mathscr{L}(E, \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)) \subset \mathscr{L}(E, \mathscr{L}_s(E\ F))$$

<u>Definición y proposición 10</u>

El espacio de aplicaciones de clase $C^2_{\mathfrak{S}}$ de X en F, denotado $C^2_{\mathfrak{S}}(X\ F)$, o por $C^2_{\mathfrak{S}}$ simplemente si no hay lugar a confusión, es un espacio vectorial. Además las aplicaciones derivación de primer y segundo orden

$$D : C^2_{\mathfrak{S}}(X\ F) \longrightarrow C^1_{\mathfrak{S}}(X, \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F))$$
$$f \longmapsto Df$$

$$D^2 : C^2_{\mathfrak{S}}(X\ F) \longrightarrow C(X, \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E, \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)))$$
$$f \longmapsto D^2 f$$

son aplicaciones lineales (C denota espacio de funciones continuas)

Demostración:

Es inmediata y se omite

Para las familias particulares $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_s , \mathfrak{S}_k , \mathfrak{S}_{pk} ,$ $\mathfrak{S}_b$, el espacio $C^2_{\mathfrak{S}}$ se denota respectivamente por C^2_s , C^2_k , C^2_{pk} , C^2_b .

Proposición 11

Si $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$ son dos recubrimientos saturados por conjuntos acotados de E , entonces $C^2_{\mathfrak{S}'}$ es un subespacio vectorial de $C^2_{\mathfrak{S}}$.

Demostración:

Es sabido que $C^1_{\mathfrak{S}'}$ es un subespacio vectorial de $C^1_{\mathfrak{S}}$. La demostarción se concluye ahora observando que $\mathcal{L}(E , \mathcal{L}_{\mathfrak{S}'}(E F))$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E , \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E F))$.

Corolario

$C^2_b \subset C^2_{pk} \subset C^2_k \subset C^2_s$, donde cada espacio es un subespacio vectorial del siguiente

Condiciones adicionales análogas a las estudiadas en [8] y [9] , pueden darse para obtener igualdad de estos espacios.

Cuando el espacio localmente convexo E es un producto finito $\prod E_i$ de espacios localmente convexos, es conocido que bajo ciertas condiciones, la derivada de $f : X \longrightarrow F$ puede escribirse en términos de sus derivadas parciales. En concreto (ver [9] , 2.15.) si $E_1 , \ldots , E_n$ son espacios localmente convexos metrizables (resp. metrizables y tonelados), X un abierto de $E = \prod E_i$ y $f : X \longrightarrow F$ una aplicación de clase C^1_k (resp. de clase C^1_s), entonces para cada $x \in X$ existen las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathscr{L}(E_i\ F) \qquad\qquad i = 1, \ldots, n$$

y además para todo $x \in X$ y todo $h_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$,

$$Df(x)(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i$$

o equivalente

$$Df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \circ pr_i$$

donde pr_i es la aplicación proyección i-ésima de E en E_i . La aplicación $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ de X en $\mathscr{L}(E_i\ F)$ se llama aplicación derivada parcial i-ésima. Veremos a continuación que para funciones de clase $C^2_{\mathfrak{S}}$ se puede obtener un resultado análogo que exprese la derivada segunda en términos de las derivadas parciales de segundo orden. Para ello será necesario probar previamente un resultado de tipo técnico.

Lema 12

Sean E , F , G tres espacios localmente convexos y sea $\mathfrak{S}$ alguna de las familias $\mathfrak{S}_s$, $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_{pk}$, $\mathfrak{S}_b$ en E y F respectivamente. La aplicación composición

$$\Pi : \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(F\ G) \times \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F) \longrightarrow \mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E\ G)$$

que a cada par $(v\ u)$ le asocia $\Pi(v\ u) = v \circ u$, es bilineal y separadamente continua

Demostración:

Π es claramente bilineal. Sea $u_o \in \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$ fijado. A fin de probar que la aplicación parcial $v \longmapsto v \circ u_o$ es continua, sea $\gamma \in \Gamma_G$, $S \in \mathfrak{S}$ ($S \subset E$) y $\varepsilon > 0$. Puesto que $u_o : E \longrightarrow F$ es lineal y continua, y por tanto uniformemente continua, $u_o(S) = S' \subset F$ es un elemento de $\mathfrak{S}_s$, $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_{pk}$, $\mathfrak{S}_b$ según como sea S en E . Por tanto

$$|v|_{\gamma S'} < \varepsilon$$

es un 0-entorno en $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(F\ G)$ y además

$$|v \circ u|_{\gamma S} = \sup_{h \in S} |v(u(h))|_{\gamma} = \sup_{h' \in S'} |v(h')|_{\gamma} = |v|_{\gamma S'} < \varepsilon$$

quedando probada la continuidad en 0 de Π respecto de la primera variable. Finalmente, sea $v_o \in \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(F\ G)$ fijado y , a fin de probar la continuidad de la aplicación parcial $u \longmapsto v_o \circ u$, sean $\gamma \in \Gamma_G$, $S \in \mathfrak{S}$ ($S \subset E$) fijados . Puesto que $v_o : F \longrightarrow G$ es lineal continua, existe $\beta \in \Gamma_F$ y $M \geqslant 0$ tal que

$$|v_o(y)|_{\gamma} \leqslant M |y|_{\beta} \qquad \text{para todo } y \in F$$

Por tanto

$$|v_o \circ u|_{\gamma S} = \sup_{h \in S} |v_o(u(h))|_{\gamma} \leqslant M \sup_{h \in S} |u(h)|_{\beta} = M|u|_{\beta S}$$

lo que prueba la continuidad de Π en la segunda variable

<u>Corolario</u>

La aplicación composición Π admite derivadas parciales en todo punto de su dominio, que valen respectivamente

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_1}(v\ u) = \Pi_u \qquad\qquad \frac{\partial \Pi}{\partial y_2}(v\ u) = \Pi_v$$

donde $\pi_u(v) = \pi_v(u) = \pi(v\ u)$, para todo u , v .

Demostración:

A fin de evaluar $\frac{\partial \pi}{\partial y_1}(v\ u)$ se fija el punto $u \in \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F)$, en cuyo caso la aplicación parcial $v \longmapsto \pi(v\ u)$ es , de acuerdo con el lema 12, una aplicación lineal continua de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(F\ G)$ en $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ G)$, la cual, según se sabe, es de clase $C^1_{\mathfrak{S}}$ con derivada igual a sí misma, es decir con derivada igual a la aplicación

$$\pi_u(v) = \pi(u\ v) \qquad \text{para todo} \quad v \in \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(F\ G)$$

Análogamente se calcula $\frac{\partial \pi}{\partial y_2}(v\ u)$

Podemos ya establecer el siguiente resultado

Proposición 13

Sean $E_1, \ldots, E_n$ espacios localmente convexos metrizables (resp. metrizables y tonelados), sea X un abierto del producto $E = \prod E_i$ y sea $f : X \longrightarrow F$ una aplicación de clase C^2_k (resp. de clase C^2_s) . Para cada $x \in X$ existen entonces las derivadas parciales de las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ($j = 1, \ldots, n$) en el punto x , que se escriben

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) \qquad i , j = 1 , \ldots, n$$

Estas aplicaciones están en el espacio $\mathcal{L}(E_i , \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E_j\ F))$ ($\mathfrak{S}$ igual a $\mathfrak{S}_s$ ó $\mathfrak{S}_k$) y verifican además

$$\left[D^2f(x)\ (h_1, \ldots, h_n)\right](k_1, \ldots, k_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)(h_i)\right)(k_j)$$

para todo $(h_1, \ldots, h_n)$, $(k_1, \ldots, k_n) \in \Pi E_i$

Demostración:

De acuerdo con lo indicado en la nota anterior al lema 12, puede escribirse, para cada $x \in X$,

$$Df(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \circ pr_j \qquad (1)$$

$$D^2f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (Df)}{\partial x_i}(x) \circ pr_i \qquad (2)$$

La aplicación Df aparece por tanto como suma de n aplicaciones g_j cada una de las cuales admite la siguiente factorización

$$\begin{aligned} g_j : X &\longrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E_j\ F) \times \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ E_j) \xrightarrow{\ \Pi\ } \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ F) \\ x &\longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\ ,\ u(x)\right) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \circ pr_j \end{aligned}$$

donde u es la aplicación constante de X en $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E\ E_j)$ $u(x) = pr_j$ para todo $x \in X$ y donde $\mathfrak{S}$ es alguna de las familias $\mathfrak{S}_s$ ó $\mathfrak{S}_k$. Derivamos parcialmente respecto de x_i la función g_j mediante la regla de la cadena

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \Pi}{\partial y_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\ ,\ pr_j\right) \circ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) +$$

$$+ \frac{\partial \Pi}{\partial y_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\ ,\ pr_j\right) \circ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

Pero $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0$ porque u es constante y, de acuerdo con el corolario del lema 12, $\frac{\partial \pi}{\partial y_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \;,\; pr_j\right) = \Pi_{pr_j}$. Llevando estos resultados a la fórmula (1) y lo ahí obtenido a la fórmula (2) se obtiene

$$D^2f(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \Pi_{pr_j} \circ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) \circ pr_i$$

que no es otra cosa que una reformulación de la relación buscada.

Dejamos por el momento los espacios localmente convexos producto, para volver al caso general. Introducimos a continuación algunas definiciones.

<u>Definición 14</u> (Diferencia segunda direccional)

Sea $f : X \longrightarrow F$ una aplicación. Se llama diferencia segunda direccional de f en el punto $x \in X$, según las direcciones h_1 , $h_2 \in E$, a la función de dos variables reales definida en un entorno abierto de $(0\ 0) \in \mathbb{R}^2$, siguiente

$$(\delta^2 f)_{xh_1h_2}(t_1\ t_2) = f(x+t_1h_1+t_2h_2) - f(x+t_1h_1) - f(x+t_2h_2) + f(x)$$

Siempre que en el contexto los puntos x , h_1 , h_2 estén fijos y no haya lugar a confusión, la función diferencia segunda direccional será escrita $(\delta^2 f)(t_1\ t_2)$.

<u>Proposición 15</u>

La función diferencia segunda direccional de f es simétrica en sus dos variables t_1 y t_2 , es decir

$$(\delta^2 f)(t_1\ t_2) = (\delta^2 f)(t_2\ t_1)$$

Definición 16 (Función casi-simétrica de orden 2)

La función $f : X \longrightarrow F$ se dice que es casi-simétrica de orden 2 en el punto $x \in X$, si es dos veces débilmente diferenciable en x y si para cada h_1 , h_2 los siguientes límites reiterados existen y son nulos

$$\lim_{t_1 \to 0} \left[\lim_{t_2 \to 0} \frac{(\delta^2 f)(t_1\ t_2) - \left[D^2 f(x)(t_1 h_1)\right](t_2 h_2)}{t_1 \cdot t_2} \right]$$

$$\lim_{t_2 \to 0} \left[\lim_{t_1 \to 0} \frac{(\delta^2 f)(t_1\ t_2) - \left[D^2 f(x)(t_1 h_1)\right](t_2 h_2)}{t_1 \cdot t_2} \right]$$

Ello ocurre en particular si el límite doble en la variable $(t_1\ t_2) \in \mathbb{R}^2$ existe y es nulo cuando $(t_1\ t_2) \longrightarrow (0\ 0)$.

En general no toda función dos veces débilmente diferenciable en x es casi simétrica de orden 2 en x , como lo pone de manifiesto el siguiente ejemplo

$$f(x\ y) = xy\ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{si } (x\ y) \in R^2 - \{(0\ 0)\}$$

$$f(0\ 0) = 0$$

Las funciones casi-simétricas de orden 2 en x , poseen la importante propiedad de la simetría de su derivada segunda en el punto $x \in X$, tal y como se demuestra en la siguiente

Proposición 17

Si $f : X \longrightarrow F$ es casi-simétrica de orden 2 en el punto x , entonces $D^2 f(x) \in \mathcal{L}(E\ ,\ \mathcal{L}_s(E\ F))$ es simétrica en sus dos variables, es decir

$$\left[D^2 f(x)(h_1)\right](h_2) = \left[D^2 f(x)(h_2)\right](h_1) \qquad \forall\ h_1\ h_2 \in E$$

Demostración:

Por la linealidad de la derivada segunda y por la simetría de la diferencia segunda direccional (proposición 15), se puede escribir, para cada $\beta \in \Gamma_F$

$$\left| \left[D^2 f(x)(h_1)\right](h_2) - \left[D^2 f(x)(h_2)\right](h_1)\right|_\beta =$$

$$= \lim_{t_1 \to 0} \left[\lim_{t_2 \to 0} \left| \frac{\left[D^2 f(x)(t_1 h_1)\right](t_2 h_2) - \left[D^2 f(x)(t_2 h_2)\right](t_1 h_1)}{t_1 \cdot t_2} \right|_\beta \right] \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t_1 \to 0} \left[\lim_{t_2 \to 0} \left| \frac{\left[D^2 f(x)(t_1 h_1)\right](t_2 h_2) - (\delta^2 f)(t_1\ t_2)}{t_1 \cdot t_2} \right|_\beta \right] +$$

$$+ \lim_{t_1 \to 0} \left[\lim_{t_2 \to 0} \left| \frac{(\delta^2 f)(t_2\ t_1) - \left[D^2 f(x)(t_2 h_2)\right](t_1 h_1)}{t_1 \cdot t_2} \right|_\beta \right] =$$

$$= 0$$

y siendo $\beta \in \Gamma_F$ arbitrario, queda demostrada la relación de simetría buscada.

El objetivo principal del presente trabajo es investigar condiciones por las que una función es casi-simétrica de orden 2 en un punto y que goza, por tanto, de la propiedad de simetría de la derivada segunda en dicho punto. Como se indicó en el ejemplo anterior, la doble diferenciabilidad débil en el punto no basta para asegurar la simetría, y ya en dicho ejemplo se echa de menos la continuidad de la derivada segunda. Veremos en el siguiente teorema que dicha continuidad es suficiente para asegurar la simetría de la derivada segunda.

Teorema 18 (Schwarz)

Sea $f : X \longrightarrow F$ una función de clase C^2_s. Entonces para cada $x \in X$, f es casi-simétrica de orden 2 en x.

Demostración:

Sea $x \in X$ y sean $h_1\ h_2 \in E$ fijos. Probaremos que el primer límite reiterado de la definición 16 es nulo. Para ello sea $\beta \in \Gamma_F$ arbitrario y seleccionemos un elemento $S \in \mathfrak{S}_s$ que contenga a h_1 y a h_2. Para $t_1\ t_2 \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeños, se tiene

$$\left| (t_1 t_2)^{-1} (\delta^2 f)(t_1\ t_2) - \left[D^2 f(x)(t_1 h_1) \right](t_2 h_2) \right|_\beta \leq \quad (1)$$

$$|t_1 t_2|^{-1} \left| (\delta^2 f)(t_1\ t_2) - Df(x+t_1 h_1)(t_2 h_2) + Df(x)(t_2 h_2) \right|_\beta +$$

$$|t_1 t_2|^{-1} \left| Df(x+t_1 h_1)(t_2 h_2) - Df(x)(t_2 h_2) - \left[D^2 f(x)(t_1 h_1) \right](t_2 h_2) \right|_\beta$$

El segundo sumando de la relación anterior, dado que $h_2 \in S$, está acotado por

$$|t_1|^{-1} \left| Df(x+t_1 h_1) - Df(x) - D^2 f(x)(t_1 h_1) \right|_{\beta\, S}$$

y este término tiende a 0 si t_1 tiende a 0 en $\mathbb{R}$, en virtud de la doble diferenciabilidad débil de f en x (nótese que dicho término no depende de t_2). En cuanto al primer sumando de (1), a fin de calcular primero el límite reiterado en la variable $t_2 \in \mathbb{R}$, fijemos la variable t_1 y supongamos que el elemento $S \in \mathfrak{S}_s$ es elegido con la condición adicional $t_1 h_1 \in S$. Por la continuidad de la aplicación

$$D^2 f : X \longrightarrow \mathcal{L}_s(E ; \mathcal{L}_s(E F))$$

en el punto $x \in X$, se tiene $\lim\limits_{h \to 0} |D^2 f(x+h) - D^2 f(x)|_{(\beta S)S} = 0$ y en particular, dado que $h_1 \in S$

$$\lim_{t_2 \to 0} |D^2 f(x+th_2)(h_1) - D^2 f(x)(h_1)|_{\beta S} = 0 \tag{2}$$

cualquiera que sea $t \in \mathbb{R}$ comprendido entre 0 y t_2 . Por otro lado, de la continuidad de la aplicación $Df : X \longrightarrow \mathcal{L}_s(E F)$ en los puntos $x \in X$ y $x+t_1 h_1 \in X$, se tiene

$$\lim_{t_2 \to 0} |Df(x+th_2) - Df(x)|_{\beta S} = 0 \tag{3}$$

$$\lim_{t_2 \to 0} |Df(x+t_1 h_1+th_2) - Df(x+t_1 h_1)|_{\beta S} = 0 \tag{4}$$

cualquiera que sea el escalar t comprendido entre 0 y t_2 . Fijado como está $t_1 \in \mathbb{R}$, definamos la función de la variable real t_2 suficientemente pequeña

$$B(t_2) =$$

$$= f(x+t_1 h_1+t_2 h_2) - f(x+t_2 h_2) - Df(x+t_1 h_1)(t_2 h_2) + Df(x)(t_2 h_2)$$

que es, por hipótesis una función diferenciable en su variable t_2 y que, de acuerdo con el teorema de los incrementos finitos (ver [9] 3.2.) , verifica

$$|t_1 t_2|^{-1} \, |(\delta^2 f)(t_1 \; t_2) - Df(x+t_1h_1)(t_2h_2) + Df(x)(t_2h_2)|_\beta =$$

$$= |t_1t_2|^{-1} |B(t_2) - B(0)|_\beta \leq$$

$$\leq |t_1t_2|^{-1} \sup |B'(t)(t_2)|_\beta \qquad (5)$$

donde el superior está tomado para todos los escalares t comprendidos entre 0 y t_2 . Evaluando la derivada de B , resulta por linealidad y por ser $h_2 \in S$

$$|B'(t)(t_2)|_\beta =$$

$$|Df(x+t_1h_1+th_2)(t_2h_2) - Df(x+th_2)(t_2h_2) - Df(x+t_1h_1)(t_2h_2) + Df(x)(t_2h_2)|_\beta$$

$$\leq |t_2| \, |Df(x+t_1h_1+th_2) - Df(x+th_2) - Df(x+t_1h_1) + Df(x)|_{\beta S} \leq$$

$$\leq |t_2| \, |Df(x+t_1h_1+th_2) - Df(x+th_2) - D^2f(x+th_2)(t_1h_1)|_{\beta S} +$$

$$+ |t_1t_2| \, |D^2f(x+th_2)(h_1) - D^2f(x)(h_1)|_{\beta S} +$$

$$+ |t_2| \, |Df(x+t_1h_1) - Df(x) - D^2f(x)(t_1h_1)|_{\beta S} \qquad (6)$$

Multiplicando esta cadena de desigualdades por $|t_1t_2|^{-1}$ y tomando límites reiterados primero cuando $t_2 \longrightarrow 0$, el tercer sumando de (6) queda invariante al no depender de t_2 ; el segundo sumando de (6) tiende a 0 de acuerdo con (2) y el primer sumando de acuerdo con las relaciones (2), (3) y (4) tiende a

$$|t_1|^{-1} |Df(x+t_1h_1) - Df(x) - D^2f(x)(t_1h_1)|_{\beta S} \qquad (7)$$

(nótese que la relación (2) se ha utilizado con h_1 sustituído por t_1h_1 , lo que es posible, pues ya se eligió $t_1h_1 \in S$) .

Finalmente si ahora se hace $t_1 \longrightarrow 0$, el último sumando de (6) y el término (7) tienden a 0 por la doble diferenciabilidad débil de f en x . En definitiva el límite reiterado primero cuando t_2 tiende a 0 y luego cuando t_1 tiende a 0 de la expresión (5) existe y es nulo. Queda así probado que el primer límite reiterado de la definición 16 es nulo. En cuanto al segundo la prueba es similar cambiando el orden de la toma de límites.

<u>Corolario</u> (Simetría de las derivadas cruzadas)

Sean $E_1 , \ldots , E_n$ espacios localmente convexos metrizables (resp. metrizables y tonelados), sea X un abierto del producto $\prod E_i$ y sea $f : X \longrightarrow F$ una aplicación de clase C_k^2 . (resp. de clase C_s^2). Se verifica, para cada $x \in X$, $h_i \in E_i$ $k_j \in E_j$, $i\ j = 1 , \ldots , n$,

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\,(h_i) \right](k_j) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\,(k_j) \right](h_i)$$

Demostración:

Consecuencia del teorema 18 de Schwarz, utilizando la proposición 13 que expresa la derivada segunda en función de las derivadas parciales de segundo orden.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. I. Averbukh, O. G. Smolyanov. The Theory of Differentiation in Linear Topological Spaces. Russian Math. Surveys 22 nº 6 , 201-258 (1967)

[2] A. Bastiani. Différentiabilité dans les Espaces Localment Convexes; Distructures. Math. Fac. Sci. Univ. Paris. 1962.

[3] E. Binz. Ein Differenzierbarkeitsbegriff in Limitierten Vektorräumen. Co. Mat. Helv. 41, (1966)

[4] H. Cartan. Calcul Différentiel. Hermann. Paris (1967)

[5] P. ver Eecke. Sur le Calcul Différentiel dans les Espaces non Normés. C. R. Acad. Sci. Paris 265, A720-A723 (1967)

[6] H. R. Fischer. Limesräume. Math Annalen Bd. 137 S. 269-303 (1959)

[7] A. Frölicher, W. Bucher. Calculus in Vector Spaces without Norm. Springer-Verlag Berlin (1966). (L. N. in M. nº 30)

[8] H. H. Keller. Differential Calculus in Locally Convex Spaces. Springer-Verlag Berlin (1974) (L. N. in M. nº 417)

[9] J. M. G. Lafuente. Contribución al Estudio de Aplicaciones Diferenciables en Espacios Localmente Convexos. Monografías y Memorias de Matemática. C. S. I. C. Madrid (1976)

[10] S. Yamamuro. Differential Calculus in Topological Linear Spaces. Springer-Verlag. Berlin (1974) (L. N. in M. nº 374)