

A-06

ALGORITMO PARA LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS EN 3-D PARA RIEGO POR GOTEO: MÉTODO, VALIDACIÓN Y RESULTADOS PRELIMINARES

del Vigo, A.⁽¹⁾, Zubelzu, S.⁽²⁾, Juana, L.⁽³⁾.

¹ Profesor asociado. Universidad Antonio de Nebrija. Dpto. Ing. Industrial. C/Pirineos 55. 28040 (Madrid). avigo@nebrija.es

² Profesor ayudante doctor. ETSI agronómica, alimentación y biosistemas. U.P.M. Av. Puerta de Hierro 2. 28040 (Madrid). sergio.zubelzu@upm.es

³ Catedrático de Universidad. ETSI agronómica, alimentación y biosistemas. U.P.M. Av. Puerta de Hierro 2. 28040 (Madrid). luis.juana@upm.es

Resumen

Se ha desarrollado un programa basado en diferencias finitas para la resolución de la ecuación de la filtración (ecuación de Richards) en tres dimensiones. El programa es flexible, fácil de adaptar a las diferentes condiciones del subsuelo, estable bajo los criterios de convergencia, y se ha mostrado preciso en el cálculo de las variables de interés en el problema de filtración, esto es, contenido de humedad y presión.

El programa se ha testado por dos vías diferentes. En primer lugar, se ha comparado con resultados procedentes de soluciones analíticas conocidas. En segundo lugar, se ha comprobado con el programa comercial Hydrus-3D. En ambos casos, la coincidencia entre los resultados obtenidos es satisfactoria.

Finalmente se presentan algunos resultados preliminares de estudios realizados con esta herramienta para estudiar la redistribución, la sobrepresión en el goteo subsuperficial. Asimismo, se ha usado para validar soluciones aproximadas basadas en las hipótesis similares a las de Green-Ampt con objeto de facilitar estudios específicos.

Abstract

A based on finite differences scheme has been developed in order to study 3-D water soil infiltration for axisymmetric conditions via Richard's equation. The programme has been validated throughout two different paths: existing analytical solutions, and other numerical models. In both cases, a satisfactory agreement is found.

Preliminary results obtained with this routine are also presented such as redistribution studies, and the overpressure in the subsurface drip. Likewise, it has been used to validate approximate solutions proposed that are based on similar hypothesis to Green-Ampt model. This approximated solutions may facilitate specific studies.

1- Introducción

El riego localizado ha adquirido una importancia relevante, sobre todo en explotaciones intensivas y con gran valor añadido. Con el agua de riego se aplican agroquímicos y tratamientos fisiológicos que en un primer momento van al suelo. El estudio

de la filtración de agua y sus nutrientes en el suelo es por tanto de gran interés económico y ambiental en nuestros días.

En este trabajo se presenta una rutina de elaboración propia adaptada al riego por goteo en tres dimensiones. Se utiliza simetría cilíndrica y las ecuaciones de van Genuchten - Mualem para caracterizar el suelo. El código está basado en la resolución de la ecuación diferencial por el método de diferencias finitas usando un algoritmo explícito. La validación con las soluciones analíticas de Warrick (1974), y Warrick y Lomen (1976) es satisfactoria, así como la comparación de los resultados con los que arroja el software comercial Hydrus-3D, Šimůnek et al (2006).

Finalmente, se presentan soluciones aproximadas obtenidas a partir de estimaciones parecidas a las del modelo de Green-Ampt. Estas soluciones han sido adaptadas y testadas con éxito con el algoritmo expuesto anteriormente, mostrando ser un complemento y una alternativa eficaz para algunos estudios del flujo de agua en el suelo, reduciendo significativamente el tiempo de cálculo con respecto a la integración directa de la ecuación de Richards.

2- Objetivos

- 1.- Mostrar las características principales del programa.
- 2.- Presentar los resultados de validación del código.
- 3.- Presentar algunos resultados preliminares obtenidos con este programa.

3- Materiales y Métodos

Descripción del código.

Por la simetría del problema de infiltración se han elegido coordenadas cilíndricas, lo que permite reducir el número de variables espaciales, y por tanto, el tiempo de computación. La ecuación de Richards en 3-D, en términos del potencial matricial $h(\theta)$ [m], conductividad hidráulica K [m/s] y contenido de humedad θ [adim] es la siguiente:

$$K \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[K \frac{\partial h}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial h}{\partial z} \right] + \frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{dh} \frac{\partial h}{\partial t} \quad [1]$$

La discretización utilizada se muestra en la siguiente ecuación:

$$h_{t+\Delta t} = h + \frac{\Delta t \cdot \Delta h}{2\Delta\theta} \left[\frac{K}{r} \cdot \frac{h_2 - h_4}{\Delta r} + (K + K_1) \frac{h_1 - h}{(\Delta z)^2} + (K + K_2) \frac{h_2 - h}{(\Delta r)^2} + (K + K_3) \frac{h_3 - h}{(\Delta z)^2} + (K + K_4) \frac{h_4 - h}{(\Delta r)^2} + \frac{K_1 - K_3}{\Delta z} \right] \quad [2]$$

Donde se ha introducido la media aritmética de la conductividad hidráulica sobre el entorno de cada nodo de la red. Los subíndices indican la posición de cada nodo adyacente al punto de estudio (sin subíndice).

Se ha demostrado que el programa es estable bajo la siguiente condición de resolución espacio-temporal:

$$\Delta t < \frac{\theta_s \cdot (\Delta z)^2}{8000K_s} \quad [3]$$

Esta ecuación ha sido deducida a partir de la ecuación [2] y teniendo en consideración el criterio de estabilidad para ecuaciones diferenciales parabólicas, recogido en Carnahan et al (1979). La variación del contenido de humedad con respecto al potencial matriz, que tiende a infinito en el modelo de van Genuchten-Mualem, se ha limitado al máximo que resultaría considerando la compresibilidad del agua.

Solución aproximada para el flujo desde una semiesfera.

Se estudiará un flujo radial desde una semiesfera superficial de radio r_0 , sometida a la presión atmosférica hasta un frente con una tensión matricial $\tau_f \cong \text{cte}$, donde se produce un cambio brusco del contenido de humedad de θ_s a θ_0 . A una distancia r , intermedia entre r_0 y el frente, r_f , y sin considerar el efecto gravitatorio, la ecuación de Darcy en coordenadas esféricas se reduce a:

$$v_r = -K_s \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r^2} \Rightarrow Q = 2\pi K_s \tau_f \frac{r_0 r_f}{r_f - r_0} = \frac{dV_a}{dt} \quad [4]$$

Lo que conduce a una relación entre el volumen acumulado y tiempo:

$$t^* = V_a^* - \frac{3}{2} \left((1 + V_a^*)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \quad [5]$$

Las variables de la expresión [5] son adimensionales. Notar que se ha considerado el caudal Q igual a constante dado que estamos asumiendo igualmente como constante la densidad del agua y condiciones de saturación entre r_0 y r_f (conductividad hidráulica en saturación K_s). La adimensionalización se ha realizado con los siguientes parámetros:

$$V_{ref} = 2\pi\Delta\theta \cdot r_0^3/3 \quad Q_{ref} = 2\pi\tau_f \cdot K_s \cdot r_0 \quad t_{ref} = V_{ref}/q_{ref} \quad [REF 1]$$

Se llega a las siguientes expresiones aproximadas a los primeros términos de una serie de Taylor para los instantes iniciales del proceso de infiltración, y tiempos muy largos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} V_a^* = \sqrt{6t^*} \quad [5.a]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} Q^* = \frac{3}{V_a^*} \quad [5.b]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_a^* = t^* \quad [5.c]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q^* = 1 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} Q = 2\pi K_s \tau_f r_0 \quad [5.d]$$

Notar que en los primeros instantes de tiempo, el volumen infiltrado es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo (adimensional), mientras que para tiempos más largos se acaba relajando siendo proporcional a t^* . Por otra lado, para tiempos muy grandes la estimación obtenida del caudal es proporcional a la tensión del frente τ_f , que se puede calcular, bien a través de la expresión de von Neumann (Neumann, 1976), o bien con su relación a través de la sorptividad S (Sayah et al, 2016).

4- Resultados y discusión

Validación a través de soluciones analíticas.

La *figura 1* muestra resultados de validación por comparación con la solución analítica de Warrick (1974). Se presentan contenidos de humedad para un gotero superficial puntual sobre el plano r - z . Los parámetros del suelo utilizados se resumen en la *tabla 1*.

Tabla 1. Parámetros usados para la validación del código a través de la solución analítica de Warrick (1974). Suelo Sable Dek (Elmaloglou & Diamantopoulos, 2009).

$\theta_s = 0.3$	$\theta_0 = 0.125$	$\alpha = 0.073 \text{ cm}^{-1}$	$\kappa = 0.577 \text{ cm/min}$	$k_s = 0.0975 \text{ cm/min}$
------------------	--------------------	----------------------------------	---------------------------------	-------------------------------

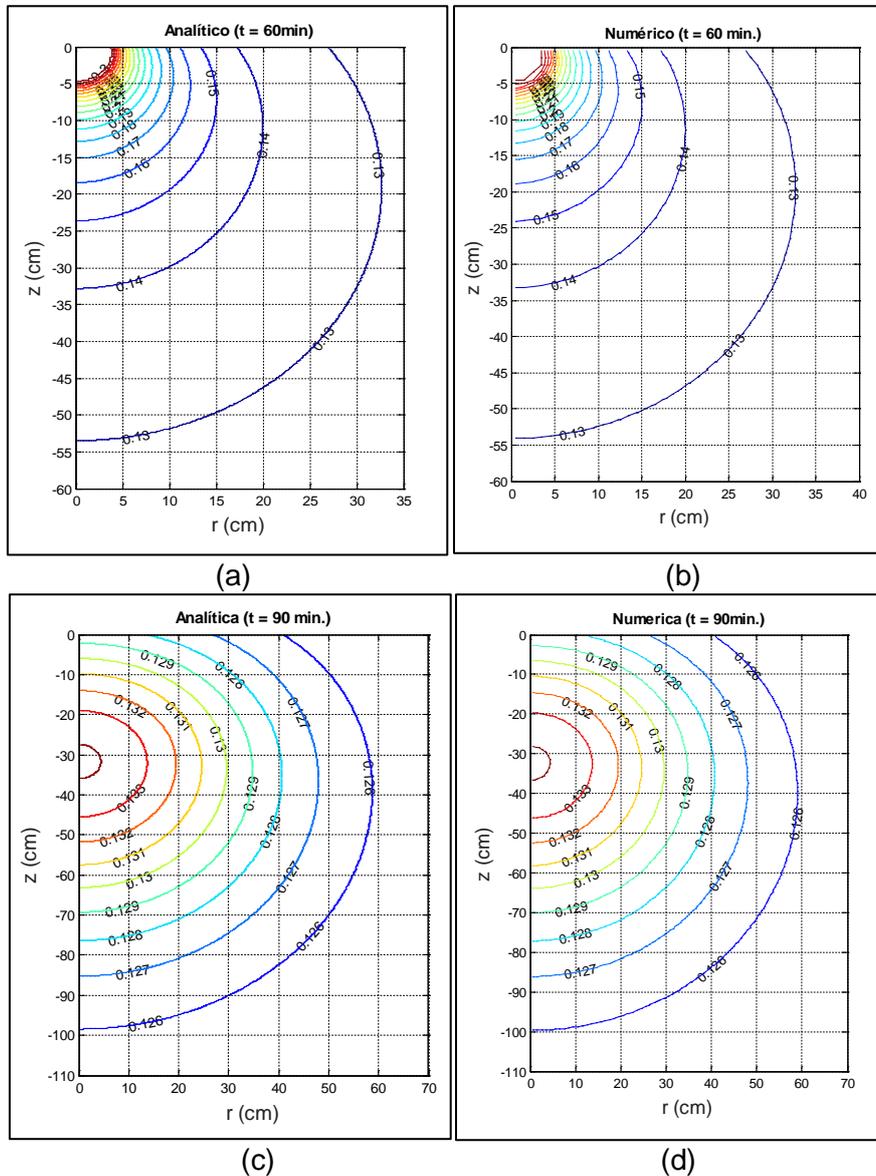


Figura 1. Contenido de humedad después de 60 minutos de riego superficial (a)-(b), y su redistribución 30 minutos después (c)-(d). A la izquierda se presenta la solución analítica de Warrick (1974); mientras que a la derecha los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto. Caudal: $q_i = 3 \text{ L/h}$.

Validación a través de Hydrus 2D/3D.

La figura 2 muestra la infiltración total de agua en el suelo en función del tiempo, obtenida con nuestro programa (puntos) y su comparación con Hydrus 2D/3D (líneas continuas). En este caso, el riego por goteo es superficial y está sometido a condiciones de saturación sobre un disco de radio r_0 . Se presentan datos de comparación de resultados para discos de diferente radio. Se puede ver como el volumen infiltrado es mayor cuanto más grande es el tamaño de la fuente. Se han utilizado las funciones de van Genuchten-

Mualem para caracterizar el suelo (Mualem, 1976 & van Genuchten, 1980). Los parámetros correspondientes a estas funciones se han tomado del catálogo de Carsel & Parish (1988).

Tabla 2. Parámetros del suelo para la validación con software comercial Hydrus 2D/3D. Suelo Franco (Catálogo de Carsel & Parish, 1988).

Tipo suelo	θ_s	θ_r	θ_0	$\alpha(cm^{-1})$	$k_s(cm/min)$	m	n
Franco	0.43	0.078	0.2	0.036	0.0173	0.359	1.56

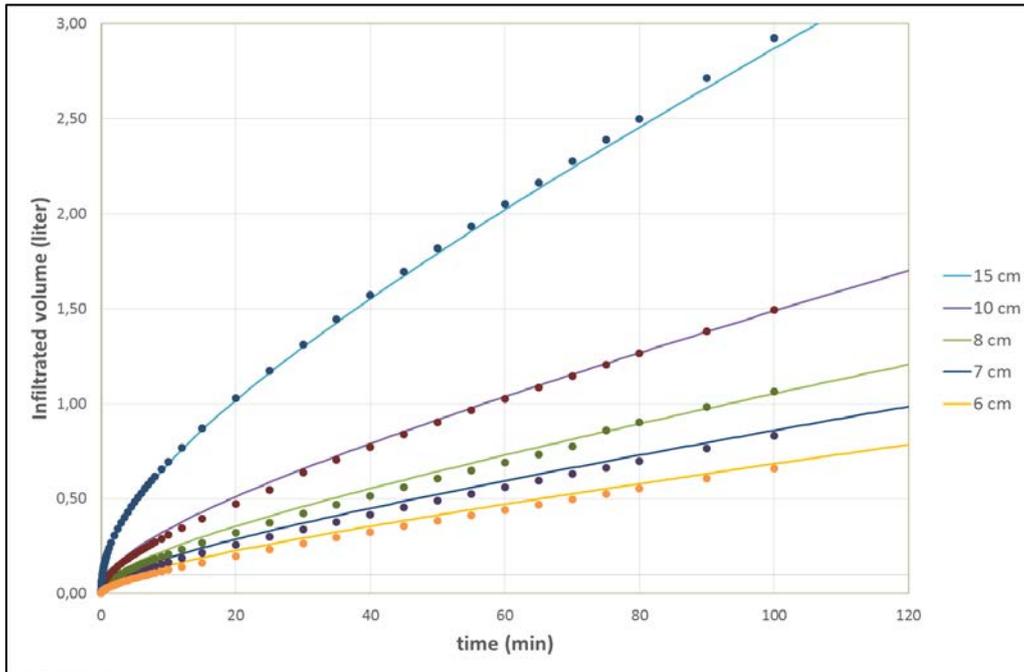


Figura 2. Infiltración total en función del tiempo para diversas pruebas, con distintos tamaños de la fuente superficial circular, desde un radio mínimo de 6 cm (amarillo), hasta un radio máximo de 15 cm (azul). Suelo Franco, catálogo de Carsel & Parish (1988). Las líneas corresponden a la aproximación numérica de Hydrus-3D, mientras que los puntos son los datos arrojados por nuestro programa.

Validación de soluciones aproximadas.

La *figura 3* muestra resultados obtenidos con el programa propuesto (rombos) y a través de las expresiones aproximadas (líneas continuas) para una semiesfera de radio $r_0 = 2\text{ cm}$. Se representa el volumen infiltrado en función del tiempo. Las líneas discontinuas representan la prolongación de los límites de las soluciones aproximadas para tiempos pequeños y muy grandes de infiltración (ecuaciones [5a-5b]). El tipo de suelo utilizado es el mismo que hemos presentado en la *tabla 2*.

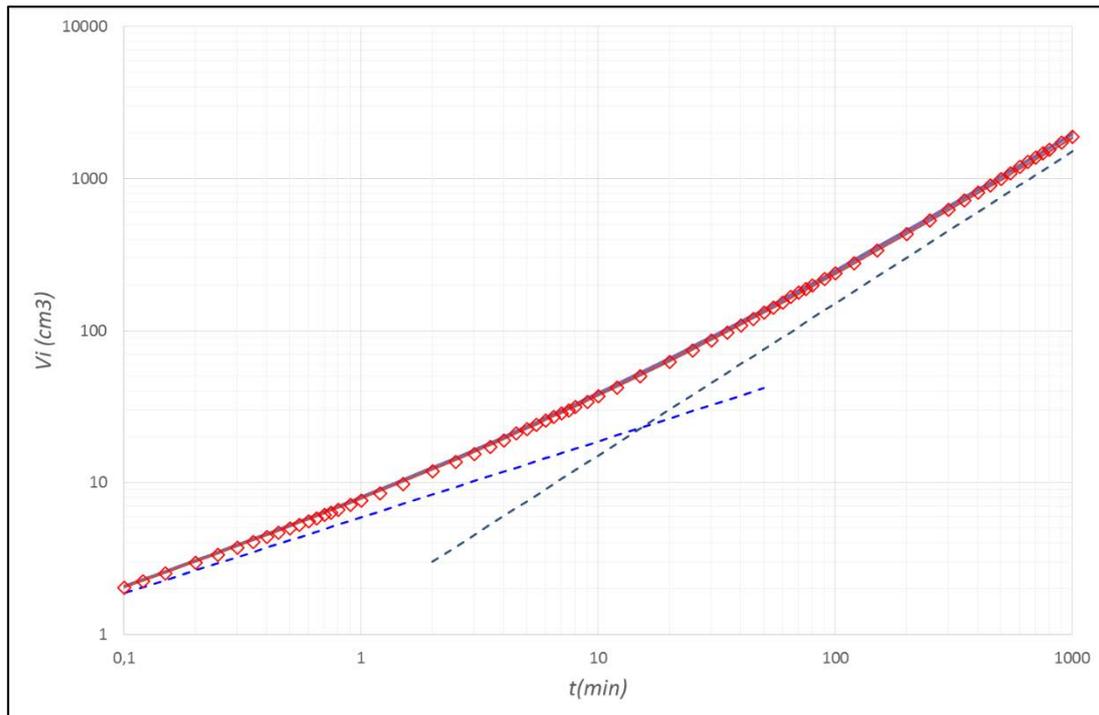


Figura 3. Representación del volumen infiltrado en función del tiempo para una fuente superficial de 2 cm de radio. La línea continua representa los resultados obtenidos a través de la solución aproximada propuesta, mientras que los símbolos (rombos) representan el resultado que arroja el programa validado anteriormente, sin la consideración de la gravedad. Las líneas discontinuas azules representarían la prolongación de las soluciones aproximadas en los límites para tiempos pequeños y grandes, ecuaciones [5.a & 5.c].

Se concluye que la expresión 5 es útil para calcular el volumen infiltrado en función del tiempo, aunque las hipótesis consideradas no sirven para determinar la distribución de agua en el suelo. En un futuro presentaremos soluciones simplificadas desde discos y considerando la acción de la gravedad.

Aplicaciones del programa.

En este epígrafe vamos a presentar dos estudios realizados con el programa propuesto con el objeto de mostrar su capacidad. En un primer lugar, se muestran resultados de infiltración y redistribución del agua (*Figura 4*); en segundo lugar, se presenta una gráfica con resultados para la sobrepresión de una fuente sub-superficial (*Figura 5*). En ambos casos se han utilizado los parámetros del suelo que resume la *tabla 2*, y distintas condiciones de caudal infiltrado que se han definido previamente.

La *figura 4* representa el frente mojado para dos simulaciones con caudales distintos después de haber infiltrado un volumen total de 6 litros. Las líneas discontinuas representan la posición del frente después de 24 horas de redistribución. El frente se ha considerado ubicado en los puntos en los que la humedad era un uno por ciento mayor del contenido de humedad inicial. Se puede observar como la fuente de mayor caudal genera más charco en superficie y alcanza menos profundidad.

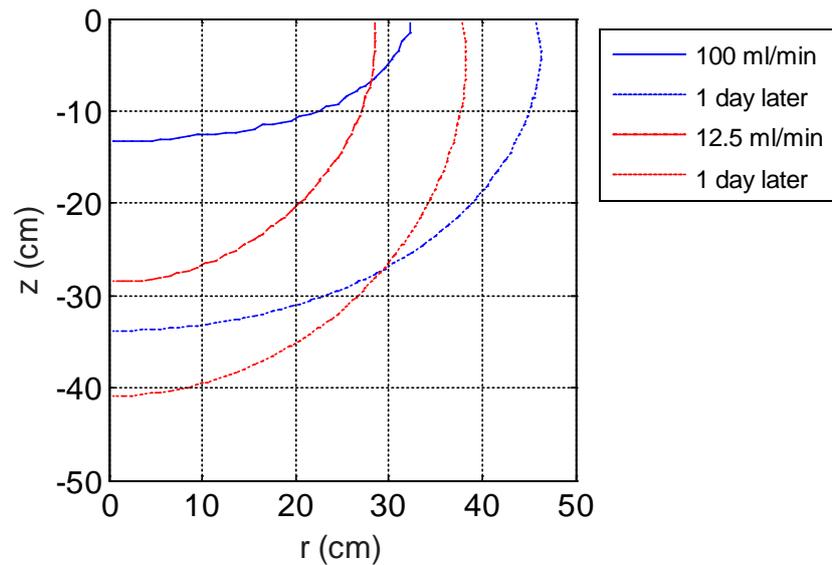


Figura 4. Posición del frente mojado para dos fuentes de distinto caudal: $q_1 = 0.75$ L/h y $q_2 = 6$ L/h al acabar el riego (líneas continuas) y un día después de finalizar el riego (líneas discontinuas). El volumen total infiltrado es el mismo en ambos casos (6 L).

La figura 5 representa la sobrepresión en un entorno de una fuente sub-superficial, a una distancia de dos centímetros del emisor. Se observa cómo cuanto mayor es el caudal infiltrado mayor es la sobrepresión y además más tarde se alcanza un régimen estacionario de presión constante.

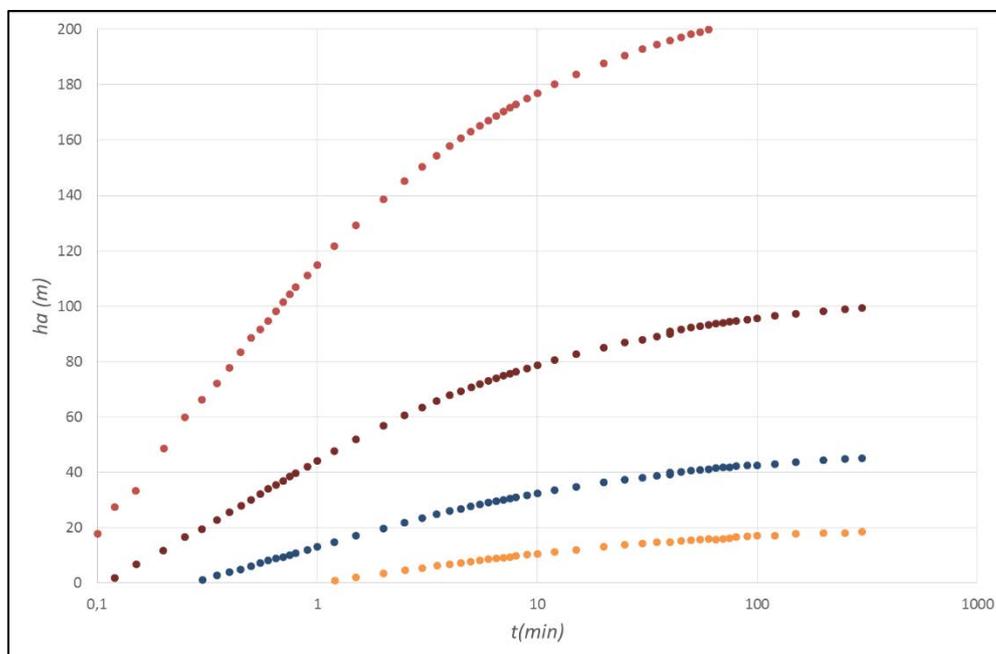


Figura 5. Sobrepresión en función del tiempo para cuatro simulaciones realizadas con distinto caudal: $q_1 = 0.75$ L/h, $q_2 = 1.5$ L/h, $q_3 = 3.0$ L/h y $q_4 = 6.0$ L/h. El resto de parámetros utilizados se resumen en la tabla 2.

5- Conclusiones

A la luz de las pruebas realizadas concluimos que el código es capaz de reproducir la dinámica de un proceso de filtración en el suelo ya sea en condiciones de infiltración o redistribución, y para fuentes superficiales o sub-superficiales. Las soluciones aproximadas propuestas permiten realizar algunos cálculos de forma eficiente y pensamos que pueden ahorrar tiempo de cálculo, además de ilustrar con más claridad el comportamiento del caso estudiado.

La adaptación del código a los distintos problemas físicos es más sencilla, en muchos casos, que la de otros programas comerciales como Hydrus 2D/3D. De este modo, el programa propuesto nos permite definir condiciones de resolución espacio-temporal y de flujo que pueden ser constantes o variables. Así mismo, el código está preparado para desarrollar simulaciones con condiciones de contorno variables como la evolución del charco en riego superficial, lo que supone un mejor ajuste a la realidad del problema físico.

Las soluciones aproximadas para estudios específicos como el que aquí hemos presentado para fuentes semiesféricas también se han desarrollado para otro tipo de condiciones como es el riego sub-superficial y condiciones para una fuente circular (disco) en superficie. El programa nos ha permitido discriminar las que se ajustan aceptablemente y, de esta forma, uniendo la simulación y las expresiones simplificadas se espera abordar el estudio del flujo del agua en el suelo de una manera eficiente.

Bibliografía

- [1] Buckingham, E. (1907). Studies on the movement of soil moisture. Bull. 38. U. S. Dept. of Agr. Bureau of Soils, Washington D. C.
- [2] Carsel, R., Parrish, R. (1988). Developing joint probability of soil water retention characteristics. *Water Resources Research*. 24(5), 755-769.
- [3] Carnahan, B., Luther, H. A., Wilkes, J. O. (1979). Cálculo numérico: métodos y aplicaciones. Copyright John Wiley & Sons. Editorial Rueda, Madrid.
- [4] Darcy, H. (1856). Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Dalmont, Paris.
- [5] Elmaloglou S, Diamantopoulos E. (2009). Simulation of soil water dynamics under subsurface drip irrigation from line sources. *Agricultural Water Management* 96. 1587–1595.
- [6] Mualem Y. (1976). A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resource journal*. 12, 513-522.
- [7] Neuman S.P. (1976). Wetting front pressure head in the infiltration model of Green and Ampt. *Water Resources Research*. 12, 564-565.
- [8] Richards, L.A. (1931). Capillary conduction of liquids in porous mediums. *Physics*. 1, 318–333.
- [9] Sayah B, M Gil-Rodríguez and L Juana, 2016. Development of one-dimensional solutions for water infiltration. Analysis and parameters estimation. *Journal of Hydrology*. 535, 226-234.
- [10] Šimůnek, J., van Genuchten M. and Šejna M. (2006). The HYDRUS Software Package for Simulating the Two- and Three-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media, Technical Manual Version 1.0, University of California Riverside, Riverside, CA, 3PC Progress, Prague, Czech Republic.
- [11] van Genuchten M. T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*. 44 (5), 892-898.
- [12] Warrick, A. W. (1974). Time-dependent linearized infiltration I. Point sources. *Soil Sci Soc Am Pro*. 38, 382-386.
- [13] Warrick, A. W., Lomen, D, O. (1976). Time-dependent Linearized Infiltration III: Strip and Disc Sources. *Soil Sci Soc Am J*. 40, 639-643.