



TESIS DOCTORAL

NUEVA DIDÁCTICA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

ANGELA SAVASTA

*Departamento de Didáctica Expresión Musical, Plástica y
Corporal*

2017



TESIS DOCTORAL

NUEVA DIDÁCTICA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

ANGELA SAVASTA

Conformidad de los directores de la tesis:

Zacarías Calzado Almodóvar

Florencio Vicente Castro

2017

Dedicatória

A mio figlio Andrea

RINGRAZIAMENTI

Desidero esprimere la mia gratitudine a tutte le persone che hanno partecipato direttamente e indirettamente allo sviluppo ed alla realizzazione di questa Tesi;

Prima di tutto ringrazio sempre Dio;

Un ringraziamento particolare desidero farlo a mio fratello e tutor, professore Salvatore Savasta, prof.re Associato del Dipartimento di Scienze matematiche e informatiche, scienze fisiche e scienze della terra di Messina, fonte di ispirazione e mentore in tutte le fasi del percorso dottorale. Desidero esprimergli la mia gratitudine per l'impegno e la dedizione mostrata. In ogni momento è riuscito a guidarmi e motivarmi ad andare avanti in tutti questi anni di studio;

Desidero ringraziare in particolar modo il prof. Dr. Florencio Vicente Castro per tutto il sostegno, la fiducia e i suggerimenti in tutti questi anni di studio e di ricerca; per i suoi incoraggiamenti e la costante supervisione della tesi..

Ringrazio anche a il Prof. Dr. D. Zacarías Calzado Almodóvar.

Ringrazio la prof.ssa Rosa Angela Fabio del Dipartimento di Scienze cognitive, psicologiche, pedagogiche e degli studi culturali di Messina, per i consigli attenti e puntuali;

I miei ringraziamenti vanno anche alla prof.ssa Agata Zirilli ed alla dott.ssa Angela Alibrandi ricercatori del Dipartimento di Economia-Sezione di Scienze Statistiche e Matematiche-Università degli Studi di Messina per la collaborazione attenta e professionale;

Un grazie speciale e sentito lo rivolgo al mio amico e collega Ing. Marco Vassallo per l'affetto, la motivazione ma soprattutto per la consulenza grafica, informatica e tecnica;

Ringrazio anche i dirigenti, i docenti, gli studenti ed il personale A.T.A dei Licei Scientifici, "G. Seguenza" di Messina e "S. Mottura" di Caltanissetta, per avermi permesso di svolgere la sperimentazione;

Sono grata ai miei genitori, che amo molto, Francesco Maimone Clara Savasta, per avermi trasmesso l'amore per lo studio ed avermi insegnato come si pensa in modo critico. Un grazie anche per avermi dato l'incentivo a partecipare ad un dottorato di ricerca all'estero e per tutto il supporto, la fiducia e la pazienza dimostratami

“Il divertimento della ricerca scientifica è anche trovare sempre altre frontiere da superare, costruire nuovi mezzi più potenti di indagine, teorie più complesse, cercare sempre di progredire pur sapendo che probabilmente ci si avvicinerà sempre di più a comprendere la realtà, senza arrivare mai a capirla (Margherita Hack)”

RESUMEN

Mi trabajo de tesis con el título de “Nueva Didáctica de la Mecánica Cuántica”, nace de la idea de desarrollar un nuevo acercamiento didáctico para introducir algunos conceptos fundamentales de la mecánica cuántica en manera simple y convincente. Este acercamiento se inspira en recientes tentativas de volver a formular esta teoría según los principios físicos elementales. Esto tiene la ventaja de no utilizar el formalismo matemático de los espacios de Hilbert y de los operadores Hermitianos y de sacar en manera intuitiva y razonable los conceptos fundamentales de indeterminación y “entanglement”. No se trata de simple divulgación, sino de una introducción que permite, a través de un aparato matemático sencillo y con conceptos físicos elementales, presentar los conceptos de medida y de probabilidad y de formular, además, predicciones cuantitativas sobre los sistemas cuánticos más elementales: los sistemas a dos estados entre los que podemos poner el “spin”. Por este nuevo acercamiento me he inspirado a los trabajos de Lucien Hardy, que demostró como el formalismo de la Mecánica Cuántica se pueda también deducir sin partir de axiomas abstractos, sino basándose sobre postulados razonables y con un significado claro. En particular se han sacado algunos conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica, basándose en los conceptos elementales de “bit” (a unidad de información) y de vector.

Este estudio se ha desarrollado también con el objetivo de valorar la eficacia de las nuevas fórmulas introducidas en relación a las competencias de base de los estudiantes a los que se ha presentado. El grupo seleccionado para mi investigación está constituido de 125 estudiantes entre 17 y 23 años de edad, de ambos sexos, del quinto año de dos Institutos de bachillerato con especialidad en ciencias de dos ciudades de Sicilia, Messina y Caltanissetta. La investigación se ha efectuado en el laboratorio de informática del Instituto “Seguenza” (Sicilia-Italia) y en el aula Magna del Instituto “Mottura” (Sicilia-Italia) durante las clases de enseñanza curricular.

Las fases de la investigación fueron tres: fase “pre test”, fase de “training” y fase “post test”.

En la fase “pre test” se ha suministrado el cuestionario sobre el conocimiento primario del asunto, para comprobar el nivel de partida de todos los estudiantes. En la segunda fase, fase de “training”, por lo que se refiere al Instituto “Seguenza” de

Messina, cada clase se ha tratado individualmente. Para cada clase se han presentado unas “slides” que contenían el texto y las imágenes, coadyuvadas por mi explicación. La explicación del asunto de la tesis ha durado una hora, incluso las respuestas a las preguntas obtenidas de la observación de las “slides”. Después de la fase de aprendizaje, a los participantes de la investigación se ha administrado un “retest” que sirvió a comprobar la eficacia de la nueva didáctica introducida.

Los resultados se han analizado con el programa SPSS, construyendo las tablas de frecuencias y los gráficos, con el objeto de describir, por sexo y por escuela, los resultados de cada pregunta de los cuestionarios. Luego, con las tablas de contingencia sobresalieron algunas correlaciones significativas entre las respuestas de los estudiantes de las dos escuelas.

Este estudio ha demostrado que examinando la comparación “pre test” / “re test” con el test de Wilcoxon (dado que las variables pretest y retest son numéricas), se consigue una relación altamente significativa por el Instituto de Messina. O sea, no obstante las evaluaciones en matemáticas y física no fuesen altas y el resultado del pretest insuficiente, los estudiantes han desarrollado bien el retest, demostrando la facilidad y validez del nuevo acercamiento didáctico. Para los estudiantes de Caltanissetta, donde la muestra considerada era inferior, los estudiantes habían sacado notas más altas en matemáticas y física y los resultados del pretest han resultado mejores.

El resultado de godas formas muy positivo del retest parece menos que significativo.

Palabras claves: Mecánica Cuántica, spin, entanglement, didáctica estadística.

ABSTRACT

My thesis work entitled “New teaching Methods in Quantum Mechanics” (Nuova didattica della Meccanica Quantistica) originates from the aim to develop a new teaching method able to introduce in a simple and convincing way some of the fundamental concepts of quantum mechanics (QM). This teaching framework takes its inspiration from recent research attempts to reformulate QM based on elementary physical principles. This didactic approach has the advantage of not using the complex and abstract framework of complex Hilbert spaces with physical observables described by Hermitean operators. It has also the advantage of presenting fundamental concepts as quantum uncertainty and entanglement. This approach is not just a popular description of QM, but a well-founded introduction to it, which, with a simple mathematical apparatus and simple physical notions, is able to present the most counterintuitive concepts of QM, and to propose quantitative predictions at least on elementary quantum systems, the two-level systems as the spin. In developing this new didactic approach, I was inspired by the recent works by the quantum physicist Lucien Hardy. He demonstrated that the QM formalism can be derived without using abstract mathematical axioms, but starting from reasonable postulates with a clear physical meaning. Specifically, I was able to introduce QM by using two elementary key concepts: the unit of information (bit), and the vector. By using them, I show how to calculate the transition probabilities for spin measurements, to derive the variances and thus to quantify the uncertainty in spin observables. I was also able to explain the concept of entanglement and to demonstrate why quantum systems violate the Bell inequality.

During this thesis work, I tried to verify the effectiveness of this new approach in relation with the starting skills of the students. The sample considered for this study consisted of 125 students, aged 17 to 20 years of both sexes, attending the fifth scientific high-school class in Messina and Caltanissetta (Sicily). This activity was performed in the information-technology lab of “Liceo Scientifico Seguenza” (Messina) and in the lecture hall of “Liceo Scientifico Mottura” (Caltanissetta), during ordinary school hours.

The study consisted of three stages: i) pretest, ii) training, iii) posttest.

During the pretest stage, I administered a survey for investigating the students' prerequisite skills.

In the second stage (training) I provided a one hour lesson on this new introduction to QM. I used some slides with both text, simple equations and images. Then, I administrated a survey (retest) based on the just presented concepts quantum mechanics, in order to check the effectiveness of this new didactic approach. The results of the two surveys have been analysed with the SPSS software. The obtained the contingency tables show significant and interesting correlations.

Comparing the pretest and the retest by using the Wicoxon test, this study demonstrated a highly significant relationship for the case of the high-school in Messina. Specifically, despite, the student evaluations for the pretest results were quite low, the students obtained in the retest good results, supporting the great validity of this new didactic approach.

The same conclusion does not hold for the students in Caltanissetta, where the pretest results were already good.

Keywords: Quantum mechanics, spin, entanglement, didactic, statistics.

SOMMARIO

Il mio lavoro di tesi dal titolo “Nuova didattica della Meccanica Quantistica” nasce dall’idea di sviluppare un nuovo approccio didattico per introdurre alcuni concetti fondamentali della meccanica quantistica (da ora in poi MQ) in maniera semplice e convincente. Tale approccio prende spunto da recenti tentativi di riformulare questa teoria sulla base di principi fisici elementari. Esso ha il vantaggio di non utilizzare il formalismo matematico degli spazi di Hilbert e degli operatori Hermitiani, e di ricavare in modo intuitivo e ragionevole i concetti fondamentali di indeterminazione ed entanglement. Non si tratta di mera divulgazione, ma di una introduzione che consente, con un apparato matematico semplice e con concetti fisici elementari, di presentare i concetti di misura e di probabilità e di formulare anche predizioni quantitative sui sistemi quantistici più elementari: i sistemi a due stati, tra i quali possiamo annoverare lo spin. Per questo nuovo approccio mi sono ispirata ai lavori di Lucien Hardy, il quale ha mostrato come il formalismo della MQ possa anche essere derivato senza partire da assiomi astratti, ma basandosi su postulati ragionevoli e con un significato chiaro. In particolare sono stati ricavati alcuni concetti fondamentali della MQ basandosi sui concetti elementari di bit (l’unità di informazione) e di vettore.

Il presente studio è stato condotto anche con lo scopo di valutare l’efficacia delle nuove formule introdotte in relazione alle competenze di base degli allievi a cui sono state sottoposte. Il campione esaminato per la mia ricerca è costituito da 125 alunni, di età compresa tra i 17 e 20 anni, di entrambi i sessi, frequentanti le quinte classi di due Licei scientifici di due città della Sicilia: Messina e Caltanissetta. La ricerca è stata condotta nel laboratorio di informatica del Liceo Scientifico "Seguenza" e nell'Aula Magna del Liceo Scientifico Mottura, durante le ore di insegnamento curricolari.

Le fasi della ricerca sono state tre: fase pre test; fase di training e fase post test.

Nella fase pretest, è stato somministrato il questionario sulla conoscenza primaria dell’argomento per controllare il livello di partenza di tutti i soggetti. Nella seconda fase, fase di training, per quanto riguarda il liceo scientifico "Seguenza" di Messina ogni classe è stata trattata singolarmente. Per ogni classe sono state presentate delle slide che contenevano sia il testo che le immagini, coadiuvate dalla mia spiegazione. La spiegazione dell'argomento della tesi è durata circa un'ora, comprese le risposte alle

domande scaturite dall'osservazione delle slides. Dopo la fase di apprendimento, ai partecipanti alla ricerca è stato somministrato un retest che è servito a verificare l'efficacia della nuova didattica introdotta.

I risultati dei due test sono stati analizzati con il programma SPSS, costruendo preliminarmente, le tabelle di frequenze ed i grafici allo scopo di descrivere, per sesso, e per scuola, i risultati di ogni singola domanda dei questionari. Di seguito, con le tavole di contingenza, sono emerse alcune correlazioni significative tra le risposte date dagli alunni delle due scuole. Questo studio ha mostrato che valutando il confronto pretest-retest con il test di Wilcoxon (dal momento che le variabili pretest e retest sono numeriche), si ottiene una relazione altamente significativa per il Liceo Scientifico di Messina. Ovvero, nonostante le valutazioni in matematica e fisica non fossero alte e il risultato del pretest insufficiente, i discenti hanno ben sviluppato il retest dimostrando la facilità e validità del nuovo approccio didattico.

Per gli studenti di Caltanissetta, dove il campione considerato era inferiore, gli alunni avevano avuto voti più alti in matematica e fisica e i risultati del pretest sono risultati migliori. L'esito, comunque molto positivo, del retest risulta meno significativo.

Parole chiave: meccanica quantistica, spin, entanglement, didattica, statistica.

INDICE

| | |
|--|----|
| RINGRAZIAMENTI..... | 3 |
| RESUMEN | 7 |
| ABSTRACT..... | 9 |
| SOMMARIO | 11 |
| INTRODUZION..... | 17 |
| PARTE 1 – MARCO TEORICO..... | 18 |
| PARTE 2 – STUDIO EMPIRICO | 22 |
| OBJETIVOS | 30 |
| HIPÓTESIS DE ESTUDIO..... | 31 |
| METODOLOGÍA..... | 31 |
| LA MUESTRA..... | 31 |
| LAS HERRAMIENTAS UTILIZADAS..... | 32 |
| PROCEDIMIENTO..... | 32 |
| Tratamiento estadístico de los datos | 33 |
| RESULTADOS..... | 34 |
| LÍMITES DEL ESTUDIO..... | 36 |
| PROPUESTAS PARA NUEVAS INVESTIGACIONES..... | 36 |
| parte prima marco teorico..... | 41 |
| Capitolo 1 “...Nessuno ha mai capito la meccanica quantistica” | 43 |
| Capitolo 2 L'insegnamento della meccanica quantistica..... | 49 |

| | |
|---|-----|
| Capitolo 3 prerequisiti..... | 59 |
| 3.1 Goniometria e trigonometria..... | 59 |
| 1.1.1 Le funzioni goniometriche fondamentali..... | 64 |
| 1.1.2 I grafici delle funzioni goniometriche..... | 69 |
| 1.1.3 Relazioni fondamentale della goniometria | 71 |
| 1.1.4 Le cofunzioni..... | 73 |
| 1.1.5 Funzioni goniometriche di alcuni angoli notevoli..... | 74 |
| 1.1.6 Angoli associati ad un'angolo dato | 78 |
| 3.2 I Vettori..... | 85 |
| 3.2.1 Cenni sui vettori | 85 |
| 3.2.2 Vettori equipollenti..... | 88 |
| 3.2.3 Vettore nullo | 89 |
| 3.2.4 Somma di due vettori..... | 89 |
| 3.2.5 Opposto di un vettore..... | 91 |
| 3.2.6 Differenza di vettori..... | 92 |
| 3.2.7 Prodotto tra un vettore ed uno scalare..... | 92 |
| 3.2.8 Prodotto scalare | 93 |
| 3.2.9 Il prodotto vettoriale..... | 94 |
| 3.3 Probabilità e statistica..... | 97 |
| 3.3.1 Cenni di probabilità..... | 98 |
| 3.3.2 Definizione classica di probabilità..... | 100 |
| 3.3.2 Definizione frequentistica di probabilità..... | 103 |

| | | |
|--|--|-----|
| 3.3.4 | Le distribuzioni di probabilità..... | 106 |
| 3.3.5 | Cenni di statistica..... | 107 |
| 3.3.6 | Indici statistici..... | 107 |
| 3.3.7 | Media aritmetica..... | 108 |
| 3.3.8 | Media aritmetica ponderata | 109 |
| 3.3.9 | Mediana..... | 111 |
| 3.3.10 | La moda..... | 116 |
| 3.3.11 | Varianza | 120 |
| 3.3.12 | Scarto quadratico medio | 123 |
| parte seconda marco empirico..... | | 125 |
| Capitolo 4 “it from the bit” le probabilità quantistiche da bit e vettori..... | | 127 |
| 4.1 | Attenuando sempre più un fascio di luce..... | 127 |
| 4.2 | Descrizione degli esperimenti di Stern-Gerlach | 133 |
| 4.3 | Vettori e bit..... | 140 |
| Capitolo 5 Disuguaglianza di Bell-Chsh | | 153 |
| 5.1 | Sulla disuguaglianza di CHSC..... | 153 |
| 5.2 | Perché le particelle quantistiche violano la disuguaglianza di BELL-CHSH?? | |
| Spiegazioni in termini di vettori e bit | | 157 |
| Capitolo 6 Materiali e metodi..... | | 167 |
| 6.1 | Metodologia | 167 |
| 6.2 | Obiettivi | 167 |
| 6.3 | Linea di investigazione..... | 168 |

| | |
|--|-----|
| 6.4 Ipotesi di ricerca | 169 |
| 6.5 Popolazione e campione | 169 |
| 6.6 Strumenti | 170 |
| 6.7 Procedura..... | 170 |
| 6.8 Trattamento statistico dei dati..... | 171 |
| Capitolo 7 risultati..... | 173 |
| 7.1 Analisi dei risultati | 173 |
| 7.2 Confronto fra I gruppi delle due città-Tavole di contingenza | 205 |
| Capitolo 8 DISCUSSIONI e conclusioni..... | 251 |
| 8.1 Discussioni e conclusioni..... | 251 |
| 8.2 Limiti di studio..... | 252 |
| 8.3 Proposte per nuove indagini..... | 252 |
| 8.4 Conclusioni finali | 253 |
| ELENCO DELLE TABELLE | 257 |
| ELENCO DELLE FIGURE | 263 |

RESUMEN AMPIO EN ESPAÑOL

INTRODUCCION

La mecánica cuántica (MC) representa una de las mayores revoluciones científicas y culturales en la historia de la humanidad. El 14 de diciembre de 1900, durante un encuentro organizado por la Sociedad de Física Alemana, Max Planck presentó un ensayo sobre “La teoría de la distribución de la energía en un espectro normal”. Este texto, al principio recibido con escaso interés, representaba una revolución en el campo de la física, y marcó el nacimiento de la MC. Esta nueva teoría substituyó rápidamente las leyes clásicas de la mecánica en el mundo microscópico, introduciendo conceptos radicalmente diferentes en los cuales se fundamentaba toda la física precedente. Según ella, el conocimiento exacto de las condiciones iniciales de un sistema permite predecir exactamente su evolución en el tiempo.

La mecánica cuántica substituye este determinismo de las previsiones con previsiones reguladas por el concepto de probabilidad. En 1927 el físico alemán Werner Karl Heisenberg, premio Nobel para la física en 1932, con sólo 26 años formuló el notorio Principio de Indeterminación, según el cual es imposible conocer con precisión la posición, y al mismo tiempo la cantidad de movimiento de una partícula. Cuanto más en detalle se mida una magnitud, tanto más será la incertidumbre en medir la otra. Como consecuencia, es siempre posible formular leyes estadísticas generales, que permitan predecir los fenómenos, pero las magnitudes físicas relativas a las partículas individuales conservan una incertidumbre intrínseca. Según Heisenberg, la MC establece la caída definitiva de la ley de casualidad; de hecho, es imposible deducir lo que va a ocurrir en futuro del conocimiento del presente, por el simple hecho que es imposible “*conocer el presente en todos sus elementos determinantes*”.

La MC ha extendido notablemente nuestra comprensión de la realidad física. Una gran parte de la física de siglo XX es el resultado de nuevas exploraciones y

aplicaciones derivadas de la mecánica cuántica. La MC ha permitido la comprensión de la física atómica, de la física nuclear, de la física de las partículas, de la física de la materia condensada, y ha permitido la fabricación de láser, ordenadores, de la optoelectrónica. Hoy en día los principios de la mecánica cuántica prometen nuevas revolucionarias aplicaciones, como por ejemplo los ordenadores cuánticos, que serán capaces de elaborar la información con una eficiencia exponencialmente mayor que los ordenadores basados en los bits clásicos.

Se trató también de una revolución cultural, en cuanto la MC prevé un comportamiento de las partículas que contradice radicalmente nuestra manera de comprender la realidad cotidiana, y las presuposiciones fundamentales de toda la física precedente. Los mismos padres fundadores quedaron desconcertados por varios aspectos de esta teoría, como por ejemplo la indeterminación y el entanglement. En particular, según la física cuántica las observaciones individuales experimentales sobre un sistema físico pueden no ser reproducibles, aunque el sistema sea preparado de la misma manera. La realidad natural pues presenta un cierto nivel de imprevisibilidad intrínseca, es decir, no depende de una imprecisión del aparato de medición, y no es por lo tanto eliminable. Además, un sistema cuántico puede encontrarse suspendido entre dos o más estados diferentes de realidad. Es interesante citar a tal sentido algunas frases célebres sobre la MC de algunos premios Nobel para la física por haber contribuido al desarrollo de esta teoría:

“Más éxito tiene la teoría de los cuantos, más se parece a una insensatez” Albert Einstein, (de una carta a Heinrich Zangger, 20 de mayo de 1912).

“Dios no juega a los dados con el mundo”

Albert Einstein, (Camejo 2008).

“Quien no se quede estupefacto por la teoría cuántica, seguramente no la ha entendido” Niels Bohr.

“Creo que puedo afirmar que nadie entiende la mecánica cuántica”

Richard Phillips Feynman (Feynman 2004).

PARTE 1 – MARCO TEORICO

En los últimos años se ha entendido que estos comportamientos extraños no son necesariamente limitados a sistemas microscópicos, sino que es posible realizar

sistemas visibles también a simple vista, como circuitos superconductores u osciladores mecánicos que siguen las más extrañas leyes cuánticas. Hoy en día está tomando importancia también la idea de que los aspectos peculiares de esta física puedan sentar las bases del proceso de la mente aún no entendidos, como la percepción y la conciencia.

Por este motivo se considera que un conocimiento, aunque sea solo de los aspectos principales, de la física cuántica tiene que formar parte del bagaje cultural de quien realmente quiere vivir su tiempo, independientemente de los intereses laborales y culturales. Más bien, la FC parece a los no expertos como algo misterioso' e incomprensible, que puede ser entendido sólo adquiriendo conocimientos matemáticos avanzados. Esta percepción desafortunadamente no es infundada, y nace del hecho que, como observó uno de los principales físicos cuánticos experimentales, Anton Zeilinger, esta teoría, al contrario por ejemplo de la teoría de la relatividad, se basa en principios (postulados) y en un formalismo matemático (espacios de Hilbert, operadores Hermitianos) bastante abstractos.

Finalmente, también gracias a la reforma Gelmini de la escuela de segundo grado, la FC, como parte central de la física moderna, está empezando lentamente a ser parte del bagaje cultural de los estudiantes. Después de casi un siglo de la formulación definitiva de la teoría de la mecánica cuántica, hoy, en casi todos los currículos escolares están incluidos elementos de física moderna, y de acuerdo con las indicaciones del ministerio:

“el profesor tendrá que prestar atención a utilizar un formalismo matemático asequible a los estudiantes, poniendo siempre en evidencias los conceptos fundamentales”.

(https://elearning2.uniroma1.it/pluginfile.php/21116/mod_resource/content/1/Fisica%20scientifico%20annotata.pdf, s.d.)

Con esta tesis quiero demostrar como sería posible explicar algunos aspectos fundamentales de la MC sin utilizar el típico formalismo matemático complejo y abstracto. No es simple divulgación, sino una iniciación que, utilizando un aparato matemático simple y conceptos físicos elementales, permite introducir los conceptos fundamentales de medida y probabilidad, y de formular también predicciones cuantitativas sobre sistemas cuánticos más elementales: los sistemas a dos estados, entre

los cuales podemos contar con el espín. La idea es ofrecer una herramienta didáctica eficaz para introducir la FC a los estudiantes y en general a todos los que quieran enfrentarse a esta revolución cultural, sin tener conocimientos matemáticos avanzados. La introducción aquí propuesta nos permite también explicar en detalle el concepto de “entanglement” cuántico, actualmente de gran interés, tanto por las posibles aplicaciones tecnológicas, como por el encanto que genera inclusive a nivel popular. Según Erwin Schrödinger, uno de los padres de la MC, ¡el “entanglement” es el trato esencial de la MC!

Muchos proyectos se han implementados en las escuelas para afrontar el problema de enseñar la MC a los alumnos del último año de bachillerato científico. En esta tesis he contemplado, en detalle, los problemas que han encontrado los estudiantes al enfrentarse a la MC, así como las diferentes propuestas de proyectos destinados a intentar solucionar esta situación.

La tarea a llevar a cabo es compleja porque tiene que ver, como claramente explicó Alberto Stefanel en su artículo “La mecánica cuántica en las escuelas secundarias”, con aspectos de:

“contenido disciplinar, ligados al análisis de nuevos contextos fenomenológicos y sobre todo a la necesidad de introducir conceptos extraños a la física clásica; -metodología, por ejemplo relativos a cómo relacionar fenomenología y teoría y a cómo las nuevas tecnologías puedan ayudar en esta tarea; - estructuración global de los currículos, para que la MC no sea una apéndice de los cursos de física de las escuelas secundarias, sino una parte integrante. A pesar de las diversidades en la elección de contenidos, estrategia y aplicaciones didácticas, la investigación está de acuerdo sobre la importancia de enfrentar los aspectos básicos de la teoría como el principio de sobrexposición, el indeterminismo cuántico, el “entanglement”, dejando de lado en cambio los elementos de la física de los cuantos que han caracterizado la mayoría de los textos escolásticos.”

(www.treccani.it/scuola/tesine/meccanica_quantistica/3.html, s.d.).

Los problemas principales de los estudiantes, según la profesora Giuseppina Rinaudo del Departamento de Física Experimental de la Universidad de Turín, y

conforme a los análisis llevados a cabo por el proyecto implementado en el Liceo científico “A. Einstein” de Rímìni, en colaboración con el SSIS, Universidad de Bolonia, Departamento de Física, se deben también al difícil pasaje del continuo al discreto, por:

“falta de referencias macroscópicas que permitan “visualizar” los fenómenos; - complejidad de los conceptos: concepto de “acción”, esencial para entender el significado de la relación de Planck, que es el fundamento de la MC; concepto de “onda” (energía llevada por la onda, fase, sobrexposición lineal); conceptos de “probabilidad” y “determinismo” – complejidad de la formalización.”

(www.iapht.unito.it/fsis/didfis/did9-06-mq.pdf).

La otra dificultad encontrada concierne al concepto de que entrar en el mecanismo de la física cuántica implica un radical cambio de perspectiva. El alumno Simone R. escribe:

“La parte del formalismo me ha ayudado humanamente, porque es siempre reconfortante poder contar con ecuaciones, cálculos y leyes matemáticas; todavía, a pesar de esta coherencia interna suya, la parte matemática no ha contribuido a formar mi idea de objeto cuántico más de lo que no lo hubiera hecho la parte de la física; evidentemente porque el plano de la teoría matemática es demasiado abstracto, desde mi punto de vista, para poder ser asimilado en las realidades físicas, por mucho que sean intangibles. Por cierto: no se ha tratado de una complicación, porque el formalismo ha sido fácil de memorizar y entender, pero, como ya he dicho, es claro sólo en su interior” (Simone R.)”

(<http://docplayer.it/28313526-L-insegnamento-della-meccanica-quantistica-tra-problemi-interpretativi-e-difficolta-degli-studenti.html>)

Otra dificultad que encuentran los alumnos deriva del formalismo, ya que no es asequible para los estudiantes de secundaria, como ya se ha dicho varias veces, una descripción formalmente correcta del movimiento.

El interés de este estudio, por las profundas implicaciones conceptuales y por las innumerables aplicaciones de la Mecánica Cuántica, no sólo en la física, sino también en otros ámbitos de fuerte impacto social, nace de la necesidad de llevar al ciudadano medio, los estudiantes de secundaria y la comunidad científica, a descubrir un nuevo y más inmediato abordaje de los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica.

PARTE 2 – ESTUDIO EMPIRICO

Queremos explicar los nudos conceptuales típicos de la Mecánica Cuántica, y empezar un recorrido introductorio que pueda acercar a los jóvenes, y más en general, a quien esté interesado, a la física cuántica. Por eso he introducido un formalismo matemático asequible y lo más simple y divulgativo posible, y así mismo, adecuado para proporcionar informaciones cuantitativas al menos sobre sistemas físicos elementales.

Para este nuevo abordaje, guiada por mi tutor, me he inspirado en los trabajos de Lucien Hardy, que han demostrado como el formalismo de la Mecánica Cuántica se puede derivar, sin necesariamente empezar por axiomas abstractos, sino basándose en postulados razonables y con un significado claro. Especialmente hemos obtenidos algunos conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica basándonos en los conceptos elementales de bit (la unidad de información) y de vector, que nos permiten describir en física las fuerzas, la velocidad y la aceleración.

Por este motivo he introducido una breve explicación de los conceptos elementales de goniometría, probabilidad, estadística y física vectorial, a los cuales referirse para introducir los conceptos cuánticos.

La introducción a la MC que propongo empieza con el concepto de espín. Este nivel de libertad de las partículas representa el sistema cuántico más sencillo, en cuanto está descrito por sólo dos estados, es decir, el número mínimo de estados permitidos.

El espín es una de las propiedades fundamentales de las partículas, es decir, el momento angular intrínseco de una partícula. En general el momento angular es un vector ortogonal al plano de rotación, y describe el impulso con el cual un cuerpo gira

alrededor de su eje. A diferencia del momento angular en la física clásica, el espín tiene la característica de ser orientado sólo hacia arriba o hacia abajo, siguiendo una dirección cualquiera prefijada, pues su medida en cualquier dirección proporciona solamente dos posibles resultados, arriba (+) y abajo (-), es decir un bit de información.

En esta tesis demostraré como los aspectos más interesantes y peculiares de la mecánica cuántica y, de especial manera, el surgir de la probabilidad cuántica, puedan derivarse de los siguientes dos simples principios:

1. El espín es un vector y como tal está sujeto a transformaciones continuas de rotación;
2. Si se mide una componente suya siguiendo un eje arbitrario se obtiene una de las dos posibles soluciones.

El primero deriva del reconocer el espín como el momento angular intrínseco de una partícula. El segundo es el resultado de varias evidencias experimentales, como por ejemplo los experimentos de Stern-Gerlach. A continuación voy a resumir las consecuencias directas de estos dos principios físicos elementales.

Para aclarar las ideas asumamos que los dos posibles valores sean $\pm a$, donde a es un número real positivo. Imaginemos haber medido un espín siguiendo una dirección prefijada que indicamos con el vector unitario (vector) n y de haber obtenido así $+a$. Justo después la medición, el vector de espín que indicamos con \mathbf{J} resultará alineado según el eje de medición: $\mathbf{J} = a \cdot n$. De hecho, por las propiedades de rotación de los vectores, si así no fuese, una rotación podría dar origen a una amplitud del vector de espín superior a a , en contraste pues con el principio 2. Ahora imaginemos medir siguiendo una dirección diferente de n , indicada por el vector m . Es decir, queremos medir la componente del vector \mathbf{J} siguiendo el eje m . El resultado previsto por la propiedad de los vectores será $v = \mathbf{J} \cdot m = a n \cdot m = a \cos \theta$, donde θ es el ángulo incluido entre los dos versores n y m . La medida prevista ($v = \mathbf{J} \cdot m = a \cos \theta$) está sin embargo en conflicto con el principio 2, ya que el $\cos \theta$ es un número (real) entre -1 y 1 . Ya que los experimentos sobre el momento angular de espín demuestran como la medición proporciona efectivamente sólo dos posibles resultados (principio 1), parece que, a pesar de tener que ver con un momento angular (un claro ejemplo de vector), el concepto de vector debe ser abandonado. *¿Existe todavía una manera para nadar y salvar la ropa!* Veremos que esta salida es exactamente aquella seguida por la

naturaleza y que da origen a la física cuántica. El concepto de probabilidad, y en particular de media estadística nos ayudan. Pues en una teoría probabilística, en presencia de sólo opciones permitidas ($\pm a$), es posible obtener todos los valores v incluidos en el intervalo $[-a, a]$ como resultado de una media estadística. Pues el espín, no pudiendo obedecer a las notas propiedades de rotación de los vectores de manera determinística, puede obedecer sólo en el sentido estadístico. Pues en función del ángulo θ , volviendo a repetir más veces la medición, el resultado será a veces $-a$, a veces $+a$, de manera que al final la media $\langle v \rangle = -a P(-a) + a P(a)$ sea igual al cuanto previsto por la simetría de rotación: $\langle v \rangle = a \cos \theta$ Donde hemos utilizado la definición de media estadística con $P(-a)$ y $P(a)$ que representan las probabilidades de obtener (después de la medición) el valor $-a$ y $+a$ respectivamente. He aquí aparecer la probabilidad cuántica.

Nota grafica: el símbolo θ debe interpretarse como θ dado que el sistema informático no permite su sustitución en las formulas. ¹

Este abordaje demuestra como partiendo de 2 principios físicos razonables, el primero de los cuales derivado de la evidencia experimental y el segundo del concepto de vector, surja inevitablemente la probabilidad como única posibilidad posible para reconciliar los dos principios. Recordando que la suma de las probabilidades debe valer 1 ($[P(-a) + P(a) = 1]$), **de la relación** $-a P(-a) + a P(a) = a \cos \theta$, es posible obtener con pasajes elementales (sistemas de ecuaciones de dos incógnitas) las probabilidades de transición. Es decir, somos capaces de responder a la pregunta: preparado el sistema en el estado $+$ siguiendo el eje n , queriendo medir la componente del espín siguiendo un eje con n , ¿cuál es la probabilidad de tener como resultado $+a$ o $-a$? Con unos simples pasajes matemáticos, haciendo sistema con las dos ecuaciones de arriba derivadas, se obtiene: $P(a) = \cos^2 \frac{\theta}{2}$ y $P(-a) = \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

Observamos que estas probabilidades corresponden exactamente a las probabilidades cuánticas pro el espín que se deducen utilizando todo el formalismo matemático de la FC. Resultados análogos se pueden obtener naturalmente partiendo

del estado – a siguiendo el eje n . En este caso los valores de las dos probabilidades se intercambian.

Esta impostación se puede fácilmente extender a dos partículas para describir el “entanglement” cuántico. Uno de los fenómenos más interesantes y raros de la MC.

La física cuántica, como he dicho antes, se limita a proporcionar un conjunto de reglas, que especifican la probabilidad de obtener un determinado resultado como consecuencia de una medición. A muchos físicos no les gustaba esta situación. Einstein, por ejemplo, sostenía que la MC tenía necesariamente que ser incompleta, y desarrolló una serie de objeciones a la teoría. La más conocida es la paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR). Ellos creían que la descripción cuántica de un sistema físico tendría que ser soportada por un postulado de existencia de variables escondidas, que hubiese explicado el resultado probabilístico de las mediciones. Según Einstein y sus colaboradores, la incertidumbre en los resultados de una medición no podía ser de tipo fundamental e intrínseco (Dios no juega a los dados), sino que podía ser solamente consecuencia de nuestra ignorancia parcial acerca de las variables físicas del sistema. Además observaron como la MC no pudiera ser totalmente correcta o completa, ya que preveía una interacción instantánea entre partículas distantes (entanglement cuántico), en contraste con el principio fundamental de casualidad. Según EPR la MC no era una teoría completa en cuanto no-realista y no-local. Cabe recordar que, según EPR, una teoría se define local cuando cualquier operación o medición realizada en un determinado punto del espacio no puede tener efecto inmediato sobre las grandezas físicas, en un lugar separado del mismo; y realista si las grandezas físicas (elementos de realidad) tienen un valor fijo independientemente de que sean o no medidas.

El razonamiento de Einstein era totalmente teórico, pero genial, ya que exponía un problema sobre el cual nadie había todavía reflexionado a fondo, y parecía de verdad poner en duda las bases de la física cuántica.

Para entender de forma más precisa en qué consiste la falta de realismo y de localidad de la MC, es útil tener en cuenta un ejemplo específico. De acuerdo con los razonamientos del físico John Bell, consideremos un origen de pareja de partículas. Imaginemos por ejemplo que las partículas sean emanadas por fisión por una partícula individual con momento angular nulo. Por la conservación del momento angular, las partículas emitidas, a pesar de tener cada una un momento angular casual dependiente

del solo evento de fisión, tendrán momento angular total (resultante de la suma de los dos momentos angulares) nulo. Esto significa que cada una de las dos partículas tendrá momento angular opuesto a la otra. Éste es un claro ejemplo de correlación entre partículas. Según un razonamiento clásico, después de la fisión, las dos partículas tendrán momento angular random (aleatorio) y no conocido pero de todas maneras definido, y además los dos momentos angulares están relacionados ya que son iguales en módulo pero con sentido opuesto.

En cambio, según un razonamiento basado en la MC, cuando las dos son emitidas, las partículas pueden tener un momento angular no determinado, es decir no tienen propiedades definidas de rotación. Sin embargo si se realiza una medición sobre una de las partículas y se obtiene un valor por una componente del momento angular, instantáneamente la otra partícula, aunque puesta a distancia notable de la primera, adquirirá un valor definido por la correspondiente componente angular que, en base al principio de conservación del momento angular, será inevitablemente igual en módulo y opuesto en signo a aquella medida.

Las críticas de EPR y las discusiones siguientes no encontraron finalmente gran interés por los físicos del periodo, ya que, ocupados en aplicar la MC a muchos sistemas físicos microscópicos, las consideraron académicas y de interés más epistemológico que físico. Las cosas cambiaron a partir de 1964, cuando el físico norte irlandés John Bell presentó una desigualdad (confirmada por las teorías basadas en el realismo local, y desmentida por las previsiones de la física cuántica) capaz de conducir otra vez la discusión sobre bases cuantitativas y susceptible de verificación experimental. Con la idea de Bell era posible interrogar la naturaleza para entender si ella siguiese las previsiones raras de la MC, o aquellas aparentemente más razonables del realismo local. Una de estas contradicciones consiste en la desigualdad de Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH), que es parte del grande conjunto de desigualdades generalmente conocidas como desigualdades de Bell. Ésta desigualdad está satisfecha por las teorías basadas en el realismo local, y en cambio está violada por la teoría cuántica.

Así mismo, ésta se aplica a una situación en las cuales la pareja de partículas son enviadas desde una fuente a dos observadores distantes, que llamaremos Alice y Bob. Un observador A que recibe la partícula a puede escoger de medir una entre las observables físicas a y a' , por ejemplo, entre dos diferentes proyecciones de espín

siguiendo el eje $n +$ o $n -$. Análogamente, el observador B puede escoger de medir siguiendo el eje $m +$ o $m -$.

Supongamos que, en tales condiciones y bien a y bien a' , así como b y b' puedan admitir sólo dos resultados, ± 1 . Si las partículas pueden tener propiedades definidas antes de la medición, y no son influenciadas por las mediciones de los observadores distantes, tendremos que, si $a, a' = \pm 1$, es uno de los dos resultados: $a + a' = 0$ (si a y a' tienen signo diferente) y en consecuencia $a - a' = \pm 2$, o sino: $a - a' = 0$ (si a y a' tienen el mismo signo) y entonces $a + a' = \pm 2$.

De este resultado podemos obtener fácilmente que $C = (a + a')b + (a - a')b' = \pm 2$, en cuanto si $a + a' = \pm 2$ entonces $a - a' = 0$ o viceversa si $a + a' = 0$ entonces $a - a' = \pm 2$.

Volviendo a repetir la medición varias veces, en base a este razonamiento se obtendrá siempre $C = \pm 2$. Como consecuencia obtuvimos que el valor absoluto del valor medio de C no puede superar el valor 2. En fórmula:

$$|\langle C \rangle| = |\langle a b \rangle + \langle a' b \rangle + \langle a b' \rangle + \langle a' b' \rangle| \leq 2.$$

Esta desigualdad es justamente la famosa desigualdad CHSH. Es posible mostrar cómo esta desigualdad pueda ser quebrantada en el ámbito de la teoría cuántica. Los resultados de la teoría cuántica, y por tanto el incumplimiento de la desigualdad CHSH, se pueden obtener aplicando y utilizando todavía los dos principios elementares (i) y (ii').

Las cantidades a, a', b y b' , que entran en la desigualdad descrita anteriormente, son observables físicas, y en particular componentes de vectores. De hecho podemos escribir \mathbf{a} como el producto escalar del vector \mathbf{J} que describe el momento angular intrínseco de la partícula con un vector, correspondiente al eje de medición escogido por el observador (medidas de Stern-Gerlach). En la fórmula, ponemos $a = \mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{a}}$, $a' = \mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{a}}'$; $b = \mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{b}}$ e $b' = \mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{b}}'$, donde $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}$, y $\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}'$ son vectores que corresponden a los dos posibles ejes de medición respectivamente de Alice y Bob.

Si Alice y Bob escogen $\hat{\mathbf{n}}_A = \hat{\mathbf{n}}_B$, consideramos el producto entre el resultado obtenido por Alice y aquél obtenido por Bob obteniendo $(\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_A)(\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_B)$.

Alice mide $\mathbf{J} \cdot \hat{n}_A$ y puede obtener dos posibles resultados. Si Alice obtiene $\mathbf{J}_A \cdot \hat{n}_A = -1$. Un instante después, Bob, midiendo siguiendo $\hat{n}_B = \hat{n}_A$, obtendrá como resultado, $\mathbf{J}_B \cdot \hat{n}_A = 1$, del cual obviamente: $(\mathbf{J}_A \cdot \hat{n}_A)(\mathbf{J}_B \cdot \hat{n}_A) = -1$. Este resultado sigue invariado aunque Alice tuviese que obtener $\mathbf{J}_A \cdot \hat{n}_A = 1$. Además los roles de Alice y Bob son perfectamente intercambiables.

Consideremos ahora el caso en que $\hat{n}_B \neq \hat{n}_A$, donde Bob escoge un eje de medición diferente, girado de un ángulo θ comparado con el precedente.

Si Alice mide por primera y obtiene, $\mathbf{J}_A \cdot \hat{n}_A = -1$, siendo, como consecuencia de la medición de Alice $\mathbf{J}_A = -\hat{n}_A$, resultará por la anticorrelación entre las dos partículas, $\mathbf{J}_B = \hat{n}_A$. Bob entonces debería obtener, midiendo siguiendo el eje \hat{n}_B , $\mathbf{J}_B \cdot \hat{n}_B = \hat{n}_A \cdot \hat{n}_B$.

Ya que \hat{n}_B está girado un ángulo θ respecto a \hat{n}_A , siendo el producto escalar entre dos vectores dado por el producto de los módulos (en este caso los módulos son ambos uno) por el coseno del ángulo entre ellos incluidos, obtenemos $\mathbf{J}_B \cdot \hat{n}_B = \cos\theta$, de donde, $(\mathbf{J}_A \cdot \hat{n}_A)(\mathbf{J}_B \cdot \hat{n}_B) = -\hat{n}_A \hat{n}_B = -\cos\theta$.

Sin embargo tenemos que recordar que una de las hipótesis de inicio, fundamento de la formulación de la desigualdad CHSH, era la imposibilidad de obtener por mediciones de a, a', b, b' valores diferentes de ± 1 , por lo tanto Bob no podrá obtener el valor previsto, a parte que en los casos particulares $\theta = 0$ o $\theta = \pi$. La situación es muy similar a la debatida anteriormente, donde la elección de un eje de medición girado respecto al primero llevaba a un contraste previsto por la propiedad de rotación de los vectores. También en este caso (más complicado en cuanto están involucradas dos partículas), los dos principios (i) y (ii) están claramente en conflicto:

i) Si se mide una componente suya siguiendo un eje arbitrario se obtiene uno entre dos únicos posibles resultados (en este caso estamos considerando los posibles resultados iguales a ± 1);

ii) el momento angular (y también el espín) es un vector y como tal está sujeto a transformaciones continuas de rotación;

El conflicto puede ser fácilmente resuelto, exactamente, siguiendo el camino descrito cuando se habla de espín, sin la necesidad de añadir nuevos ingredientes; es decir substituyendo el principio ii) imposible de satisfacer con el principio ii').

ii') el espín es un vector y cuando está sujeto a transformaciones continuas de rotación, obedece en media a las propiedades de transformación de los vectores (no pudiendo obedecer de forma determinística a causa del principio (ii)).

Volvemos a escribir entonces la ecuación precedente utilizando el concepto de media estadística: $\langle (\mathbf{J}_A \cdot \hat{n}_A)(\mathbf{J}_B \cdot \hat{n}_B) \rangle = -\hat{n}_A \hat{n}_B = -\cos\theta$.

Esta ecuación nos dice que Bob, volviendo a repetir tantas veces el experimento, obtendrá a veces +1, a veces -1 de manera que satisfaga en media la ecuación. Este resultado corresponde exactamente a cuanto previsto por la mecánica cuántica.

Aplicando el resultado de la precedente ecuación a la desigualdad de CHSH, substituyendo a \hat{n}_A \hat{a} o \hat{a}' y a \hat{n}_B , \hat{b} o \hat{b}' , obtenemos: $\langle \hat{a} \cdot \hat{b} \rangle = \langle (\mathbf{J}_A \cdot \hat{a})(\mathbf{J}_B \cdot \hat{b}) \rangle = -\hat{a}\hat{b}$.

En el caso que, $\hat{a}, \hat{a}', \hat{b}$ e \hat{b}' , se encuentren en el mismo plano girados 45° se obtiene: $\langle \hat{a} \cdot \hat{b} \rangle = -\hat{a}\hat{b} = -\cos\theta$ y considerando que los ejes \hat{a} , y \hat{b} forman un ángulo de 45° , obtenemos $\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y, utilizando los prerrequisitos de goniometría:

$$\hat{a} \cdot \hat{b}' = \cos(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Análogamente, considerando como verso positivo el verso anti horario, obtenemos también: $\hat{a}' \cdot \hat{b} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\hat{a}' \cdot \hat{b}' = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sustituyendo los resultados encontrados en la desigualdad CHSH, tendremos:

$$| \langle C \rangle | = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \left| \frac{-4\sqrt{2}}{2} \right| = 2\sqrt{2} > 2$$

Donde se manifiesta un claro incumplimiento de la desigualdad de CHSH.

Esto demuestra que el resultado obtenido, como consecuencia directa de los principios i) y ii'), es decir medidas con resultados binarios y propiedades de simetría de rotación válidas al menos en media, llevan a una violación de la desigualdad de Bell-CHSH.

Se puede afirmar que el realismo local, la propiedad de transformación de vectores en la física clásica (al menos en media) y los resultados dicotómicos no pueden manifestarse contemporáneamente. Ya que los experimentos demuestran la violación de la CHSH, podemos concluir que la naturaleza en presencia de sistemas con valores de

medición binarios (o más en general discretos) renuncia a la noción, para nosotros intuitiva, de realismo local y mantiene (al menos en media) las propiedades fundamentales de rotación. El resultado obtenido, invocando los dos principios i) y ii'), coincide con las previsiones de la mecánica cuántica.

Es importante notar como para demostrarlo no ha hecho falta utilizar el formalismo matemático abstracto de la mecánica cuántica, sino solamente principios elementales y simples nociones de goniometría, conocidas por lo estudiantes a los cuales se dirige este trabajo.

Sólo asumiendo resultados de medición de tipo binario y asumiendo que las propiedades de transformación de los vectores sean válidas al menos en media, hemos obtenido el incumplimiento de la desigualdad de CHSH prevista por la teoría cuántica. De acuerdo con este análisis, la violación de la desigualdad de Bell (generalmente considerada como el más sorprendente alejamiento de la mecánica cuántica respecto a la física clásica) es la única posibilidad, para un sistema físico con momento angular nulo y con resultados duales, de seguir las propiedades de transformación de los vectores.

Personalmente considero que este resultado tiene un gran valor didáctico, ya que esclarece los orígenes del entanglement a través de una álgebra elemental.

Las pruebas experimentales de la desigualdad de CHSH confirman que la naturaleza no sigue el realismo local, sino que escoge seguir la simetría de rotación, por cuanto consentido (en media) por la presencia de resultados discretos. Además, el análisis aquí presentado, junto con la confirmación experimental, demuestra que los principios de simetría juegan un rol fundamental en física.

OBJETIVOS

Habiendo concretizado esta nueva propuesta didáctica, he tenido la exigencia de comprobar si pudiese ser realmente entendida fácilmente por los estudiante de bachillerado científico, analizando su validez.

Los objetivos de la investigación fueron los siguientes:

1. Conocer y analizar las variables categoriales útiles para la investigación;
2. Analizar las estrategias didácticas más útiles y concretas para proporcionar contenidos de mecánica cuántica en los institutos de educación secundaria;

3. Elaborar nuevas metodologías de docencia para el aprendizaje matemático de la MC;
4. Experimentar la validez de la nueva estrategia para la comprensión de algunos conceptos fundamentales de la MC;
5. Poner en correlación las dos ciudades diana, como consecuencia de los resultados obtenidos por los pre-test y re-test;
6. Poner en correlación las variables numéricas más significativas (notas conseguidas en matemáticas y física, resultados del pre-test y del re-test, etc.);
7. Proporcionar materiales y estrategias concretas, a profesores y alumnos, para el estudio de esta parte de la física.

HIPÓTESIS DE ESTUDIO

H-1.- El nuevo abordaje derivado del análisis y de la elaboración de los datos de la investigación, así ideado, servirá para mejorar la comprensión, también formal, de esta parte fundamental de la física moderna.

H.2.- El nuevo abordaje producirá efectos positivos sobre el deseo de profundizar en tales estudios y, sucesivamente, inscribirse en cursos universitarios científicos.

H.3.- La utilización de la presentación en Power-Point pueda suscitar interés y mejorar las competencias previstas.

METODOLOGÍA

LA MUESTRA

La experimentación ha sido llevada a cabo en dos ciudades de Sicilia: Messina y Caltanissetta. Este estudio vio la participación de un total de 125 estudiantes de ambos sexos, 88 del quinto año del Liceo Scientifico “G. Seguenza” de Messina y 37 del quinto año del Liceo Scientifico “S. Mottura” de Caltanissetta. La muestra de los institutos de las dos ciudades tomadas para el estudio ha sido tomada aleatoriamente, y sucesivamente a través de un proceso estratificado para las clases sometidas a

experimentación. La edad de los estudiantes variaba entre los 17 y los 20 años, con una edad media de 18,36 años.

La colaboración de dirigentes, docentes, alumnos y personal técnico ha sido muy valiosa, y permitió efectuar fácilmente las pruebas y la formación que se había preparado. Gracias a su disponibilidad y su atención hacia el proyecto a implementar, ha sido posible realizar todas las fases de forma positiva, en su totalidad respecto de la privacidad.

LAS HERRAMIENTAS UTILIZADAS

La validez del nuevo abordaje didáctico ha sido investigada, como he mencionado antes, a través del uso de test diseñados personalmente (véase Apéndice).

Estas herramientas de investigación utilizadas son ambas de respuestas múltiples y no validadas, ya que son diseñadas ad hoc para evaluar la eficacia de las nuevas fórmulas introducidas. El pre-test, así como el re-test, incluyen una parte relativa a los datos personales y otra estructurada de la siguiente forma:

- Cuestionario de conocimientos de base, compuesto por 15 preguntas de respuesta múltiple sobre argumentos inherentes al desarrollo de la tesis, es decir sobre los vectores, probabilidad, estadística y goniometría, escogidos para evaluar los conocimientos previos de los sujetos.
- Cuestionario para la evaluación de la comprensión, por parte de los sujetos, del contenido presentado durante la fase de formación, estructurado en 7 elementos de respuesta múltiple sobre el tema tratado y 3 elementos, siempre de respuesta múltiple, sobre el nivel de satisfacción de la propuesta.

La investigación ha sido realizada en el taller de informática del Liceo Scientifico “Seguenza” y en auditorium del Liceo Scientifico “Mottura”, durante las horas de clases curriculares.

PROCEDIMIENTO

Las fases de investigación han sido tres:

1. Fase de pre-test, durante la cual los sujetos tuvieron 30 minutos;

2. Fase de formación, con sesión de alrededor de una hora, soportada por el uso de diapositivas de Power-Point;
3. Fase post-test, durante la cual los sujetos tuvieron 20 minutos.

Durante la fase de pre-test ha sido proporcionado el cuestionario (pre-test sobre los conocimientos de base, véase Apéndice) sobre el conocimiento previo del tema principal, para comprobar el nivel general de todos los estudiantes. El cuestionario ha sido dado a 125 estudiantes. El cuestionario era anónimo, se pedía sólo un número de identificación. Los participantes, durante el test, tenían que introducir un número en orden alfabético, la edad y la clase. La duración del cuestionario fue alrededor de 30 minutos.

Durante la segunda fase, la fase de formación, en lo que concierne al Liceo Scientifico “Seguena” de Messina, el proceso ha sido presentado individualmente. En cada clase han sido presentadas algunas diapositivas, que contenían texto e imágenes, acompañadas por mi presentación. La presentación del tema de la tesis duró alrededor de una hora. Después he respondido a las preguntas de los estudiantes relacionados con las diapositivas.

Después de la fase de aprendizaje, los sujetos de la investigación han sido puestos a prueba nuevamente, confrontando las respuestas con aquellas del pre-test, para comprobar si el tema tratado había sido de fácil entendimiento, cualquiera que fuesen los niveles iniciales y las notas obtenidas en matemáticas y física, y para analizar también, en relación a las preguntas del pre-test y del re-test, las mejoras de las dos escuelas. El re-test estaba compuesto por 10 ítems de respuesta múltiple, con una duración de 30 minutos (sin tener acceso a los materiales de formación en formato Power-Point de la fase precedente).

Tratamiento estadístico de los datos

El tratamiento estadístico de los datos ha sido realizado con el programa SPSS (Statistical Package for the Social Science) versión 20.0.0.

Se han realizado cálculos estadísticos descriptivos y tablas de frecuencia por: sexo, escuela, ciudad, edad, preguntas pre-test y re-test, por ambas escuelas.

Se han analizado tablas de contingencia y Chi-cuadrado, con el objetivo de verificar la relación entre algunas variables. Se compararon además las respuestas correctas del

pre-test con aquellas del post-test y con las notas en matemáticas y físicas obtenidas por los estudiantes involucrados en el proyecto.

Para comparar los dos grupos, se han utilizado el test de Wilcoxon y el test de Mann-Withney, relativamente a las respuestas dadas en los dos test y a las notas en matemáticas y física de los discentes.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos en la experimentación de la eficacia del nuevo instrumento didáctico, han mostrado y llevado a conclusiones sorprendentes y positivas.

Tras lo obtenido en el proceso de investigación, en lo que concierne a la hipótesis descrita en la parte metodológica, y después de un examen pormenorizado de la literatura y de los resultados obtenidos con los pre-test y post-test, se puede considerar que hay pruebas suficientes para afirmar que este instrumento metodológico ha sido útil para facilitar la comprensión de esta parte de la física, que ha sido siempre considerada difícil.

COMPARACIÓN antes-después (muestra total)

Tavola 1 Test de Wilcoxon

| | |
|---------------------|---------------------|
| | RAP_RE |
| | RAP_PRE |
| Z | -1.572 ^a |
| Sig. Asint. 2-colas | 0.116 |

COMPARACIÓN antes-después (Messina)

Tavola 2 Test de Wilcoxon

| | |
|--|---------|
| | RAP_RE |
| | RAP_PRE |

| | |
|---------------------|---------------------|
| Z | -3.205 ^a |
| Sig. Asint. 2-colas | 0.001 |

COMPARACIÓN antes-después (Caltanissetta)

Tavola3.

Tavola 3 Test de Wilcoxon

| | RAP_RE RAP_PRE |
|---------------------|---------------------|
| Z | -1.675 ^a |
| Sig. Asint. 2-colas | 0.094 |

Como resulta evidente en las tablas, este estudio ha mostrado que evaluando la comparación entre el pre-test y el re-test con el test de Wilcoxon, (ya que las variables pre-test y re-test son numéricas), se obtiene una relación muy significativa para el Liceo Scientifico de Messina. Es decir, a pesar de que las notas en matemáticas y físicas no fuesen muy altas y el resultado del pre-test insuficiente, los discentes han realizado positivamente el re-test, demostrando la facilidad y validez del nuevo abordaje didáctico. Esta conclusión no se puede aplicar para los estudiantes de Caltanissetta, donde la muestra era inferior, y los alumnos tenían notas más altas en matemáticas y físicas, y los resultados del pre-test habían sido mejores. El resultado, de todas maneras muy positivo, del re-test resulta menos que de forma positiva.

Este trabajo podría resultar útil a los profesores para acercar los estudiantes a la MC y como soporte a los discentes para profundizar la parte formal.

LÍMITES DEL ESTUDIO

Ya que la propuesta de investigación presentada en esta tesis doctoral ha sido pensada para permitir una exposición lo más real y formal de los conceptos fundamentales de la MC, el estudio propuesto tiene un límite en la experimentación, debido a la escasez de la muestra.

PROPUESTAS PARA NUEVAS INVESTIGACIONES

Efectivamente, sería estimulante realizar ulteriores comparaciones, considerando nuevos elementos claves, como por ejemplo otras áreas geográficas y otras estructuras del territorio. Así como implementar la experimentación examinando otras variables categoriales (ingresos de las familias, nivel de educación de los padres, intereses de los estudiantes, etc.), y comprobando la eficacia del programa de intervención propuesto, para confirmar su peculiar validez.

Otra propuesta de estudio podría ser aquella consistente en monitorear los sujetos de la experimentación, para comprobar si el porcentaje de aquellos que continúan los estudios científicos en la universidad, después de haber participado en el proceso didáctico propuesto, aumenta.

Basándose en el nuevo proceso de aprendizaje de la MC, presentado en esta tesis, se podrían introducir otros argumentos de esta parte de la física, con el mismo tipo de instrumento metodológico.

INTRODUZIONE

La meccanica quantistica (MQ), rappresenta una delle maggiori rivoluzioni scientifiche e culturali nella storia umana. Gran parte della moderna tecnologia e della nostra comprensione della realtà fisica si basano su di essa. Una enorme fetta della fisica del XX secolo è il risultato di nuove esplorazioni ed applicazioni derivate dalla MQ. Questa parte della fisica moderna ha permesso la comprensione della fisica atomica, della fisica nucleare, della fisica delle particelle, della fisica della materia condensata ed ha consentito la realizzazione dei laser, dei computer, dell'optoelettronica. Oggi i principi della meccanica quantistica promettono nuove rivoluzionarie applicazioni come ad esempio i computer quantistici, i quali saranno in grado di elaborare l'informazione con un'efficienza esponenzialmente maggiore rispetto ai computer basati sui bit classici. (Savasta & Savasta, 2016) Si trattò comunque anche di una rivoluzione culturale, in quanto la MQ prevede un comportamento delle particelle che contraddice radicalmente il nostro modo di comprendere la realtà quotidiana ed i presupposti su cui è stata fondata tutta la fisica precedente. I padri fondatori stessi furono sconcertati da diversi aspetti di questa teoria, come ad esempio l'indeterminazione e l'entanglement. In particolare, secondo la fisica quantistica, le singole osservazioni sperimentali su un sistema fisico possono non essere riproducibili anche se il sistema viene preparato esattamente nello stesso modo. La realtà naturale, quindi, presenta un certo grado di imprevedibilità intrinseca, ovvero che non dipende da una imprecisione dell'apparato di misura e non è quindi eliminabile. Inoltre un sistema quantistico può trovarsi sospeso tra due o più stati differenti di realtà. E' interessante riportare a tal proposito alcune frasi celebri sulla MQ di alcuni premi Nobel per la fisica per aver contribuito allo sviluppo di questa teoria:

“Più la teoria dei quanti ha successo, più sembra una sciocchezza”

(Albert Einstein. Da una lettera a Heinrich Zangger 20 maggio 1912).

“Dio non gioca a dadi con il mondo” Albert Einstein

(Camejo, 2008)

“Chiunque non resti sbalordito dalla teoria quantistica, sicuramente non l’ha capita.” Niels Bohr

“Penso di poter affermare che nessuno capisce la meccanica quantistica” Richard Phillips Feynman.

(Feynman, 2004)

Negli ultimi anni si è anche compreso che questi comportamenti bizzarri non sono necessariamente confinati ai sistemi microscopici o alle particelle elementari, ma è possibile realizzare sistemi anche visibili ad occhio nudo, come circuiti superconduttori o oscillatori meccanici che seguono le più bizzarre leggi quantistiche [(2010) Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator. Nature 464, 697-703.]. Oggi si sta facendo strada anche l'idea che gli aspetti peculiari di questa fisica possano essere alla base di processi della mente non ancora compresi come la percezione e la coscienza [Hameroff S. Penrose, R. (1996) Orchestrated reduction of quantum coherence in brain microtubules: A model for consciousness- Mathematics and computers in simulation, – Elsevier.].

Per tutto ciò si ritiene che una conoscenza, anche solo degli aspetti principali, della fisica quantistica debba far parte del bagaglio culturale di chi vuole realmente vivere nel suo tempo, indipendentemente dagli interessi lavorativi e culturali. Al contrario la MQ appare ai non addetti ai lavori come qualcosa di misterioso ed incomprensibile, che può essere capito solo acquisendo conoscenze matematiche avanzate. Questa percezione non è purtroppo infondata e nasce dal fatto che, come osservato da uno dei principali fisici quantistici sperimentali, Anton Zeilinger [Zeilinger, A. (1999) – A Foundational Principle for Quantum Mechanics. Foundations of Physics, Vol. 29, No.4.] e [Douwmeester, D. Zeilinger, A. (2000). The Physics of Quantum Information: Basic concept. Springer], questa teoria, a differenza ad esempio della teoria della relatività, si

basa su principi (postulati) e su un formalismo matematico (spazi di Hilbert, operatori Hermitiani) piuttosto astratti.

In questa tesi mi propongo di mostrare come sia possibile spiegare alcuni aspetti fondamentali della MQ senza utilizzare il consueto formalismo matematico complesso e astratto. Non si tratta di mera divulgazione, ma di una iniziazione che, utilizzando un apparato matematico semplice e concetti fisici elementari, consente di introdurre i concetti fondamentali di misura e di probabilità e di formulare anche predizioni quantitative sui sistemi quantistici più elementari: i sistemi a due stati, tra i quali possiamo annoverare lo spin. L'idea è quella di offrire uno strumento didattico efficace per introdurre la FQ agli studenti e più in generale a tutti coloro che vogliono confrontarsi con questa rivoluzione culturale senza essere in possesso di strumenti matematici avanzati. L'introduzione qui proposta ci consente anche di spiegare in maniera approfondita il concetto di entanglement quantistico, attualmente di grande interesse, sia per le possibili applicazioni tecnologiche, sia per il fascino che esercita anche a livello popolare. Secondo Erwin Schrödinger, uno dei padri della MQ, l'entanglement è il tratto essenziale delle MQ!

Ci si propone di spiegare, quindi, i nodi concettuali tipici della MQ, e di realizzare un percorso introduttivo che possa avvicinare i giovani, e più in generale chiunque sia interessato, alla fisica quantistica. Per far ciò ho introdotto un formalismo matematico accessibile e il più possibile semplice e divulgativo, purtuttavia in grado di fornire informazioni quantitative almeno su sistemi fisici elementari.

Per questo nuovo approccio, sotto la guida del mio tutor, mi sono ispirata ai lavori di Lucien Hardy [ref] che hanno mostrato come il formalismo della MQ possa anche essere derivato senza partire da assiomi astratti, ma basandosi su postulati ragionevoli e con un significato chiaro. In particolare abbiamo ricavato alcuni concetti fondamentali della MQ basandoci sui concetti elementari di bit (l'unità di informazione) e di vettori, quelli, per intenderci, che ci consentono di descrivere in fisica le forze, la velocità, l'accelerazione.

Per far ciò, ho introdotto una breve trattazione di quei concetti elementari di goniometria, probabilità e statistica e fisica vettoriale a cui ripensare in vista dell'introduzione dei concetti quantistici.

L'introduzione alla MQ qui proposta, parte dal concetto di spin. Questo grado di libertà delle particelle rappresenta il sistema quantistico più semplice in quanto descritto da soli due stati, ovvero il numero minimo di stati permessi.

Questo lavoro dottorale si compone di una prima parte, consistente in un esame teorico dell'argomento trattato, composta da tre capitoli; e di una seconda parte rivolta alla presentazione del lavoro di ricerca. Nel primo capitolo, è stato introdotto il concetto di MQ, e si è trattato l'argomento dal punto di vista meramente scientifico, dalle sue origini ad oggi, introducendo una proposta di lavoro estremamente interessante e che ha ricevuto notevoli attenzioni, quella formulata nel 2001 da Lucien Hardy al fine di introdurre il nuovo approccio didattico presentato nella seconda parte.

Nel secondo capitolo, sono stati affrontati i temi relativi alle difficoltà di dell'impostazione didattica della MQ, quelle concettuali, ma soprattutto quelle in merito al formalismo. Queste hanno costretto i docenti a rinunciare alla completezza di trattazione per soffermarsi solo su alcuni concetti basilari.

Sono state esaminate inoltre le varie proposte progettuali svolte per tentare di ovviare a tali difficoltà.

Nel terzo capitolo, sono stati introdotti, in maniera sintetica ma completa, i prerequisiti di fisica vettoriale, goniometria e probabilità e statistica, di supporto allo sviluppo della trattazione riguardante il nuovo approccio presentato.

Il quarto ed il quinto capitolo, invece, sono dedicati al progetto di ricerca, viene illustrato il lavoro di ricerca, consistente nella formulazione di una nuova modalità di introduzioni di alcuni concetti fondamentali della MQ, proponendo anche una trattazione formale semplificata, adatta sia agli studenti di Liceo scientifico che a tutti coloro che desiderano avvicinarsi a tale disciplina. Nel sesto capitolo sono stati inseriti gli obiettivi, le ipotesi, la metodologia, gli strumenti, la procedura, l'analisi dei dati, i risultati, le conclusioni, i limiti riscontrati nel nostro studio e le proposte di nuove investigazioni.

PARTE PRIMA

MARCO TEORICO

CAPITOLO 1

“...NESSUNO HA MAI CAPITO LA MECCANICA QUANTISTICA”

La meccanica quantistica nasce intorno al 1900 quando, il fisico tedesco Max Planck (Planck, 1900) risolve definitivamente il problema del corpo nero, cioè un oggetto capace di assorbire completamente onde elettromagnetiche di qualunque lunghezza d'onda, affermando la natura discreta dell'energia. La radiazione elettromagnetica viene emessa o assorbita dagli atomi solo in quantità discrete, chiamate appunto quanti di energia. La meccanica quantistica scalzò rapidamente le leggi classiche della meccanica nel mondo microscopico, introducendo un atteggiamento opposto a quello classico, secondo il quale la fisica sarebbe stata in grado di predire con esattezza l'evoluzione dell'Universo una volta determinate esattamente il valore di tutte le velocità e le posizioni di tutte le particelle contenute in esso. La meccanica quantistica sostituisce questo determinismo delle previsioni con previsioni regolate dal concetto di probabilità.

Nel 1927 il fisico tedesco Werner Karl Heisenberg, premio nobel per la fisica nel 1932, a soli 26 anni formulò il noto Principio di Indeterminazione, secondo il quale è impossibile conoscere con precisione la posizione e, nello stesso tempo, la quantità di

moto di una particella. Tanto più precisamente si misura una grandezza, tanto maggiore sarà l'incertezza nella misura dell'altra.

Come conseguenza, è sempre possibile formulare leggi statistiche generali, in grado di predire i fenomeni, ma le grandezze fisiche relative alle singole particelle presentano un'incertezza ineliminabile. Secondo Heisenberg la meccanica quantistica stabilisce il crollo definitivo della legge di causalità, infatti, è impossibile evincere ciò che accadrà in futuro dalla conoscenza del presente, per il semplice fatto che è impossibile:

“...conoscere il presente in ogni elemento determinante”

(Greco, 2008)

Dopo quasi un secolo dalla formulazione definitiva della teoria della meccanica quantistica, oggi, in quasi tutti i curricula scolastici sono previsti elementi di fisica moderna. Il percorso didattico comprenderà le conoscenze sviluppate nel XX secolo relative al microcosmo e al macrocosmo, accostando le problematiche che storicamente hanno portato ai nuovi concetti di spazio e tempo, massa ed energia. L'insegnante dovrà prestare attenzione a utilizzare un formalismo matematico accessibile agli studenti, ponendo sempre in evidenza i concetti fondanti. La MQ costituisce una delle principali rivoluzioni scientifiche e culturali del XX secolo, perché ha reso possibile l'esplorazione di nuovi fenomeni, la creazione di nuovi campi del sapere, la realizzazione di nuove tecnologie i cui prodotti pervadono oramai la vita quotidiana (le applicazioni delle tecnologie dei semiconduttori e del laser in primis). Il ruolo che la MQ riveste nella attuale descrizione del mondo microscopico, enfatizza, quindi, l'importanza nella formazione culturale del cittadino medio e non solo del fisico poiché costruisce conoscenza sul mondo, interpreta i fenomeni, indirizza alla costruzione di modelli.

Tuttavia, nonostante il successo scientifico, e nonostante sia trascorso ormai un secolo dalla sua nascita, la MQ appare tutt'oggi, e non solo ai non addetti ai lavori, come qualcosa di misterioso ed incomprensibile, quasi magico. Gli effetti quantistici sono spesso contro-intuitivi e si ha l'impressione che, acquisendo conoscenze matematiche avanzate, sia possibile applicarla e fare predizioni, ma che tuttavia una comprensione profonda sfugga. Inoltre molti fisici, tra cui alcuni degli stessi padri

fondatori della MQ, come Erwin Shroedinger e Albert Einstein, hanno avuto ed hanno difficoltà ad accettare l'indeterminazione di tipo fondamentale della MQ. Secondo Einstein, ad esempio, la MQ non è una teoria completa [(Einstein, Podolsky, & Rosen, 1935)].

Questa percezione nasce soprattutto dal fatto che, come osservato da uno dei maggiori fisici quantistici sperimentali, Anton Zeilinger [A Foundational Principle for Quantum Mechanics, (Zeilinger, A foundational principle for Quantum Mechanics, 1999)], questa teoria, a differenza ad esempio della teoria della relatività, si basa su principi (postulati) e su un formalismo matematico (spazi di Hilbert, operatori Hermitiani) piuttosto astratti.

In particolare Zeilinger ha osservato che la fisica del XX secolo è stata caratterizzata dalle scoperte delle teorie della relatività ristretta e generale e della meccanica quantistica. Di queste teorie fondamentali, le prime due si basano su principi fisici fondamentali solidi, mentre la MQ, ad oggi, manca di questo o questi principi. Per principi fondamentali solidi, l'autore non intende la formalizzazione assiomatica dei principi matematici della meccanica quantistica, ma un principio concettuale con un significato fisico concreto. Nel caso della teoria della relatività speciale tale principio è il principio di relatività, il quale afferma che le leggi della fisica devono essere le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dal loro stato relativo di moto. Nel caso della teoria della relatività generale abbiamo il Principio di Equivalenza: in un campo gravitazionale arbitrario, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento (accelerato), nell'intorno di ogni punto, dove gli effetti dell'accelerazione dovuti al campo gravitazionale sono nulli. Entrambi i principi sono molto semplici ed intuitivamente chiari. Le due teorie della relatività vengono costruite su di essi e danno origine a risultati contro-intuitivi e sorprendenti, come ad esempio, la perdita di significato del concetto di tempo assoluto, o la curvatura dello spazio-tempo. Nonostante i risultati rivoluzionari cui giungono le teorie della relatività, attualmente non vi è un dibattito significativo sui fondamenti o sull'interpretazione delle teorie relativistiche. Secondo Zeilinger ciò è dovuto all'esistenza di questi principi fondamentali e alla loro accettazione generale. Al contrario, osserva Zeilinger, in fisica quantistica osserviamo a vaste discussioni sull'interpretazione della teoria. Coesistono diverse interpretazioni basate su concetti mutuamente contraddittori [A. Zeilinger, in

Vastakohtien todellisuus (Festschrift for K. V. Laurikainen), U. Ketvel et al., eds. (Zeilinger, 'On the interpretation and philosophical foundation of quantum mechanics, 1996). Una copia può essere trovata sul sito <http://vcq.quantum.at/>. Secondo Zeilinger, la coesistenza di un grande numero di interpretazioni differenti, suggerisce un messaggio ben preciso:

“Nonostante il successo della meccanica quantistica, un principio fondamentale accettato da tutti i fisici non è stato ancora identificato”.

Una sensazione analoga, con toni critici anche maggiori, è stata formulata nei suoi scritti [Against 'measurements' in Speakable and unspeakable in quantum mechanics, (Bell, 2004)] da John Bell, il fisico conosciuto per l'omonima famosa disuguaglianza. Egli fu un forte critico della formulazione standard della meccanica quantistica. Secondo Bell l'attuale formulazione della meccanica quantistica manca di precisione fisica. Egli scrisse in [Against 'measurements' (Bell, 2004)]: “ORDINARY QUANTUM MECHANICS (as far as I know) IS JUST FINE FOR ALL PRACTICAL PURPOSES.” In particolare per Bell è il concetto della misura a non essere fisicamente ben definito.

Lo sviluppo recente delle applicazioni della meccanica quantistica nel campo della scienza dell'informazione, con la corsa verso il traguardo dei computer quantistici e più in generale delle tecnologie quantistiche, suggerisce fortemente l'idea che la meccanica quantistica sia essenzialmente una teoria dell'informazione o che comunque sia una teoria estremamente legata al concetto di informazione [Quantum information theory and the foundations of quantum mechanics, (Timpson, 2013)]. Grazie a numerosi studi (si veda per esempio [Quantum effects in one-photon and two-photon interference, (Mandel, 1999)]) È ormai evidente per molti fisici che la funzione d'onda che descrive lo stato quantistico contiene informazioni sul sistema ed in particolare riflette, non ciò che noi conosciamo sul sistema, ma ciò che è conoscibile in principio attraverso possibili misure.

Anton Zeilinger considera fondamentale questo legame con l'informazione e propone di esplorare la connessione tra informazione e sistemi fisici elementari. Egli propone come principio fondamentale il seguente:

“Un sistema (fisico) elementare contiene un bit di informazione”.

(Zeilinger, A foundational principle for Quantum Mechanics, 1999)

Egli osserva come questo principio possa essere anche interpretato come la definizione di sistema fisico più elementare. Per un esempio concreto ci si può riferire allo spin di una particella che misurato lungo una direzione fornisce un'afra solo due possibili risposte: up (+) o down (-).

Questa ricerca di principi fisici fondamentali da cui derivare la meccanica quantistica è stata in questi anni portata avanti da diversi fisici, si veda ad esempio [Quantum information theory and the foundations of quantum mechanics, (Timpson, 2013)].

Una proposta estremamente interessante e che ha ricevuto notevoli attenzioni, è quella formulata nel 2001 da Lucien Hardy [Quantum theory from five reasonable axioms, (Hardy, Quantum theory from five reasonable axioms) L. Hardy, arXiv:quant-ph/0101012 (2001)], si veda anche [L. Hardy, Why Quantum Theory?, in Non-locality and Modality (Hardy, Why Quantum Theory?, 2002)]. Hardy, in accordo con Zeilinger, osserva che la formulazione standard della teoria quantistica è basata su assiomi matematici piuttosto oscuri (che utilizzano concetti come spazi di Hilbert complessi, operatori Hermitiani, e la formula della traccia per calcolare probabilità e valori medi) e propone una nuova formulazione basata su cinque “ragionevoli” assiomi. Senza scendere nei dettagli, quattro di questi cinque assiomi descrivono la classica teoria della probabilità, mentre il quinto assioma fa la differenza. Esso richiede che esista una trasformazione continua e reversibile tra gli stati del sistema. Si noti che le trasformazioni continue e reversibile giocano un ruolo fondamentale in tutta la fisica. Si pensi per esempio alle rotazioni o alle traslazioni, da cui hanno origine le leggi di conservazione del momento angolare e della quantità di moto rispettivamente. Questo lavoro getta una nuova luce sulle ragioni del perché la teoria dei quanti è così com'è. Per esempio spiega la necessità di utilizzare i numeri complessi e l'origine della formula della traccia.

Nel corso di questa tesi utilizzeremo a fini didattici anche i risultati presentati nel 2005 in un interessante articolo apparso sulla rivista scientifica *Europhysics Letters* a

firma di C. S. Unnikrishnan, (Unnikrishnan, 2005) fra l'altro coautore del lavoro apparso recentemente su *Physical Review Letter* sulla prima osservazione diretta di onde gravitazionali. In tale lavoro, in continuità con le idee di Hardy, si dimostra come l'entanglement tra due particelle di spin $\frac{1}{2}$ sia una necessità al fine di non violare la simmetria di rotazione. Tali concetti sono stati anche ripresi nel lavoro di S. Savasta [(Savasta, 2008) in *Magnetic Nanostructures in Modern Technology: Spintronics, Magnetic MEMS and Recording*, B. Azzerboni, G. Asti, L. Pareti, and M. Ghidini, pp. 307–324].

Se la formulazione standard della teoria quantistica appare piuttosto oscura ai fisici che da anni svolgono ricerche teoriche e sperimentali nel campo, possiamo immaginare quanto sia difficile introdurre questa fisica agli studenti delle scuole secondarie o ai non addetti ai lavori. L'obiettivo di questa tesi è quello di sviluppare e testare un approccio didattico, che prenda spunto dai recenti tentativi, sopra brevemente descritti, di riformulare la teoria dei quanti sulla base di principi fisici elementari. Tale approccio ha il vantaggio di non utilizzare il formalismo matematico degli spazi di Hilbert e degli operatori Hermitiani, e di ricavare in modo intuitivo e ragionevole i concetti fondamentali di indeterminazione ed entanglement. Mi auguro che questo approccio possa contribuire ad una maggiore diffusione e comprensione di questo patrimonio scientifico e culturale.

CAPITOLO 2

L'INSEGNAMENTO DELLA MECCANICA QUANTISTICA

Il problema di come impostare la didattica della MQ è ancora aperto, sia per le difficoltà concettuali insite in essa, che per la complessità del formalismo necessario per affrontarla. Nel quadro di un'ampia offerta divulgativa sugli aspetti sorprendenti del modo di pensare quantistico, si sente la necessità di una trattazione adeguata alla didattica. La ricerca di tale metodo deve permettere di riconoscere l'unitarietà del quadro concettuale: le idee teoriche di fondo, con il formalismo, che dà loro un ruolo preciso.

Dalla letteratura in merito alle scelte di approccio e strategie didattiche adottate nell'insegnamento della MQ, si evince un quadro notevolmente diversificato dei modi di procedere. Le difficoltà sia concettuali, ma soprattutto quelle in merito al formalismo, hanno fatto sì che si rinunciassero alla completezza di trattazione per soffermarsi solo su alcuni concetti.

Le impostazioni principali sono tre: quella storica, quella "formale-analogica" e quella concettuale.

Molti progetti sono stati realizzati nelle scuole per affrontare il problema dell'insegnamento della MQ agli alunni della quinta classe dei Licei Scientifici.

In questo paragrafo affronterò in dettaglio sia le varie problematiche che hanno riscontrato gli studenti ad approcciarsi alla MQ, sia le varie proposte progettuali svolte per tentare di ovviare a tali difficoltà.

Il compito da affrontare è complesso perché riguarda, come viene ben spiegato da Alberto Stefanel nel suo articolo “La meccanica quantistica nella scuola secondaria di secondo grado” aspetti di:

“contenuto disciplinare, legati all'analisi di nuovi contesti fenomenologici e soprattutto alla necessità di introdurre concetti estranei alla fisica classica; -metodologia, per esempio relativi a come legare fenomenologia e teoria e a come le nuove tecnologie possono aiutare in questo compito; -strutturazione complessiva dei curricoli, affinché la MQ non costituisca una appendice dei corsi di fisica delle scuole superiori, ma una loro parte integrante. Pur nella diversità di scelte di contenuti, strategie e impostazioni didattiche, la ricerca converge sull'importanza di affrontare gli aspetti fondanti della teoria come il principio di sovrapposizione, l'indeterminismo quantistico, l'entanglement, trascurando invece gli elementi di fisica dei quanti che hanno caratterizzato la gran parte dei testi scolastici”.

(www.treccani.it/scuola/tesine/meccanica_quantistica/3.html).

Tra gli aspetti più problematici per l'insegnamento e l'apprendimento della MQ nella scuola secondaria, secondo quanto sviluppato dal prof. A. Stefanel

“si discutono i tre nodi disciplinari comuni alle diverse impostazioni: 1 raccordo tra i fenomeni macroscopici esplorabili in laboratorio didattico e loro rilettura in termini di eventi microscopici; 2 concetto di stato quantistico e sua rappresentazione formale; 3 rapporto tra meccanica classica e MQ”.

(http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/idifo1/materiali/c1/I-C1_ImpostazioniMQv6.pdf).

Secondo lo studio della prof.ssa Giuseppina Rinaudo del Dipartimento di Fisica Sperimentale dell'Università di Torino, tra la fisica classica e la fisica quantistica vi sono sostanziali differenze, soprattutto nei concetti legati a:

“struttura della materia: “granularità intrinseca” della materia legata alla costante di Planck h , “dualismo onda-corpuscolo”; - energia: livelli energetici quantizzati, legati alle dimensioni del sistema; - determinismo e probabilità: le previsioni in MQ non possono essere rese precise a piacere, ma hanno una indeterminazione “non epistemica” e comunque non sono mai di tipo “SI” o “NO”, ma probabilistiche”

(www.iapht.unito.it/fsis/didfis/did9-06-mq.pdf).

Le problematicità degli studenti, sempre secondo la prof.ssa Rinaudo, sono dovute, anche, al difficile passaggio dal continuo al discreto, per:

“mancanza di riferimenti macroscopici che permettano di “visualizzare” i fenomeni; - complessità dei concetti: concetto di “azione”, essenziale per comprendere il significato della relazione di Planck, che è alla base della MQ; concetto di “onda” (energia portata dall’onda, fase, sovrapposizione lineare); concetti di “probabilità” e “determinismo” - complessità della formalizzazione”

(www.iapht.unito.it/fsis/didfis/did9-06-mq.pdf).

Anche secondo le analisi effettuate attraverso il progetto, svolto presso il Liceo Scientifico “A. Einstein” di Rimini in collaborazione con SSIS, Università di Bologna Dipartimento di fisica, una delle difficoltà rilevate dai discenti è la difficile comprensione del passaggio da una visione classica ad una quantistica.

“Tutti gli studenti interpellati concordano su due concetti. Uno riguarda il formalismo quantistico che secondo l’allievo Stefano è la chiave per “entrare in un nuovo meccanismo””.

L'altra difficoltà riscontrata attraverso il progetto di cui sopra, riguarda il concetto che l'entrare nel meccanismo della fisica quantistica implica un radicale cambiamento di prospettiva. L'allievo Simone R. infatti scrive:

“La parte del formalismo mi ha aiutato umanamente, perché è sempre confortante contare su equazioni, calcoli e leggi matematiche; tuttavia, nonostante questa sua coerenza interna, la parte matematica non ha contribuito a formare la mia idea di oggetto quantistico più di quanto non l'avesse fatto la parte della fisica: evidentemente perché il piano della teoria matematica è troppo astratto, dal mio punto di vista, per poter essere calato nelle realtà fisiche, per quanto possano essere intangibili. Beninteso: non si è trattato di una complicazione, perché il formalismo è stato facile da memorizzare e capire, ma, come dico, chiaro solo al suo interno”.

(<http://docplayer.it/28313526-L-insegnamento-della-meccanica-quantistica-tra-problemi-interpretativi-e-difficolta-degli-studenti.html>).

Un'altra difficoltà a cui vanno incontro gli alunni deriva dal formalismo, poiché, non è accessibile agli studenti liceali, come ho più volte ribadito, e come viene affermato nell'articolo della prof.ssa Rinaudo, una descrizione formalmente corretta del moto, cioè:

“l'equazione del moto dei corpi della meccanica classica, $F = ma$, e quella delle onde, $A = A_0 \cos(kx - \omega t)$ sono sostituite da un'unica equazione del moto, l'equazione di Schroedinger, che descrive l'evoluzione spaziale e temporale di una grandezza astratta e non misurabile direttamente, la “funzione d'onda”. Poiché l'equazione di Schroedinger è sicuramente al di sopra degli scopi e delle possibilità di una trattazione a livello di scuola secondaria; rimangono tuttavia relazioni semiclassiche che permettono di stimare ordini di grandezza, di apprezzare gli aspetti qualitativi dei fenomeni, come le relazioni di indeterminazione, $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ la relazione di De Broglie, $\lambda = h/p$, e la stessa relazione di Planck, $E = hf$ ”.

(www.iapht.unito.it/fsis/didfis/did9-06-mq.pdf).

Nei libri di testo adesso in uso, si introduce la fisica dei quanti partendo dalle “evidenze sperimentali” e introducendo le due relazioni fondamentali, quella di Planck, $E=hf$ (energia=quanto di Planck per frequenza) , quella di de Broglie, $p=h/l$ (quantità di moto=quanto di Planck fratto lunghezza d’onda) che legano grandezze tipiche di corpuscoli (energia, quantità di moto) con grandezze tipiche di onde (frequenza, lunghezza d’onda). Introducendo in modo

“euristico i “principi” di complementarità onda-corpuscolo, - corrispondenza tra fisica dei quanti e fisica classica, - indeterminazione, - sovrapposizione lineare; si accenna infine al formalismo della meccanica quantistica”.

(www.iapht.unito.it/fsis/didfis/did9-06-mq.pdf).

Questa impostazione è presente in quasi totalità dei libri di testo di scuola secondaria superiore.

Un altro modo nuovo e interessante di trattare didatticamente la MQ nella scuola secondaria, è il metodo della "somma sui molti cammini" che Feynman suggerisce nel suo libro “QED, la strana teoria della luce”. Tramite tale sistema si cerca di entrare nel mondo dei quanti sapendo che in esso, gli “oggetti ”si comportano“ in un modo che non assomiglia a nulla che possiamo aver visto prima, cioè, non sono né onde né particelle, ma hanno degli aspetti che ci ricordano le caratteristiche sia delle une che delle altre. Secondo questo approccio, per capire il comportamento delle particelle quantistiche, è necessario introdurre come si evince dall’articolo di A. Stefanel “Impostazioni e percorsi per l’insegnamento della meccanica quantistica nella scuola secondaria”, le seguenti regole:

“1. se una particella al tempo t_a si trova in x_a (evento A), per valutare la probabilità che a un tempo successivo t_b venga localizzata in x_b (evento B), si deve considerare la rotazione di una lancetta di un immaginario cronometro quantistico che si avvia quando la particella viene emessa in A e si arresta quando essa viene rivelata in B; 2.-la particella esplora tutti i possibili cammini tra i due eventi A e B e per ciascun cammino la lancetta si

fermerà in una direzione che lo caratterizza; 3- la probabilità cercata è data dal modulo quadro del vettore, che si ottiene come risultante di tutti i versori che individuano le direzioni che caratterizzano ciascun cammino. La semplicità con cui da queste regole si può valutare l'evoluzione temporale della funzione d'onda permette di ricostruire la fenomenologia classica o affrontare tipici fenomeni di propagazione come quelli della interferenza da lamina sottile e diffrazione”.

(http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/idifo1/materiali/c1/I-C1_ImpostazioniMQv6.pdf).

La professoressa Rinaudo, nel suo articolo già citato, ribadisce la necessità di costruire i concetti quantistici.

“non sull'osservazione e interpretazione dei fenomeni del “mondo esterno”, che è necessariamente “classico”, ma per la maggior parte sulla base di una forte revisione critica e sul ripensamento dei concetti della fisica classica, pur cercando di mantenere come punto di partenza i fenomeni reali e le evidenze sperimentali”.

(http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/materiali/pdf/proposte_didattiche.pdf).

Anche l'Università degli Studi di Udine in collaborazione con il M.I.U.R ed il PLS progetto lauree scientifiche:

“si propone di fare i primi passi verso una visione sintetica della fisica quantistica ed il formalismo che la sostiene. Si tratta pertanto di un'introduzione delle idee della fisica quantistica a partire dal riconoscimento del ruolo del principio di sovrapposizione per la comprensione dello stato quantico”.

(http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/materiali/pdf/proposte_didattiche.pdf).

L'approccio ondulatorio risulta essere, secondo la proposta fatta all'interno del progetto IDIFO "Proposte didattiche sulla fisica moderna", il mezzo più rigoroso per

affrontare l'affascinante mondo che fa intravedere la MQ; purtroppo tale metodologia presuppone la conoscenza di argomenti sia matematici che fisici di non facile comprensione e non trattati nelle scuole secondarie. Tale approccio richiede anche una visione concettuale differente rispetto al nuovo mondo che si prospetta.

“La fisica dei quanti è un fenomeno affascinante e motivante, che consente una ricostruzione razionale delle idee, che hanno portato alla quantizzazione delle principali grandezze descrittive dello stato dei sistemi microscopici. Per approcciarsi alla MQ, Si può pensare ad un’analisi storica dei problemi irrisolti e/o degli esperimenti classicamente non spiegabili”.

(http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/materiali/pdf/proposte_didattiche.pdf).

Ma, come abbiamo visto nei libri di testo scolastici, la parte descrittiva, dal punto di vista didattico è insufficiente a spiegare l’argomento dal punto di vista formale:

“e non può essere assunta come modalità di costruzione di una conoscenza di base in tale campo, se non viene completata dalle principali idee su cui la meccanica quantistica si fonda. La dimensione descrittiva appare insoddisfacente sul piano didattico”.

(http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/materiali/pdf/proposte_didattiche.pdf).

Proprio per questa ragione è necessario fornire ai discenti

“consapevolezza degli assunti di riferimento della nuova meccanica e offrire qualche indicazione sul formalismo in essa adottato, perché esso assume in meccanica quantistica un ruolo quasi concettuale”.

(http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/materiali/pdf/proposte_didattiche.pdf).

La scelta fatta dall’Università di Udine

“punta all’introduzione della teoria, mediante la trattazione di concetti cardine e di elementi peculiari della meccanica quantistica. Si tratta di un approccio alle idee teoriche, a quelle scelte formali che determinano il significato degli enti. Essa comporta: “sul piano disciplinare: di affrontare subito il concetto di stato quantico e il principio di sovrapposizione; sul piano didattico di far riferimento ad una fenomenologia che evidenzi in modo semplice proprietà descritte quantisticamente da uno stato”.

(http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/materiali/pdf/proposte_didattiche.pdf).

Tale proposta riguarda la

“fenomenologia della polarizzazione, come proprietà quantistica della luce, da analizzare mediante semplici esperimenti ideali di interazione dei singoli fotoni con polaroid e materiali birifrangenti (cristalli di calcite). In questo quadro, esaminando situazioni specifiche con il bagaglio culturale di uno studente di scuola secondaria, si possono discutere a fondo nuclei fondanti della meccanica quantistica, come il concetto di stato ed indeterminismo quantico, proprietà incompatibili, non località e processo di misura. Il comportamento dei fotoni polarizzati linearmente nell’interazione con polaroid permette il riconoscimento del principio di indeterminazione e dell’indeterminismo quantistico. L’interazione dei fotoni con cristalli birifrangenti fa riconoscere come lo stato di polarizzazione a 45° sia associato al vettore somma degli stati ortogonali componenti e non possa essere considerato una loro miscela statistica”.

(http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/materiali/pdf/proposte_didattiche.pdf).

Questo concetto permette di evidenziare anche

“l’impossibilità di attribuire un preciso cammino ai singoli fotoni, oppure, secondo teorie alternative, di dover ammettere un comportamento non classico dei fotoni nelle interazioni. Dagli esiti degli esperimenti ideali si introduce il concetto di proiettore, con il quale si costruiscono il concetto di operatore e quello di grandezza misurabile come soluzione agli

autovalori. Il problema della teoria quantistica della misura, della descrizione dei macrogetti e la non località vengono proposti nello stesso contesto, con esemplificazioni nella fenomenologia della diffrazione di particelle ed analogie nel mondo macroscopico”.

(http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/materiali/pdf/proposte_didattiche.pdf).

L'approccio viene fatto attraverso la legge di Malus che:

“permette il riconoscimento di uno stato associato ad una proprietà fisica e consente di evidenziare come l'interazione della luce con polaroid svolge il doppio ruolo di preparazione e misura rispetto ad uno stato di polarizzazione dei fotoni”.

(http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/materiali/pdf/proposte_didattiche.pdf).

Avendo iniziato questo capitolo esponendo la problematicità di trovare un approccio didattico, diverso da quelli già in uso, per favorire e migliorare la comprensione, anche dal punto di vista formale della MQ, nel prossimo capitolo ci si occuperà di introdurre un ripasso generale sui concetti basilari di matematica e fisica utilizzati per il nuovo approccio didattico presentato nei capitoli del marco empirico, e per la preparazione del pre test (vedi Appendice).

CAPITOLO 3

PREREQUISITI

3.1 Goniometria e trigonometria

La goniometria è quella branca della matematica che studia gli angoli, essa deriva da un teorema che dice che gli angoli al centro e gli archi corrispondenti sono in proporzionalità diretta. Due insiemi di enti si dicono in proporzionalità diretta se ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed un solo elemento del secondo insieme.

Ciò significa che tutte le proprietà che valgono sul primo insieme varranno anche sul secondo.

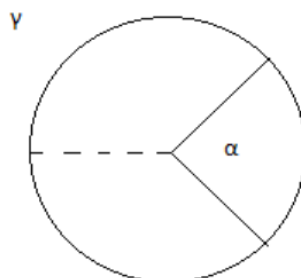


Figura 3.1: Esempio di angolo al centro.

La parola trigonometria, invece, deriva dal greco e significa "misura degli elementi di un triangolo", quindi essa è la parte che studia i triangoli a partire dai loro angoli.

"Trigonometria è l'arte di misurare triangoli, o di calcolare i lati di ogni triangolo cercato, e questa può essere piana o sferica."

(Johnson, 1755)

Il compito principale della trigonometria consiste nel calcolare le misure che caratterizzano gli elementi di un triangolo (lati, angoli, mediane, etc.) partendo da altre misure già note, per mezzo di speciali funzioni. Tale compito è indicato come risoluzione del triangolo.

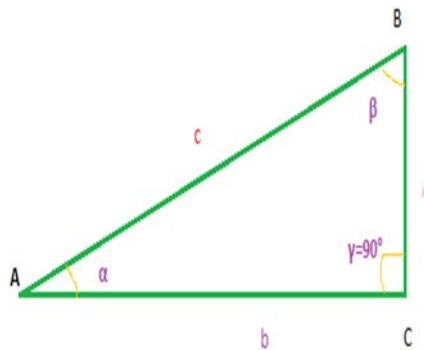


Figura 3.2: Disegno di un triangolo rettangolo.

È anche possibile servirsi di calcoli trigonometrici in molti rami della matematica e della fisica.

La nascita della trigonometria è dovuta all'esigenza di risolvere problemi di natura concreta, per esempio quello di determinare la posizione di un aereo in volo, oppure in topografia, per misurare l'estensione di una foresta etc.

Le funzioni trigonometriche (le più importanti delle quali sono il seno e il coseno), introdotte in questo ambito, vengono anche usate in maniera indipendente dalla geometria, comparando anche in altri campi della matematica e nello specifico di questa tesi, nella Meccanica Quantistica.

Poiché, come ho già detto il termine goniometria significa misura degli angoli, per studiarne le proprietà è necessario darne una definizione.

Definizione: In un sistema di assi cartesiani ortogonali l'angolo è ciascuna delle due parti in cui un piano viene diviso da due semirette giacenti in esso e aventi la stessa origine. L'origine O si chiama vertice e le due semirette si chiamano lati dell'angolo, la parte interna è detta ampiezza dell'angolo.



Figura 3.3: Illustrazione delle parti di un angolo.

Un angolo si dice concavo se contiene i prolungamenti dei suoi lati, convesso se non li contiene:

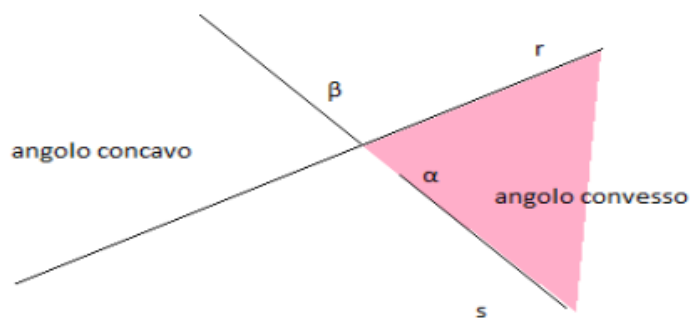


Figura 3.4: Angolo concavo e angolo convesso.

Per misurare un angolo occorre fissare un'unità di misura, cioè il grado. Esso è la 360^a parte di un angolo giro, cioè se si prende in considerazione un angolo giro, lo si divide in 360 parti congruenti, si chiama grado l'ampiezza di ciascuna di

queste parti. Il grado non ha multipli, ma solo sottomultipli, come il primo, $1/60$ di grado e il secondo, $1/3600$ di grado.

$$\text{misura di } \alpha = \frac{l}{r}$$

essendo la misura della circonferenza $2\pi r$ essa misurerà in gradi 360° e in radianti 2π .

In generale, per passare da un sistema di misura all'altro, si utilizza la seguente proporzione:

$$\pi : \alpha_{\text{rad}} = 180 : \alpha_{\text{grad}} \quad (3.1)$$

Dalla proporzione (3.1) si può affermare che:

- l'angolo giro, in radianti, misura 2π .
- l'angolo piatto π ,
- L'angolo retto, $\pi/2$ e così via.

Si riporta, nella seguente tabella la misura in radianti di alcuni angoli notevoli:

Tabella 3.1: misure in gradi e radiant di alcuni angoli.

| G RADI | RAD IANTI |
|-----------|--------------|
| 0° | 0 |
| 18° | $\pi/10$ |
| 30° | $\pi/6$ |
| 45° | $\pi/4$ |
| 60° | $\pi/3$ |
| 90° | $\pi/2$ |
| 120° | $2\pi/3$ |
| 135° | $3\pi/4$ |
| 150° | $5\pi/6$ |
| 180° | π |
| 270° | $3\pi/2$ |
| 360° | 2π |

La proporzione che permette il passaggio dalla misura in radianti a quella in gradi e viceversa è la seguente:

$$360^\circ : 2\pi = g : r$$

dove g è la misura in gradi ed r in radianti.

Facciamo alcuni esempi:

Es1: Quanto misura in radianti un angolo di 18° ?

Utilizzando la proporzione (2.1) e sostituendo gli opportuni valori, si ottiene:

$$\pi: \alpha_{rad} = 180^\circ: 18^\circ,$$

da cui:

$$\alpha_{rad} = \frac{\pi 18^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{10}$$

Quindi un angolo di 18° in radianti misura $\frac{\pi}{10}$

Es2: Quanto misura in gradi un angolo di $\frac{\pi}{18}$?

Utilizzando sempre la proporzione (2.1), e sostituendo, anche qui, gli opportuni valori, si ottiene:

$$\pi: \frac{\pi}{18} = 180^\circ: \alpha_{grad}$$

da cui:

$$\alpha_{grad} = \frac{\frac{\pi}{18} \cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{10\pi}{\pi} = 10^\circ.$$

Quindi un angolo che in radianti vale $\frac{\pi}{18}$, in gradi vale 10° .

1.1.1 Le funzioni goniometriche fondamentali

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , e sia $A(1,0)$ il punto in cui una particolare circonferenza Υ , avente centro nell'origine degli assi e raggio unitario, interseca il semiasse delle ascisse positive, e sia α un'ampiezza dell'angolo orientato così formatosi. Immaginiamo che il punto $A(1,0)$ compia una rotazione di ampiezza α attorno all'origine e sia P la posizione occupata da A dopo tale rotazione. P è un punto della circonferenza Υ la cui posizione dipende da α , cioè P è un punto associato all'angolo α , questo significa che ad ogni angolo orientato è associato un punto di Υ .

Tale circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 = 1$ e prende il nome di ***circonferenza goniometrica***.

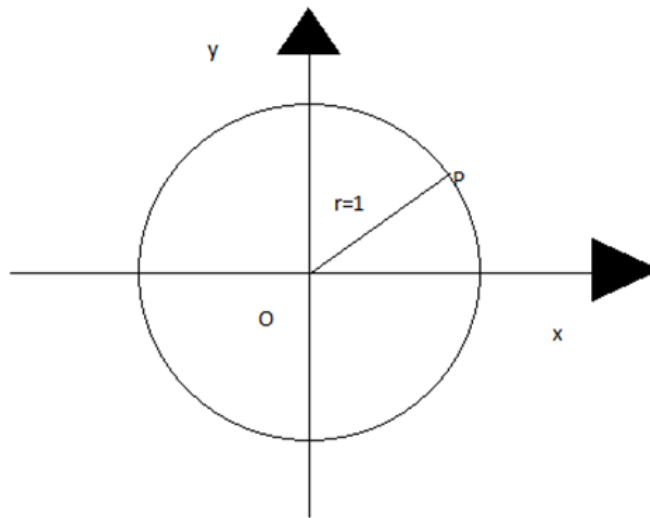


Figura 3.5: Circonferenza goniometrica: circonferenza avente centro nell'origine e raggio unitario.

Se α e β sono due angoli orientati associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica, tra le loro ampiezze espresse in gradi vale la relazione:

$$\beta = \alpha + K360^\circ \quad \text{con } K \in \mathbb{Z},$$

e, se le ampiezze sono espresse in radianti:

$$\beta = \alpha + 2K\pi \quad \text{con } K \in \mathbb{Z}.$$

Osservazione: I punti degli angoli che sono maggiori di 360° si ottengono facendo compiere più “giri” alla semiretta OP, mentre quelli che sono negativi si ottengono facendo compiere una rotazione oraria ad OP.

Questa corrispondenza, però, non è biunivoca in quanto ad ogni punto P della circonferenza goniometrica, corrispondono infiniti angoli.

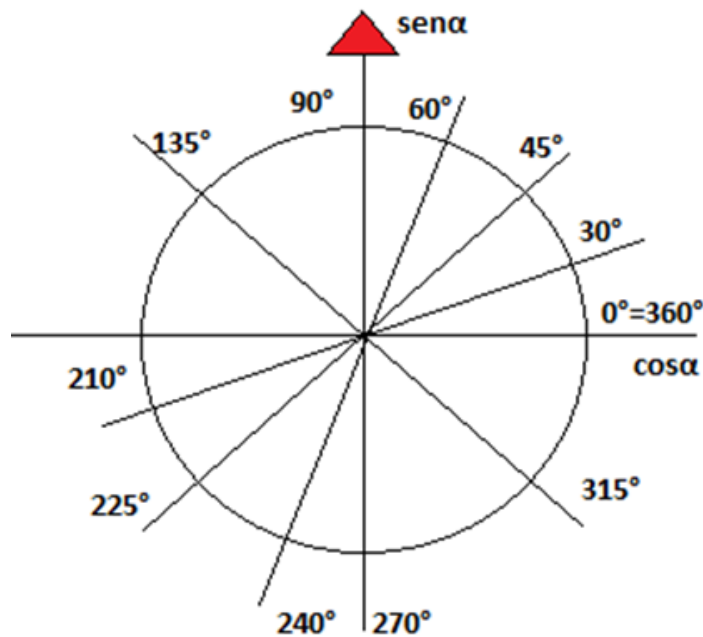


Figura 3.6: Gradi di un angolo α in una circonferenza goniometrica

Un angolo è completamente individuato, a meno di multipli dell'angolo giro, se sono date le coordinate del punto P sulla circonferenza goniometrica.

Introduciamo allora le seguenti definizioni:

Si definisce **seno dell'angolo** α , e lo si indica con il simbolo $sen\alpha$, l'ordinata del punto P , cioè il rapporto tra PH e OP , poiché $OP = 1$, si avrà:

$$sen\alpha = \frac{PH}{OP} = PH = y_P.$$

Si definisce **coseno dell'angolo** α , e si scrive $cos\alpha$, l'ascissa del punto P , cioè il rapporto tra OH e OP , quindi:

$$cos\alpha = \frac{OH}{OP} = OH = x_P.$$

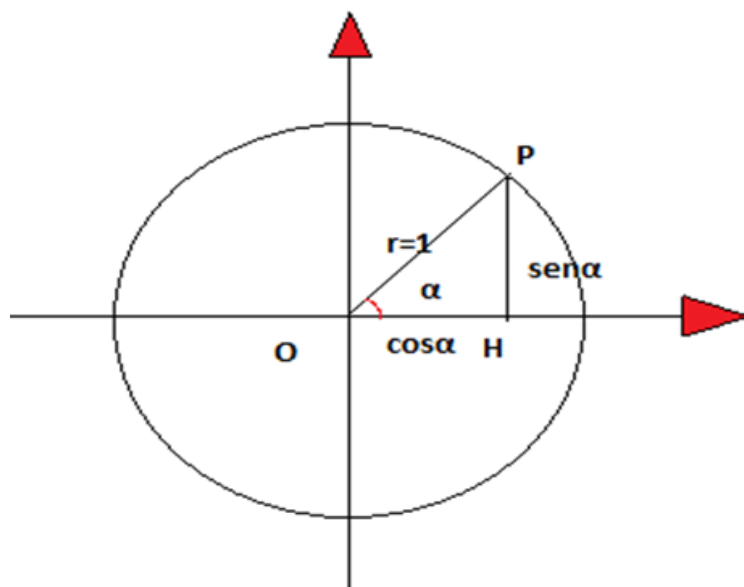


Figura 3.7: Definizione di seno e coseno di un angolo.

Si consideri poi, la retta t , tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A di intersezione della circonferenza stessa con il semiasse positivo delle ascisse.

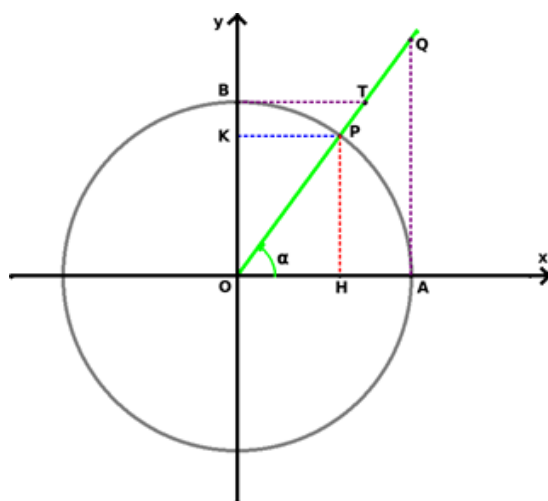


Figura 3.8: Grafico della definizione della tangente di un angolo α mediante la circonferenza goniometrica.

Se l'angolo α è del primo o del quarto quadrante la semiretta OP incontra t in un punto Q ; se è del secondo o del terzo quadrante, per determinare Q occorre prolungare la semiretta Q dalla parte di O fino ad incontrare la retta t . In ogni caso

ad ogni angolo α resta associato un solo punto Q sulla retta t e si può dare la seguente definizione.

Definizione: si definisce **tangente dell'angolo** α , e si scrive $\tan\alpha$, l'ordinata del punto Q , in simboli:

$$\tan\alpha = y_Q.$$

Si osserva che, per come sono stati definiti, il seno, il coseno e la tangente di un angolo, questi sono numeri reali positivi, nulli o negativi a seconda di dove si trova il punto A ; se, per esempio α , è un angolo ottuso e quindi A si trova nel secondo quadrante, allora $\sin\alpha$ è positivo, $\cos\alpha$ è negativo, $\tan\alpha$ è negativa.

Inoltre, poiché il punto A ed il punto Q hanno coordinate che variano al variare dell'angolo α , possiamo dire che $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$ sono funzioni di α ; esse si indicano in generale con il termine di **funzioni goniometriche**..

Osserviamo che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 360° , cioè:

$$\sin(\alpha + K360^\circ) = \sin\alpha \quad \text{con } K \in \mathbb{Z},$$

e

$$\cos(\alpha + K360^\circ) = \cos\alpha \quad \text{con } K \in \mathbb{Z}.$$

Per quanto riguarda la tangente osserviamo che, visto che per tutti gli angoli compresi fra 90° e 270° la semiretta OP deve essere prolungata fino ad incontrare la retta della tangente, angoli di ampiezza con $K \in \mathbb{Z}$.

$\alpha \pm \pi$, $\alpha \pm 2\pi$, $\alpha \pm 3\pi$, e in generale $\alpha \pm k\pi$ (con k intero) hanno la stessa tangente.

Si esprime questa condizione affermando che la funzione tangente è periodica di periodo π , cioè:

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha \quad \text{con } K \in \mathbb{Z}.$$

I valori delle tre funzioni goniometriche appena descritte, per alcuni angoli notevoli, sono quelli inseriti nella seguente tabella:

Tabella 3.2: Valori delle funzioni goniometriche seno coseno e tangent degli angoli notevoli.

| Gradi | Radiani | $\text{sen}\alpha$ | $\text{cos}\alpha$ | $\text{tan}\alpha$ |
|-------------|----------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0° | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 90° | $\pi/2$ | 1 | 0 | \nexists |
| 180° | π | 0 | -1 | 0 |
| 270° | $3\pi/2$ | -1 | 0 | \nexists |
| 360° | 2π | 0 | 1 | 0 |

1.1.2 I grafici delle funzioni goniometriche

Il seno, il coseno e la tangente di un angolo sono funzioni dell'angolo stesso; poiché in una funzione si è soliti rappresentare la variabile indipendente con x e la variabile dipendente con y , possiamo riscrivere le equazioni goniometriche nel seguente modo:

$$y = \text{sen}x$$

$$y = \text{cos}x$$

$$y = \text{tan}x.$$

Essendo funzioni, possiamo costruire il loro grafico.

Per quanto riguarda il grafico della funzione $y = \text{sen}x$, lo possiamo disegnare in quanto conosciamo i valori della tabella 3.2. La funzione passerà quindi per i punti:

$$O(0,0); \quad A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right); \quad B(\pi, 0); \quad C\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right) \text{ e } D(2\pi, 0),$$

ed è la seguente:

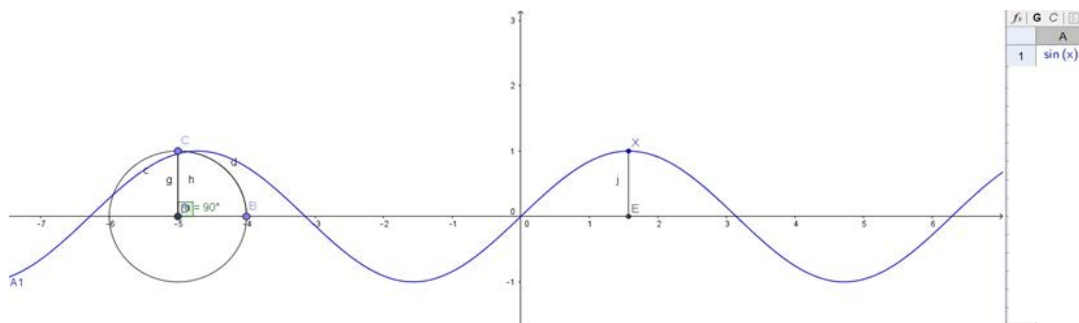


Figura 3.9 Grafico della funzione $y = \sin x$.

Per quanto riguarda il grafico della funzione $y = \cos x$, anche questo lo possiamo disegnare in quanto conosciamo i valori della tabella 3.2. La funzione passerà quindi per i punti

$$A(0, 1), \quad B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad C(\pi, -1), \quad D\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) \text{ e } E(2\pi, 1)$$

ed il suo grafico è il seguente:

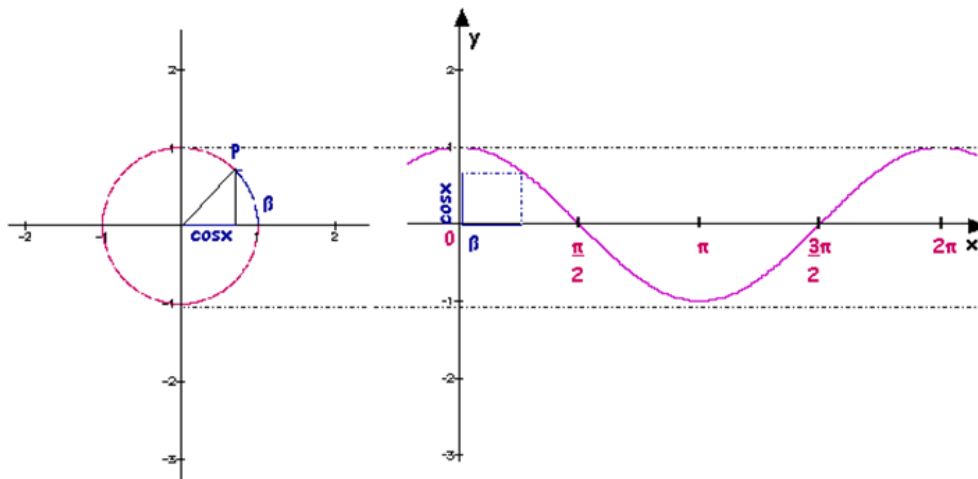


Figura 3.10: Grafico della funzione $y = \cos x$.

Il grafico della funzione $y = \tan x$ è:

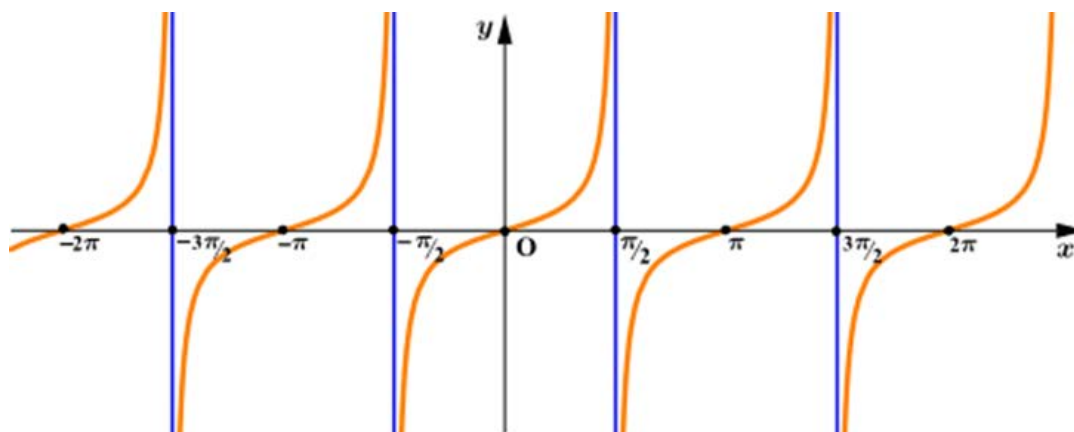


Figura 3.11 Grafico della funzione $y=\tan x$.

1.1.3 Relazioni fondamentali della goniometria

Poiché fra le funzioni goniometriche definite in precedenza esistono delle relazioni, adesso ci si propone di determinare i legami che intercedono tra le funzioni seno e coseno di un medesimo angolo orientato. Si consideri la seguente figura:

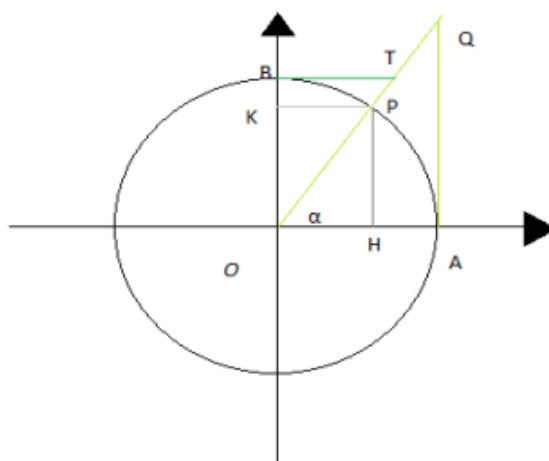


Figura 3.12: Prima relazione fondamentale della goniometria.

Sia α la misura dell'angolo orientato di vertice O . Detto OP il raggio della circonferenza goniometrica e H la proiezione ortogonale del punto P sull'asse delle ascisse, si ha, come visto in precedenza, che:

$$OP = 1, PH = \text{sen}\alpha, OH = \text{cos}\alpha. \quad (3.2)$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo $O\hat{H}P$, retto in \hat{H} , si ricava:

$$PH^2 + OH^2 = OP^2 \quad (3.3)$$

Da cui, sostituendo alla (3.3) i valori dati nella (3.2) otteniamo:

$$\text{cos}^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \quad (3.4)$$

La (3.4) viene chiamata prima relazione fondamentale della goniometria.

Dalla (3.4), con semplici calcoli si ricavano le seguenti formule:

$$\text{cos}\alpha = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha} \quad (3.5)$$

e

$$\text{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \text{cos}^2\alpha}. \quad (3.6)$$

Osservazione: Nella (3.5) e nella (3.6), dei due segni posti davanti alla radice se ne deve prendere sempre uno solo e precisamente, nella (3.5) bisogna prendere il segno + quando il lato termine dell'angolo è nel I o nel IV quadrante, perché in queste ipotesi il coseno è positivo, si prenderà invece, il segno – quando il lato termine dell'angolo è nel II o nel III quadrante, perché il coseno è negativo.

La seconda relazione fondamentale della goniometria è la seguente:

$$\text{tan}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} \quad (3.7)$$

che vale solo per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $K \in Z$.

La terza relazione fondamentale della goniometria ci dice che:

$$\text{cos}^2\alpha = \frac{1}{1 + \text{tan}^2\alpha} \quad (3.8)$$

che vale solo per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $K \in Z$; dall'equazione (3.8), eseguendo semplici calcoli, si ricava:

$$\cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

1.1.4 Le cofunzioni

Accanto alle funzioni goniometriche già trattate ne esistono altre che prendono il nome di **cofunzioni**. Esse sono, la cosecante, la secante e la cotangente.

Si definisce **cosecante** di un angolo α , e si scrive **coseca**, il reciproco della funzione $\text{sen}\alpha$ e, con $\text{sen}\alpha \neq 0$ in simboli:

$$\text{coseca} = \frac{1}{\text{sen}\alpha}.$$

Si definisce **secante** di un angolo α , e si scrive **seca**, il reciproco della funzione $\text{cos}\alpha$, con $\text{cos}\alpha \neq 0$, in simboli:

$$\text{seca} = \frac{1}{\text{cos}\alpha}.$$

Si definisce **cotangente** di un angolo α , e si scrive **cotana**, il reciproco della funzione $\text{tan}\alpha$, cioè il rapporto tra il coseno ed il seno dello stesso angolo. Supposto $\text{sen}\alpha \neq 0$, si ha:

$$\text{cotana} = \frac{1}{\text{tan}\alpha} = \frac{\text{cos}\alpha}{\text{sen}\alpha}.$$

Dalle due relazioni fondamentali della goniometria e dalla definizione di cotana , possiamo ricavare le seguenti formule che per maggiore chiarezza ho inserito nella successiva tabella:

Tabella 3.3: formule per individuare il valore di una funzione goniometrica rispetto ad un'altra.

| Nota | <i>sen</i>α | <i>cos</i>α | <i>tan</i>α | <i>cot</i>α |
|---------------------|---|---|---|---|
| <i>sen</i> α | <i>sen</i> α | $\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}$ | $\frac{\text{sen}\alpha}{\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}}$ | $\frac{\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}}{\text{sen}\alpha}$ |
| <i>cos</i> α | $\pm\sqrt{1 - \text{cos}^2\alpha}$ | <i>cos</i> α | $\frac{\pm\sqrt{1 - \text{cos}^2\alpha}}{\text{cos}\alpha}$ | $\frac{\text{cos}\alpha}{\pm\sqrt{1 - \text{cos}^2\alpha}}$ |
| <i>tan</i> α | $\frac{\text{tan}\alpha}{\pm\sqrt{1 + \text{tan}^2\alpha}}$ | $\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \text{tan}^2\alpha}}$ | <i>tan</i> α | $\frac{1}{\text{tan}\alpha}$ |
| <i>cot</i> α | $\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \text{cot}^2\alpha}}$ | $\frac{\text{cot}\alpha}{\pm\sqrt{1 + \text{cot}^2\alpha}}$ | $\frac{1}{\text{cot}\alpha}$ | <i>cot</i> α |

1.1.5 Funzioni goniometriche di alcuni angoli notevoli

Utilizzando le definizioni date di seno, coseno, tangente e cotangente di un angolo orientato ci si chiede se sia possibile determinare i valori delle funzioni a 30° , 45° e 60° ed in che modo si possa fare.

Per tale scopo disegniamo una circonferenza goniometrica con un angolo, che indicheremo con $P\hat{O}H$, di 30° :

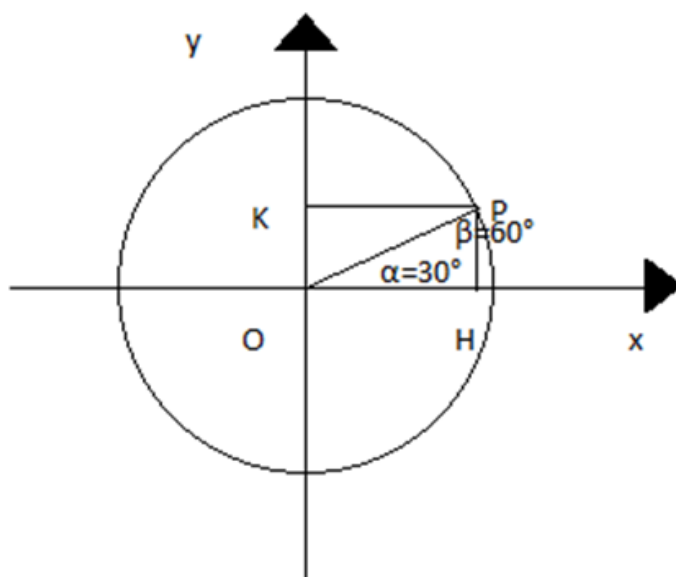


Figura 3.13: Valore delle funzioni goniometriche a 30° .

Dette H e K le proiezioni del punto P sugli assi cartesiani, si consideri il triangolo $H\hat{O}P$, poiché l'angolo in O , per costruzione è di 30° , l'angolo in P sarà di 60° , segue che esso è la metà del triangolo equilatero di lato OP (che vale 1 in quanto raggio della circonferenza goniometrica), applicando il teorema di Pitagora, si ottiene:

$$PH = OK = \frac{1}{2}$$

E

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ricordando che il seno dell'angolo $P\hat{O}H$ è l'ordinata di P ed il coseno la sua ascissa, segue che:

$$\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \text{cos}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dalla seconda relazione della goniometria segue:

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

e

$$\cotan 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}.$$

Con considerazioni analoghe si possono trovare i valori delle funzioni goniometriche dell'angolo di 60° :

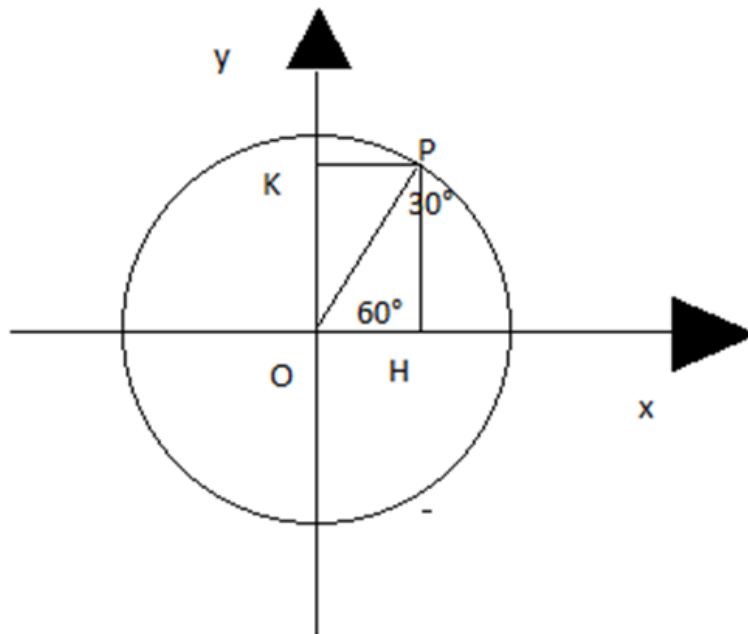


Figura 3.14: Valori delle funzioni goniometriche a 60° .

Dalla figura 3.14 si evince che:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

da cui:

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

e

$$\cotan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Analogamente per un angolo di 45° , disegniamo una circonferenza goniometrica avente un angolo $P\hat{O}H$ di 45° .

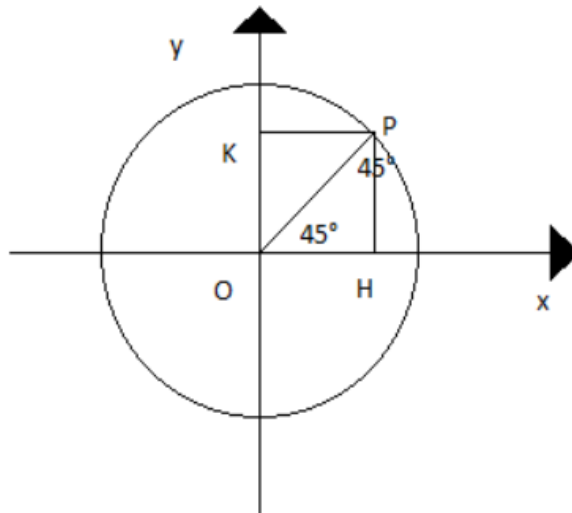


Figura 3.15 Valore delle funzioni goniometriche a 45° .

Dalla figura 3.15 si nota che il quadrilatero $OHPK$ è un quadrato, la cui diagonale è $OP = 1$. Applicando il teorema di Pitagora, nota la diagonale di un quadrato, si può calcolarne il lato.

Essendo $OP = 1$, si ha:

$$OH = PH = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

di conseguenza:

$$\text{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\text{cos}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

e, dalla seconda relazione della goniometria segue:

$$\text{tan}45^\circ = 1$$

e

$$\text{cotan}45^\circ = 1.$$

Si riassumono nella seguente tabella i valori delle funzioni goniometriche degli angoli notevoli sopra descritti.

Tabella 3.4: Tabella riassuntiva dei valori delle funzione goniometriche per gli angoli notevoli.

| G radi | R adiani | $\text{sen}\alpha$ | $\text{cos}\alpha$ | $\text{tan}\alpha$ | $\text{cotan}\alpha$ |
|------------|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

1.1.6 Angoli associati ad un'angolo dato

Con l'espressione archi associati si indicano particolari coppie di angoli come quelli supplementari, complementari, opposti ecc., per i quali cioè la loro somma o differenza è un multiplo di un angolo retto. Di tali angoli possiamo trovare le funzioni

goniometriche associate grazie alle relazioni che intercorrono tra i triangoli rettangoli che si trovano all'interno della circonferenza goniometrica, conoscendo il segno che ha ogni funzione in corrispondenza del quadrante in cui si trova l'angolo.

Data una circonferenza goniometrica γ indichiamo con P il punto di detta circonferenza, che ha come coordinate $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, così come definite: $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Noto il valore delle funzioni goniometriche di un angolo α , è possibile trovare anche quelli di alcuni angoli detti **angoli associati**.

1.1.6.1 Angoli supplementari

Considerando il punto $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ nel primo quadrante della figura seguente:

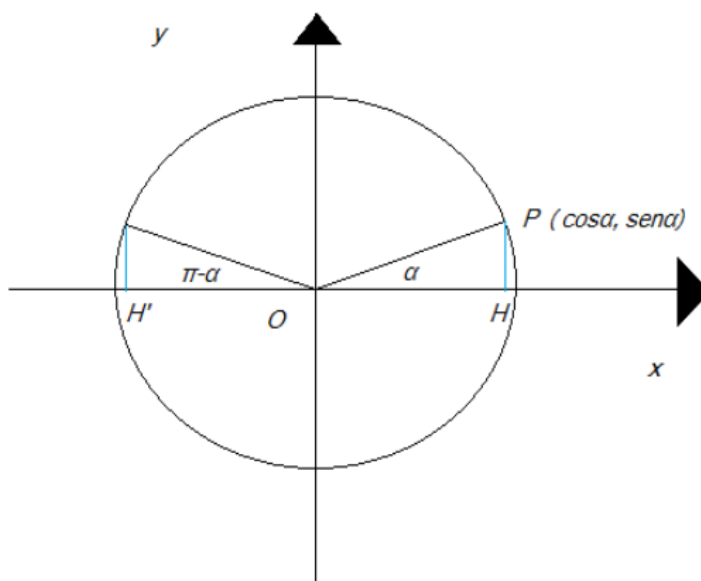


Figura 3.16: Angoli supplementari

il supplementare dell'angolo α è l'angolo $\pi - \alpha$ che si trova nel secondo quadrante e che ha come corrispondente del punto $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, il punto P' di coordinate $-\cos\alpha, \sin\alpha$, in simboli, $P'(-\cos\alpha, \sin\alpha)$; per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli $O\widehat{H}P$ e $O\widehat{H}'P'$, quindi, possiamo dire che:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{cos}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cos}\alpha \\ \operatorname{tan}(\pi - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\operatorname{cos}\alpha} = -\operatorname{tan}\alpha \end{cases}$$

1.1.6.2 Angoli che differiscono di un angolo piatto

Con il medesimo ragionamento fatto per gli angoli supplementari, si possono calcolare le funzioni goniometriche degli angoli che differiscono di un angolo piatto. Dato il punto $P(\operatorname{cos}\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ situato nel primo quadrante della figura:

L'angolo cercato è $\pi + \alpha$ che si trova nel terzo quadrante e che ha come corrispondente del punto P , il punto P'' di coordinate $-\operatorname{cos}\alpha, -\operatorname{sen}\alpha$, per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli $O\hat{H}P$ e $O\hat{H}''P''$; in simboli, $P''(-\operatorname{cos}\alpha, -\operatorname{sen}\alpha)$, quindi possiamo dire che:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{cos}(\pi + \alpha) = -\operatorname{cos}\alpha \\ \operatorname{tan}(\pi + \alpha) = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\operatorname{cos}\alpha} = \operatorname{tan}\alpha \end{cases}$$

1.1.6.3 Angoli opposti

Siano α e $-\alpha$ due angoli orientati fra loro opposti, se α è la misura dell'angolo $H\hat{O}P$, $-\alpha$ è la misura di $H\hat{O}P''$ vediamo in figura:

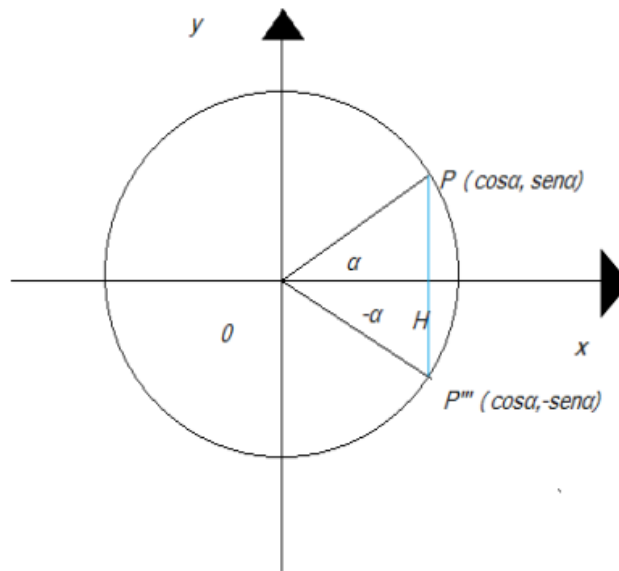


Figura 3.17: Angoli associati opposti.

I due triangoli $H\hat{O}P$ e $H\hat{O}P'''$ sono simmetrici e P''' ha coordinate $\cos\alpha$, $-\sin\alpha$, in simboli: $P'''(\cos\alpha, -\sin\alpha)$, quindi possiamo dire che:

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = \sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) = \tan(2\pi - \alpha) = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha \end{cases}$$

1.1.6.4 Angoli complementary

Dati due angoli fra loro complementari, se la misura del primo è α il suo complementare sarà $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Nella circonferenza goniometrica essi sono posti entrambi nel primo quadrante, come vediamo in figura:

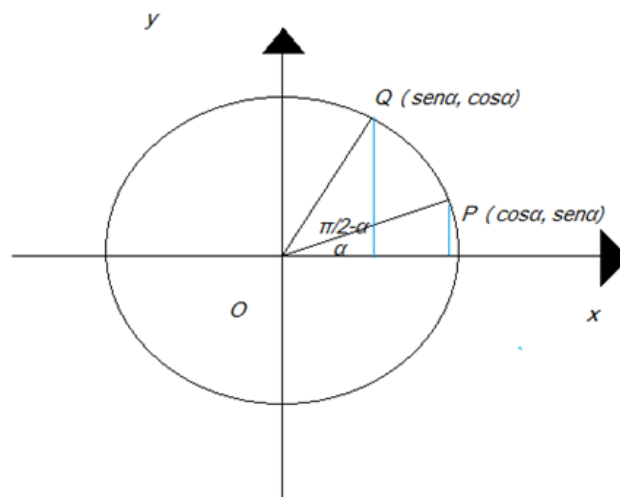


Figura 3.18: Angolo associato $\pi/2-\alpha$.

ed hanno l'origine in comune. Sapendo sempre che il punto P ha coordinate $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, sempre per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli $O\hat{H}P$ $O\hat{K}Q$, il punto Q avrà come coordinate $\sin\alpha, \cos\alpha$, in formule: $Q(\sin\alpha, \cos\alpha)$, rispetto al punto P sono scambiati il seno con il coseno, quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cotan\alpha \end{array} \right. .$$

1.1.6.5 Angoli che differiscono di un angolo retto

Per lo stesso ragionamento fatto nel paragrafo precedente, considerando la figura 3.19, si ha:

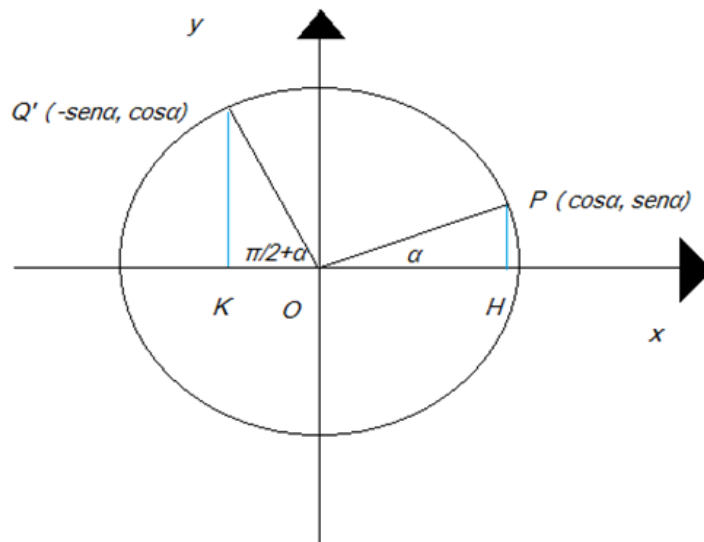


Figura 3.19: Angolo associato $\pi/2+\alpha$.

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{cos}\alpha \\ \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{tan}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\operatorname{cos}\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = -\operatorname{cotan}\alpha \end{cases} .$$

1.1.6.6 Angoli che hanno per somma tre angoli retti

Utilizzando il medesimo ragionamento, data la figura seguente:

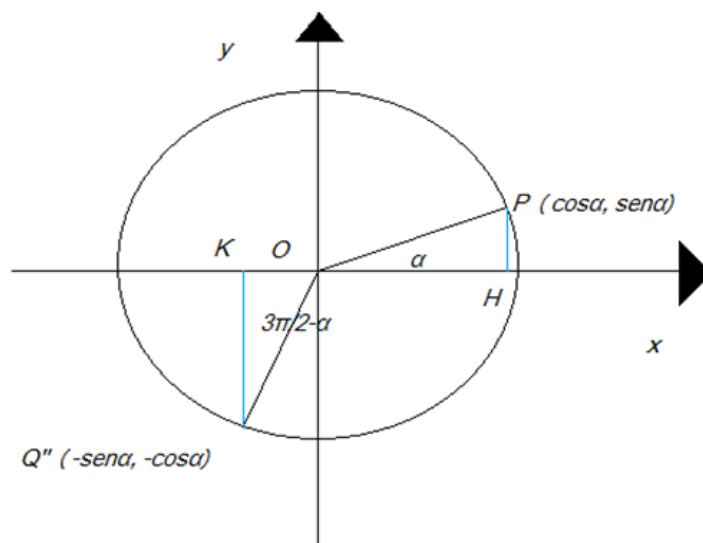


Figura 3.20: Angolo associato $3\pi/2-\alpha$.

I valori sono i seguenti:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{cosa} \\ \operatorname{cos}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{sena} \\ \operatorname{tan}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{-\operatorname{cosa}}{-\operatorname{sena}} = \operatorname{cotana} \end{cases} .$$

1.1.6.7 Angoli che differiscono di tre angoli retti

Utilizzando il medesimo ragionamento, data la figura seguente:

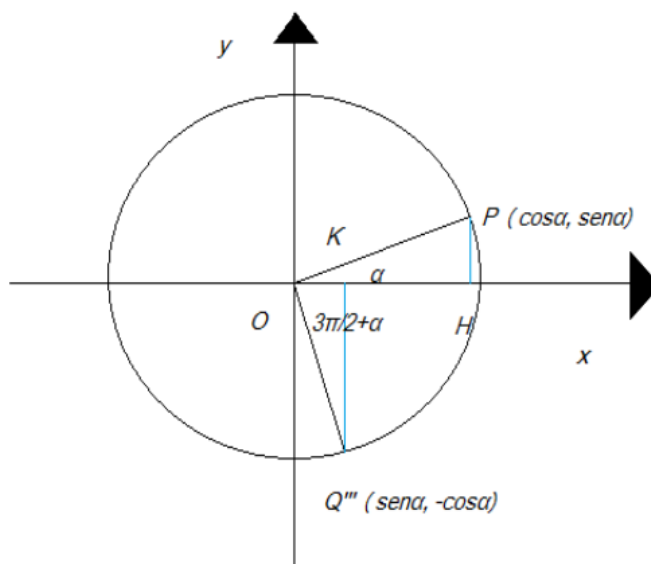


Figura 3.21: Angolo associato $3\pi/2+\alpha$.

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{cosa} \\ \operatorname{cos}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sena} \\ \operatorname{tan}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{-\operatorname{cosa}}{\operatorname{sena}} = -\operatorname{cotana} \end{cases} .$$

3.2 I Vettori

In questo paragrafo verranno ripresi i concetti fondamentali sui vettori, per comprenderne a fondo i concetti ed acquisire un metodo di lavoro, prestando particolare attenzione alle leggi di trasformazione.

3.2.1 Cenni sui vettori

Una delle entità matematiche fondamentali per poter descrivere le leggi della fisica è il vettore.

Per rappresentare un vettore ed identificarlo abbiamo bisogno di tre grandezze: modulo, direzione e verso.

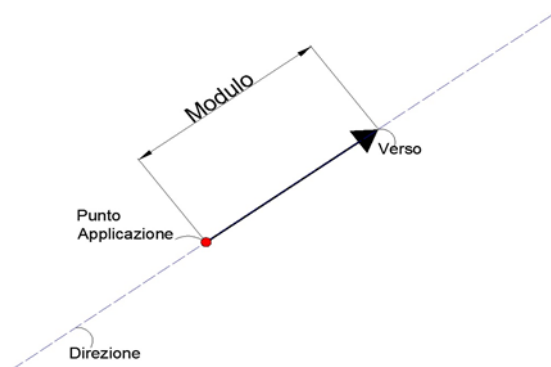


Figura 3.22: Rappresentazione di un vettore.

La direzione è la linea retta nello spazio su cui giace il vettore; fissata un'unità di misura, il modulo è la lunghezza del vettore secondo l'unità di misura prefissata, il verso è il luogo verso il quale il vettore è diretto: su, giù, destra, ecc., cioè la sua orientazione sulla sua linea retta.

Un vettore può giacere sia su un piano che nello spazio.

Nel piano un vettore può avere una rappresentazione Cartesiana e una Polare.

Con la rappresentazione Cartesiana un vettore \mathbf{V} viene individuato dalle sue proiezioni sugli assi cartesiani che indicheremo con:

$$\mathbf{V}(v_x, v_y).$$

Per distinguere un vettore da uno scalare (uno scalare è un altro modo di definire un numero) indicheremo un vettore sempre con una lettera in grassetto.

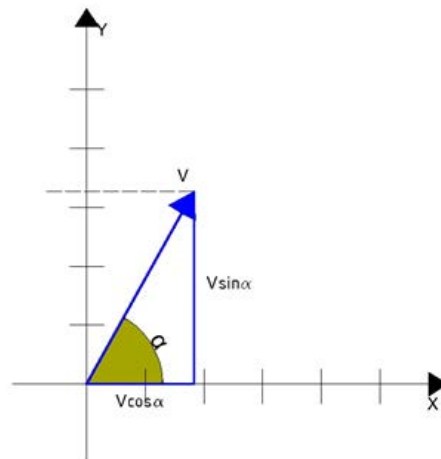


Figura 3.23: Proiezione di un vettore sugli assi cartesiani.

Un altro modo di rappresentare un vettore nel piano è quello di usare la rappresentazione Polare, dove il vettore viene individuato dal suo modulo V e dall'angolo formato da esso con l'asse delle ascisse. In simboli:

$$\mathbf{V} = (v, \alpha).$$

Graficamente, come nella figura seguente:

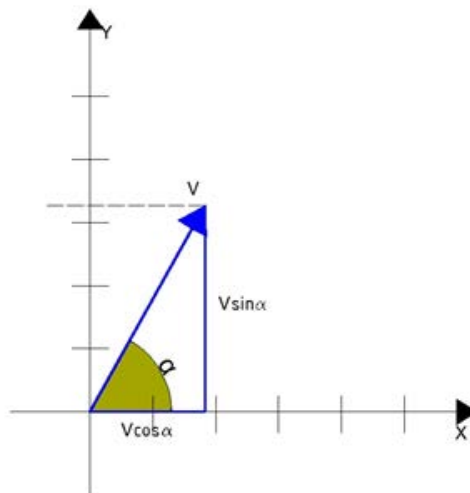


Figura 3.24: Rappresentazione polare di un vettore.

Si noti che V all'interno della parentesi non è in grassetto e rappresenta il modulo del vettore come mostrato in figura. 3.24.

Queste quantità sono ovviamente collegate fra di loro e si può scegliere, a seconda dei casi, se usare la rappresentazione Cartesiana o quella Polare. Si può osservare che il modulo del vettore non è altro che l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha come cateti V_x e V_y . Le rappresentazioni Cartesiane e Polari si trasformano l'una nell'altra applicando i teoremi sui triangoli rettangoli. Si può scrivere:

$$V_x = V \cos \alpha$$

e

$$V_y = V \sin \alpha.$$

Quindi noti V e α si possono ricavare V_x e V_y . Viceversa, dal teorema di Pitagora si ottiene il modulo del vettore, in simboli:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

L'angolo α lo si ottiene dividendo le due componenti, quella lungo l'asse x fratto quella lungo l'asse y , in formule, si ha:

$$\frac{V_x}{V_y} = \frac{V \sin \alpha}{V \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

ESEMPI: esempi di grandezze vettoriali sono, la velocità, l'accelerazione e lo spostamento; sono vettori i momenti delle forze ecc. Sono rappresentabili in modo vettoriale (**ma non sono vettori**) numerose grandezze, come temperature, perdite e guadagni in borsa, rilevazioni statistiche, ecc.

3.2.2 Vettori equipollenti

Con i vettori si possono eseguire tutte le operazioni matematiche, tra cui somma, sottrazione e prodotto. Da ora in poi verrà adottata la seguente convenzione:

- i vettori saranno indicati con lettere maiuscole A, B, C, ...
- i loro moduli con le analoghe lettere minuscole a, b, c, ...

Dati due vettori, \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 , detti A e B gli estremi del primo vettore e C e D gli estremi di \mathbf{V}_2 essi si diranno **vettori equipollenti** se si verifica una delle seguenti condizioni:

Dati due vettori, \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 , detti A e B gli estremi del primo vettore e C e D gli estremi di \mathbf{V}_2 essi si diranno **vettori equipollenti** se si verifica una delle seguenti condizioni:

1. Se A coincide con C ($A \equiv C$) allora B coinciderà con D ($B \equiv D$);
2. I due vettori \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 appartengono alla stessa retta e hanno stesso modulo e stesso verso;
3. I due vettori \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 appartengono a due rette parallele ed hanno stesso modulo e stesso verso.

In definitiva due vettori si diranno **equipollenti** se hanno lo stesso modulo, la stessa direzione ed il medesimo verso.

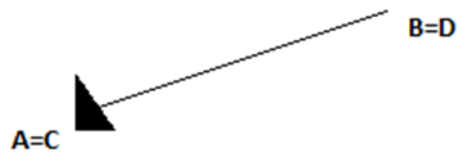


Figura 3.25 Vettori equipollenti.

Così definita l'equipollenza risulta essere una relazione di equivalenza che permette di suddividere l'insieme di segmenti orientati in sottoinsiemi detti classi di equipollenza dove ognuna di esse è costituita da tutti e soli segmenti orientati che sono fra loro equipollenti. Si può quindi definire un vettore anche come ogni classe di equipollenza di segmenti orientati.

3.2.3 Vettore nullo

Si definisce vettore nullo e si indica con $\mathbf{0}$ quel vettore che ha modulo nullo e privo di direzione e verso.

3.2.4 Somma di due vettori

L'operazione di somma tra due vettori è detta anche composizione di vettori: i vettori addendi sono detti vettori componenti, il vettore somma è detto risultante. Nel caso della somma di due vettori \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 , possono presentarsi tre distinte possibilità:

- a. \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 hanno uguali direzione e verso: il vettore risultante $(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)$ è un vettore \mathbf{R} avente per direzione e verso quelli dei vettori addendi e per modulo la somma dei moduli dei vettori addendi.
- b. \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 hanno uguale direzione ma verso opposto: la risultante \mathbf{R} è un vettore avente la stessa direzione dei vettori addendi, per modulo la differenza dei moduli dei vettori addendi e per verso quello del vettore addendo di modulo maggiore.

c. V_1 e V_2 hanno uguale verso ma direzione diversa.

Per il terzo caso, ci sono due metodi per calcolare la somma tra due vettori, il metodo del punta-coda ed il metodo del parallelogramma. La somma tra due vettori darà sempre come risultato un vettore.

Il metodo del punta-coda consiste, dati due vettori, V_1 e V_2 , nel tenere fissato uno dei due vettori, per esempio V_1 , trasportare l'altro, nel nostro caso V_2 , mantenendolo sempre parallelo a se stesso in modo che il suo punto di applicazione coincida con la punta di V_1 . In questo modo il vettore somma ($V_1 + V_2$) è quel vettore R che congiunge "la coda del primo vettore V_1 " cioè il suo punto di applicazione, con "la punta del secondo vettore" V_2 .

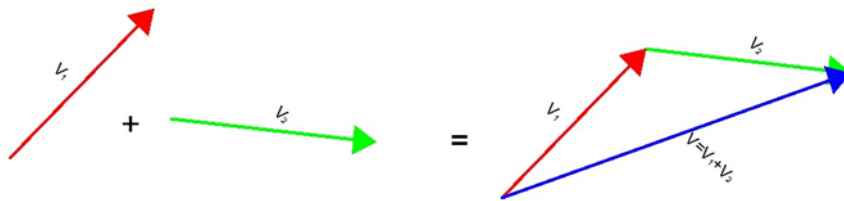


Figura 3.26: Illustrazione del metodo "punta-coda".

Per applicare invece il metodo del parallelogramma occorre innanzitutto trasportare i due vettori V_1 e V_2 parallelamente a se stessi, fino a far coincidere in un punto O le loro origini. A partire da ciascuna delle due estremità libere si deve ora tracciare una retta parallela all'altro vettore, in modo da incrociarle in un punto C , disegnando un parallelogramma; la risultante R è in questo modo completamente definita in direzione e intensità dalla diagonale del parallelogramma, mentre il verso è quello che muove dalla comune origine O verso il punto opposto C .

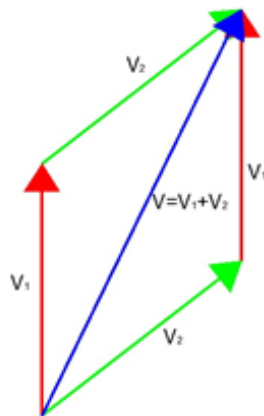


Figura 3.27: Illustrazione del metodo del parallelogramma per calcolare la somma di due vettori.

Partendo da un vettore \mathbf{R} si possono definire i due vettori \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 che costituiscono i lati di un parallelogramma di cui \mathbf{R} è la diagonale; ciò equivale a compiere un'operazione nota come *scomposizione di un vettore nelle sue componenti lungo due direzioni assegnate*.

La somma di tre o più vettori, infine, può essere eseguita sempre con la regola del parallelogramma componendo i vettori a due a due, e successivamente le loro risultanti, fino a ottenere un unico vettore finale, che costituirà appunto il risultato cercato.

3.2.5 Opposto di un vettore

Definiamo come vettore **opposto** di \mathbf{V}_1 il vettore " $-\mathbf{V}_1$ " che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di \mathbf{V}_1 ma il verso opposto (vedi figura 3.28):

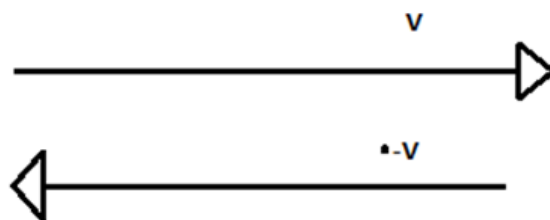


Figura 3.28: Vettori opposti.

3.2.6 Differenza di vettori

Il caso della differenza tra due vettori \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 viene facilmente riportato a quello della somma, componendo \mathbf{V}_1 con il vettore opposto di \mathbf{V}_2 : $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ è infatti uguale ad $\mathbf{V}_1 + (-\mathbf{V}_2)$.

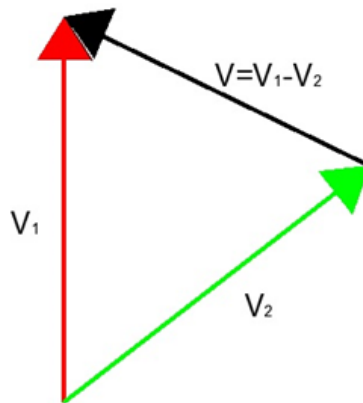


Figura 3.29: Illustrazione della differenza tra due vettori.

Usando la regola del parallelogramma è facile identificare la differenza di due vettori, si tratta dell'altra diagonale rispetto a quella usata per calcolare la somma. Questa diagonale identifica modulo e direzione: il verso di $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ è quello che dalla punta di \mathbf{V}_2 va verso la punta di \mathbf{V}_1 .

3.2.7 Prodotto tra un vettore ed uno scalare

Dati un vettore \mathbf{V}_1 e uno scalare α (numero reale) è possibile definire una nuova operazione tale da associare ai due un nuovo vettore.

Il prodotto tra il vettore \mathbf{C} e lo scalare α è un vettore $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1\alpha$ avente per direzione e verso quelli di \mathbf{V}_1 e per modulo il prodotto del modulo di \mathbf{V}_1 per il valore di α . Esistono, inoltre, altre due forme di applicazione della moltiplicazione al calcolo vettoriale, dette prodotto scalare e prodotto vettoriale.

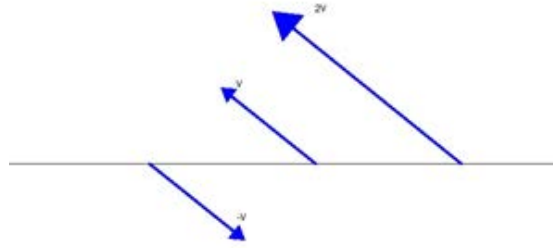


Figura 3.30: Illustrazione del prodotto di un vettore per uno scalare.

La moltiplicazione applicata al calcolo vettoriale non si riduce unicamente al prodotto fra uno scalare e un vettore. Essa, infatti, contempla anche altre due forme di prodotto, concettualmente più complicate da definire, ma facilmente rappresentabili dal punto di vista grafico, dette prodotto scalare e prodotto vettoriale. In entrambi i casi, i termini dell'operazione sono sempre vettori, ma nel primo prodotto la risultante ha natura scalare, nel secondo vettoriale.

3.2.8 Prodotto scalare

Il prodotto scalare fra due vettori \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 , indicato come $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2$ (si legge "V1 scalare V2"), viene definito per una qualunque coppia di vettori ed il simbolo dell'operazione è un punto. Tale prodotto è un numero che si ottiene dal prodotto fra il modulo di \mathbf{V}_1 e la proiezione di \mathbf{V}_2 nella direzione di \mathbf{V}_1 . In simboli:

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = v_1 v_{2,1},$$

dove con $v_{2,1}$ si indica la componente di \mathbf{V}_2 lungo il vettore \mathbf{V}_1 .

Se l'angolo tra \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 è ottuso, $v_{1,2}$ è negativo ed anche il prodotto scalare risulta negativo, in simboli:

$$\text{se } v_{1,2} < 0 \Rightarrow \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 < 0.$$

Se invece \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 sono perpendicolari tra loro $v_{1,2}$ è nullo e anche il prodotto scalare è nullo, in simboli:

$$\text{se } v_{1,2} = 0 \Rightarrow \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = 0.$$

Per il prodotto scalare vale la proprietà commutativa, cioè:

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_1,$$

da cui segue che:

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = v_1 v_{2,1} = v_2 v_{1,2}.$$

Possiamo definire il prodotto scalare anche trigonometricamente, cioè come lo scalare R dato dal prodotto fra il modulo dei due vettori e il coseno dell'angolo compreso tra le direzioni dei due vettori:

$$R = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = v_1 v_2 \cos.$$

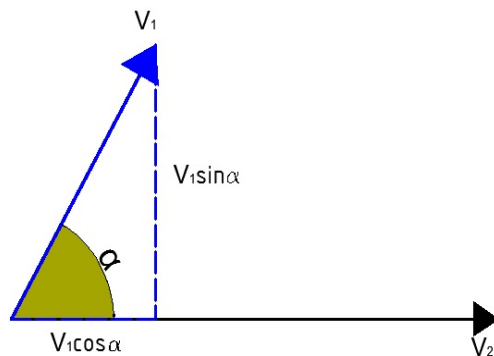


Figura 3.31: Illustrazione del prodotto scalare in forma trigonometrica.

3.2.9 Il prodotto vettoriale

La seconda operazione di moltiplicazione fra vettori è detta **prodotto vettoriale** e dà come risultato un vettore. Dati due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} , il prodotto vettoriale indicato come $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ (e si legge "A vettore B"), viene definito come il vettore R avente modulo pari all'area del parallelogramma di cui \mathbf{A} e \mathbf{B} sono i lati,

direzione perpendicolare al piano del parallelogramma e verso dato dalla regola della mano destra:



Figura 3.32: Illustrazione della regola della mano destra.

se si pone il pollice della mano destra nel verso del vettore \mathbf{B} e le altre dita nel verso di \mathbf{A} , il vettore risultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ è quello uscente dal palmo della mano.

Se invece di $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, calcoliamo $\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$, otteniamo come risultato un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso modulo di $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ ma verso opposto, cioè:

$$\mathbf{B} \wedge \mathbf{A} = -\mathbf{A} \wedge \mathbf{B},$$

vale quindi la proprietà anti commutativa.

Trigonometricamente, il modulo *del prodotto vettoriale* può anche essere definito come dato dal prodotto fra il modulo dei due vettori e il valore del seno dell'angolo compreso fra le direzioni dei due vettori:

$$c = absena.$$

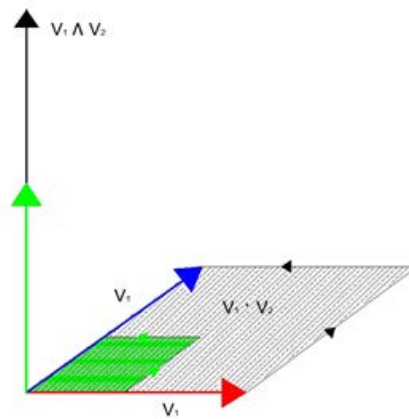


Figura 3.33: Prodotto vettoriale.

Un esempio di prodotto vettoriale è dato dal momento di una forza F rispetto ad un punto P , il cui modulo è dato dal prodotto vettoriale del vettore braccio per il vettore forza della stessa, in simboli:

$$M = b \wedge F_z$$

dove b rappresenta la minima distanza che c'è tra la retta su cui giace il vettore forza e quella perpendicolare ad essa passante per il punto P .

Il vettore M è perpendicolare al piano definito da F e da b , il verso, come si evince dalla regola della mano destra, è quello di un osservatore che vede ruotare F in senso antiorario. Il momento può essere nullo se sono nulli la forza o il braccio.

I vettori sottostanno a precise regole di trasformazione sotto l'effetto di rotazioni. In fisica il termine rotazione indica un'azione che viene applicata ad un oggetto per modificare il suo orientamento nello spazio in 3D. L'interpretazione però è doppia; 1. L'azione viene applicata al corpo per portarlo da un orientamento ad un altro. 2. Due oggetti identici hanno orientamenti diversi e vogliamo studiarne la relazione reciproca. Si tratta di un'applicazione lineare in quanto, dati due vettori V_1 e V_2 , la rotazione nel piano di un angolo θ del vettore somma di due vettori assegnati equivale al vettore somma dei due vettori precedentemente ruotati. Inoltre, il fatto che il vettore venga dilatato (o contratto) non modifica l'angolo di rotazione.

Un altro esempio di prodotto vettoriale è dato dal momento angolare. Questo è una grandezza fisica utilizzata per descrivere il moto di rotazione di un corpo attorno ad un centro fisso.

Per introdurre il concetto di momento angolare, consideriamo una particella di massa m che si muove attorno ad un punto fisso O . Esso viene definito come il prodotto vettoriale M tra il vettore posizione del corpo r (che non è altro che il vettore che unisce il punto fisso O con il punto in cui si trova il corpo in un determinato istante) e la quantità di moto p del corpo, in simboli:

$$M = r \times p.$$

Il momento angolare gode delle seguenti proprietà:

- è un vettore con direzione perpendicolare al piano su cui giacciono i vettori posizione e quantità di moto;
- il verso è quello dato dalla regola della mano destra. Posizionando il pollice lungo la direzione del vettore posizione del corpo r , e le altre dita lungo la direzione del vettore p ; il verso del vettore momento angolare M è quello uscente dal palmo della mano;
- il modulo è quello ottenuto dal prodotto dei moduli dei vettori posizione e quantità di moto moltiplicati per il seno dell'angolo θ tra essi compreso:

$$M = r \cdot p \cdot \sin\theta.$$

3.3 Probabilità e statistica

In questo nuovo paragrafo verranno illustrati i concetti fondamentali della teoria delle probabilità e cenni di statistica. Tali argomenti sono fondamentali per la costruzione del nuovo approccio didattico che verrà illustrato nella seconda parte.

3.3.1 Cenni di probabilità

Quando si deve studiare il comportamento di diversi fenomeni, di qualunque natura, ci accorgiamo che essi si possono dividere in due categorie; comportamenti deterministici e comportamenti probabilistici.

Un comportamento deterministico è caratterizzato dal fatto che a parità di cause corrispondono parità di effetti. Esso può rappresentare parecchi comportamenti reali e per un lungo periodo di tempo si è ritenuto fosse l'unico adatto a studiare i fenomeni fisici.

Ma col passare degli anni ed il progredire della teoria della probabilità ci si rese conto che esistevano anche altri comportamenti in cui i risultati variavano a seguito delle prove fatte; tali tipi di comportamenti prendono il nome di casuali o probabilistici. Questi si differenziano dai primi perché a cause apparentemente uguali corrispondono effetti diversi. Un esempio è dato dalla teoria dei giochi:

"La teoria dei giochi è la scienza matematica che studia e analizza le decisioni individuali di un soggetto in situazioni di conflitto o interazione strategica con altri soggetti rivali (due o più) finalizzate al massimo guadagno di ciascun soggetto, tali per cui le decisioni di uno possono influire sui risultati conseguibili dall'altro/i e viceversa secondo un meccanismo di retroazione, ricercandone soluzioni competitive e/o cooperative tramite modelli, che in particolare nel contesto economico si riferiscono al caso in cui due o più aziende interagiscono in concorrenza tra loro. "

(https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_dei_giochi, 2016).

Il calcolo della probabilità è ormai una delle branche più importanti della matematica, soprattutto per le sue molteplici applicazioni che vanno dalla fisica quantistica, alla termodinamica, alle assicurazioni ecc....Il concetto di probabilità è quasi intuitivo, ma quando si cerca di darne una definizione rigorosa, ci si accorge che non è facile da precisare. Essa può essere associata ad aspetti diversi e per questo motivo si possono distinguere differenti definizioni di probabilità: la

definizione classica o matematica di probabilità "a priori", la definizione statistica o di frequenza relativa, quella soggettiva e la definizione assiomatica. Per l'argomento relativo alla tesi, è sufficiente utilizzare solo le prime due definizioni, che sono anche le più semplici.

Prima di iniziare tale trattazione, è necessario introdurre il concetto di evento.

Definizione: si definisce **evento** il verificarsi di un certo insieme di condizioni derivate da un esperimento.

Se, per esempio, consideriamo il lancio di un dado una volta sola, ed esce il numero 6, l'evento sarà proprio l'uscita del numero 6.



Figura 3.34: Immagine del lancio di un dado.

<https://it.dreamstime.com/fotografie-stock-libere-da-diritti-lancio-dei-dadi-image3967068>,

12/01/2017 ore 16,52

Definizione: Si definisce **evento casuale** ogni evento che può verificarsi o non verificarsi in una singola prova.

La misura di una grandezza fisica può essere considerata come un evento casuale e il numero che si ottiene è la variabile casuale associata all'evento. Gli eventi si distinguono in:

1. **Evento certo** = quello che si verifica sempre;
2. **Evento impossibile** = quello che non si verifica mai;
3. **Evento aleatorio** = evento che può verificarsi oppure no.

3.3.2 Definizione classica di probabilità

La probabilità classica viene determinata "a priori" cioè prima che l'evento si verifichi, ed è caratterizzata da due aspetti:

- Il numero dei casi possibili è sempre finito;
- Tutti gli eventi hanno la stessa probabilità di verificarsi, cioè sono equiprobabili.

Per esempio, estraendo a caso una carta da un mazzo di 40 possiamo pensare che la probabilità che questa esca è sempre la stessa per ognuna delle 40 carte considerate.

Con queste premesse, si definisce **probabilità di un evento E**, e si indica con $P(E)$, il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili sotto la condizione che siano tutti equamente possibili, in simboli:

$$p = P(E) = \frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}}$$

ES1. Qual è la probabilità che esca il numero 67 al gioco del lotto nella ruota di Palermo?



Figura 3.35: Immagine naif di un sacchetto con dentro palline bianche e nere

<https://matematicandoinsieme.wordpress.com/2014/05/13/indovinelli-matematici-palline-bianche-e-nere/>

12/01/2017 ore 17.02

Poiché i numeri del gioco del lotto sono 90 e tutti i numeri hanno la stessa probabilità di essere estratti, la probabilità che esca il numero 67 sarà il rapporto seguente:

$$p = \frac{1}{90} = 0,0\bar{1}.$$

ES2. Dentro un sacchetto si trovano 10 palline di cui 7 bianche e 3 nere. Esse sono **identiche in tutto tranne che nel colore.**

Qual sarà la probabilità che estraendo una pallina a caso dal sacchetto quella sarà nera?

Cerchiamo di capire come lavorare.

Poiché le palline sono in tutto 10, estraendo una pallina qualsiasi dal sacchetto ho 10 possibilità di estrarre la pallina nera che sono proprio i ***casi possibili.***

Questi sono anche **equiprobabili.**

Fra questi 10 casi possibili, ci sono soltanto 3 casi in cui la pallina estratta è nera. Questi sono i **casi favorevoli** all'evento cercato.

L'evento "estrazione della pallina nera" ha perciò 3 favorevoli su 10 possibili, di verificarsi. In simboli:

$$p = \frac{3}{10} = 0,3.$$

Sotto queste ipotesi la probabilità può assumere solo i valori 1 e 0 e tutti i valori tra essi compresi, cioè:

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Dove indichiamo con:

1=probabilità dell'evento certo e con 0=probabilità dell'evento nullo (cioè quando l'evento non si verifica).

La probabilità **classica** si chiama anche probabilità "**a priori**" perché si può determinare prima di effettuare una serie di prove.

La probabilità di un evento si può esprimere:

- a. come frazione, ad esempio $3/4$
- b. come numero decimale, ad esempio $3/4 = 3 : 4 = 0,75$
- c. come percentuale, ad esempio $0,75 = 75\%$.

Definiamo adesso la probabilità dell'evento contrario q come la probabilità che l'evento non accada. Poiché l'evento E può solo accadere o non accadere e non ci sono altre soluzioni possibili, avremo che:

$$p + q = 1 \qquad (3.1)$$

da cui:

$$q = 1 - p.$$

La teoria classica della probabilità, però ha dei limiti. Nel mondo reale non è possibile avere l'esatta uguale probabilità fra eventi diversi, e soprattutto quando il numero di risultati possibili è infinito, non la possiamo utilizzare.

Per questi ed altri motivi è necessario introdurre altri concetti di probabilità che ci permettano di superare tali problemi.

3.3.2 Definizione frequentistica di probabilità

In generale, nei casi in cui gli eventi non sono equiprobabili, non è possibile utilizzare la teoria classica di probabilità.

Ad esempio,

"se ci chiedessimo qual è la probabilità che esca il segno X in una partita della schedina del totocalcio, istintivamente verrebbe da dire che il caso favorevole è 1 solo, mentre i casi possibili sono 3 (12X), quindi 1/3. Ciò, però, è totalmente errato. Lo si può notare anche dalle colonne vincenti, dove il segno 2 esce meno rispetto al segno X e ancora meno rispetto al segno 1. La causa di questa disparità è dovuta al fatto che il risultato di una partita di calcio NON E' UN EVENTO CASUALE ed è influenzato da molti fattori. La formula 6-5-2 (6 segni 1, 5 segni X, e 2 segni 2) è storicamente la più frequente nella schedina a 13 eventi (prima che fosse introdotto il 14). In questi casi, la probabilità è calcolata in modo "FREQUENTISTICO". Si prende cioè uno storico di eventi e si analizzano le frequenze di uscita dei segni. È lecito attendersi, almeno nel breve periodo ed a meno di fattori che cambino le "regole" del fenomeno studiato, che la tendenza continui e quindi (nel caso del Totocalcio), che i segni 1-X-2 continuino ad uscire con la stessa frequenza".

(Magolotto Probabilità e Giochi, 2016)

In questi ed altri casi si usa la definizione frequentistica o "a posteriori".

Prima di darne la definizione esatta dobbiamo definire il concetto di frequenza relativa.

Se un evento E si presenta K volte in N prove, indipendenti ed effettuate nelle medesime condizioni, si chiama **frequenza relativa**, il rapporto fra il numero di casi favorevoli usciti ed il numero delle prove fatte, in simboli:

$$f_r(E) = \frac{K}{N},$$

al crescere del numero delle prove, fatte tutte nelle stesse condizioni, la frequenza relativa pur variando, tende a stabilizzarsi attorno ad un valore, e tale valore attorno a cui le frequenze relative si stabilizzeranno corrisponde al valore della probabilità dell'evento. Ciò è conosciuto come la cosiddetta **legge empirica del caso**.

N.B. La frequenza e la probabilità sono due concetti del tutto diversi fra loro: la probabilità viene calcolata prima che l'evento accada, la frequenza, invece, deve essere calcolata dopo un numero congruo di prove, cioè dopo che gli eventi siano accaduti.

Anche la frequenza è un numero compreso fra 0 e 1, cioè:

$$0 \leq f_r(E) \leq 1.$$

Quest'ultima si distingue dalla probabilità nel fatto che 0 e 1 non corrispondono all'evento impossibile e a quello certo.

Ad esempio se lancio quattro volte un dado:



Figura 3.36: Immagine di lancio di dadi.

<https://it.dreamstime.com/fotografie-stock-libere-da-diritti-due-dadi-di-lancio-image11706408>

12/01/2017 ore 17,08

ed ottengo tutte le volte il numero 5, la frequenza di uscita del numero 5 sarà 1 e la frequenza di uscita di tutti gli altri numeri sarà 0 ma il fatto che esca 5 non è un evento certo così come non è impossibile che escano gli altri numeri.

Possiamo adesso dare la definizione di probabilità statistica:

Definizione: si definisce **probabilità a posteriori** di un evento E il limite della frequenza relativa, quando il numero delle prove ripetute tende all'infinito:

$$P(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{K}{N} \right\},$$

Vanno fatte alcune osservazioni:

1. La legge dei grandi numeri non è dimostrabile ma è puramente empirica
2. Il caso "non ha memoria"
3. Per esempio se lanciando una moneta viene "testa" molte volte di seguito, ciò non ci autorizza a pensare che nel lancio successivo sia più probabile che esca "croce". Ogni lancio è indipendente dagli altri già effettuati.
4. La legge empirica del caso dà un significato pratico al concetto di probabilità. La probabilità è la frequenza relativa con cui un certo evento tende a presentarsi su un numero grande di prove.

5. La legge empirica del caso legittima la definizione frequentista o statistica di probabilità.

Quest'ultimo concetto è strettamente legato alla definizione di Spin, che come vedremo nel proseguo della tesi, può assumere solo due valori, cioè la sua misura lungo una qualsiasi direzione fornisce solo due possibili risultati: Spin up e Spin down, effettuando la sperimentazione un numero elevatissimo di volte otterremo sempre il 50% di probabilità di avere spin up ed il 50% spin down.

3.3.4 Le distribuzioni di probabilità

Esistono situazioni sperimentali, come nel caso dello spin, in cui sono possibili, in una prova, due soli risultati: si verifica l'evento E oppure si verifica l'evento contrario ad E , in simboli $\neg E$ non E . Tali situazioni vengono descritte da una variabile casuale che, quindi, può assumere solo due valori in una prova: il valore "1" lo associamo all'evento E che ha probabilità p ed il valore "0" lo associamo all'evento $\neg E$ che ha probabilità $q = 1 - p$. La variabile casuale descrive una distribuzione di probabilità che è detta di Bernoulli, ed è così definita:

Sotto forma di tabella:

Tabella 3.5: Distribuzione di probabilità di Bernoulli.

| | | |
|-----------------------|-----|---------|
| Valori di $X: x_{ii}$ | 1 | 0 |
| Probabilità: $p(x)$ | p | $1-p=q$ |

Analogamente sotto forma grafica, si ha:

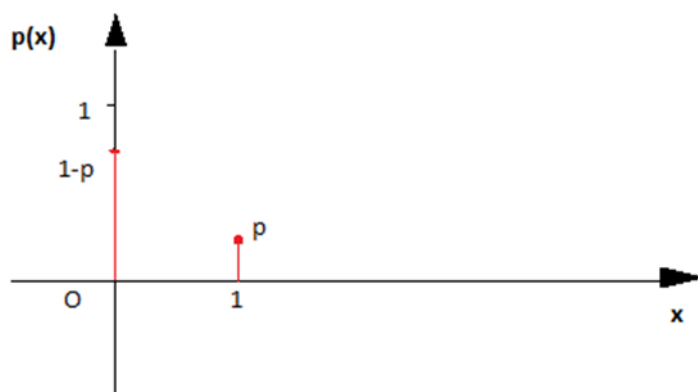


Figura 3.37 La probabilità 1 viene distribuita tra i valori possibili 0 e 1.

3.3.5 Cenni di statistica

La statistica è una disciplina che incontriamo spesso, nella quotidianità. Sui giornali si parla sempre di dati statistici relativi, ad esempio, ai prezzi dei prodotti in commercio, agli apprezzamenti dei programmi televisivi, ai risultati politici ed economici. In medicina ed in tutti i settori della scienza si impiegano i metodi della statistica per ordinare ed analizzare i dati numerici ottenuti negli esperimenti.

Mediante lo studio dei metodi utilizzati in statistica, per la presentazione dei dati, è possibile rendere intuitivi dati che altrimenti non sarebbero altro che "una sterile successione di numeri", ciò attraverso opportuni grafici e tabelle.

La statistica studia, quindi, i fenomeni collettivi, sia naturali che sociali, attraverso metodi matematici fondati soprattutto sulle tecniche di campionamento e sul calcolo delle probabilità, allo scopo di tracciare modelli esplicativi e di formulare previsioni. La statistica, per lo studio dei fenomeni, utilizza degli strumenti detti indici statistici.

3.3.6 Indici statistici

Esistono due grandi gruppi di indici:

Indici di posizione;

Indici di variabilità.

Gli indici di posizione e di variabilità consentono di sintetizzare in pochi numeri significativi le principali caratteristiche del fenomeno indagato.

In genere, un indice di variabilità fornisce informazioni sull'attitudine di un fenomeno ad assumere modalità differenti.

I primi, in un insieme di dati, ci danno proprio l'idea della posizione occupata, e i principali per il mio studio sono: la media, la mediana e la moda.

Per quanto riguarda i secondi, dobbiamo dire che ci danno l'idea di come varia o si disperde un certo dato rispetto ad un valore preso come riferimento (rispetto, ad esempio, ad un valore medio), i principali sono: la varianza e lo scarto quadratico medio.

3.3.7 Media aritmetica

Si definisce, secondo Cauchy, in senso matematico, media di più quantità diverse, quella quantità compresa fra la più piccola e la più grande delle quantità considerate.

Le medie analitiche possono considerarsi casi particolari della media potenziata di ordine m , ossia, M^m ;

per $m = 1$ si ha la media aritmetica.

Definizione: La media aritmetica di n numeri x_1, x_2, \dots, x_n è data dal rapporto tra la somma degli n numeri ed il totale dei numeri; in simboli, si ha:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

ES. Quale sarà la media dei voti di matematica dei sei allievi più bravi, sapendo che hanno preso rispettivamente: 8,5; 7; 9,5; 9; 8,5, 7,5?

| classe I A | pal | bag | batt | W | s/m | add | coo | fro | dor | nav |
|-------------|-----------|-----|------|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|
| | pallavolo | | | | | test | | | | |
| max punti | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,5 |
| attività | 1,1 | 1,2 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 1,3 | 1,4 | 1,6 | 1,7 | 3,2 |
| 1 studente | 3 | 3 | 3,5 | 3,5 | 4 | 1,5 | 0,5 | 1,5 | 1 | 0,5 |
| 2 studente | 3 | 3,5 | 3 | 3,5 | 4 | 1,5 | 1 | 1,5 | 2,5 | 0,5 |
| 3 studente | 4 | 3,5 | 4 | 3,5 | 4,5 | 2 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2 |
| 4 studente | 3,5 | 3,5 | 4 | 4 | 5 | 2,5 | 1,5 | 2,5 | 2,5 | 2 |
| 5 studente | 3,5 | 4 | 3,5 | 3 | 4,5 | 2,5 | 2,5 | 2 | 2,5 | 2 |
| 6 studente | 4 | 4 | 4 | 4 | 4,5 | 1,5 | 1,5 | 2 | 2,5 | 1,5 |
| 7 studente | 4 | 3,5 | 3,5 | 3 | 5 | 1,5 | 1,5 | 1 | 1,5 | 1 |
| 8 studente | 3,5 | 3,5 | 4 | 3 | 5 | 2,5 | 2 | 2,5 | 1,5 | 1 |
| 9 studente | 3,5 | 3 | 3,5 | 3,5 | 4 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1,5 |
| 10 studente | 3 | 3,5 | 3 | 4 | 5 | 2,5 | 2 | 2 | 2,5 | 2 |

Figura 3.38: Esempio di voti di un compito in classe.

<http://www.emanuelazibordi.it/wp/valutazione-a-punti-si-voti-no/>

12/01/2017 ore 17.32.

Utilizziamo la seguente formula:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{8,5 + 7 + 9,5 + 9 + 8,5 + 7,5}{6} = 8,3\bar{3}.$$

Quindi la media cercata è: $M = 8,3\bar{3}$.

Il valore medio della variabile casuale di Bernoulli è dato da:

$$M(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

3.3.8 Media aritmetica ponderata

Per definizione, la media aritmetica ponderata di n numeri x_1, x_2, \dots, x_n ai quali sono associati i pesi p_1, p_2, \dots, p_n , è il quoziente M tra la somma dei prodotti di ciascun peso per il numero ad esso associato e la somma dei pesi.

In simboli:

$$M = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

oppure:

$$M = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{p_i} \quad (3.2)$$

La media aritmetica ponderata si applica alle distribuzioni di frequenza, quando cioè, ai diversi numeri osservati sono associati i rispettivi pesi.

Per capire come si arriva alla media ponderata (ovvero “pesata” con le frequenze) partiamo da una serie di dati grezzi, ad esempio i voti di un gruppo di 20 allievi ad un esame:

4 5 5 7 6 5 8 6 6 7 7 6 8 9 8 8 7 5 4 6

Per calcolare la media, applicando la formula della media aritmetica semplice, dovremmo procedere sommando i pesi e dividendo il risultato per il numero di osservazioni, ovvero:

$$M = \frac{4+5+5+7+6+5+8+6+6+7+7+6+8+9+8+8+7+5+4+6}{20} = 6,35.$$

Il voto medio all'esame è di 6,35.

Per semplificare l'operazione, potremmo raggruppare i voti in ordine crescente, ottenendo la seguente serie:

4 4 5 5 5 6 6 6 6 6 7 7 7 7 8 8 8 8 9

e per calcolare la media considereremo li singoli pesi moltiplicati per il numero di volte che compaiono, nel seguente modo:

$$M = \frac{(4x2)+(5x4)+(6x5)+(7x4)+(8x4)+9}{20} = 6,35.$$

Di fatto, l'operazione di raggruppamento la utilizziamo per costruire la distribuzione di frequenze dei pesi.

Gli stessi voti si possono raggruppare in una tabella nel seguente modo:

Tabella 3.6: Voti dati agli studenti ad un esame.

| Voti | Pesi p | Frequenze relative |
|------|--------|--------------------|
| 4 | 2 | 0,1 |
| 5 | 4 | 0,2 |
| 6 | 5 | 0,25 |
| 7 | 4 | 0,2 |
| 8 | 4 | 0,2 |
| 9 | 1 | 0,05 |
| T | 2 | 1 |
| ot | 0 | |

Il risultato si ottiene più semplicemente con la formula (3.2) ed è molto utilizzato nella quotidianità.

3.3.9 Mediana

La mediana è un indice di posizione, ossia quel valore che bipartisce una serie ordinata, in modo che il numero dei termini che la precede è uguale al numero dei termini che la segue.

Per calcolare la media di un insieme di n dati x_1, x_2, \dots, x_n , necessita prima ordinarli, poi contarli per vedere se risultano essere pari o dispari.

Se sono dispari la mediana sarà il valore di mezzo o centrale, in formule:

$$M_e = \frac{n+1}{2}.$$

Se sono pari, la mediana sarà data dalla semisomma dei due valori di mezzo o centrali.

ES: Ai 13 allievi di una classe è stata chiesta la media dei voti di italiano riportati nel primo quadrimestre che inseriamo nella seguente tabella:

Tabella 3.7: Media dei voti di Italiano conseguiti nel primo quadrimestre.

| | |
|----------|---------|
| A | 5 |
| B | 6 |
| C | 5 ,5 |
| D | 8 |
| E | 6 |
| F | 4 |
| G | 4 ,5 |
| H | 5 |
| I | 7 |
| L | 7 ,5 |
| M | 3 ,5 |
| N | 4 |
| O | 6 ,5 |

Per calcolare la mediana è necessario mettere in ordine crescente i 13 valori che indicano i voti riportati:

Tabella 3.8: Media dei voti considerate, in ordine crescent.

| |
|----|
| 3 |
| ,5 |
| 4 |
| 4 |
| 4 |
| ,5 |
| 5 |
| 5 |
| 5 |
| ,5 |
| 5 |
| 6 |
| 6 |
| 6 |
| ,5 |
| 7 |
| 7 |
| ,5 |
| 8 |

Essendo l'insieme di dati dispari, $n = 13$, $\frac{n+1}{2} = \frac{13+1}{2} = \frac{14}{2} = 7$, pertanto la mediana cercata è 5,5.

ES: Considerando l'esempio 1 nel caso in cui gli allievi fossero in numero pari, 12 anziché 13:

Tabella 3.9: Media dei voti di Italiano conseguiti nel primo quadrimestre di 12 allievi.

| | |
|----------|---------|
| A | 5 |
| B | 6 |
| C | 5 ,5 |
| D | 8 |
| E | 6 |
| F | 4 |
| G | 4 ,5 |
| H | 5 |
| I | 7 |
| L | 7 ,5 |
| M | 3 ,5 |
| N | 4 |

e, in ordine crescente:

Tabella 3.10: Media dei voti in ordine crescent.

| | |
|----|---|
| | 3 |
| ,5 | |
| | 4 |
| | 4 |
| ,5 | 4 |
| | 5 |
| | 5 |
| | 5 |
| ,5 | |
| | 6 |
| | 6 |
| ,5 | 6 |
| | 7 |
| | 7 |
| ,5 | |

Per ottenere la mediana si considerano i due valori centrali, il sesto ed il settimo, cioè 5 e 5,5, e si fa la semisomma:

$$M_e = \frac{5+5,5}{2} = 5,25.$$

In questo caso, la mediana sarà, quindi, 5,5.

3.3.10 La moda

La moda di n elementi x_1, x_2, \dots, x_n è un indice di posizione ed è quel valore a cui corrisponde la massima frequenza. La **moda** campionaria non è influenzata da valori estremi e può essere usata anche per dati non numerici, cioè dati qualitativi. Si può osservare che la moda campionaria può non esistere o non essere unica.



Figura 3.39 Gruppo di genitori davanti una scuola elementare.

<http://ciaopolo2galatina.blogspot.it/p/un-saluto-speciale.html>

12/01/2017 ore 18.17

ES: Consideriamo la seguente tabella formata dalle età di un gruppo di 15 genitori di una classe prima elementare in ordine crescente:

Tabella 3.11: età di un gruppo di 15 genitori di una classe prima elementare in ordine crescente.

| | |
|---|---|
| | 3 |
| 5 | |
| 4 | 3 |
| | 4 |
| 0 | |
| 8 | 3 |
| | 3 |
| 6 | |
| 5 | 3 |
| | 3 |
| 6 | |
| 4 | 3 |
| | 2 |
| 6 | |
| 5 | 2 |
| | 3 |
| 5 | |
| 5 | 3 |
| | 2 |
| 5 | |
| | 3 |

4

3

5

Per calcolare la moda campionaria delle età è necessario costruire la distribuzione di frequenza delle età, ossia associare ad ogni valore dell'età la sua frequenza assoluta, come in tabella:

Tabella 3.12: Distribuzione di frequenza delle età.

| Età | Frequenza |
|------------|------------------|
| 25 | 2 |
| 26 | 1 |
| 34 | 3 |
| 35 | 5 |
| 36 | 2 |
| 38 | 1 |
| 40 | 1 |

Si ricava facilmente che la moda delle età è il valore 35 poiché è quello che si presenta il maggior numero di volte (si presenta infatti con frequenza assoluta uguale a 5).

Nel caso in cui si abbia una distribuzione di dati, per esempio la distribuzione della popolazione della regione Sicilia nell'anno 2016, suddivisa per regioni, come da dati Istat.

(<http://www.tuttitalia.it/sicilia/statistiche/popolazione-eta-sesso-stato-civile-2016/>, s.d.)

Tabella 3.13: Distribuzione della popolazione della regione Sicilia nell'anno 2016, suddivisa per regioni (Dati Istat):

| <i>Età</i> | <i>Totale</i> | |
|--------------|----------------|-------------|
| | | <i>%</i> |
| 0-4 | 224.287 | 4,4% |
| 5-9 | 243.333 | 4,8% |
| 10-14 | 257.451 | 5,1% |
| 15-19 | 272.222 | 5,4% |
| 20-24 | 307.093 | 6,1% |
| 25-29 | 319.012 | 6,3% |
| 30-34 | 315.977 | 6,2% |
| 35-39 | 339.395 | 6,7% |
| 40-44 | 373.201 | 7,4% |
| 45-49 | 383.423 | 7,6% |
| 50-54 | 374.126 | 7,4% |
| 55-59 | 337.569 | 6,7% |
| 60-64 | 302.305 | 6,0% |
| 65-69 | 296.587 | 5,8% |
| 70-74 | 217.974 | 4,3% |
| 75-79 | 208.321 | 4,1% |
| 80-84 | 158.342 | 3,1% |
| 85-89 | 96.847 | 1,9% |
| 90-94 | 38.485 | 0,8% |
| 95-99 | 7.112 | 0,1% |

| | | |
|---------------|------------------|------------|
| 100+ | 1.199 | 0,0% |
| Totale | 5.074.261 | 1 00,0% |

In questa situazione si parla di classe modale, che nel caso della distribuzione dell'esempio sarà 50-54.

3.3.11 Varianza

Esistono alcuni indici che servono a misurare la variabilità all'interno di una serie di dati.

La variabilità è l'attitudine che hanno i fenomeni ad assumere modalità differenti nei singoli casi. L'importanza di conoscerne la misura dipende dal fatto che spesso il calcolo della media di un fenomeno non è sufficiente ai fini investigativi, in quanto la maggiore o minore variabilità del carattere in studio può vanificare il valore descrittivo e il significato stesso della media.

Gli indici che misurano la variabilità delle distribuzioni statistiche sono: lo scarto quadratico medio e la varianza.

Il primo si indica con σ ed è la media quadratica semplice o ponderata degli scarti, cioè prende in considerazione gli scarti dei valori osservati x_i da una media (in genere quella aritmetica). Tutti questi indici hanno lo stesso significato cioè indicano "quanto in media ogni termine si discosta dalla propria media".

La varianza di n numeri x_1, x_2, \dots, x_n è data dal quadrato di sigma, σ^2 , ossia dal rapporto fra la devianza (somma dei quadrati degli scarti) e il numero delle osservazioni; In simboli, se indichiamo con M la media aritmetica degli n numeri x_1, x_2, \dots, x_n , si ha:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \dots + (x_n - M)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M)^2}{n}$$

La varianza, in una distribuzione bernoulliana è data da:

Osservazione: Un valore basso significa che i dati sono raggruppati molto vicini fra loro, mentre una varianza elevata indica dei dati più distribuiti.

ES: Analizzando il numero di caffè venduti ogni giorno in un bar del centro:



Figura 3.40: Fotografia di una tazzina di caffè consumata in un bar.

http://www.ecodibergamo.it/stories/Cronaca/il-tempo-di-bere-un-caffe-al-bar-e-mi-hanno-rubato-il-suv-nuovo_1087139_11/

12/01/2017 ore 18.24

otteniamo il campione casuale raccolto in sei giorni nella seguente tabella:

Tabella 3.14 numero di caffè venduti in 6 giorni in un bar del centro

| | |
|----|---|
| | 1 |
| 05 | |
| 20 | 1 |
| 25 | 1 |
| 10 | 1 |
| 0 | 9 |
| 5 | 9 |

Calcoliamo la media:

$$M = \frac{105+120+125+110+90+95}{6} = 107,5.$$

Se i dati si raggruppano attorno alla media, significa che la varianza è bassa. Se i valori si allontanano dalla media e sono molto distribuiti attorno ad essa, allora il valore della varianza è alto.

Consideriamo la seguente tabella:

Tabella 3.15: Tavola riassuntiva dei valori della media e del numeratore della varianza.

| | x | M | $x_i - M$ | $(x_i - M)^2$ |
|-------|-----|-----|-----------|---------------|
| x_1 | 10 | 107 | 2,5 | 6,25 |
| | 5 | ,5 | | |
| x_2 | 12 | 107 | 12, | 156, |
| | 0 | ,5 | 5 | 25 |
| x_3 | 12 | 107 | 7,5 | 306, |
| | 5 | ,5 | | 25 |
| x_4 | 11 | 107 | 2,5 | 6,25 |
| | 0 | ,5 | | |
| x_5 | 90 | 107 | 17, | 306, |
| | | ,5 | 5 | 25 |
| x_6 | 95 | 107 | 12, | 56,2 |
| | | ,5 | 5 | 5 |

A questo punto calcolo il numeratore della formula:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - M)^2 = 6,5 + 156,25 + 306,25 + 6,25 + 306,25 + 156,25 = 937,5$$

Infine:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M)^2}{n} = \frac{937,5}{6} = 156,25.$$

3.3.12 Scarto quadratico medio

Lo scarto quadratico medio di n numeri x_1, x_2, \dots, x_n è dato dalla radice quadrata della varianza. Esso si indica con il simbolo σ e si ha:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-M)^2 + (x_2-M)^2 + \dots + (x_n-M)^2}{n}}.$$

Confrontando questa formula con quella della varianza, possiamo facilmente intuire che lo scarto quadratico medio è la media quadratica degli scarti della media.

Questi concetti ripresi in siffatta parte della tesi sono utili per la comprensione del nuovo approccio didattico che verrà illustrato nei prossimi capitoli.

PARTE SECONDA

MARCO EMPIRICO

CAPITOLO 4

“IT FROM THE BIT”

LE PROBABILITÀ QUANTISTICHE DA BIT E VETTORI

4.1 Attenuando sempre più un fascio di luce...

Storicamente, la luce ha guidato le principali rivoluzioni che hanno portato alla fisica moderna. Ad esempio la relatività ristretta è nata dall'osservazione che le equazioni che descrivono la propagazione della luce a differenza dalle equazioni della meccanica non sono invarianti per trasformazioni Galileiane. La fisica quantistica è nata dall'analisi di Planck dell'emissione di luce dal corpo nero (Planck, 1900) e dall'analisi di Einstein degli esperimenti sull'effetto fotoelettrico ["The Nobel Prize in Physics 1923". Nobel Foundation. Retrieved 2015-03-29.](#)

Incoraggiati da questi illustri precedenti, introduciamo questo nuovo approccio didattico all'introduzione della MQ partendo da un fascio di luce.

Immaginiamo di inviare un fascio di luce di durata temporale finita (impulso) (Santori, Fattal, Salomon, & Yamamoto, 2002) su un beam-splitter (separatore di fascio), che è un dispositivo ottico che divide un raggio di luce (beam) in due

parti. Esso può essere formato da un cubo composto da due prismi triangolari, attaccati alla loro base mediante una colla. L'interfaccia è tale che, per un certo intervallo di lunghezze d'onda (regione spettrale), metà della luce incidente attraverso una faccia del cubo viene riflessa e l'altra metà invece viene trasmessa.

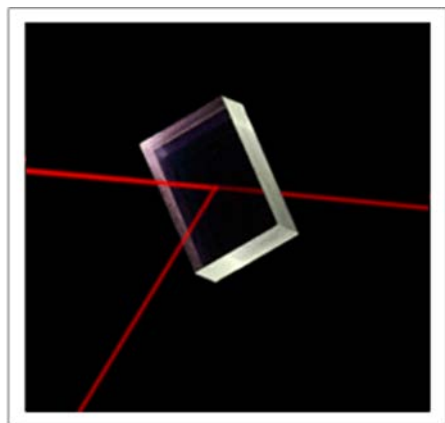


Figura 4.1: Immagine tridimensionale di un beam-splitter.

http://www.optek.cn/product_2.asp 12/01/2017 ore 18.33

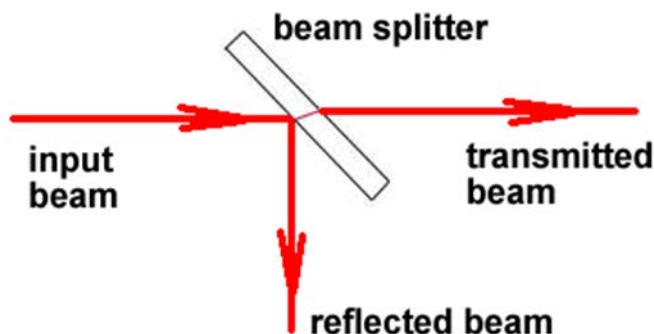


Figura 4.2: Immagine schematica del funzionamento di un beam-splitter.

<http://www.sintecoptronics.com/BeamSplitter.asp> 12/01/2017 ore 18.34

Secondo la fisica classica si può diminuire sempre di più l'intensità della luce ed ugualmente si avranno sempre due fasci, anche se più deboli, ciascuno con intensità pari a metà di quella del fascio entrante. Ad esempio, secondo l'elettromagnetismo classico si potrebbe, considerando una serie interminabile di beam-splitter posti in sequenza, partendo da un primo impulso, ottenere un numero illimitato di fasci indipendenti sempre più deboli.

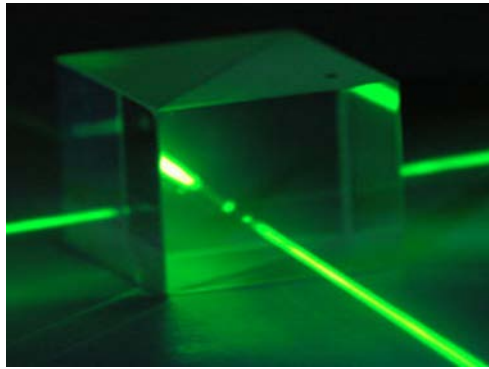


Figura 4.3: Fasci di luce uscenti da beam-splitter.

<http://physics.aps.org/story/v13/st21>

12/01/2017 ore 18.38.

Ognuno di questi potrebbe essere utilizzato per codificare informazione. Quindi in un fascio di energia finita si potrebbe codificare informazione illimitata.

La FQ ci dice che ciò non è possibile. Ovvero esiste un limite oltre il quale non è più possibile suddividere ulteriormente il fascio di luce. In tal caso, ponendo un rivelatore nella direzione di riflessione ed uno in quella di trasmissione, si potrà osservare in corrispondenza dell'arrivo dell'impulso, un segnale solo in uno dei due rivelatori. Questa possibilità, ci appare in fondo qualcosa del tutto naturale. Un po' come a furia di dividere in due parti uguali, su due piatti di una bilancia, un mucchietto di sabbia, si arriverà alla situazione finale in cui avrò un solo granello che potrà poggiare solo su uno dei due piatti. Anche l'acqua ci appare un fluido continuo pur essendo costituita da molecole.



Figura 4.4: Illustrazione di una bilancia utilizzata per per pesare e suddividere i granelli di sabbia.

http://www.mobilinuoviusati.it/ecommm/index.php?main_page=product_info&products_id=4

12/01/2017 ore 18.40.



Figura 4.5: Duna di sabbia come esempio di una figura che sembra continua ma che in realtà può essere divisa fino ad ottenere un singolo granello.

<http://www.internetdict.com/it/answers/what-is-a-sand-dune.html> 12/01/2017 ore 18.42

Tornando all'impulso di luce, sorge naturalmente la domanda: quando esso non è più divisibile, quale direzione seguirà? Quale dei due rivelatori si "accenderà" per segnalare l'arrivo dell'impulso? Possiamo trovare la risposta partendo dalle osservazioni della fisica classica. Partiamo dal punto di vista che esiste una sola fisica, che, ovvero le leggi della natura non cambiano se ho un impulso intenso (con molti fotoni) o un impulso ultra-debole (anche perché sappiamo che i fotoni non interagiscono direttamente tra loro). Se esiste un quanto indivisibile di luce, posso immaginare che l'impulso più intenso contenga molti di questi quanti. Quindi il semplice l'esperimento di un fascio sufficientemente intenso, inviato su un beam-splitter al 50% può farci da guida. In questo esperimento il 50% della luce viene riflesso e l'altro 50% trasmesso. Ciò significa che il beam-splitter è stato progettato in modo che metà dei quanti vengano riflessi e metà trasmessi. Naturalmente non c'è niente di speciale nell'aver scelto un beam splitter al 50% (Riflettanza R e Trasmittanza T pari a 0.5). Il beam splitter può essere preparato in modo da avere una riflettanza superiore o inferiore a 0.5. In assenza di assorbimento si avrà comunque che:

$$R + T = 1$$

Essendo gli impulsi in uscita ancora sufficientemente intensi non facciamo caso al fatto che sono composti da quanti, così come la sabbia ci appare un

continuo uniforme. Ripetendo l'esperimento con impulsi ultra-deboli, innumerevoli volte, ci aspettiamo di ottenere alla fine un risultato molto simile al caso in cui mandiamo tanti fotoni in una volta. Succederà quindi, che metà dei fotoni verranno riflessi e l'altra metà trasmessi. Concentrandoci quindi sul singolo impulso ultra-debole, l'unico risultato possibile è che il quanto di luce verrà in maniera casuale (cioè random) il 50% delle volte trasmesso e il 50% delle volte riflesso e ciò, chiaramente avverrà secondo regole di tipo probabilistico, nel senso che possiamo solo conoscere la probabilità che esso venga trasmesso o riflesso. Questo ragionamento può già fare intuire che la probabilità quantistica non è in realtà qualcosa di bizzarro ed incomprensibile.

Tornando all'esperimento con fasci più intensi, se indichiamo con I l'intensità di luce, sapendo che l'intensità totale è data dalla somma delle intensità di riflessione e trasmissione, cioè:

$$I_i = I_R + I_T \quad (4.1),$$

otteniamo che la luce trasmessa, cioè la trasmittanza, sarà data dal rapporto tra l'intensità di trasmissione e l'intensità totale, in formule:

$$T = \frac{I_T}{I_i} \quad (4.2),$$

da cui, sostituendo al valore dell'intensità incidente nella (4.2) la somma delle due intensità, trasmessa e riflessa, trovata nella (4.1), otteniamo:

$$T = \frac{I_T}{I_T + I_R} = \frac{1}{2} \quad (4.3)$$

per $I_R = I_T$. Analogamente, la riflettanza sarà data dal rapporto tra l'intensità di riflessione e l'intensità totale:

$$R = \frac{I_R}{I_i}$$

da cui:

$$\mathbf{R} = \frac{I_R}{I_T + I_R} = \frac{1}{2} \quad (4.4)$$

Immaginiamo adesso di eseguire molte misure (n) con fasci molto attenuati costituiti da impulsi a singolo fotone.

Indicando con n_T il numero di fotoni che vengono trasmessi e con n_R il numero dei fotoni riflessi, la loro somma ci darà il numero totale n dei fotoni considerati. Possiamo calcolare la trasmittanza e la riflettanza assumendo che il risultato coincida con quello ottenuto con il fascio più intenso, ovvero come se gli n fotoni fossero stati inviati in un unico fascio più intenso:

$$\mathbf{T} = \frac{n_T}{n_T + n_R} \quad (4.5)$$

e

$$\mathbf{R} = \frac{n_R}{n_T + n_R} \quad (4.6)$$

Osserviamo, ricordando quanto descritto nei prerequisiti sulla probabilità, che le Eq. (4.5) e (4.6) descrivono proprio le probabilità:

$$P(T) = \frac{n_T}{n_T + n_R}$$

che il singolo fotone venga trasmesso e:

$$P(R) = \frac{n_R}{n_T + n_R}$$

che venga riflesso.

Ovviamente, si ha, come si può immediatamente verificare, che la somma delle probabilità è pari ad 1:

$$P(T) + P(R) = 1.$$

Nel caso di beam splitter al 50% si ottiene quindi:

$$P(T) = T = 0.5 \quad (4.7)$$

e

$$P(R) = R = 0.5 \quad (4.8)$$

Ciò, in accordo con la MC, significa che il fotone avrà il 50% di probabilità di essere trasmesso, cioè di andare in una direzione ed il 50% di essere riflesso, cioè di andare nell'altra direzione. Ciò significa ancora, che non possiamo assolutamente stabilire a priori il risultato della misura perché la riflettanza e la trasmittanza coincidono con la probabilità che il fotone venga riflesso o trasmesso rispettivamente.

4.2 Descrizione degli esperimenti di Stern-Gerlach

Una delle proprietà fondamentali delle particelle, nella meccanica quantistica, è lo spin. Esso corrisponde in gran parte al momento angolare della fisica classica ma se ne distacca per alcune caratteristiche. Mentre in fisica classica il momento angolare descrive lo slancio con cui un corpo gira intorno al proprio asse e può variare con continuità, in meccanica quantistica lo spin può essere rivolto solo in su o in giù lungo una qualsiasi direzione prefissata, cioè la sua misura lungo una qualsiasi direzione fornisce solo due possibili risultati.



Figura 4.6: Rappresentazione naif dello spin in Meccanica Quantistica.

<http://www.preposterousuniverse.com/blog/2014/06/30/why-the-many-worlds-formulation-of-quantum-mechanics-is-probably-correct/> 14/01/2017 ore 9.29.

La misurazione dello spin avviene grazie all'esperimento di Stern-Gerlach.



Figura 4.7: Foto di Otto Stern e Walter Gerlach al tempo dell'esperimento.

https://www.labmate-online.com/news/laboratory-products/3/breaking_news/nmr_basics_101_what_is_nuclear_spin/31398 14/01/2017 ore 9.31.

Nel 1921 Otto Stern concepì tale esperimento che poi realizzò insieme al fisico tedesco Walter Gerlach nel 1922, a Francoforte, per determinare l'effetto del campo magnetico su alcuni atomi di argento. L'apparato di Sten-Gerlach produce una deviazione della traiettoria atomica proporzionale ad una componente del momento magnetico atomico. Quest'ultimo è proporzionale al momento angolare totale elettronico.

Si è scelto l'Argento (Ag) perché i suoi atomi si comportano come un piccolo magnete. Esso è un metallo avente numero atomico 47, cioè un numero di elettroni pari a 47 sparsi intorno al suo nucleo, dei quali 46 possono essere visti come una nube elettronica priva di momento angolare. In particolare i 46 elettroni complessivamente non hanno momento angolare orbitale, inoltre gli elettroni a due a due hanno spin opposto, pertanto il momento angolare totale è zero e non vi è quindi momento magnetico dovuto agli elettroni interni.

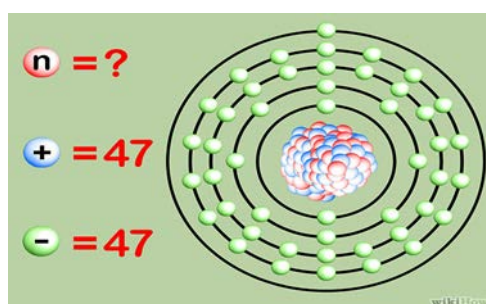


Figura 4.8: Illustrazione naif di un atomo di idrogeno con numero atomico 47.

<http://it.wikihow.com/Trovare-il-Numero-Atomico-14/01/2017>.

L'unico elettrone rimanente ha anche momento orbitale zero, pertanto l'unica sorgente di momento magnetico è quella dovuta allo spin intrinseco dell'elettrone esterno. Pertanto, l'esperimento, rappresenta una misura diretta di una componente dello spin dell'elettrone. La componente che viene misurata è quella lungo la direzione del campo magnetico indotto dall'apparato.

Descriviamo, adesso, l'esperimento:

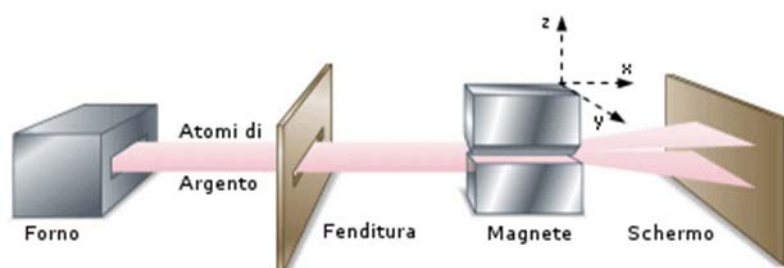


Figura 4.9: L'esperimento di Stern-Gerlach.

<http://www.larapedia.com/chimica/chimica-generale-2.html>

14/01/2017 ore 9.37.

I due fisici presero un fascio di atomi di argento fatti prima riscaldare in un forno, dotato di una piccola apertura e li fecero passare "sparandoli", in direzione orizzontale (x), attraverso una regione con campo magnetico non uniforme, lungo l'asse verticale z (quindi nello spazio, in 3D), per poi fargli raggiungere uno schermo. L'effetto del campo magnetico è quello di deviare la loro traiettoria. In tal modo ci si aspetta che il fascio venga suddiviso a secondo dei valori che il momento magnetico μ assume rispetto all'asse z .

Ragionando in maniera classica ci aspettiamo di trovare come risultato, sullo schermo, la disposizione spaziale di particelle della figura 3.10a, dovuta al fatto che ogni atomo avrà una orientazione casuale di spin. Cioè ci aspetteremmo di ottenere tutti i valori di μ_z compresi tra $\pm\mu$.

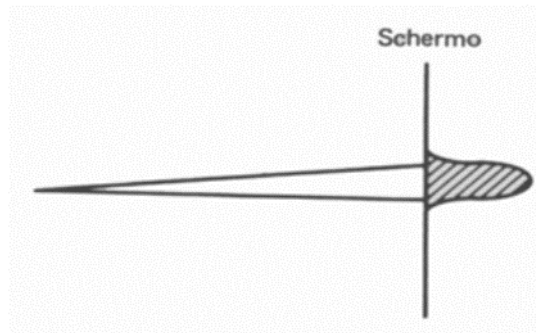


Figura 4.10a: Distribuzione continua di fasci emergente da un dispositivo di SG (predizione della fisica classica).

<http://miaplacidusedaltriracconti.blogspot.it/2012/01/meccanica-quantistica-lesperimento-di.html> 14/01/2017 ore 9.45.

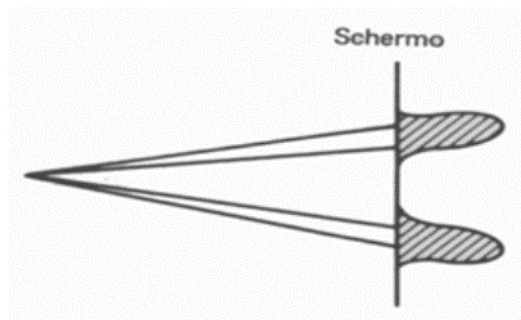


Figura 4.10b: Distribuzione quantistica di fasci: (quanto si osserva realmente).

<http://miaplacidusedaltriracconti.blogspot.it/2012/01/meccanica-quantistica-lesperimento-di.html> 14/01/2017 ore 9.45.

Le curve piene tratteggiate disegnate nelle Fig. 4.10a e 4.10b rappresentano la distribuzione di frequenza delle particelle che colpiscono lo schermo. In realtà ciò che si osserva è schematizzato nella Fig. 4.10b. Le particelle del fascio d'argento, proveniente dal forno, si dividono in due fasci separati. Questo dimostra che lo spin misurato S può assumere solo due valori, S_z up ($S_z +$) e S_z down ($S_z -$). Tali valori sono multipli di una unità fondamentale di momento angolare, cioè: un angolo occorre fissare un'unità di misura, cioè il grado.

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \text{ oppure } S_z = -\frac{\hbar}{2}.$$

Dove \hbar in meccanica quantistica rappresenta la costante di Plank ridotta.

Consideriamo adesso di posizionare vari apparati di Stern-Gerlach in sequenza. Ci chiediamo cosa succede se vogliamo misurare lo spin di uno dei due fasci risultanti.

Consideriamo una sorgente da cui fuoriescono gli atomi di argento e applichiamo ad esso un primo apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse z , e vediamo cosa succede quando misuriamo lo spin lungo quest'asse. Come accennato sopra ponendo uno schermo a valle dell'apparato si osserveranno due macchie di uguale intensità corrispondenti ai due possibili valori di spin.

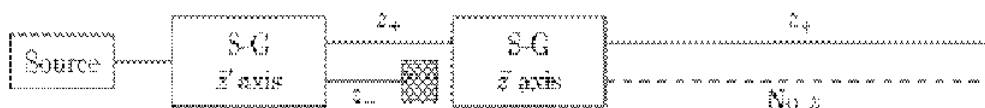


Figura 4.11: Prima sequenza dell'esperimento di Stern-Gerlach.

<http://www.quantizzando.org/2013/04/gatti-quantistici.html> 14/01/2017 ore 9.40.

Ora si supponga di prendere uno solo dei due fasci (ad esempio $z +$); bloccando l'emissione di atomi in $z -$ e di misurare con un secondo strumento, rivolto sempre verso l'asse z (Fig.4.11) lo spin lungo l'asse z . Troveremo che il fascio uscente produrrà su uno schermo soltanto una macchia corrispondente al valore di spin $z +$.

Si pensi adesso, di ripetere l'esperimento prendendo uno solo dei due fasci (ad esempio $z +$); bloccando, nuovamente, l'emissione di atomi in $z -$ e di misurare lo spin lungo l'asse x con un secondo strumento rivolto appunto lungo l'asse x (Fig.3.12). Ci si accorge che questa volta, il fascio iniziale S_{z+} si divide in due componenti S_{x+} e S_{x-} di uguale intensità (50% up e 50% down). Quindi atomi con spin up lungo l'asse z , mostrano comunque una completa indeterminazione per quanto riguarda la componente x dello spin.

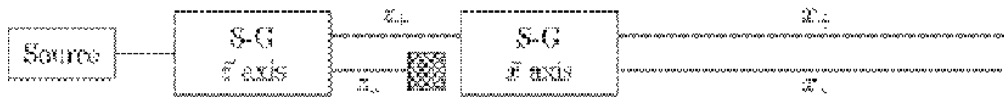


Figura 4.12: Seconda sequenza dell'esperimento di Stern-Gerlach.

<http://www.quantizzando.org/2013/04/gatti-quantistici.html> 14/01/2017 ore 9.41.

Ma ancora questo è classicamente comprensibile poiché si sta misurando lo spin lungo un'altra direzione completamente indipendente da quella iniziale.

Si aggiunga adesso un terzo dispositivo del tipo SG orientato per la misura del momento magnetico (e quindi in questo caso dello spin) lungo l'asse z e si prenda in considerazione uno dei due fasci, ad esempio $z +$, e si misuri di nuovo lo spin lungo l'asse z . Secondo la teoria classica, poiché gli atomi provengono in origine dal fascio $z +$ non si dovrebbe vedere una divisione del fascio poiché le particelle sono ormai state selezionate tutte con lo stesso spin $+$ lungo l'asse z . Invece la misura che viene trovata è una nuova divisione del fascio nelle due componenti S_{z+} e S_{z-} . Ovvero circa il 50% degli atomi andrà a formare una macchia in alto sullo schermo (spin $z +$) ed il restante 50% una macchia in basso (spin $z -$).

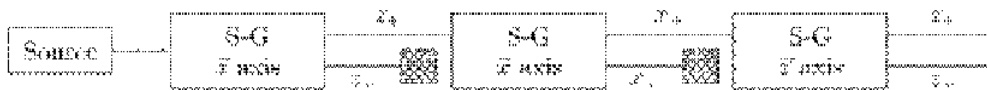


Figura 4.13: Sequenza finale dell'esperimento di Stern-Gerlach.

<http://www.quantizzando.org/2013/04/gatti-quantistici.html> 14/01/2017 ore 9.42.

Questa è una vera sorpresa perché dopo il primo esperimento ci si era assicurati che la componente S_{z-} fosse completamente bloccata. Come si può spiegare la ricomparsa di S_{z-} ? Da ciò ci si rende conto che il modello classico risulta insufficiente a spiegare il fenomeno appena osservato.

La conclusione a cui si può arrivare è che la misura di Stern-Gerlach lungo l'asse x e la scelta del fascio S_{x+} distrugge ogni informazione precedente su S_z .

Ciò che è importante capire è che il limite a cui sono venuti incontro Otto Stern e Walter Gerlach, nel loro esperimento, non dipende né dalle tecniche sperimentali, né dalla incompetenza degli sperimentatori, ma dalla peculiarità intrinseca della meccanica quantistica inerente a fenomeni microscopici.

Il Dispositivo di Stern-Gerlach presenta quindi un possibile modo di misurare le varie componenti del momento angolare. La semplicità dei risultati dell'esperimento (solo due casi possibili), ed il fatto che esso produce risultati che sono direttamente prova delle leggi della meccanica quantistica in azione, lo rende un mezzo ideale attraverso il quale si possono capire alcune delle caratteristiche essenziali della meccanica quantistica.

In particolare, nel terzo esperimento, la misura di S_x distrugge ogni precedente informazione su S_z . C'è una indeterminazione nel comportamento degli atomi presi individualmente. Nel terzo esperimento, pur avendo bloccato la componente S_{z-} questa riappare nella misura di S_z se, nel frattempo, misuriamo S_x .

Si può dire che in meccanica quantistica, non possiamo determinare simultaneamente S_z e S_x . In particolare, in riferimento al setup descritto in Fig.3.13, una particella uscente dal secondo apparato di SG con spin $x +$ inviata al terzo SG, ha il 50% di probabilità di essere deviata verso l'alto (spin $z +$) ed il 50% verso il basso ($z -$). Questo è un chiaro esempio di come, inevitabilmente in MQ emerga il concetto di probabilità.

La descrizione accurata di concetti come la probabilità ed il principio di indeterminazione necessita l'introduzione del formalismo generale della meccanica quantistica piuttosto astratto e complesso poco adatto ad allievi di scuola secondaria superiore (vedasi introduzione).

Proprio per questo, nel prossimo paragrafo verrà illustrato, partendo dal concetto di spin, un metodo semplice per introdurre i concetti di probabilità di transizione, principio di indeterminazione e collasso dello stato quantistico determinato dalla misura, senza l'utilizzo del suddetto formalismo. Tale metodo permette anche di calcolare le probabilità di transizione e di spiegare in dettaglio i

risultati degli esperimenti degli apparati di SG sequenziali. Questo verrà successivamente applicato anche per la descrizione del concetto di entanglement (base del teletrasporto) nel capitolo successivo.

4.3 Vettori e bit

Come si è visto nel paragrafo precedente, lo spin descrive il momento angolare intrinseco dell'elettrone. Si tratta quindi di un vettore. Inoltre, gli esperimenti di Stern-Gerlach descritti hanno mostrato che la misura di una componente dello spin lungo una direzione arbitraria può fornire solo due esiti, up (+) o down (-).

Il fatto che lo spin sia una quantità vettoriale è perfettamente naturale, infatti, come è noto, le leggi della fisica di solito sono formulate in termini di variabili fisiche descritte da scalari, vettori, o più in generale, tensori. Ovvero le variabili fisiche hanno precise proprietà di trasformazione sotto l'effetto di rotazioni (vedi Capitolo Prerequisiti 3.2.9)

Lo spin è quindi un vettore e per questo deve seguire precise regole di trasformazione sotto l'effetto di rotazioni, ma allo stesso tempo, a differenza dei vettori classici, possiede una nuova anomala proprietà: può fornire solo due risultati. Infatti, se si misura una sua componente lungo una direzione arbitraria, gli esperimenti di Stern-Gerlach ci dicono che l'esito della misura consisterà in solo due possibili risultati, spin lungo l'asse orientato di misura (spin up) o lungo l'asse con verso opposto (spin down). Quindi la misura fornirà un bit di informazione (uno tra i soli due possibili valori).

Di seguito, si partirà da queste due osservazioni e verrà mostrato come gli aspetti più interessanti e peculiari della meccanica quantistica ed in particolare l'emergere della probabilità quantistica, siano conseguenze dirette di queste due osservazioni.

In sintesi si assumono i due seguenti principi:

- i. se si misura una componente dello spin lungo un asse arbitrario si ottiene uno tra due soli possibili esiti.**

e

- ii. **lo spin è un vettore e come tale è soggetto a trasformazioni continue di rotazione;**

Si Consideri un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, supponiamo di compiere una misura con un apparato di Stern-Gerlach lungo l'asse z , indichiamo con \mathbf{J} il vettore orientato lungo l'asse di misura,

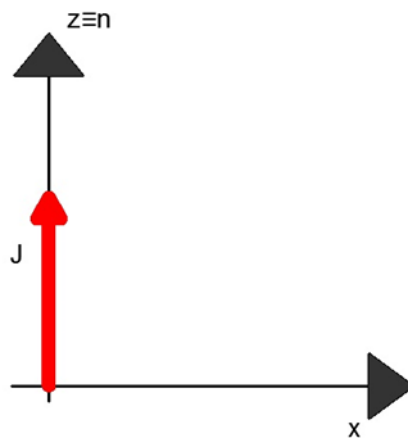


Figura 4.14: Vettore \mathbf{J} orientato lungo l'asse di misura z .

e con $\pm a$ i due risultati ottenuti dalla misura, (testa e croce).

Si noti che per le proprietà di rotazione dei vettori le due uscite devono avere lo stesso valore assoluto, in modo che una rotazione di 180°

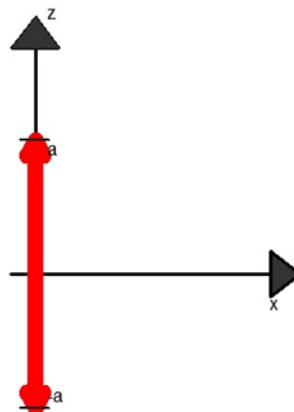


Figura 4.15: Uscite con medesimo valore assoluto.

corrisponda alla trasformazione, ad esempio da $+a$ a $-a$. Inoltre, in queste ipotesi, subito dopo la misura, il vettore è allineato lungo l'asse di misurazione. Infatti, per le proprietà di rotazione dei vettori, se, dopo aver effettuato una misura e aver ottenuto ad esempio $+a$, il vettore non fosse allineato lungo l'asse di misura una rotazione potrebbe dare origine ad una proiezione lungo quest'asse, superiore ad a . Il che è impossibile in quanto implicherebbe l'esistenza di ulteriori valori di misura oltre i due ammessi ($\pm a$).

Il sistema, perciò, dopo una misura con un apparato di SG orientato lungo l'asse $z \equiv \hat{n}$ ($SG_{\hat{n}}$) con esito, ad esempio, $\mathbf{J} \cdot \hat{n} = a$, è orientato lungo quest'asse con direzione positiva, in formule:

$$\mathbf{J} = a\hat{n},$$

dove \hat{n} rappresenta il vettore unitario della direzione di misura.

L'esito della misura sarà quindi: la componente dello spin lungo l'asse di misura \hat{n} :

$$\mathbf{J} \cdot \hat{n} = a.$$

Se eseguiamo un'altra misura lungo lo stesso asse \hat{n} senza disturbare il sistema, come abbiamo già visto nell'esperimento sequenziale di Stern-Gerlach (Fig.4.12) ovviamente si otterrà nuovamente:

$$\mathbf{J} \cdot \hat{n} = a.$$

Questo risultato è quindi in accordo con quanto visto nell'esperimento sequenziale con due apparati di Stern-Gerlach orientati lungo z .

Cosa succede se a questo punto viene cambiato l'asse di misura?

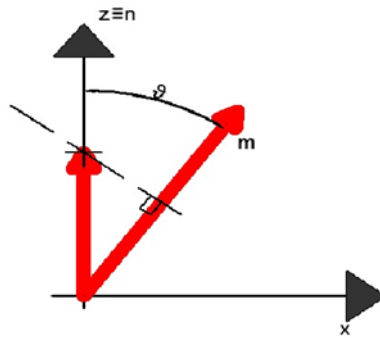


Figura 4.16: Cosa succede quando cambiamo l'asse di misura facendo una rotazione di un angolo θ ?

Viene Scelto, quindi, di effettuare la misura lungo un diverso asse \hat{m} . In base alle proprietà di rotazione dei vettori (si veda principio (ii)), essendo $\mathbf{J} = a\hat{n}$, la componente del vettore \mathbf{J} lungo il nuovo asse di misura varrà:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{m} = a\hat{n}\hat{m}.$$

Poiché, come visto in precedenza, il prodotto scalare fra due versori è dato dal modulo del vettore per il coseno dell'angolo fra essi compreso, otteniamo:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{m} = a\hat{n}\hat{m} = a\cos\theta \quad (4.5)$$

dove θ , ovviamente, rappresenta l'angolo compreso tra i due assi (vedi Fig.4.16).

Il risultato ottenuto differisce chiaramente da $\pm a$ (per θ diverso da 0 o da π) ed è un valore compreso tra $-a$ e $+a$, che può variare con continuità al variare di θ . Ciò è in chiaro contrasto con il principio (ii) che prevede che le misure delle proiezioni del vettore lungo un asse arbitrario diano valori pari a $\pm a$

Da ciò si evince come i due principi (i) ed (ii) siano in palese conflitto.

Visto che gli esperimenti sul momento angolare di spin mostrano come la misura fornisca effettivamente solo due possibili risultati, sembrerebbe che, pur avendo a che fare con un momento angolare (un chiaro esempio di vettore), il concetto di vettore debba essere abbandonato.

Esiste tuttavia una via d'uscita per salvare capra e cavoli!! Si vedrà che questa via d'uscita è proprio quella seguita dalla natura. Essa consiste in un compromesso. La singola misura lungo il nuovo asse $\hat{\mathbf{m}}$, violerà inevitabilmente, a causa del principio (ii) la simmetria di rotazione e si otterrà uno dei due valori ammessi: $\pm a$. La domanda è quale dei due valori? La, perlomeno parziale, salvaguardia del principio (ii), come vedremo, fornirà anche la risposta a questa domanda. Essendo chiaramente il principio (i) il risultato di evidenze sperimentali ed essendo in conflitto con il (ii), non resta altra via d'uscita che chiedere un'aderenza "debole" al principio (ii).

Il concetto di probabilità e in particolare di media statistica ci vengono in aiuto. Come mostrato nel capitolo sui prerequisiti (Cap. 3.3.7), avendo un sistema probabilistico con 2 sole uscite (nel nostro caso) è infatti possibile ottenere valori medi che assumono tutti i valori possibili (numeri reali) compresi tra il min ed il max, in questo caso tra $-a$ e $+a$. Si può quindi aderire al principio (ii) in senso statistico, richiedendo che le uscite facciano a volte $-a$ e a volte $+a$ in modo che il valore medio segua quanto stabilito dalle proprietà di rotazione dei vettori.

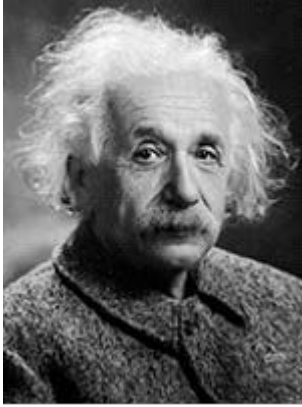
Il nuovo principio può quindi essere formulato nella maniera seguente:

- iii. (ii') lo spin è un vettore e quando è soggetto a trasformazioni continue di rotazione, obbedisce in media alle proprietà di trasformazione dei vettori (non potendo obbedire in maniera deterministica a causa del principio (i)).**

Ecco quindi la comparsa della probabilità quantistica.

Questo approccio mostra come partendo da 2 principi fisici ragionevoli, il primo dei quali derivato dall'evidenza sperimentale ed il secondo da un principio fondamentale di simmetria, emerga inevitabilmente il concetto di probabilità come l'unico in grado di riconciliare i due principi. Questo approccio quindi appare di grande valenza didattica, in quanto introduce il concetto di probabilità in maniera elegante e come una necessità inevitabile, non come una bizzarria della natura, come potrebbe apparire dagli approcci tradizionali.

Si ricordi come gli stessi padri della fisica quantistica furono disturbati dall'emergere di una teoria in cui al massimo si poteva prevedere la probabilità di una misura.



Famosa è la sua frase, in polemica con Niels Bohr, «*Dio non gioca a dadi con il mondo*»

Figura 4.17: Albert Einstein

O come disse l'astrofisico inglese Sir Arthur Stanley Eddington:

“È impossibile costringere la fisica moderna a predire qualsiasi cosa con perfetto determinismo perché tratta con le probabilità sin dall'inizio.”

Riscriviamo quindi l'Eq. (4.5) utilizzando il nuovo principio (ii'). Ovvero è il valor medio della componente del vettore lungo l'asse $\hat{\mathbf{m}}$ ad assumere il valore richiesto dalle proprietà di rotazione dei vettori. Imponiamo quindi:

$$\langle \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{m}} \rangle_{n+} = a \cos \theta, \quad (4.6)$$

dove le parentesi $\langle \rangle$ indicano il valore medio ed il pedice indica lo stato di partenza, ovvero il sistema, prima della misura lungo il nuovo asse $\hat{\mathbf{m}}$, si trova allineato lungo l'asse $\hat{\mathbf{n}}$ con direzione positiva. Iniziando ad introdurre la terminologia della meccanica quantistica, possiamo dire che il sistema (prima della misura) si trova nello stato + lungo la direzione $\hat{\mathbf{n}}$.

Prima di procedere oltre, è opportuno richiamare il concetto di probabilità.

Dal punto di vista oggettivo, come già spiegato in precedenza nel capitolo dei prerequisiti (Cap. 3.3), la definizione operativa di probabilità, ci dice che in tutti i fenomeni, anche in quelli in cui la probabilità classica non può essere applicata, è

possibile considerare la frequenza di eventi già accaduti e considerarla come la probabilità degli eventi che dovranno accadere nel futuro. Tale frequenza la possiamo considerare come la probabilità degli eventi dello stesso tipo che potranno accadere (www.ripmat.it/mate/1/lc/lced.html), cioè:

$$f_r = \frac{K}{N} = P(E)$$

Dove N è il numero di prove effettuate e K il numero di casi favorevoli. La definizione di probabilità statistica afferma che: **“la probabilità statistica di un evento casuale è un numero che esprime la frequenza relativa dell’evento in un gran numero di prove fatte tutte nelle stesse condizioni”**. Per poter avere un numero affidabile da dare alla probabilità così definita occorre che la frequenza venga calcolata su di un numero elevato di casi

(<http://dida.fausser.edu/calcolo/calcol3/calcolop.htm>)

in formule:

$$P(E) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K}{N}$$

Tornando all’ ipotesi di partenza, viene indicato con $P(\hat{n}+; \hat{m}+)$ la probabilità che, preparato il sistema nello stato $\hat{n}+$ (stato di partenza), una misura lungo l’asse \hat{m} dia come esito $+a$. Per semplicità si indicherà con x tale probabilità. Da un punto di vista operativo $P(\hat{n}+; \hat{m}+)$ corrisponde a $\frac{N_+}{N}$ nel limite di N molto grande, dove N è il numero di prove e N_+ il numero di volte in cui si ottiene $+a$. E si indichi con $P(\hat{n}+; \hat{m}-)$ la probabilità che, preparato il sistema sempre nello stato di partenza $\hat{n}+$, una misura lungo l’asse \hat{m} dia come esito $-a$, e si denoterà con y tale probabilità che corrisponde a $\frac{N_-}{N}$ sempre nel limite di N molto grande, dove N è il numero di prove e N_- il numero di volte in cui si ottiene $-a$. Ovviamente in queste condizioni $N = N_+ + N_-$.

Sapendo che la somma totale delle due probabilità deve dare 1, otteniamo la relazione seguente:

$$x + y = 1$$

Applicando quindi la definizione di valore medio, possiamo esprimere $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{m}}$ nel modo seguente:

$$\langle \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{m}} \rangle_{n_+} = aP(\hat{\mathbf{n}}_+ : \hat{\mathbf{m}}_+) - aP(\hat{\mathbf{n}}_+ : \hat{\mathbf{m}}_-), \quad (4.7)$$

Inserendo l'Eq. (4.6) nella (4.7), otteniamo:

$$aP(\hat{\mathbf{n}}_+ : \hat{\mathbf{m}}_+) - aP(\hat{\mathbf{n}}_+ : \hat{\mathbf{m}}_-) = a \cos \theta. \quad (4.8)$$

Abbiamo quindi il seguente semplice sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = \cos \theta \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema con il metodo di somma e sottrazione troviamo:

$$\begin{cases} x = \frac{1 + \cos \theta}{2} \\ y = \frac{1 - \cos \theta}{2} \end{cases}$$

Da cui, ricordando le formule di bisezione del seno e coseno:

$$\begin{cases} x = \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ y = \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (4.9)$$

Abbiamo ottenuto che la probabilità di ottenere spin up lungo l'asse $\hat{\mathbf{m}}$ è data dal quadrato del coseno di $\frac{\theta}{2}$ e quella di ottenere spin down, dal quadrato del seno dello stesso angolo.

Segue che se consideriamo come stato di partenza il sistema allineato lungo l'asse $\hat{\mathbf{n}}_-$, (in figura corrisponde all'asse z con direzione verso il basso) avremo:

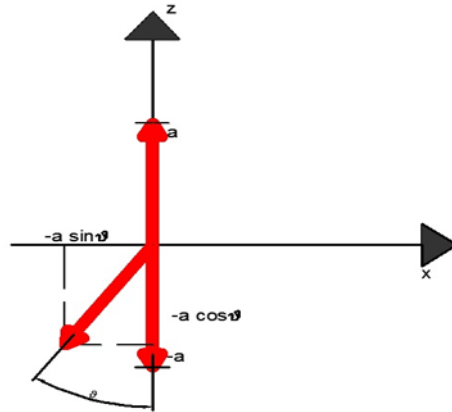


Figura 4.18: Comportamento simmetrico.

$$\langle \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{m}} \rangle_{n_-} = -a \cos \theta,$$

si ottiene, per quanto detto sopra, che:

$$aP(\hat{n}_+; \hat{m}_+) - aP(\hat{n}_+; \hat{m}_-) = -a \cos \theta.$$

Da cui, risolvendo il nuovo sistema, cioè:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -\cos \theta \end{cases}$$

E ripetendo i passaggi precedenti, raggiungiamo la seguente formula:

$$\begin{cases} x = \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \\ y = \text{cos}^2 \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (4.10)$$

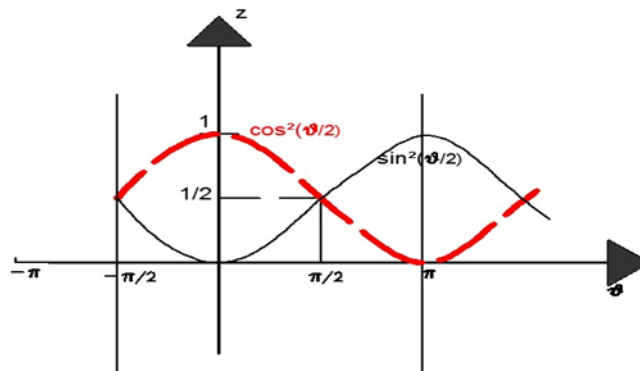


Figura 4.19: Rappresentazione grafica dell'Eq. 4.10.

In cui vediamo che i valori di x e y sono tra di loro scambiati.

Si consideriamo adesso il caso particolare in cui $\theta = 0$, utilizzando la (4.5), si ottiene il seguente risultato:

$$\begin{cases} x = \cos^2 0 = 1 \\ y = \sin^2 0 = 0 \end{cases}$$

Cioè:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Cioè si ha il 100% di probabilità di avere spin up. Nel linguaggio formale della meccanica quantistica questa situazione corrisponde ad aver preparato il sistema in un autostato della componente dello spin lungo l'asse di misura \hat{m} con autovalore $+a$, in questo caso la misura fornisce come risultato l'autovalore stesso con probabilità del 100% e lo stato di partenza non viene alterato.

Si evince quindi che se abbiamo preparato un apparato di SG lungo l'asse $\hat{n}_+ \equiv Z$, abbiamo bloccato l'emissione di atomi in z_- e inseriamo un secondo strumento di SG, sempre rivolto verso lo stesso asse di misura, otteniamo chiaramente soltanto la componente S_{z+} , ovvero probabilità $x = 1$ di ottenere spin up.

Se invece, consideriamo $\theta = \pi/2$ (ovvero asse di misura ortogonale all'asse che fissa lo stato di partenza), sostituendo il valore nella (4.5), otterremo:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Risultato che coincide con il secondo esperimento sequenziale di SG, quando cambiamo l'asse di misura, da z a x otteniamo il 50% di probabilità di ottenere spin up ed il 50% di ottenere spin down.

Se invece diamo a θ il valore π , sostituendo sempre il valore alla (4.9) si ottiene:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Considerando sempre il linguaggio formale della meccanica quantistica questa situazione corrisponde ad aver preparato il sistema in un autostato della componente dello spin lungo l'asse di misura $\hat{m} = \hat{n}$, quindi dopo aver ruotato l'asse di misura di 180° , si procede infine alla misura: in questo caso essa fornisce come risultato l'autovalore opposto con probabilità del 100%. Ovvero il sistema è rimasto invariato ma l'asse di misura ha invertito la sua direzione.

Dall'illustrazione 4.18, si evince il comportamento quando $\theta = 0$ ($x = 1; y = 0$) o $\theta = \pi/2$ ($x = 1/2; y = 1/2$) e infine $\theta = \pi$ ($x = 0; y = 0$).

Le probabilità ottenute coincidono con le probabilità quantistiche per i sistemi di spin

Osserviamo che queste probabilità corrispondano esattamente alle probabilità quantistiche per lo spin che si ricavano utilizzando il formalismo matematico standard della MQ.

Consideriamo tuttavia che questo approccio alternativo, pur di grande utilità per sistemi quantistici elementari e per introdurre agli studenti l'argomento, non è di facile generalizzazione a sistemi quantistici descritti da spazi di Hilbert di maggiore dimensionalità.

Una volta trovata la probabilità per la misura di \mathbf{J} lungo l'asse \hat{m} , per avere una buona comprensione delle proprietà statistiche, risulta utile introdurre un indice che misuri di quanto il valore medio si discosti dai dati, cioè la sua

varianza. Essa misura, quindi, la dispersione dei valori attorno al valore medio. Ricordando la sua definizione, “**la varianza è il valore medio del quadrato degli scarti, cioè la somma dei quadrati degli scarti per le relative probabilità**” ed in genere si indica con $\sigma^2(x)$, in formule:

$$\sigma^2(X) = \sum_{K=1}^t (M(X) - X_K)^2 P_K.$$

Dove:

$M(x)$ è la media delle probabilità,

x_K sono i valori che può assumere l'evento,

P_K sono le rispettive probabilità.

In pratica, la varianza indica la concentrazione della probabilità. Minore è la varianza e maggiore sarà la concentrazione dei dati attorno al valore medio e viceversa. La varianza fornisce quindi una misura delle fluttuazioni statistiche e quindi del grado di indeterminazione. Se si ha ad esempio probabilità 1 di avere una determinata uscita è immediato vedere che la varianza si annulla.

Ritornando all'esempio della moneta, poiché possiamo avere solo due valori che per chiarezza indichiamo con -1 per esempio quando esce testa ed 1 quando esce croce, e la probabilità che esca uno solo dei due risultati è sempre $1/2$, avremo cioè:

$$M(x) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}$$

da cui, la varianza, sarà:

$$\sigma^2(x) = (-1 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Ritornando al nostro spin, poiché:

$$\langle (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{m}})^2 \rangle = \sum_{a=-1}^1 (a^2) P(\hat{n}: \hat{\mathbf{m}}),$$

e

$$\sigma^2(x) = \langle (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \rangle - (\mathbf{J} \hat{\mathbf{m}})^2$$

Da cui, sostituendo al posto di $\langle (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \rangle$ suo valore a^2 ed al posto di $(\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{m}})^2$ il valore $a^2 \cos^2 \theta$, otteniamo:

$$\sigma^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \theta,$$

da cui, mettendo in evidenza a^2 :

$$\sigma^2 = a^2(1 - \cos^2 \theta).$$

E ricordando la relazione fondamentale della goniometria, infine si ottiene:

$$\sigma^2 = a^2 \sin^2 \theta.$$

Nel caso in cui $\theta = 0$ o $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\sigma^2 = 0.$$

In questo caso infatti non vi è indeterminazione e ripetendo la misura si otterrà sempre $+a$. Col linguaggio della MQ possiamo dire che il sistema si trova in un autostato $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Questo è un esempio di una proprietà generale in MQ: se il sistema si trova in un autostato di un'osservabile fisico, la misura di questo osservabile produce un risultato certo (l'autovalore corrispondente all'autostato) e lo stato non viene alterato. Lo stesso dicasi per $\theta = \frac{\pi}{2}$. In questo caso il sistema si trova in un autostato della componente dello spin rispetto all'asse di misura con autovalore $-a$.

Quando invece $\theta = \frac{\pi}{2}$, si ottiene la massima indeterminazione:

$$\sigma^2 = a^2$$

Come previsto dalla teoria quantistica, la misurazione lungo l'asse x dell'apparato di SG, dopo una misura precedente lungo l'asse z risulta essere completamente indeterminata.

CAPITOLO 5

DISUGUAGLIANZA DI BELL-CHSH

5.1 Sulla disuguaglianza di CHSC

Nella fisica classica, quando si considera un oggetto, ad esempio una persona o un libro, si ritiene che le loro proprietà fisiche esistano e siano definite indipendentemente dall'osservazione e che la misura serva semplicemente a rilevarle e a quantificarle. Nella fisica quantistica, invece, sorprendentemente, le cose vanno diversamente. Come abbiamo appena visto, uno spin orientato lungo l'asse $z +$ non possiede proprietà definite di rotazione lungo l'asse x , fino a quando non vengono effettivamente eseguite delle osservazioni lungo la direzione x . La fisica quantistica si limita a fornire un insieme di regole, che specificano la probabilità di ottenere un determinato risultato in seguito ad una misura.

A molti fisici non piaceva questo stato di cose. Einstein sosteneva che la MQ doveva necessariamente essere incompleta, ed ha prodotto una serie di obiezioni alla teoria. Nel suo lavoro del 1948 “Quantum mechanics and reality”, scriveva:

“i concetti della fisica si riferiscono a un universo esterno reale ossia, le rappresentazioni degli oggetti stabilite dalla fisica aspirano a un'esistenza reale indipendente dai soggetti della percezione”

(Einstein A. , 1948)

La più famosa fra queste obiezioni fu il paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen (EPR).



Figura 5.1: Fotografia dei fisici Einstein, Podolsky e Rosen.

<http://blog.timecomm.info/?eid=83> 14/01/2017 ore 10.04

In un famoso articolo del 1935, intitolato “Può la descrizione quantistica della realtà essere considerata completa?”, EPR presentarono un esperimento ideale, che credevano rappresentasse un paradosso, che li portò ad affermare che la MQ non fosse una teoria completa. Il loro articolo, infatti inizia così:

“Ogni esame serio di una teoria fisica deve tenere conto della distinzione tra la realtà oggettiva, che è indipendente da ogni teoria, e i concetti fisici con i quali la teoria opera. Questi concetti sono intesi corrispondere alla realtà oggettiva e mediante questi concetti ci forniamo un'immagine di questa realtà”

(Einstein & Podolsky, 1935)

Essi credevano che la descrizione quantistica di un sistema fisico dovesse essere supportata da un postulato di esistenza di variabili nascoste, che avrebbero spiegato il risultato della misura di qualunque oggetto di un sistema. Inoltre, secondo EPR, un'accettazione acritica dei principi della MQ conduce inevitabilmente all'abbandono della località dei fenomeni fisici. Secondo EPR una teoria si dice:

- **locale:** quando, qualunque operazione o misura eseguita in un dato punto dello spazio non può avere effetto immediato sulle grandezze fisiche, in un luogo separato dal primo;
- **realistica:** le grandezze fisiche (elementi di realtà), hanno un valore fissato indipendentemente dal fatto che vengano o meno misurate.

Il ragionamento di Einstein era completamente teorico ma geniale, poneva un problema a cui nessuno aveva ancora riflettuto a fondo e sembrava davvero mettere in discussione le basi della fisica quantistica. EPR infatti scrivevano che:

“Se al tempo della misura due sistemi non interagiscono più, nessun reale cambiamento può avvenire sul secondo sistema in conseguenza di qualcosa che può essere fatto sul primo sistema”.

(Einstein & Podolsky, 1935)

Consideriamo ora, una sorgente di coppie di particelle. Immaginiamo ad esempio che le particelle vengano emesse per fissione da una particella singola con momento angolare nullo. Per la conservazione del momento angolare le particelle emesse, pur avendo ciascuna momento angolare random (casuale) dipendente dal singolo evento di fissione, avranno momento angolare totale (risultante dalla somma dei due momenti angolari) nullo. Il che significa che ciascuna delle due particelle avrà momento angolare opposto all'altra. Questo è un chiaro esempio di correlazione tra particelle.

Secondo un ragionamento classico, successivamente alla fissione, le due particelle avranno momento angolare random e non noto ma comunque definito, e

inoltre i due momenti angolari sono correlati in quanto uguali in modulo ma con verso opposto.

Seguendo invece un ragionamento basato sulla MQ, quando la coppia viene emessa, le particelle possono avere un momento angolare non determinato, ovvero esse non possiedono proprietà definite di rotazione. Tuttavia se viene eseguita una misura su una delle due particelle e si ottiene un valore per una componente del momento angolare, istantaneamente l'altra particella, anche se posta a distanza notevole dalla prima, acquisirà un valore definito della corrispondente componente del momento angolare che, in base al principio di conservazione del momento angolare, sarà inevitabilmente uguale in modulo e opposta in segno a quella misurata.

Nel 1964, il fisico nord irlandese, John Bell dimostrò (mediante una disuguaglianza) che le teorie che soddisfano il realismo locale danno origine a contraddizioni con le previsioni della fisica quantistica. Quindi, è possibile verificare tramite esperimenti, se la natura segue il realismo locale o la fisica quantistica. Una di queste contraddizioni consiste nella disuguaglianza di Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH), che fa parte del grande insieme di disuguaglianze generalmente conosciute come disuguaglianze di Bell. Questa disuguaglianza è soddisfatta da teorie basate sul realismo locale ed è invece violata applicando la teoria quantistica.

Essa si applica ad una situazione in cui coppie di particelle vengono inviate da una sorgente a due osservatori distanti, che chiameremo Alice e Bob. Si presume che sia possibile preparare molte coppie identiche di un tale sistema di due particelle, in modo che i due osservatori possono effettuare molte misure e poi condividere i risultati ottenuti. L'osservatore A che riceve la particella a può scegliere di misurare una tra le due osservabili fisiche a e a' , ad esempio, tra due diverse proiezioni di spin lungo l'asse $n +$ o $n -$. Analogamente, l'osservatore B può scegliere di misurare lungo $m +$ o $m -$.

Supponiamo che, in tali condizioni, sia a che a' e b , b' possono ammettere solo due risultati, ± 1 .

$$a, a' = \pm 1 \text{ e } b, b' = \pm 1.$$

Se le particelle possono avere proprietà definite prima della misurazione e non sono influenzate dalle misurazioni degli osservatori distanti, avremo, se $a, a' = \pm 1$, è uno dei due risultati:

$a + a' = 0$ (se a e a' hanno segno discorde) e di conseguenza $a - a' = \pm 2$,

oppure:

$a - a' = 0$ (se a e a' hanno segno concorde) e quindi $a + a' = \pm 2$.

Da questo risultato possiamo ottenere facilmente la seguente relazione:

$$C = (a + a')b + (a - a')b' = \pm 2$$

in quanto se $a + a' = \pm 2$ allora $a - a' = 0$ o viceversa se $a - a' = 0$

allora $a + a' = \pm 2$.

Ripetendo la misura molte volte, in base a questo ragionamento si otterrà sempre $C = \pm 2$. Come conseguenza otteniamo che il valore assoluto del valore medio di C non può superare il valore 2.

In formule:

$$|\langle C \rangle| = |\langle a b \rangle + \langle a' b \rangle + \langle a b' \rangle + \langle a' b' \rangle| \leq 2. \quad (5.1)$$

Questa disuguaglianza è proprio la famosa disuguaglianza di Bell-CHSH.

E' possibile mostrare come questa disuguaglianza possa essere violata nell'ambito della teoria quantistica. Nella prossima sezione, mostreremo come i risultati della teoria quantistica, e quindi la violazione della disuguaglianza CHSH, possano essere ricavate applicando il metodo presentato nel Par. (4.3) ovvero utilizzando ancora i due principi elementari (i) e (ii').

5.2 Perché le particelle quantistiche violano la disuguaglianza di BELL-CHSH?? Spiegazioni in termini di vettori e bit.

Lo stato quantistico massimamente entangled, che determina la massima violazione della disuguaglianza CHSH in Eq. (5.1) descrive due particelle di spin

$\frac{1}{2}$ con momento angolare totale nullo. Tale stato è detto stato di singoletto. Utilizzando la notazione di Dirac (Dirac, 1990):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle) \quad (\text{A})$$

Di seguito, tuttavia non utilizzeremo il formalismo della meccanica quantistica e lo stato (A) ma l'approccio intuitivo basato su bit e vettori. Per la derivazione della violazione della disuguaglianza di Bell da parte dei sistemi quantistici che descriverò di seguito si ispira all'interessante lavoro di ricerca di C. S. Unnikrishnan apparso sulla rivista scientifica *European Physics Letters* nel 2005 [(Unnikrishnan, 2005)].

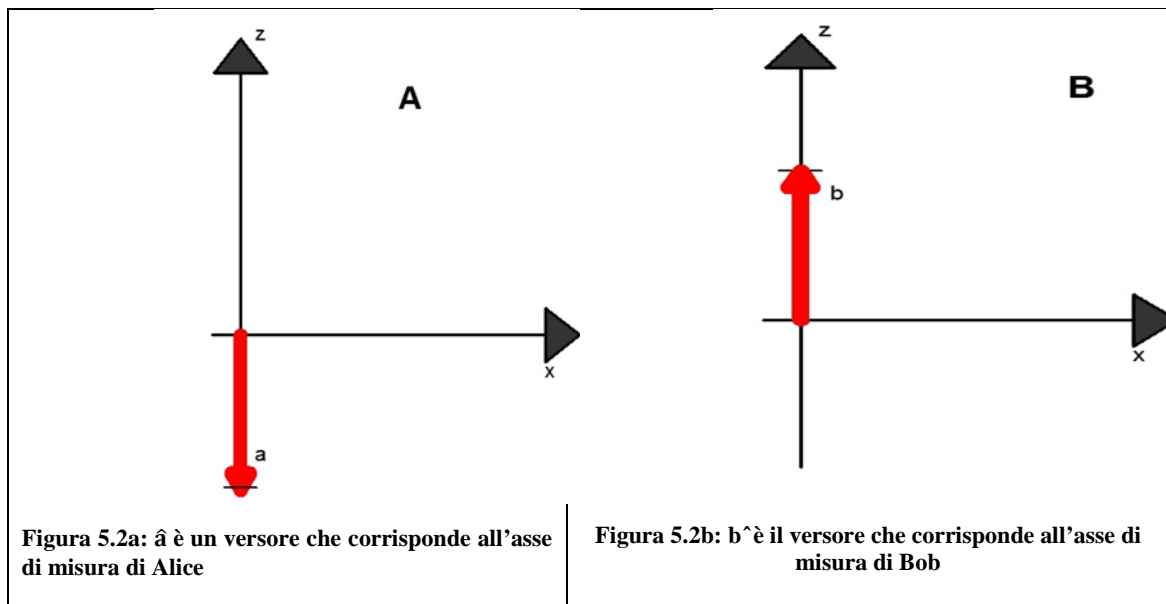
A livello classico possiamo immaginare ad esempio che le particelle siano state emesse per fissione da una particella singola con momento angolare nullo. Per la conservazione del momento angolare le particelle emesse, pur avendo ciascuna momento angolare random (casuale), dipendente dal singolo evento di fissione, avranno momento angolare totale (risultante dalla somma dei due momenti angolari) nullo. Il che significa che ciascuna delle due particelle avrà momento angolare opposto all'altra. Questo è un chiaro esempio di correlazione tra particelle detto anche anticorrelazione, visto che le due particelle hanno momento angolare opposto.

Le quantità a , a' , b e b' , che entrano nella disuguaglianza (5.1), sono osservabili fisiche, e in particolare componenti di vettori. Ad esempio, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, si può pensare ad a come il prodotto scalare del vettore \mathbf{J} che descrive il momento angolare intrinseco della particella con un versore, corrispondente all'asse di misura scelto dall'osservatore (misure di Stern-Gerlach). In formule, poniamo:

$$a = \mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{a}} \quad \text{e} \quad a' = \mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{a}}'$$

$$b = \mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{b}} \quad \text{e} \quad b' = \mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{b}}',$$

dove $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$, ed $\hat{\mathbf{a}}'$, $\hat{\mathbf{b}}'$ sono versori che corrispondono ai due possibili assi di misura rispettivamente di Alice e Bob.



Date queste premesse, partiamo dal caso più semplice in cui Alice e Bob scelgono lo stesso asse di misura: $\hat{\mathbf{n}}_A = \hat{\mathbf{n}}_B$ e consideriamo il prodotto fra il risultato ottenuto da Alice e quello ottenuto da Bob:

$$(\mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_A)(\mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{n}}_A).$$

Alice misura $\mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_A$ e può ottenere, come abbiamo più volte detto, due possibili risultati. Immaginiamo, ad esempio, che Alice ottenga $\mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_A = -1$. Un istante dopo, Bob, eseguendo la sua misura lungo $\hat{\mathbf{n}}_B = \hat{\mathbf{n}}_A$, avendo le due particelle momento angolare opposto (*particelle anticorrelate*), otterrà come risultato, $\mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{n}}_B = 1$, da cui ovviamente:

$$(\mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_A)(\mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{n}}_A) = -1. \tag{5.2}$$

È immediato convincersi che il risultato della (5.2) rimarrà invariato anche se Alice dovesse ottenere $\mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_A = 1$ (in tal caso Bob otterrà $\mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{n}}_B = -1$). Inoltre i ruoli di Alice e Bob sono perfettamente interscambiabili.

Consideriamo ora il caso in cui $\hat{\mathbf{n}}_B \neq \hat{\mathbf{n}}_A$, in cui Bob sceglie un diverso asse di misura ruotato di un angolo Θ rispetto al precedente.

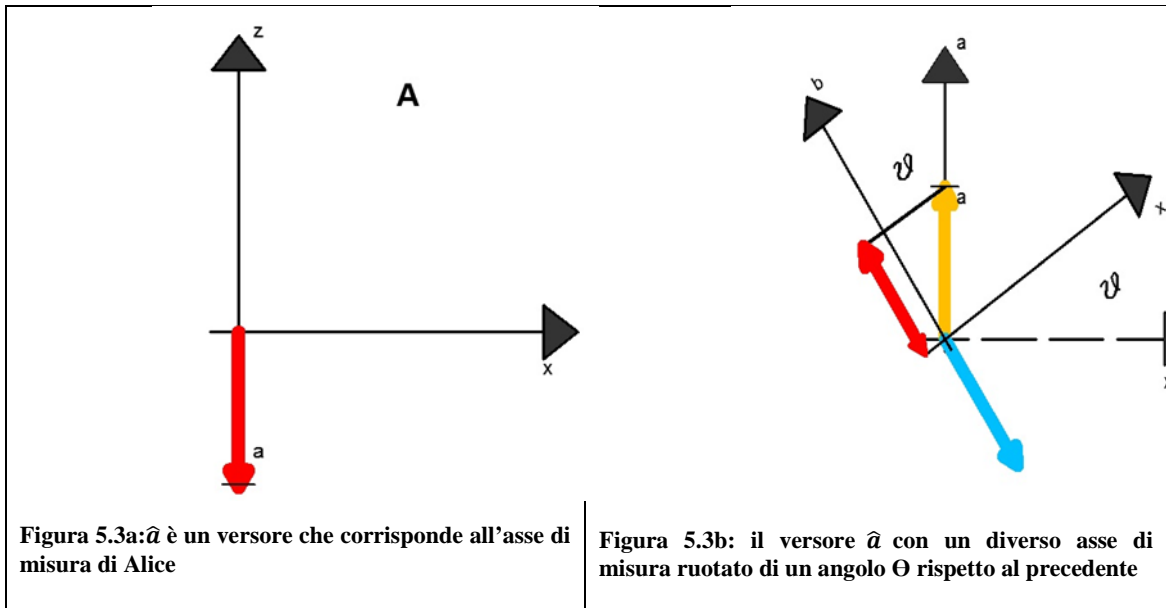


Figura 5.3a: \hat{a} è un versore che corrisponde all'asse di misura di Alice

Figura 5.3b: il versore \hat{a} con un diverso asse di misura ruotato di un angolo θ rispetto al precedente

Considerando, come prima, il caso in cui Alice esegue per prima la misura e ottiene $\mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_A = -1$, essendo, in conseguenza della misura di Alice $\mathbf{J}_A = -\hat{\mathbf{n}}_A$, risulterà per l'anticorrelazione tra le due particelle, $\mathbf{J}_B = \hat{\mathbf{n}}_A$. Bob quindi dovrebbe ottenere, eseguendo la sua misura lungo l'asse $\hat{\mathbf{n}}_B$,

$$\mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{n}}_B = \hat{\mathbf{n}}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_B.$$

Poichè $\hat{\mathbf{n}}_B$ è ruotato di un angolo θ rispetto ad $\hat{\mathbf{n}}_A$, essendo il prodotto scalare fra due vettori dato dal prodotto dei moduli (in questo caso i moduli sono entrambi uno) per il coseno dell'angolo fra essi compreso, otteniamo:

$$\mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{n}}_B = \cos\theta, \tag{5.3}$$

da cui, banalmente:

$$(\mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_A)(\mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{n}}_B) = -\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_B = -\cos\theta. \tag{5.4}$$

È facile rendersi conto che se invece Alice avesse ottenuto $\mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_A = +1$, Bob avrebbe ottenuto $\mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{n}}_B = -\cos\theta$ con l'evidente risultato che il prodotto $(\mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_A)(\mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{n}}_B)$ no Tuttavia dobbiamo ricordare che una delle ipotesi di partenza alla base della formulazione della disuguaglianza CHSH era l'impossibilità di ottenere da misure di a, a', b, b' valori diversi da ± 1 , pertanto Bob non potrà ottenere il

valore previsto dall'Eq. (5.4), tranne che nei casi particolari $\theta = 0$ o $\theta = \pi$. La situazione è molto simile a quanto discusso nel par. (4.3), dove la scelta di un 'asse di misura ruotato rispetto al primo portava ad un contrasto con quanto previsto dalle proprietà di rotazione dei vettori. Anche nel caso presente, (più complesso in quanto sono coinvolte due particelle), i due principi (i) e (ii):

- i. se si misura una sua componente lungo un asse arbitrario si ottiene uno tra due soli possibili esiti (in questo caso stiamo considerando i possibili esiti pari a ± 1);**
- ii. il momento angolare (e quindi anche lo spin) è un vettore e come tale è soggetto a trasformazioni continue di rotazione;**

Il conflitto può essere facilmente risolto esattamente seguendo la strada descritta nel Cap.4.3 senza la necessità di aggiungere nuovi ingredienti; ovvero sostituendo il principio ii) impossibile da soddisfare con il principio ii').

- iii. ii') lo spin è un vettore e quando è soggetto a trasformazioni continue di rotazione, obbedisce in media alle proprietà di trasformazione dei vettori (non potendo obbedire in maniera deterministica a causa del principio(ii)).**

Riscriviamo quindi l'Eq. (5.3) utilizzando il concetto di media statistica:

$$\langle (\mathbf{J}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_A)(\mathbf{J}_B \cdot \hat{\mathbf{n}}_B) \rangle = -\hat{\mathbf{n}}_A \hat{\mathbf{n}}_B = -\cos\theta \quad (5.5)$$

Il significato dell'Eq. (5.4), per quanto detto sopra è evidente: non potendo Bob ottenere i valori (continui al variare di Θ) previsti dall'Eq. (5.2), ripetendo tante volte l'esperimento otterrà a volte +1, a volte -1 in modo da soddisfare in media l'Eq. (5.5). Il risultato (5.5) corrisponde esattamente a quanto previsto dalla meccanica quantistica, e a quanto (come vedremo inseguito) verificato in numerosi esperimenti anche molto recenti. Anticipiamo che è proprio il risultato (5.5) a determinare la violazione della disuguaglianza CHSH prevista dalla meccanica quantistica e verificata sperimentalmente.

Vogliamo applicare adesso il risultato (5.5) alla disuguaglianza CHSH. Ricordiamo che la disuguaglianza è stata ottenuta assumendo che ciascuno dei due osservatori possa scegliere in maniera casuale di misurare uno tra due possibili osservabili, a e a' per Alice; b e b' per Bob. Scegliamo come a , a' , b , b' le proiezioni del momento angolare di spin lungo assi diversi. Per comodità indichiamo i due assi scelti da Alice con i versori $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{a}}'$ rispettivamente e quelli scelti da Bob con $\hat{\mathbf{b}}$ e $\hat{\mathbf{b}}'$. Applicheremo quindi l'Eq. (5.5) con $\hat{\mathbf{n}}_A = \hat{\mathbf{a}}$ o $\hat{\mathbf{n}}_A = \hat{\mathbf{a}}'$ e con $\hat{\mathbf{n}}_B = \hat{\mathbf{b}}$ o $\hat{\mathbf{n}}_B = \hat{\mathbf{b}}'$. Ad esempio:

$$\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle = \langle (J_A \hat{\mathbf{a}})(J_B \hat{\mathbf{b}}) \rangle = -\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} \quad (5.6)$$

Consideriamo adesso il caso in cui, $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{a}}'$, $\hat{\mathbf{b}}$ e $\hat{\mathbf{b}}'$ si trovano sullo stesso piano ruotati di 45° come in Fig. (5.4),

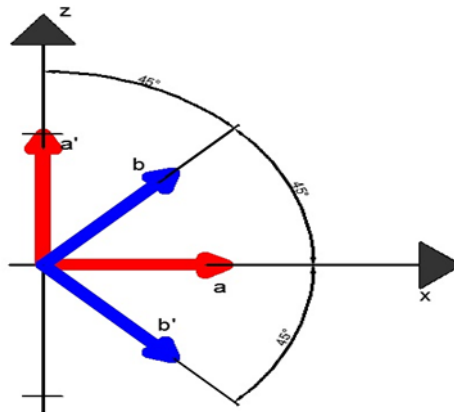


Figura 5.4: Immagine dei versori $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{a}}'$, $\hat{\mathbf{b}}$ e $\hat{\mathbf{b}}'$ che si trovano sullo stesso piano ruotati di 45° .

dalla relazione (5.5) si ottiene:

$$\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle = -\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} = -\cos\theta$$

e considerando che gli assi $\hat{\mathbf{a}}$, e $\hat{\mathbf{b}}$, come indicato in figura, formano un angolo di 45° , otteniamo:

$$\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Utilizzando le nozioni di goniometria sugli archi associati, ci accorgiamo che, poiché:

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha),$$

si ha:

$$\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}' = \cos(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Analogamente, considerando come verso positivo il verso antiorario, otteniamo anche:

$$\hat{\mathbf{a}}'\hat{\mathbf{b}} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Utilizzando infine la formula:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

otteniamo anche:

$$\hat{\mathbf{a}}'\hat{\mathbf{b}}' = -\cos 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Sostituendo i risultati trovati nella disuguaglianza CHSH, la (5.1), diventa:

$$|\langle C \rangle| = \left| \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \left| \frac{-4\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} > 2. \quad (5.7)$$

Tramite la (5.6) si ottiene una chiara violazione della disuguaglianza di CHSH.

$$|\langle C \rangle| = |\langle ab \rangle + \langle a'b \rangle + \langle ab' \rangle - \langle a'b' \rangle| \leq 2$$

Questo dimostra che il risultato (5.5), conseguenza diretta dei principi i) e ii'), ovvero misure con risultati binari e proprietà di simmetria di rotazione valide almeno in media portano ad una violazione della disuguaglianza di Bell-CHSH.

Si può affermare che il realismo locale, le proprietà di trasformazione di vettori nella fisica classica (almeno in media), e i risultati dicotomici non possono manifestarsi in contemporanea. Poiché gli esperimenti dimostrano la violazione della CHSH e confermano il risultato (5.5), possiamo concludere che la natura in presenza di sistemi con valori di misura binari (o più in generale discreti) rinuncia alla nozione per noi intuitiva di realismo locale e preserva (almeno in media) le proprietà fondamentali di rotazione. Il risultato ottenuto (5.5), invocando i due principi i) e ii') coincide con le previsioni della meccanica quantistica.

E' importante notare come per dimostrarlo non c'è stato il bisogno di utilizzare il formalismo matematico astratto della meccanica quantistica, ma soltanto principi elementari e semplici nozioni di goniometria note agli studenti a cui è rivolto il lavoro. Solo partendo dai risultati di dicotomia.

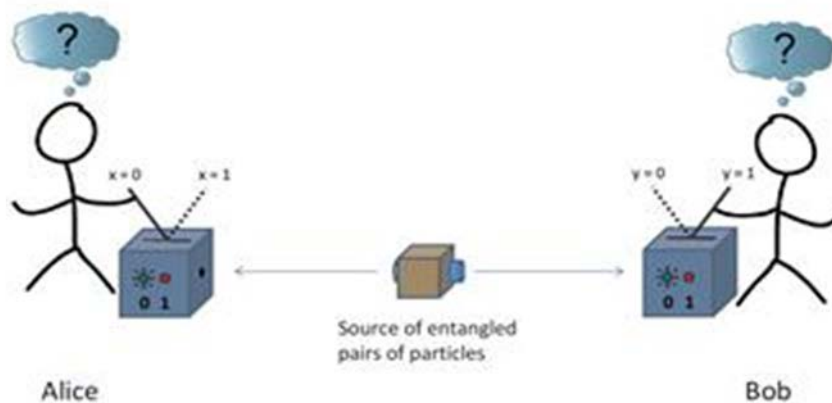


Figura 5.5: Immagine naif del concetto di entanglement.

Supponendo infine, che le proprietà di trasformazione dei vettori, in media, abbiamo ottenuto la violazione della disuguaglianza di CHSH prevista dalla teoria quantistica. In accordo con questa analisi, la violazione della disuguaglianza di Bell (generalmente considerata come il più sorprendente allontanamento della meccanica quantistica dalla fisica classica) è la sola possibilità per un sistema fisico con momento angolare totale nullo e con risultati duali di seguire le proprietà di trasformazione dei vettori.

Tutto questo porta alla conseguenza che le ipotesi formulate per l'assunzione della disuguaglianza di Bell, sono discutibili. Cioè l'assunzione di realismo e località sono certamente ipotesi intuitivamente plausibili su come funziona il mondo e si adattano alla nostra esperienza quotidiana, tuttavia la verifica sperimentale della (5.7) dimostra che almeno una di queste ipotesi non è corretta. Le prove sperimentali della disuguaglianza di CHSH, si veda per esempio (Aspect, 1982) (Tittel, Brendel, Zbinden, & Gisin, 1998), confermano che la natura non segue il realismo locale, ma sceglie di seguire la simmetria di rotazione per quanto consentito (in media) dalla presenza di risultati discreti. Inoltre, l'analisi qui presentata, unitamente alla conferma sperimentale, mostra che i principi di simmetria giocano un ruolo fondamentale in fisica.

CAPITOLO 6

MATERIALI E METODI

6.1 Metodologia

L'interesse di questo studio, a causa delle profonde implicazioni concettuali e delle innumerevoli applicazioni della MQ, non solo in fisica, ma anche in altri ambiti con forte impatto sociale, nasce dall'esigenza di portare il cittadino di media cultura e la comunità scientifica alla scoperta di un nuovo e più immediato approccio a concetti fondamentali della MQ.

Ci si è proposti di spiegare i nodi concettuali tipici della MQ, e di realizzare un percorso introduttivo che possa avvicinare i giovani, e più in generale chiunque sia interessato, alla fisica quantistica. Per far ciò ho introdotto un formalismo matematico accessibile e il più possibile semplice e divulgativo, purtuttavia in grado di fornire informazioni quantitative almeno su sistemi fisici elementari.

6.2 Obiettivi

Avendo concretizzato questa nuova proposta didattica, ho sentito l'esigenza di provare se potesse essere realmente compresa facilmente dagli studenti di liceo scientifico, quindi di analizzare la sua validità.

Gli obiettivi della ricerca, quindi, sono stati:

- Conoscere e analizzare le variabili categoriali utili per la ricerca;
- Analizzare le strategie didattiche più utili e concrete per porgere contenuti di meccanica quantistica negli istituti superiori.
- Elaborare nuove metodologie di insegnamento ai fini dell'apprendimento matematico della MQ.
- Mettere in correlazione le due città campionate, in conseguenza dei risultati ottenuti dalla somministrazione del pre test e del re test;
- Provare la validità di strategie nuove per la comprensione di alcuni concetti fondamentali della MQ;
- Mettere in correlazione le variabili numeriche maggiormente significative (voti conseguiti in matematica e fisica, risultati del pretest e del retest, ecc...);
- Fornire materiali e strategie concrete, ad insegnanti e discenti, per lo studio di questa parte della fisica.

6.3 Linea di investigazione

Dalla letteratura in merito alle scelte di approccio e strategie didattiche adottate nell'insegnamento della MQ, si evince un quadro notevolmente diversificato dei modi di procedere. Le difficoltà sia concettuali, ma soprattutto quelle in merito al formalismo, hanno fatto sì che si rinunciassero alla completezza di trattazione per soffermarsi solo su alcuni concetti.

Da qui la necessità di proporre un lavoro che consentisse una trattazione didattica, sia formale che esplicativa di alcuni concetti fondamentali della MQ.

In questo lavoro, quindi, è stato illustrato un approccio didattico, che ha tratto spunto da recenti tentativi di riformulare questa teoria sulla base di principi fisici elementari. È stata investigata in seguito la capacità di comprensione, da parte degli allievi di V Liceo Scientifico, del nuovo approccio. Tale ricerca è stata condotta attraverso l'utilizzo di tests realizzati appositamente (vedi appendice A e B). Inizialmente, è stato somministrato un pre test sulle conoscenze di base dei prerequisiti di fisica vettoriale, goniometria e probabilità (Vedi Cap.3); in seguito

è stata attuata una spiegazione delle nuove formule proposte anche attraverso l'utilizzo di *slides* in Power Point (vedi allegato C); infine è stato ritastato il campione mediante un test sulle conoscenze acquisite a tal proposito.

Sono stati poi confrontati i risultati ottenuti dalle risposte del re test rispetto al pre test ed alle loro competenze di base.

6.4 Ipotesi di ricerca

Dall'analisi e dall'elaborazione dei dati della ricerca mi aspetto che il nuovo approccio, così ideato serva per migliorare la comprensione anche formale di questa parte fondamentale della fisica moderna e che produca effetti positivi sul desiderio di approfondire tali studi ed in seguito di iscriversi in facoltà scientifiche. Mi aspetto, inoltre, che l'utilizzo della presentazione in power-point possa riscuotere interesse e migliorare le loro competenze.

6.5 Popolazione e campione

La sperimentazione è stata condotta in due città della Sicilia: Messina e Caltanissetta. Questo studio ha incluso un totale di 125 studenti di cui 88 del quinto anno del Liceo Scientifico "G. Seguenza" di Messina e 37 del quinto anno del Liceo Scientifico "S. Mottura" di Caltanissetta, di entrambi i sessi. Il campione dei licei delle due città considerate per l'indagine, è stato scelto su base casuale e successivamente, mediante campionamento stratificato per le classi a cui sottoporre la sperimentazione. L'età degli studenti varia tra i 17 e i 20 anni, con un'età media di 18.36 anni.

La collaborazione di dirigenti, docenti ed alunni e personale tecnico, è stata preziosa ed ha permesso di effettuare agevolmente la somministrazione dei test e del training da me preparati. Grazie alla loro disponibilità ed attenzione al progetto da effettuare, è stato possibile svolgere tutte le fasi in modo ottimale, nel totale rispetto della privacy.

6.6 Strumenti

La validità del nuovo approccio didattico è stata investigata, come accennato sopra, attraverso l'uso di tests strutturati (vedi Appendice A e B).

Tali strumenti di indagine utilizzati sono entrambi a risposta multipla e non validati, in quanto costruiti ad hoc per valutare l'efficacia delle nuove formule introdotte. Il pre test, così come il re test, comprende una parte relativa ai dati anagrafici:

- Età: dai 17 ai 20 anni;
- Sesso: femmine e maschi;
- Scuola: Liceo scientifico;
- Città: Messina, Caltanissetta.

e l'altra caratterizzata dalla seguente struttura:

- Questionario conoscenza di base, composto da 15 domande a risposta multipla relative agli argomenti inerenti lo sviluppo della tesi, (5 quesiti sui vettori, 5 sulla probabilità e statistica e gli ulteriori 5 sulla goniometria), scelti per valutare la conoscenza che i soggetti già possedevano.
- Questionario per la valutazione della comprensione da parte dei soggetti, di ciò che è stato presentato nella fase di training, composto da 7 items a risposta multipla relativi all'argomento trattato e 3 items, sempre a risposta multipla, sul gradimento di quanto proposto.

La ricerca è stata condotta nel laboratorio di informatica del Liceo Scientifico "Seguenza" e nell'Aula Magna del Liceo Scientifico Mottura, durante le ore di insegnamento curricolari.

6.7 Procedura

Le fasi della ricerca sono state tre:

1. Fase pre test, in cui i soggetti hanno avuto a disposizione 30 minuti;

2. Fase di training, con spiegazione di circa un'ora, con l'ausilio di illustrazioni in Power-Point;
3. Fase post test, in cui i soggetti hanno avuto a disposizione 20 minuti.

Nella fase pretest, è stato somministrato il questionario (pretest sulle conoscenze di base, vedi Appendice A) sulla conoscenza primaria dell'argomento per controllare il livello di partenza di tutti i discenti. Quest'ultimo è stato somministrato a 125 soggetti. Il questionario era anonimo, richiedeva soltanto un numero identificativo. I partecipanti, durante la compilazione, dovevano inserire numero di ordine alfabetico, età e classe. La durata del questionario è stata di circa 30 minuti.

Nella seconda fase, fase di training, per quanto riguarda il liceo scientifico "Seguenza" di Messina per ogni classe è stata illustrato il percorso singolarmente. Per ogni classe sono state presentate delle *slides* che contenevano sia il testo che le immagini, coadiuvate dalla mia spiegazione. L'illustrazione dell'argomento della tesi è durata circa un'ora. Subito dopo ho risposto alle domande fattemi dagli studenti oggetto della sperimentazione, scaturite dall'osservazione delle *slides*.

Dopo la fase di apprendimento, sono stati ritestati i soggetti oggetto di indagine (re test, vedasi appendice B) e confrontate le risposte date con quelle del pre test, per rilevare se l'argomento trattato è risultato di facile comprensione, qualsiasi fossero i livelli di partenza e i voti avuti in matematica e fisica ed indagare anche, relativamente alle domande pre e retest i miglioramenti all'interno delle due scuole. Il re test era formato da 10 items a risposta multipla, per svolgere il quale, hanno avuto a disposizione 30 minuti (senza l'accesso ai materiali di apprendimento presentati in power point nella fase precedente).

6.8 Trattamento statistico dei dati

Il trattamento statistico dei dati è stato realizzato mediante il software SPSS (Statistical Package for the Socia Science) versione 20.0.0.

Sono stati realizzati calcoli statistici descrittivi e tabelle di frequenza per: sesso, scuola, città, età, domande pretest e retest, per entrambe le scuole (si veda Cap.7).

Sono state analizzate tavole di contingenza e chi-quadrato, con l'obiettivo di verificare la relazione tra alcune variabili. Sono state, inoltre, confrontate, le risposte corrette date al pre test con quelle del post test e con i voti di matematica e fisica conseguiti dagli studenti coinvolti nel progetto.

Per il confronto entro i gruppi, sono stati utilizzati il test del X^2 , quello di Wilcoxon e il test di Mann-Withney, relativamente alle sole risposte date ai due test e ai voti di matematica e fisica dei discenti.

CAPITOLO 7

RISULTATI

7.1 Analisi dei risultati

Lo studio effettuato, è stato indirizzato a rilevare il grado di comprensione del nuovo approccio didattico da parte degli alunni, mediante un re test, che, come più volte specificato, è stato creato appositamente. Il raffronto è stato effettuato rispetto alle risposte date ad un test, anch'esso, creato espressamente per la valutazione del livello di base della conoscenza dei prerequisiti (si veda cap. 3 e allegato A), ai voti ricevuti in alcune materie, quali: la matematica e la fisica, che costituiscono la base delle competenze logiche; tutto ciò senza trascurare l'importanza rivestita dal contesto territoriale. Mediante l'elaborazione dei risultati di questo lavoro di tesi sono stati evidenziati, grazie all'analisi statistica dei questionari, i punti deboli ed i punti di forza esistenti tra ogni singola categoria e le risposte date alle varie domande dei *tests*.

Lo studio è sostenuto da diverse e differenti comparazioni che hanno messo sempre al centro dell'attenzione la percentuale di risposte corrette date al re test in relazione all'andamento scolastico in matematica e fisica e alle risposte date al pre test degli allievi campionati.

In linea con gli obiettivi del lavoro, sono state effettuate alcune procedure di analisi statistica di natura descrittiva e quindi, inferenziale che hanno portato a poter effettuare le considerazioni che seguiranno.

Sono state analizzate le seguenti categorie:

1. Sesso (Maschi e Femmine)
2. Scuola (V Liceo Scientifico)
3. Età (da 17 a 20 anni)
4. Città (Messina e Caltanissetta)
5. Risposte al pre test
6. Risposte al re test.

Tabella 7.1 **Tabella di frequenza sesso student.**

| | Frequenza | Percentuale |
|-------------------|-----------|-------------|
| Validi Femmina | 45 | 36,0 |
| Maschio | 80 | 64,0 |
| Totale | 125 | 100,0 |

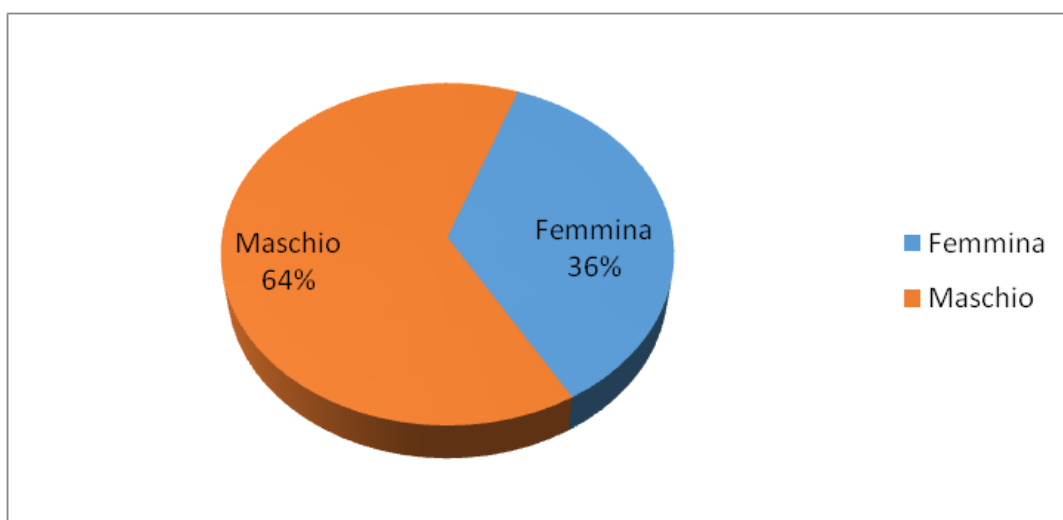


Grafico 7.1 Percentuale sesso studenti campionati.

Il campione considerato è formato da 125 allievi del quinto anno di liceo scientifico divisi in maschi e femmine. I primi sono 80, quelli di sesso femminile,

45, pari ad una percentuale di:36% le donne e 64% gli uomini. Dall’analisi si è rilevata una maggiore presenza di allievi di sesso maschile in entrambi gli Istituti.

Tabella 7.2 **Tabella frequenza scuola**

| | Frequenza | Percentuale |
|----------------------|------------|--------------|
| Validi L. S. Messina | 85 | 68,0 |
| L.S Caltanis | 40 | 32,0 |
| Totale | 125 | 100,0 |

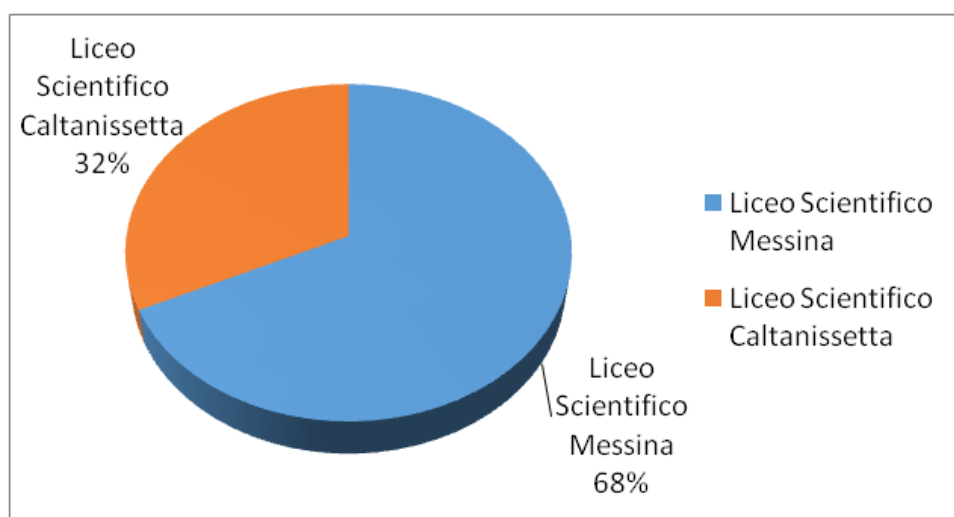


Grafico 7.2: Percentuali di allievi nelle scuole considerate.

Le scuole considerate sono due licei scientifici: “G. Seguenza” di Messina con il 68 % di allievi testati ed il “S. Mottura” di Caltanissetta con il 32%. Gli allievi nella scuola di Messina sono in numero maggiore, in quanto sono state campionate quattro sezioni, mentre nel Liceo di Caltanissetta vi erano solo 2 sezioni.

Tabella 7.3 Tabella frequenza età

| | | Frequenza | Percentuale |
|--------|---------|-----------|-------------|
| Validi | 17 anni | 7 | 5,6 |
| | 18 anni | 72 | 57,6 |
| | 19 anni | 40 | 32,0 |
| | 20 anni | 6 | 4,8 |
| Totale | | 125 | 100,0 |

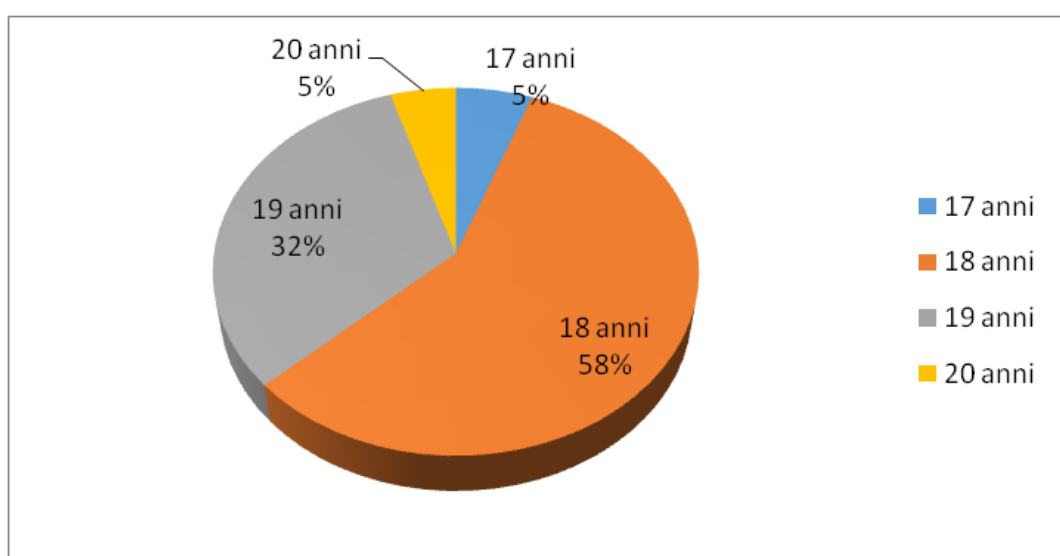


Grafico 7.3: Percentuali delle età degli student considerati,

L'età del campione considerato è compresa tra i 17 ed i 20 anni.

Come si evince dalla tavola3 l'età preponderante degli allievi considerati è 18 anni con una percentuale del 57,6%, molto pochi risultano essere gli studenti di 17 e 20 anni con percentuali rispettivamente del 5,6% e 4,8%, mentre l'età media risulta del 18,36%.

Tabella 7.4 **Tabella frequenza città**

| | | Frequenza | Percentuale |
|--------|-----------|-----------|-------------|
| Validi | Messina | 88 | 70,4 |
| | Caltaniss | 37 | 28,6 |
| Totale | | 125 | 100,0 |

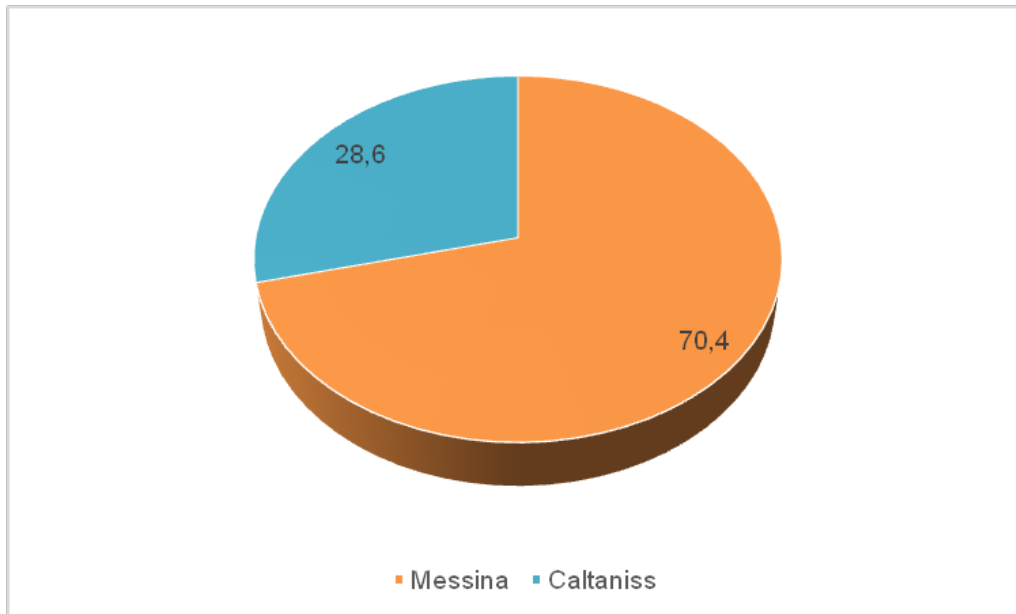


Grafico 7.4: Percentuale di allievi per città.

Vengono analizzate adesso singolarmente le tabelle di frequenza delle domande dei tests effettuati.

Tabella 7.5 **Tabella frequenza-Domanda1 pre test. Le grandezze scalari sono:**

| | | Frequenza | Percentuale |
|--------|-------------------|-----------|-------------|
| Validi | Risposta Errata | 12 | 9,6 |
| | Risposta Corretta | 113 | 90,4 |
| Totale | | 125 | 100,0 |

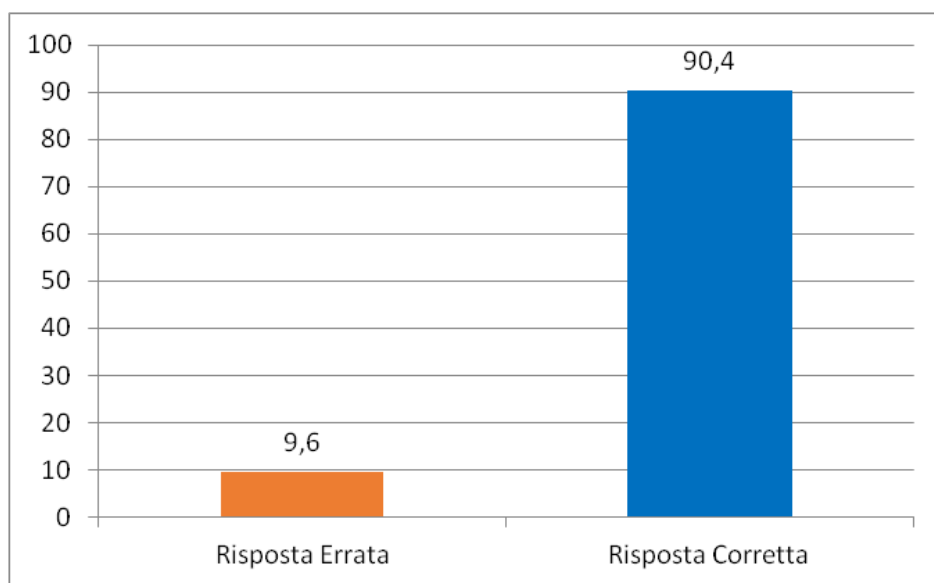


Grafico 7.5: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla prima domanda del pre test.

Dall'analisi della prima domanda del pre test, si evince che le risposte corrette sono state la maggior parte: con una percentuale del 90.4% contro il 9.6% di quelle errate. Da tale confronto si deduce che 113 alunni su 125 conoscono perfettamente la differenza tra grandezze scalari e grandezze vettoriali. Tale risposta è servita per controllare il livello di conoscenza del prerequisito “*grandezza scalare*” in funzione delle basi di didattica vettoriale possedute dai soggetti oggetto di analisi. (Vedi Cap.3.1)

Tabella 7.6 Tabella frequenza-Domanda2 pre test: Un vettore è definito in matematica come classe di segmenti orientati equipollenti, ovvero l'insieme di segmenti dotati di medesima direzione e verso:

| | Frequenza | Percentuale |
|------------------------|------------|--------------|
| Validi Risposta Errata | 80 | 64,0 |
| Risposta Corretta | 45 | 36,0, |
| Totale | 125 | 100,0 |

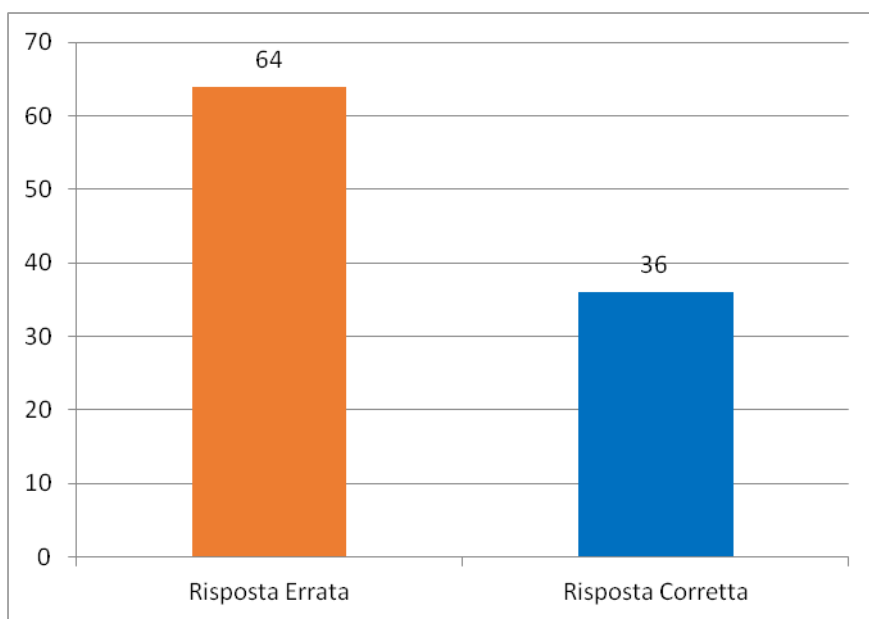


Grafico 7.6 Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla seconda domanda del pre test.

Dall'analisi della seconda domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 36% contro il 64% di quelle errate. Da tale confronto si evince che solo 45 alunni su 80 conoscono la definizione matematica di vettore. Tale risposta è servita per controllare il livello di conoscenza del prerequisito “*definizione matematica di vettore*” in funzione delle basi di didattica vettoriale possedute dai soggetti oggetto di analisi.

Tabella 7.7 Tabella frequenza-Domanda3 pre test: Quali dei seguenti metodi si possono utilizzare per sommare i vettori?

| | Frequenza | Percentuale |
|------------------------|------------|--------------|
| Validi Risposta Errata | 6 | 4,8 |
| Risposta Corretta | 119 | 95,2 |
| Totale | 125 | 100,0 |

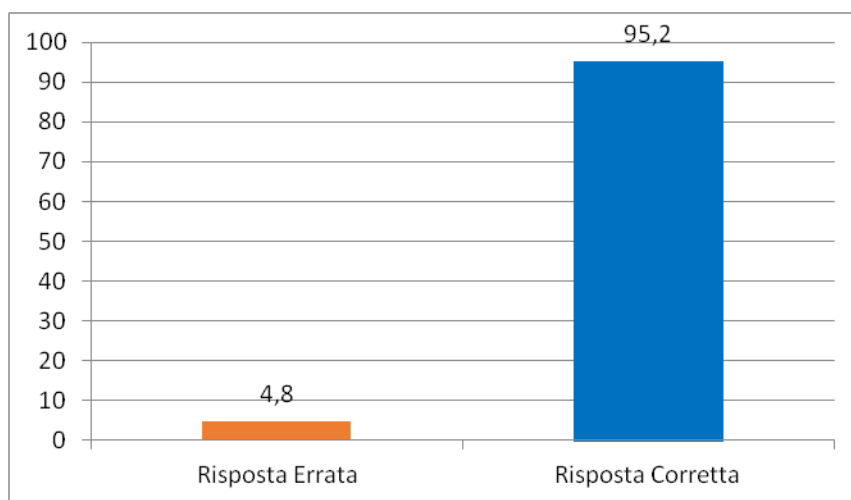


Grafico 7.7: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla terza domanda del pre test.

Dall'analisi della terza domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 95.2% contro il 4.8% di quelle errate. Da tale confronto si deduce che 119 alunni su 125 conoscono perfettamente la modalità in cui si sommano due vettori. Tale risposta è stata utile per controllare il livello di conoscenza del prerequisito “*somma di vettori*” in funzione delle basi di didattica vettoriale possedute dai soggetti testati.

Tabella 7.8 Tabella frequenza-Domanda4 pre test: Per conoscere le grandezze vettoriali, occorre avere:

| | Frequenz a | Percentuale |
|-------------------------------|---------------|-------------|
| Valid i Risposta Errata | 78 | 62,4 |
| Risposta Corretta | 47 | 37,6 |
| Totale | 125 | 100,0 |

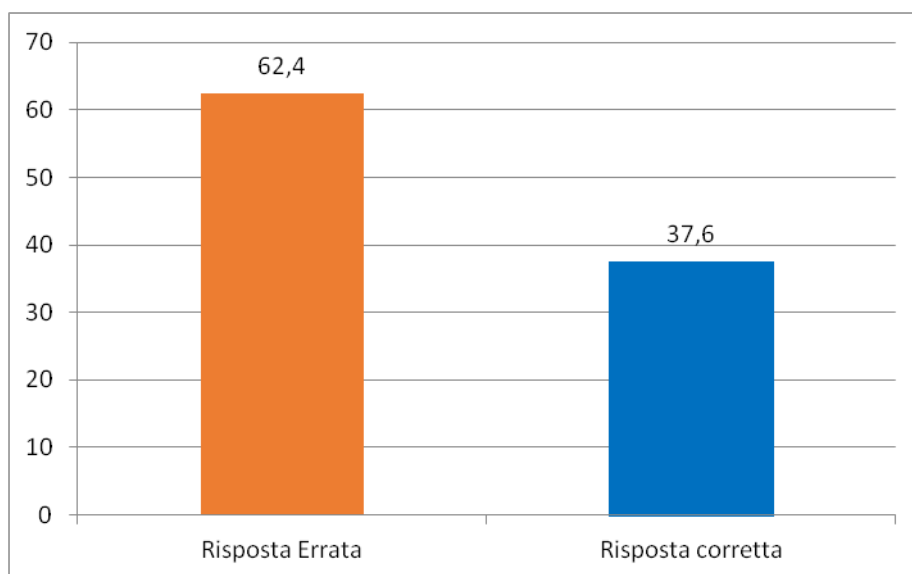


Grafico 7.8: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla quarta domanda del pre test.

Dall'analisi della quarta domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 37.6% contro il 62.4% di quelle errate. Da tale confronto si può dedurre che solo 47 alunni su 125 comprendono perfettamente quali dati occorre conoscere per definire in modo esaustivo le grandezze vettoriali. Tale risposta è servita per controllare il livello di conoscenza del prerequisito “*vettori*” in funzione delle basi di didattica vettoriale possedute dai soggetti oggetto di analisi, il quale non è risultato sufficiente.

Tabella 7.9 Tabella frequenza-Domanda5 pre test: Nel prodotto vettoriale il verso è:

| | Frequenza | Percentuale |
|-------------------|-----------|-------------|
| Validi | | |
| Risposta Errata | 59 | 47,2 |
| Risposta Corretta | 66 | 52,8 |
| Totale | 125 | 100,0 |

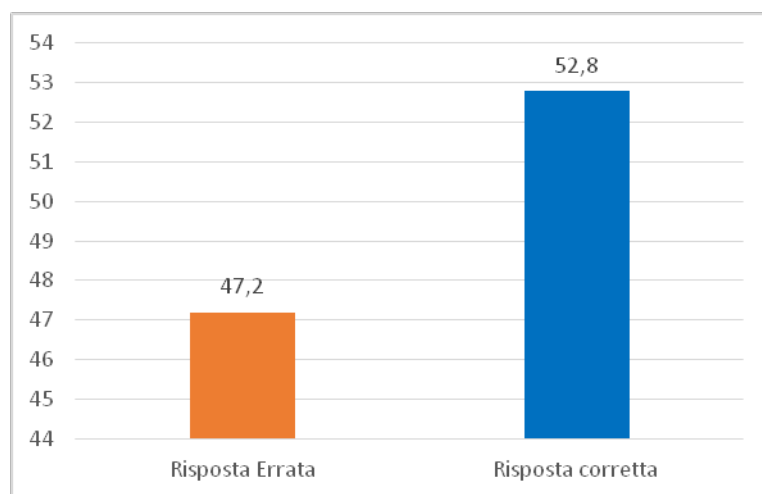


Grafico 7.9 Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla quinta domanda del pre test.

Dall'analisi della quinta domanda del pre test, si può dichiarare che le risposte corrette sono state del 37.6% contro il 62.4% di quelle errate. Da tale confronto si deduce che 66 alunni su 125 conoscono esattamente la modalità in cui si calcola il prodotto vettoriale. Tale risposta ha evidenziato un livello appena sufficiente di conoscenza del prerequisito “*prodotto vettoriale*” in funzione delle basi di didattica vettoriale possedute dai soggetti oggetto di analisi.

Queste prime cinque domande sono state formulate per analizzare il livello di conoscenza della didattica vettoriale. Da tale analisi risulta che il 47,2% degli studenti testati hanno difficoltà nella comprensione dell'argomento “*vettori*”. Tale parte della fisica è strettamente propedeutico alla comprensione delle nuove formule proposte. Questo risultato ci permette di dare un maggior peso ai risultati finali ottenuti dall'indagine effettuata, in quanto non sono inficiati dalla buona conoscenza dei prerequisiti.

Tabella 7.10 Tabella frequenza-Domanda6 pre test: Se $\text{sen } x = 0$, quanto vale x ?

| | | Frequenza | Percentuale |
|--------|-------------------|-----------|-------------|
| Validi | Risposta Errata | 19 | 15,2 |
| | Risposta Corretta | 106 | 84,8 |
| Totale | | 125 | 100,0 |

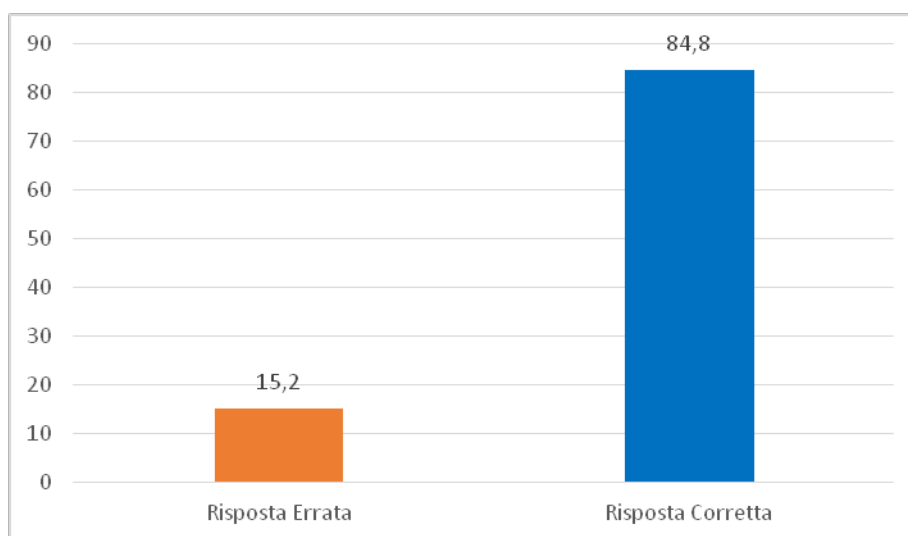


Grafico 7.10 Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla sesta domanda del pre test.

Dall'analisi della sesta domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 84.8% contro il 15.2% di quelle errate. Da tale confronto si deduce che la maggior parte degli allievi, 106 sul totale di 125, sanno calcolare il seno di un angolo. Tale risposta è servita per controllare il livello di conoscenza del prerequisito "*seno di un angolo notevole*" in funzione delle basi di didattica goniometrica possedute dai soggetti oggetto di analisi, il quale è risultato molto buono.

Tabella 7.11 Tabella frequenza-Domanda7 pre test: $\cos(-x)$ è uguale a?

| | Frequenz a | Percentuale |
|-------------------------------|---------------|-------------|
| Valid i Risposta Errata | 58 | 46,4 |
| Risposta Corretta | 67 | 53,6 |
| Totale | 125 | 100,0 |

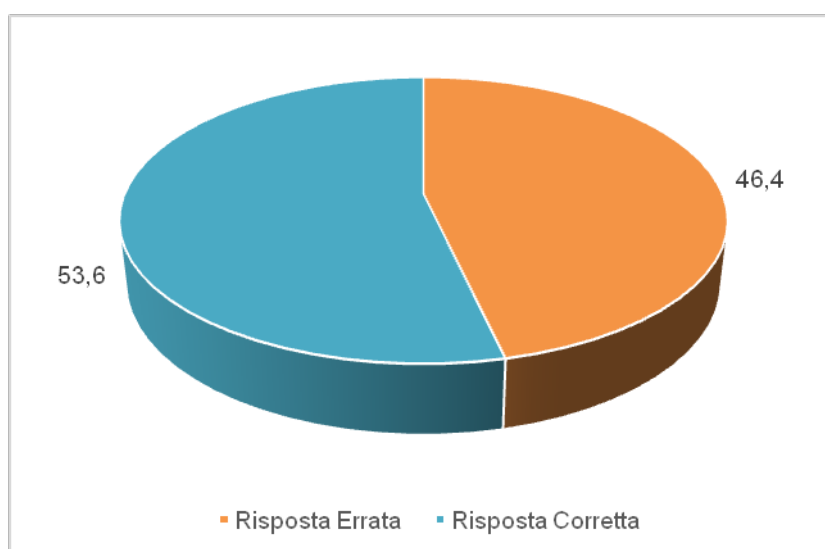


Grafico 7.11: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla settima domanda del pre test.

Dall'analisi della settima domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 53.6% contro il 46.4% di quelle errate. Tale risposta è servita per controllare il livello di conoscenza del prerequisito “*archi associati*”, fondamentale per la comprensione delle nuove formule proposte. Tale risposta ha evidenziato una proporzione solo leggermente superiore delle risposte corrette su quelle sbagliate.

Tabella 7.12 Tabella frequenza-Domanda8 pre test: A quanti gradi corrisponde $\pi/12$

| | Frequenz a | Percentuale |
|-------------------------------|---------------|-------------|
| Valid i Risposta Errata | 6 | 4,8 |
| Risposta Corretta | 119 | 95,2 |
| Totale | 125 | 100,0 |

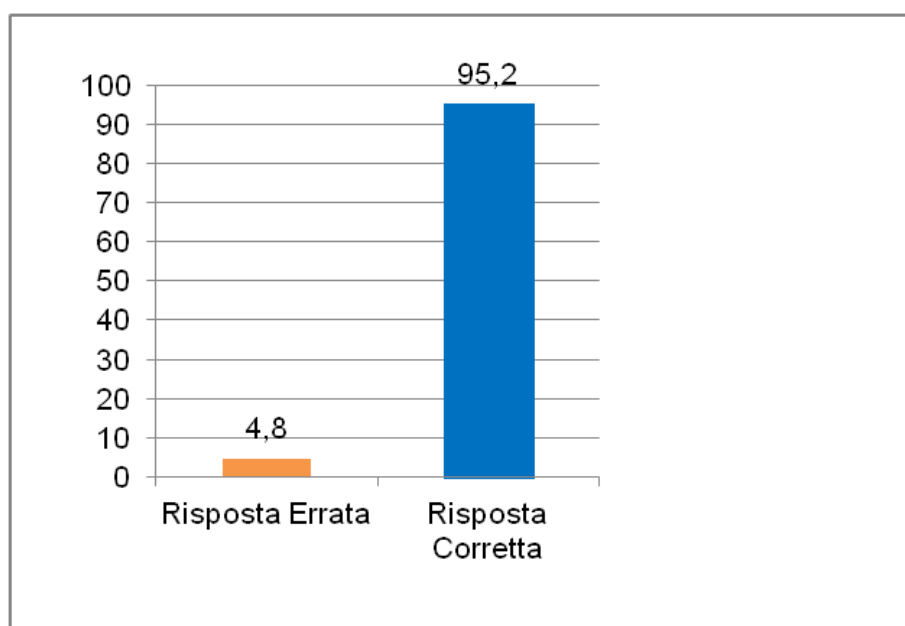


Grafico 7.12: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla ottava domanda del pre test.

Dall'analisi della ottava domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 95.2% contro il 4.8% di quelle errate. Tale risposta è servita per controllare il livello di conoscenza della formula del passaggio da radianti a gradi in funzione delle basi di didattica goniometrica possedute dai soggetti oggetto di analisi, il quale è risultato molto buono.

Tabella 7.13 Tabella di frequenza Domanda9 pre test: L'espressione $\frac{\sin x}{\cos x}$ è uguale a?

| | Frequenz a | Percentuale | |
|------------|----------------------|-------------|-------|
| Valid i | Risposta Errata | 7 | 5,6 |
| | Risposta Corretta | 118 | 94,4 |
| Totale | | 125 | 100,0 |

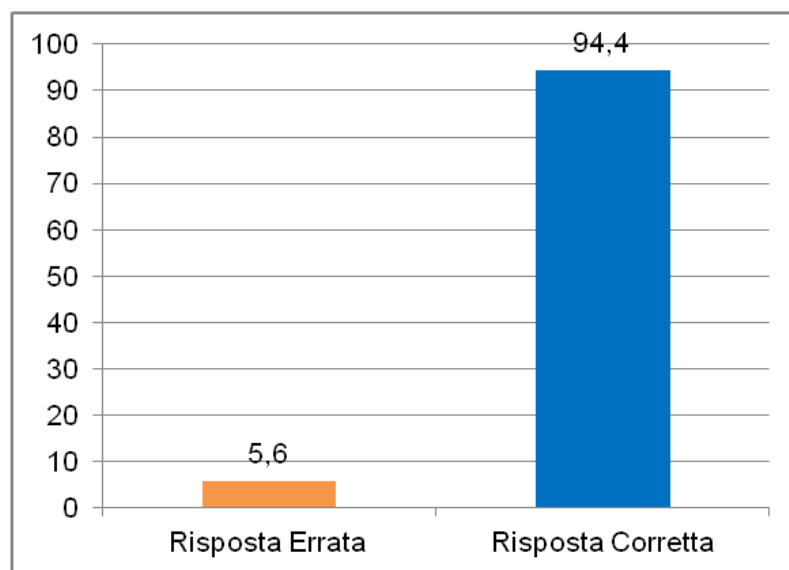


Grafico 7.13: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla nona domanda del pre test.

Dall'analisi della nona domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 94.4% contro il 5.6% di quelle errate. Da tale confronto si deduce che la quasi totalità degli allievi, 118 sul totale di 125, sanno calcolare semplificare le equazioni goniometriche di un angolo.

Tabella 7.14 Tabella di frequenza Domanda10 pre test: Quanto vale $\text{sen}(180^\circ - x)$?

| | Frequenz a | Percentuale | |
|------------|----------------------|-------------|-------|
| Valid i | Risposta Errata | 49 | 39,2 |
| | Risposta Corretta | 76 | 60,8 |
| Totale | | 125 | 100,0 |

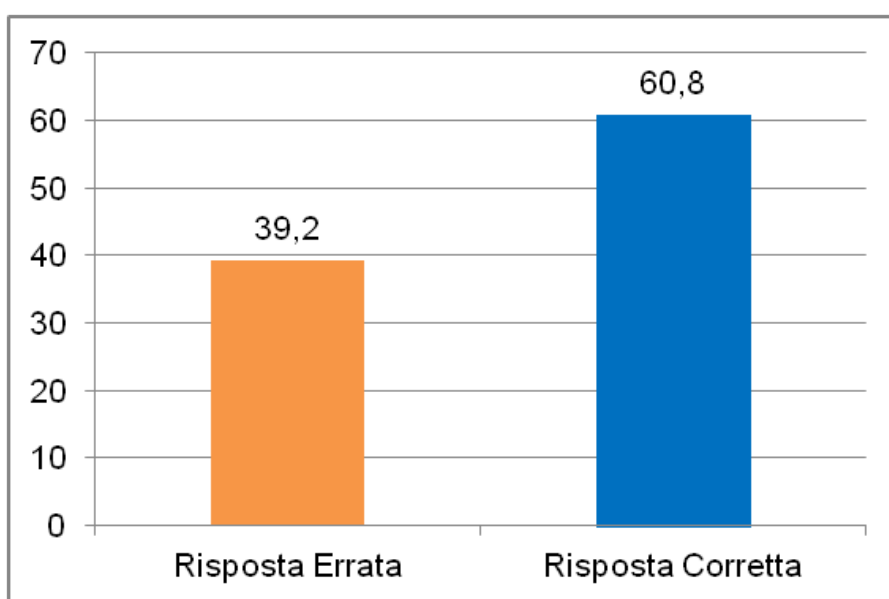


Grafico 7.14: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla decima domanda del pre test.

Dall'analisi della decima domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 60.8% contro il 39.2% di quelle errate. Anche tale domanda, come la numero 7 è stata assegnata per controllare il livello di conoscenza del prerequisito “archi associati”, fondamentale per la comprensione delle nuove formule proposte. Tale risposta ha evidenziato una proporzione superiore delle risposte corrette su quelle sbagliate.

Queste ulteriori cinque domande sono state formulate per analizzare il livello di conoscenza della goniometria. Da tale analisi risulta che il 77,76% degli studenti testati hanno padronanza dell'argomento “goniometria” anche se, si sono riscontrate difficoltà per quanto riguarda gli archi associati (vedi tavola 11). Tale

parte della matematica è strettamente propedeutica alla comprensione delle nuove formule proposte.

Tabella 7.15 Tabella di frequenza Domanda11: pre test: Estruendo una pallina da un'urna contenente 100 palline, di cui 25 blu, 15 rosse e 60 gialle, qual è la probabilità che esca una pallina rossa?

| | Frequenza | Percentuale |
|-------------------|-----------|-------------|
| Validi | | |
| Risposta Errata | 16 | 12,8 |
| Risposta Corretta | 109 | 87,2 |
| Totale | 125 | 100,0 |

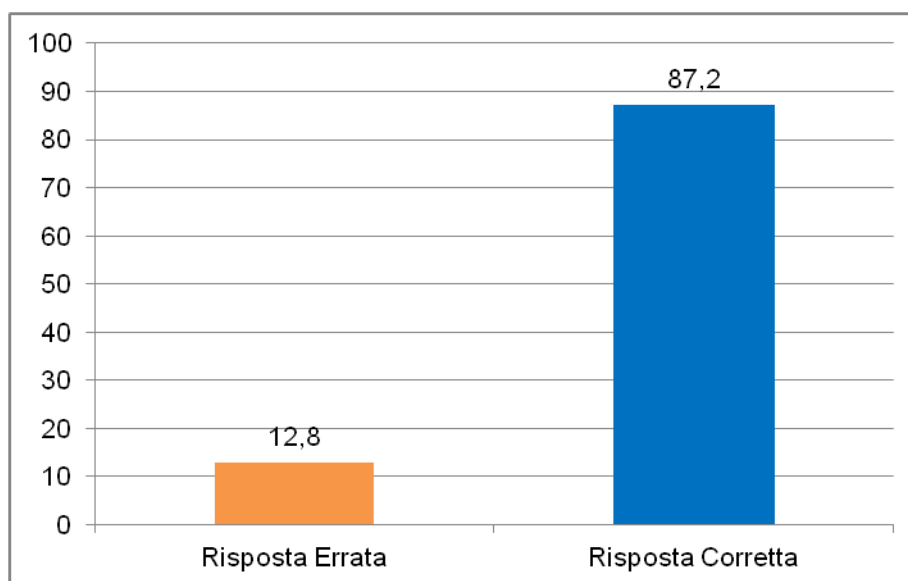


Grafico 7.15: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla undicesima domanda del pre test.

Dall'analisi dell'undicesima domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 87.2% contro il 12.8% di quelle errate. Tale domanda è stata assegnata per controllare il livello di conoscenza degli allievi sul concetto di "probabilità" (Vedi Cap.3.3). Questo dato permette di osservare che gli studenti posseggono una buona padronanza della definizione di probabilità.

Tabella 7.16 Tabella di frequenza Domanda12 pre test: Claudia ha lanciato 4 volte di seguito una moneta ed ha ottenuto sempre croce. Se lanciasse la moneta la quinta volta, cosa succederebbe?

| | Frequenz a | Percentuale |
|-------------------------------|---------------|-------------|
| Valid i Risposta Errata | 18 | 14,4 |
| Risposta Corretta | 107 | 85,6 |
| Totale | 125 | 100,0 |

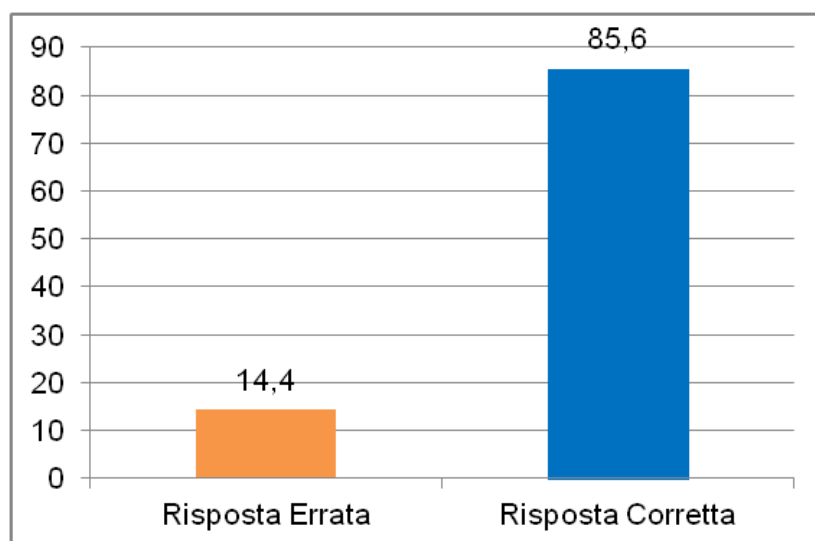


Grafico 7.16: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla dodicesima domanda del pre test.

Dall'analisi della dodicesima domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 85.6% contro il 14.4% di quelle errate. Anche questa domanda, come la precedente, è stata assegnata per controllare il livello di conoscenza degli allievi sul concetto di "probabilità" (Vedi Cap.3.3). Questo dato conferma quello precedente, permettendo di osservare che gli studenti posseggono una buona padronanza della definizione di probabilità.

Tabella 7.17 Tabella di frequenza Domanda13 pre test: Una coppia ha già avuto due figli maschi, qual è la probabilità che il terzo figlio sia femmina?

| | Frequenza | Percentuale |
|-------------------|-----------|-------------|
| Validi | | |
| Risposta Errata | 25 | 20,0 |
| Risposta Corretta | 100 | 80,0 |
| Totale | 125 | 100,0 |

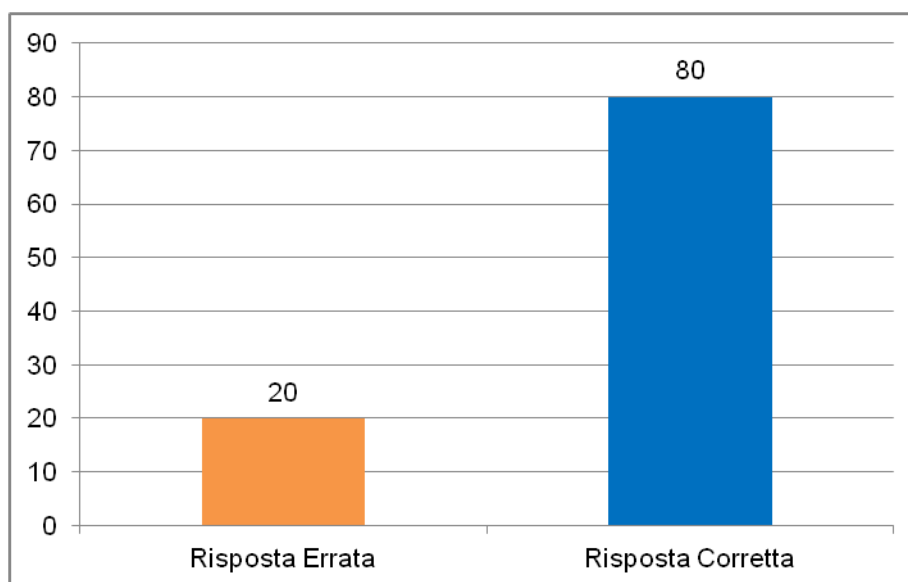


Grafico 7.17: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla tredicesima domanda del pre test.

Dall'analisi della dodicesima domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 80% contro il 20% di quelle errate. Per questa domanda si possono condividere le medesime considerazioni proposte precedentemente.

Tabella 7.18 Tabella di frequenza Domanda 14 pre test: Considerando la tabella in allegato, dei dipendenti di un'impresa, dei quali abbiamo rilevato il numero dei figli. Calcola la varianza.

| | Frequenza | Percentuale | |
|--------|-------------------|-------------|-------|
| Validi | Risposta Errata | 93 | 74,4 |
| | Risposta Corretta | 32 | 25,6 |
| Totale | | 125 | 100,0 |

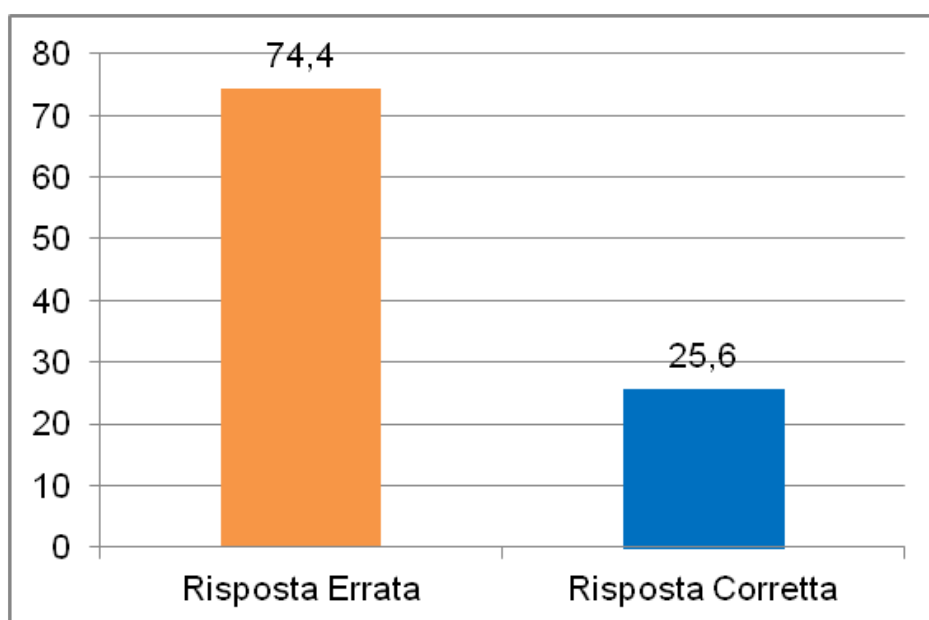


Grafico 7.18: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla quattordicesima domanda del pre test.

Dall'analisi della dodicesima domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 25.6% contro il 74.4% di quelle errate. Dall'osservazione dei dati in tabella 18 si può osservare che soltanto un quarto degli allievi sottoposti al test ha saputo correttamente orientarsi sulla parte statistica.

Tabella 7.19 Tabella di frequenza Domanda 15 pre test: Da un lotto di gomitoli di lana si è rilevato il peso dei gomitoli: qual è la media dei pesi?

| | Frequenz a | Percentuale |
|-------------------------------|---------------|-------------|
| Valid i Risposta Errata | 46 | 20,8 |
| Risposta Corretta | 79 | 79,2 |
| Totale | 125 | 100,0 |

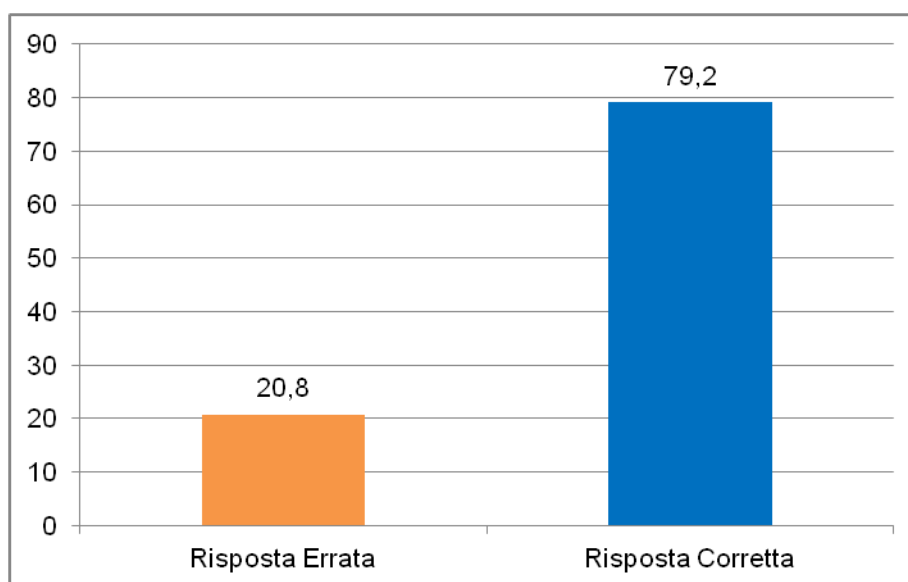


Grafico 7.19: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla quindicesima domanda del pre test.

Dall'analisi della quindicesima domanda del pre test, si desume che le risposte corrette sono state del 79.2% contro il 20.8% di quelle errate. Contrariamente alla domanda precedente, il campione totale degli studenti ha mostrato una buona padronanza per quanto riguarda il concetto di media ponderata.

Tabella 7.20 Tabella di frequenza Domanda 1 re test: Se consideriamo un beam-splitter con riflettanza pari a 0.8 ed immaginiamo di eseguire misure con fasci a singolo fotone, quanto varrà la probabilità che il singolo fotone venga trasmesso?

| | Frequenza | Percentuale |
|-------------------|-----------|-------------|
| Validi | | |
| Risposta Errata | 46 | 36,8 |
| Risposta Corretta | 79 | 63,2 |
| Totale | 125 | 100,0 |

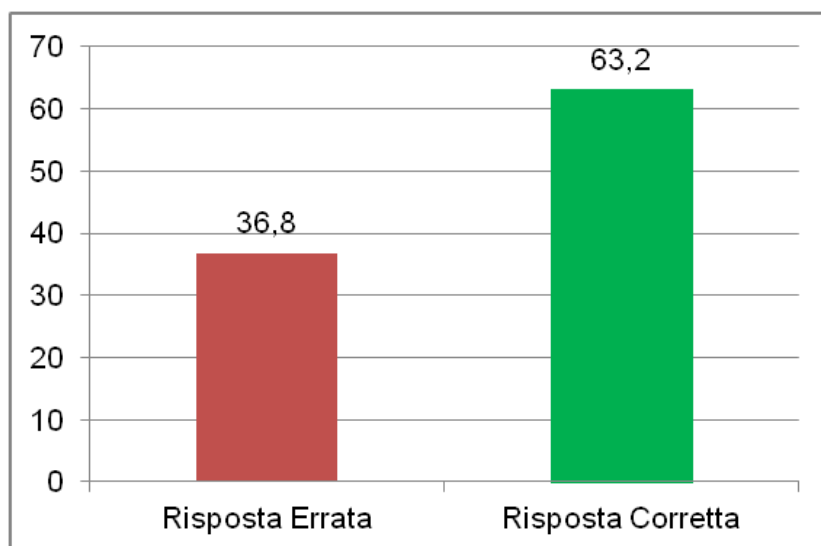


Grafico 7.20: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla prima domanda del re test.

Dall'analisi della prima domanda del re test, si desume che le risposte corrette sono state del 63.2% contro il 36.8% di quelle errate. Da questa risposta, la cui domanda è stata posta per un primo approccio all'argomento, si evince che non vi è una netta preponderanza del risultato risposta corretta, in quanto l'argomento risulta ovviamente complesso, ragion per cui è stato condotto lo studio proprio della semplificazione matematica del formalismo.

Tabella 7.21 Tabella di frequenza Domanda 2 re test: Consideriamo una sorgente da cui fuoriescono gli atomi di argento e applichiamo un primo apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse z, blocchiamo l'emissione di atomi z- introduciamo in sequenza un altro apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse ϑ che forma un angolo di 60° con il precedente. Quale sarà la probabilità di ottenere spin up?

| | Frequenz a | Percentuale |
|-------------------------------|---------------|-------------|
| Valid i Risposta Errata | 64 | 51,2 |
| Risposta Corretta | 61 | 48,8 |
| Totale | 125 | 100,0 |

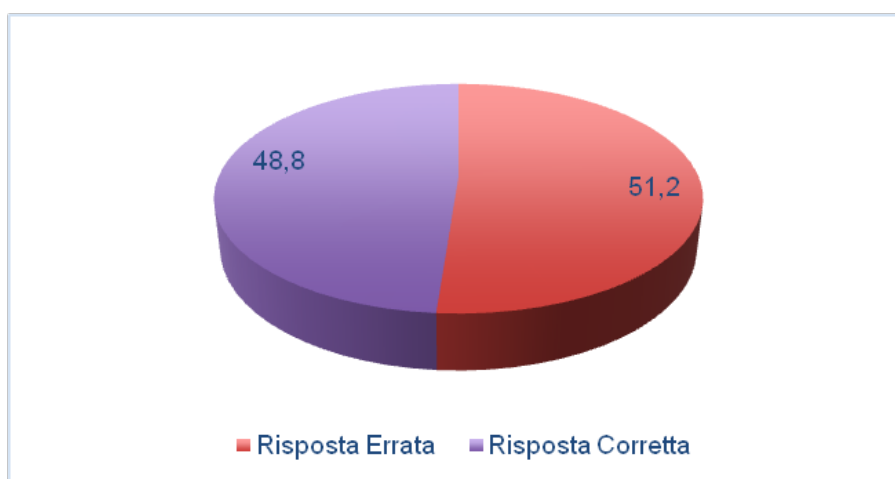


Grafico 7.21: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla seconda domanda del re test.

Dall'analisi della seconda domanda del re test, si desume che le risposte corrette sono state del 48.8% contro il 51.2% di quelle errate. Questa tavola di contingenza esprime l'esito delle risposte complessive dei 125 soggetti della sperimentazione alla domanda iniziale sulla comprensione delle nuove formule sullo spin.

Tabella 7.22 Tabella di frequenza Domanda 3 re test: Consideriamo una sorgente da cui fuoriescono gli atomi di argento e applichiamo un primo apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse z, blocchiamo l'emissione di atomi z- introduciamo in sequenza un altro apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse che forma un angolo di 90° con il precedente. Quale sarà la probabilità di ottenere spin down?

| | Frequenz a | Percentuale |
|-------------------------------|---------------|-------------|
| Valid i Risposta Errata | 9 | 7,2 |
| Risposta Corretta | 116 | 92,8 |
| Totale | 125 | 100,0 |

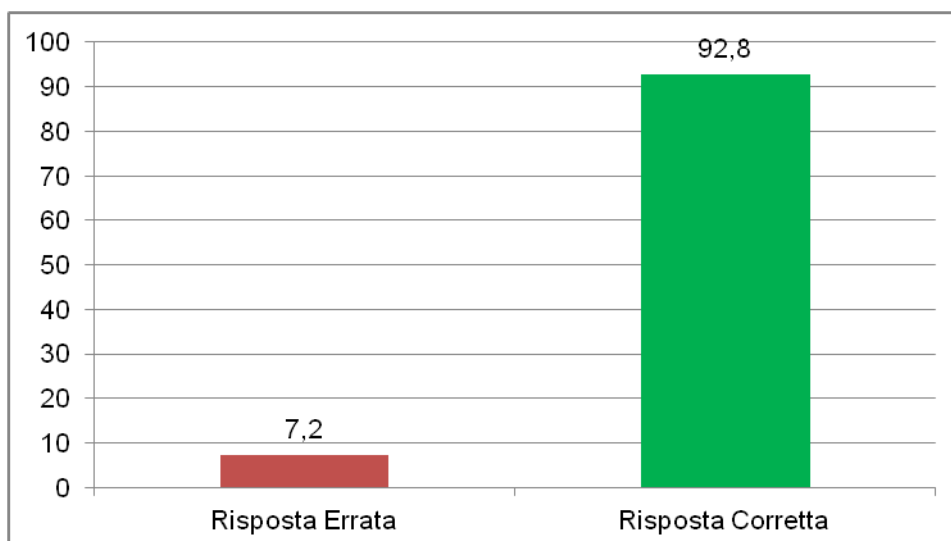


Grafico 7.22: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla terza domanda del re test.

Dall'analisi della terza domanda del re test, si desume che le risposte corrette sono state del 92.8% contro il 7.2% di quelle errate. Analizzando questo dato, si presume che la preponderanza della risposta corretta rispetto a quella errata in questa domanda, confrontata con quella precedente, evidenzia delle difficoltà nel calcolo goniometrico, in quanto, la domanda posta è molto simile a quella precedente ed entrambe rappresentano una delle parti centrali degli argomenti proposti in questa tesi. Da tale risultato sembra chiaro che l'argomento così offerto è stato ben compreso.

Tabella 7.23 Tabella di frequenza Domanda 4 re test: Nella disuguaglianza di CHSH, cosa possiamo dire sul modulo del valore medio di C?

| | Frequenza | Percentuale |
|--------|-------------------|-------------|
| Validi | Risposta Errata | 13,6 |
| | Risposta Corretta | 86,4 |
| Totale | | 100,0 |

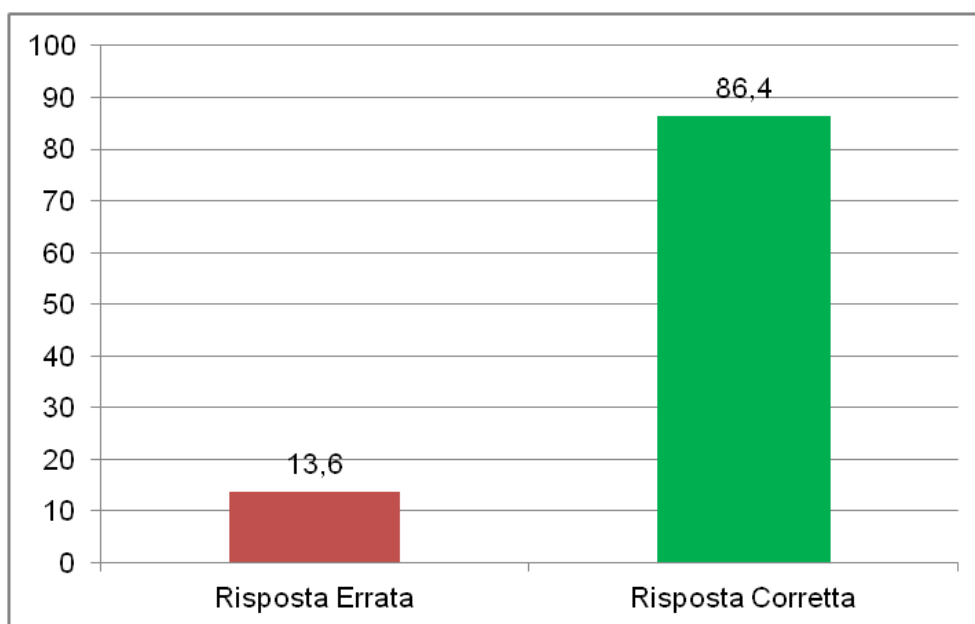


Grafico 7.23: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla quarta domanda del re test.

Dall'analisi della quarta domanda del re test, si desume che le risposte corrette sono state del 86.4% contro il 13.6% di quelle errate. La percentuale di risposte corrette date a questa domanda mostra una che vi è stata attenzione durante la fase di training.

Tabella 7.24 Tabella di frequenza Domanda 5 re test: In un esperimento sequenziale di Stern- Gerlach, considerando una sorgente da cui fuoriescono gli atomi di argento e applichiamo ad essa un primo apparato di Stern- Gerlach orientato lungo l'asse z, blocchiamo l'emissione di atomi in z- e ntroduciamo in sequenza un altro apparato di Stern-Gerlach. Se ottengo il 25% di ottenere spin up, di quanto è ruotato l'angolo θ ?

| | Frequenz a | Percentuale |
|-------------------------------|---------------|-------------|
| Valid i Risposta Errata | 65 | 52,0 |
| Risposta Corretta | 60 | 48,0 |
| Totale | 125 | 100,0 |

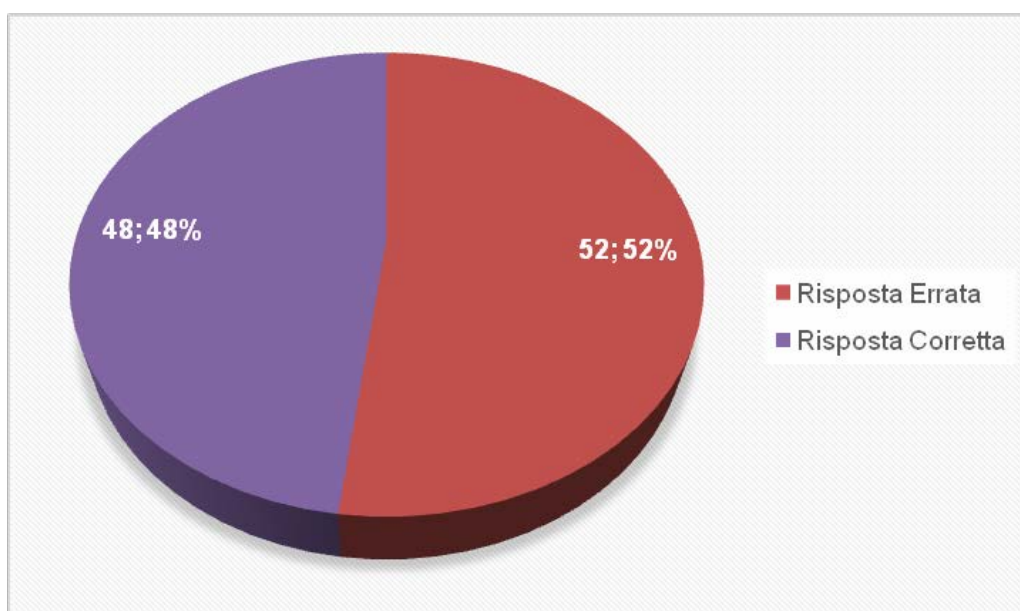


Grafico 7.24: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla quinta domanda del re test.

Dall'analisi della quinta domanda del re test, si desume che le risposte corrette sono state del 48% contro il 52% di quelle errate. Questa domanda è stata posta per verificare il livello di comprensione dell'argomento proposto utilizzando le formule inverse. Risulta chiaro che vi è una percentuale lievemente superiore di risposte corrette che mi induce a ritenere, confrontandola con i risultati del pretest, che la difficoltà riscontrata è stata quella relativa allo sviluppo matematico delle formule inverse e non di comprensione dell'argomento.

Tabella 7.25 Tabella di frequenza Domanda 6 re test: Consideriamo una sorgente che invia due particelle di spin $\frac{1}{2}$ con momento totale angolare nullo, ciascuna ad uno die due osservatori distanti Alice e Bob. Se Alice esegue per prima la misura ed ottiene -1 che valore otterrà Bob eseguendo la misura lungo un asse ruotato di 30° ?

| | Frequenz a | Percentuale |
|-------------------------------|---------------|-------------|
| Valid i Risposta Errata | 34 | 27,2 |
| Risposta Corretta | 91 | 72,8 |
| Totale | 125 | 100,0 |

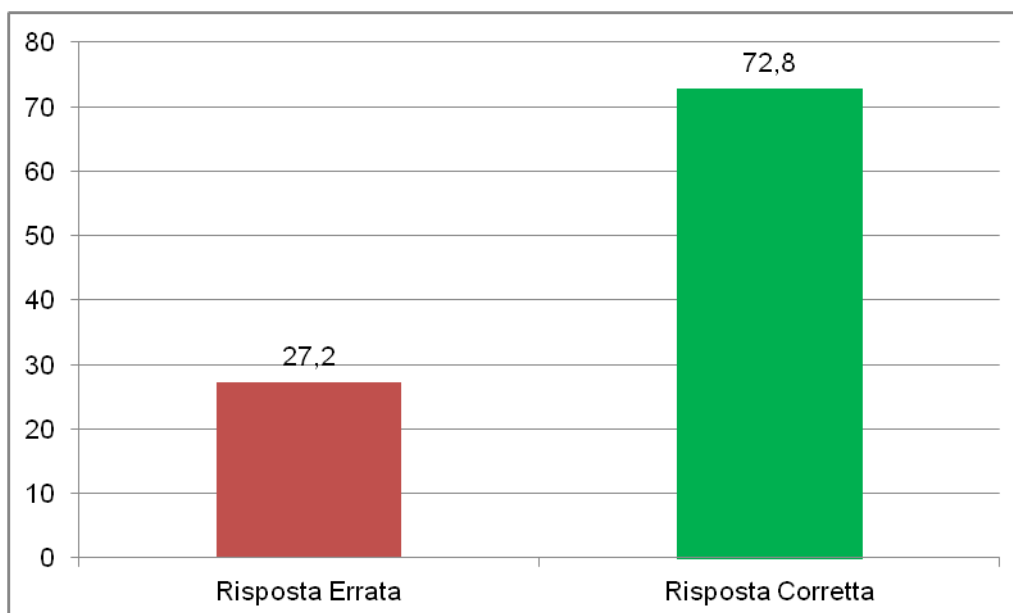


Grafico 7.25: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla sesta domanda del re test.

Dall'analisi della sesta domanda del re test, si osserva che le risposte corrette sono state del 72.8% contro il 27.2% di quelle errate. Dall'osservazione della tavola 25, si deduce che, essendo stato posto tale quesito allo scopo di verificare il grado di comprensione delle nuove formule ideate sulla parte dell'entanglement, gli studenti hanno ben compreso tale parte del training proposto.

Tabella 7.26 Tabella di frequenza Domanda 7 re test: Consideriamo una sorgente che invia due particelle di spin $\frac{1}{2}$ con momento totale angolare nullo, ciascuna ad uno dei due osservatori distanti Alice e Bob. Se Alice esegue per prima la misura ed ottiene 1 quale sarà la probabilità che Bob eseguendo la misura lungo un asse ruotato di 30° ottenga -1?

| | Frequenz a | Percentuale |
|------------|----------------------|--------------|
| Valid i | Risposta Errata | 53 42,4 |
| | Risposta Corretta | 72 57,6 |
| Totale | | 125 100,0 |

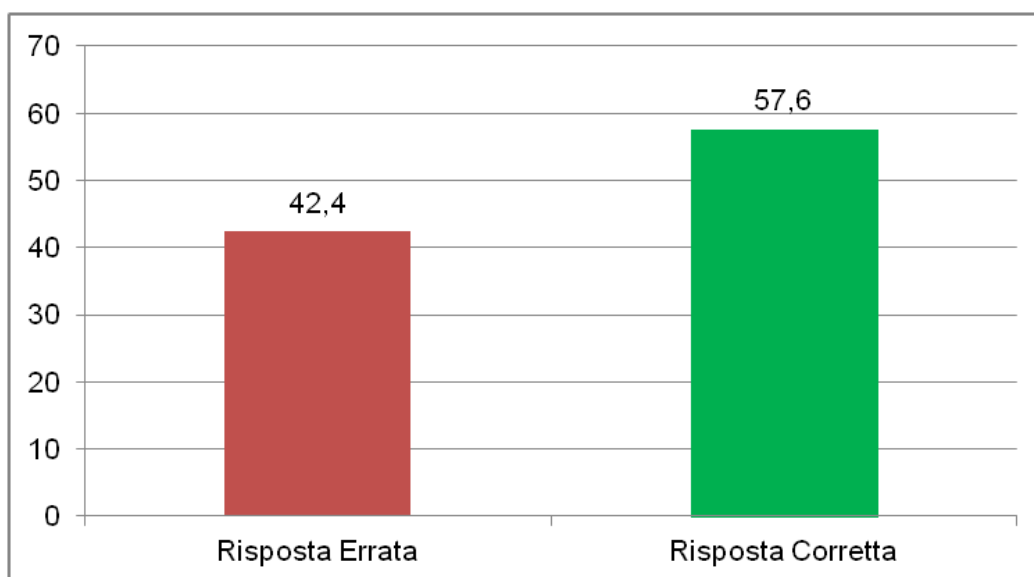


Grafico 7.26: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla settima domanda del re test.

Dall'analisi della settima domanda del re test, si osserva che le risposte corrette sono state del 57.6% contro il 42.4% di quelle errate. Anche questa domanda è stata formulata con lo stesso scopo della precedente. Anche dall'esame di questa tabella di contingenza scaturisce che la maggioranza degli allievi ha risposto correttamente. La percentuale minore rispetto alla domanda precedente, mi sento di affermare che derivi dalla difficoltà dello sviluppo matematico delle formule inverse e non dalla comprensione dell'argomento, concordemente con la tavola 24.

Tabella 7.27 Tabella di frequenza Domanda 8 re test: L'incontro fatto

| | Frequenza | Percentuale |
|--|-----------|-------------|
| Validi | | |
| Ti ha incuriosito | 72 | 57,6 |
| Ti ha coinvolto | 23 | 18,4 |
| Ti ha fatto intravedere un mondo nuovo | 26 | 20,8 |
| Nessuna delle precedenti | 4 | 3,2 |
| Totale | 125 | 100,0 |

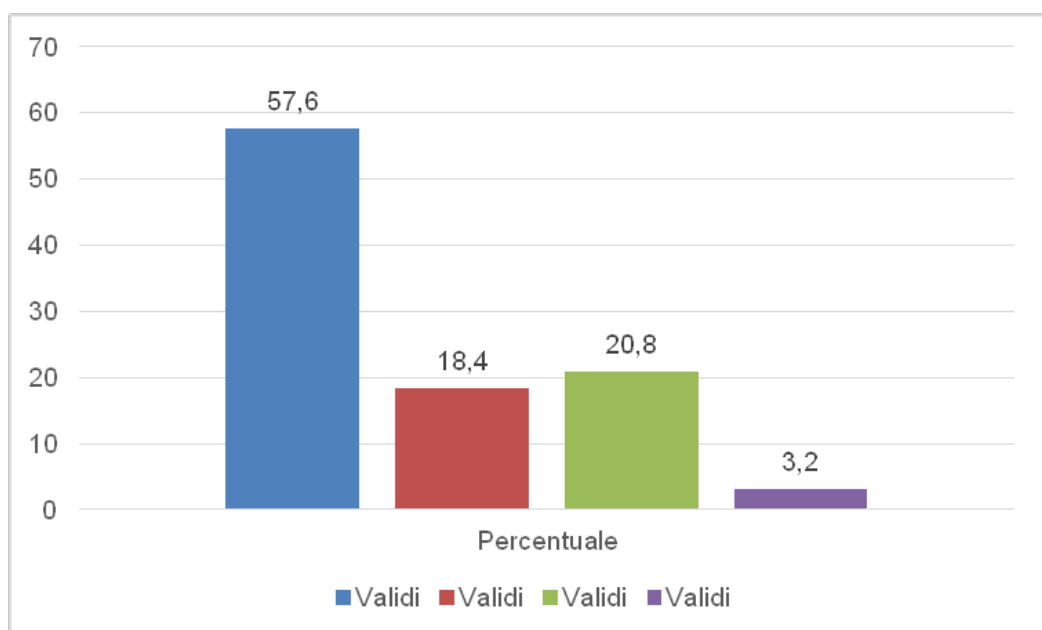


Grafico 7.27: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla ottava domanda del re test.

Tabella 7.28 Tabella di frequenza Domanda 9 re test: Ritieni che gli aspetti matematici introdotti (vettori, goniometria, probabilità, ...) siano:

| | Frequenza | Percentuale |
|---|-----------|-------------|
| Validi | | |
| Un ostacolo e non aiutano per niente | 1 | 8,0 |
| Un ostacolo ma aiutano a capire la fisica quantistica | 14 | 11,2 |
| Difficili ma affrontabili e sono necessari per introdurre la fisica quantistica | 84 | 67,2 |
| Non sono un ostacolo e sono di facile comprensione | 26 | 20,8 |
| Totale | 125 | 100,0 |

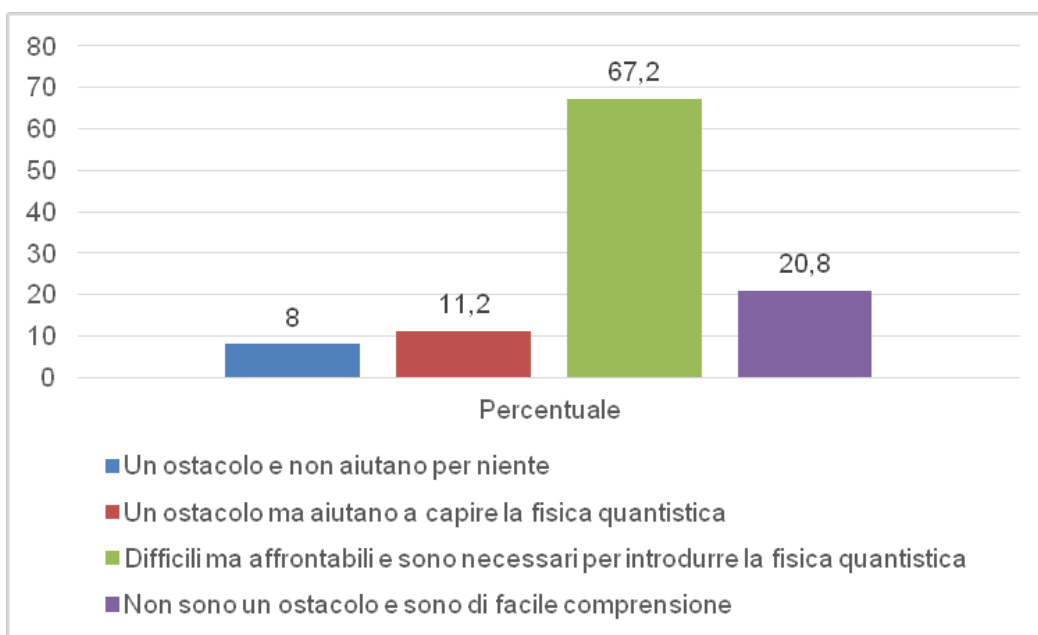


Grafico 7.28: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla nona domanda del re test.

Tabella 7.29 Tabella di frequenza Domanda 10 re test: Ritieni utile sperimentare un modulo sulla fisica quantistica in V liceo?

| | | Frequenza | Percentuale |
|--------|------------|-----------|-------------|
| Validi | Per nulla | 6 | 4,8 |
| | Poco | 34 | 27,2 |
| | Abbastanza | 74 | 59,2 |
| | Molto | 11 | 8,8 |
| Totale | | 125 | 100,0 |

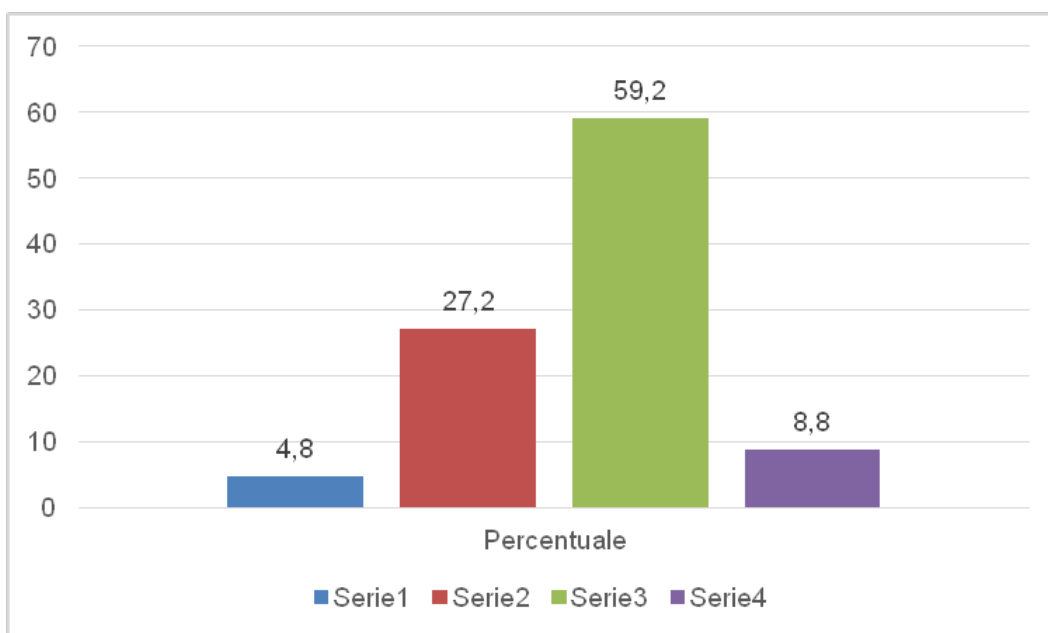


Gráfico 7.29: Distribuzione percentuale di risposte corrette ed errate alla decima domanda del re test.

Queste ultime tre domande (Tavole 27, 28 e 29), riguardano il livello di gradimento del percorso di training svolto. Si osserva chiaramente che gli allievi sono incuriositi ed interessati a questo nuovo approccio e che le formule introdotte risultano “affrontabili” ed il 59,2% degli studenti ritiene abbastanza utile sperimentare un ulteriore modulo sulla MQ.

Tabella 7.30 Statistiche descrittive per variabili numeriche

| | Media | Mediana | Deviazione Std | Minimo | Massimo |
|------------------|--------|---------|----------------|--------|---------|
| Voti Matematica | 6,11 | 6 | 1,463 | 2 | 10 |
| Voti Fisica | 6,51 | 6,5 | 1,396 | 2 | 9 |
| Pretest | 10,584 | 11 | 1,6519 | 3 | 14 |
| Retest | 4,696 | 5 | 1,25867 | 1 | 7 |
| Rapporto-pretest | 0,7056 | 0,7333 | 0,11013 | 0,2 | 0,93 |
| RapportoRetest | 0,6709 | 0,7143 | 0,17981 | 0,14 | 1 |

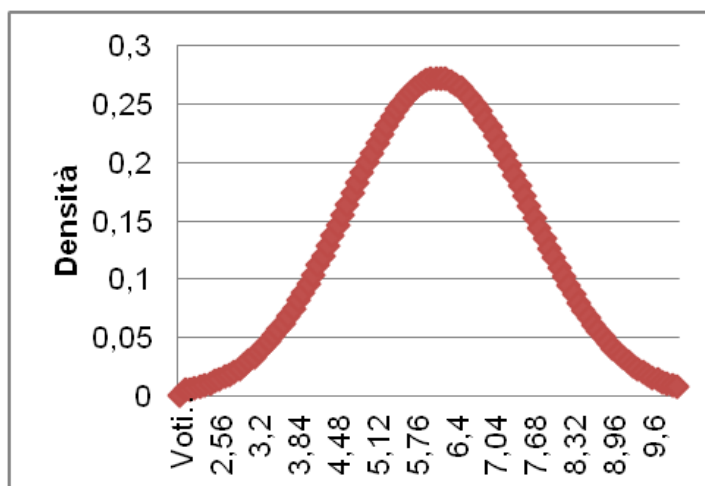


Grafico 7.30: Curva di Gauss voti di matematica.

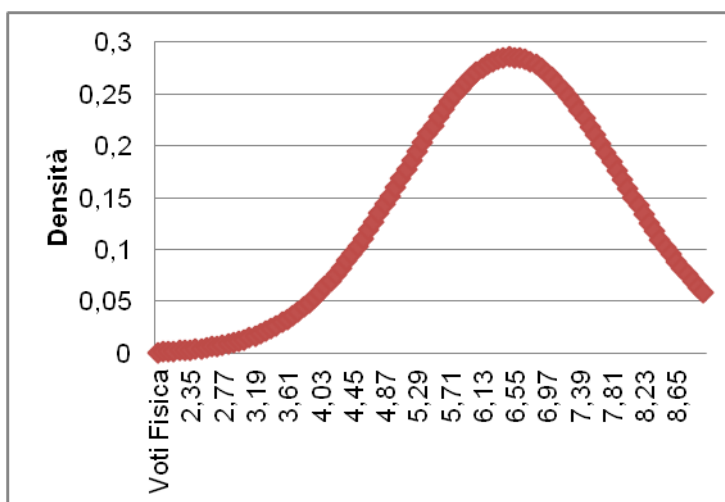


Grafico 7.31: Curva di Gauss voti di fisica.

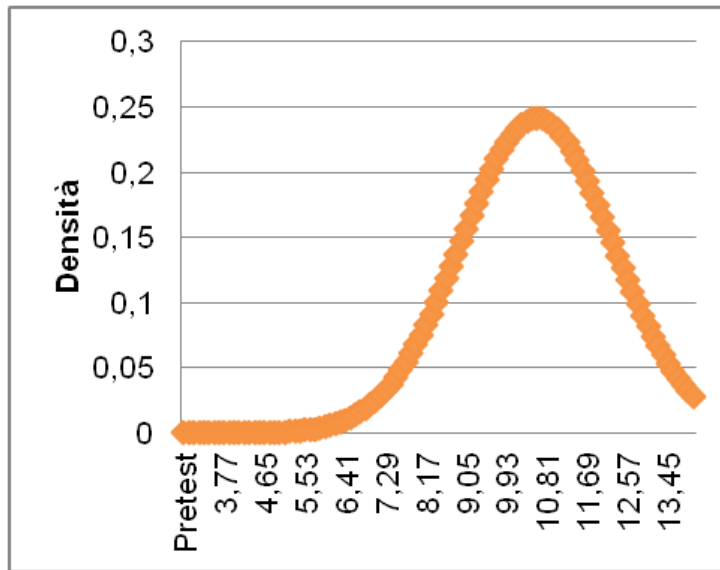


Grafico 7.32: Curva di Gauss risultati del pre test.

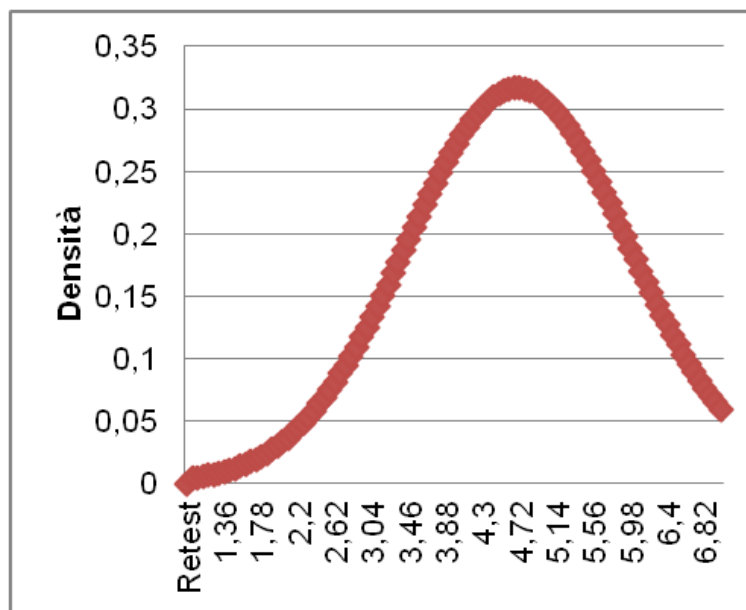


Grafico 7.33: Curva di Gauss risultati del re test.

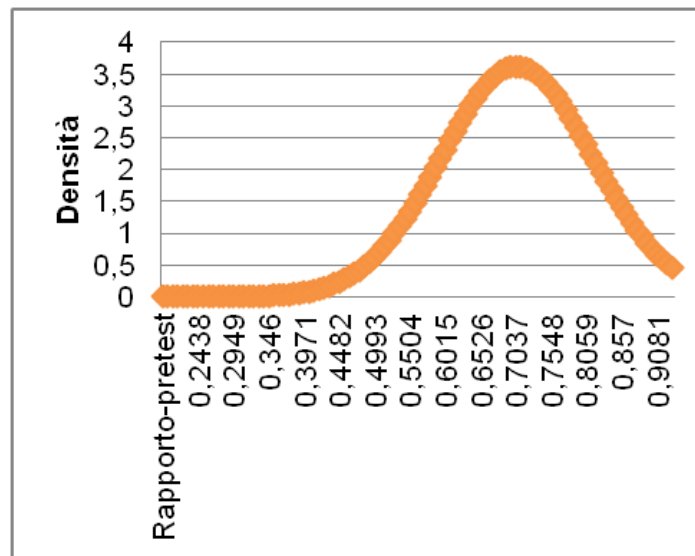


Grafico 7.34: Curva di Gauss sulla percentuale della media delle risposte corrette del pre test.

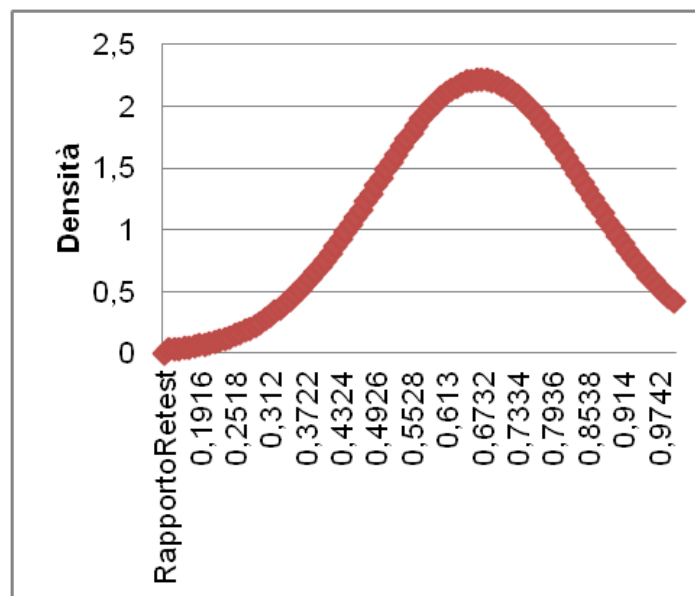


Grafico 7.35 Curva di Gauss sulla percentuale della media delle risposte corrette del re test.

7.2 Confronto fra I gruppi delle due città-Tavole di contingenza

Si utilizzerà adesso il test di significatività, Chi-quadro, in formule:

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{numero osservato} - \text{numero atteso})^2}{\text{numero atteso}}$$

per confrontare le variabili considerate. Questo test fra i molti disponibili, oltre che di semplice applicazione, è adeguato per comprendere il procedimento generale atto a valutare le conclusioni ricavabili da un campionamento. Il test del chi-quadro è un test statistico non parametrico idoneo a verificare se i valori di frequenza ottenuti tramite rilevazione, siano diversi in maniera significativa dalle frequenze ottenute con la distribuzione teorica. Questo test ci permette di accettare o rifiutare la nostra ipotesi.

Tabella 7.31 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda1 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 9 | 3 | 12 |
| % entro scuola | 10,6 % | 7,5% | 9,6% |
| Risposta corretta Conteggio | 76 | 37 | 113 |
| % entro scuola | 89,4% | 92,5% | 90,4% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 0.299 ^b | 1 | 0.585 |

b. 1 celle (25.0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5

il conteggio atteso minimo è 0.84.

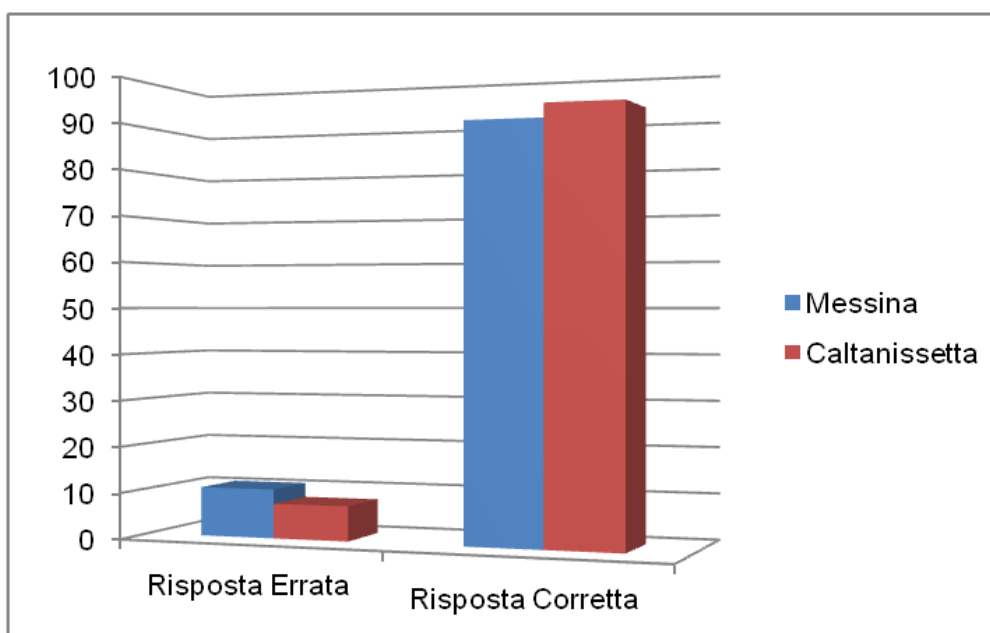


Grafico 7.36: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la prima domanda del pre test.

Tabella 7.32 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda2 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 60 | 20 | 80 |
| % entro scuola | 70,6% | 50,0% | 64,0% |
| Risposta corretta Conteggio | 25 | 20 | 45 |
| % entro scuola | 29,4% | 50,0% | 36,0% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 5,004 ^b | 1 | 0,025 |

b. 0 celle (.0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 14.40.

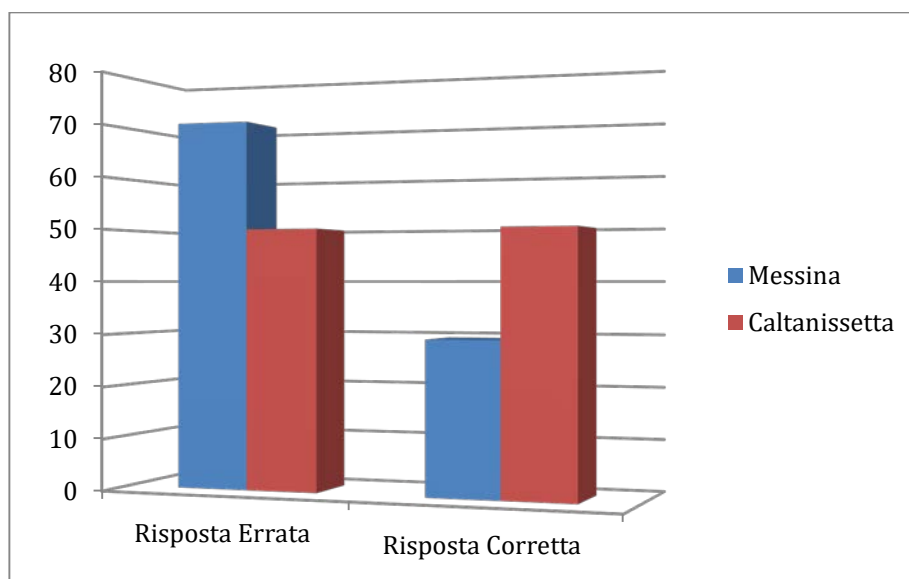


Grafico 7.37: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la seconda domanda del pre test.

Tabella 7.33 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda3 pre test.

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 0 | 6 | 6 |
| % entro scuola | 0,0% | 15,0% | 4,8% |
| Risposta corretta Conteggio | 85 | 34 | 119 |
| % entro scuola | 100,0% | 85,0% | 95,2% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|---------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 13,393 ^b | 1 | 0,000 |

b. 2 celle (50,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 1,92.

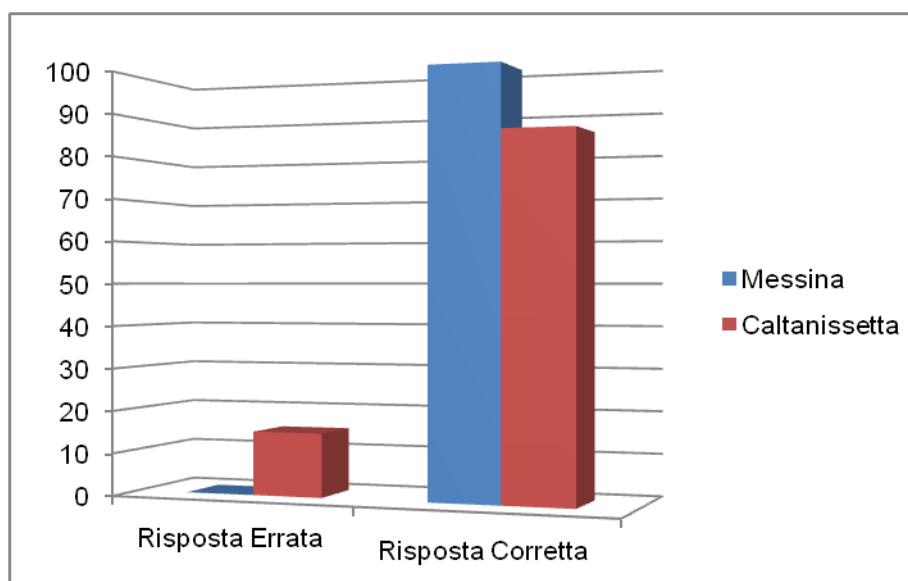


Grafico 7.38: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la terza domanda del pre test.

Tabella 7.34 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda4 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 47 | 31 | 78 |
| % entro scuola | 55,3% | 77,5% | 62,4% |
| Risposta corretta Conteggio | 38 | 9 | 47 |
| % entro scuola | 44,7% | 38,0% | 9,0% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 5,717 ^b | 1 | 0,017 |

b. 0 celle (0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 15,0.

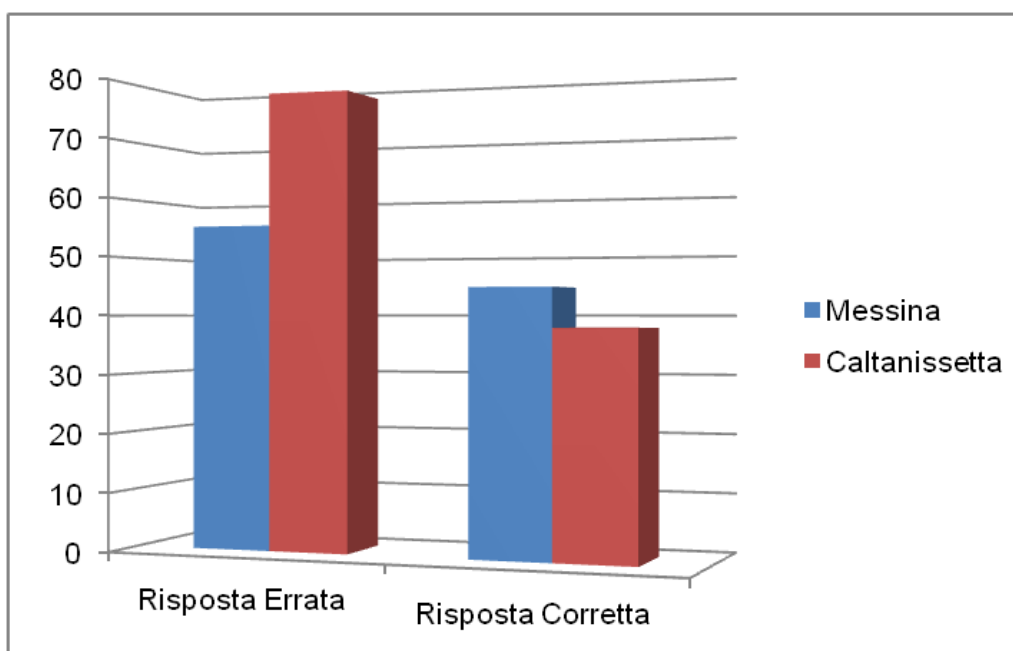


Grafico 7.39: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la quarta domanda del pre test.

Tabella 7.35 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda5 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 50 | 9 | 59 |
| % entro scuola | 58,8% | 22,5% | 47,2% |
| Risposta corretta Conteggio | 35 | 31 | 66 |
| % entro scuola | 41,2% | 77,5% | 52,8% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|---------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 14,400 ^b | 1 | 0,000 |

b. 0 celle (0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 18,88.

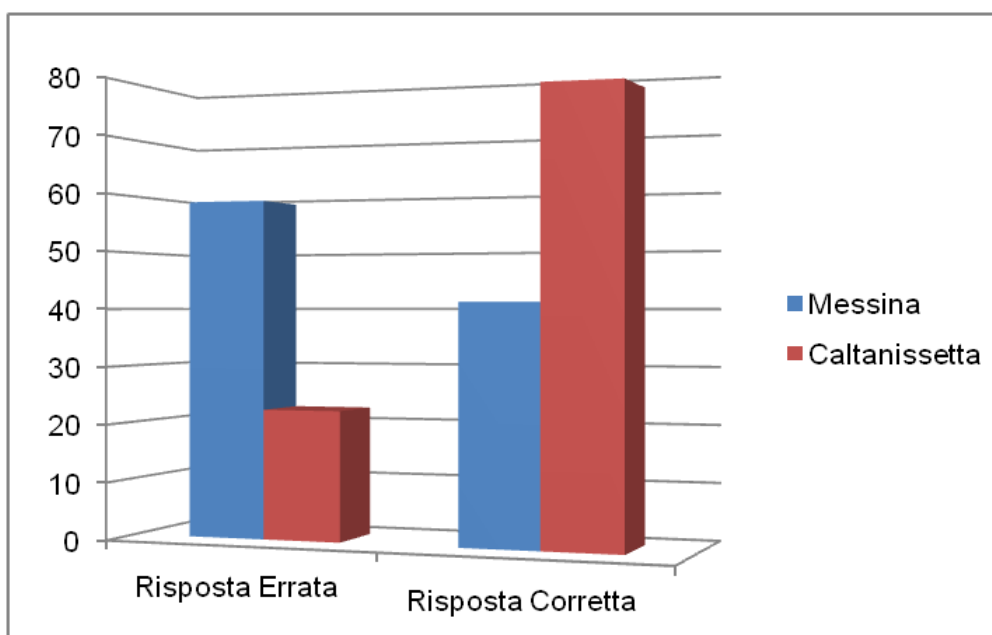


Grafico 7.40: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la quinta domanda del pre test.

Tabella 7.36 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda6 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 15 | 4 | 19 |
| % entro scuola | 17,6% | 10,0% | 15,2% |
| Risposta corretta Conteggio | 70 | 36 | 106 |
| % entro scuola | 82,4% | 90,0% | 84,8% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 1,234 ^b | 1 | 0,267 |

b. 0 celle (0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 6,08.

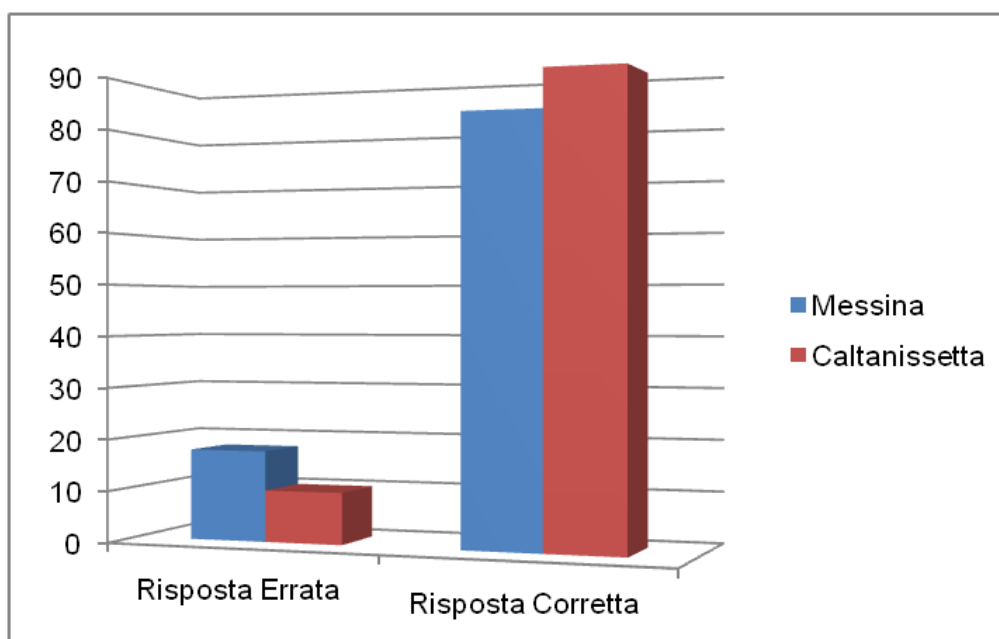


Grafico 7.41: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la sesta domanda del pre test.

Tabella 7.37 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda7 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 37 | 21 | 58 |
| % entro scuola | 43,5% | 52,5% | 46,4% |
| Risposta corretta Conteggio | 48 | 19 | 67 |
| % entro scuola | 56,5% | 47,5% | 53,6% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 0,880 ^b | 1 | 0,348 |

b. 0 celle (0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 18,56.

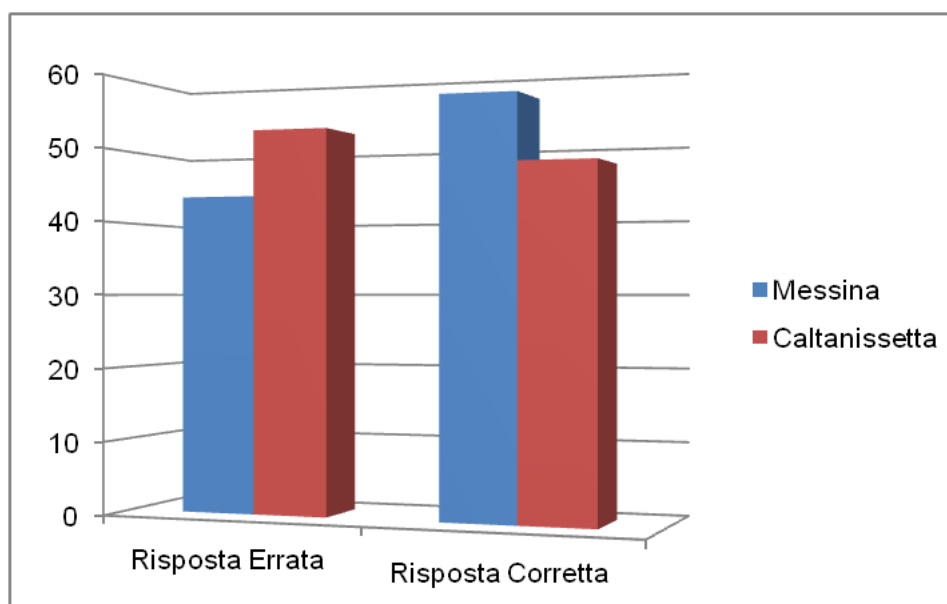


Grafico 7.42: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la settima domanda del pre test.

Tabella 7.38 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda8 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 3 | 3 | 6 |
| % entro scuola | 3,5% | 7,5% | 4,8% |
| Risposta corretta Conteggio | 82 | 19 | 67 |
| % entro scuola | 96,5% | 92,5% | 95,2% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 0,938 ^b | 1 | 0,333 |

b. 2 celle (50,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 1,92.

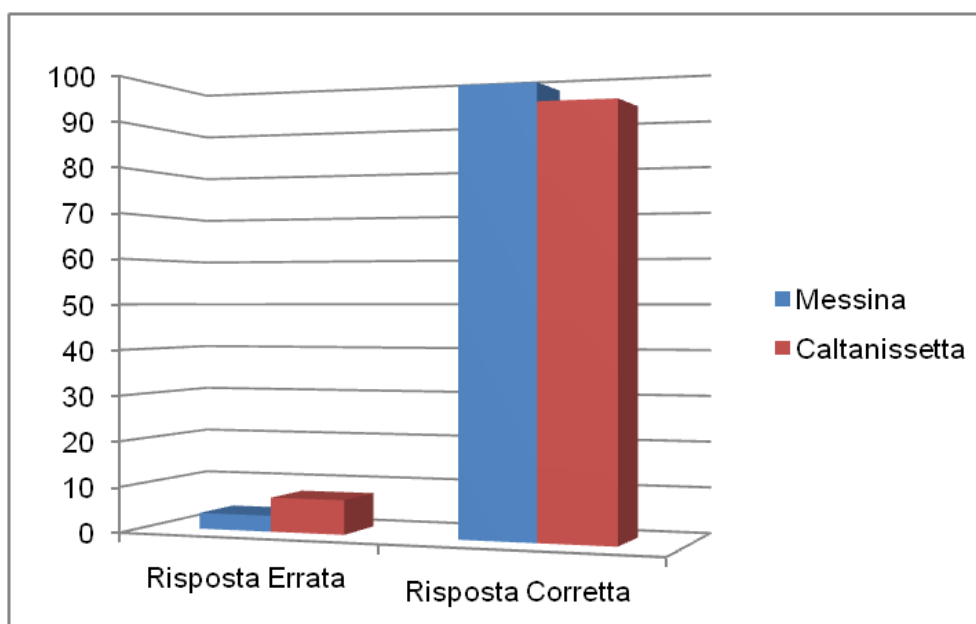


Grafico 7.43: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per l'ottava domanda del pre test.

Tabella 7.39 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda9 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 5 | 2 | 7 |
| % entro scuola | 5,9% | 5,0% | 5,6% |
| Risposta corretta Conteggio | 80 | 38 | 118 |
| % entro scuola | 94,1% | 95,0% | 94,4% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 0,040 ^b | 1 | 0,841 |

b. 2 celle (50,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 2,24.

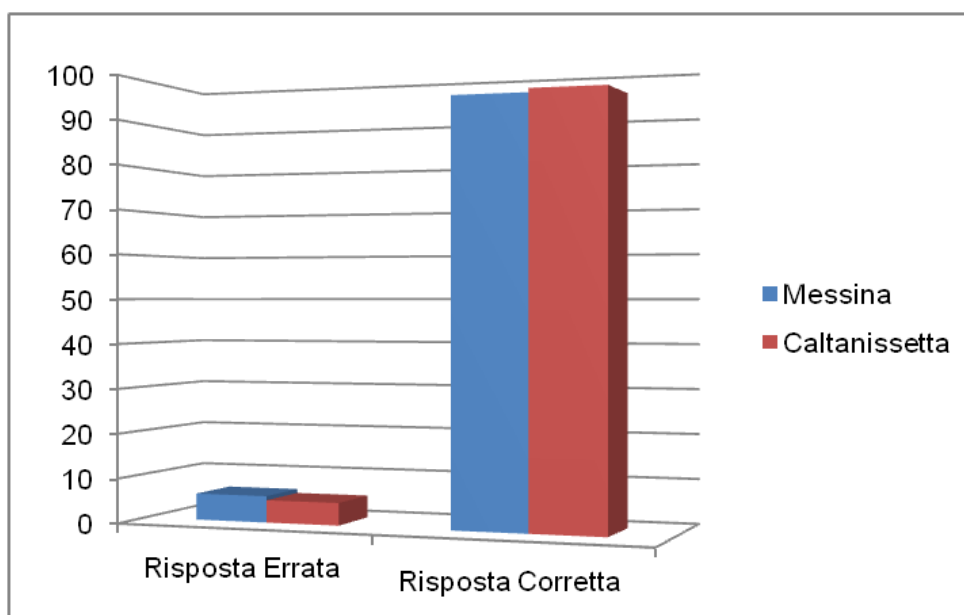


Grafico 7.44: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la nona domanda del pre test.

Tabella 7.40 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda10 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 36 | 13 | 49 |
| % entro scuola | 42,4% | 32,5% | 39,2% |
| Risposta corretta Conteggio | 49 | 27 | 76 |
| % entro scuola | 57,6% | 67,5% | 60,8% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 1,108 ^b | 1 | 0,293 |

b. 0 celle (0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 15,60.

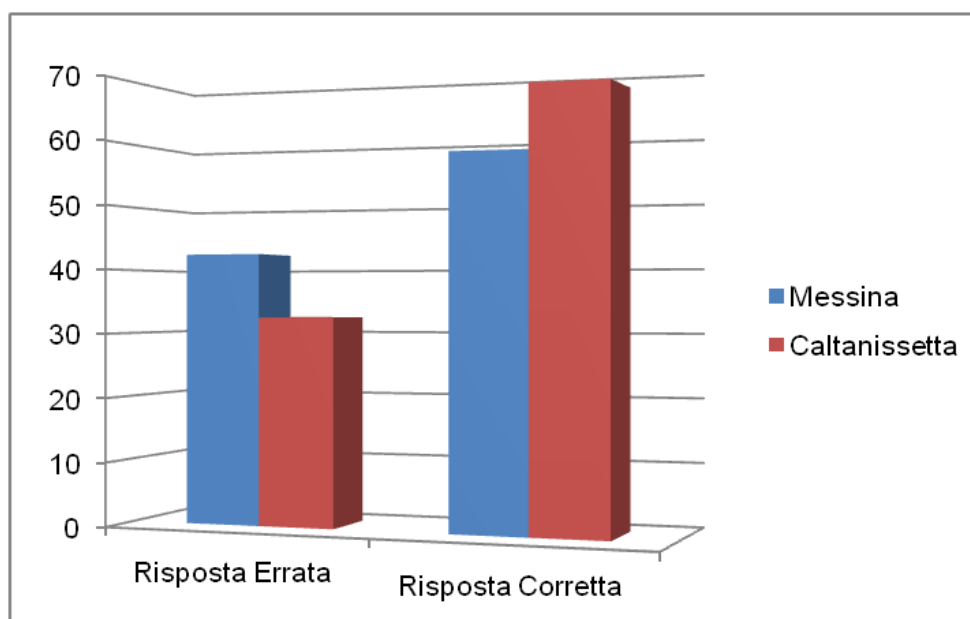


Grafico 7.45 Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la decima domanda del pre test.

Tabella 7.41 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda11 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 7 | 9 | 16 |
| % entro scuola | 8,2% | 22,5% | 12,8% |
| Risposta corretta Conteggio | 78 | 31 | 109 |
| % entro scuola | 91,8% | 77,5% | 87,2% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 4,959 ^b | 1 | 0,026 |

b. 0 celle (0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 5,12.

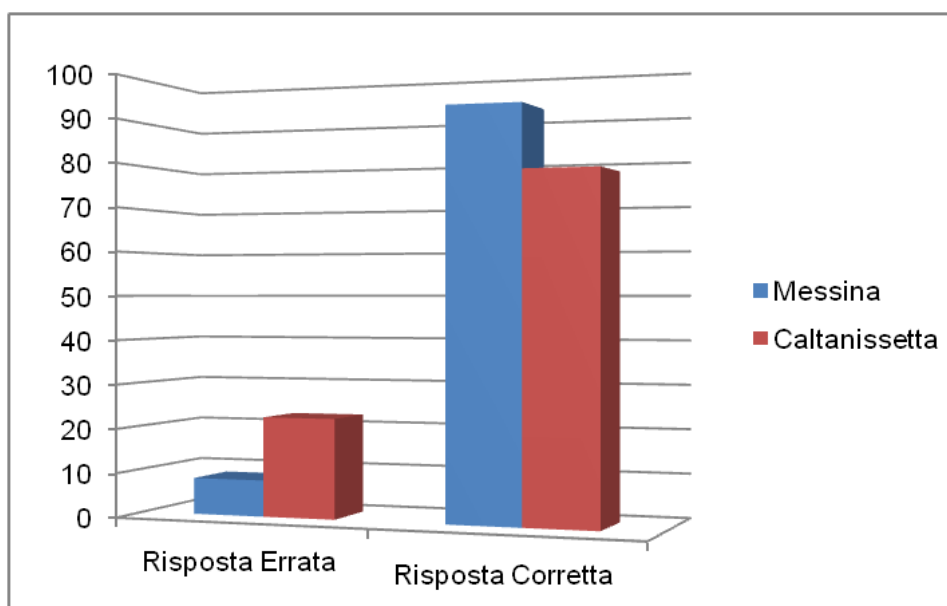


Grafico 7.46: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per l'undicesima domanda del pre test.

Tabella 7.42 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda12 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 7 | 11 | 18 |
| % entro scuola | 8,2% | 27,5% | 14,4% |
| Risposta corretta Conteggio | 78 | 29 | 107 |
| % entro scuola | 91,8% | 72,5% | 85,6% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 8,190 ^b | 1 | 0,004 |

b. 0 celle (0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 5,76.

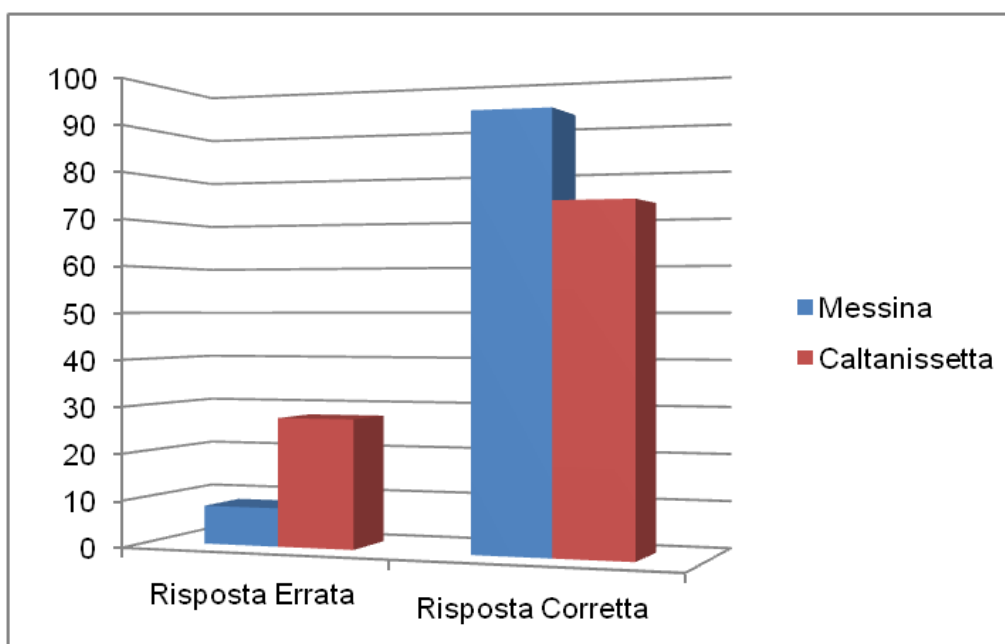


Grafico 7.47: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la dodicesima domanda del pre test.

Tabella 7.43 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda13 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 10 | 15 | 25 |
| % entro scuola | 11,8% | 37,5% | 20,0% |
| Risposta corretta Conteggio | 75 | 25 | 100 |
| % entro scuola | 88,2% | 62,5% | 80,0% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|---------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 11,259 ^b | 1 | 0,001 |

b. 0 celle (0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 8,00.

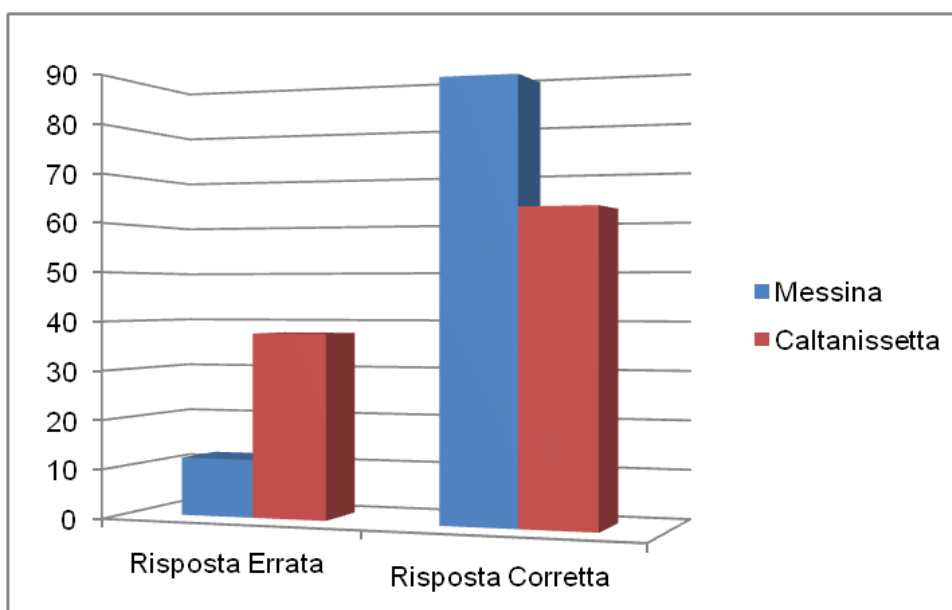


Grafico 7.48: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la tredicesima domanda del pre test.

Tabella 7.44 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda14 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 67 | 26 | 93 |
| % entro scuola | 78,8% | 65,0% | 74,4% |
| Risposta corretta Conteggio | 18 | 14 | 32 |
| % entro scuola | 21,2% | 35,0% | 25,6% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

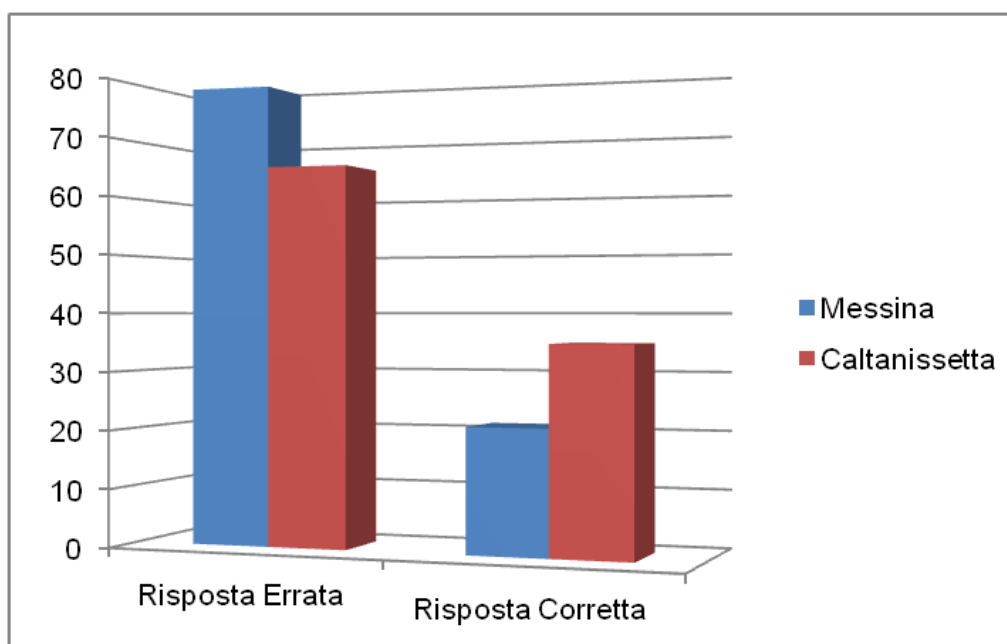


Grafico 7.49: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la quattordicesima domanda del pre test.

Tabella 7.45 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda15 pre test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 16 | 10 | 26 |
| % entro scuola | 18,8% | 25,0% | 20,8% |
| Risposta corretta Conteggio | 69 | 30 | 99 |
| % entro scuola | 81,2% | 75,0% | 79,2% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 0,630 ^b | 1 | 0,427 |

b. 0 celle (0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 8,32.

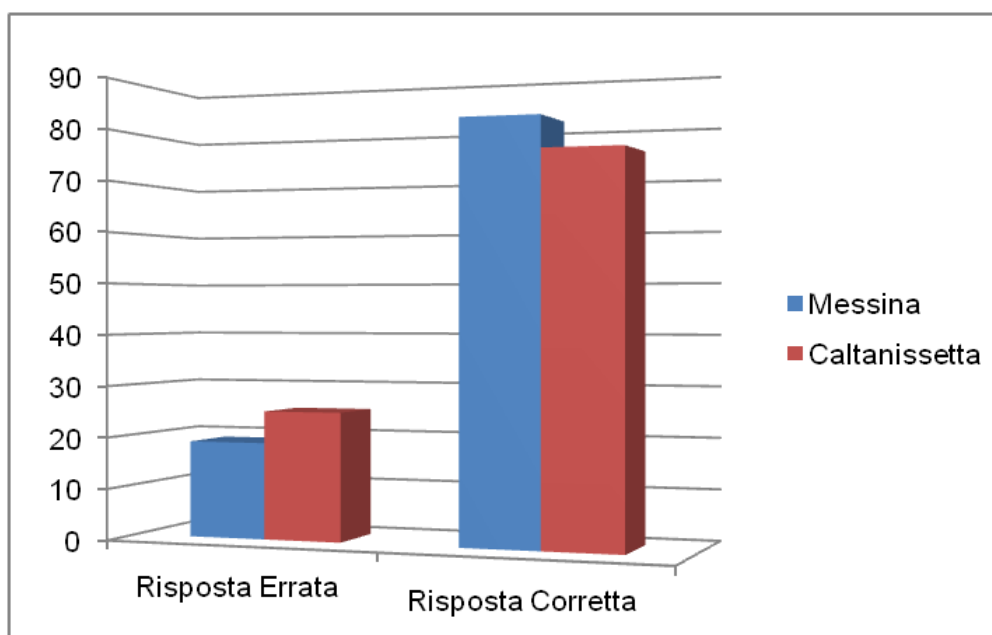


Grafico 7.50: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la quindicesima domanda del pre test.

Dall'esame dei dati raccolti nelle tabelle dalla 31 alla 45, risulta che il confronto fra le due città campionate, in relazione alle sole risposte corrette del pre test, ha condotto ad alcune considerazioni; all'interno delle prime cinque domande, quelle relative alla fisica vettoriale, si è manifestata una differenza significativa per quanto riguarda la domanda 2 con il 50% di risposte corrette date dagli allievi di Caltanissetta, contro il 29,4% di quelle date dagli studenti di Messina con un livello di significatività pari allo 0,025; nella 3, con il 100% di risposte corrette date a Messina contro l'80% di Caltanissetta, con alta significatività, cioè 0,000; nella 4, con il 44,7% di risposte corrette date a Messina contro il 38% di Caltanissetta, con un livello di significatività di 0,017 e nella 5, con il 77% di risposte corrette date a Caltanissetta contro il 41,2% di Messina, con alta significatività, cioè 0,000. Per quanto riguarda le altre cinque domande, quelle relative alla goniometria, non si registrano livelli di significatività. Ciò esprime che gli allievi delle due città considerate hanno risposto in maniera quasi speculare.

Nelle ulteriori cinque domande relative alla probabilità e statistica, si evince significatività nelle domande 11, 12 e 13, con una percentuale di risposte corrette del 91,8% nelle prime due e dell'88,2% per la terza nella città di Messina, contro,

rispettivamente il 77,5%, 72,5% e 62,5% nella città di Caltanissetta, con alti livelli di significatività.

Tabella 7.46 Tavola di contingenza confronto tra le due città domanda1 re test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 39 | 7 | 46 |
| % entro scuola | 45,9% | 17,5% | 36,8% |
| Risposta corretta Conteggio | 46 | 33 | 79 |
| % entro scuola | 54,1% | 82,5% | 63,2% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 9,421 ^b | 1 | 0,002 |

b. 0 celle (0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 8,32.

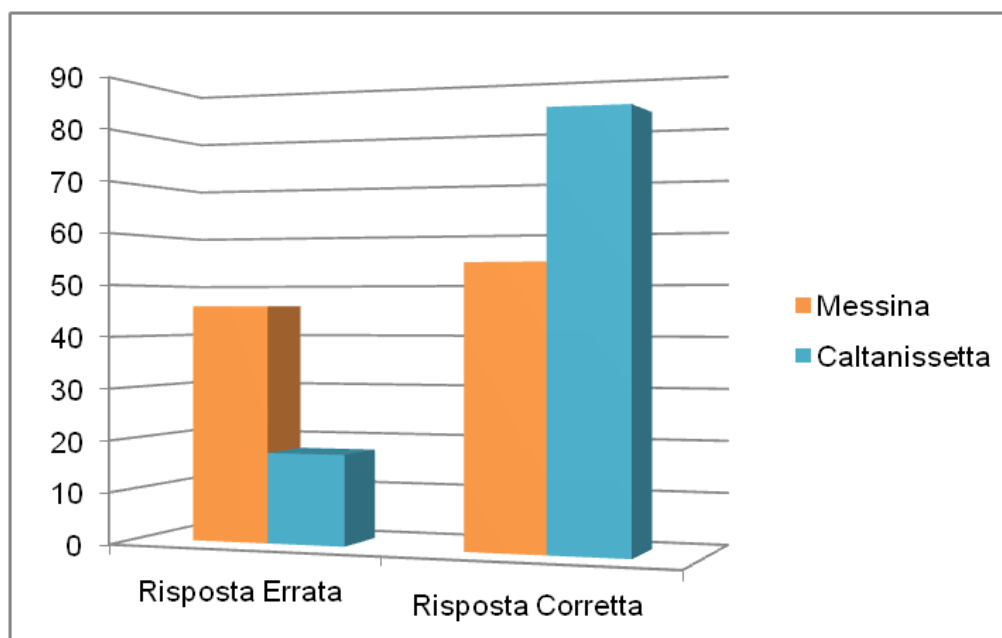


Grafico 7.51: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la prima domanda del re test.

Tabella 7.47 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda2 re test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 47 | 17 | 64 |
| % entro scuola | 55,3% | 42,5% | 51,2% |
| Risposta corretta Conteggio | 46 | 23 | 61 |
| % entro scuola | 44,7% | 57,5% | 48,8% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 1,782 ^b | 1 | 0,182 |

b. 0 celle (0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 11,52.

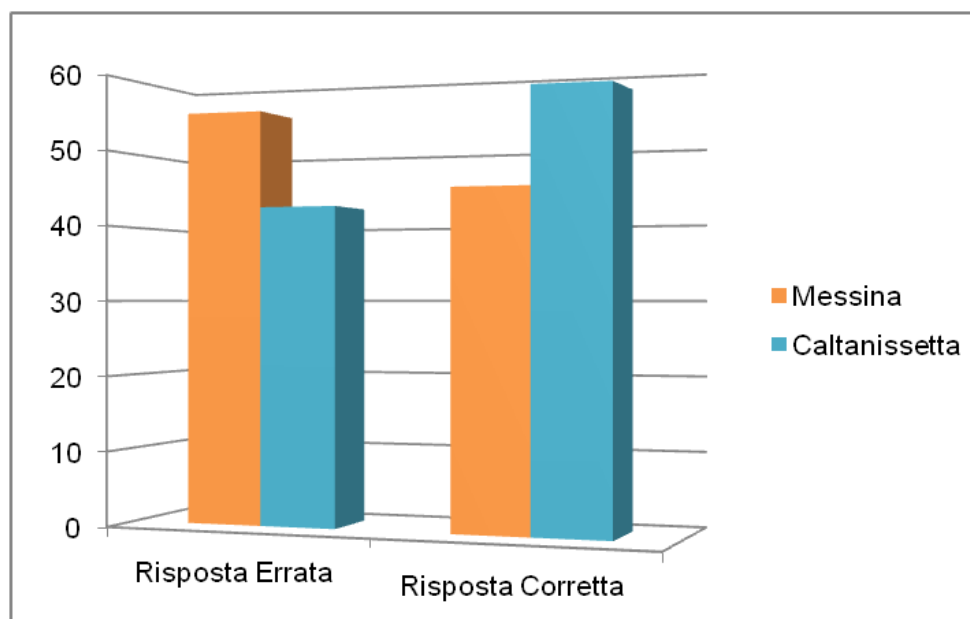


Grafico 7.52: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la seconda domanda del re test.

Tabella 7.48 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda3 re test.

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 2 | 7 | 9 |
| % entro scuola | 2,4% | 17,5% | 7,2% |
| Risposta corretta Conteggio | 83 | 33 | 116 |
| % entro scuola | 97,6% | 82,5% | 92,8% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 9,340 ^b | 1 | 0,002 |

b. 1 cella (25,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 2,88.

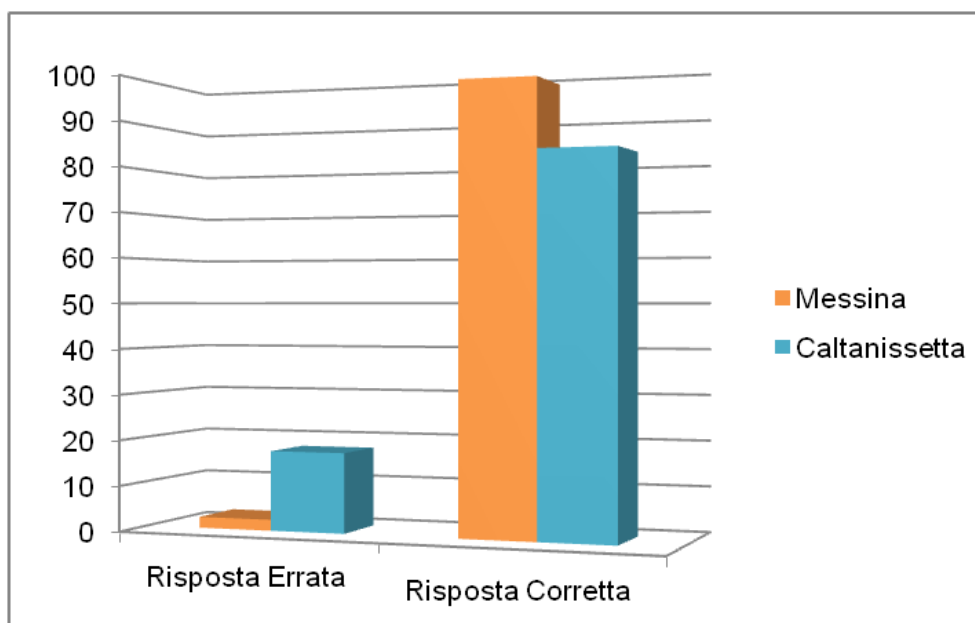


Grafico 7.53: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la terza domanda del re test.

Tabella 7.49 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda4 re test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 8 | 9 | 17 |
| % entro scuola | 9,4% | 22,5% | 13,6% |
| Risposta corretta Conteggio | 77 | 31 | 108 |
| % entro scuola | 90,6% | 77,5% | 86,4% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 3,965 ^b | 1 | 0,046 |

b. 0 cella 0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 5,44.

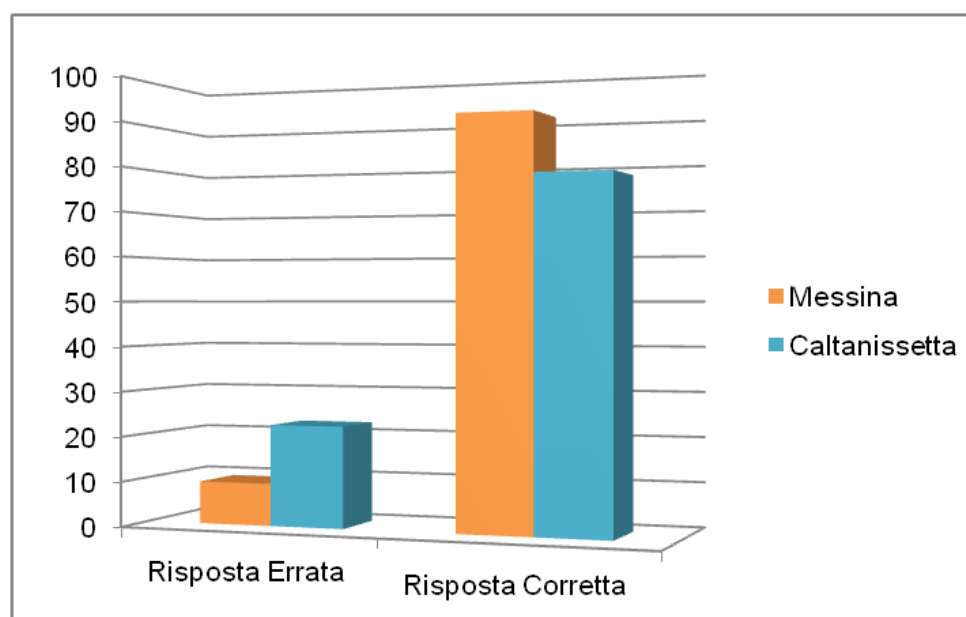


Grafico 7.54: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la quarta domanda del re test.

Tabella 7.50 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda5 re test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 54 | 11 | 65 |
| % entro scuola | 63,5% | 27,5% | 52,0% |
| Risposta corretta Conteggio | 31 | 29 | 60 |
| % entro scuola | 36,5% | 72,5% | 48,0% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|---------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 14,146 ^b | 1 | 0,000 |

b. 0 cella 0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 19,20.

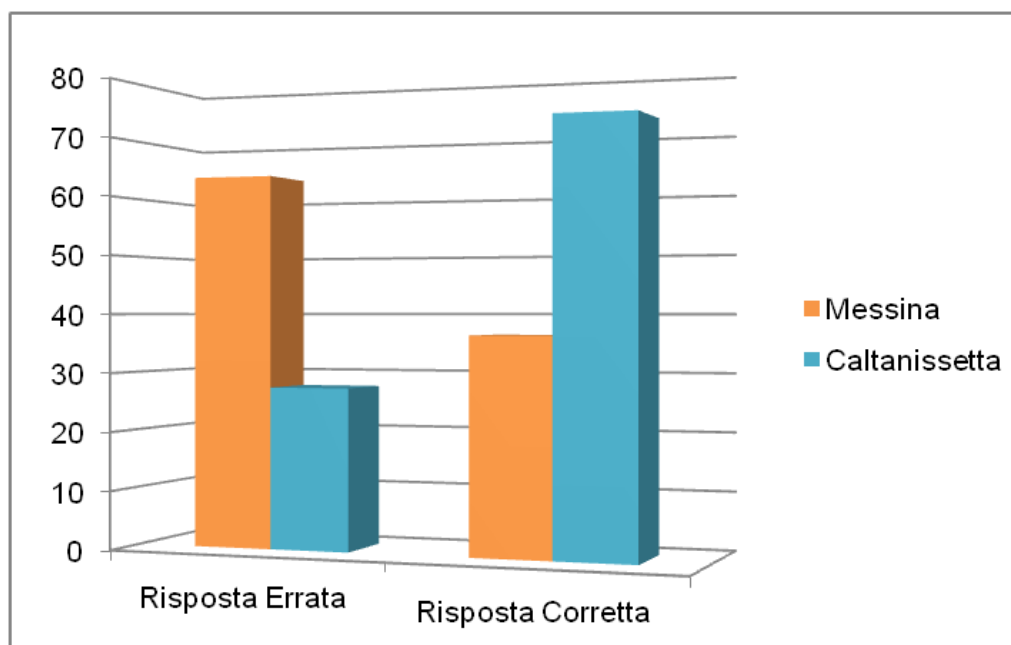


Grafico 7.55: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la quinta domanda del re test.

Tabella 7.51 Tavola di contingenza confronto tra le due città domanda 6 re test.

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 22 | 12 | 34 |
| % entro scuola | 25,9% | 30,0% | 27,2% |
| Risposta corretta Conteggio | 63 | 28 | 91 |
| % entro scuola | 74,1% | 70,0% | 72,8% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|--------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 0,233 ^b | 1 | 0,629 |

b. 0 celle (0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 10,88

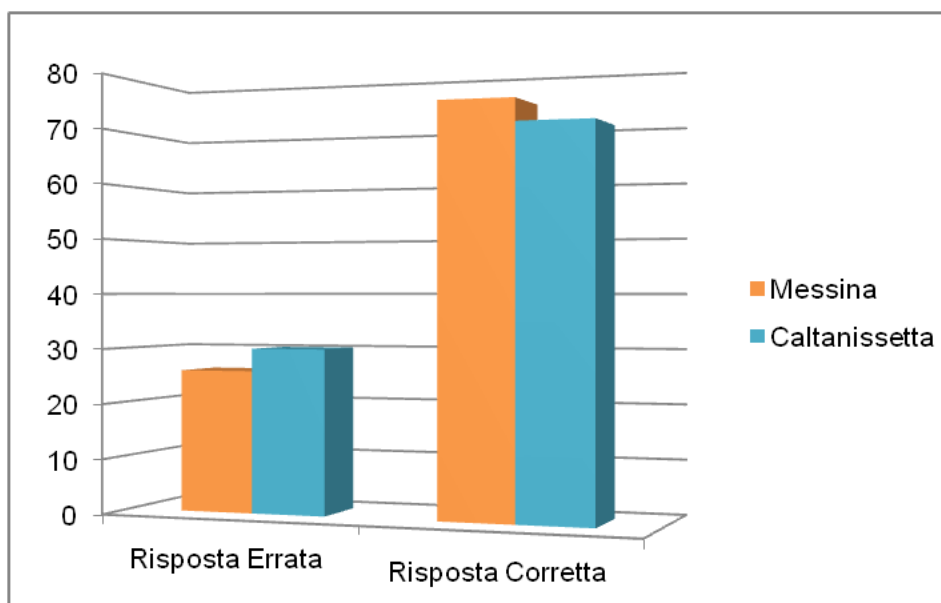


Grafico 7.56: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la sesta domanda del re test.

Tabella 7.52 Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda7 re test

| | L.S. Messina | L.S. Caltanissetta | Totale |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------|
| Risposta Errata Conteggio | 45 | 8 | 53 |
| % entro scuola | 52,9% | 20,0% | 42,4% |
| Risposta corretta Conteggio | 40 | 32 | 72 |
| % entro scuola | 47,1% | 80,0% | 57,6% |
| Totale | 85 | 40 | 125 |
| | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

| | Valore | df | Sig. Asint. (2 vie) |
|-------------------------|---------------------|----|------------------------|
| Chi-quadrato di Pearson | 12,085 ^b | 1 | 0,001 |

b: 0 cella 0,0%) hanno un conteggio atteso inferiore a 5.

Il conteggio atteso minimo è 16,96.

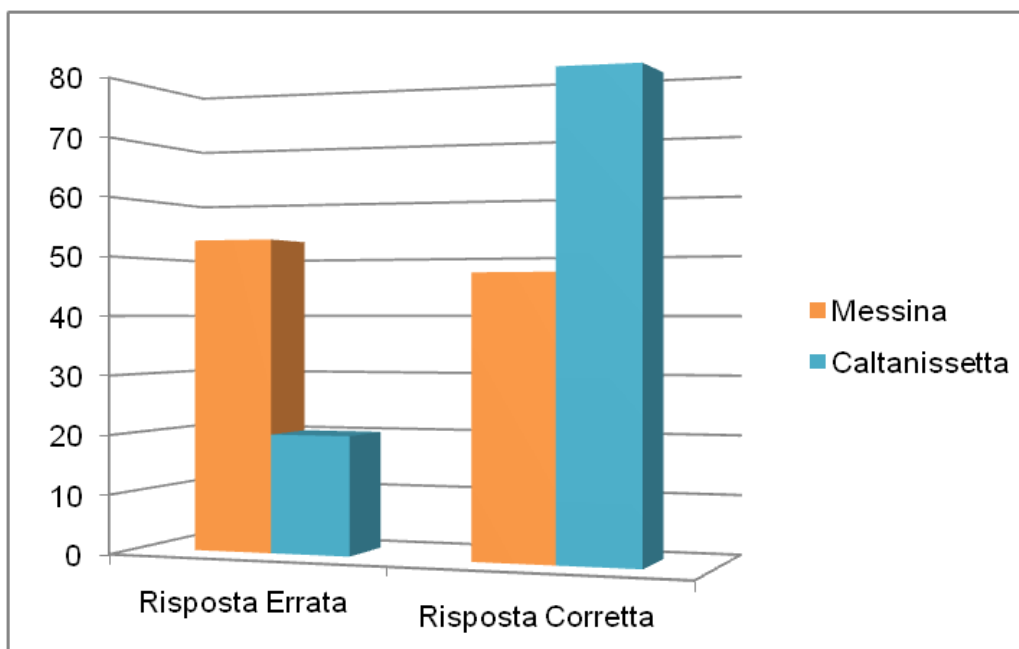


Grafico 7.57: Confronto della distribuzione percentuale tra Messina e Caltanissetta per la settima domanda del re test.

L'analisi del chi quadro condotta in relazione alle due città campionate in relazione alle sole risposte corrette del re test ha prodotto dei risultati significativi (vedi tab 46, 48, 49, 50 e 52). In particolare tale analisi ha permesso di rilevare come per vi sia una maggioranza di risposte corrette nella città di Messina per le domande 3 e 4 (0,002 e 0,046), mentre le risposte maggiori a Caltanissetta si sono ottenute per le domande 1, 5 e 7 (0,002, 0,000, 0,001) nessuna differenza per quanto riguarda le domande 2 e 6.

Si procede, adesso, a presentare i risultati specifici a cui si è pervenuti in questa ricerca, iniziando ad analizzare le ipotesi di partenza utilizzando vari test. Uno di questi è il test del Chi-quadro (χ^2), che rappresenta una tecnica di inferenza statistica basata sulla statistica di chi-quadro e sulla relativa distribuzione di probabilità.

Tale tecnica può essere usata con variabili a livello di scala nominale e/o ordinale, generalmente disposte in forma di tabelle di contingenza. Lo scopo principale di questa statistica è quello di verificare le differenze tra valori osservati e valori teorici, chiamati "attesi", e di effettuare un'inferenza sul grado di scostamento fra i due.

Il test del χ^2 , come il test Z permette di effettuare, anche se da una angolazione diversa, un'indagine sulle differenze tra due proporzioni. In questo caso, ovviamente, la procedura di verifica delle ipotesi si basa su una statistica che si approssima alla distribuzione del χ^2 .

In buona sostanza, nella nostra ipotesi, posta la seguente tabella di contingenza:

Tabella 7.53 **Tabella di contingenza risposte Pre e Post test**

| | Pre test | Post test |
|----------------|----------|-----------|
| Risp esatte | 1323 | 587 |
| Risp sbagliate | 552 | 288 |
| Totale | 1875 | 875 |

il test del χ^2 ci permette di verificare se la proporzione di studenti che hanno risposto correttamente alle domande del pretest (che indichiamo con π_1) sia uguale alla proporzione (che indichiamo con π_2) degli studenti che hanno risposto correttamente alle domande del retest.

L'ipotesi nulla è:

$$H_0: \pi_1 = \pi_2$$

che può anche essere scritta:

$$\pi_1 - \pi_2 = 0.$$

E quindi l'ipotesi alternativa è:

$$H_1: \pi_1 \neq \pi_2.$$

Premettendo che gli studenti di cui si stanno testando le capacità, in entrambi i test, siano stati selezionati secondo una procedura di estrazione di un campione casuale semplice dalle due popolazioni, questo al fine di valutare se le risposte corrette ai test si presentano distribuite nello stesso modo, il risultato del test ad un livello di significatività del 5% ($\alpha=0,05$) con 1 grado di libertà è:

Tabella 7.54 Test del Chi-quadrato.

| Frequenze osservate | | | |
|---------------------|-------------------|--------------|------------|
| | Variabili colonna | | |
| Variabili riga | Pre test | Post test | T otale |
| Risp esatte | 132 3 | 587 | 1 910 |
| Risp sbagliate | 552 | 288 | 8 40 |
| Totale | 187 5 | 875 | 2 750 |
| | | | |

| Frequenze attese | | | |
|---|-------------------|--------------|------------|
| | Variabili colonna | | |
| Variabili riga | Pre test | Post test | T otale |
| Risp esatte | 130 2,273 | 607, 7273 | 1 910 |
| Risp sbagliate | 572, 7273 | 267, 2727 | 8 40 |
| Totale | 187 5 | 875 | 2 750 |
| Data | | | |
| Livello di significatività | 0,05 | | |
| Numero di righe | 2 | | |
| Numero di colonne | 2 | | |
| Gradi di libertà | 1 | | |
| Risultati | | | |
| Valore critico | 3,84 1459 | | |
| Test del chi- quadrato | 3,39 438 | | |
| P Valore | 0,06 5419 | | |
| Non si può rifiutare l'ipotesi nulla | | | |

Come si può notare, il rischio di rifiutare l'ipotesi nulla H_0 è il 6,5%. Quindi si può affermare che, in base al numero di risposte esatte ai Pre e Post test, i due test χ^2 e Z possono essere considerati uguali.

Come detto, però, presupponendo che i due campioni messi a confronto siano casuali, indipendenti ed estratti da popolazioni binomiali in cui gli stimatori delle proporzioni delle popolazioni possano essere approssimati alla distribuzione normale standardizzata, i risultati del Test χ^2 sono simili a quelli ottenuti con il test Z ma diversi sono gli scopi e gli utilizzi. Infatti se fossimo interessati a testare l'ipotesi unidirezionale e cioè se la proporzione di coloro che hanno risposto correttamente al post test fosse maggiore di coloro che hanno risposto correttamente al pre test, potremo utilizzare solo il test Z .

Quindi considerando sempre π_1 la proporzione di studenti che hanno risposto correttamente alle domande del Pre Test e π_2 la proporzione degli studenti che hanno risposto correttamente alle domande del Post Test, potremo impostare le ipotesi per un test unilaterale sinistro:

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 \geq 0$$

$$H_1 : \pi_1 - \pi_2 < 0$$

(Ciò significherebbe che la proporzione di coloro che hanno risposto correttamente al post test è maggiore della proporzione di coloro che hanno risposto correttamente alle domande del retest).

Eseguendo il test otterremo che:

Tabella 7.55 Test per due proporzioni 1

| | |
|---|----------------|
| Frequenza1 | 1323 |
| Numerosità del campione1 | 1875 |
| Frequenza 2 | 587 |
| Numerosità del campione 2 | 875 |
| Differenza ipotizzata (D) | 0 |
| Livello di significatività (%) | 5 |
| Test z per due proporzioni / Test unilaterale a sinistra | |
| Intervallo di confidenza per la differenza tra proporzioni al 95% | (-1,000;0,066) |
| Differenza | 0,035 |
| z (Valore osservato) | 1,842 |
| z (Valore critico) | -1,645 |
| p-value (unilaterale) | 0,967 |
| Alfa (α) | 0,05 |

Interpretazione del testo:

Indichiamo con:

H_0 : La differenza tra le proporzioni è uguale o maggiore di 0

H_a : La differenza tra le proporzioni è inferiore a 0.

Il rischio di rifiutare l'ipotesi nulla H_0 , mentre è vera, è 96,73%.

Considerando che il p-value calcolato è superiore al livello di significatività della soglia $\alpha = 0,05$, non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla H_0 , per cui $\pi_1 - \pi_2 \geq 0$ e si può affermare che in base alla proporzione di risposte esatte ai Pre e Post test, i due test possono essere considerati uguali o comunque la proporzione di coloro che hanno risposto correttamente alle domande del pretest è maggiore della proporzione di coloro che hanno risposto correttamente alle domande del post test.

Si può comunque fare un distinguo se desideriamo confrontare i risultati ottenuti ai test dalle scuole di Messina e di Caltanissetta.

Procedendo in modo analogo testiamo direttamente l'ipotesi unilaterale, utilizzando il test Z per vedere se una delle due città ha una proporzione di risposte esatte (sommando per città le risposte corrette del pre test e quelle del post test) maggiore rispetto all'altra.

Considerando sempre le seguenti frequenze:

Tabella 7.56 Tabella di contingenza risposte Pre test essina e Caltanissetta.

| | Messina | Caltanissetta | Totale |
|----------|---------|---------------|--------|
| Risp cor | 1284 | 626 | 1910 |
| Risp err | 586 | 254 | 840 |
| Totale | 1870 | 880 | 2750 |

Otterremo:

Tabella 7.57 Test per due proporzioni 2

| | |
|---|----------------|
| Frequenza 1 | 1284 |
| Numerosità del campione 1 | 1870 |
| Frequenza 2 | 626 |
| Numerosità del campione 2 | 880 |
| Differenza ipotizzata (D) | 0 |
| Livello di significatività (%) | 5 |
| Test z per due proporzioni / Test unilaterale a sinistra | |
| Intervallo di confidenza per la differenza tra proporzioni al 95% | (-1,000;0,066) |
| Differenza | -0,025 |
| z (Valore osservato) | -1,314 |
| z (Valore critico) | -1,645 |
| p-value (unilaterale) | 0,095 |
| Alfa (α) | 0,05 |

Interpretazione del testo:

Indichiamo con:

H_0 : La differenza tra le proporzioni è uguale o maggiore di 0

H_a : La differenza tra le proporzioni è inferiore a 0.

Considerando che il p-value calcolato è superiore al livello di significatività della soglia $\alpha = 0,05$, non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla H_0 .

Il rischio di rifiutare l'ipotesi nulla H_0 mentre è vera è 9,45%.

Per cui o non vi è differenza tra la proporzione di risposte corrette di Messina e quella di Caltanissetta o comunque la proporzione di coloro che hanno risposto correttamente alle domande dei test è maggiore a Messina.

Un ulteriore approfondimento, separando i due test, potrebbe verificare se c'è differenza tra la proporzione di risposte corrette di Messina e quelle di Caltanissetta.

Quindi considerando:

Tabella 7.58 Tabella di contingenza risposte Pre test Messina e Caltanissetta.

| Pretest | | |
|-----------|---------|---------------|
| | Messina | Caltanissetta |
| Risp corr | 906 | 417 |
| Risp err | 369 | 183 |
| Totale | 1275 | 600 |

Avremo:

Tabella 7.59

Test per due proporzioni 3.

| | |
|---|----------------|
| Frequenza 1 | 906 |
| Numerosità del campione 1 | 1275 |
| Frequenza 2 | 417 |
| Numerosità del campione 2 | 600 |
| Differenza ipotizzata (D) | 0 |
| Livello di significatività (%) | 5 |
| Test z per due proporzioni / Test unilaterale a sinistra | |
| Intervallo di confidenza per la differenza tra proporzioni al 95% | (-1,000;0,053) |
| Differenza | 0,016 |
| z (Valore osservato) | 0,691 |
| z (Valore critico) | -1,645 |
| p-value (unilaterale) | 0,755 |
| Alfa (α) | 0,05 |

Interpretazione del testo:

Essendo:

H_0 : La differenza tra le proporzioni è uguale o maggiore di 0

H_a : La differenza tra le proporzioni è inferiore a 0.

Considerando che il p-value calcolato è superiore al livello di significatività della soglia $\alpha = 0,05$, non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla H_0 .

Il rischio di rifiutare l'ipotesi nulla H_0 mentre è vera è 75,52%.

Per ciò che riguarda il Pre test la proporzione di risposte corrette di Messina e Caltanissetta può essere considerata uguale o comunque è maggiore quella relativa alla città di Messina

Invece considerando:

Tabella 7.60 Tavola di contingenza Post test

| Post test | | |
|-----------|---------|---------------|
| | Messina | Caltanissetta |
| Risp corr | 378 | 209 |
| Risp err | 217 | 71 |
| Totale | 595 | 280 |

Avremo:

Tabella 7.61 Test per due proporzioni 4.

| | |
|---|-----------------|
| Frequenza1 | 378 |
| Numerosità del campione1 | 595 |
| Frequenza 2 | 209 |
| Numerosità del campione 2 | 280 |
| Differenza ipotizzata (D) | 0 |
| Livello di significatività (%) | 5 |
| Test z per due proporzioni / Test unilaterale a sinistra | |
| Intervallo di confidenza per la differenza tra proporzioni al 95% | (-1,000;-0,055) |
| Differenza | -0,111 |
| z (Valore osservato) | -3,263 |
| z (Valore critico) | -1,645 |
| p-value (unilaterale) | 0,001 |
| Alfa (α) | 0,05 |

Interpretazione del testo:

Essendo sempre:

H_0 : La differenza tra le proporzioni è uguale o maggiore di 0

H_a : La differenza tra le proporzioni è inferiore a 0.

Considerando che il p-value calcolato è inferiore al livello di significazione $\alpha = 0,05$, si dovrebbe rifiutare l'ipotesi nulla H_0 e accettare l'ipotesi alternativa H_a .

Il rischio di rifiutare l'ipotesi nulla H_0 mentre è vera è inferiore a 0,06%.

Quindi nel caso del post test, dato che la differenza tra π_1 e π_2 è negativa (= 0,111) e Z calcolato è minore di Z critico al livello del 5%, accettiamo l'ipotesi nulla per cui Caltanissetta ha avuto una proporzione di risposte corrette al post test superiore a Messina. (Per chiarezza ricordiamo l'ipotesi alternativa $H_1: \pi_1 - \pi_2 < 0$)

Un test analogo, ove servisse, può essere effettuato sulla disaggregazione tra Maschi e Femmine avendo:

Tabella 7.62 Tavola di contingenza disaggregazione maschi femmine

| | Maschi | Femmine |
|---------------|--------|---------|
| Risp corrette | 1894 | 688 |
| Risp err | 834 | 302 |
| Totale | 2728 | 990 |

Quindi, utilizzando sempre il test Z unilaterale sinistro avremo:

Tabella 7.63 Test per due proporzioni 5.

| | |
|---|-----------------|
| Frequenza1 | 1894 |
| Numerosità del campione1 | 2728 |
| Frequenza 2 | 688 |
| Numerosità del campione 2 | 990 |
| Differenza ipotizzata (D) | 0 |
| Livello di significatività (%) | 5 |
| Test z per due proporzioni / Test unilaterale a sinistra | |
| Intervallo di confidenza per la differenza tra proporzioni al 95% | (-1,000;-0,027) |
| Differenza | -0,001 |
| z (Valore osservato) | -0,039 |
| z (Valore critico) | -1,645 |
| p-value (unilaterale) | 0,484 |
| Alfa (α) | 0,05 |

Interpretazione del testo:

Essendo sempre:

H_0 : La differenza tra le proporzioni è uguale o maggiore di 0

H_a : La differenza tra le proporzioni è inferiore a 0.

Considerando che il p-value calcolato è superiore al livello di significatività della soglia $\alpha = 0,05$, non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla H_0 .

Il rischio di rifiutare l'ipotesi nulla H_0 mentre è vera è 48,44%.

Quindi anche in questo caso o non c'è differenza tra la proporzione di risposte corrette dei maschi e delle femmine o comunque è maggiore quella relativa ai maschi.

Anche in questo caso si può disaggregare osservando i risultati in modo distinto (Maschi e Femmine) per stabilire se la proporzione delle risposte corrette nel post test è maggiore di quella del pre test.

Tabella 7.64 Tavola di contingenza maschi

| Maschi | | |
|---------------|---------|----------|
| | Pretest | Posttest |
| Risp corrette | 1310 | 584 |
| Risp err | 550 | 284 |
| Totale | 1860 | 868 |

Tabella 7.65 Test per due proporzioni: maschi

| | |
|---|---------------------------|
| Frequenza1 | 1310 |
| Numerosità del campione1 | 1860 |
| Frequenza 2 | 584 |
| Numerosità del campione 2 | 868 |
| Differenza ipotizzata (D) | 0 |
| Varianza | $p_1q_1/n_1 + p_2q_2/n_2$ |
| Livello di significatività (%) | 5 |
| Test z per due proporzioni / Test unilaterale a sinistra | |
| Intervallo di confidenza per la differenza tra proporzioni al 95% | (-1,000;-0,027) |
| Differenza | 0,031 |
| z (Valore osservato) | 1,663 |
| z (Valore critico) | -1,645 |
| p-value (unilaterale) | 0,952 |
| Alfa (α) | 0,05 |

Interpretazione del testo:

Essendo sempre:

H_0 : La differenza tra le proporzioni è uguale o maggiore di 0

H_a : La differenza tra le proporzioni è inferiore a 0.

Considerando che il p-value calcolato è superiore al livello di significatività della soglia $\alpha = 0,05$, non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla H_0 .

Il rischio di rifiutare l'ipotesi nulla H_0 mentre è vera è 48,44%.

Quindi anche in questo caso o non c'è differenza tra la proporzione di risposte corrette dei maschi e delle femmine o comunque è maggiore quella relativa ai maschi.

Anche in questo caso si può disaggregare osservando i risultati in modo distinto (Maschi e Femmine) per stabilire se la proporzione delle risposte corrette nel post test è maggiore di quella del pre test.

Tabella 7.66 Tavola di contingenza maschi post test

| Maschi | | |
|---------------|---------|----------|
| | Pretest | Posttest |
| Risp corrette | 1310 | 584 |
| Risp err | 550 | 284 |
| Totale | 1860 | 868 |

Tabella 7.67 Test per due proporzioni: maschi

| | |
|---|---------------------------|
| Frequenza1 | 1310 |
| Numerosità del campione1 | 1860 |
| Frequenza 2 | 584 |
| Numerosità del campione 2 | 868 |
| Differenza ipotizzata (D) | 0 |
| Varianza | $p_1q_1/n_1 + p_2q_2/n_2$ |
| Livello di significatività (%) | 5 |
| Test z per due proporzioni / Test unilaterale a sinistra | |
| Intervallo di confidenza per la differenza tra proporzioni al 95% | (-1,000;-0,027) |
| Differenza | 0,031 |
| z (Valore osservato) | 1,663 |
| z (Valore critico) | -1,645 |
| p-value (unilaterale) | 0,952 |
| Alfa (α) | 0,05 |

Interpretazione del test:

H_0 : La differenza tra le proporzioni è maggiore o uguale a 0

H_a : La differenza tra le proporzioni è inferiore a 0.

Considerando che il p-value calcolato è superiore al livello di significazione della soglia $\alpha = 0,05$, non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla H_0 .

Il rischio di rifiutare l'ipotesi nulla H_0 mentre è vera è 95,18%.

Quindi o non vi è differenza tra la proporzione di risposte corrette al pretest e al post test o comunque è maggiore la proporzione dei risultati corretti ottenuti al pre test.

Per le femmine invece:

Tabella 7.68 **Tavola di contingenza femmine pre test.**

| Femmine | | |
|-----------|----------|-----------|
| | Pre test | Post test |
| Risp corr | 487 | 201 |
| Risp err | 188 | 114 |
| Totale | 675 | 315 |

Tabella 7.69 Test per due proporzioni: femmine

| | |
|---|---------------------------|
| Frequenza1 | 48 |
| Numerosità del campione1 | 675 |
| Frequenza 2 | 201 |
| Numerosità del campione 2 | 315 |
| Differenza ipotizzata (D) | 0 |
| Varianza | $p_1q_1/n_1 + p_2q_2/n_2$ |
| Livello di significatività (%) | 5 |
| Test z per due proporzioni / Test unilaterale a sinistra | |
| Intervallo di confidenza per la differenza tra proporzioni al 95% | (-1,000;-0,135) |
| Differenza | 0,083 |
| z (Valore osservato) | 2,654 |
| z (Valore critico) | -1,645 |
| p-value (unilaterale) | 0,996 |
| Alfa (α) | 0,05 |

Interpretazione del testo:

H_0 : La differenza tra le proporzioni è maggiore o uguale a 0

H_a : La differenza tra le proporzioni è inferiore a 0.

Considerando che il p-value calcolato è superiore al livello di significazione della soglia $\alpha = 0,05$, non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla H_0 .

Il rischio di rifiutare l'ipotesi nulla H_0 mentre è vera è 99,60%.

Anche in questo caso o nessuna differenza oppure è maggiore la proporzione ottenuta al pre test.

Tabella 7.70a Confronto fra le due scuole. Variabili numeriche. Test di Mann-Whitney Messina

| | L. S. Messina | | | | |
|-------------|------------------|----------|---------|--------|---------|
| | Media | Dev. Std | Mediana | Minimo | Massimo |
| Voti Mate | 5,72 | 1,485 | 6,00 | 2 | 9 |
| Voti Fisica | 6,10 | 1,362 | 6,00 | 2 | 9 |
| Pretest | 10,6588 | 1,62241 | 11,0000 | 3,00 | 13,00 |
| Retest | 4,4471 | 1,25836 | 5,0000 | 1,00 | 7,00 |
| Rapp_Pre | 0,7106 | 0,10816 | 0,73333 | 0,20 | 0,87 |
| Rapp_Re | 0,6353 | 0,17971 | 0,7143 | 0,14 | 1,00 |

Tabella 7.70a Confronto fra due scuole-Variabili numeriche. Test di Mann-Whitney Caltanissetta

| | L. S. Calta | | | | |
|-------------|-------------|----------|---------|--------|---------|
| | Media | Dev. Std | Mediana | Minimo | Massimo |
| Voti Mate | 6,70 | 1,224 | 6,00 | 4 | 10 |
| Voti Fisica | 7,13 | 1,223 | 7,00 | 4 | 9 |
| Pretest | 10,4250 | 1,72296 | 10,0000 | 6,00 | 14,00 |
| Retest | 5,2250 | 1,09749 | 5,0000 | 2,00 | 7,00 |
| Rapp_Pre | 0,6950 | 0,11486 | 0,6667 | 0,40 | 0,93 |
| Rapp_Re | 0,7464 | 0,15678 | 0,7143 | 0,29 | 1,00 |

Sono stati trattati i dati ottenuti in tabella 62° e 62b con il test di Mann-Whitney. Esso consente di comparare due serie di dati ordinali o cardinali per stabilire se esistono differenze nella localizzazione della loro distribuzione. Esso è uno dei test non parametrici più potenti e serve a verificare se due gruppi indipendenti appartengono alla stessa popolazione. L'ipotesi nulla è che i due campioni sono estratti da una singola popolazione e, di conseguenza, che le mediane siano uguali. E' richiesto che i due campioni siano indipendenti e che le scale siano almeno ordinali. Come tutti i test non parametrici ci vuole un discreto numero di misure per confrontare le due distribuzioni. Di solito si usa un numero totale compreso fra una decina e la soglia di Student. Vengono analizzati adesso i dati in nostro possesso utilizzando anche i relativi grafici.

Tabella 7.71 Test^a

| | U di Mann-Whitney | Sig. Asint. A 2 code |
|-----------------|-------------------|----------------------|
| Voto Matematica | 768,000 | 0,001 |
| Voti Fisica | 711,500 | 0,000 |
| Pre test | 1437,000 | 0,149 |
| Re test | 1058,000 | 0,000 |
| Rapp_pre | 1437,000 | 0,149 |
| Rapp_re | 1058,000 | 0,000 |

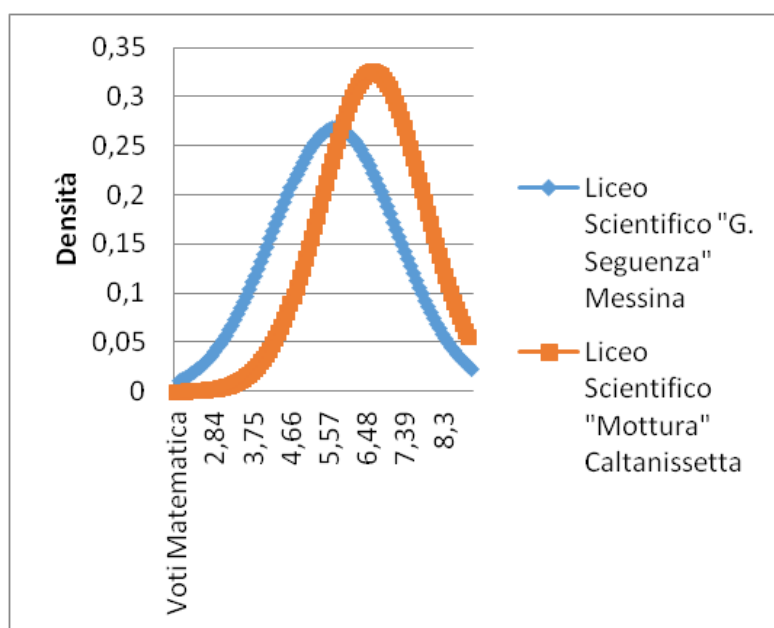


Grafico 7.58: Curva di Gauss confronto voti di matematica fra le due scuole.

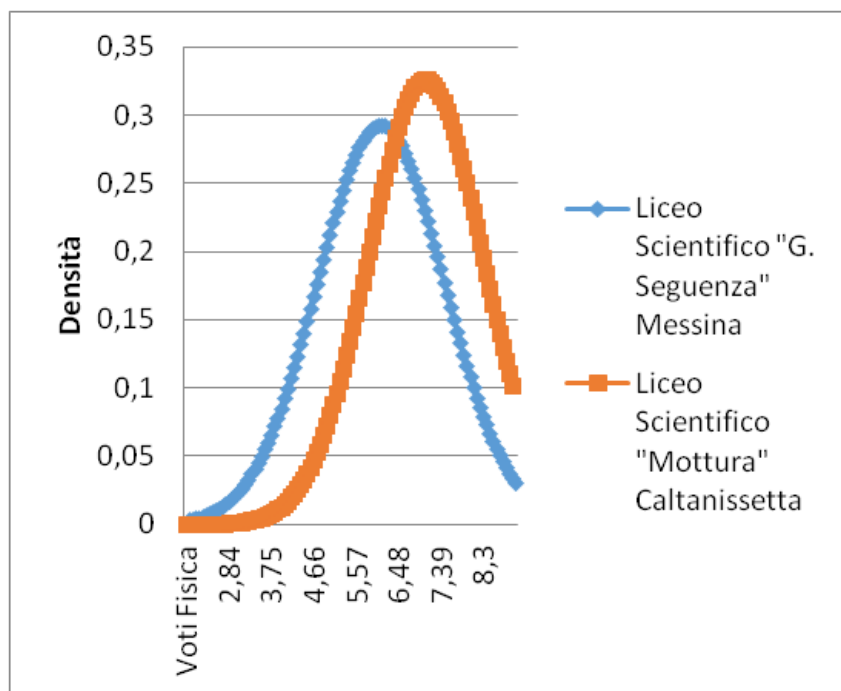


Grafico 7.59: Curva di Gauss confronto voti di fisica fra le due scuole.

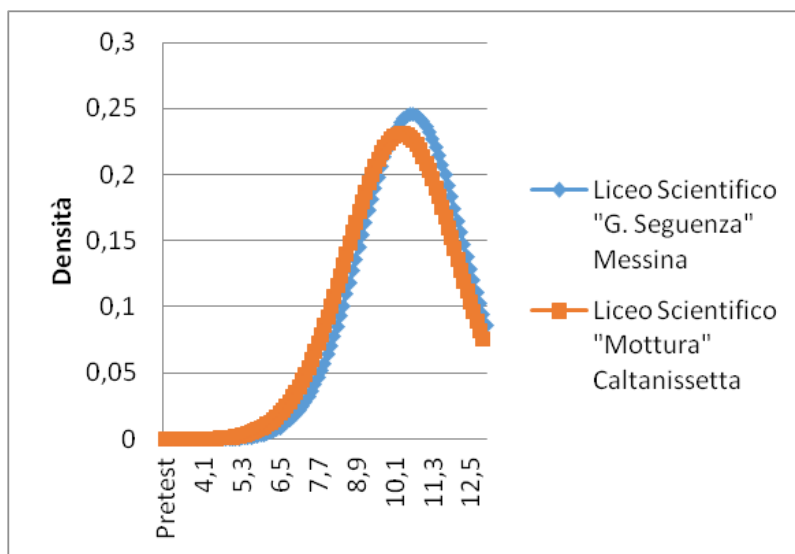


Grafico 7.60: Curva di Gauss confronto risposte corrette date al pre test fra le due scuole.

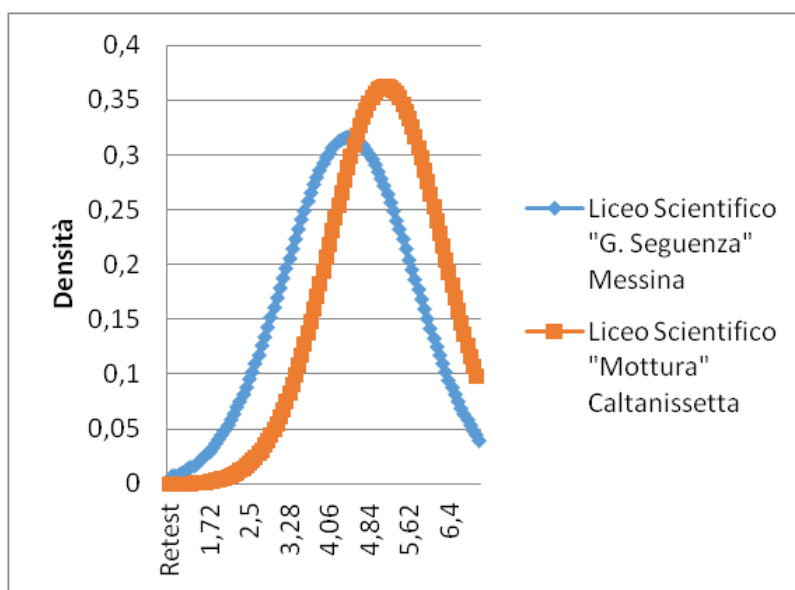


Grafico 7.61: Curva di Gauss confronto risposte corrette date al re test fra le due scuole.

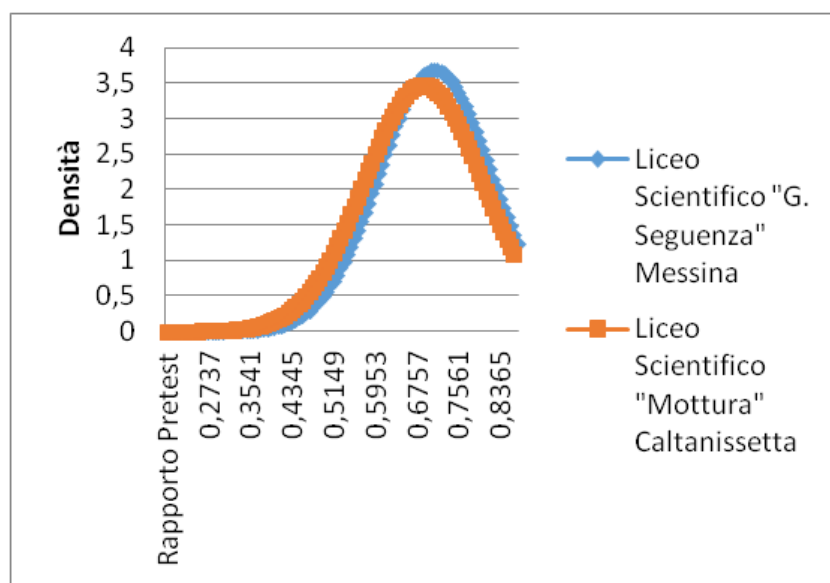


Grafico 7.62: Curva di Gauss confronto sulla percentuale della media delle risposte corrette del pre test delle due scuole.

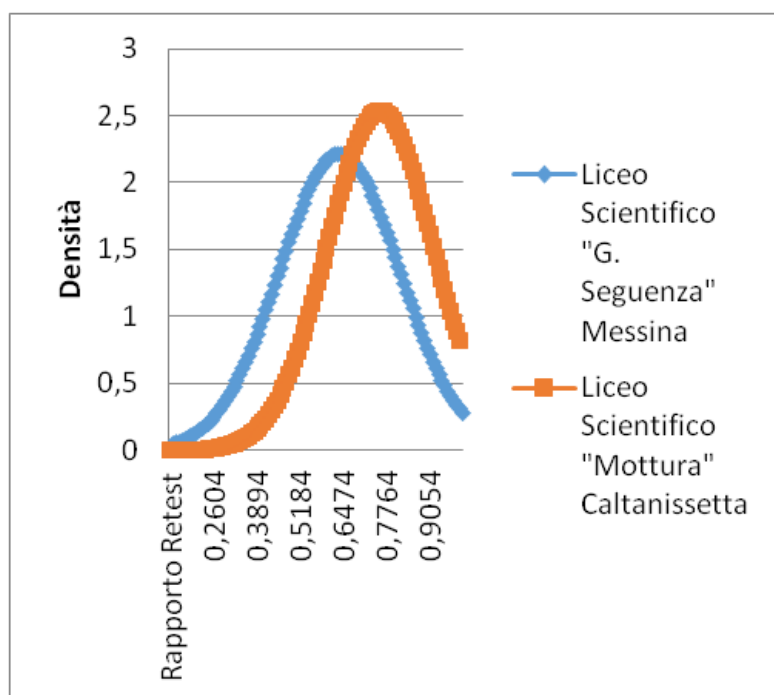


Grafico 7.63: Curva di Gauss confronto sulla percentuale della media delle risposte corrette del re test delle due scuole.

. Nelle tavole seguenti i risultati.

Tavola 1.1 CONFRONTO prima-dopo (campione totale). Test di Wilcoxon

Tabella 7.72 CONFRONTO prima-dopo (campione totale). Test di Wilcoxon

| | |
|----------------------|---------------------|
| | Rapp_pre Rapp_re |
| Z | -1,572 ^a |
| Sig. Asint. a 2 code | 0,116 |

a:Basato su ranghi positivi

b:Test di Wilcoxon

Tabella 7.73 CONFRONTO prima-dopo (Messina). Test di Wilcoxon

| | |
|---------------------------|-------------------------------------|
| | Rapp_pre Rapp_re |
| Z Sig. Asint. a 2 code | -3,205 ^a 0,001 |

a:Basato su ranghi positivi

b:Test di Wilcoxon

Tabella 7.74 CONFRONTO prima-dopo (Caltanissetta). Test di Wilcoxon

| | |
|---------------------------|------------------------------|
| | Rapp_pre Rapp_re |
| Z Sig. Asint. a 2 code | -1,675 ^a 0,094 |

a:Basato su ranghi positivi

b:Test di Wilcoxon

Tabella 7.75 Correlazioni non parametriche – Messina

| | | | Voti Matematica | Voti Fisica |
|-----------------|-------------|---------------|-----------------|--------------|
| Rho di Spearman | Voti Mate | Sig. a 2 code | / | 0,000 |
| | Voti Fisica | Sig. a 2 code | 0,000 | / |
| | Rapp_pre | Sig. a 2 code | 0,004 | 0,011 |
| | Rapp_re | Sig. a 2 code | 0,004 | 0,096 |

La correlazione è significativa al livello 0,01 (2-code)

Tabella 7.76 Correlazioni non parametriche – Caltanissetta

| | | | Voti Matematica | Voti Fisica |
|-----------------|-------------|---------------|-----------------|--------------|
| Rho di Spearman | Voti Mate | Sig. a 2 code | / | 0,000 |
| | Voti Fisica | Sig. a 2 code | 0,000 | / |
| | Rapp_pre | Sig. a 2 code | 0,566 | 0,807 |
| | Rapp_re | Sig. a 2 code | 0,511 | 0,895 |

La correlazione è significativa al livello 0,01 (2-code)

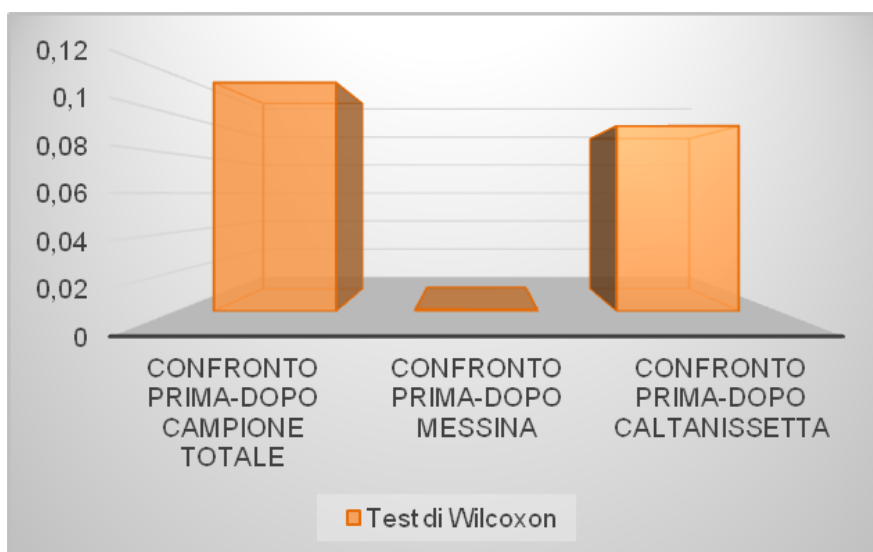


Grafico 7.64: Confronto con il test di Wilcoxon.

Come si evince sia dalle tavole precedenti che dai successivi grafici, si rivela una forte significatività nei due terzi le categorie confrontate.

Per gli studenti di Caltanissetta, dove il campione considerato era inferiore, gli alunni avevano avuto voti più alti in matematica e fisica, e i risultati del pretest sono risultati migliori, l'esito del retest, comunque molto positivo, risulta meno significativo.

CAPITOLO 8

DISCUSSIONI E CONCLUSIONI

8.1 Discussioni e conclusioni

Lo scopo di questo lavoro dottorale è stato:

1. Sviluppare un nuovo approccio didattico, con formule matematiche semplificate, per facilitare la comprensione di alcune parti della MQ agli allievi di quinto anno di liceo scientifico;
2. Testare la validità delle formule ideate, mediante la somministrazione di tests creati ad hoc, e analizzare le risposte date tramite il programma di elaborazione dati SPSS.

Dopo aver esaminato tutte le variabili considerate, rilevate per mezzo della somministrazione dei questionari (vedi Appendice), è possibile affermare che le ipotesi formulate all'inizio del percorso di ricerca sono state confermate dall'analisi dei risultati.

I risultati ottenuti hanno prodotto conclusioni sorprendenti e positive.

In questo lavoro di tesi è stato evidenziato, partendo dall'ipotesi di ricerca descritta nella parte metodologica, e dopo l'esame attento della letteratura e dei risultati ottenuti nel pre-test e post-test, come vi siano prove sufficienti per affermare che l'approccio

metodologico qui sviluppato, rappresenta uno strumento utile per la comprensione di siffatta parte della fisica moderna, da sempre considerata ostica.

Come si evince dalle tavole dettagliatamente descritte nel precedente capitolo, questo studio ha mostrato che valutando il confronto pretest-retest con i test sia del Chi-quadro che di Wilcoxon (dal momento che le variabili pretest e re test sono numeriche), si ottiene una relazione altamente significativa per il Liceo Scientifico di Messina. Ovvero, nonostante le valutazioni in matematica e fisica non fossero alte e il risultato del pre test insufficiente, i discenti hanno ben sviluppato il re test dimostrando la facilità di comprensione e validità del nuovo approccio didattico. Per gli studenti di Caltanissetta, dove il campione considerato era inferiore, gli alunni avevano avuto voti più alti in matematica e fisica, e i risultati del pretest sono risultati migliori, l'esito del retest, comunque molto positivo, risulta meno significativo.

Il presente lavoro potrà servire come guida agli insegnanti per avvicinare gli studenti alla MQ e come ausilio ai discenti per approfondire la parte formale.

8.2 Limiti di studio

Poiché la proposta di ricerca presente in questa tesi dottorale è stata ideata per consentire una trattazione il più possibile veritiera e formale per i concetti fondamentali della MQ, lo studio proposto trova un limite nella sperimentazione, a causa dell'esiguità del campione.

8.3 Proposte per nuove indagini

Sarebbe effettivamente stimolante effettuare ulteriori confronti, considerando nuovi elementi distintivi come, ad esempio, ulteriori aree geografiche e struttura del territorio. Così come eseguire la sperimentazione esaminando altre variabili categoriali (reddito delle famiglie, livello di istruzione dei genitori, interessi degli studenti, ecc.) e testando l'efficacia del programma d'intervento proposto, a conferma della sua peculiare validità.

Un'altra proposta di studio potrebbe essere quella di monitorare i soggetti oggetto di studio per vedere se la percentuale di coloro che si iscrivono all'Università in facoltà scientifiche, dopo aver seguito il percorso didattico proposto, aumenti.

Sulla base del nuovo percorso di apprendimento della MQ presente in questa tesi si potrebbero introdurre ulteriori argomenti di questa parte della fisica con lo stesso tipo di approccio.

8.4 Conclusioni finali

In questo lavoro di tesi, dopo aver consultato la letteratura corrispondente e messo in luce quali siano stati e ancora sono le difficoltà riscontrate dagli studenti ad approcciarsi alla MQ in modo formale, è stata testata la validità del nuovo approccio formulato per una più semplice e chiara comprensione di alcuni argomenti fondamentali della MQ.

Dall'analisi e dall'elaborazione dei dati a disposizione (vedi Cap. VII Risultati) si è ottenuta una conferma delle potenzialità di tale approccio ideato per facilitare l'introduzione alla MQ a tutti i non addetti ai lavori. Questo metodo, all'interno del campione considerato, ha permesso ai discenti (studenti del V anno del liceo scientifico) di entrare nel mondo della fisica moderna, abbastanza indipendentemente dalle loro competenze matematiche e fisiche di base. L'aver illustrato l'argomento anche attraverso una presentazione in Power Point, con animazioni ed esperimenti, ha contribuito a suscitare un certo interesse unitamente al desiderio di ampliare la trattazione con ulteriori lezioni e/o corsi di approfondimento, come si evince dalle risposte alle ultime tre domande del re test.

In conclusione, è concesso affermare, che questo tipo di approccio innovativo ha consentito di introdurre il concetto di probabilità quantistica in maniera naturale, come una necessità inevitabile, non come una bizzarria della natura, così come potrebbe apparire dagli approcci tradizionali. Ciò è il frutto del coesistere del discreto (misure che possono fornire valori discreti come nel caso dello spin) con il continuo (dove le proprietà di simmetria come la rotazione implicano trasformazioni continue).

Infine l'argomento così trattato ha permesso di introdurre alla fisica quantistica anche chi può essere scoraggiato dall'intraprenderne lo studio a causa del formalismo matematico astratto e complesso insito in esso.

Ricordando che tutti i lavori scientifici nascono da altri lavori scientifici e che tutti gli studi derivano da altri studi, anche per questo progetto di lavoro sono stati consultati vari testi e articoli. Ci si augura quindi che questa investigazione sia parimenti utile a

coloro che vorranno intraprendere nuovi approcci didattici per far sì che gli studenti non solo si appassionino all'argomento, ma che entrino a far parte di questo mondo così affascinante e pieno di nuove prospettive. Mi auguro che questo strumento possa consentire agli adolescenti di oggi, che saranno gli uomini di domani, di abbattere le barriere di incomprensione che da sempre li hanno allontanati dal desiderio di studiare con attenzione la fisica.

I risultati di questa ricerca sembrano importanti per vari aspetti. Uno di questi riguarda il ritenere che una conoscenza anche solo degli aspetti principali della fisica quantistica debba far parte del bagaglio culturale di chi vuole realmente vivere nel suo tempo, indipendentemente dagli interessi lavorativi e culturali.

BIBLIOGRAFIA

- (s.d.). Tratto da http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/materiali/pdf/proposte_didattiche.pdf.
- Unnikrishnan, C. S. (2005). Correlation functions, Bell's inequalities and the fundamental conservation laws. *Europhysics letters* , 489–495 .
- Zeilinger, A. (1996). `On the interpretation and philosophical foundation of quantum mechanics. *Helsinki University Press* .
- Zeilinger, A. (1999). A foundational principle for Quantum Mechanics. *Foundation of Physics*, 29 , 29 (4), 29.
- www.iapht.unito.it/fsis/didfis/did9-06-mq.pdf. (s.d.). Tratto da www.iapht.unito.it.
- www.ripmat.it/mate/l/lc/lced.html. (s.d.). Tratto il giorno febbraio 10, 2015 da www.ripmat.it.
- www.treccani.it/scuola/tesine/meccanica_quantistica/3.html. (s.d.). Tratto da www.treccani.it.
- Aspect, A. (1982). Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities. *Physical Review Letters* , 49, 91.
- Bell, J. (2004). *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Second edition ed.). Cambridge: Cambridge University.
- Camejo, S. A. (2008). *Il bizzarro mondo dei quanti-Il dibattito tra Bohe e Einstein*. Milano: Springer.
- Einstein, A. (1948). Quantum mechanics and reality. *Dialectica* , 2 (3-4), 320-324.
- Einstein, A., & Podolsky, B. R. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Be Considered Complete? *Physical Review* , 47 (10), 777-780.
- Einstein, E., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be ConsideredComplete? *Phys. Rev.* 47 777 .
- Dirac, P. A. (1990). *I principi della Meccanica Quantistica*. Oxford: Oxford Uiliversity Press.
- Feynman, R. (2004). *Sei pezzi meno facili*. Adelphi.
- Greco, P. (2008). *Einstein, vita e opere del padre della relatività*. Milano: Alpha test.

- Hardy, L. (2002). Why Quantum Theory? In T. Placek, & J. Butterfield, *Non-locality and Modality* (p. 61-73). Eds. Dordrecht: Springer Netherlands.
- Hardy, L. (s.d.). *Quantum theory from five reasonable axioms*. Tratto da arXiv preprint quant-ph/0101012, 2001 - arxiv.org.
- http://www.fisica.uniud.it/URDF/laurea/idifo1/materiali/c1/I-C1_ImpostazioniMQv6.pdf. (s.d.). Tratto il giorno Marzo 09, 2017 da <http://www.fisica.uniud.it>.
- <http://dida.fauser.edu/calcolo/calcol3/calcolop.htm>. (s.d.). Tratto il giorno Febbraio 10, 2015 da <http://dida.fauser.edu>.
- <http://docplayer.it/28313526-L-insegnamento-della-meccanica-quantistica-tra-problemi-interpretativi-e-difficolta-degli-studenti.html>. (s.d.). Tratto da <http://docplayer.it>.
- Mandel, L. (1999). Quantum effects in one-photon and two-photon interference. *Reviews of Modern Physics* , 71, S274.
- Planck, M. (1900). Ueber die Elementarquanta der Materie und der Eletricität. *Annalen der Physik* , vol. 2, 564.
- Savasta, S. (2008). “Quantum effects in interacting electron systems: The role of spin in the interaction and Entanglement in Mesoscopic Systems,”. In B. Azzarboni, G. Asti, , L. Pareti, , & M. Ghidini, *Magnetic Nanostructures in Modern Technology* (p. 307-324). Eds. Dordrecht: Springer Netherlands.
- Timpson, C. G. (2013). *Quantum Information Theory and the Foundations of Quantum Mechanics*. Oxford: Oxford University Press.
- Tittel, , W., Brendel, , J., Zbinden, , H., & Gisin, N. (1998). Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart. *Physical Review Letters* , 81, 3565.

ELENCO DELLE TABELLE

| | |
|---|-----|
| Tabella 3.1: misure in gradi e radiant di alcuni angoli. ----- | 63 |
| Tabella 3.2: Valori delle funzioni goniometriche seno coseno e tangent degli angoli notevoli. ----- | 69 |
| Tabella 3.3: formule per individuare il valore di una funzione goniometrica rispetta ad un'altra. ----- | 74 |
| Tabella 3.4: Tabella riassuntiva dei valori delle funzione goniometriche per gli angoli notevoli.----- | 78 |
| Tabella 3.5: Distribuzione di probabilità di Bernoulli.----- | 106 |
| Tabella 3.6: Voti dati agli studenti ad un esame.----- | 111 |
| Tabella 3.7: Media dei voti di Italiano conseguiti nel primo quadrimestre.----- | 112 |
| Tabella 3.8: Media dei voti considerate, in ordine crescent.----- | 113 |
| Tabella 3.9: Media dei voti di Italiano conseguiti nel primo quadrimestre di 12 allievi.---- | 114 |
| Tabella 3.10: Media dei voti in ordine crescent. ----- | 115 |
| Tabella 3.11: età di un gruppo di 15 genitori di una classe prima elementare in ordine crescente.----- | 117 |
| Tabella 3.12: Distribuzione di frequenza delle età. ----- | 118 |
| Tabella 3.13: Distribuzione della popolazione della regione Sicilia nell'anno 2016, suddivisa per regioni (Dati Istat):----- | 119 |
| Tabella 3.14 numero di caffè venduti in 6 giorni in un bar del centro----- | 121 |
| Tabella 3.15: Tavola riassuntiva dei valori della media e del numeratore della varianza. 122 | 122 |
| Tabella 7.1 Tabella di frequenza sesso student.----- | 174 |
| Tabella 7.2 Tabella frequenza scuola ----- | 175 |
| Tabella 7.3 Tabella frequenza età ----- | 176 |
| Tabella 7.4 Tabella frequenza città ----- | 177 |
| Tabella 7.5 Tabella frequenza-Domanda1 pre test. Le grandezze scalari sono: ----- | 177 |

| | | |
|--------------|---|-----|
| Tabella 7.6 | Tabella frequenza-Domanda2 pre test: Un vettore è definito in matematica come classe di segmenti orientati equipollenti, ovvero l'insieme di segmenti dotati di medesima direzione e verso: ----- | 178 |
| Tabella 7.7 | Tabella frequenza-Domanda3 pre test: Quali dei seguenti metodi si possono utilizzare per sommare i vettori?----- | 179 |
| Tabella 7.8 | Tabella frequenza-Domanda4 pre test: Per conoscere le grandezze vettoriali, occorre avere: ----- | 180 |
| Tabella 7.9 | Tabella frequenza-Domanda5 pre test: Nel prodotto vettoriale il verso è:----- | 181 |
| Tabella 7.10 | Tabella frequenza-Domanda6 pre test: Se $\text{sen } x = 0$, quanto vale x ? ----- | 183 |
| Tabella 7.11 | Tabella frequenza-Domanda7 pre test: $\text{Cos}(-x)$ è uguale a? ----- | 184 |
| Tabella 7.12 | Tabella frequenza-Domanda8 pre test: A quanti gradi corrisponde $\pi/12$ ---- | 185 |
| Tabella 7.13 | Tabella di frequenza Domanda9 pre test: L'espressione $\text{sen } x \text{cos } x$ è uguale a? ----- | 186 |
| Tabella 7.14 | Tabella di frequenza Domanda10 pre test: Quanto vale $\text{sen } 180^\circ - x$? ----- | 187 |
| Tabella 7.15 | Tabella di frequenza Domanda11: pre test: Estraendo una pallina da un'urna contenente 100 palline, di cui 25 blu, 15 rosse e 60 gialle, qual è la probabilità che esca una pallina rossa?----- | 188 |
| Tabella 7.16 | Tabella di frequenza Domanda12 pre test: Claudia ha lanciato 4 volte di seguito una moneta ed ha ottenuto sempre croce. Se lanciasse la moneta la quinta volta, cosa succederebbe?----- | 189 |
| Tabella 7.17 | Tabella di frequenza Domanda13 pre test: Una coppia ha già avuto due figli maschi, qual è la probabilità che il terzo figlio sia femmina? ----- | 190 |
| Tabella 7.18 | Tabella di frequenza Domanda 14 pre test: Considerando la tabella in allegato, dei dipendenti di un'impresa, dei quali abbiamo rilevato il numero dei figli. Calcola la varianza. ----- | 191 |
| Tabella 7.19 | Tabella di frequenza Domanda 15 pre test: Da un lotto di gomitoli di lana si è rilevato il peso dei gomitoli: qual è la media dei pesi?----- | 192 |

Tabella 7.20 Tabella di frequenza Domanda 1 re test: Se consideriamo un beam-splitter con riflettanza pari a 0.8 ed immaginiamo di eseguire misure con fasci a singolo fotone, quanto varrà la probabilità che il singolo fotone venga trasmesso?----- 193

Tabella 7.21 Tabella di frequenza Domanda 2 re test: Consideriamo una sorgente da cui fuoriescono gli atomi di argento e applichiamo un primo apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse z, blocchiamo l'emissione di atomi z- introduciamo in sequenza un altro apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse ϑ che forma un angolo di 60° con il precedente. Quale sarà la probabilità di ottenere spin up? ----- 194

Tabella 7.22 Tabella di frequenza Domanda 3 re test: Consideriamo una sorgente da cui fuoriescono gli atomi di argento e applichiamo un primo apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse z, blocchiamo l'emissione di atomi z- introduciamo in sequenza un altro apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse che forma un angolo di 90° con il precedente. Quale sarà la probabilità di ottenere spin down?----- 195

Tabella 7.23 Tabella di frequenza Domanda 4 re test: Nella disuguaglianza di CHSH, cosa possiamo dire sul modulo del valore medio di C?----- 196

Tabella 7.24 Tabella di frequenza Domanda 5 re test: In un esperimento sequenziale di Stern-Gerlach, considerando una sorgente da cui fuoriescono gli atomi di argento e applichiamo ad essa un primo apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse z, blocchiamo l'emissione di atomi in z- e ntroduciamo in sequenza un altro apparato di Stern-Gerlach. Se ottengo il 25% di ottenere spin up, di quanto è ruotato l'angolo θ ?----- 197

Tabella 7.25 Tabella di frequenza Domanda 6 re test: Consideriamo una sorgente che invia due particelle di spin $\frac{1}{2}$ con momento totale angolare nullo, ciascuna ad uno die due osservatori distanti Alice e Bob. Se Alice esegue per prima la misura ed ottiene -1 che valore otterrà Bob eseguendo la misura lungo un asse ruotato di 30° ? ----- 198

Tabella 7.26 Tabella di frequenza Domanda 7 re test: Consideriamo una sorgente che invia due particelle di spin $\frac{1}{2}$ con momento totale angolare nullo, ciascuna ad uno dei due osservatori distanti Alice e Bob. Se Alice esegue per prima la misura ed ottiene 1 quale

sarà la probabilità che Bob eseguendo la misura lungo un asse ruotato di 30° ottenga -

1? 199

| | | |
|--------------|--|-----|
| Tabella 7.27 | Tabella di frequenza Domanda 8 re test: L'incontro fatto ----- | 200 |
| Tabella 7.28 | Tabella di frequenza Domanda 9 re test: Ritieni che gli aspetti matematici introdotti (vettori, goniometria, probabilità, ...) siano: ----- | 200 |
| Tabella 7.29 | Tabella di frequenza Domanda 10 re test: Ritieni utile sperimentare un modulo sulla fisica quantistica in V liceo?----- | 201 |
| Tabella 7.30 | Statistiche descrittive per variabili numeriche----- | 202 |
| Tabella 7.31 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda1 pre test----- | 206 |
| Tabella 7.32 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda2 pre test----- | 207 |
| Tabella 7.33 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda3 pre test. ----- | 208 |
| Tabella 7.34 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda4 pre test----- | 209 |
| Tabella 7.35 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda5 pre test ----- | 210 |
| Tabella 7.36 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda6 pre test ----- | 211 |
| Tabella 7.37 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda7 pre test----- | 212 |
| Tabella 7.38 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda8 pre test ----- | 213 |
| Tabella 7.39 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda9 pre test----- | 214 |
| Tabella 7.40 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda10 pre test ----- | 215 |
| Tabella 7.41 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda11 pre test ----- | 216 |
| Tabella 7.42 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda12 pre test ----- | 217 |
| Tabella 7.43 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda13 pre test----- | 218 |
| Tabella 7.44 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda14 pre test ----- | 219 |
| Tabella 7.45 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda15 pre test ----- | 220 |
| Tabella 7.46 | Tavola di contingenza confronto tra le due città domanda1 re test----- | 222 |
| Tabella 7.47 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda2 re test ----- | 223 |
| Tabella 7.48 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda3 re test.----- | 224 |
| Tabella 7.49 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda4 re test ----- | 225 |
| Tabella 7.50 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda5 re test ----- | 226 |

| | | |
|---------------|--|-----|
| Tabella 7.51 | Tavola di contingenza confronto tra le due città domanda6 re test.----- | 227 |
| Tabella 7.52 | Tabella di contingenza confronto tra le due città domanda7 re test ----- | 228 |
| Tabella 7.53 | Tabella di contingenza risposte Pre e Post test----- | 229 |
| Tabella 7.54 | Test del Chi-quadrato. ----- | 230 |
| Tabella 7.55 | Test per due proporzioni 1 ----- | 233 |
| Tabella 7.56 | Tabella di contingenza risposte Pre test essina e Caltanissetta. ----- | 234 |
| Tabella 7.57 | Test per due proporzioni 2 ----- | 234 |
| Tabella 7.58 | Tabella di contingenza risposte Pre test essina e Caltanissetta. ----- | 235 |
| Tabella 7.59 | Test per due proporzioni 3.----- | 236 |
| Tabella 7.60 | Tavola di contingenza Post test ----- | 237 |
| Tabella 7.61 | Test per due proporzioni 4. ----- | 237 |
| Tabella 7.62 | Tavola di contingenza disgregazione maschi femmine----- | 238 |
| Tabella 7.63 | Test per due proporzioni 5.----- | 239 |
| Tabella 7.64 | Tavola di contingenza maschi ----- | 240 |
| Tabella 7.65 | Test per due proporzioni: maschi ----- | 240 |
| Tabella 7.66 | Tavola di contingenza maschi post test----- | 241 |
| Tabella 7.67 | Test per due proporzioni: maschi ----- | 241 |
| Tabella 7.68 | Tavola di contingenza femmine pre test. ----- | 242 |
| Tabella 7.69 | Test per due proporzioni: femmine----- | 243 |
| Tabella 7.70a | Confronto fra le due scuole. Variabili numeriche. Test di Mann-Whitney | |
| | Messina 244 | |
| Tabella 7.71 | Test ^a ----- | 245 |
| Tabella 7.72 | CONFRONTO prima-dopo (campione totale). Test di Wilcoxon ----- | 248 |
| Tabella 7.73 | CONFRONTO prima-dopo (Messina). Test di Wilcoxon----- | 249 |
| Tabella 7.74 | CONFRONTO prima-dopo (Caltanissetta). Test di Wilcoxon ----- | 249 |
| Tabella 7.75 | Correlazioni non parametriche – Messina ----- | 249 |
| Tabella 7.76 | Correlazioni non parametriche – Caltanissetta ----- | 249 |

ELENCO DELLE FIGURE

| | |
|--|----|
| Figura 3.1: Esempio di angolo al centro..... | 59 |
| Figura 3.2: Disegno di un triangolo rettangolo..... | 60 |
| Figura 3.3: Illustrazione delle parti di un angolo. | 61 |
| Figura 3.4: Angolo concavo e angolo convesso..... | 61 |
| Figura 3.5: Circonferenza goniometrica: circonferenza avente centro nell'origine e raggio unitario..... | 65 |
| Figura 3.6: Gradi di un angolo α in una circonferenza goniometrica..... | 66 |
| Figura 3.7: Definizione di seno e coseno di un angolo..... | 67 |
| Figura 3.8: Grafico della definizione della tangente di un angolo α mediante la circonferenza goniometrica..... | 67 |
| Figura 3.9 Grafico della funzione $y=\text{sen}x$ | 70 |
| Figura 3.10: Grafico della funzione $y=\text{cos}x$ | 70 |
| Figura 3.11 Grafico della funzione $y=\text{tan}x$ | 71 |
| Figura 3.12: Prima relazione fondamentale della goniometria. | 71 |
| Figura 3.13: Valore delle funzioni goniometriche a 30° | 75 |
| Figura 3.14: Valori delle funzioni goniometriche a 60° | 76 |
| Figura 3.15 Valore delle funzioni goniometriche a 45° | 77 |
| Figura 3.16: Angoli supplementari | 79 |
| Figura 3.17: Angoli associati opposti. | 81 |
| Figura 3.18: Angolo associato $\pi/2-\alpha$ | 82 |
| Figura 3.19: Angolo associato $\pi/2+\alpha$ | 83 |
| Figura 3.20: Angolo associato $3\pi/2-\alpha$ | 83 |
| Figura 3.21: Angolo associato $3\pi/2+\alpha$ | 84 |
| Figura 3.22: Rappresentazione di un vettore..... | 85 |
| Figura 3.23: Proiezione di un vettore sugli assi cartesiani..... | 86 |
| Figura 3.24: Rappresentazione polare di un vettore. | 87 |
| Figura 3.25 Vettori equipollenti. | 89 |

| | |
|--|-----|
| Figura 3.26: Illustrazione del metodo "punta-coda". | 90 |
| Figura 3.27: Illustrazione del metodo del parallelogramma per calcolare la somma di due vettori. | 91 |
| Figura 3.28: Vettori opposti. | 91 |
| Figura 3.29: Illustrazione della differenza tra due vettori. | 92 |
| Figura 3.30: Illustrazione del prodotto di un vettore per uno scalare. | 93 |
| Figura 3.31: Illustrazione del prodotto scalare in forma trigonometrica. | 94 |
| Figura 3.32: Illustrazione della regola della mano destra. | 95 |
| Figura 3.33: Prodotto vettoriale. | 96 |
| Figura 3.34: Immagine del lancio di un dado. | 99 |
| Figura 3.35: Immagine naif di un sacchetto con dentro palline bianche e nere | 101 |
| Figura 3.36: Immagine di lancio di dadi. | 105 |
| Figura 3.37 La probabilità 1 viene distribuita tra i valori possibili 0 e 1. | 107 |
| Figura 3.38: Esempio di voti di un compito in classe. | 109 |
| Figura 3.39 Gruppo di genitori davanti una scuola elementare. | 116 |
| Figura 3.40: Fotografia di una tazzina di caffè consumata in un bar. | 121 |
| Figura 4.1: Immagine tridimensionale di un beam-splitter. | 128 |
| Figura 4.2: Immagine schematica del funzionamento di un beam-splitter. | 128 |
| Figura 4.3: Fasci di luce uscenti da beam-splitter. | 129 |
| Figura 4.4: Illustrazione di una bilancia utilizzata per per pesare e suddividere i granelli di sabbia. | 129 |
| Figura 4.5: Duna di sabbia come esempio di una figura che sembra continua ma che in realtà può essere divisa fino ad ottenere un singolo granello. | 130 |
| Figura 4.6: Rappresentazione naif dello spin in Meccanica Quantistica. | 133 |
| Figura 4.7: Foto di Otto Stern e Walter Gerlach al tempo dell'esperimento. | 134 |
| Figura 4.8: Illustrazione naif di un atomo di idrogeno con numero atomico 47. | 135 |
| Figura 4.9: L'esperimento di Stern-Gerlach. | 135 |

| | |
|---|------------|
| Figura 4.10a: Distribuzione continua di fasci emergente da un dispositivo di SG (predizione della fisica classica)..... | 136 |
| Figura 4.11: Prima sequenza dell'esperimento di Stern-Gerlach..... | 137 |
| Figura 4.12: Seconda sequenza dell'esperimento di Stern-Gerlach. | 138 |
| Figura 4.13: Sequenza finale dell'esperimento di Stern-Gerlach. | 138 |
| Figura 4.14: Vettore J orientato lungo l'asse di misura z..... | 141 |
| Figura 4.15: Uscite con medesimo valore assoluto..... | 142 |
| Figura 4.16: Cosa succede quando cambiamo l'asse di misura facendo una rotazione di un angolo θ? | 143 |
| Figura 4.17: Albert Einstein..... | 145 |
| Figura 4.18: Comportamento simmetrico. | 148 |
| Figura 4.19: Rappresentazione grafica dell'Eq. 4.10. | 149 |
| Figura 5.1: Fotografia dei fisici Einstein, Podolsky e Rosen. | 154 |
| Figura 5.2a: \hat{a} è un versore che corrisponde all'asse di misura di Alice | 159 |
| Figura 5.3a: \hat{a} è un versore che corrisponde all'asse di misura di Alice | 160 |
| Figura 5.4: Immagine dei versori \hat{a}, \hat{a}', \hat{b} e \hat{b}' che si trovano sullo stesso piano ruotati di 45°..... | 162 |
| Figura 5.5: Immagine naif del concetto di entanglement. | 164 |

APPENDICE A

PRE TEST SULLE COMPETENZE DI BASE

A.1 Scheda socio-anagrafica

N° _____
SCUOLA _____
CITTÀ: _____
CLASSE: _____
ETA': _____
SESSO: _____

A.2 Questionario a risposta multipla sulle conoscenze dei pre-requisiti

3. Le grandezze scalari sono:
- a. quelle grandezze che per essere quantificate hanno bisogno di un numero e di un'unità di misura;
 - b. quelle grandezze che per essere quantificate hanno bisogno solo di un'unità di misura;
 - c. quelle grandezze che per essere quantificate hanno bisogno di un'unità di misura, una direzione, un verso e un punto di applicazione;
 - d. quelle grandezze che per essere quantificate hanno bisogno di un'unità di misura, modulo, verso e direzione.

4. Un vettore è definito in matematica come classe di segmenti orientati equipollenti, ovvero l'insieme di segmenti dotati di medesima direzione e verso:
- Vero
 - Falso
5. Quali delle seguenti metodi si possono utilizzare per sommare i vettori?
- Metodo del parallelogramma;
 - Metodo punta coda;
 - Regola della mano destra;
 - Prodotto scalare o vettoriale.
6. Per definire completamente le grandezze vettoriali, occorre conoscere:
- Modulo e direzione;
 - Verso e direzione;
 - Modulo e verso;
 - Nessuna di queste.
7. Nel prodotto vettoriale il verso è:
- Perpendicolare a entrambi i vettori di partenza;
 - Il prodotto tra i moduli dei vettori;
 - Definito dalla regola della mano destra;
 - Nulla.
8. Se $\sin x = 0$, quanto vale x ?
- 30° ;
 - 90° ;
 - Non posso dirlo con certezza;
 - 0° .
9. $\cos(-x)$ è uguale a?
- $\cos(x)$;

- b. $\text{sen}(x)$;
- c. $-\text{sen}(x)$;
- d. $-\text{cos}(x)$.

10. A quanti gradi corrisponde $\frac{\pi}{12}$?

- a. 30° ;
- b. 45° ;
- c. 18° ;
- d. 15° .

11. L'espressione $\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$ è uguale a:

- a. $\sin\alpha$;
- b. $\cos\alpha$;
- c. $\tan\alpha$;
- d. 1.

12. Quanto vale $\sin(180^\circ - \alpha)$?

- a. $-\text{sen}(\alpha)$;
- b. $\sin\alpha$;
- c. $\cos\alpha$;
- d. $-\text{cos}(\alpha)$.

13. Estraendo una pallina da un'urna contenente 100 palline di cui 25 blu 15 rosse e 60 gialle, qual'è la probabilità che esca una pallina rossa?

- a. 15%;
- b. 50%;
- c. 30%;
- d. 75%.

14. Claudia ha lanciato 4 volte di seguito una moneta ed ha ottenuto sempre croce. Se lanciasse la moneta la quinta volta, cosa succederebbe?

- a. La probabilità di ottenere testa sarebbe maggiore di quella di ottenere croce;
- b. La probabilità di ottenere testa sarebbe minore di quella di ottenere croce;
- c. La probabilità di ottenere testa sarebbe pari ad 1;
- d. La probabilità di ottenere testa sarebbe uguale a quella di ottenere croce.

15. Una coppia ha già avuto due figli maschi, qual'è la probabilità che il terzo figlio sia femmina?

- a. 33%;
- b. 60%;
- c. 50%;
- d. 25%.

16. Considerando la seguente tabella dei dipendenti di un'impresa, dei quali abbiamo rilevato il numero dei figli:

| Numero figli | Numero dipendenti |
|--------------|-------------------|
| 0 | 11 |
| 1 | 20 |
| 2 | 11 |
| 3 | 7 |
| 4 | 1 |
| Totale | 50 |

Qual è tra le seguenti il valore della varianza?

- a. 1,0644;
- b. 1,34;
- c. 1,0317;
- d. 106,44.

17. Da un lotto di gomitoli di lana si è rilevato il peso di 20 gomitoli, come da tabella:

| Peso (in grammi) | Gomitoli |
|------------------|----------|
|------------------|----------|

| | | |
|--------|----|----|
| | 49 | 2 |
| | 50 | 6 |
| | 51 | 8 |
| | 51 | 4 |
| Totale | | 20 |

Qual è la media dei pesi?

- a. 25,50;
- b. 50,50;
- c. 55,20;
- d. 22,05.

APPENDICE B
RE TEST DI VALUTAZIONE DELLE COMPETENZE
ACQUISITE

B.1 Scheda socio-anagrafica

N°

SCUOLA: _____

CITTÁ: _____

CLASSE: _____

ETA': _____

SESSO: _____

B.2 Questionario a risposta multipla sulle conoscenze acquisite

18. Se consideriamo un beam-splitter con riflettanza pari a 0,8 ed immaginiamo di eseguire misure con fasci a singolo fotone, quanto varrà la probabilità che il singolo fotone venga trasmesso?

- a. $P(T)=1$;
- b. $P(T)=0.2$;
- c. $P(T)=0,5$;
- d. $P(T)= 0.8$.

19. Consideriamo una sorgente da cui fuoriescono gli atomi di argento e applichiamo un primo apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse z , blocchiamo l'emissione di atomi in $z -$ introduciamo in sequenza un altro apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse che forma un angolo θ di 60° con il precedente.

Quale sarà la probabilità di ottenere spin up?

- a. 50%
- b. 75%
- c. 25%
- d. 100%

20. Consideriamo una sorgente da cui fuoriescono atomi di argento e applichiamo un primo apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse z , blocchiamo l'emissione di atomi in $z -$, introduciamo in sequenza un altro apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse che forma un angolo θ di 90° con il precedente.

Quale sarà la probabilità di ottenere spin down?

- a. 50%
- b. 75%
- c. 25%
- d. 100%

21. Nella disuguaglianza di CHSH, cosa possiamo dire sul modulo del valore medio di C ?

- a. $|\langle C \rangle| > 2$;
- b. $|\langle C \rangle| < 2$;
- c. $|\langle C \rangle| = 2$;
- d. $|\langle C \rangle| \leq 2$.

22. In un esperimento sequenziale di Stern- Gerlach, si consideri una sorgente da cui fuoriescono atomi di argento e si applichi ad essa un primo apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse z , successivamente verrà bloccata

l'emissione di atomi in $z -$ e introdotto in sequenza un altro apparato di Stern-Gerlach. Se si raggiunge il 25% di probabilità ottenere spin up, di quanto è ruotato l'angolo θ ?

- a. 50°
- b. 75°
- c. 25°
- d. 120°

23. Se si considera una sorgente che invia due particelle di spin $\frac{1}{2}$ con momento totale angolare nullo, ciascuna ad uno dei due osservatori distanti Alice e Bob. Se Alice esegue per prima la misura ed ottiene -1 che valore otterrà Bob eseguendo la misura lungo un asse ruotato di 30° ?

- a. $\frac{1}{2}$;
- b. 1;
- c. $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- d. Non è possibile calcolarlo, al più possiamo calcolare la probabilità di ottenere $+1$ o -1 .

24. Se si considera una sorgente che invia due particelle di spin $\frac{1}{2}$ con momento totale angolare nullo, ciascuna ad uno dei due osservatori distanti Alice e Bob. Se Alice esegue per prima la misura ed ottiene $+1$ quale sarà la probabilità che Bob eseguendo la misura lungo un asse ruotato di 30° ottenga -1 ?

- a. 50%;
- b. 75%;
- c. 25%;
- d. 120%.

25. L'incontro fatto:

- a. Ti ha incuriosito;
- b. Ti ha coinvolto;

- c. Ti ha fatto intravedere un mondo nuovo;
- d. Nessuna delle precedenti.

26. Ritieni che gli aspetti matematici introdotti (vettori, goniometria, probabilità, ...) siano:

- a. Un ostacolo, e non aiutano per niente;
- b. Un grosso ostacolo ma aiutano a capire la fisica quantistica;
- c. Difficili ma affrontabili e sono utili per introdurre la fisica quantistica;
- d. Non sono un ostacolo e sono di facile comprensione

27. Ti interesserebbe poter seguire un modulo sulla fisica quantistica?

- a. Per nulla;
- b. Poco;
- c. Abbastanza;
- d. Molto.

APPENDICE C

C.1 Slide training

